

# Лекция 1.

Косовский Н.Н.

11 февраля 2020 г.

## 1 Метрическое пространство. Метрика.

о Определение:

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  — метрика, если:

1.  $d(x, y) \geq 0$ ;  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
3.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ .

$(X, d)$  — метрическое пространство.

### 1.1 Примеры метрик.

1.  $V$  - векторное пространство,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  - скалярное произведение.

$$\triangleleft d(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \sqrt{\langle \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \rangle} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$$

2.  $(E, V)$  — аффинное пространство, скалярное произведение на  $V$ .

3. о Определение:

Норма  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $\|\vec{v}\| \geq 0$ ;  $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
2.  $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| * \|\vec{v}\|$
3.  $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\|$

Тогда  $d(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$  - метрика.

$$3.1 \ V = \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

$$\|x\|_{\inf} = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

4.  $S^2$  — сфера, 2 метрики:

$$1. \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

2. Угловая метрика.

## 2 Открытые множества. Топологические пространства.

### 2.1 Открытые множества. Свойства.

○ Определения:

1.  $R > 0$ ,  $B(x_0, R) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid d(x_0, x) < R\}$  — *открытый шар радиуса  $R$  с центром  $x_0$ .*
2.  $S(x_0, R) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid d(x_0, x) = R\}$  — *сфера.*
3.  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $U \subseteq X$   
 $U$  — *открыто*, если:  
$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

#### 2.1.1 Теорема об открытости шара.

Открытый шар открыт.

**Доказательство:**

$\triangleleft x \in B(x_0, R).$

$\varepsilon := R - d(x_0, x) > 0$  (т.к.  $x \in B(x_0, R) \Rightarrow d(x_0, x) < R$ )

Пусть  $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon = R - d(x_0, x)$

$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < R \Rightarrow y \in B(x_0, R) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, R).$

*QED.*

#### 2.1.2 Теорема о свойствах $\Omega$

$\Omega \stackrel{def}{=} \{U \subseteq X \mid U \text{ — открыто}\};$   $X$  — метрическое пространство.

Тогда:

1.  $\emptyset, X \in \Omega$
2.  $U, V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3.  $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

**Доказательство:**

1.  $\emptyset$  — очевидно. 2)  $\triangleleft \varepsilon = 1$  (или любой другой, далее очевидно.)

2.  $\triangleleft y \in U \cap V$

$y \in U \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall x \in X d(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow x \in U$

$y \in V \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0 : \forall x \in X d(x, y) < \varepsilon_2 \Rightarrow x \in V$

$\triangleleft \varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$

Далее очевидно.

3.  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha \in I : x \in U_\alpha \Rightarrow \exists \varepsilon : \forall y \in X d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U_\alpha \Rightarrow y \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

*QED.*

## 2.2 Топологическое пространство. Топология.

○ Определение:

$(X, \Omega)$  — топологическое пространство, если:

1.  $\emptyset, X \in \Omega$
2.  $U, V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3.  $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

$\Omega$  — топология, элементы  $\Omega$  — открытые.

### 2.2.1 Примеры топологических пространств.

1.  $\Omega = 2^X$  — дискретная топология.

• Упражнение: Доказать, что дискретной метрике  $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$  соответствует дискретная топология.

2.  $\Omega = \{\emptyset, X\}$  — антидискретная топология
3.  $X = \mathbb{R}$ ;  $\Omega = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  — стрелка

## 2.3 Окрестности. Теорема о дополнении подмножества.

○ Определения:

$x_0 \in X$ .

1. Окрестность точки  $x_0$  — произвольное открытое множество, содержащее  $x_0$ .
2.  $\varepsilon$ -окрестность  $(.)$   $x_0$  —  $B(x_0, \varepsilon)$ . Определено только для метрических пространств.

### 2.3.1 Теорема о дополнении подмножества

$F \subset X$ ;  $X$  — метрическое пространство

1.  $(\forall x \forall \varepsilon (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap F \neq \emptyset) \Rightarrow x \in F) \Leftrightarrow X \setminus F$  — открыто.
2.  $X$  — топологическое пространство.  
 $((\forall U_x \text{ — отк. } U_x \cap F \setminus \{x\} \neq \emptyset) \Rightarrow x \in F) \Leftrightarrow X \setminus F$  — открыто.

**Доказательство:**

1. Если  $X$  — метрическое пространство, то  $1. \Leftrightarrow 2.$  :  
 $1. \Leftarrow 2.$  : — очевидно ;  $1. \Rightarrow 2.$  :  
 $x \notin F \text{ — отк. } \Rightarrow \exists \varepsilon : B(x, \varepsilon) \subseteq U_x \Rightarrow ((B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap F \subset U_x \setminus \{x\} \cap F \Rightarrow U_x \setminus \{x\} \cap F \neq \emptyset.$

*QED.*

Достаточно доказать (2.)

1.  $\Rightarrow$ , т.е.  $x \notin F \Rightarrow \exists U_x : U_x \setminus \{x\} \cap F = \emptyset \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow U_x \subseteq X \setminus F \Rightarrow \bigcup_{x \in X \setminus F} U_x \subseteq X \setminus F$  "  $\supseteq$  тоже (оч.),  
 $\Rightarrow \bigcup_{x \in X \setminus F} U_x = X \setminus F$ , но  $\bigcup U$  - откp.

*QED.*

2.  $\Leftarrow$ :

Пусть  $X \setminus F$  - откp. и  $\forall U_x$  - откp.  $(U_x \setminus \{x\} \cap F \neq \emptyset)$

Допустим, что  $x \notin F \Rightarrow x \in (X \setminus F)$

Тогда  $\emptyset \neq ((X \setminus F) \setminus \{x\}) \cap F = ((X \setminus F) \cap F) \setminus \{x\} = \emptyset$ . Противоречие.<sup>1</sup>

*QED.*

---

<sup>1</sup>Последняя часть доказательства является авторской. Лекционный вариант утерян бесследно.