Лекция 1.

Косовский Н.Н.

18 февраля 2020 г.

Содержание

1 Замкнутые множества.

<u>○ *Определение:*</u>

F — *Замкнуто* $\Longleftrightarrow X\backslash F$ — открыто.

1.1 Теорема о множестве замкнутых множеств

$\mathcal{F}$ — множество замкнутых множеств.

Тогда:

1. $\emptyset,\ X \in \mathcal{F}$
2. $F,\ G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$
3. $F_\alpha \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Доказательство:

1. очевидно: $(X\backslash X = \emptyset \;\; ; \;\; X\backslash\emptyset = X)$
2. $F \cup G$ — замкнуто $\Longleftrightarrow X\backslash(F \cup G)$ —открыто.
   Но $X\backslash(F \cup G) = (X\backslash F) \cap (X\backslash G)$ – открыто как пересечение двух открытых.
3. $X\backslash(\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I}(X\backslash F_\alpha)$ — рассуждение аналогично (2.)

1.2 Теорема о соответствующей топологии

Пусть $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ такое, что:

1. $\emptyset,\ X \in \mathcal{F}$
2. $F,\ G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$
3. $F_\alpha \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Тогда существует единственная топология Ω такая, что $\mathcal{F}$ - множество замкнутых множеств.

Доказательство:

1. Докажем единственность:
   Если такая топология Ω существует, то $\Omega = \{X\backslash F|\ F \in \mathcal{F}$
   Действительно, каждое такое множество должно входить в Ω, и ни одно другое в неё входить не может.
   Таким образом, Ω - единственная возможная топология по построению.
2. Теперь докажем, что построенная Ω действительно является топологией. Для этого проверим 3 необходимых свойства из определения.
   (a) $\emptyset,\ X \in \Omega$ – очевидно.

(b) $U = X\setminus F, \quad V = X\setminus G; \quad F,\ G \in \mathcal{F}$

$U \cap V = (X\setminus F) \cap (X\setminus G) = X\setminus(F \cup G) \Rightarrow U \cap V \in \Omega$. – здесь мы пользуемся свойством (2).

(c) $U_\alpha = X\setminus F_\alpha; \quad F_\alpha \in \mathcal{F}$

$\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in I} X\setminus F_\alpha = X\setminus \bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha$