Лекция 1.

Косовский Н.Н.

11 февраля 2020 г.

Содержание

1 Метрическое пространство. Метрика.

○ *Определение:*

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ — *метрика*, если:

1. $d\left(x,y\right) \geq 0; \quad d\left(x,y\right) = 0 \Longleftrightarrow x = y,$
2. $d\left(x,y\right) = d\left(y,x\right),$
3. $d\left(x,y\right) + d\left(y,z\right) \geq d(x,z).$

(X, d) — *метрическое пространство.*

1.1 Примеры метрик.

1. V - векторное пространство, $< \cdot, \cdot >$ - скалярное произведение.
   $\lessdot \quad d(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \sqrt{< \vec{v_1} - \vec{v_2}, \vec{v_1} - \vec{v_2} >} = |\vec{v_1} - \vec{v_2}|$
2. (E, V) – аффинное пространство, скалярное произведение на V.
3. ○ *Определение:*
   Норма $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$
   1. $||\vec{v}|| \geq 0; \quad ||\vec{v}|| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
   2. $||\lambda \vec{v}|| = |\lambda| * ||\vec{v}||$
   3. $||\vec{v_1} + \vec{v_2}|| \leq ||\vec{v_1}|| + ||\vec{v_2}||$

   Тогда $d(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = ||\vec{v_1} - \vec{v_2}||$ - метрика.

   3.1 $V = \mathbb{R}^n, \quad ||x||_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1$

   $$||x||_{\inf} = \underset{1 \leq i \leq n}{max} (|x_i|)$$
4. S^2 — сфера, 2 метрики:

   1.$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (Стандартная метрика),

   2. Угловая метрика.

2 Открытые множества. Топологические пространства.

2.1 Открытые множества. Свойства.

○ *Определения:*

1. $R > 0,\ B(x_0, R) \stackrel{def}{=} \{x \in X|\ \ d(x_0, x) < R\}$ —*открытый шар радиуса R с центром x_0.*
2. $S(x_0, R) \stackrel{def}{=} \{x \in X|\ \ d(x_0, x) = R\}$ —*сфера.*
3. (X, d) –метрическое пространство, $U \subseteq X$
   U – *открыто*, если:
   $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : \quad B(x, \varepsilon) \subseteq U.$

2.1.1 Теорема об открытости шара.

Открытый шар открыт.

Доказательство:

Рассмотрим $x \in B(x_0, R)$.

$\varepsilon := R - d(x_0, x) > 0$ (т.к. $x \in B(x_0, R) \Rightarrow d(x_0, x) < R$)

Пусть $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon = R - d(x_0, x)$

$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < R \Rightarrow y \in B(x_0, R) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, R)$.

QED.

2.1.2 Теорема о свойствах Ω

$\Omega \stackrel{def}{=} \{U \subseteq X|\ \ U$–открыто$\}$; $\ X$–метрическое пространство.

Тогда:

1. $\emptyset,\ X \in \Omega$
2. $U,\ V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3. $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

Доказательство:

1. 1) $\emptyset$—очевидно. 2) Рассмотреть для каждого элемента $\varepsilon = 1$ (или любой другой, далее очевидно.)
2. Рассмотрим $y \in U \cap V$

   $y \in U \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall x \in X \ \ d(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow x \in U$

   $y \in V \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0 : \forall x \in X \ \ d(x, y) < \varepsilon_2 \Rightarrow x \in V$

   $\lhd \varepsilon := min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

   Далее очевидно.
3. $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \Rightarrow \exists \varepsilon : (\forall y \in X \ \ d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U_i \Rightarrow y \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha)$

QED.

2.2 Топологическое пространство. Топология.

○ *Определение:*

(X, Ω)— *топологическое пространство*, если:

1. $\emptyset, \ X \in \Omega$
2. $U, V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3. $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

Ω – *топология*, элементы Ω – *открытые.*

2.2.1 Примеры топологических пространств.

1. $\Omega = 2^X$ – *дискретная топология.*

   • *Упражнение:* Доказать, что *дискретной метрике* $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ соответствует дискретная топология.

2. $\Omega = \{\emptyset, \ X\}$ - *антидискретная топология*
3. $X = \mathbb{R}; \ \ \Omega = \{(a, +\inf) | \ \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \ \mathbb{R}\}$ - *стрелка*

2.3 Окрестности. Теорема о дополнении подмножества.

○ *Определения:*

$x_0 \in X$.

1. *Окрестность точки* x_0 — произвольное открытое множество, содержащее x_0.
2. ε*–окрестность (.)* x_0–$B(x_0, \varepsilon)$. Определено только для метрических пространств.

2.3.1 Теорема о дополнении подмножества

$F \subset X$; X — метрическое пространство

1. $(\forall x \ \ \forall \varepsilon \ \ (B(x, \varepsilon) \backslash \{x\} \cap F \neq \emptyset) \Rightarrow x \in F) \Longleftrightarrow X \backslash F$–открыто.
2. X— топологическое пространство.

   $((\forall U_x$—откр. $U_x \cap F \backslash \{x\} \neq \emptyset) \Rightarrow x \in F) \Longleftrightarrow X \backslash F$ — открыто.

Доказательство:

1. Если X— метрическое пространство, то 1. $\Longleftrightarrow$ 2. :

   1. $\Leftarrow$ 2. : – очевидно ; 1. $\Rightarrow$ 2. :

   Рассмотрим U_x –откр. $\Rightarrow \exists \varepsilon : B(x, \varepsilon) \subseteq U_x \Rightarrow ((B(x, \varepsilon) \backslash \{x\}) \cap F \subset U_x \backslash \{x\} \cap F \Rightarrow U_x \backslash \{x\} \cap F \neq \emptyset$.

QED.

Достаточно доказать (2.)

1. $\underline{\Rightarrow}$, т.е. $x \notin F \Rightarrow \exists U_x : U_x \backslash \{x\} \cap F = \emptyset \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow U_x \subseteq X \backslash F \Rightarrow \bigcup\limits_{x \in X \backslash F} U_x \subseteq X \backslash F$; "$\supseteq$"- тоже(оч.), $\Rightarrow \bigcup\limits_{x \in X \backslash F} U_x = X \backslash F$, но $\cup U$ - откр.

$QED.$

2. $\underline{\Leftarrow}$:

   Пусть $X \backslash F$–откр. и $\forall U_x$–откр. $(U_x \backslash \{x\} \cap F \neq \emptyset)$

   Допустим, что $x \notin F \;\Rightarrow\; x \in (X \backslash F)$

   Тогда $\emptyset \neq ((X \backslash F) \backslash \{x\}) \cap F = ((X \backslash F) \cap F) \backslash \{x\} = \emptyset$. Противоречие.[1]

$QED.$

[1] Последняя часть доказательства является авторской. Лекционный вариант утерян бесследно.