Лекция 2.

Косовский Н.Н.

18 февраля 2020 г.

Содержание

1 Замкнутые множества.

◦ *Определение:*

F — *Замкнуто* $\Longleftrightarrow X\backslash F$ — открыто.

1.1 Теорема о множестве замкнутых множеств

$\mathcal{F}$ — множество замкнутых множеств.

Тогда:

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{F}$
2. $F,\ G \in \mathcal{F} \Longrightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$
3. $F_\alpha \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Доказательство:

1. очевидно: $(X\backslash X = \varnothing \ \ ; \ \ X\backslash\varnothing = X)$
2. $F \cup G$ — замкнуто $\Longleftrightarrow X\backslash(F \cup G)$ —открыто.
   Но $X\backslash(F \cup G) = (X\backslash F) \cap (X\backslash G)$ – открыто как пересечение двух открытых.
3. $X\backslash(\bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I}(X\backslash F_\alpha)$ — рассуждение аналогично (2.)

1.2 Теорема о соответствующей топологии

Пусть $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ такое, что:

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{F}$
2. $F,\ G \in \mathcal{F} \Longrightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$
3. $F_\alpha \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Тогда существует единственная топология Ω такая, что $\mathcal{F}$ - множество замкнутых множеств.

Доказательство:

1. Докажем единственность:
   Если такая топология Ω существует, то $\Omega = \{X\backslash F|\ F \in \mathcal{F}\}$.
   Действительно, каждое такое множество должно входить в Ω, и ни одно другое в неё входить не может.
   Таким образом, Ω - единственная возможная топология по построению.
2. Теперь докажем, что построенная Ω действительно является топологией. Для этого проверим 3 необходимых свойства из определения.
   (a) $\varnothing,\ X \in \Omega$ – очевидно.

(b) $U = X \backslash F, \quad V = X \backslash G; \quad F,\ G \in \mathcal{F}$

$U \cap V = (X \backslash F) \cap (X \backslash G) = X \backslash (F \cup G) \Longrightarrow U \cap V \in \Omega$. – здесь мы пользуемся свойством (2).

(c) $U_\alpha = X \backslash F_\alpha; \quad F_\alpha \in \mathcal{F}$

$\underset{\alpha \in I}{\cup} U_\alpha = \underset{\alpha \in I}{\cup} X \backslash F_\alpha = X \backslash \underset{\alpha \in I}{\cap} F_\alpha$ – здесь мы пользуемся свойством (3).

2 Внутренность, замыкание и граница

◦ *Определения:*

$A \subseteq X$

1. x — *Внутренняя точка* A, если $\exists\ U_x \in \Omega:\ \ U_x \subseteq A$, т.е. точка входит в A с некоторой окрестностью. Заметим, что условие можно переписать как $(U_x \cap (X \backslash A)) = \varnothing$

2. x — *Внешняя точка* A, если $\exists\ U_x \in \Omega:\ \ U_x \subseteq X \backslash A$, т.е. точка входит в дополнение A с некоторой окрестностью. Иначе говоря, $U_x \cap A = \varnothing$.

3. x — *Граничная точка* A, если $\forall\ U_x \in \Omega:\ \ (U_x \cap A \neq \varnothing)\ \&\ (U_x \cap (X \backslash A) \neq \varnothing)$, т.е. любая окрестность пересекает и A, и дополнение A.

   • *Упражнение:* Доказать, что в случае метрических пространств определения останутся эквивалентными при замене окрестностей на шаровые.

4. x — *Точка прикосновения* A, если $\forall\ U_x\ \ U_x \cap A \neq \varnothing$

5. *Внутренность* $Int(A)$ — наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A.

   Примечание: Также используется обозначение $\mathring{A}$.

6. *Замыкание* $Cl(A)$ — наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A.

   Примечание: Также используется обозначение $\overline{A}$ и $cl(A)$.

7. *Граница* ∂A — множество граничных точек A.

   Примечание: Также используется обозначение $Fr(A)$. Если необходимо подчеркнуть, к какому всеобъемлещему множеству относится граница, пишут $\partial_X A$.

2.1 Существование внутренности и замыкания

1. $Int(A)$ существует и $Int(A) \overset{1}{=} \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U \overset{2}{=} \{\ x \mid\ \ x\text{– внутр.}\}$

   Доказательство:

   1. Первое равенство справедливо, т.к. объединение открытых множеств открыто, содержится в A и любое открытое подмножество A лежит в нем по определению.

   2. Покажем, что второе множество содержится в первом и наоборот.

   (a) Пусть x — внутренняя точка A. Тогда существует $U_x \subseteq A$. Но $U_x \subseteq \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U$, значит $x \in \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U$, то есть $\{\ x \mid\ \ x\text{– внутр.}\} \subseteq \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U$

   (b) Пусть точка x лежит в нашем объединении. Значит существует открытое множество, в котором она лежит. Но тогда x - внутренняя точка A, то есть любая точка из объединения является внутренней, а значит $\{\ x \mid\ \ x\text{– внутр.}\} \supseteq \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U$.

   Значит множества действительно равны. Заметим, что иногда последняя часть равенства используется в качестве определения.

2. $Cl(A)$ существует и $Cl(A) \overset{1}{=} \bigcap\limits_{\substack{F \supseteq A, \\ F \in \mathcal{F}}} F \overset{2}{=} \{x| \ \ x$—т. прикосн. A$\}$.

Доказательство:

$R := \bigcap\limits_{\substack{F \supseteq A, \\ F \in \mathcal{F}}} F \supseteq A$, R - замкнуто как пересечение замкнутых. Если замкнутое множество G содержит A, то G содержит и R, ведь G входит в пересечение. Значит R - действительно наименьшее (по включению) замкнутое множество, содержащее A.

2.2 Свойства замыкания, внутренности и границы.

1. $X \backslash Cl(A) = Int(X \backslash A)$. - это очевидно, но давайте докажем:

   Доказательство:

   $X \backslash Cl(A) = X \backslash (\cap F)^1 = \cup (X \backslash F) = [U = X \backslash F \text{ -открыто}] = \bigcup\limits_{U \subseteq (X \backslash A)} U = Int(X \backslash A)$.

2. $X \backslash Cl(A)$ - множество всех внешних точек A. Следует напрямую из пункта 1.

3. $X \backslash Int(A) = Cl(X \backslash A)$. Доказывается абсолютно аналогично пункту 1.

Выпишем ещё несколько свойств, оставив часть из них читателю в качестве упражнения.

1. (a) A - откр. $\Longleftrightarrow \ A = Int(A)$

   (b) A - замкнуто $\Longleftrightarrow A = Cl(A)$

2. (a) $A \subseteq B \Longrightarrow Int(A) \subseteq Int(B)$

   (b) $A \subseteq B \Longrightarrow Cl(A) \subseteq Cl(A)$

3. (a) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$

   (b) $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$

4. (a) $Int(A \cup B) \supseteq Int(A) \cup Int(B)$

   (b) $Cl(A \cap B) \subseteq Cl(A) \cap Cl(B)$

Приведем лишь доказательства пунктов (a), пункт (b) же выводится либо из (a), либо аналогично (a).
Итак, начнем.

1. Как и всегда в таких теоремах, разобьем утверждение на 2 и докажем их по отдельности.

   $\underline{\Leftarrow}$: На самом деле очевидно, т.к. $A = Int(A) = \cup U_x$ — открыто как объединение открытых.

   $\underline{\Rightarrow}$: — открыто, $A \subseteq A$. Значит A входит в объединение открытых подмножеств, содержащихся в A, откуда очевидно $A = Int(A)$.

2. Воспользуемся другим определением внутренности: $Int(A) = \{ \ x| \ \ x$ - внутр. в A$\}$.

   Заметим, что если x - внутр. в A, $A \subseteq B$, то x - внутр. в B ($U_x \subseteq A \subseteq B$). Откуда $Int(A) = \{ \ x| \ \ x$ - внутр. в A$\} \subseteq \{ \ x| \ \ x$ - внутр. в B$\} = Int(B)$.

[1]Здесь и далее индексы объединения/пересечения/суммирования пишутся только в первом употреблении и далее опускаются чтобы не загромождать текст. Как правило всё ясно из контекста и без них.

3. Существует по меньшей мере 2 доказательства данного факта. Мы приведем лишь один, оставив второй на совесть читателя.

   Как и всегда в таких ситуациях, разобьем утверждение на 2 и докажем их по отдельности.

   $\underline{\subseteq}$: $A \cap B \subseteq A \Longrightarrow Int(A \cap B) \subseteq Int(A)$ (по пункту (2)).

   Аналогично, $Int(A \cap B) \subseteq Int(B)$, откуда $Int(A \cap B) \subseteq Int(A) \cap Int(B)$.

   $\underline{\supseteq}$:
$$\begin{cases} A \supseteq Int(A) \\ B \supseteq Int(B) \end{cases} | \Longrightarrow A \cap B \supseteq Int(A) \cap Int(B) \Longrightarrow Int(A \cap B) \supseteq Int(A) \cap Int(B)$$

   (здесь используются сразу пункты 1 и 2)

4. Пусть x — внутренняя точка A. Тогда она внутренняя и для $A \cup B$, значит $Int(A) \subseteq Int(A \cup B)$. Аналогично для $Int(B)$.

   Тогда $Int(A) \cup Int(B) \subseteq Int(A \cup B) \cup Int(A \cup B) = Int(A \cup B)$.

$QED.$

3 База топологии

$\circ$ *Определение:*

$(X,\ \Omega)$ - топологическое пространство. $\Sigma \subseteq \Omega$ — *База топологии*, если любой элемент из Ω представим в виде объединения некоторых элементов из Σ.

3.1 Критерий базы топологии Ω

Оказывается, что определение базы Σ для топологии Ω эквивалентно совокупности следующих двух условий:

1. $\forall U \in \Omega\ \forall x \in U \exists S \in \Sigma :\ x \in S \subseteq U$

2. $\forall S \in \Sigma :\quad S$ — откр.

Доказательство:

$\underline{\Rightarrow}$:

1. По условию, $\forall U \in \Omega\ \exists I :\ \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha \in \Sigma :\quad U = \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha$

   Тогда $x \in \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha_0 \in I :\ x \in S_{\alpha_0}$, но $S_{\alpha_0} \subseteq \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha = U$. $S = S_{\alpha_0}$ - подходит.

2. очевидно из определения.

$\underline{\Leftarrow}$:

По условию, $\forall x \in U \exists S_x \in \Sigma :\quad x \in S_x \subseteq U$

Но тогда $U \subseteq \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha \subseteq U \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha = U$.

$\bullet$ *Упражнение:* Докажите, что шары - база метрической топологии.

3.2 Критерий базы некоторой топологии

Оказывается, что Σ — база некоторой топологии тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. $\forall x \in X \ \exists S_x : \quad x \in S_x$
2. $\forall S_{1,2} \in \Sigma : \quad \forall x \in S_1 \cap S_2 \ \ \exists S_x \in \Sigma : \ x \in S_x \subseteq S_1 \cap S_2$

   Причем заданная топология единственна.

Доказательство:

$\underline{\Rightarrow}$:

1. $\forall x \in X \in \Omega \Longrightarrow \ \exists I : \ S_\alpha \in \Sigma \ \ \& \ \ X = \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha$

   $| \Rightarrow \quad \forall x \in X \exists \alpha : \quad x \in S_\alpha$.
2. $S_1 \cap S_2$ - откр. $\Longrightarrow \quad \exists I : S_\alpha \in \Sigma;$

   $S_1 \cap S_2 = \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha \ \Longrightarrow \exists \alpha : \ x \in S_\alpha \subseteq S_1 \cap S_2.$

$\underline{\Leftarrow}$:

Если топология существует, то $\Omega = \underset{\alpha \in I}{\cap} S_\alpha | \ \ S_\alpha \in \Sigma$

Если это топология, то Σ — её база. Проверим, что Ω — действительно топология.

1) $\varnothing$ — "пустое объединение"$(|I| = 0)$.

   X есть по свойству 1. Например, можно взять объединение всех S из Ω.

2) $U, V \in \Omega, \iff U = \cup S_\alpha, V = \cup S_\beta$.

   $U \cap V = (\cup S_\alpha) \cap (\cup S_\beta) = \cup (S_\alpha \cap S_\beta) \boxed{=}$

   $\forall x \in S_\alpha \cap S_\beta \ \ \exists S_x : x \in S_x \subseteq S_\alpha \cap S_\alpha$ (свойство 2)

   $S_\alpha \cap S_\alpha \subseteq \underset{x \in S_\alpha \cap S_\alpha}{\cup} S_x \subseteq S_\alpha \cap S_\alpha$

   $\boxed{=} \underset{\alpha,\beta}{\cup} (\underset{x \in S_\alpha \cap S_\alpha}{\cup} S_x)$ - лежит в Ω. Объясним это в пункте 3, попутно доказав его.

3) $\underset{\beta \in I}{\cup} S_\beta = \underset{\beta \in I}{\cup} (\underset{\alpha \in I_b}{\cup} S_\alpha)$ - это объединение объединений множеств из базы. Поскольку объединение ассоциативно, это просто объединение множеств из базы. А значит, оно лежит в Ω.

QED.