Содержание

1 Метрическое пространство. Метрика.

∘ *Определение:*

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ — *метрика*, если:

1. $d\left(x, y\right) \geq 0; \ \ d\left(x, y\right) = 0 \Longleftrightarrow x = y,$
2. $d\left(x, y\right) = d\left(y, x\right),$
3. $d\left(x, y\right) + d\left(y, z\right) \geq d(x, z).$

(X, d) — *метрическое пространство.*

1.1 Примеры метрик.

1. V - векторное пространство, $< \cdot, \cdot >$ - скалярное произведение.
   $\lessdot \ \ d(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \sqrt{< \vec{v_1} - \vec{v_2}, \vec{v_1} - \vec{v_2} >} = |\vec{v_1} - \vec{v_2}|$
2. (E, V) – аффинное пространство, скалярное произведение на V.
3. ∘ *Определение:*
   Норма $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$
   1. $||\vec{v}|| \geq 0; \ \ ||\vec{v}|| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
   2. $||\lambda \vec{v}|| = |\lambda| * ||\vec{v}||$
   3. $||\vec{v_1} + \vec{v_2}|| \leq ||\vec{v_1}|| + ||\vec{v_2}||$

   Тогда $d(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = ||\vec{v_1} - \vec{v_2}||$ - метрика.

   3.1 $V = \mathbb{R}^n, \quad ||x||_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1$

   $$||x||_{\inf} = \underset{1 \leq i \leq n}{max}\left(|x_i|\right)$$
4. S^2 — сфера, 2 метрики:

   1.$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (Стандартная метрика),

   2. Угловая метрика.

2 Открытые множества. Топологические пространства.

2.1 Открытые множества. Свойства.

◦ *Определения:*

1. $R > 0, \ B(x_0, R) \overset{def}{=} \{x \in X| \ \ d(x_0, x) < R\}$ —*открытый шар радиуса* R *с центром* x_0.
2. $S(x_0, R) \overset{def}{=} \{x \in X| \ \ d(x_0, x) = R\}$ —*сфера*.
3. (X, d) –метрическое пространство, $U \subseteq X$
   U – *открыто*, если:
   $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : \quad B(x, \varepsilon) \subseteq U.$

2.1.1 Теорема об открытости шара.

Открытый шар открыт.

Доказательство:

Рассмотрим $x \in B(x_0, R)$.

$\varepsilon := R - d(x_0, x) > 0$ (т.к. $x \in B(x_0, R) \Rightarrow d(x_0, x) < R$)

Пусть $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon = R - d(x_0, x)$

$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < R \Rightarrow y \in B(x_0, R) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, R)$.

QED.

2.1.2 Теорема о свойствах Ω

$\Omega \overset{def}{=} \{U \subseteq X| \ \ U\text{–открыто}\}; \quad X$–метрическое пространство.

Тогда:

1. $\varnothing, \ X \in \Omega$
2. $U, \ V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3. $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

Доказательство:

1. 1) $\varnothing$—очевидно. 2) Рассмотреть для каждого элемента $\varepsilon = 1$ (или любой другой, далее очевидно.)
2. Рассмотрим $y \in U \cap V$

   $y \in U \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall x \in X \ \ d(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow x \in U$

   $y \in V \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0 : \forall x \in X \ \ d(x, y) < \varepsilon_2 \Rightarrow x \in V$

   $\triangleleft \varepsilon := min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

   Далее очевидно.
3. $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \Rightarrow \exists \varepsilon : (\forall y \in X \ \ d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U_i \Rightarrow y \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha)$

QED.

2.2 Топологическое пространство. Топология.

<u>○ *Определение:*</u>

(X, Ω)— *топологическое пространство*, если:

1. $\varnothing,\ X \in \Omega$
2. $U, V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3. $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

Ω – *топология*, элементы Ω – *открытые.*

2.2.1 Примеры топологических пространств.

1. $\Omega = 2^X$ – *дискретная топология.*

   <u>• *Упражнение:*</u> Доказать, что *дискретной метрике* $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ соответствует дискретная топология.
2. $\Omega = \{\varnothing,\ X\}$ - *антидискретная топология*
3. $X = \mathbb{R};\quad \Omega = \{(a, +\inf)|\ \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing,\ \mathbb{R}\}$ - *стрелка*

2.3 Окрестности. Теорема о дополнении подмножества.

<u>○ *Определения:*</u>

$x_0 \in X$.

1. *Окрестность точки* x_0 — произвольное открытое множество, содержащее x_0.
2. ε*–окрестность (.)* x_0–$B(x_0, \varepsilon)$. Определено только для метрических пространств.

2.3.1 Теорема о дополнении подмножества

$F \subset X$; X — метрическое пространство

1. $(\forall x\ \ \forall \varepsilon\ \ (B(x,\varepsilon)\backslash\{x\} \cap F \neq \varnothing) \Rightarrow x \in F) \Longleftrightarrow X\backslash F$–открыто.
2. X— топологическое пространство.

   $((\forall U_x$—откр. $U_x \cap F\backslash\{x\} \neq \varnothing) \Rightarrow x \in F) \Longleftrightarrow X\backslash F$ — открыто.

Доказательство:

1. Если X— метрическое пространство, то 1. $\Longleftrightarrow$ 2. :

   1. $\Leftarrow$ 2. : – очевидно ; 1. $\Rightarrow$ 2. :

   Рассмотрим U_x –откр. $\Rightarrow \exists \varepsilon : B(x,\varepsilon) \subseteq U_x \Rightarrow ((B(x,\varepsilon)\backslash\{x\}) \cap F \subset U_x\backslash\{x\} \cap F \Rightarrow U_x\backslash\{x\} \cap F \neq \varnothing$.

QED.

Достаточно доказать (2.)

1. $\underline{\Rightarrow}$, т.е. $x \notin F \Rightarrow \exists U_x : U_x \backslash \{x\} \cap F = \varnothing \Rightarrow U_x \cap F = \varnothing \Rightarrow U_x \subseteq X \backslash F \Rightarrow \bigcup\limits_{x \in X \backslash F} U_x \subseteq X \backslash F$; "$\supseteq$"- тоже(оч.), $\Rightarrow \bigcup\limits_{x \in X \backslash F} U_x = X \backslash F$, но $\cup U$ - откр.

   QED.

2. $\underline{\Leftarrow}$:

   Пусть $X \backslash F$–откр. и $\forall U_x$–откр. $(U_x \backslash \{x\} \cap F \neq \varnothing)$

   Допустим, что $x \notin F \;\Rightarrow\; x \in (X \backslash F)$

   Тогда $\varnothing \neq ((X \backslash F) \backslash \{x\}) \cap F = ((X \backslash F) \cap F) \backslash \{x\} = \varnothing$. Противоречие.[1]

   QED.

3 Замкнутые множества.

∘ *Определение:*

F — *Замкнуто* $\Longleftrightarrow X \backslash F$ — открыто.

3.1 Теорема о множестве замкнутых множеств

$\mathcal{F}$ — множество замкнутых множеств.

Тогда:

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{F}$
2. $F,\ G \in \mathcal{F} \Longrightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$
3. $F_\alpha \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Доказательство:

1. очевидно: $(X \backslash X = \varnothing \;\; ; \;\; X \backslash \varnothing = X)$
2. $F \cup G$ — замкнуто $\Longleftrightarrow X \backslash (F \cup G)$ —открыто.

   Но $X \backslash (F \cup G) = (X \backslash F) \cap (X \backslash G)$ – открыто как пересечение двух открытых.
3. $X \backslash (\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (X \backslash F_\alpha)$ — рассуждение аналогично (2.)

3.2 Теорема о соответствующей топологии

Пусть $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ такое, что:

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{F}$
2. $F,\ G \in \mathcal{F} \Longrightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$

[1] Последняя часть доказательства является авторской. Лекционный вариант утерян бесследно.

3. $F_\alpha \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Тогда существует единственная топология Ω такая, что $\mathcal{F}$ - множество замкнутых множеств.

Доказательство:

1. Докажем единственность:

   Если такая топология Ω существует, то $\Omega = \{X \backslash F |\ F \in \mathcal{F}\}$.

   Действительно, каждое такое множество должно входить в Ω, и ни одно другое в неё входить не может.

   Таким образом, Ω - единственная возможная топология по построению.

2. Теперь докажем, что построенная Ω действительно является топологией. Для этого проверим 3 необходимых свойства из определения.

   (a) $\varnothing,\ X \in \Omega$ – очевидно.

   (b) $U = X \backslash F, \ \ V = X \backslash G; \ \ F,\ G \in \mathcal{F}$

   $U \cap V = (X \backslash F) \cap (X \backslash G) = X \backslash (F \cup G) \Longrightarrow U \cap V \in \Omega$. – здесь мы пользуемся свойством (2).

   (c) $U_\alpha = X \backslash F_\alpha; \quad F_\alpha \in \mathcal{F}$

   $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} X \backslash F_\alpha = X \backslash \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ – здесь мы пользуемся свойством (3).

4 Внутренность, замыкание и граница.

◦ Определения:

$A \subseteq X$

1. x — *Внутренняя точка* A, если $\exists\ U_x \in \Omega:\ \ U_x \subseteq A$, т.е. точка входит в A с некоторой окрестностью. Заметим, что условие можно переписать как $(U_x \cap (X \backslash A)) = \varnothing$

2. x — *Внешняя точка* A, если $\exists\ U_x \in \Omega:\ \ U_x \subseteq X \backslash A$, т.е. точка входит в дополнение A с некоторой окрестностью. Иначе говоря, $U_x \cap A = \varnothing$.

3. x — *Граничная точка* A, если $\forall\ U_x \in \Omega:\ \ (U_x \cap A \neq \varnothing)\ \&\ (U_x \cap (X \backslash A) \neq \varnothing)$, т.е. любая окрестность пересекает и A, и дополнение A.

   • Упражнение: Доказать, что в случае метрических пространств определения останутся эквивалентными при замене окрестностей на шаровые.

4. x — *Точка прикосновения* A, если $\forall\ U_x\ \ U_x \cap A \neq \varnothing$

5. *Внутренность* $Int(A)$ — наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A.

   Примечание: Также используется обозначение $\mathring{A}$.

6. *Замыкание* $Cl(A)$ — наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A.

   Примечание: Также используется обозначение $\overline{A}$ и $cl(A)$.

7. *Граница* ∂A — множество граничных точек A.

   Примечание: Также используется обозначение $Fr(A)$. Если необходимо подчеркнуть, к какому всеобъемлещему множеству относится граница, пишут $\partial_X A$.

4.1 Существование внутренности и замыкания

1. $Int(A)$ существует и $Int(A) \overset{1}{=} \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U \overset{2}{=} \{\ x \mid\ \ x\text{– внутр.}\}$

   Доказательство:

   1. Первое равенство справедливо, т.к. объединение открытых множеств открыто, содержится в A и любое открытое подмножество A лежит в нем по определению.

   2. Покажем, что второе множество содержится в первом и наоборот.

   (a) Пусть x — внутренняя точка A. Тогда существует $U_x \subseteq A$. Но $U_x \subseteq \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U$, значит $x \in \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U$, то есть $\{\ x \mid\ \ x\text{– внутр.}\} \subseteq \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U$

   (b) Пусть точка x лежит в нашем объединении. Значит существует открытое множество, в котором она лежит. Но тогда x - внутренняя точка A, то есть любая точка из объединения является внутренней, а значит $\{\ x \mid\ \ x\text{– внутр.}\} \supseteq \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A,\\ U \in \Omega}} U$.

   Значит множества действительно равны. Заметим, что иногда последняя часть равенства используется в качестве определения.

2. $Cl(A)$ существует и $Cl(A) \overset{1}{=} \bigcap\limits_{\substack{F\supseteq A,\\ F\in\mathcal{F}}} F \overset{2}{=} \{x|\ \ x\text{—т. прикосн. A}\}$.

   Доказательство:

   $R := \bigcap\limits_{\substack{F\supseteq A,\\ F\in\mathcal{F}}} F \supseteq A$, R - замкнуто как пересечение замкнутых. Если замкнутое множество G содержит A, то G содержит и R, ведь G входит в пересечение. Значит R - действительно наименьшее (по включению) замкнутое множество, содержащее A.

4.2 Свойства замыкания, внутренности и границы.

1. $X\backslash Cl(A) = Int(X\backslash A)$. - это очевидно, но давайте докажем:

   Доказательство:

   $X\backslash Cl(A) = X\backslash(\cap F)^2 = \cup(X\backslash F) = [U = X\backslash F \text{ -открыто}] = \bigcup\limits_{U\subseteq(X\backslash A)} U = Int(X\backslash A)$.

2. $X\backslash Cl(A)$ - множество всех внешних точек A. Следует напрямую из пункта 1.

3. $X\backslash Int(A) = Cl(X\backslash A)$. Доказывается абсолютно аналогично пункту 1.

Выпишем ещё несколько свойств, оставив часть из них читателю в качестве упражнения.

1. (a) A - откр. $\iff A = Int(A)$

   (b) A - замкнуто $\iff A = Cl(A)$

2. (a) $A \subseteq B \Longrightarrow Int(A) \subseteq Int(B)$

   (b) $A \subseteq B \Longrightarrow Cl(A) \subseteq Cl(A)$

3. (a) $Int(A\cap B) = Int(A)\cap Int(B)$

   (b) $Cl(A\cup B) = Cl(A)\cup Cl(B)$

4. (a) $Int(A\cup B) \supseteq Int(A)\cup Int(B)$

   (b) $Cl(A\cap B) \subseteq Cl(A)\cap Cl(B)$

Приведем лишь доказательства пунктов (a), пункт (b) же выводится либо из (a), либо аналогично (a).
Итак, начнем.

1. Как и всегда в таких теоремах, разобьем утверждение на 2 и докажем их по отдельности.

   $\Leftarrow$: На самом деле очевидно, т.к. $A = Int(A) = \cup U_x$ — открыто как объединение открытых.

   $\Rightarrow$: A — открыто, $A \subseteq A$. Значит A входит в объединение открытых подмножеств, содержащихся в A, откуда очевидно $A = Int(A)$.

2. Воспользуемся другим определением внутренности: $Int(A) = \{\ x|\ \ x$ - внутр. в A$\}$.

   Заметим, что если x - внутр. в A, $A \subseteq B$, то x - внутр. в B ($U_x \subseteq A \subseteq B$). Откуда $Int(A) = \{\ x|\ \ x$ - внутр. в A$\} \subseteq \{\ x|\ \ x$ - внутр. в B$\} = Int(B)$.

[2] Здесь и далее индексы объединения/пересечения/суммирования пишутся только в первом употреблении и далее опускаются чтобы не загромождать текст. Как правило всё ясно из контекста и без них.

3. Существует по меньшей мере 2 доказательства данного факта. Мы приведем лишь один, оставив второй на совесть читателя.

   Как и всегда в таких ситуациях, разобьем утверждение на 2 и докажем их по отдельности.

   $\subseteq$: $A \cap B \subseteq A \Longrightarrow Int(A \cap B) \subseteq Int(A)$ (по пункту (2)).

   Аналогично, $Int(A \cap B) \subseteq Int(B)$, откуда $Int(A \cap B) \subseteq Int(A) \cap Int(B)$.

   $\supseteq$:

$$\begin{cases} A \supseteq Int(A) \\ B \supseteq Int(B) \end{cases} \mid \Longrightarrow A \cap B \supseteq Int(A) \cap Int(B) \Longrightarrow Int(A \cap B) \supseteq Int(A) \cap Int(B)$$

   (здесь используются сразу пункты 1 и 2)

4. Пусть x — внутренняя точка A. Тогда она внутренняя и для $A \cup B$, значит $Int(A) \subseteq Int(A \cup B)$. Аналогично для $Int(B)$.

   Тогда $Int(A) \cup Int(B) \subseteq Int(A \cup B) \cup Int(A \cup B) = Int(A \cup B)$.

$QED.$

5 База топологии.

○ *Определение:*

$(X,\ \Omega)$ - топологическое пространство. $\Sigma \subseteq \Omega$ — *База топологии*, если любой элемент из Ω представим в виде объединения некоторых элементов из Σ.

5.1 Критерий базы топологии Ω

Оказывается, что определение базы Σ для топологии Ω эквивалентно совокупности следующих двух условий:

1. $\forall U \in \Omega\ \forall x \in U \exists S \in \Sigma:\ x \in S \subseteq U$
2. $\forall S \in \Sigma: \quad S$ — откр.

Доказательство:

$\Rightarrow$:

1. По условию, $\forall U \in \Omega\ \exists I:\ \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha \in \Sigma: \quad U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha$

   Тогда $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha_0 \in I:\ x \in S_{\alpha_0}$, но $S_{\alpha_0} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha = U$. $S = S_{\alpha_0}$ - подходит.
2. очевидно из определения.

$\Leftarrow$:

По условию, $\forall x \in U \exists S_x \in \Sigma: \quad x \in S_x \subseteq U$

Но тогда $U \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha \subseteq U \quad \Longleftrightarrow \quad \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha = U$.

• *Упражнение:* Докажите, что шары - база метрической топологии.

5.2 Критерий базы некоторой топологии

Оказывается, что Σ — база некоторой топологии тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. $\forall x \in X\ \exists S_x: \quad x \in S_x$
2. $\forall S_{1,2} \in \Sigma: \quad \forall x \in S_1 \cap S_2 \quad \exists S_x \in \Sigma: \ x \in S_x \subseteq S_1 \cap S_2$

   Причем заданная топология единственна.

Доказательство:

$\underline{\Rightarrow}$:

1. $\forall x \in X \in \Omega \Longrightarrow \ \exists I: \ S_\alpha \in \Sigma \ \ \& \ \ X = \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha$

   $| \Rightarrow \quad \forall x \in X \exists \alpha: \quad x \in S_\alpha.$
2. $S_1 \cap S_2$ - откр. $\Longrightarrow \quad \exists I: S_\alpha \in \Sigma;$

   $S_1 \cap S_2 = \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha \ \Longrightarrow \exists \alpha: \ x \in S_\alpha \subseteq S_1 \cap S_2.$

$\underline{\Leftarrow}$:

Если топология существует, то $\Omega = \underset{\alpha \in I}{\cap} S_\alpha | \quad S_\alpha \in \Sigma$

Если это топология, то Σ — её база. Проверим, что Ω — действительно топология.

1) $\varnothing$ — "пустое объединение"($|I| = 0$).

   X есть по свойству 1. Например, можно взять объединение всех S из Ω.

2) $U, V \in \Omega, \iff U = \cup S_\alpha, V = \cup S_\beta.$

   $U \cap V = (\cup S_\alpha) \cap (\cup S_\beta) = \cup (S_\alpha \cap S_\beta) \boxed{=}$

   $\forall x \in S_\alpha \cap S_\beta \ \ \exists S_x : x \in S_x \subseteq S_\alpha \cap S_\beta$ (свойство 2)

   $S_\alpha \cap S_\beta \subseteq \underset{x \in S_\alpha \cap S_\beta}{\cup} S_x \subseteq S_\alpha \cap S_\beta$

   $\boxed{=} \underset{\alpha,\beta}{\cup} (\underset{x \in S_\alpha \cap S_\beta}{\cup} S_x)$ - лежит в Ω. Объясним это в пункте 3, попутно доказав его.

3) $\underset{\beta \in I}{\cup} S_\beta = \underset{\beta \in I}{\cup} (\underset{\alpha \in I_b}{\cup} S_\alpha)$ - это объединение объединений множеств из базы. Поскольку объединение ассоциативно, это просто объединение множеств из базы. А значит, оно лежит в Ω.

QED.