

Оглавление

1 Жизнь до.	2
1.1 Метрическое пространство. Метрика.	2
1.1.1 Примеры метрик.	2
1.2 Открытые множества. Топологические пространства.	4
1.2.1 Открытые множества. Свойства.	4
1.2.2 Топологическое пространство. Топология.	5
1.2.3 Окрестности. Теорема о дополнении подмножества.	5
1.3 Замкнутые множества.	6
1.3.1 Теорема о множестве замкнутых множеств	6
1.3.2 Теорема о соответствующей топологии	6
1.4 Внутренность, замыкание и граница.	8
1.4.1 Существование внутренности и замыкания	8
1.4.2 Свойства замыкания, внутренности и границы.	9
1.5 База топологии.	10
1.5.1 Критерий базы топологии Ω	10
1.5.2 Критерий базы некоторой топологии	11
1.6 Индуцированная топология	12
1.7 Непрерывные отображения	12
1.7.1 Непрерывность в точке	12
1.7.2 Непрерывность отображения	13
1.7.3 Фактор-пространство.	15
1.7.4 Гомеоморфизм	15
1.8 Аксиомы отделимости.	16
1.8.1 Замкнутость точек в пространствах с первой аксиомой отделимости	16
1.8.2 Метрические пространства нормальные.	17
1.9 Аксиомы счетности. Всюду плотность. Сепарабельность.	17
1.9.1 Покрытие. Теорема Линделёфа	18
1.10 Связность	19

Глава 1

Жизнь до.

1.1 Метрическое пространство. Метрика.

○ Определение:

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — метрика, если:

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

(X, d) — метрическое пространство.

1.1.1 Примеры метрик.

1. V — векторное пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

$$\triangleleft d(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \sqrt{\langle \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \rangle} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$$

2. (E, V) — аффинное пространство, скалярное произведение на V .

3. ○ Определение:

Норма $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$1. \|\vec{v}\| \geq 0; \quad \|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

$$2. \|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$3. \|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\|$$

Тогда $d(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$ — метрика.

$$3.1 \quad V = \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

$$||x||_{\inf} = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

4. S^2 — сфера, 2 метрики:

1. $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (Стандартная метрика),

2. Угловая метрика.

1.2 Открытые множества. Топологические пространства.

1.2.1 Открытые множества. Свойства.

○ Определения:

1. $R > 0$, $B(x_0, R) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid d(x_0, x) < R\}$ — *открытый шар радиуса R с центром x_0 .*
2. $S(x_0, R) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid d(x_0, x) = R\}$ — *сфера.*
3. (X, d) — метрическое пространство, $U \subseteq X$
 U — *открыто*, если:
$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

Теорема об открытости шара.

Открытый шар открыт.

Доказательство:

Рассмотрим $x \in B(x_0, R)$.

$\varepsilon := R - d(x_0, x) > 0$ (т.к. $x \in B(x_0, R) \Rightarrow d(x_0, x) < R$)

Пусть $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon = R - d(x_0, x)$

$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < R \Rightarrow y \in B(x_0, R) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, R).$

QED.

Теорема о свойствах Ω

$\Omega \stackrel{def}{=} \{U \subseteq X \mid U \text{ — открыто}\};$ X — метрическое пространство.

Тогда:

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. $U, V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3. $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

Доказательство:

1. \emptyset — очевидно. 2) Рассмотреть для каждого элемента $\varepsilon = 1$ (или любой другой, далее очевидно.)

2. Рассмотрим $y \in U \cap V$

$$y \in U \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall x \in X \quad d(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow x \in U$$

$$y \in V \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0 : \forall x \in X \quad d(x, y) < \varepsilon_2 \Rightarrow x \in V$$

$$\triangleleft \varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Далее очевидно.

3. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \Rightarrow \exists \varepsilon : (\forall y \in X \quad d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U_i \Rightarrow y \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)$

QED.

1.2.2 Топологическое пространство. Топология.

○ Определение:

(X, Ω) — топологическое пространство, если:

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. $U, V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3. $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

Ω — топология, элементы Ω — открытые.

Примеры топологических пространств.

1. $\Omega = 2^X$ — дискретная топология.

• Упражнение: Доказать, что дискретной метрике $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ соответствует дискретная топология.

2. $\Omega = \{\emptyset, X\}$ — антидискретная топология
3. $X = \mathbb{R}$; $\Omega = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ — стрелка

1.2.3 Окрестности. Теорема о дополнении подмножества.

○ Определения:

$x_0 \in X$.

1. Окрестность точки x_0 — произвольное открытое множество, содержащее x_0 .
2. ε -окрестность (\cdot) x_0 — $B(x_0, \varepsilon)$. Определено только для метрических пространств.

Теорема о дополнении подмножества

$F \subset X$; X — метрическое пространство

1. $(\forall x \forall \varepsilon (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap F \neq \emptyset) \Rightarrow x \in F) \iff X \setminus F$ — открыто.
2. X — топологическое пространство.
 $((\forall U_x \text{ — отк. } U_x \cap F \setminus \{x\} \neq \emptyset) \Rightarrow x \in F) \iff X \setminus F$ — открыто.

Доказательство:

1. Если X — метрическое пространство, то 1. \iff 2. :

1. \Leftarrow 2. : — очевидно ; 1. \Rightarrow 2. :

Рассмотрим U_x — отк. $\Rightarrow \exists \varepsilon : B(x, \varepsilon) \subseteq U_x \Rightarrow ((B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap F \subset U_x \setminus \{x\} \cap F \Rightarrow U_x \setminus \{x\} \cap F \neq \emptyset$.

QED.

Достаточно доказать (2.)

1. \Rightarrow , т.е. $x \notin F \Rightarrow \exists U_x : U_x \setminus \{x\} \cap F = \emptyset \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow U_x \subseteq X \setminus F \Rightarrow \bigcup_{x \in X \setminus F} U_x \subseteq X \setminus F$; ” \supseteq ”- тоже(оч.),
 $\Rightarrow \bigcup_{x \in X \setminus F} U_x = X \setminus F$, но $\bigcup U$ - откр.

QED.

2. \Leftarrow :

Пусть $X \setminus F$ —откр. и $\forall U_x$ —откр. ($U_x \setminus \{x\} \cap F \neq \emptyset$)

Допустим, что $x \notin F \Rightarrow x \in (X \setminus F)$

Тогда $\emptyset \neq ((X \setminus F) \setminus \{x\}) \cap F = ((X \setminus F) \cap F) \setminus \{x\} = \emptyset$. Противоречие.¹

QED.

1.3 Замкнутые множества.

о Определение:

F — замкнуто $\iff X \setminus F$ — открыто.

1.3.1 Теорема о множестве замкнутых множеств

\mathcal{F} — множество замкнутых множеств.

Тогда:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$
2. $F, G \in \mathcal{F} \implies F \cup G \in \mathcal{F}$
3. $F_\alpha \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Доказательство:

1. очевидно: ($X \setminus X = \emptyset$; $X \setminus \emptyset = X$)
2. $F \cup G$ — замкнуто $\iff X \setminus (F \cup G)$ — открыто.
 Но $X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$ — открыто как пересечение двух открытых.
3. $X \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$ — рассуждение аналогично (2.)

1.3.2 Теорема о соответствующей топологии

Пусть $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ такое, что:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$
2. $F, G \in \mathcal{F} \implies F \cup G \in \mathcal{F}$

¹Последняя часть доказательства является авторской. Лекционный вариант утерян бесследно.

$$3. F_\alpha \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$$

Тогда существует единственная топология Ω такая, что \mathcal{F} - множество замкнутых множеств.

Доказательство:

1. Докажем единственность:

Если такая топология Ω существует, то $\Omega = \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$.

Действительно, каждое такое множество должно входить в Ω , и ни одно другое в неё входить не может.

Таким образом, Ω - единственная возможная топология по построению.

2. Теперь докажем, что построенная Ω действительно является топологией. Для этого проверим 3 необходимых свойства из определения.

(a) $\emptyset, X \in \Omega$ — очевидно.

(b) $U = X \setminus F, V = X \setminus G; F, G \in \mathcal{F}$

$U \cap V = (X \setminus F) \cap (X \setminus G) = X \setminus (F \cup G) \implies U \cap V \in \Omega$. — здесь мы пользуемся свойством (2).

(c) $U_\alpha = X \setminus F_\alpha; F_\alpha \in \mathcal{F}$

$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus F_\alpha = X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ — здесь мы пользуемся свойством (3).

1.4 Внутренность, замыкание и граница.

◦ Определения:

$A \subseteq X$

1. x — *Внутренняя точка* A , если $\exists U_x \in \Omega : U_x \subseteq A$, т.е. точка входит в A с некоторой окрестностью. Заметим, что условие можно переписать как $(U_x \cap (X \setminus A)) = \emptyset$
2. x — *Внешняя точка* A , если $\exists U_x \in \Omega : U_x \subseteq X \setminus A$, т.е. точка входит в дополнение A с некоторой окрестностью. Иначе говоря, $U_x \cap A = \emptyset$.
3. x — *Граничная точка* A , если $\forall U_x \in \Omega : (U_x \cap A \neq \emptyset) \ \& \ (U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset)$, т.е. любая окрестность пересекает и A , и дополнение A .

• Упражнение: Доказать, что в случае метрических пространств определения останутся эквивалентными при замене окрестностей на шаровые.

4. x — *Точка прикосновения* A , если $\forall U_x \ U_x \cap A \neq \emptyset$
5. *Внутренность* $Int(A)$ — наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A .

Примечание: Также используется обозначение $\overset{\circ}{A}$.

6. *Замыкание* $Cl(A)$ — наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A .

Примечание: Также используется обозначение \overline{A} и $cl(A)$.

7. *Граница* ∂A — множество граничных точек A .

Примечание: Также используется обозначение $Fr(A)$. Если необходимо подчеркнуть, к какому всеобъемлющему множеству относится граница, пишут $\partial_X A$.

1.4.1 Существование внутренности и замыкания

1. $Int(A)$ существует и $Int(A) \stackrel{1}{=} \bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U \stackrel{2}{=} \{x \mid x \text{ — внутр.}\}$

Доказательство:

1. Первое равенство справедливо, т.к. объединение открытых множеств открыто, содержится в A и любое открытое подмножество A лежит в нем по определению.

2. Покажем, что второе множество содержится в первом и наоборот.

(а) Пусть x — внутренняя точка A . Тогда существует $U_x \subseteq A$. Но $U_x \subseteq \bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U$, значит $x \in \bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U$, то есть $\{x \mid x \text{ — внутр.}\} \subseteq \bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U$

(б) Пусть точка x лежит в нашем объединении. Значит существует открытое множество, в котором она лежит. Но тогда x — внутренняя точка A , то есть любая точка из объединения является внутренней, а значит $\{x \mid x \text{ — внутр.}\} \supseteq \bigcup_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U$.

Значит множества действительно равны. Заметим, что иногда последняя часть равенства используется в качестве определения.

2. $Cl(A)$ существует и $Cl(A) \stackrel{1}{=} \bigcap_{F \supseteq A, F \in \mathcal{F}} F \stackrel{2}{=} \{x \mid x \text{---т. прикосн. } A\}$.

Доказательство:

$R := \bigcap_{F \supseteq A, F \in \mathcal{F}} F \supseteq A$, R - замкнуто как пересечение замкнутых. Если замкнутое множество G содержит A , то G содержит и R , ведь G входит в пересечение. Значит R - действительно наименьшее (по включению) замкнутое множество, содержащее A .

1.4.2 Свойства замыкания, внутренности и границы.

1. $X \setminus Cl(A) = Int(X \setminus A)$. - это очевидно, но давайте докажем:

Доказательство:

$$X \setminus Cl(A) = X \setminus (\cap F)^2 = \cup (X \setminus F) = [U = X \setminus F \text{---открыто}] = \bigcup_{U \subseteq (X \setminus A)} U = Int(X \setminus A) .$$

2. $X \setminus Cl(A)$ - множество всех внешних точек A . Следует напрямую из пункта 1.
3. $X \setminus Int(A) = Cl(X \setminus A)$. Доказывается абсолютно аналогично пункту 1.

Выпишем ещё несколько свойств, оставив часть из них читателю в качестве упражнения.

1. (a) A - откр. $\iff A = Int(A)$
 (b) A - замкнуто $\iff A = Cl(A)$
2. (a) $A \subseteq B \implies Int(A) \subseteq Int(B)$
 (b) $A \subseteq B \implies Cl(A) \subseteq Cl(B)$
3. (a) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$
 (b) $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$
4. (a) $Int(A \cup B) \supseteq Int(A) \cup Int(B)$
 (b) $Cl(A \cap B) \subseteq Cl(A) \cap Cl(B)$

Приведем лишь доказательства пунктов (а), пункт (b) же выводится либо из (а), либо аналогично (а).

Итак, начнем.

1. Как и всегда в таких теоремах, разобьем утверждение на 2 и докажем их по отдельности.
 \Leftarrow : На самом деле очевидно, т.к. $A = Int(A) = \cup U_x$ — открыто как объединение открытых.
 \Rightarrow : A — открыто, $A \subseteq A$. Значит A входит в объединение открытых подмножеств, содержащихся в A , откуда очевидно $A = Int(A)$.
2. Воспользуемся другим определением внутренности: $Int(A) = \{x \mid x \text{---внутр. в } A\}$.
 Заметим, что если x - внутр. в A , $A \subseteq B$, то x - внутр. в B ($U_x \subseteq A \subseteq B$). Откуда $Int(A) = \{x \mid x \text{---внутр. в } A\} \subseteq \{x \mid x \text{---внутр. в } B\} = Int(B)$.

²Здесь и далее индексы объединения/пересечения/суммирования пишутся только в первом употреблении и далее опускаются чтобы не загромождать текст. Как правило всё ясно из контекста и без них.

3. Существует по меньшей мере 2 доказательства данного факта. Мы приведем лишь один, оставив второй на совесть читателя.

Как и всегда в таких ситуациях, разобьем утверждение на 2 и докажем их по отдельности.

\subseteq : $A \cap B \subseteq A \implies \text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A)$ (по пункту (2)).

Аналогично, $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(B)$, откуда $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

\supseteq :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \supseteq \text{Int}(A) \\ B \supseteq \text{Int}(B) \end{array} \right. \implies A \cap B \supseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \implies \text{Int}(A \cap B) \supseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$$

(здесь используются сразу пункты 1 и 2)

4. Пусть x — внутренняя точка A . Тогда она внутренняя и для $A \cup B$, значит $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$.

Аналогично для $\text{Int}(B)$.

Тогда $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B) \cup \text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A \cup B)$.

*QED.*³

1.5 База топологии.

◦ Определение:

(X, Ω) — топологическое пространство. $\Sigma \subseteq \Omega$ — *База топологии*, если любой элемент из Ω представим в виде объединения некоторых элементов из Σ .

1.5.1 Критерий базы топологии Ω

Оказывается, что определение базы Σ для топологии Ω эквивалентно совокупности следующих двух условий:

1. $\forall U \in \Omega \forall x \in U \exists S \in \Sigma : x \in S \subseteq U$
2. $\forall S \in \Sigma : S$ — откр.

Доказательство:

\implies :

1. По условию, $\forall U \in \Omega \exists I : \{S_\alpha \in \Sigma : U = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$
Тогда $x \in \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \implies \exists \alpha_0 \in I : x \in S_{\alpha_0}$, но $S_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha = U$. $S = S_{\alpha_0}$ — подходит.
2. очевидно из определения.

\Leftarrow :

По условию, $\forall x \in U \exists S_x \in \Sigma : x \in S_x \subseteq U$

Но тогда $U \subseteq \bigcup_{\alpha \in U} S_\alpha \subseteq U \iff \bigcup_{\alpha \in U} S_\alpha = U$.

³Пункты 1-2,4 созданы вашим покорным слугой. Лекционным считать только пункт 3.

- Упражнение: Докажите, что шары - база метрической топологии.

1.5.2 Критерий базы некоторой топологии

Оказывается, что Σ — база некоторой топологии тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. $\forall x \in X \exists S_x : x \in S_x$
2. $\forall S_{1,2} \in \Sigma : \forall x \in S_1 \cap S_2 \exists S_x \in \Sigma : x \in S_x \subseteq S_1 \cap S_2$

Причем заданная топология единственна.

Доказательство:

$\Rightarrow :$

1. $\forall x \in X \in \Omega \Rightarrow \exists I : S_\alpha \in \Sigma \ \& \ X = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$
 $\mid \Rightarrow \forall x \in X \exists \alpha : x \in S_\alpha.$
2. $S_1 \cap S_2$ - откр. $\Rightarrow \exists I : S_\alpha \in \Sigma;$
 $S_1 \cap S_2 = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \Rightarrow \exists \alpha : x \in S_\alpha \subseteq S_1 \cap S_2.$

$\Leftarrow :$

Если топология существует, то $\Omega = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \mid S_\alpha \in \Sigma$

Если это топология, то Σ — её база. Проверим, что Ω — действительно топология.

- 1) \emptyset — "пустое объединение" ($|I| = 0$).

X есть по свойству 1. Например, можно взять объединение всех S из Ω .

- 2) $U, V \in \Omega, \iff U = \bigcup S_\alpha, V = \bigcup S_\beta.$

$$U \cap V = (\bigcup S_\alpha) \cap (\bigcup S_\beta) = \bigcup (S_\alpha \cap S_\beta) \boxed{=}$$

$\forall x \in S_\alpha \cap S_\beta \exists S_x : x \in S_x \subseteq S_\alpha \cap S_\beta$ (свойство 2)

$$S_\alpha \cap S_\beta \subseteq \bigcup_{x \in S_\alpha \cap S_\beta} S_x \subseteq S_\alpha \cap S_\beta$$

$\boxed{=}$ $\bigcup_{\alpha, \beta} \left(\bigcup_{x \in S_\alpha \cap S_\beta} S_x \right)$ - лежит в Ω . Объясним это в пункте 3, попутно доказав его.

- 3) $\bigcup_{\beta \in I} S_\beta = \bigcup_{\beta \in I} \left(\bigcup_{\alpha \in I_\beta} S_\alpha \right)$ - это объединение объединений множеств из базы. Поскольку объединение ассоциативно, это просто объединение множеств из базы. А значит, оно лежит в Ω .

QED.

Пример

X, Y — топологические пространства

$$\{U \times V \mid U - \text{откр. в } X, V - \text{откр. в } Y\} - \text{База топологии.}$$

Доказывается непосредственно.

1.6 Индуцированная топология

◦ Определение:

X — т.п.; $A \subseteq X$

$\Omega_A := \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$ — индуцированная топология на A . Само построение понадобится нам чуть позже, а сейчас ограничимся лишь тем, что докажем, что это действительно топология.

Доказательство:

1. $\emptyset = \emptyset \cap A$; $A = X \cap A$
2. $(U \cap A) \cap (V \cap A) = (U \cap V) \cap A$
3. $\bigcap_{\alpha} (U_{\alpha} \cap A) = (\bigcap_{\alpha} U_{\alpha}) \cap A$

Пока на этом всё. Читателю в упражнение остаётся проверить, что же происходит с метрикой под действием индуцирования.

1.7 Непрерывные отображения

1.7.1 Непрерывность в точке

Определения.

1. Следующие определения эквивалентны, в чём читатель легко может убедиться сам. Итак,

X, Y — м.п.

$f : X \rightarrow Y$ — непрерывно в точке a , если:

$$(a) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

$$(b) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \quad x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

$$(c) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

2. Естественно продолжить предыдущее определение на произвольную топологию. Итак,

X, Y — т.п.

$f : X \rightarrow Y$ — непрерывно в точке a , если:

$$\forall U_{f(a)} \quad \exists V_a : f(V_a) \subset U_{f(a)}. \quad (*)$$

Это кажется нам очевидным, но давайте все же формально докажем:

Теорема.

Для метрических пространств $(*)$ дает то же самое.

Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$:

Доказываем: f —непрерывно в метрическом смысле $\implies f$ —непрерывно в топологическом смысле.

Рассмотрим $U_{f(a)} \in \Omega_Y \implies \exists \varepsilon > 0 : B_{f(a)}(\varepsilon) \subset U_{f(a)}$

Тогда $\exists \delta : f(B(a, \delta)) \subset B_{f(a)}(\varepsilon) \subset U_{f(a)}$.

$V_a := B(a, \delta)$.

2. $\boxed{\Leftarrow}$:

$B(f(a), \varepsilon) \in \Omega_Y \implies \exists V_a \in \Omega_X : f(V_a) \subset B(f(a), \varepsilon)$

$V_a \in \Omega_X \implies \exists \delta : B_a(\delta) \subset V_a$.

$f(B_a(\delta)) \subset f(V_a) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

QED.

1.7.2 Непрерывность отображения

Аналогии с матанализом возникают у вас не случайно, так что, думаю, вы знаете, что будет дальше. Итак,

Определение. X, Y топологические пространства.

$f : X \rightarrow Y$ —непрерывно, если:

$\forall U \in \Omega_Y : f^{-1}(U) \in \Omega_X$.

И тут читатель скажет: Георгий, ты што дурак? непрерывность ета другое!

Не волнуйся, дорогой читатель. Следующая теорема тебя успокоит.

Эквивалентность определений

Теорема.

f —непрерывно $\iff (\forall x \in X f$ —непрерывно в x).

Доказательство.

\supseteq :

Рассмотрим $U_{f(a)}$. $V_a := f^{-1}(U_{f(a)})$ —открыт как прообраз открытого. $a \in V_a$ т.к. $f(a) \in U_{f(a)}$, $f(V_a) \subset U_{f(a)}$ по построению.

\Leftarrow :

$U \in \Omega_Y$.

$f(x) \in U \implies \exists V_x : f(V_x) \subset U \iff V_x \subset f^{-1}(U)$.

$f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x$ —откр. как объединение открытых.

QED.

Свойства

1. $g : X \rightarrow Y$; $f : Y \rightarrow Z$, f, g — непрерывны.

Тогда отображение $f \circ g : X \rightarrow Z$ тоже непрерывно.

Доказательство тривиально: $(f \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(U))$ — открыто по условию.

2. $A \subset X$. $in_A : A \xrightarrow{a \mapsto a} X$ — непрерывно.

Доказательство.

$U \in \Omega_X \implies in_A^{-1}(U) = U \cap A$ — открыто по определению индуцированной топологии.

2.1 Следствие:

$A \subset X$; $f : X \rightarrow Y$ — непр. Тогда $f|_A : A \xrightarrow{a \mapsto f(a)} Y$ — непрерывно.

Доказательство: $f|_A = f \circ in_A$ — непрерывно как композиция непрерывных.

3. $f : X \rightarrow Y$ — непр. $\iff f|^{f(X)} : X \rightarrow f(X) \text{ — } \underline{\text{ограничение}} \text{ — непрерывно.}$
 $x \mapsto f(x)$

Доказательство остается читателю в качестве упражнения.

4. $pr_X : X \times Y \xrightarrow{(x,y) \mapsto x} X$; $pr_Y : X \times Y \xrightarrow{(x,y) \mapsto y} Y$ — непрерывны.

Докажем играючи: $pr_X^{-1}(U) = U \times Y \in \Sigma_{X \times Y}$. (Мы обсуждали этот пример когда речь шла о критериях базы.)

Сопутствующие теоремы

Теорема. $(f : X \rightarrow Y \text{ — непр.}) \iff (\forall F \in \mathcal{F}_Y : f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X)$.

Доказательство.

\supseteq :

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus U) = \{x | f(x) \in Y \setminus U\} = \{x | f(x) \notin U\} = X \setminus \{x | f(x) \in U\} = X \setminus f^{-1}(U) \text{ — замкнуто.}$$

\Leftarrow :

Рассуждение аналогично, поэтому мы позволим себе опустить несколько переходов, оставив их осмысление на совесть читателя.

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F).$$

QED.

Теорема. $f : X \rightarrow Y$; $U_\alpha \in \Omega_X$; $f|_{U_\alpha}$ — непр; $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.

Тогда f непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $V \in \Omega_Y$.

$$(f|_{U_\alpha})^{-1}(V) = \{x \in U_\alpha | f(x) \in V\} = \{x \in U_\alpha | x \in f^{-1}(V)\} = U_\alpha \cap f^{-1}(V).$$

$f^{-1}(V) = X \cap f^{-1}(V) = (\bigcup_\alpha U_\alpha) \cap f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap f^{-1}(V)) = \bigcup_\alpha ((f|_{U_\alpha})^{-1}(V)) \in \Omega_X$. (Заметим, что поскольку U_α открыт, $W \cap U_\alpha$ тоже открыт для любого $W \in \Omega_X$, а значит, если $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ открыто в U_α , то оно открыто и в X . В следующей теореме соображение будет таким же.)

QED.

Теорема. $f : X \rightarrow Y$; $F_{1..n} \in \mathcal{F}$; $f|_{F_i} — \text{непр.}; \bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i = X$.

Тогда f — непрерывно.

Доказательство.

Рассмотрим произвольное $G \in \mathcal{F}_Y$.

$$(f|_{F_i})^{-1}(G) = \dots = F_i \cap f^{-1}(G).$$

$$f^{-1}(G) = X \cap f^{-1}(G) = \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i \right) \cap f^{-1}(G) = \bigcup_i (F_i \cap f^{-1}(G)) = \bigcup_i ((f|_{F_i})^{-1}(G)) \in \mathcal{F}_X.$$

QED.

1.7.3 Фактор-пространство.

Определение .

X — топологическое пространство; \sim — отношение эквивалентности на X ; $[x] = \{y | y \sim x\}$.

Тогда $pr : X \rightarrow X / \sim$. $X / \sim — \text{Фактор-пространство. } \Omega_{X/\sim} := \{A \subset X / \sim | pr^{-1}(A) \in \Omega_X\}$.

Утверждение .

$\Omega_{X/\sim} — \text{топология.}$

Доказательство.

$$1 \quad pr^{-1}(\emptyset) = \emptyset; \quad pr^{-1}(X / \sim) = X.$$

$$2 \quad U, V \in \Omega_X \iff pr^{-1}(U), pr^{-1}(V) \in \Omega_{X/\sim}.$$

$$pr^{-1}(U) \cap pr^{-1}(V) = pr^{-1}(U \cap V) \in \Omega_{X/\sim}.$$

$$3 \quad \bigcup_{\alpha} (pr^{-1}(U_{\alpha})) = pr^{-1}(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}) \in \Omega_{X/\sim}.$$

Теорема. $f : X \Rightarrow Y — \text{непр.}; \sim — \text{отн. экв.}; (x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2))$

$\bar{f} : X / \sim \rightarrow Y — \text{Фактор-отображение} \stackrel{!}{\underset{[x] \rightarrow f(x)}}{\text{непрерывно.}}$

Доказательство.

Рассмотрим произвольное $U \in \Omega_Y$.

$$\text{По определению, } (\bar{f})^{-1}(U) \in \Omega_{X/\sim} \iff pr^{-1}((\bar{f})^{-1}(U)) \in \Omega_X.$$

$$\text{Но } pr^{-1}((\bar{f})^{-1}(U)) = \{x | \bar{f}([x]) \in U\} = \{x | f(x) \in U\} = f^{-1}(U) \in \Omega_X — \text{по условию.}$$

QED.

1.7.4 Гомеоморфизм

Определение. $f : X \rightarrow Y — \text{гомеоморфизм} \stackrel{def}{\iff} f — \text{биекция, непрерывно И } f^{-1} \text{ непрерывно.}$

Читатель может подумать, что последнее условие излишне. Классическим опровержением такого мнения служит биекция полуинтервала в окружность.

Определение. X, Y — гомеоморфны $\stackrel{def}{\iff}$ между ними существует гомеоморфизм.

Несколько примеров гомеоморфных пространств приведены на картинке.

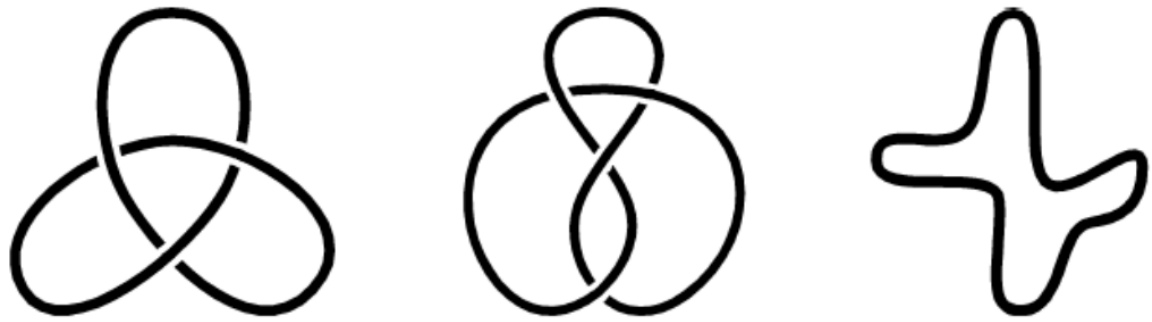


Рис. 1.1. Трилистник, восьмерка и тривиальный узел

1.8 Аксиомы отделимости.

Сразу оговоримся, что здесь аксиомы - не то, что требуется от любой топологии. В нашем случае, аксиомы - то, что мы можем потребовать, если сильно нужно.

Определения. T_0 : Пусть даны любые две несовпадающие точки $x, y \in X$, тогда по крайней мере у одной из них есть окрестность, которая не содержит другую.

T_1 : Для любых двух несовпадающих точек $x, y \in X$, найдется окрестность y , не содержащая x .

T_2 : хаусдорфовость — Любые две различные точки $x, y \in X$ обладают окрестностями U_x, U_y , которые не пересекаются.

T_3 : регулярность — $\forall x \in X, \forall F \in \mathcal{F} \exists U_x, U_F : U_x \cap U_F = \emptyset$.

T_4 : $\forall F_1 \cap F_2 = \emptyset \exists U_{F_1}, U_{F_2} : U_{F_1} \cap U_{F_2} = \emptyset$.

Иногда для T_3, T_4 также требуют выполнение T_1 . Мы этого делать не будем, но в таких случаях говорят:

$T_1 + T_3$ — регулярные, $T_1 + T_4$ — нормальные.

Докажем несколько теорем:

1.8.1 Замкнутость точек в пространствах с первой аксиомой отделимости

Теорема: X удовл. $T_1 \iff \forall x \in X : \{x\} \in \mathcal{F}$.

Док-во: \Leftarrow :

$$\forall x, y : U_x := X \setminus \{y\}.$$

\Rightarrow :

Для каждой точки $y \neq x$ есть окрестность U_y , не пересекающаяся с x . Тогда объединение всех этих окрестностей - и есть дополнение к $\{x\}$. Объединение открытых открыто.

QED.

1.8.2 Метрические пространства нормальные.

Название теоремы отражает её суть. Сразу заметим, что хаусдорфовость очевидна: для любых $x \neq y$ достаточно рассмотреть шары радиуса $d(x, y)/2$. Их пересечение очевидно пусто (скажем, по неравенству треугольника.). Также сразу отметим, что в силу предыдущей теоремы из нормальности следует регулярность. Итак,:

Теорема: Метрические пространства нормальные.

Док-во: Нам осталось проверить только выполнение T_4 .

Наши закрытые множества назовём F и G .

$$\forall x \in F \implies x \notin G \implies \exists \varepsilon_x > 0 : B(x, \varepsilon_x) \supset X \setminus G.$$

Аналогично для $y \in G$.

Тогда объединение всех шаров $B(x, \varepsilon_x/2)$ по точкам из F и G соответственно будет содержать F и G .

Обозначим эти объединения через U_F и U_G соответственно.

Нам осталось показать, что построенные множества не пересекаются.

В самом деле, пусть $\exists z \in U_F \cap U_G$. Тогда $\exists x \in F, y \in G : d(x, z) < \varepsilon_x/2, d(y, z) < \varepsilon_y/2$.

Пусть НУО $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$. Тогда:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon_x/2 + \varepsilon_y/2 = \varepsilon_y, \text{ что абсурдно по построению.}$$

QED.

1.9 Аксиомы счетности. Всюду плотность. Сепарабельность.

Идеология понятия "аксиома" здесь ровно такая же, как в случае с аксиомами отделимости. Итак,

Определение. Базой в точке x_0 называется $\Sigma_{x_0} \subset \Omega$, удовлетворяющая сразу следующим двум условиям:

- (a) $\forall S \in \Sigma_{x_0} : x_0 \in S$;
- (b) $\forall U \in \Omega : x_0 \in U \implies \exists S \in \Sigma_{x_0} : S \subset U$.

Определения. A_1 : $\forall x_0 \in X \exists \text{ НБЧС } \Sigma_{x_0}$.

A_2 : В X существует НБЧС база.

Очевидно, $A_2 \Rightarrow A_1$.

Определение. $A \subset X$.

- (a) A - всюду плотно, если $Cl(A) = X$.
- (b) A - всюду плотно, если $\forall \emptyset \neq U \in \Omega : U \cap A \neq \emptyset$.

Теорема. Определения всюду плотности равносильны.

Док-во. \Rightarrow : От противного.

Пусть $\exists U \neq \emptyset : U \cap A = \emptyset$. Тогда $X \setminus U \in \mathcal{F}$, $X \setminus U \supseteq A \Rightarrow X \neq X \setminus U \supset Cl(A) \Rightarrow Cl(A) \neq X$.

\Leftarrow : Рассмотрим $U := X \setminus Cl(A)$.

U - открыто. Предположим, что оно не пусто. Тогда $\emptyset = U \cap Cl(A) \supseteq U \cap A \neq \emptyset$, что абсурдно.

Откуда и следует, что $C(A) = X$.

Определение. X - сепарабельно, если в X существует НБЧС всюду плотное множество.

Теорема. Если X удовлетворяет A_2 , то X сепарабельно.

Док-во. Пусть $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots\}$ — НБЧС база. НУО $S_i \neq \emptyset$, зафиксируем $a_i \in S_i \ \forall i > 0$

Теперь построим наше всюду плотное множество: $A := \{a_i | i > 0\}$. Пока очевидно, что A НБЧС (элементы могут совпадать, но мощность от этого не возрастает, а значит всё хорошо).

Наконец, покажем, что A всюду плотно:

$$\forall U \neq \emptyset \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} (S_i) \Rightarrow S_{i_0} \subset U \Rightarrow a_{i_0} \in A \cap U.$$

QED.

Теорема. Если X — метрическое и сепарабельное, то оно удовлетворяет аксиоме A_2 .

Док-во. Всё, что нам нужно - предъявить НБЧС базу. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ - НБЧС всюду плотное множество.

$\Sigma := \{B(a_n, k^{-1}) | a_n \in A, k \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — НБЧС.

Проверим, что Σ является базой, что эквивалентно $\forall U \in \Omega \forall x \in U \exists B(a_n, k^{-1}) \subset U$.

Действительно, U - открыто, а значит, $\exists B(x, \varepsilon) \subset U$. Тогда в качестве эpsilon можно взять k^{-1} для некоторого k . Теперь посмотрим на шар того же центра вдвое меньшего радиуса. По построению, в нем лежит некоторый элемент $a_n \in A$. Тогда $x \in B(a_n, (2k)^{-1}) \subset U$.

QED.

1.9.1 Покрытие. Теорема Линделёфа

Определение. $\{A_\alpha\} \subset 2^X$ - покрытие, если $\bigcup A_\alpha = X$. Если каждое из A_α открыто, покрытие называется открытым покрытием.

Интуитивно вводится понятие подпокрытие.

Теорема. (Линделёф) Если в X выполняется A_2 , то у любого покрытия существует НБЧС подпокрытие.

Д-во. Пусть $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots\}$ - НБЧС база, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ - покрытие.

$\forall \alpha \exists I_\alpha : U_\alpha = \bigcup_{i \in I_\alpha} S_i$ просто по определению базы. Но тогда

$X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (\bigcup_{i \in I_\alpha} (S_i))$ Обозначим $A := \bigcup_{\alpha \in I} I_\alpha \subseteq \mathbb{N}$. Тогда для каждого i есть α_i такое, что $(i \in I_{\alpha_i} \Rightarrow S_i \subset U_{\alpha_i})$ Выберем по одному такому U_{α_i} , оно и будет нашим НБЧС подпокрытием.

QED.

1.10 Связность

Определение. X - не связно, если $\exists U, V \in \Omega_X : U \cap V = \emptyset, U, V \neq \emptyset, U \cup V = X$. Отрицание этого условия является определением связного пространства.

Теорема. Отрезок $[0, 1]$ в \mathbb{R} связан.

Д-во. Представим отрезок в виде дизъюнктного объединения открытых множеств U и V . НУО будем считать, что $0 \in U$.

Обозначим $t_0 := \sup\{t \mid [0, t] \in U\}$ - он существует, т.к. множество не пусто и ограничено.

Тогда $[0, t_0] \subset U$. Действительно, пусть $0 \leq t^* \leq t_0$. Тогда $\exists t > t^* : [0, t] \in U$. Но тогда $t^* \in U$.

Покажем, что $t_0 = 1$: Пусть это не так, то есть $t_0 < 1$: Любая точка лежит в открытом множестве с некоторой окрестностью. Предположим, что $t_0 \in U$. Обозначим за ε соответствующую окрестность. тогда $[0, t_0 + \varepsilon/2] \subset U$, что противоречит построению. Если же $t_0 \in V$, мы аналогично приходим к тому, что $t_0 - \varepsilon$ - верхняя грань построенного множества.

Таким образом, $t_0 = 1, U = [0, 1], V = \emptyset$. Значит множество связно.