Оглавление

Глава 1

Жизнь до.

1.1 Метрическое пространство. Метрика.

◦ *Определение:*

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ — *метрика*, если:

1. $d(x, y) \geq 0; \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$
2. $d(x, y) = d(y, x),$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$

(X, d) — *метрическое пространство.*

1.1.1 Примеры метрик.

1. V - векторное пространство, $< \cdot, \cdot >$ - скалярное произведение.
   $\lessdot \quad d(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \sqrt{< \vec{v_1} - \vec{v_2}, \vec{v_1} - \vec{v_2} >} = |\vec{v_1} - \vec{v_2}|$
2. (E, V) – аффинное пространство, скалярное произведение на V.
3. ◦ *Определение:*
   Норма $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$
   1. $||\vec{v}|| \geq 0; \quad ||\vec{v}|| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
   2. $||\lambda\vec{v}|| = |\lambda| * ||\vec{v}||$
   3. $||\vec{v_1} + \vec{v_2}|| \leq ||\vec{v_1}|| + ||\vec{v_2}||$

   Тогда $d(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = ||\vec{v_1} - \vec{v_2}||$ - метрика.

   3.1 $V = \mathbb{R}^n, \quad ||x||_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1$

$$||x||_{\inf} = \underset{1 \le i \le n}{max}(|x_i|)$$

4. S^2 — сфера, 2 метрики:

   1.$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (Стандартная метрика),

   2. Угловая метрика.

1.2 Открытые множества. Топологические пространства.

1.2.1 Открытые множества. Свойства.

◦ *Определения:*

1. $R > 0,\ B(x_0, R) \overset{def}{=} \{x \in X|\ \ d(x_0, x) < R\}$ —*открытый шар радиуса* R *с центром* x_0.

2. $S(x_0, R) \overset{def}{=} \{x \in X|\ \ d(x_0, x) = R\}$ —*сфера.*

3. (X, d) –метрическое пространство, $U \subseteq X$
   U – *открыто*, если:
   $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : \quad B(x, \varepsilon) \subseteq U.$

Теорема об открытости шара.

Открытый шар открыт.

Доказательство:

Рассмотрим $x \in B(x_0, R)$.

$\varepsilon := R - d(x_0, x) > 0$ (т.к. $x \in B(x_0, R) \Rightarrow d(x_0, x) < R$)

Пусть $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon = R - d(x_0, x)$

$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < R \Rightarrow y \in B(x_0, R) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, R).$

QED.

Теорема о свойствах Ω

$\Omega \overset{def}{=} \{U \subseteq X|\ \ U$–открыто$\}$; $\ X$–метрическое пространство.

Тогда:

1. $\varnothing,\ X \in \Omega$

2. $U,\ V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$

3. $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

Доказательство:

1. 1) $\varnothing$—очевидно. 2) Рассмотреть для каждого элемента $\varepsilon = 1$ (или любой другой, далее очевидно.)

2. Рассмотрим $y \in U \cap V$

   $y \in U \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall x \in X \ \ d(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow x \in U$

   $y \in V \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0 : \forall x \in X \ \ d(x, y) < \varepsilon_2 \Rightarrow x \in V$

   $\lhd \varepsilon := min(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$

   Далее очевидно.

3. $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \Rightarrow \exists \varepsilon : (\forall y \in X \ \ d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U_i \Rightarrow y \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha)$

QED.

1.2.2 Топологическое пространство. Топология.

○ *Определение:*

(X,Ω)— *топологическое пространство*, если:

1. $\varnothing,\ X\in\Omega$
2. $U,V\in\Omega\Rightarrow U\cap V\in\Omega$
3. $U_\alpha\in\Omega\Rightarrow \underset{\alpha\in I}{\cup}U_\alpha\in\Omega$

Ω – *топология*, элементы Ω – *открытые.*

Примеры топологических пространств.

1. $\Omega=2^X$ – *дискретная топология.*

   • *Упражнение:* Доказать, что *дискретной метрике* $d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$ соответствует дискретная топология.

2. $\Omega=\{\varnothing,\ X\}$ - *антидискретная топология*
3. $X=\mathbb{R};\ \ \Omega=\{(a,+\inf)|\ \ a\in\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing,\ \mathbb{R}\}$ - *стрелка*

1.2.3 Окрестности. Теорема о дополнении подмножества.

○ *Определения:*

$x_0\in X$.

1. *Окрестность точки* x_0 — произвольное открытое множество, содержащее x_0.
2. ε*–окрестность (.)* x_0–$B(x_0,\varepsilon)$. Определено только для метрических пространств.

Теорема о дополнении подмножества

$F\subset X$; X — метрическое пространство

1. $(\forall x\ \ \forall\varepsilon\ \ (B(x,\varepsilon)\backslash\{x\}\cap F\neq\varnothing)\Rightarrow x\in F)\iff X\backslash F$–открыто.
2. X— топологическое пространство.

   $((\forall U_x$—откр. $U_x\cap F\backslash\{x\}\neq\varnothing)\Rightarrow x\in F)\iff X\backslash F$ — открыто.

Доказательство:

1. Если X— метрическое пространство, то 1. $\iff$ 2. :

   1. $\Leftarrow$ 2. : – очевидно ; 1. $\Rightarrow$ 2. :

   Рассмотрим U_x –откр. $\Rightarrow\exists\varepsilon: B(x,\varepsilon)\subseteq U_x\Rightarrow((B(x,\varepsilon)\backslash\{x\})\cap F\subset U_x\backslash\{x\}\cap F\Rightarrow U_x\backslash\{x\}\cap F\neq\varnothing.$

QED.

Достаточно доказать (2.)

1. $\underline{\Rightarrow}$, т.е. $x \notin F \Rightarrow \exists U_x : U_x \backslash \{x\} \cap F = \varnothing \Rightarrow U_x \cap F = \varnothing \Rightarrow U_x \subseteq X \backslash F \Rightarrow \bigcup\limits_{x \in X \backslash F} U_x \subseteq X \backslash F$; "$\supseteq$"- тоже(оч.),
   $\Rightarrow \bigcup\limits_{x \in X \backslash F} U_x = X \backslash F$, но $\cup U$ - откр.

   QED.

2. $\underline{\Leftarrow}$:
   Пусть $X \backslash F$–откр. и $\forall U_x$–откр. $(U_x \backslash \{x\} \cap F \neq \varnothing)$
   Допустим, что $x \notin F \;\Rightarrow\; x \in (X \backslash F)$
   Тогда $\varnothing \neq ((X \backslash F) \backslash \{x\}) \cap F = ((X \backslash F) \cap F) \backslash \{x\} = \varnothing$. Противоречие.[1]

   QED.

1.3 Замкнутые множества.

<u>∘ *Определение:*</u>
F — *Замкнуто* $\Longleftrightarrow X \backslash F$ — открыто.

1.3.1 Теорема о множестве замкнутых множеств

$\mathcal{F}$ — множество замкнутых множеств.
Тогда:

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{F}$
2. $F,\ G \in \mathcal{F} \Longrightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$
3. $F_\alpha \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Доказательство:

1. очевидно: $(X \backslash X = \varnothing \;\;;\;\; X \backslash \varnothing = X)$
2. $F \cup G$ — замкнуто $\Longleftrightarrow X \backslash (F \cup G)$ —открыто.
   Но $X \backslash (F \cup G) = (X \backslash F) \cap (X \backslash G)$ – открыто как пересечение двух открытых.
3. $X \backslash (\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (X \backslash F_\alpha)$ — рассуждение аналогично (2.)

1.3.2 Теорема о соответствующей топологии

Пусть $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ такое, что:

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{F}$
2. $F,\ G \in \mathcal{F} \Longrightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$

[1] Последняя часть доказательства является авторской. Лекционный вариант утерян бесследно.

3. $F_\alpha \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$

Тогда существует единственная топология Ω такая, что $\mathcal{F}$ - множество замкнутых множеств.

Доказательство:

1. Докажем единственность:

   Если такая топология Ω существует, то $\Omega = \{X \backslash F |\ F \in \mathcal{F}\}$.

   Действительно, каждое такое множество должно входить в Ω, и ни одно другое в неё входить не может.

   Таким образом, Ω - единственная возможная топология по построению.

2. Теперь докажем, что построенная Ω действительно является топологией. Для этого проверим 3 необходимых свойства из определения.

   (a) $\varnothing,\ X \in \Omega$ – очевидно.

   (b) $U = X \backslash F,\quad V = X \backslash G;\quad F,\ G \in \mathcal{F}$

   $U \cap V = (X \backslash F) \cap (X \backslash G) = X \backslash (F \cup G) \Longrightarrow U \cap V \in \Omega$. – здесь мы пользуемся свойством (2).

   (c) $U_\alpha = X \backslash F_\alpha;\quad F_\alpha \in \mathcal{F}$

   $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} X \backslash F_\alpha = X \backslash \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ – здесь мы пользуемся свойством (3).

1.4 Внутренность, замыкание и граница.

$\circ$ *Определения:*

$A \subseteq X$

1. x — *Внутренняя точка* A, если $\exists\ U_x \in \Omega :\ U_x \subseteq A$, т.е. точка входит в A с некоторой окрестностью. Заметим, что условие можно переписать как $(U_x \cap (X \backslash A)) = \varnothing$

2. x — *Внешняя точка* A, если $\exists\ U_x \in \Omega :\ U_x \subseteq X \backslash A$, т.е. точка входит в дополнение A с некоторой окрестностью. Иначе говоря, $U_x \cap A = \varnothing$.

3. x — *Граничная точка* A, если $\forall\ U_x \in \Omega :\ (U_x \cap A \neq \varnothing)\ \&\ (U_x \cap (X \backslash A) \neq \varnothing)$, т.е. любая окрестность пересекает и A, и дополнение A.

   $\bullet$ *Упражнение:* Доказать, что в случае метрических пространств определения останутся эквивалентными при замене окрестностей на шаровые.

4. x — *Точка прикосновения* A, если $\forall\ U_x\ \ U_x \cap A \neq \varnothing$

5. *Внутренность* $Int(A)$ — наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A.

   Примечание: Также используется обозначение $\overset{\circ}{A}$.

6. *Замыкание* $Cl(A)$ — наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A.

   Примечание: Также используется обозначение $\overline{A}$ и $cl(A)$.

7. *Граница* ∂A — множество граничных точек A.

   Примечание: Также используется обозначение $Fr(A)$. Если необходимо подчеркнуть, к какому всеобъемлещему множеству относится граница, пишут $\partial_X A$.

1.4.1 Существование внутренности и замыкания

1. $Int(A)$ существует и $Int(A) \overset{1}{=} \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U \overset{2}{=} \{\ x\ |\ \ x\text{– внутр.}\}$

   Доказательство:

   1. Первое равенство справедливо, т.к. объединение открытых множеств открыто, содержится в A и любое открытое подмножество A лежит в нем по определению.

   2. Покажем, что второе множество содержится в первом и наоборот.

   (a) Пусть x — внутренняя точка A. Тогда существует $U_x \subseteq A$. Но $U_x \subseteq \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U$, значит $x \in \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U$, то есть $\{\ x\ |\ \ x\text{– внутр.}\} \subseteq \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U$

   (b) Пусть точка x лежит в нашем объединении. Значит существует открытое множество, в котором она лежит. Но тогда x - внутренняя точка A, то есть любая точка из объединения является внутренней, а значит $\{\ x\ |\ \ x\text{– внутр.}\} \supseteq \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A, \\ U \in \Omega}} U$.

   Значит множества действительно равны. Заметим, что иногда последняя часть равенства используется в качестве определения.

2. $Cl(A)$ существует и $Cl(A) \overset{1}{=} \bigcap\limits_{\substack{F\supseteq A,\\ F\in\mathcal{F}}} F \overset{2}{=} \{x|\ \ x\text{—т. прикосн. A}\}$.

   Доказательство:

   $R := \bigcap\limits_{\substack{F\supseteq A,\\ F\in\mathcal{F}}} F \supseteq A$, R - замкнуто как пересечение замкнутых. Если замкнутое множество G содержит A, то G содержит и R, ведь G входит в пересечение. Значит R - действительно наименьшее (по включению) замкнутое множество, содержащее A.

1.4.2 Свойства замыкания, внутренности и границы.

1. $X\backslash Cl(A) = Int(X\backslash A)$. - это очевидно, но давайте докажем:

   Доказательство:

   $X\backslash Cl(A) = X\backslash(\cap F)^2 = \cup(X\backslash F) = [U = X\backslash F \text{ -открыто}] = \bigcup\limits_{U\subseteq(X\backslash A)} U = Int(X\backslash A)$.

2. $X\backslash Cl(A)$ - множество всех внешних точек A. Следует напрямую из пункта 1.

3. $X\backslash Int(A) = Cl(X\backslash A)$. Доказывается абсолютно аналогично пункту 1.

Выпишем ещё несколько свойств, оставив часть из них читателю в качестве упражнения.

1. (a) A - откр. $\iff A = Int(A)$

   (b) A - замкнуто $\iff A = Cl(A)$

2. (a) $A \subseteq B \Longrightarrow Int(A) \subseteq Int(B)$

   (b) $A \subseteq B \Longrightarrow Cl(A) \subseteq Cl(A)$

3. (a) $Int(A\cap B) = Int(A) \cap Int(B)$

   (b) $Cl(A\cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$

4. (a) $Int(A\cup B) \supseteq Int(A) \cup Int(B)$

   (b) $Cl(A\cap B) \subseteq Cl(A) \cap Cl(B)$

Приведем лишь доказательства пунктов (a), пункт (b) же выводится либо из (a), либо аналогично (a).
Итак, начнем.

1. Как и всегда в таких теоремах, разобьем утверждение на 2 и докажем их по отдельности.

   $\underline{\Leftarrow}$: На самом деле очевидно, т.к. $A = Int(A) = \cup U_x$ — открыто как объединение открытых.

   $\underline{\Rightarrow}$: A — открыто, $A \subseteq A$. Значит A входит в объединение открытых подмножеств, содержащихся в A, откуда очевидно $A = Int(A)$.

2. Воспользуемся другим определением внутренности: $Int(A) = \{\ x|\ \ x$ - внутр. в A$\}$.

   Заметим, что если x - внутр. в A, $A \subseteq B$, то x - внутр. в B ($U_x \subseteq A \subseteq B$). Откуда $Int(A) = \{\ x|\ \ x$ - внутр. в A$\} \subseteq \{\ x|\ \ x$ - внутр. в B$\} = Int(B)$.

[2] Здесь и далее индексы объединения/пересечения/суммирования пишутся только в первом употреблении и далее опускаются чтобы не загромождать текст. Как правило всё ясно из контекста и без них.

3. Существует по меньшей мере 2 доказательства данного факта. Мы приведем лишь один, оставив второй на совесть читателя.

   Как и всегда в таких ситуациях, разобьем утверждение на 2 и докажем их по отдельности.

   $\subseteq$: $A \cap B \subseteq A \Longrightarrow Int(A \cap B) \subseteq Int(A)$ (по пункту (2)).

   Аналогично, $Int(A \cap B) \subseteq Int(B)$, откуда $Int(A \cap B) \subseteq Int(A) \cap Int(B)$.

   $\supseteq$:

$$\begin{cases} A \supseteq Int(A) \\ B \supseteq Int(B) \end{cases} \mid \Longrightarrow A \cap B \supseteq Int(A) \cap Int(B) \Longrightarrow Int(A \cap B) \supseteq Int(A) \cap Int(B)$$

   (здесь используются сразу пункты 1 и 2)

4. Пусть x — внутренняя точка A. Тогда она внутренняя и для $A \cup B$, значит $Int(A) \subseteq Int(A \cup B)$. Аналогично для $Int(B)$.

   Тогда $Int(A) \cup Int(B) \subseteq Int(A \cup B) \cup Int(A \cup B) = Int(A \cup B)$.

$QED.$[3]

1.5 База топологии.

∘ *Определение:*

$(X, \ \Omega)$ - топологическое пространство. $\Sigma \subseteq \Omega$ — *База топологии*, если любой элемент из Ω представим в виде объединения некоторых элементов из Σ.

1.5.1 Критерий базы топологии Ω

Оказывается, что определение базы Σ для топологии Ω эквивалентно совокупности следующих двух условий:

1. $\forall U \in \Omega \ \forall x \in U \ \ \exists S \in \Sigma : \ x \in S \subseteq U$

2. $\forall S \in \Sigma : \ \ S$ — откр.

Доказательство:

$\Rightarrow$:

1. По условию, $\forall U \in \Omega \ \exists I : \ \{S_\alpha \in \Sigma\}_{\alpha \in I} : \ \ U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha$

   Тогда $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha_0 \in I : \ x \in S_{\alpha_0}$, но $S_{\alpha_0} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha = U$. $S = S_{\alpha_0}$ - подходит.

2. очевидно из определения.

$\Leftarrow$:

По условию, $\forall x \in U \ \ \exists S_x \in \Sigma : \ \ x \in S_x \subseteq U$

Но тогда $U \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in U} S_\alpha \subseteq U \ \ \Longleftrightarrow \ \bigcup\limits_{\alpha \in U} S_\alpha = U$.

[3] Пункты 1-2,4 созданы вашим покорным слугой. Лекционным считать только пункт 3.

• *Упражнение:* Докажите, что шары - база метрической топологии.

1.5.2 Критерий базы некоторой топологии

Оказывается, что Σ — база некоторой топологии тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. $\forall x \in X\ \exists S_x : \quad x \in S_x$
2. $\forall S_{1,2} \in \Sigma : \quad \forall x \in S_1 \cap S_2 \ \ \exists S_x \in \Sigma : \ x \in S_x \subseteq S_1 \cap S_2$

   Причем заданная топология единственна.

Доказательство:

$\underline{\Rightarrow}$:

1. $\forall x \in X \in \Omega \Longrightarrow \ \exists I : \ S_\alpha \in \Sigma \ \ \& \ \ X = \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha$

   $| \Rightarrow \quad \forall x \in X \exists \alpha : \quad x \in S_\alpha.$
2. $S_1 \cap S_2$ - откр. $\Longrightarrow \quad \exists I : S_\alpha \in \Sigma;$

   $S_1 \cap S_2 = \underset{\alpha \in I}{\cup} S_\alpha \ \Longrightarrow \exists \alpha : \ x \in S_\alpha \subseteq S_1 \cap S_2.$

$\underline{\Leftarrow}$:

Если топология существует, то $\Omega = \underset{\alpha \in I}{\cap} S_\alpha | \ \ S_\alpha \in \Sigma$

Если это топология, то Σ — её база. Проверим, что Ω — действительно топология.

1) $\varnothing$ — "пустое объединение"$(|I| = 0)$.

   X есть по свойству 1. Например, можно взять объединение всех S из Ω.
2) $U, V \in \Omega, \iff U = \cup S_\alpha, V = \cup S_\beta.$

   $U \cap V = (\cup S_\alpha) \cap (\cup S_\beta) = \cup (S_\alpha \cap S_\beta) \boxed{=}$

   $\forall x \in S_\alpha \cap S_\beta \ \ \exists S_x : x \in S_x \subseteq S_\alpha \cap S_\beta$ (свойство 2)

   $S_\alpha \cap S_\beta \subseteq \underset{x \in S_\alpha \cap S_\beta}{\cup} S_x \subseteq S_\alpha \cap S_\beta$

   $\boxed{=} \underset{\alpha,\beta}{\cup} (\underset{x \in S_\alpha \cap S_\beta}{\cup} S_x)$ - лежит в Ω. Объясним это в пункте 3, попутно доказав его.
3) $\underset{\beta \in I}{\cup} S_\beta = \underset{\beta \in I}{\cup} (\underset{\alpha \in I_b}{\cup} S_\alpha)$ - это объединение объединений множеств из базы. Поскольку объединение ассоциативно, это просто объединение множеств из базы. А значит, оно лежит в Ω.

QED.

Пример

X, Y – топологические пространства

$$\{U \times V | \ \ U\text{– откр. в X , } V\text{– откр. в Y}\} \text{ — База топологии.}$$

Доказывается непосредственно.

1.6 Индуцированная топология

◦ *Определение:*

X – т.п.; $A \subseteq X$

$\Omega_A := \{U \cap A|\ \ U \in \Omega\}$ — *индуцированная топология на A.* Само построение понадобится нам чуть позже, а сейчас ограничимся лишь тем, что докажем, что это действительно топология.

Доказательство:

1. $\varnothing = \varnothing \cap A;\ \ A = X \cap A$
2. $(U \cap A) \cap (V \cap A) = (U \cap V) \cap A$
3. $\bigcap\limits_{\alpha}(U_\alpha \cap A) = (\bigcap\limits_{\alpha} U_\alpha) \cap A$

Пока на этом всё. Читателю в упражнение остаётся проверить, что же происходит с метрикой под действием индуцирования.

1.7 Непрерывные отображения

1.7.1 Непрерывность в точке

Определения.

1. Следующие определения эквивалентны, в чём читатель легко может убедиться сам. Итак,
   X, Y—м.п.
   $f : X \longrightarrow Y$—*непрерывно в точке a*, если:

   (a) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 :\ \forall x\ \ d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$

   (b) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 :\ \forall x\ \ x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$

   (c) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 :\ f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon).$

2. Естественно продолжить предыдущее определение на произвольную топологию. Итак,
   X, Y—т.п.
   $f : X \longrightarrow Y$—*непрерывно в точке a*, если:
   $\forall U_{f(a)}\ \ \exists V_a : f(V_a) \subset U_{f(a)}.$ $(*)$

Это кажется нам очевидным, но давайте все же формально докажем:

Теорема.

Для метрических пространств $(*)$ дает то же самое.

Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$:

   Доказываем: f—непрерывно в метрическом смысле $\Longrightarrow f$—непрерывно в топологическом смысле.

   Рассмотрим $U_{f(a)} \in \Omega_Y \quad \Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 : \ B_{f(a)}(\varepsilon) \subset U_{f(a)}$

   Тогда $\exists \delta \quad : \ f(B(a, \delta)) \subset B_{f(a)}(\varepsilon) \subset U_{f(a)}$.

   $V_a := B(a, \delta)$.

2. $\boxed{\Leftarrow}$:

   $B(f(a), \varepsilon) \in \Omega_Y \quad \Longrightarrow \quad \exists V_a \in \Omega_X : f(V_a) \subset B(f(a), \varepsilon)$

   $V_a \in \Omega_X \Longrightarrow \quad \exists \delta : \ B_a(\delta) \subset V_a$.

   $f(B_a(\delta)) \subset f(V_a) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

QED.

1.7.2 Непрерывность отображения

Аналогии с матанализом возникают у вас не случайно, так что, думаю, вы знаете, что будет дальше. Итак,

Определение. X, Yтопологические пространства.

$f : \ X \to Y$—<u>*непрерывно*</u>, если:

$\forall U \in \Omega_Y : \quad f^{-1}(U) \in \Omega_X$.

И тут читатель скажет: Георгий, ты што дурак? непрерывность ета другое!

Не волнуйся, дорогой читатель. Следующая теорема тебя успокоит.

Эквивалентность определений

Теорема.

f—непрерывно $\quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x \in X f$–непрерывно в $x)$.

Доказательство.

$\underline{\Rightarrow}$:

Рассмотрим $U_{f(a)}$. $V_a := f^{-1}(U_{f(a)})$–открыт как прообраз открытого. $a \in V_a$ т.к. $f(a) \in U_{f(a)}, f(V_a) \subset U_{f(a)}$ по построению.

$\underline{\Leftarrow}$:

$U \in \Omega_Y$.

$f(x) \in U \quad \Longrightarrow \quad \exists V_x : f(V_x) \subset U \quad \Longleftrightarrow \quad V_x \subset f^{-1}(U)$.

$f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(U)} V_x$—откр. как объединение открытых.

QED.

Свойства

1. $g: X \to Y; \quad f: Y \to Z, \quad f, g$—непрерывны.

   Тогда отображение $f \circ g: X \to Z$ тоже непрерывно.

   Доказательство тривиально: $(f \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(U))$– открыто по условию.

2. $A \subset X$. $in_A : A \underset{a \longrightarrow a}{\hookrightarrow} X$—непрерывно.

   Доказательство.

   $U \in \Omega_X \Longrightarrow in^{-1}(U) = U \cap A$–открыто по определению индуцированной топологии.

2.1 Следствие:

   $A \subset X; \quad f: X \to Y$–непр. Тогда $f|_A : \underset{a \longrightarrow f(a)}{A \to Y}$–непрерывно.

   Доказательство: $f|_A = f \circ in_A$ – непрерывно как композиция непрерывных.

3. $f: X \to Y$–непр. $\iff \quad f|^{f(X)} : \underset{x \longrightarrow f(x)}{X \to f(X)}$ – *<u>ограничение</u> – непрерывно.*

   Доказательство остается читателю в качестве упражнения.

4. $pr_X : \underset{(x,y) \longrightarrow x}{X \times Y \to X}; \quad pr_Y : \underset{(x,y) \longrightarrow y}{X \times Y \to Y}$ — непрерывны.

   Докажем играючи: $pr_X^{-1}(U) = U \times Y \in \Sigma_{X \times Y}$.(Мы обсуждали этот пример когда речь шла о критериях базы.)

Сопутствующие теоремы

Теорема. $(f: X \to Y \text{ — непр.}) \quad \iff \quad (\forall F \in \mathcal{F}_Y : \; f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X)$.

Доказательство.

$\underline{\Rightarrow}$:

$f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \backslash U) = \{x | f(x) \in Y \backslash U\} = \{x | f(x) \notin U\} = X \backslash \{x | f(x) \in U\} = X \backslash f^{-1}(U)$ – замкнуто.

$\underline{\Leftarrow}$:

Рассуждение аналогично, поэтому мы позволим себе опустить несколько переходов, оставив их осмысление на совесть читателя.

$f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \backslash F) = X \backslash f^{-1}(F)$.

QED.

Теорема. $f: X \to Y; \quad U_\alpha \in \Omega_X; \quad f|_{U_\alpha}$ — непр; $\quad \underset{\alpha}{\cup} U_\alpha = X$.

Тогда f непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $V \in \Omega_Y$.

$(f|U_\alpha)^{-1}(V) = \{x \in U_\alpha | f(x) \in V\} = \{x \in U_\alpha | x \in f^{-1}(V)\} = U_\alpha \cap f^{-1}(V)$.

$f^{-1}(V) = X \cap f^{-1}(V) = (\underset{\alpha}{\cup} U_\alpha) \cap f^{-1}(V) = \cup(U_\alpha \cap f^{-1}(V)) = \underset{\alpha}{\cup}((f|U_\alpha)^{-1}(V)) \in \Omega_X$. (Заметим, что поскольку U_α открыт, $W \cap U_\alpha$ тоже открыт для любого $W \in \Omega_X$, а значит, если $(f|U_\alpha)^{-1}(V)$ открыто в U_α, то оно открыто и в X. В следующей теореме соображение будет таким же.)

QED.

Теорема. $f:\ X \to Y;\quad F_{1..n} \in \mathcal{F};\quad f|_{F_i}$ — непр.; $\quad \bigcup\limits_{1\le i\le n} F_i = X.$

Тогда f — непрерывно.

Доказательство.

Рассмотрим произвольное $G \in \mathcal{F}_Y$.

$(f|F_i)^{-1}(G) \ = \ ... \ = \ F_i \cap f^{-1}(G).$

$f^{-1}(G) \ = \ X \cap f^{-1}(G) \ = \ (\bigcup\limits_{1\le i\le n} F_i) \cap f^{-1}(G) = \bigcup\limits_i (F_i \cap f^{-1}(G)) = \bigcup\limits_i ((f|F_i)^{-1}(G)) \in \mathcal{F}_X.$

QED.

1.7.3 Фактор-пространство.

Определение .

X — топологическое пространство; $\sim$ — отношение эквивалентности на X; $[x] = \{y | y \sim x\}$.

Тогда $pr : \underset{x \longrightarrow [x]}{X \to X/\sim}$. $X/\sim$ — *Фактор-пространство.* $\Omega_{X/\sim} := \{A \subset X/\sim | pr^{-1}(A) \in \Omega_X\}$.

Утверждение .

$\Omega_{X/\sim}$ — топология.

Доказательство.

1 $pr^{-1}(\varnothing) = \varnothing;\quad pr^{-1}(X/\sim) = X.$

2 $U, V \in \Omega_X \iff pr^{-1}(U), pr^{-1}(V) \in \Omega_{X/\sim}.$
  $pr^{-1}(U) \cap pr^{-1}(V) = pr^{-1}(U \cap V) \in \Omega_{X/\sim}.$

3 $\bigcup\limits_\alpha (pr^{-1}(U_\alpha)) = pr^{-1}(\bigcup\limits_\alpha U_\alpha) \in \Omega_{X/\sim}.$

Теорема. $f : X \Rightarrow Y$ — непр.; $\ \sim$ – отн. экв.; $\ (x_1 \sim x_2 \ \Leftrightarrow \ f(x_1) == f(x_2))$

$\overline{f} : \underset{[x] \longrightarrow f(x)}{X/\sim \to Y}$ — *Фактор-отображение* $\overset{!}{-}$ непрерывно.

Доказательство.

Рассмотрим произвольное $U \in \Omega_Y$.

По определению, $(\overline{f})^{-1}(U) \in \Omega_{X/\sim} \iff pr^{-1}((\overline{f})^{-1}(U)) \in \Omega_X$.

Но $pr^{-1}((\overline{f})^{-1}(U)) \ = \ \{x | \overline{f}([x]) \in U\} \ = \ \{x | f(x) \in U\} \ = \ f^{-1}(U) \ \in \Omega_X$ — по условию.

QED.

1.7.4 Гомеоморфизм

Определение. $f : X \to Y$ —*гомеоморфизм* $\overset{def}{\iff}$ f – биекция, непрерывно И f^{-1} непрерывно.

Читатель может подумать, что последнее условие излишне. Классическим опровержением такого мнения служит биекция полуинтервала в окружность.

Определение. X, Y —*гомеоморфны* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ между ними существует гомеоморфизм.

Несколько примеров гомеоморфных пространств приведены на картинке.

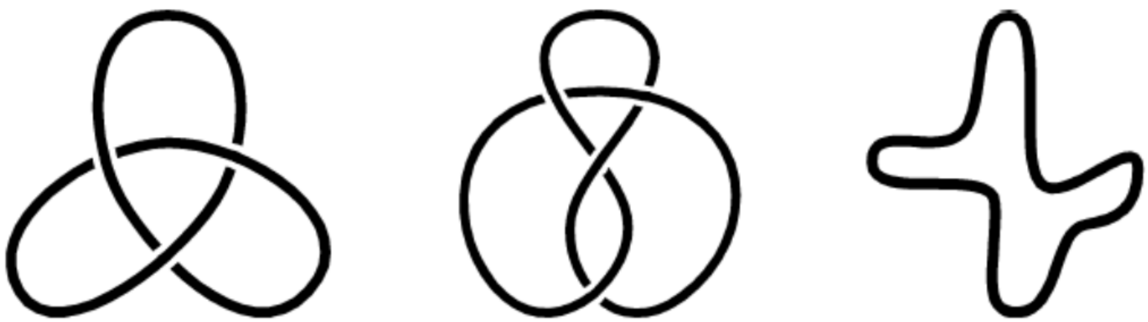

Рис. 1.1. Трилистник, восьмерка и тривиальный узел

1.8 Аксиомы отделимости.

Сразу оговоримся, что здесь аксиомы - не то, что требуется от любой топологии. В нашем случае, аксиомы - то, что мы можем потребовать, если сильно нужно.

Определения. $\underline{T_0}$: Пусть даны любые две несовпадающие точки $x, y \in X$, тогда по крайней мере у одной из них есть окрестность, которая не содержит другую.

$\underline{T_1}$: Для любых двух несовпадающих точек $x, y \in X$, найдется окрестность y, не содержащая x.

$\underline{T_2}$: *хаусдорфовость* — Любые две различные точки $x, y \in X$ обладают окрестностями $U_x,\ U_y$, которые не пересекаются.

$\underline{T_3}$: *регулярность* — $\forall x \in X,\ \ \forall F \in \mathcal{F}\ \ \exists\, U_x, U_F :\ \ U_x \cap U_F = \varnothing$.

$\underline{T_4}$: $\forall F_1 \cap F_2 = \varnothing\ \ \exists\, U_{F_1}, U_{F_2} :\ \ U_{F_1} \cap U_{F_2} = \varnothing$.

Иногда для T_3, T_4 также требуют выполнение T_1. Мы этого делать не будем.