

Лекция 1.

Косовский Н.Н.

11 февраля 2020 г.

Содержание

1	Метрическое пространство. Метрика.	3
1.1	Примеры метрик.	3
2	Открытые множества. Топологические пространства.	3
2.1	Открытые множества. Свойства.	3
2.1.1	Теорема об открытости шара.	4
2.1.2	Теорема о свойствах Ω	4
2.2	Топологическое пространство. Топология.	5
2.2.1	Примеры топологических пространств.	5
2.3	Окрестности. Теорема о дополнении подмножества.	5
2.3.1	Теорема о дополнении подмножества	5

1 Метрическое пространство. Метрика.

◦ Определение:

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — метрика, если:

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

(X, d) — метрическое пространство.

1.1 Примеры метрик.

1. V — векторное пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

$$\triangleleft d(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \sqrt{\langle \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \rangle} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$$

2. (E, V) — аффинное пространство, скалярное произведение на V .

3. ◦ Определение:

Норма $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$1. \|\vec{v}\| \geq 0; \|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

$$2. \|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| * \|\vec{v}\|$$

$$3. \|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\|$$

Тогда $d(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$ — метрика.

$$3.1 V = \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

$$\|x\|_{\inf} = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

4. S^2 — сфера, 2 метрики:

$$1. \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ (Стандартная метрика),}$$

2. Угловая метрика.

2 Открытые множества. Топологические пространства.

2.1 Открытые множества. Свойства.

○ Определения:

1. $R > 0$, $B(x_0, R) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid d(x_0, x) < R\}$ — *открытый шар радиуса R с центром x_0 .*
2. $S(x_0, R) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid d(x_0, x) = R\}$ — *сфера.*
3. (X, d) — метрическое пространство, $U \subseteq X$
 U — *открыто*, если:
$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

2.1.1 Теорема об открытости шара.

Открытый шар открыт.

Доказательство:

Рассмотрим $x \in B(x_0, R)$.

$\varepsilon := R - d(x_0, x) > 0$ (т.к. $x \in B(x_0, R) \Rightarrow d(x_0, x) < R$)

Пусть $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon = R - d(x_0, x)$

$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < R \Rightarrow y \in B(x_0, R) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, R).$

QED.

2.1.2 Теорема о свойствах Ω

$\Omega \stackrel{def}{=} \{U \subseteq X \mid U \text{ — открыто}\};$ X — метрическое пространство.

Тогда:

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. $U, V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3. $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

Доказательство:

1. 1) \emptyset — очевидно. 2) Рассмотреть для каждого элемента $\varepsilon = 1$ (или любой другой, далее очевидно.)

2. Рассмотрим $y \in U \cap V$

$$y \in U \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall x \in X \quad d(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow x \in U$$

$$y \in V \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0 : \forall x \in X \quad d(x, y) < \varepsilon_2 \Rightarrow x \in V$$

$$\triangleleft \varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Далее очевидно.

3. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \Rightarrow \exists \varepsilon : (\forall y \in X \quad d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U_i \Rightarrow y \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)$

QED.

2.2 Топологическое пространство. Топология.

○ Определение:

(X, Ω) — топологическое пространство, если:

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. $U, V \in \Omega \Rightarrow U \cap V \in \Omega$
3. $U_\alpha \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \Omega$

Ω — топология, элементы Ω — открытые.

2.2.1 Примеры топологических пространств.

1. $\Omega = 2^X$ — дискретная топология.

• Упражнение: Доказать, что дискретной метрике $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ соответствует дискретная топология.

2. $\Omega = \{\emptyset, X\}$ — антидискретная топология
3. $X = \mathbb{R}; \Omega = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ — стрелка

2.3 Окрестности. Теорема о дополнении подмножества.

○ Определения:

$x_0 \in X$.

1. Окрестность точки x_0 — произвольное открытое множество, содержащее x_0 .
2. ε -окрестность (\cdot) x_0 — $B(x_0, \varepsilon)$. Определено только для метрических пространств.

2.3.1 Теорема о дополнении подмножества

$F \subset X; X$ — метрическое пространство

1. $(\forall x \forall \varepsilon (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap F \neq \emptyset) \Rightarrow x \in F) \iff X \setminus F$ — открыто.
2. X — топологическое пространство.
 $((\forall U_x \text{ — отк. } U_x \cap F \setminus \{x\} \neq \emptyset) \Rightarrow x \in F) \iff X \setminus F$ — открыто.

Доказательство:

1. Если X — метрическое пространство, то $1. \iff 2.$:
 $1. \Leftarrow 2.$: — очевидно ; $1. \Rightarrow 2.$:

Рассмотрим U_x — отк. $\Rightarrow \exists \varepsilon : B(x, \varepsilon) \subseteq U_x \Rightarrow ((B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap F \subset U_x \setminus \{x\} \cap F \Rightarrow U_x \setminus \{x\} \cap F \neq \emptyset$.

QED.

Достаточно доказать (2.)

1. \Rightarrow , т.е. $x \notin F \Rightarrow \exists U_x : U_x \setminus \{x\} \cap F = \emptyset \Rightarrow U_x \cap F = \emptyset \Rightarrow U_x \subseteq X \setminus F \Rightarrow \bigcup_{x \in X \setminus F} U_x \subseteq X \setminus F$; ” \supseteq ”- тоже(оч.),
 $\Rightarrow \bigcup_{x \in X \setminus F} U_x = X \setminus F$, но $\cup U$ - откp.

QED.

2. \Leftarrow :

Пусть $X \setminus F$ -откр. и $\forall U_x$ -откр. $(U_x \setminus \{x\} \cap F \neq \emptyset)$

Допустим, что $x \notin F \Rightarrow x \in (X \setminus F)$

Тогда $\emptyset \neq ((X \setminus F) \setminus \{x\}) \cap F = ((X \setminus F) \cap F) \setminus \{x\} = \emptyset$. Противоречие.¹

QED.

¹Последняя часть доказательства является авторской. Лекционный вариант утерян бесследно.