Министерство образования и науки Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. М. Устинов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.

ТЕКСТ ЛЕКЦИЙ

Санкт-Петербург
2012

Аннотация

Устинов Сергей Михайлович

Математические модели. Конспект лекций.

Рассматриваются методы анализа линейных математических моделей с определением характера наблюдаемости отдельных составляющих решения. Анализируются нелинейные модели, выявляются аттракторы различного типа (стационарные точки, предельные циклы, "странные" аттракторы), определяется устойчивость и орбитальная устойчивость этих аттракторов, строятся диаграммы стационарных и периодических решений, а также бифуркационные диаграммы различного типа в плоскости заданных параметров. Рассматриваются алгоритмы автоматизации процесса построения моделей на компьютере. Строятся асимптотические разложения решения по параметру в статических и динамических моделях.

Содержание:

Лекция 1. Понятие модели, функции и классификация моделей.

Модель – это представление объекта, системы или понятия (идеи) в некоторой форме, отличной от формы их реального существования. Это средство, помогающее в объяснении, понимании или совершенствовании системы. Оно способствует пониманию и изменению окружающей среды.

Функции моделей.

1. ***Средство осмысления действительности*** (реальных связей и закономерностей). Правильно построенная модель вынуждает нас организовать свои замыслы, оценить и проверить их обоснованность.
2. ***Средство общения*** (преимущество модели - сжатость и точность описания, что отличает ее от разговорных языков и делает более понятной общую структуру исследуемого объекта, а также вскрывает важные причинно-следственные связи).
3. ***Средство обучения и тренажа***.
4. ***Инструмент прогнозирования***.
5. ***Средство постановки экспериментов*** и пр.

Модели можно классифицировать самыми различными способами. Укажем лишь некоторые группы моделей, которые могут быть положены в основу **классификации**:

- ***статические*** и ***динамические***;
- ***детерминированные*** и ***стохастические***;
- ***дискретные*** и ***непрерывные*** и т.п.

Удобно представлять модели в виде непрерывного спектра, на одном конце которого точные модели или макеты реальных объектов, а на другом – абстрактные математические модели. Последовательно имеем:

- ***физические*** или ***натурные*** (к ним примыкает ***масштабированные***, как увеличенные, так и уменьшенные);
- ***аналоговые*** (свойства одного объекта представляются некоторым свойством другого объекта), примерами которых могут служить аналоговая ЭВМ, логарифмическая линейка, схемы, графики и др.;
- ***управленческие игры*** (чаще в диалоге "человек - ЭВМ");
- ***математические модели*** (символические).

В свою очередь, математические модели по ряду признаков имеют свою классификацию. Так, по характеру отображаемых свойств они делятся на функциональные и структурные. Первые отображают процессы функционирования объекта и часто имеют форму систем уравнений (тепловые, электрические, оптические, гидравлические, газодинамические и др.). Вторые же – только структурные свойства объекта и часто представляются в виде графов, матриц инциденций и смежности, списков и т.п.

В зависимости от сложности объекта при его анализе или проектировании используют большее или меньшее число уровней абстракции.

Наиболее крупными иерархическими уровнями являются уровни, называемые ***микроуровнем, макроуровнем*** и ***метауровнем***. Возникающие на практике фактические иерархические уровни или совпадают с одним из названных, или входят в один из них как некоторый подуровень.

На ***микроуровне*** используют математические модели, описывающие физическое состояние и процессы в сплошных средах. Фазовые переменные при этом фигурируют как функции многих независимых переменных, к которым относятся пространственные координаты и время, причем и пространство и время рассматриваются как непрерывные. Для моделирования здесь используется аппарат математической физики. Примерами служат дифференциальные уравнения в частных производных: уравнения электродинамики, теплопроводности, упругости, газовой динамики, отражающие процессы, протекающие в общем случае в трехмерной сплошной среде. Типовые фазовые переменные: электрические потенциалы, давления, температуры, концентрации частиц, плотности токов, механические напряжения и деформации. Анализ таких моделей сводится, как правило, к решению краевых задач математической физики.

На ***макроуровне*** производится дискретизация пространства и переход от распределенных моделей микроуровня к сосредоточенным моделям. Элементы этого уровня на микроуровне рассматривались как системы: резисторы, транзисторы, кронштейны, балки, станины, валы и пр. Типичные фазовые переменные: токи и напряжения, скорости и силы, потоки и давления и т.п. Они характеризуют проявления внешних свойств элементов при их взаимодействии между собой и внешней средой. Математические модели в этом случае - обыкновенные дифференциальные уравнения, превращающиеся в алгебраические и трансцендентные для статических моделей. С ростом числа элементов и сложности модели исследователь вынужден обратиться к моделированию на метауровне.

На ***метауровне*** системы представляют собой сложные устройства и комплексы. Роль элементов и внутренних параметров выполняют системы и выходные параметры макроуровня. Так, элементами для компьютера являются: процессор, оперативная память, устройство ввода-вывода и др. Выходные параметры: вероятность обслуживания поступивших заявок, среднее время простоя в очереди на обслуживание и т.п. К числу методов, применяемых на этом уровне, относятся: теория автоматического управления, планирование экспериментов, математическая логика, теория массового обслуживания и др. Это приводит *к* системам дифференциальных, логических уравнений, имитационным моделям систем массового обслуживания.

В настоящих лекциях рассматриваются методы анализа математических моделей динамических систем, в основном относящихся к макроуровню.

Принципы построения математических моделей.

В основу построения математической модели может быть положен один из следующих подходов.

1. ***Физический принцип***. Он основывается на полных физических представлениях о моделируемом объекте. Известны все соотношения, связывающие внутренние переменные друг с другом, а также с внешней средой. Сфера применения такого подхода ограничена классом хорошо изученных объектов, хотя он уже достаточно велик.

2. ***Принцип «черного ящика»***. Отсутствует информация не только об элементах, но и о структуре объекта. Можем лишь выделить входные воздействия и измерить результаты откликов на них выходных переменных.

3. ***Принцип «серого ящика»*** (полуфизический принцип). Это пример разумного компромисса между первыми двумя принципами. Имеется неполная (какая-то часть) информация об объекте. Одним из примеров является задача параметрической идентификации: имеются уравнения объекта с точностью до вектора неизвестных параметров. Далее компоненты этого вектора находятся из условия максимального соответствия выходных характеристик модели выходным характеристикам объекта, полученным, например, на основе экспериментов по принципу «черного ящика».

Требования к «хорошей» модели. «Хорошая» модель должна быть:

- простой и понятной пользователю;
- целенаправленной (в соответствии с целями и задачами, решаемыми данной моделью);
- надежной (гарантия от абсурдных результатов);
- удобной в управлении и обращении (общение должно быть легким);
- полной (с точки зрения возможностей решения главных задач);
- адаптивной (легкий переход к другим модификациям и смена данных);
- допускающей постепенные изменения (будучи изначально простой, она во взаимодействии с пользователем может становиться более сложной).

В свою очередь, к математическим моделям основными требованиями являются: *адекватность*, *универсальность* и *экономичность* (характеризуется затратами вычислительных ресурсов).

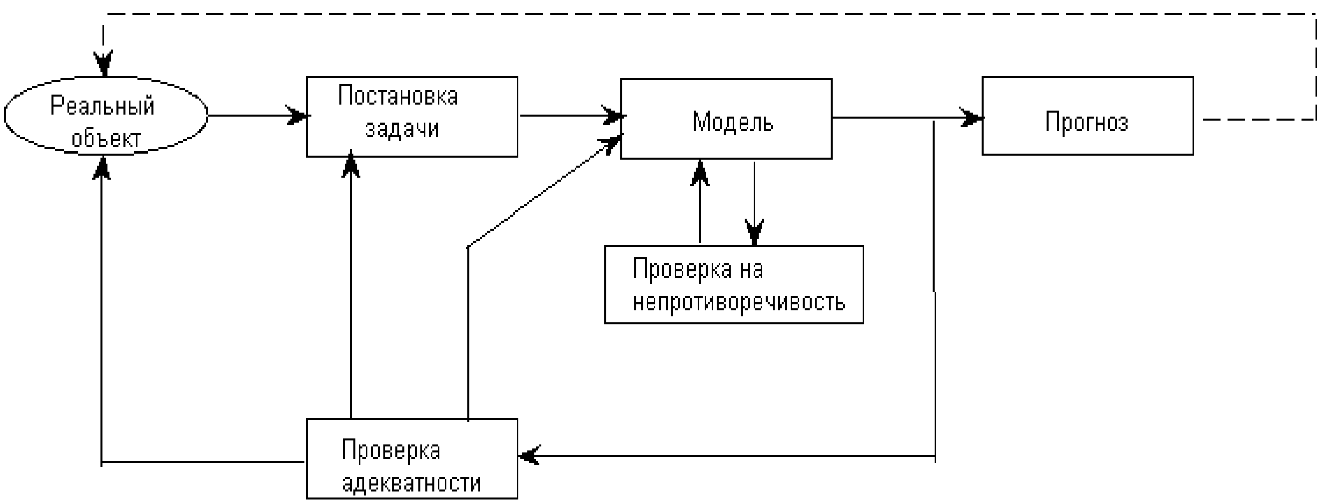


Рис.1.1.

Процесс моделирования может быть отражен следующими этапами.

1. Постановка задачи и определение типа модели (на этом этапе самое главное – сформулировать проблему).
2. Формулирование модели.
3. Проверка модели на «правдивость». При этом важна «правдивость» результатов, а не «правдивость» самой модели. Здесь же устанавливаются исходные предположения, на основе которых строилась данная модель, и проводится испытание модели, состоящее из серии проверок:
   - параметрам задают предельные значения (нет ли абсурдных результатов?);
   - проверка исходных предположений;
   - проверка преобразования информации от входа к выходу.

Все сказанное укладывается в схему рис.1.1.

Лекция 2. Фазовые портреты моделей.

Для геометрической иллюстрации решений как линейных, так и нелинейных систем, строят ***фазовый портрет*** модели в фазовом пространстве ее уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.1}$$

Решение уравнения первого порядка порождает следующие виды траекторий:

а) *одноточечная траектория* (положение равновесия);

б) *интервал* (концы интервала – положения равновесия);

в) *полупрямая* (один конец – положение равновесия, другой – точки $\pm\infty$).

Условимся, что при $f(x) > 0$ фазовая точка пробегает прямую слева направо, а при $f(x) < 0$ – справа налево). Примерами траекторий являются:

- $x' = x^2$ рис. 2.1а;
- $x' = x^3$ рис. 2.1б;
- $x' = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)$ рис. 2.1в;
- $x' = \sin(x)$ рис. 2.1г.

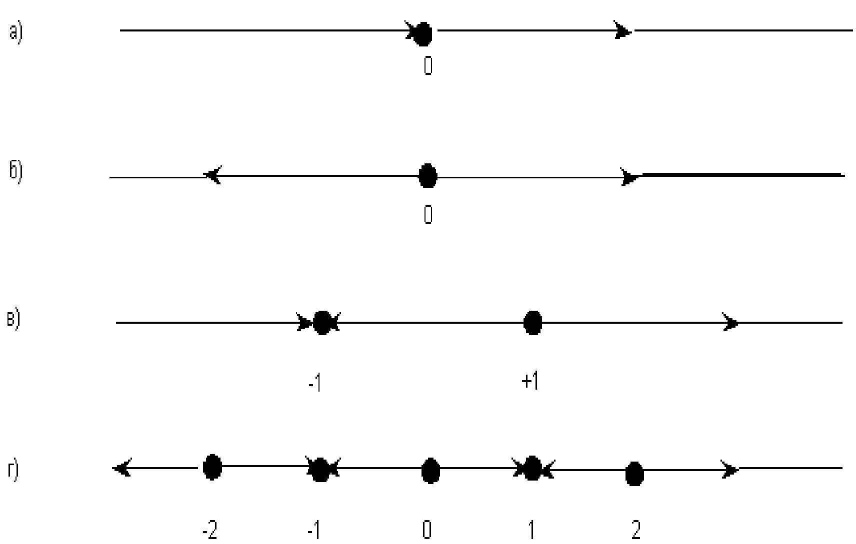


Рис. 2.1 Фазовые портреты в одномерном случае.

Теперь обратимся к системам второго порядка на примере линейных уравнений с матрицей 2х2, имеющей различные собственные значения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}. \tag{2.1}$$

Нулевая точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ очевидно является точкой равновесия. Пусть $\lambda_k, \mathbf{u}_k$ – собственные значения и собственные векторы матрицы **A**, а **U** – матрица со столбцами из собственных векторов $\mathbf{u}_k$:

$$\mathbf{Au}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k, \qquad \mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \mathbf{AU} = \mathbf{U}\quad, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU} = diag(\lambda_1, \lambda_2) \tag{2.2}$$

Тогда, выполнив в (2.1) замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{Uy}$, получаем систему уравнений с диагональной матрицей

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{\Lambda y}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \tag{2.3}$$

решение которой записывается в виде

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим различные сочетания значений λ_1 и λ_2.

Вариант 1. *Собственные значения вещественные одного знака*.

Пусть первоначально $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, например $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$. Тогда, если $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, то $y_1(t) = C_1 e^{-t}$, $y_2(t) = C_2 e^{-2t}$ и $y_2(t) = C_3 y_1^2(t)$, где $C_3 = \dfrac{C_2}{C_1^2}$. В зависимости от знака C_2 имеем две ветви параболы, отраженные на рис 2.2а. Для $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$ получаем траектории на оси абсцисс или ординат. Такое положение равновесия получило название ***устойчивый узел***.

Если $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, например $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, то аналогичные преобразования порождают рис 2.2б, отличающийся от рис 2.2а лишь направлением стрелок. Такое положение равновесия получило название ***неустойчивый узел***.

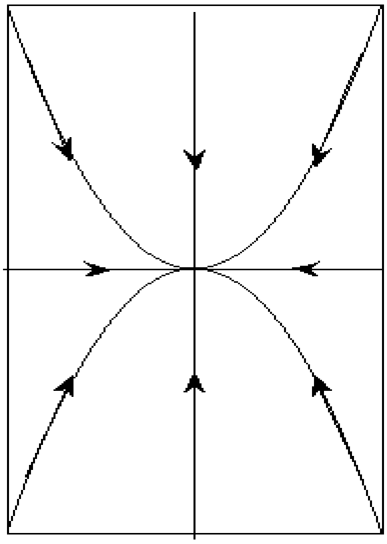


Рис. 2.2а Устойчивый узел

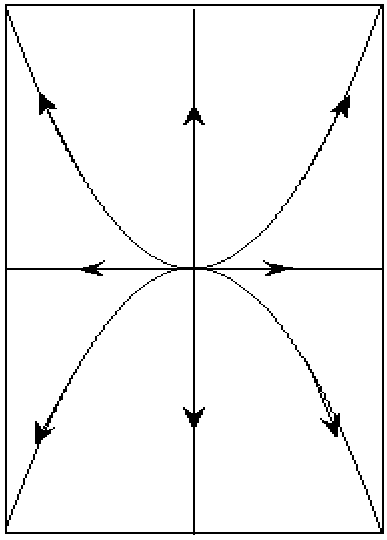


Рис. 2.2б Неустойчивый узел

Вариант 2. *Собственные значения вещественные различного знака*.

Пусть $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$, например $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$. Тогда, если $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, то $y_1(t) = C_1 e^t$, $y_2(t) = C_2 e^{-t}$ $y_2(t) = \dfrac{C_3}{y_1(t)}$, где $C_3 = {}_1 \cdot {}_2 \cdot$ В зависимости от знаков C_1 и C_2 имеем четыре гиперболы, отраженные на рис 2.3. Для $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$ получаем траектории на оси абсцисс или ординат. Такое положение равновесия получило название ***седло***.

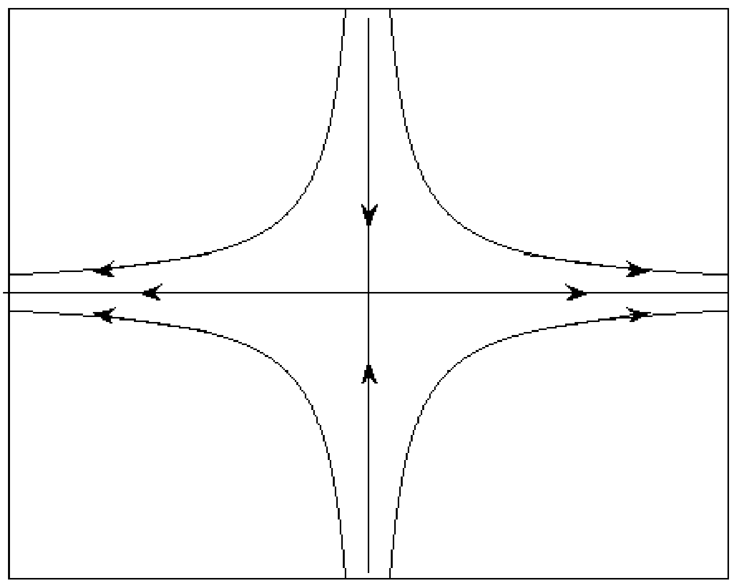
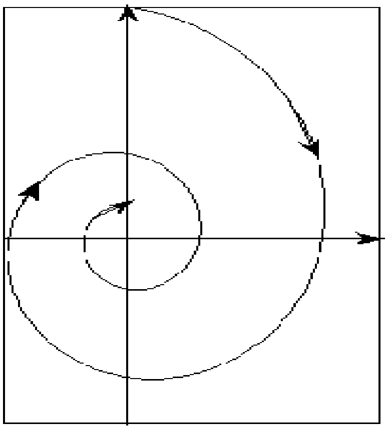


Рис. 2.3. Равновесие типа «седло»

Вариант 3. *Собственные значения составляют комплексно-сопряженную пару*.

Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ и чтобы избежать операций с комплексными числами в (2.4), выполним в (2.1) хорошо известную замену переменных, позволяющую записать решение в виде $y_1(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\omega t)$, $y_2(t) = C_2 e^{\alpha t}\sin(\omega t)$. Для простоты ограничимся иллюстрацией $C_1 = C_2 = 1$. Тогда $y_1^2 + y_2^2 = e^{2\alpha t}$. Для $\alpha < 0$ получаем траекторию, отвечающую рис. 2.4а с типом равновесия ***устойчивый фокус***, а для $\alpha > 0$ – рис. 2.4б с типом равновесия ***неустойчивый фокус***.



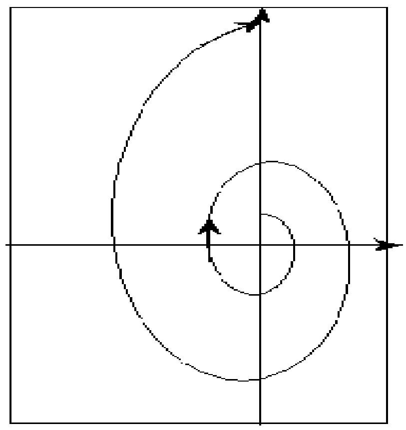


Рис. 2.4а. Устойчивый фокус   Рис. 2.4б. Неустойчивый фокус

Нелинейная система в малой окрестности равновесной точки может быть сколь угодно точно аппроксимирована линейной, поэтому характер поведения ее решений в малом также отвечает рис. 2.2, 2.3, 2.4.

Лекция 3. Этапы анализа линейных моделей

Обратимся к анализу линейных динамических моделей с постоянной матрицей

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \qquad (3.1)$$

и остановимся на следующих этапах.

Основные этапы.

1. *Получение решения*.

1а. *Получение стационарного решения и анализ его устойчивости*.

2. *Определение наблюдаемости отдельных составляющих решения, оценка их роли в системе*.

3. *Оценка чувствительности к параметрам*. При этом на практике интересует чувствительность, как к нежелательным эффектам, так и к параметрам, вводимым специально для решения задач управления.

4. *Решение задачи параметрической идентификации*.

5. *Решение задач управления или выбора оптимальных значений параметров*.

Этап1а. Получение стационарного решения требует решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

например, с помощью программ ***DECOMP*** и ***SOLVE***, а анализ устойчивости выполняется на основе **QR**-алгоритма, вычисляющего собственные значения λ_k матрицы $\mathbf{A}$ (условие $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$ отвечает асимптотической устойчивости).

Этап 2. Решение системы (3.1) может выполняться на основе стандартных программ для дифференциальных уравнений общего вида (например, программа ***RKF45***), однако учет линейных свойств (3.1) позволяет выполнить расчеты более надежно и эффективно даже в случае ее жесткости. Точное решение системы (3.1) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}d\tau \cdot \mathbf{b}. \tag{3.2}$$

Если решение необходимо представить в виде таблицы при значениях $t_n = n\ H$, где n – целое число, а H – шаг наблюдения решения, то непосредственное использование формулы (3.2) весьма затруднительно. Многократное вычисление матричной экспоненты и интеграла от нее с помощью сходящихся матричных рядов исключительно трудоемко, особенно для больших значений t, когда приходится учитывать большое число членов ряда. Использованию формулы Лагранжа-Сильвестра предшествует решение полной проблемы собственных значений и подготовительная работа, связанная с формированием матричных множителей, что также весьма затруднительно при большой размерности матрицы $\mathbf{A}$.

Выход из этого положения дает метод, предложенный Ю.В.Ракитским и заключающийся в следующих предварительных матричных преобразованиях.

Запишем решение (3.2) в точке $t_{n+1} = t_n + H$ и вычтем из него формулу (3.2), предварительно умноженную на $e^{\mathbf{A}H}$:

$$\mathbf{x}(t_n + H) = e^{\mathbf{A}H}\mathbf{x}(t_n) + \left(\int_0^{t_n+H} e^{\mathbf{A}\tau}d\tau - e^{\mathbf{A}H}\int_0^{t} e^{\mathbf{A}\tau}d\tau \right)\mathbf{b} =$$

$$= e^{\mathbf{A}H}\mathbf{x}(t_n) + \left(\int_0^{t_n+H} e^{\mathbf{A}\tau}d\tau - \int_H^{t+H} e^{\mathbf{A}\tau}d\tau \right)\mathbf{b} = e^{\mathbf{A}H}\mathbf{x}(t_n) + \int_0^{H} e^{\mathbf{A}\tau}d\tau \cdot \mathbf{b}. \tag{3.3}$$

В отличие от (3.2) запись решения в виде (3.3) предполагает лишь *однократное* вычисление матричной экспоненты и интеграла от нее для заданного шага H, а затем последовательное получение $\mathbf{x}(t_n)$ пошаговым методом. Для вычисления матричной экспоненты и интеграла от нее воспользуемся матричным степенным разложением

$$e^{\mathbf{A}H} \cong \mathbf{E} + H\mathbf{A} + \frac{H^2\mathbf{A}^2}{2} + ..., \qquad \int_0^H e^{\mathbf{A}\tau}d\tau \cong H\left(\mathbf{E} + \frac{H\mathbf{A}}{2} + ... \right). \tag{3.4}$$

Чтобы разобраться со скоростью сходимости этого ряда, обратимся к скалярным рядам

$e^{-0.1} \cong 1 - 0.1 + 0.01/2 - 0.001/6 + \ldots$; $e^{-\mathbf{10}} \cong 1 - 10 + 100/2 - 1000/6 + \ldots$

Ясно, что при больших по модулю показателях экспоненты ряд сходится крайне медленно. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет простую структуру, то она сама и ее матричная экспонента могут быть приведены к диагональной форме

$$e^{\mathbf{A}H} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 H} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & e^{\lambda_m H} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1},$$

где на диагонали стоят скалярные ряды и скорость сходимости всего матричного ряда определяется скоростью сходимости скалярного с максимальным по модулю показателем $|\lambda_k|_{\max} H$. Для удовлетворительной скорости сходимости необходимо обеспечить выполнение неравенства $|\lambda_k|_{\max} H < 1$ или достаточного условия для нормы матрицы $\|\mathbf{A}\| H < 1$.

Если система (3.1) является жесткой, то вне пограничного слоя появляется потребность выбрать шаг наблюдения решения H таким, чтобы $|\lambda_k|_{\max} H$ >> 1, а это приходит в противоречие с условием эффективного построения матричного ряда. Поэтому, по заданному желаемому значению H выбирается такое целое число N, что для $h = \dfrac{H}{2^N}$ выполняется неравенство $\|\mathbf{A}\| h < 1$. Далее строим $e^{\mathbf{A}h}$ разложением в матричный ряд, а затем N раз возводим матричную экспоненту в квадрат по формуле $e^{2\mathbf{A}h} = e^{\mathbf{A}h} \cdot e^{\mathbf{A}h}$, достигая матрицы $e^{\mathbf{A}H}$.

Аналогичная формула удвоения шага может быть получена и для вектора

$$\mathbf{g}(h) = \int_0^h e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{b}, \qquad \mathbf{g}(2h) = \left(\mathbf{E} + e^{\mathbf{A}h}\right)\mathbf{g}(h).$$

Эта формула удвоения шага легко устанавливается после преобразований

$$\mathbf{g}(2h) = \int_0^{2h} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} = \int_0^h e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} + \int_h^{2h} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} =$$

$$= \int_0^h e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} + e^{\mathbf{A}h} \int_0^h e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} = \left(\mathbf{E} + e^{\mathbf{A}h}\right)\mathbf{g}(h).$$

Таким образом, алгоритм решения системы (3.1) записывается следующей последовательностью действий.

Шаг 1**.** Задаемся желаемым значением *H*. Выбираем целое число N такое, что

$$h = \frac{H}{2^N} < \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}.$$

Шаг 2. Для шага h строим матричную экспоненту $e^{\mathbf{A}h}$ и вектор $\mathbf{g}(h)$ разложением в ряд с небольшим числом членов.

Шаг 3. Получаем матрицу $e^{\mathbf{A}H}$ и вектор $\mathbf{g}(H)$, используя N раз формулу удвоения шага.

Шаг 4. Решаем уравнение (3.3) пошаговым методом.

На основе изложенного алгоритма написана программа ***LSODE*** [2] со следующими параметрами:

LSODE **(*N, H, CH, A, B, X, EAH, SL, INDEX*),**

где ***N*** – размерность системы;

H – шаг наблюдения решения;

CH – константа для оценки начального шага *h* (Рекомендуемое значение для обычных систем – 0,1, а для жестких – порядка 5.0);

A, ***B*** – матрица и вектор системы (3.1);

X – вектор решения;

EAH – матрица, содержащая элементы матрицы $e^{\mathbf{A}H}$;

SL – рабочий массив размерности ***N*** :

INDEX – управляющий параметр со входными значениями :

–1 (первое обращение к программе, вектор ***B*** нулевой, т.е. решается однородная система),

–2 (первое обращение к программе, вектор ***B*** может быть ненулевым),

0 (не первое обращение к программе).

Нормальное выходное значение – **0**.

Содержание *этапа 2* процесса анализа линейных моделей требует предварительно установить некоторые свойства собственных векторов для матрицы $\mathbf{A}$ и ее транспонированной $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Пусть $\lambda_k, \mathbf{u}_k$ – собственные значения и собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, а $\lambda_k, \mathbf{v}_k$ – собственные значения и собственные векторы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ соответственно:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \tag{3.5}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

или

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \tag{3.6}$$

Умножая (3.5) слева на $\mathbf{v}_i^T$, а (3.6) справа на $\mathbf{u}_k$, и вычитая результаты, имеем

$$0 = (\lambda_k - \lambda_i)\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_k .$$

Если $k \neq i$, то

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_k = 0 . \tag{3.7}$$

Дополнительно нормируем эти векторы так, что

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_k = 1 . \tag{3.8}$$

Теперь запишем формулу Лагранжа-Сильвестра (см. (П.3.10) из [2])

$$\mathbf{f}(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{m}\mathbf{T}_k f(\lambda_k)\text{, где}\quad \mathbf{T}_k=\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})...(\mathbf{A}-\lambda_{k-1}\mathbf{E})(\mathbf{A}-\lambda_{k+1}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-\lambda_m\mathbf{E})}{(\lambda_k-\lambda_1)...(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})...(\lambda_k-\lambda_m)} \qquad (3.9)$$

в ином виде. Здесь полагается, что все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ различны. Так как в выражении для $\mathbf{T}_k$ есть множитель $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})$, то

$$\mathbf{T}_k\mathbf{u}_i=0,\qquad k\neq i \qquad (3.10)$$

При этом последовательно умножая все множители (3.9) на $\mathbf{u}_k$, получаем

$$\mathbf{T}_k\mathbf{u}_k=\mathbf{u}_k\,. \qquad (3.11)$$

Разложим каждую строку матрицы $\mathbf{T}_\mathrm{k}$ по векторам $\mathbf{v}_j^T$. Это позволяет представить матрицу $\mathbf{T}_\mathrm{k}$ в виде

$$\mathbf{T}_k=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{c}_j\mathbf{v}_j^T\,,$$

где $\mathbf{c}_j$ – некоторые векторы. Из условий (3.7) и (3.10) следует, что

$$\mathbf{T}_k\mathbf{u}_i=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{c}_j\left(\mathbf{v}_j^T\mathbf{u}_i\right)=\mathbf{c}_i\left(\mathbf{v}_i^T\mathbf{u}_i\right)=\mathbf{c}_i=\mathbf{0}\text{, если } k\neq i$$

Это означает, что каждая строка матрицы $\mathbf{T}_k$ это вектор $\mathbf{v}_k^T$ с некоторым постоянным множителем, т.е.

$$\mathbf{T}_k=\mathbf{c}_k\cdot\mathbf{v}_k^T\,. \qquad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.11), для вектора $\mathbf{c}_k$ получаем

$$\left(\mathbf{c}_k\cdot\mathbf{v}_k^T\right)\mathbf{u}_k=\mathbf{u}_k\,,$$

что с учетом (3.8) приводит к равенствам

$$\mathbf{c}_k=\mathbf{u}_k\quad\text{и}\quad\mathbf{T}_k=\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^T\,.$$

Теперь формула Лагранжа-Сильвестра (3.9) приобретает лаконичный вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{m}\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^T f(\lambda_k)\,. \qquad (3.13)$$

Лекция 4. Наблюдаемость отдельных составляющих решения

Этап 2. Наблюдаемость отдельных составляющих решения, оценка их роли в системе.

Обратимся к линейной системе (2.1). Запишем ее решение через матричную экспоненту, которую, в свою очередь, представим по формуле Лагранжа-Сильвестра

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0=\sum_{k=1}^{m}\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^T e^{\lambda_k t}\mathbf{x}_0=\sum_{k=1}^{m}\mathbf{u}_k\left(\mathbf{v}_k^T\mathbf{x}_0\right)e^{\lambda_k t} \qquad (4.1)$$

Составляющую решения $e^{\lambda_k t}$ принято называть ***модой***, а анализ характера ее поведения в решении – ***модальным анализом***. Покомпонентно решение (4.1) может быть отражено в виде

$$
\begin{aligned}
&x^{(1)}(t) = u_1^1 D_1 e^{\lambda_1 t} + u_2^1 D_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + u_m^1 D_m e^{\lambda_m t},\\
&x^{(2)}(t) = u_1^2 D_1 e^{\lambda_1 t} + u_2^2 D_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + u_m^2 D_m e^{\lambda_m t},\\
&\ldots\\
&x^{(m)}(t) = u_1^m D_1 e^{\lambda_1 t} + u_2^m D_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + u_m^m D_m e^{\lambda_m t},
\end{aligned}
\qquad (4.2)
$$

где коэффициенты $D_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_0$ зависят от начальных условий.

Для анализа свойств $\mathbf{x}(t)$ важным является ответ на вопрос: «Насколько заметнее k-я мода $e^{\lambda_k t}$ наблюдается в в $x^{(p)}(t)$ по сравнению с $x^{(s)}(t)$?». На первый взгляд, это должно зависеть от начальных условий. Однако, это не так. В соответствии с (4.2) амплитуда моды $e^{\lambda_k t}$ в составе переменной состояния $x^{(p)}(t)$
определяется величиной $u_k^p D_k$, а для $x^{(s)}(t)$ - величиной $u_k^s D_k$. Отношение амплитуд этой моды в переменных $x^{(p)}(t)$ и $x^{(s)}(t)$ есть величина постоянная для данной системы, выражается частным

$$
\eta_k^{(p,s)} = \frac{u_k^p D_k}{u_k^s D_k} = \frac{u_k^p}{u_k^s}, \qquad (4.3)
$$

не зависит от начальных условий $\mathbf{x}_0$ и полностью определяется компонентами собственного вектора $\mathbf{u}_k$.

Для дальнейшего анализа свойств системы (2.1) введем следующие упрощающие предположения. Пусть она состоит из m однотипных элементов (или иначе узлов системы), поведение каждого из которых описывается дифференциальным уравнением $\dfrac{dx^{(p)}}{dt} = \ldots$, все $x^{(p)}(t)$ имеют одинаковую физическую природу и размерность, а структура матрицы $\mathbf{A}$ определяет функционирование системы в целом. Возможные возмущения будем задавать вектором начальных условий $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_i = (0,0,\ldots 0,1,0,\ldots,0,0)^T$, где одна компонента равна единице, а остальные нулевые.

Пример программы модального анализа.

Предлагаемая программа состоит из трех подсистем, каждая из которых освещает одну из возможных сторон модального анализа.

Подсистема 1. **Оценка поведения *k*-й моды** $e^{\lambda_k t}$.

Входным параметром является номер моды k. Характер ее наблюдаемости отражает, например, следующая таблица

Наблюдаемость k-й моды

Номер узла	**Относительная амплитуда**
14	100%
3	92%
115	14%
7	0,2%
…	…

Во втором столбце таблицы расположены упорядоченные по убыванию значения $\left|\eta_k^{(p,s)}\right| \cdot 100\%$, а первый столбец отражает номер соответствующего узла p. При этом узел с номером s имеет наибольшую амплитуду $u_k^s D_k$, принимаемую за 100%. Из таблицы видно, что данная мода заметнее всего наблюдается в узле с номером 14, а ее относительная амплитуда в узле 7 пренебрежимо мала.

Если мода наблюдается с заметной амплитудой в большом числе компонент вектора $\mathbf{x}(t)$, то такую моду принято называть ***системной***. В противном случае мода называется ***локальной***.

Эта же подсистема позволяет ответить на вопрос: «Где необходимо выполнить возмущение, что добиться максимальной амплитуды k-й моды?». Очевидно, величины $u_k^s D_k$ и $D_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_0$ достигают своего максимума, если единственную ненулевую компоненту $\mathbf{x}_0$ задать там, где компонента вектора $\mathbf{v}_k$ максимальна по модулю. Результатом может быть следующая таблица

Возмущаемость k-й моды

Номер узла	**Относительная амплитуда**
14	100%
6	78%
217	9%
29	0,05%
…	…

Ее второй столбец упорядочен по убыванию компонент вектора $\mathbf{v}_k$ и свидетельствует о том, в каких точках системы данная мода может «возмущена» с максимальной амплитудой.

Подсистема 2. **Наблюдение в данном узле**.

Входным параметром является k – номер узла, где выполняется наблюдение. Фактически это означает, что интерес вызывает только одна составляющая вектора решения

$$x^{(k)}(t) = u_1^k D_1 e^{\lambda_1 t} + u_2^k D_2 e^{\lambda_2 t} + ... + u_m^k D_m e^{\lambda_m t}. \qquad (4.4)$$

Задача этой подсистемы – указать, какая мода будет иметь максимальную амплитуду $u_j^k D_j$, и упорядочить моды по убыванию этих амплитуд. При этом для каждой амплитуды (и соответственно, моды) может быть указан узел, где возмущение наиболее эффективно и величина D_j максимальна. Пример таблицы приведен ниже.

Наблюдение в k-м узле

Номер моды	Относительная амплитуда	Эффективный узел возмущения
4	65%	7
13	15%	14
6	14%	113
25	3%	3
…..	…..	…..

Подсистема 3. Возмущение в данном узле.

Входным параметром является k – номер узла, где выполняется возмущение.

Здесь интерес вызывают последствия возмущения в данном узле. Вектор $\mathbf{x}_0$ и величины D_j, таким образом, заданы. Остается оценить, какая мода, с какой амплитудой и в какой точке системы может быть максимально возмущена. Таблица имеет вид, аналогичный таблице предыдущей подсистемы, только последний столбец отвечает наиболее эффективному узлу наблюдения.

Возмущение в k-м узле

Номер моды	Относительная амплитуда	Эффективный узел наблюдения
8	58%	2
23	20%	16
2	16%	102
35	3%	4
…..	…..	…..

Лекция 5. Оценка чувствительности к параметрам

Этап 3. Оценка чувствительности к параметрам.

В качестве примера рассмотрим статическую модель

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{k})) = 0, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ – вектор выходных переменных, а $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^s$ – вектор параметров. О том, насколько сильно влияет вариация параметров на решение (5.1), можно в первом приближении судить по прямоугольной $m \times s$ матрице чувствительности $\mathbf{A}$ с элементами

$$a_{ij} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial k^{(j)}},$$

которые на практике могут быть оценены приближенно по формулам численного дифференцирования. Пусть $\mathbf{A}_j$ – это j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{e}_j$ – j-й столбец единичной матрицы, а Δk – приращение по параметру с номером j. Тогда имеем

$$\mathbf{A}_j \approx \frac{\mathbf{x}(\mathbf{k} + \Delta k \cdot \mathbf{e}_j) - \mathbf{x}(\mathbf{k})}{\Delta k}. \tag{5.2}$$

Можно использовать и более точную формулу численного дифференцирования

$$\mathbf{A}_j \approx \frac{\mathbf{x}(\mathbf{k} + \Delta k \cdot \mathbf{e}_j) - \mathbf{x}(\mathbf{k} - \Delta k \cdot \mathbf{e}_j)}{2\Delta k} \tag{5.3}$$

ценой удвоения объема вычислений.

Если исходная система динамическая, то матрица чувствительности будет изменяться во времени.

Для линейных динамических моделей

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(k)\mathbf{x} \tag{5.4}$$

решение (5.4) и соответственно его чувствительность полностью определяются чувствительностью собственных значений λ_i и собственных векторов $\mathbf{u}_i$ к вариации параметров. В качестве иллюстрации остановимся только на λ_i и ограничимся случаем, когда k – скалярный параметр.

$$\mathbf{A}(k)\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i. \tag{5.5}$$

Продифференцируем (5.5) по k:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k}\mathbf{u}_i + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial k} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial k}\mathbf{u}_i + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial k} \tag{5.6}$$

и умножим (5.6) слева на $\mathbf{v}_i^T$

$$\mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k}\mathbf{u}_i + \left(\mathbf{v}_i^T \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{v}_i^T\right)\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial k} = \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \lambda_i}{\partial k}\mathbf{u}_i \tag{5.7}$$

где $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ – собственные векторы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^T$ соответственно. Выражение, стоящее в скобках обращается в нуль, и (5.7) приобретает желаемый вид:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k} = \frac{\mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k}\mathbf{u}_i}{\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_i}. \tag{5.8}$$

Если векторы нормированы так, что $\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_i = 1$, то (5.8) упрощается

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k} = \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k}\mathbf{u}_i. \tag{5.9}$$

В качестве примера рассмотрим чувствительность собственных значений к вариации элементов матрицы и выберем $k = a_{ps}$. Тогда матрица $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k}$ в (5.9) имеет единственный ненулевой элемент, и для этого случая получаем

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{ps}} = v_i^p u_i^s .$$

Этап 4. Решение задачи параметрической идентификации.

В качестве примера обратимся к следующей системе уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{p} \in \mathbf{R}^s, \tag{5.10}$$

где модель (5.10) задана с точностью до вектора неизвестных параметров $\mathbf{p}$, подлежащих определению. Для ряда компонент $x^{(k)}_{эксп}(t_i)$ вектора $\mathbf{x}$ имеется экспериментальная информация, полученная на реальном объекте. Необходимо выбрать значение $\mathbf{p}$ так, чтобы результаты моделирования максимально соответствовали экспериментальным данным. Критерием близости может служить величина

$$F(\mathbf{p}) = \sum_k \sum_{i=1}^N \left(x^{(k)}_{эксп}(t_i) - x^{(k)}(t_i) \right)^2 \tag{5.11}$$

где $x^{(k)}_{эксп}(t_i)$ и $x^{(k)}(t_i)$ – результаты эксперимента и решение (5.10) соответственно. Первое суммирование выполняется по всем компонентам, по которым имеется экспериментальная информация. Для минимизации $F(\mathbf{p})$ может быть использован любой метод минимизации функции многих переменных. Если компоненты вектора $\mathbf{x}$ имеют различную физическую природу и размерность, этот факт может быть учтен введением в (5.11) весовых коэффициентов q_k

$$F(\mathbf{p}) = \sum_k q_k \sum_{i=1}^N \left(x^{(k)}\ \ (t\ ) - x^{(k)}(t\ ) \right)^2$$

или использованием относительного критерия

$$F(\mathbf{p}) = \sum_k \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{x^{(k)}(t_i)}{x^{(k)}_{эксп}(t_i)} \right)^2 .$$

Этап 5. Решение задач управления или выбора оптимальных значений параметров.

Решению этих многочисленных задач посвящен целый ряд специальных курсов: «Основы теории управления», «Теория автоматического управления», «Методы оптимизации» и др. Здесь ограничимся одной простой иллюстрацией.

Пример управления устойчивостью в линейных динамических моделях.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{k})\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{k} \in \mathbf{R}^s \tag{5.12}$$

Матрица $\mathbf{A}$ отражает не только уравнения исследуемого объекта, но и систему управления им. Вектор параметров $\mathbf{k}$ нужно выбрать так, чтобы обеспечить желаемое смещение влево на комплексной плоскости собственных значений $\lambda_j = \alpha_j + i\omega_j$ матрицы $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{k}_0$ – начальное значение параметров, а $\Delta\mathbf{k}$ – вектор их относительно небольших приращений. Раскладывая в ряд и ограничиваясь линейным приближением, имеем

$$\alpha_j(\mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k}) = \alpha_j(\mathbf{k}_0) + \frac{\partial\alpha_j}{\partial k^{(1)}}\Delta k^{(1)} + \frac{\partial\alpha_j}{\partial k^{(2)}}\Delta k^{(2)} + \ldots + \frac{\partial\alpha_j}{\partial k^{(s)}}\Delta k^{(s)} + \ldots . \tag{5.13}$$

Перенесем $\alpha_j(\mathbf{k}_0)$ в левую часть и запишем (5.13) в матричной форме

$$\mathbf{\Phi}\Delta\mathbf{k} = \Delta\boldsymbol{\alpha} \tag{5.14}$$

где элементы f_{jp} матрицы $\mathbf{\Phi}$ вычисляются по формулам (5.8)

$$f_{jp} = \frac{\partial\alpha_j}{\partial k^{(p)}} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial k^{(p)}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathbf{v}_j^T \dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial k^{(p)}}\mathbf{u}_j}{\mathbf{v}_j^T\mathbf{u}_j}\right). \tag{5.15}$$

Матрица $\mathbf{\Phi}$ прямоугольная и под решением (5.14) понимается вектор $\Delta\mathbf{k}$, минимизирующий квадрат длины вектора невязки $\mathbf{r} = \Delta - \Delta$. Здесь может быть использована программа ***SVD***, выполняющая сингулярное разложение матрицы $\mathbf{\Phi}$ и в отсутствии единственности решения выбирающая то, которое отвечает минимальной длине вектора $\Delta\mathbf{k}$. Строки $\mathbf{\Phi}$ характеризуют влияние на $\Delta\alpha_j$ различных параметров, а столбцы отражают влияние данного параметра на различные $\Delta\alpha_j$. В вектор $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ включаются не только собственные значения, смещение которых влево на комплексной плоскости желательно обеспечить, но и достаточно «левые» собственные значения, обладающие высокими коэффициентами чувствительности. В отсутствие контроля они могут заметно переместиться вправо. Длину $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ не следует задавать слишком большой, так как (5.14) является моделью лишь линейного приближения. На практике матрицу $\mathbf{\Phi}$ несколько раз пересчитывают в процессе решения.

Лекция 6. Равновесные точки. Виды бифуркационных точек

Рассмотрим модель, представленную системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\varepsilon), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^m, \tag{6.1}$$

где ε - некоторый параметр.

Наибольший интерес представляют ответы на следующие вопросы:

- *Как ведет себя решение при* $t \to \infty$?
- *Как решение (6.1) качественно зависит от параметра* ε?

Если вектор $\mathbf{x}(t)$ при $t \to \infty$ ограничен, то решение (6.1) может завершаться:

- ***равновесной или стационарной точкой***;

- ***периодическим решением*** (предельным циклом);
- «***хаотическим***» или «**странным**» ***аттрактором***.

Обратимся к изучению свойств этих объектов.

Равновесные точки.

Первоначально рассмотрим одномерный случай уравнения (6.1), когда x и ε скалярные величины. Равновесные (стационарные) точки удовлетворяет уравнению

$$f(x,\varepsilon)=0 \tag{6.2}$$

Введем обозначения: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_x',\quad \dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon}=f_\varepsilon',\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}'',\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}=f_{\varepsilon\varepsilon}'',\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial \varepsilon}=f_{x\varepsilon}''$

Возможно ли однозначно представить решение (6.2) в виде $x(\varepsilon)$ или $\varepsilon(x)$? Ответ на этот вопрос дает теорема о неявной функции.

Пусть в области $D=\left[x_0-\Delta,\ x_0+\Delta,\ \varepsilon_0-\Delta_1,\ \varepsilon_0+\Delta_1\right]$, содержащей точку $\left(x_0,\varepsilon_0\right)$, для которой $f(x_0,\varepsilon_0)=0$, $f(x,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема. Если $f_x'\left(x_0,\varepsilon_0\right)\neq 0$, то уравнение (6.2) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $x(\varepsilon)$, $x(\varepsilon_0)=x_0$. Если $f_\varepsilon'\left(x_0,\varepsilon_0\right)\neq 0$, то уравнение (6.2) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x_0)=\varepsilon_0$.

Классификация равновесных точек:

- *регулярная* точка – $f_x'\left(x_0,\varepsilon_0\right)\neq 0$ или $f_\varepsilon'\left(x_0,\varepsilon_0\right)\neq 0$;
- *особая* точка – $f_x'\left(x_0,\varepsilon_0\right)=f_\varepsilon'\left(x_0,\varepsilon_0\right)=0$;
- *двойная особая* точка – существуют две ветви решения, имеющие различные касательные;
- *особая точка высокого порядка* – $f_{xx}''\left(x_0,\varepsilon_0\right)=f_{\varepsilon\varepsilon}''\left(x_0,\varepsilon_0\right)=f_{x\varepsilon}''\left(x_0,\varepsilon_0\right)=0$.

Обратимся к вопросу об устойчивости равновесных точек. Для решений линейной системы (2.1) она полностью определялась собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$. Оказывается, что и в нелинейной системе

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}(t)\in\mathbf{R}^m \tag{6.3}$$

возможно использование этого аппарата. Пусть $\mathbf{x}_0$ – стационарная точка (6.3)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0} \tag{6.4}$$

Рассмотрим малые отклонения $\Delta\mathbf{x}$ от $\mathbf{x}_0$. Подставим $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x}$ в (6.3), вычтем уравнение (6.4) и разложим результат в ряд по $\Delta\mathbf{x}$, ограничиваясь линейным слагаемым

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)+\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}+\left(**\right)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}+\left(**\right), \tag{6.5}$$

где $\left(**\right)$ – малые порядка выше первого, а $\mathbf{A}=\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}_0\right)$ – матрица Якоби системы (6.3) в стационарной точке.

Критерий Ляпунова устанавливает следующее. Решение $\mathbf{x}_0$ будет *асимптотически устойчивым*, если все собственные значения λ_k матрицы **A** лежат в левой полуплоскости $\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_k\right)<0\right)$, и *неустойчивым,* если вещественная часть, хотя бы одного λ_k, положительна $\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_k\right)>0\right)$.

Вывод об устойчивости в случае $\mathrm{Re}\left(\lambda_k\right)=0$ может быть сделан только при учете малых слагаемых, заключенных в $(**)$.

Наибольший интерес для равновесных точек представляет решение следующих двух задач.

Задача 1. Построение диаграммы стационарных решений (ДСР) системы (6.1) от параметра ε.

При этом в каждой точке $\mathbf{x}(\varepsilon)$ решения системы $\mathbf{f}(\mathbf{x},\varepsilon)=\mathbf{0}$ по собственным значениям матрицы Якоби оценивается устойчивость, и отдельные участки графика $\mathbf{x}(\varepsilon)$ «раскрашиваются» по устойчивости. Переход из устойчивого состояния в неустойчивое (или обратно) называется ***бифуркацией.*** В простейшем случае бифуркация может происходить двумя способами: ***вещественная*** бифуркация (одно из собственных значений матрицы Якоби становится нулевым) и ***комплексная*** бифуркация, называемая также бифуркацией Андронова-Хопфа (комплексно-сопряженная пара собственных значений имеет нулевую вещественную часть).

Если в системе (6.1) $\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}$ – вектор из двух компонент, то часто решается еще одна задача.

Задача 2. Построение в плоскости параметров $\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)$ *бифуркационных диаграмм (БД) – кривых, на которых происходит тот или иной вид бифуркации.*

Плоскость оказывается разделенной на области, внутри которых для всех точек характер устойчивости остается неизменным. Кроме того, для БД точек вещественной бифуркации $\left(\lambda_k=0\right)$, внутри каждой области одинаковым остается и количество равновесных решений.

Рассмотрим различные виды бифуркации.

Вещественная бифуркация. Одномерный случай.

На кривых $\mathbf{x}(\varepsilon)$ диаграммы стационарных решений в зависимости от значений $f_x'\left(x_0,\varepsilon_0\right)$ и $f_\varepsilon'\left(x_0,\varepsilon_0\right)$ можно выделить три основных вида точек:

- $f_x'\left(x_0,\varepsilon_0\right)\neq 0$ – *регулярная* точка (большинство точек кривой);
- $f_x'\left(x_0,\varepsilon_0\right)=0$, но $f_\varepsilon'\left(x_0,\varepsilon_0\right)\neq 0$ – *простая точка поворота,* в которой появляется или исчезает пара решений (рис. 6.1);
- $f_x'\left(x_0,\varepsilon_0\right)=f_\varepsilon'\left(x_0,\varepsilon_0\right)=0$ – сингулярная (особая) точка, в которой происходит *ветвление*.

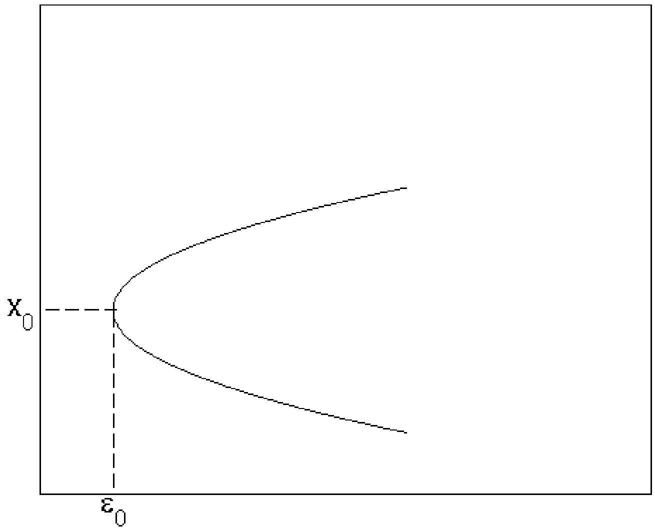


Рис 6.1. $\left(x_0,\varepsilon_0\right)$ - точка поворота

Ветвление в точках бифуркации.

Пусть $\left(x_0,\varepsilon_0\right)$ – особая стационарная точка, удовлетворяющая уравнениям $f(x_0,\varepsilon_0)=0,\quad f_x'\left(x_0,\varepsilon_0\right)=f_\varepsilon'\left(x_0,\varepsilon_0\right)=0$, а $\left(x,\varepsilon\right)$ – весьма близкая к ней другая равновесная точка, такая что $x=x_0+\Delta x,\quad \varepsilon=\varepsilon_0+\Delta\varepsilon$, а $\Delta x,\ \Delta\varepsilon$ – малы. Разложим $f\left(x,\varepsilon\right)$ в ряд по $\Delta x,\ \Delta\varepsilon$ с точностью до малых третьего порядка:

$$f\left(x,\varepsilon\right)=f\left(x_0,\varepsilon_0\right)+f_x'\left(x_0,\varepsilon_0\right)\Delta x+f_\varepsilon'\left(x_0,\varepsilon_0\right)\Delta\varepsilon+\frac{1}{2}\left(A\cdot\Delta x^2+2B\cdot\Delta x\Delta\varepsilon+C\Delta\varepsilon^2\right)+$$
$$+\left(***\right)=\frac{1}{2}\left(A\cdot\Delta x^2+2B\cdot\Delta x\Delta\varepsilon+C\Delta\varepsilon^2\right)+\left(***\right).\tag{6.6}$$

где $A=f_{xx}''\left(x_0,\varepsilon_0\right),\quad B=f_{x\varepsilon}''\left(x_0,\varepsilon_0\right),\quad C=f_{\varepsilon\varepsilon}''\left(x_0,\varepsilon_0\right),\quad \left(***\right)$ – слагаемые третьего и более высокого порядка малости.

Случай 1. Пусть первоначально $A\neq 0$. Разделим (6.6) на $\Delta\varepsilon^2$ и перейдем к пределу при $\Delta\varepsilon\to 0$

$$A\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2+2B\frac{dx}{d\varepsilon}+C=0\,.\tag{6.7}$$

Если $D=B^2-AC<0$, то $\left(x_0,\varepsilon_0\right)$ – это *изолированная* точка ДСР (из нее не выходит ни одна кривая). Если же $D>0$, то, как это видно на рис.6.2, в точке $\left(x_0,\varepsilon_0\right)$, имеем две пересекающиеся дуги (здесь сходятся четыре ветви).

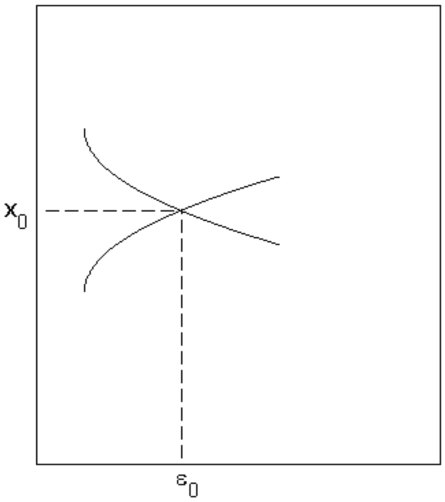


Рис. 6.2. (x_0, ε_0) - точка ветвления

Случай 2. Пусть $A = 0$, $C \neq 0$. Разделим (6.6) на Δx^2 и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$

$$C\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + 2B\frac{d\varepsilon}{dx} + A = C\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + 2B\frac{d\varepsilon}{dx} = 0\,. \tag{6.8}$$

Квадратное уравнение имеет два корня:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)_2 = -\frac{2B}{C}\,.$$

Этот случай отвечает рис. 6.3 (бифуркация типа «вилка»), где, как и на рис. 6.2, имеем две дуги.

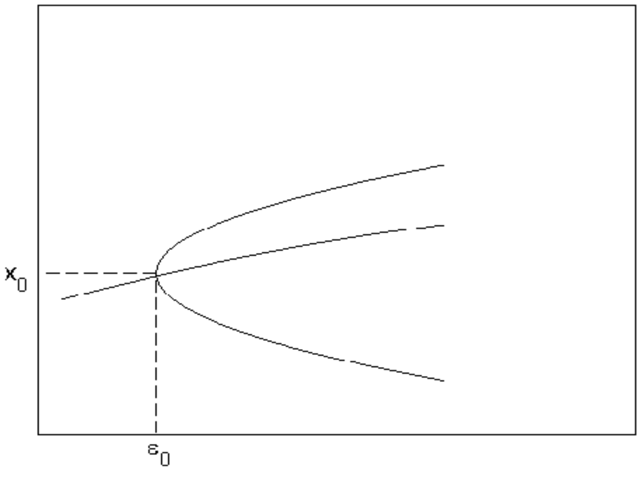


Рис. 6.3. Бифуркация типа «вилка»

Комплексная бифуркация (бифуркация Андронова-Хопфа).

Этот вид бифуркации рассмотрим на примере следующей системы уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon x_1 - x_2 \mp x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + \varepsilon x_2 \mp x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right). \tag{6.9}$$

Первоначально учтем нелинейные слагаемые в (6.9) со знаком $(-)$. Точка $x_1 = x_2 = 0$ является единственной стационарной точкой. Оценим ее устойчивость. Матрица Якоби системы (6.9)

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon - 3x_1^2 - x_2^2; & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2; & \varepsilon - 3x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

в нулевой точке приобретает вид

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

и ее собственные значения равны $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i$. Для $\varepsilon < 0$ имеем асимптотическую устойчивость (тип равновесия – устойчивый фокус), для $\varepsilon > 0$ – неустойчивость (тип равновесия – неустойчивый фокус), а для $\varepsilon = 0$ оценка устойчивости требует учета нелинейных слагаемых в (6.9).

Для дальнейшего анализа выполним в (6.9) замену переменных

$x_1 = R\cos\varphi, \quad x_2 = R\sin\varphi,$

перейдя к полярным координатам

$$R'\cos\varphi - R\sin\varphi \cdot \varphi' = \varepsilon R\cos\varphi - R\sin\varphi - R^3\cos\varphi, \tag{6.10}$$

$$R'\sin\varphi + R\cos\varphi \cdot \varphi' = R\cos\varphi + \varepsilon R\sin\varphi - R^3\sin\varphi. \tag{6.11}$$

Умножим (6.10) на $\cos\varphi$, а (6.11) на $\sin\varphi$, и результаты сложим

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon R - R^3 = \left(\varepsilon - R^2\right)R. \tag{6.12}$$

Затем умножим (6.10) на $(-\sin\varphi)$, а (6.11) на $\cos\varphi$, результаты сложим и разделим на R

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1. \tag{6.13}$$

Уравнение (6.12) имеет две стационарные точки: значение $R = 0$, отвечающее нулевой стационарной точке, и $R = \sqrt{\varepsilon}$ для $\varepsilon > 0$, что соответствует периодическому движению по окружности. Поведение решения (6.12) и (6.13) для различных ε и различных начальных условий иллюстрирует рис. 6.4.

Для $\varepsilon < 0$ нулевая точка асимптотически устойчива, периодическое решение отсутствует и так как для любых начальных условий $R' < 0$, то имеем равновесие типа «устойчивый фокус» (рис. 6.4а). Для $\varepsilon = 0$ $R' = -R^3 < 0$ и вид рис. 6.4.б совпадает с предыдущим. Наконец, для $\varepsilon > 0$ нулевая точка равновесия неустойчива, и появляется периодическое решение (окружность с радиусом $R = \sqrt{\varepsilon}$). Любое начальное условие $R_0 < \sqrt{\varepsilon}$ отвечает $R' > 0$, и решение изнутри выходит на окружность. С другой стороны, любое начальное условие $R_0 > \sqrt{\varepsilon}$

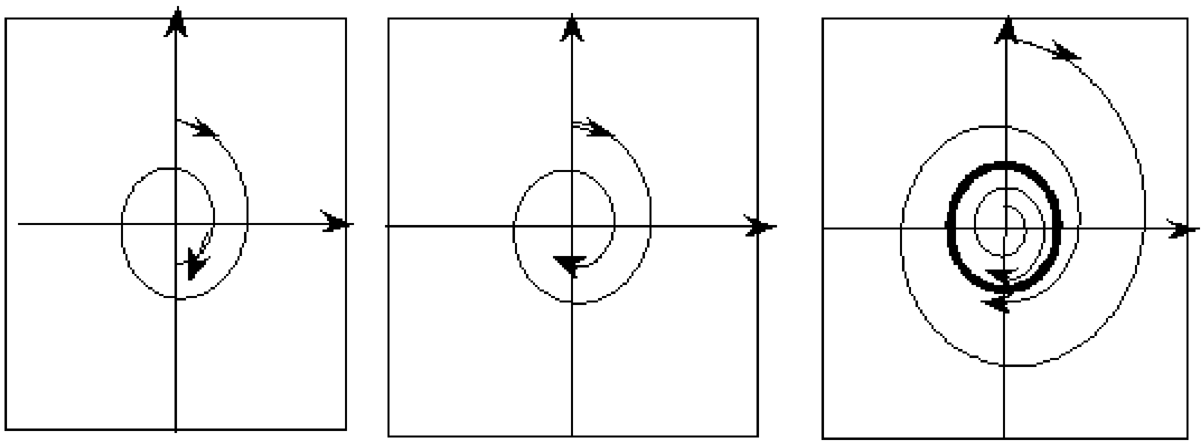


Рис. 6.4а $\varepsilon < 0$ Рис. 6.4б $\varepsilon = 0$ Рис. 6.4в $\varepsilon > 0$

отвечает $R^{'} < 0$, и решение выходит на окружность снаружи (рис.6.5в). Таким образом, траектория окружности является своеобразным объектом притяжения (аттрактором). Примечательно, что параметры этой окружности не зависят от начальных условий.

Теперь учтем нелинейные слагаемые в (6.9) со знаком $(+)$. Выполняя ту же замену переменных, получаем уравнения аналогичные (6.12) и (6.13)

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon R + R^3 = \left(\varepsilon + R^2\right) R, \tag{6.12а}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1. \tag{6.13б}$$

Уравнение (6.12а), как и прежде, имеет две стационарные точки: значение $R = 0$, отвечающее нулевой стационарной точке, и $R = \sqrt{-\varepsilon}$ для $\varepsilon < 0$, что соответствует периодическому движению по окружности. Поведение решения (6.12а) и (6.13б) для различных ε и различных начальных условий иллюстрирует рис. 6.5.

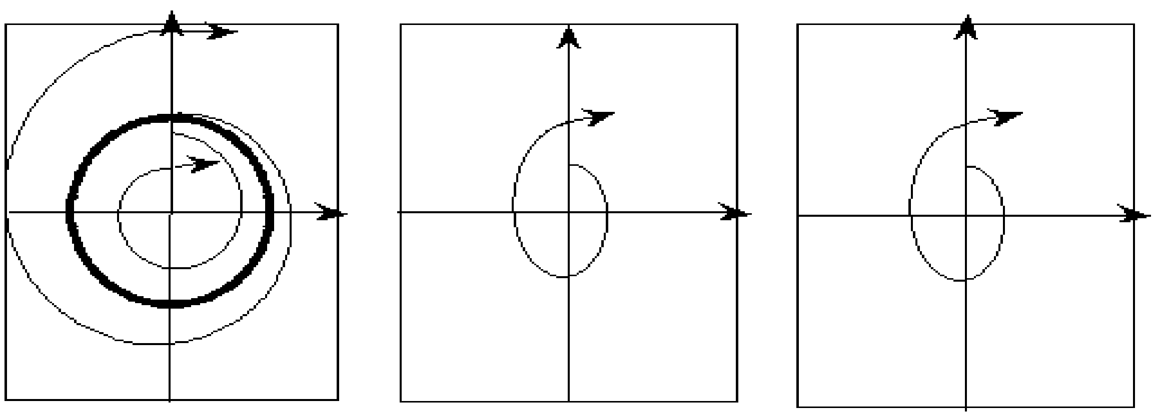


Рис. 6.5а $\varepsilon < 0$ Рис. 6.5б $\varepsilon = 0$ Рис. 6.5в $\varepsilon > 0$

Для $\varepsilon < 0$ (рис. 6.5а) нулевая точка асимптотически устойчива, но одновременно присутствует периодическое решение. Для начального условия $R_0 < \sqrt{-\varepsilon}$ производная $R' < 0$ и решение стремится к нулевой точке (равновесие типа «устойчивый фокус»). При $R_0 > \sqrt{-\varepsilon}$ производная $R' > 0$ и решение стремится к бесконечности. Во всех случаях окружность с $R_0 = \sqrt{-\varepsilon}$ уже не является объектом притяжения, но параметры, как и ранее, не зависят от начальных условий.

Для $\varepsilon = 0$ производная $R' = R^3 > 0$ и вид рис. 6.5б демонстрирует «неустойчивый фокус». Наконец, для $\varepsilon > 0$ производная $R' = \left(\varepsilon + R^2\right)R > 0$ и внешний вид рис.6.5в полностью совпадает с рис.6.5б.

Лекция 7. Методы построения диаграмм стационарных решений и бифуркационных диаграмм

Стационарные точки системы (6.1) удовлетворяют условию

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{0}, \tag{7.1}$$

и диаграмма может строиться следующим образом. Вводя дискретные значения для параметра ε

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 + k\Delta\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и решая систему (7.1), например, методом Ньютона, последовательно получаем $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}\left(\varepsilon_k\right)$. При этом для относительно малого шага $\Delta\varepsilon$ значение $\mathbf{x}_{k-1}$ будет хорошим начальным приближением, и метод Ньютона будет успешно сходиться. Остается лишь вопрос с выбором удачного значения $\mathbf{x}_0$. Для его нахождения может быть использован следующий подход.

Метод продолжения по параметру.

Вместо поиска решения уравнения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon_0) = \mathbf{0} \tag{7.2}$$

предлагается решать систему

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \tau \in [0,1], \tag{7.3}$$

где функция $\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x})$ одновременно обладает двумя свойствами:

а) при $\tau = 0$ уравнение $\mathbf{H}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ легко решается,

б) при $\tau = 1$ функция $\mathbf{H}(1, \mathbf{x})$ равна $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, и (7.3) превращается в (7.2).

Примерами $\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x})$ могут служить:

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\tau - 1) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*\right),$$

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x}) = (1 - \tau) \cdot \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\right) + \tau \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Последовательно решаем (7.3) для $\tau_j = j \cdot \Delta\tau$, $\Delta\tau = 1/N$, $j = 0,1,...,N$ методом Ньютона. При $\tau_0 = 0$ решение (7.3) очевидно равно $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}(\tau_j)$ будет хорошим приближением для $\mathbf{x}(\tau_{j+1})$, и, наконец, $\mathbf{x}(\tau_N)$ дает нужное решение (7.2).

Для окончательного оформления диаграммы стационарных решений в каждой найденной ее точке $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(\varepsilon_k)$ вычисляем матрицу Якоби системы (6.1) и рассчитываем ее собственные значения, а затем «раскрашиваем» по устойчивости кривые $\mathbf{x}(\varepsilon)$. Если ставится задача определения точек вещественной или комплексной бифуркации, то здесь может быть использован следующий алгоритм.

Нахождение точек поворота и ветвления

В системе (7.1) расширим вектор $\mathbf{x}$ за счет введения еще одной компоненты $x^{(n+1)} = \varepsilon$ и вычислим матрицу $\mathbf{J}$ размерностью $n \times (n+1)$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(n+1)}} \\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(n+1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(n+1)}} \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Пусть $\mathbf{J}_k$ – квадратная матрица, получающаяся из $\mathbf{J}$ вычеркиванием k-го столбца. Тогда $\mathbf{J}_{n+1}$ – обычная матрица Якоби системы (7.1). Оказывается, что в точках поворота и ветвления требование $f'_x(x_0, \varepsilon_0) = 0$, записанное для одномерного случая, на случай вектора $\mathbf{x}$ заменяется на условие

$$\det(\mathbf{J}_{n+1}) = 0. \tag{7.5}$$

Отличие точки поворота от точки ветвления заключается в следующем:

$$\det(\mathbf{J}_k) = 0, \quad k \neq n+1 \quad \text{– точка ветвления;} \tag{7.6}$$

$$\det(\mathbf{J}_k) \neq 0, \quad k \neq n+1 \quad \text{– точка поворота.} \tag{7.7}$$

Условие (7.6) является обобщением на многомерный случай ранее сформулированного требования для одного уравнения $f'_x(x_0, \varepsilon_0) = f'_\varepsilon(x_0, \varepsilon_0) = 0$, а условие (7.7) – соответствующего требования $f'_x(x_0, \varepsilon_0) = 0$, но $f'_\varepsilon(x_0, \varepsilon_0) \neq 0$ для точки поворота.

Таким образом, решение системы из (n+1) уравнения относительно $\mathbf{x}$ и ε

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}(\mathbf{x},\varepsilon)=\mathbf{0}, \\ &\det(\mathbf{J}_{n+1})=0 \end{aligned} \tag{7.8}$$

позволяет найти все точки поворота и ветвления, а отличить их друг от друга можно, проверив условия (7.6) или (7.7). На практике, если размерность вектора $\mathbf{x}$ не слишком мала, формирование второго уравнения в системе (7.8) представляется весьма затруднительным. С этой целью условие нулевого определителя заменяется уравнением $\mathbf{J}_{n+1}\cdot\mathbf{v}=0,$ где $\mathbf{v}$ – собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению. Так как $\mathbf{v}$ определяется с точностью до постоянного множителя, то для однозначного решения задачи можно ввести дополнительное условие, например, $\mathbf{v}^{(k)}=1,$ где $\mathbf{v}^{(k)}$– k-я компонента вектора $\mathbf{v}$. Как результат, вместо (7.8) имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}(\mathbf{x},\varepsilon)=\mathbf{0}, \\ &\mathbf{J}_{n+1}\cdot\mathbf{v}=0, \\ &\mathbf{v}^{(k)}=1. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Если случайно матрица $\mathbf{J}_{n+1}$ такова, что $\mathbf{v}^{(k)}=0,$ то достаточно попробовать другое значение k.

Нахождение точек комплексной бифуркации (Андронова-Хопфа)

В этом виде бифуркации часто от ветви стационарных решений отходит ветвь периодических решений. В точке бифуркации матрица Якоби $\mathbf{J}_{n+1}$ имеет чисто мнимую пару собственных значений $\lambda_{1,2}=\pm i\cdot\omega$ с комплексно-сопряженной парой собственных векторов $\mathbf{w}=\mathbf{u}\pm i\cdot\mathbf{v}$. В этих условиях получаем

$$\mathbf{J}_{n+1}\mathbf{w}=\lambda\mathbf{w} \;\Rightarrow\; \mathbf{J}_{n+1}\left(\mathbf{u}+i\cdot\mathbf{v}\right)=i\cdot\omega\left(\mathbf{u}+i\cdot\mathbf{v}\right). \tag{7.10}$$

Приравнивая отдельно действительные и мнимые части равенства (7.10), имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{J}_{n+1}\cdot\mathbf{u}+\omega\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}, \\ &-\omega\cdot\mathbf{u}+\mathbf{J}_{n+1}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Дополняя аналогично предыдущему последние равенства условием нормировки вектора $\mathbf{w}$, как итог получаем систему из (3n+2) уравнений для определения точек комплексной бифуркации

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}(\mathbf{x},\varepsilon)=\mathbf{0}, \\ &\mathbf{J}_{n+1}\cdot\mathbf{u}+\omega\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}, \\ &-\omega\cdot\mathbf{u}+\mathbf{J}_{n+1}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}, \\ &\mathbf{u}^{(k)}=1, \quad \mathbf{v}^{(k)}=0. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Пример. Пусть система (7.1) содержит лишь два уравнения, и матрица Якоби имеет размерность 2×2:

$$\mathbf{J}_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как сумма собственных значений матрицы всегда равна сумме ее диагональных элементов, то для матрицы второго порядка и собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega$ получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = 0 .$$

Значения ε, отвечающие точкам комплексной бифуркации, в этом случае могут быть получены не из весьма сложной системы (7.12), а из уравнений

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}(\mathbf{x},\varepsilon) = \mathbf{0}, \\ &a_{11} + a_{22} = 0. \end{aligned} \qquad (7.13)$$

Следует, однако, отметить, что второе уравнение (7.13) имеет место не только для чисто мнимой пары собственных значений, но и когда имеется два вещественных собственных значения, равных по модулю, но противоположных по знаку. Поэтому на практике решается система (7.13), в полученных точках проверяются собственные значения матрицы $\mathbf{J}_{n+1}$, и отбрасывается все лишнее.

В заключение отметим, что в ситуации, когда $\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right)^T$, можно, изменяя, например, ε_2 с некоторым шагом, решать соответствующую систему уравнений относительно ε_1 и строить бифуркационную диаграмму в плоскости компонент вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Лекция 8. Периодические решения. Понятие орбитальной устойчивости.

Пусть при $t \to \infty$ решение системы (8.1)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \qquad (8.1)$$

является периодическим: $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$. Что такое «устойчивость решения» в этом случае? Рассмотренный ранее рис.6.4в – пример того, что периодическое решение может быть своеобразным объектом притяжения (аттрактором) при различных возмущениях в начальных условиях. Однако, хотя все эти возмущенные решения при $t \to \infty$ стремятся к траектории предельного цикла, но их разность не стремится к нулю, как это требуется для асимптотической устойчивости. Все сказанное является основанием для введения нового понятия – «***орбитальной устойчивости***», совпадающего с устойчивостью по Ляпунову для стационарных точек.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, а $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – расстояние между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Определим расстояние от некоторой точки $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ до множества $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^n$ как

$$\rho(\mathbf{a},\mathbf{M}) = \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{M}} \rho(\mathbf{a},\mathbf{x}) .$$

Пусть также $\mathbf{x}(t)$ – решение системы (8.1), $\gamma(\mathbf{x}_0)$ – его траектория, а $\mathbf{y}(t)$ – другое решение (8.1), отличающееся начальными условиями $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Определение. Решение $\mathbf{x}(t)$ системы (8.1) называется ***орбитально устойчивым***, если

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\mathbf{y}(t))\Big(\rho\big(\gamma(x_0),\mathbf{y}_0\big)<\delta\Rightarrow\rho\big(\gamma(x_0),\mathbf{y}(t)\big)<\varepsilon\Big). \qquad (8.2)$$

Если в дополнение к (8.2)

$$\lim_{t\to\infty}\rho\big(\gamma(x_0),\mathbf{y}(t)\big)\to 0,$$

то $\mathbf{x}(t)$ – ***асимптотически орбитально устойчивое*** решение.

Определение. Замкнутая орбитально устойчивая траектория называется ***устойчивым предельным циклом***.

Критерий Ляпунова устойчивости стационарной точки формулировался на основе собственных значений матрицы Якоби. Для определения критерия орбитальной устойчивости предварительно рассмотрим некоторые свойства линейной системы с периодической матрицей

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x},\quad \mathbf{A}(t+T)=\mathbf{A}(t) \qquad (8.3)$$

Ее решение записывается в виде $\mathbf{x}(t)=\mathbf{U}(t)\mathbf{x}_0$, где $\mathbf{U}(t)$ – невырожденная ***фундаментальная матрица системы*** (8.3), удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{U}(t),\ \ \mathbf{U}(0)=\mathbf{E}\ . \qquad (8.4)$$

Так как

$$\frac{d\mathbf{U}(t+T)}{dt}=\mathbf{A}(t+T)\cdot\mathbf{U}(t+T)=\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{U}(t+T),$$

то $\mathbf{U}(t+T)$ также является решением системы (8.4) и отличается от $\mathbf{U}(t)$ постоянным матричным множителем $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{U}(t+T)=\mathbf{U}(t)\cdot\mathbf{C}\,. \qquad (8.5)$$

Покажем, что $\mathbf{U}(t)$ может быть записана в виде $\mathbf{U}(t)=\mathbf{L}(t)\cdot e^{\mathbf{R}t}$, где $\mathbf{R}$ – постоянная, а $\mathbf{L}(t)$ – периодическая матрица $\big(\mathbf{L}(t+T)=\mathbf{L}(t)\big)$. Действительно,

$$\mathbf{U}(t+T)=\mathbf{L}(t+T)\cdot e^{\mathbf{R}(t+T)}=\mathbf{L}(t)\cdot e^{\mathbf{R}t}\cdot e^{\mathbf{R}T}=\mathbf{U}(t)\cdot e^{\mathbf{R}T}\,. \qquad (8.6)$$

Так как при этом $\mathbf{U}(0)=\mathbf{L}(0)=\mathbf{L}(T)=\mathbf{E}$, то $\mathbf{U}(T)=\mathbf{U}(0)\cdot e^{\mathbf{R}T}=e^{\mathbf{R}T}$, и в соответствии с (8.6) имеем

$$\mathbf{U}(t+T)=\mathbf{U}(t)\cdot\mathbf{U}(T),\quad \mathbf{U}(n\cdot T)=\big(\mathbf{U}(T)\big)^n. \qquad (8.7)$$

Матрица $\mathbf{U}(T)=e^{\mathbf{R}T}$ называется ***матрицей монодромии***, а ее собственные значения ρ_k – ***мультипликаторами***.

Так как $\mathbf{x}(nT)=\mathbf{U}(nT)\mathbf{x}_0=\left(\mathbf{U}(T)\right)^n\mathbf{x}_0$, то, как легко заметить, для асимптотической устойчивости нулевого стационарного решения все мультипликаторы должны быть по модулю меньше единицы: $\left|\rho_k\right|<1$.

Полученные формулы позволяют сформулировать также критерий существования периодического решения и его орбитальной устойчивости. Условие периодичности решения $\mathbf{x}(T)=\mathbf{U}(T)\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_0$ означает, что $\mathbf{x}_0$ – это собственный вектор матрицы монодромии, а отвечающий ему мультипликатор равен единице $\rho_1=1$. При этом остальные мультипликаторы должны быть по модулю меньше единицы.

Критерий асимптотической орбитальной устойчивости предельного цикла:

$$\rho_1=1;\quad \left|\rho_{\mathrm{k}}\right|<1,\quad k=2,3,...,n \tag{8.8}$$

Теперь обратимся к критерию орбитальной устойчивости в нелинейной системе (8.1).

Уравнение в вариациях.

Пусть $\mathbf{p}(t)$ – решение системы (8.1)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{p}). \tag{8.9}$$

Рассмотрим другое решение $\mathbf{x}(t)=\mathbf{p}(t)+\Delta\mathbf{x}(t)$, близкое к $\mathbf{p}(t)$, где $\Delta\mathbf{x}(t)$ достаточно мало по величине

$$\frac{d(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{x})}{dt}=f(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{x}). \tag{8.10}$$

Вычитая из (8.10) равенство (8.9) и раскладывая в ряд по $\Delta\mathbf{x}$

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{p})=\mathbf{f}(\mathbf{p})+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{p})\cdot\Delta\mathbf{x}+(**)-\mathbf{f}(\mathbf{p})=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{p})\cdot\Delta\mathbf{x}+(**),$$

ограничимся линейным приближением и пренебрежем остальными слагаемыми (**)

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{p})\cdot\Delta\mathbf{x}. \tag{8.11}$$

Уравнение (8.11) называется ***уравнением в вариациях*** для решения $\mathbf{p}(t)$ системы (8.1) или линеаризацией системы (8.1) на решении $\mathbf{p}(t)$. В частности, если $\mathbf{p}(t)$ – стационарное решение, то матрица Якоби в (8.11) постоянна и эта система превращается в (6.5). Теперь рассмотрим случай, когда $\mathbf{p}(t)$ – периодическое решение. Тогда (8.11) является линейной системой с периодической матрицей $\mathbf{A}(t)=\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{p})$. Можно показать, что в этом случае решение $\Delta\mathbf{x}$ уравнения в вариациях также является периодическим.

Периодическим является, тем самым, и $\mathbf{x}(t)=\mathbf{p}(t)+\Delta\mathbf{x}(t)$. Действительно, вводя обозначение $\overset{\bullet}{\mathbf{p}}=\dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$, продифференцируем (8.9) по t

$$\frac{\partial \overset{\bullet}{\mathbf{p}}}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p})\cdot\overset{\bullet}{\mathbf{p}}. \qquad (8.12)$$

Вид (8.12) совпадает с (8.11), а $\overset{\bullet}{\mathbf{p}}$ – периодическое решение, как и $\mathbf{p}$. Следовательно, периодическим является и решение $\Delta\mathbf{x}$ системы (8.11). Эти соображения и позволяют сформулировать критерий орбитальной устойчивости периодического решения нелинейной системы (8.1) в той форме (8.8), как он был определен для линейной системы (8.3).

Получение периодического решения и оценка его орбитальной устойчивости

Пусть решение системы (8.1) является периодическим

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(0). \qquad (8.13)$$

Применить для решения этой задачи традиционные методы решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений мешает тот факт, что промежуток интегрирования не определен, так как период T неизвестен. Поэтому выполним в (8.13) замену переменных $t=T\cdot\tau$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}=T\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}(1)=\mathbf{x}(0),\quad \tau\in[0,1]. \qquad (8.14)$$

Теперь промежуток решения определен, однако для $n+1$ неизвестного (вектор $\mathbf{x}(0)$ и период T) имеется лишь n уравнений: $\mathbf{x}(1)=\mathbf{x}(0)$. Неоднозначность вызвана тем, что в качестве начальной точки может быть выбрана любая точка, принадлежащая траектории периодического решения. Для решения возникшей проблемы можно зафиксировать одну из компонент вектора $\mathbf{x}(0)$, например, $\mathbf{x}^j(0)=\alpha$. Если $\mathbf{x}^j(0)=\alpha$ не принадлежит траектории периодического решения, следует подобрать нужное значение α или изменить номер j компоненты $\mathbf{x}(0)$.

Для оценки орбитальной устойчивости необходимо вычислить матрицу монодромии $\mathbf{U}(T)=\mathbf{U}(1)$ и рассчитать ее мультипликаторы. Пользуясь равенством

$\mathbf{x}(\tau)=\mathbf{U}(\tau)\cdot\mathbf{x}(0)$, для элементов $u_{ik}(\tau)$ матрицы $\mathbf{U}(\tau)$ получаем

$$u_{ik}(\tau)=\frac{\partial x^{(i)}(\tau)}{\partial x^{(k)}(0)}.$$

Продифференцируем i-е уравнение (8.14) по $x^{(k)}(0)$ и поменяем порядок дифференцирования

$$\frac{du_{ik}(\tau)}{dt} = T \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}^{(i)}}{\partial x^{(s)}} u_{sk}(\tau), \quad u_{ik}(0) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}. \tag{8.15}$$

Система (8.15) решается совместно с (8.14). Результатом является матрица $\mathbf{U}(1)$, мультипликаторы которой позволяют судить об орбитальной устойчивости периодического решения.

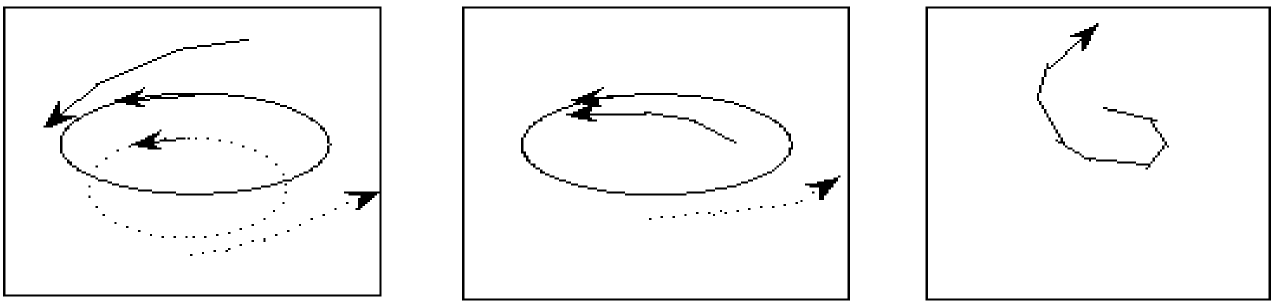
В системе (8.13) может быть один или несколько параметров. При их вариации можно строить диаграммы периодических решений от параметра или бифуркационные диаграммы.

Лекция 9. Простейшие виды бифуркации периодического решения.

В соответствии с (8.8) асимптотически орбитальное периодическое решение характеризуется одним мультипликатором, равным единице, и остальными, по модулю меньшими единице. Пусть значение параметра $\varepsilon = \varepsilon^*$ характеризует точку бифуркации. Простейшие виды бифуркации реализуются одном из следующих трех способов.

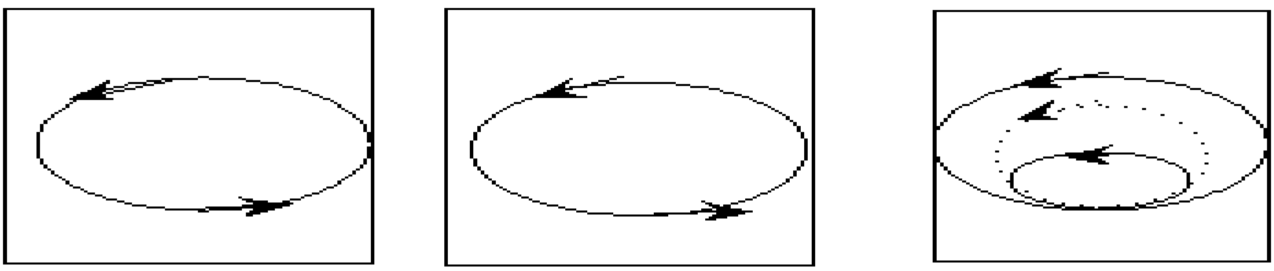
I. ***Появляется еще один мультипликатор, равный 1***. Этот вид бифуркации связан с рождением (исчезновением) пары замкнутых траекторий. Например, при слиянии двух циклов реализуется неустойчивый фокус (рис. 9.1)

II. ***Один из мультипликаторов становится равным -1***. Эта бифуркация называется бифуркацией удвоения периода (рис. 9.2)



а) $\varepsilon < \varepsilon^*$ б) $\varepsilon = \varepsilon^*$ в) $\varepsilon > \varepsilon^*$

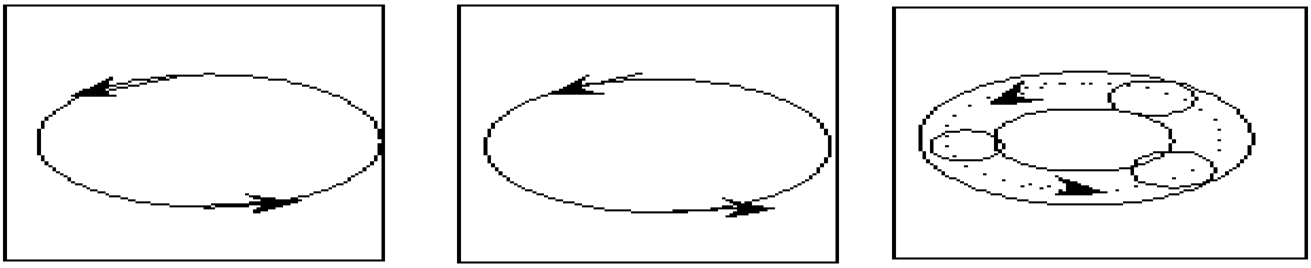
Рис. 9.1. Исчезновение пары замкнутых траекторий



а) $\varepsilon < \varepsilon^*$ б) $\varepsilon = \varepsilon^*$ в) $\varepsilon > \varepsilon^*$

Рис. 9.2. Бифуркация удвоения периода

III. ***Модуль комплексно-сопряженной пары мультипликаторов становится равным 1***. Этот вид бифуркации характеризуется возникновением инвариантного тора (рис. 9.3)



а) $\varepsilon < \varepsilon^*$ б) $\varepsilon = \varepsilon^*$ в) $\varepsilon > \varepsilon^*$

Рис. 9.3. Возникновение инвариантного тора

Отображение Пуанкаре

Пусть $\gamma(\mathbf{x}_0)$ – замкнутая траектория решения системы (8.1). Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \gamma$ и проведем через нее сечение $\mathbf{\Sigma}$ (малая часть гиперплоскости, пересекающая γ под ненулевым углом в точке $\mathbf{x}_0$). Траектории системы, близкие к γ, задают отображение $\mathbf{P}$ сечения $\mathbf{\Sigma}$ на себя следующим образом. Пусть $\mathbf{x}_0 \in$, а $\mathbf{P}(\mathbf{x}_0)$ – первая после $\mathbf{x}_0$ точка пересечения $\gamma(\mathbf{x}_0)$ с сечением $\mathbf{\Sigma}$.

Отображение $\mathbf{P}: \ \to \ $ называется отображением Пуанкаре, соответствующим замкнутой траектории γ:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{P}(\mathbf{x}_1), \ \ldots \ \mathbf{x}_k = \mathbf{P}^k(\mathbf{x}_0).$$

Предельному циклу отвечает $\mathbf{x}_0$ – неподвижная точка на $\mathbf{\Sigma}$. Бифуркации, связанной с рождением (исчезновением) пары замкнутых траекторий, отвечают две неподвижные точки. Бифуркации удвоения периода отвечает траектория, замыкающаяся после двух обходов: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{P}(\mathbf{x}_1)$. Наконец, возникновение инвариантного тора сопровождается ответвлением от точки $\mathbf{x}_0$ инвариантной окружности (замкнутой инвариантной кривой) отображения $\mathbf{P}$.

Использование отображения Пуанкаре упрощает процесс исследования решения по следующим причинам:

- число координат сокращается на единицу;
- время дискретизируется и дифференциальные уравнения заменяются разностными уравнениями, определяющими отображение Пуанкаре;
- резко сокращается число данных, подлежащих обработке, так как почти всеми точками траектории можно пренебречь.

Теперь рассмотрим вопрос построения отображения Пуанкаре.

Пусть сечение $\mathbf{\Sigma}$ (участок гиперповерхности $\mathbf{S}$) для траектории γ системы (8.1) задается уравнением

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}\right) = 0. \tag{9.1}$$

Обычный подход к нахождению орбиты отображения Пуанкаре заключается в интегрировании (8.1) выбранным методом. Как только в двух соседних по t точках $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ меняет знак, например

$$\mathbf{S}\left(\mathbf{x}\left(t_m\right)\right) < 0, \quad \mathbf{S}\left(\mathbf{x}\left(t_{m+1}\right)\right) > 0,$$

начинается утомительная процедура подбора нужного шага на промежутке $[t_m, t_{m+1}]$ с целью выполнения условия (9.1) с требуемой точностью. При этом весь процесс каждый раз повторяется для очередной точки пересечения траекторией γ сечения $\mathbf{\Sigma}$. Для устранения этого недостатка, модифицируем процесс вычислений, чтобы после достижения точки $\mathbf{x}\left(t_m\right)$ сразу оказаться на $\mathbf{\Sigma}$.

Пусть первоначально сечение $\mathbf{S}$ задается уравнением

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{(k)} - a = 0 \tag{9.2}$$

Перейдем в системе (8.1) к новой независимой переменной $\mathbf{x}^{(k)}$ вместо t. Тогда (8.1) примет вид

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{x}^{(i)}}{d\mathbf{x}^{(k)}} = \frac{\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x})}{\mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x})}; \quad i \neq k \\ \frac{dt}{d\mathbf{x}^{(k)}} = \frac{1}{\mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x})} \end{gathered} . \tag{9.3}$$

Теперь, достигнув $\mathbf{x}\left(t_m\right)$, выполним шаг интегрирования в (9.3) по независимой переменной $\mathbf{x}^{(k)}$ размером $\Delta\mathbf{x}^{(k)} = a - \mathbf{x}^{(k)}\left(t_m\right)$. Сразу после этого продолжим интегрирование системы в обычном виде (8.1). Если сечение $\mathbf{S}$ задается не формулой (9.2), а более общим выражением (9.1), то расширим вектор $\mathbf{x}$, введя еще одну его компоненту

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{S}\left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}\right),$$

и дополним (8.1) дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}^{(n+1)}}{dt} = f^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}} \cdot f^{(j)}(\mathbf{x}). \tag{9.4}$$

Для новой совместной системы (8.1) и (9.4) уравнение сечения приобретает простой вид (9.2)

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{(n+1)} = 0,$$

и все сводится к ранее рассмотренному случаю.

Нахождение точек бифуркации для периодических решений.

Обратимся к системе (8.14), введя в нее скалярный параметр ε

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(0), \quad \tau \in [0,1]. \tag{9.5}$$

Система (9.5) решается совместно с (8.15). Результатом является матрица монодромии $\mathbf{U}(1)$, мультипликаторы которой позволяют судить об орбитальной устойчивости периодического решения. Теперь необходимо записать дополнительные уравнения для определения значений ε, отвечающих конкретному виду бифуркации периодического решения. Обратимся к ранее рассмотренным простейшим случаям.

Бифуркация удвоения периода. Один из мультипликаторов $\mathbf{U}(1)$ становится равным (-1). Отвечающий ему собственный вектор обозначим за $\mathbf{v}$ и запишем

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}(1)\cdot\mathbf{v} = -\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{U}(1)+\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{v}^{(k)} = 1 \end{aligned} \quad . \tag{9.6}$$

Последнее уравнение в (9.6) аналогично последнему уравнению в (7.9). Систему (9.6) составляет $(n+1)$ уравнение относительно $(n+1)$ неизвестного: вектора $\mathbf{v}$ и параметра ε. Если ε окажется вектором из двух компонент, то варьируя с некоторым шагом одну из них и решая (9.6) относительно другой, можно строить бифуркационную диаграмму для данного вида бифуркации.

Рождение (исчезновение) пары замкнутых траекторий. При этом у матрицы $\mathbf{U}(1)$ появляется еще один мультипликатор, равный единице, и в зависимости от вида жордановой формы $\mathbf{U}(1)$ возможны две ситуации.

1) Матрица $\mathbf{U}(1)$ имеет два линейно независимых вектора $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, отвечающие единичным собственным значениям:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{U}(1)-\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ &\left(\mathbf{U}(1)-\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{w} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad . \tag{9.7}$$

2) Матрица $\mathbf{U}(1)$ имеет один собственный вектор $\mathbf{v}$ и один корневой вектор $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{U}(1)-\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ &\left(\mathbf{U}(1)-\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v} \end{aligned} \quad . \tag{9.8}$$

При этом заранее неизвестно, какой из случаев (9.7) или (9.8) имеет место. Для получения уравнений, пригодных в обеих ситуациях, умножим вторые уравнения в (9.7) и (9.8) на матрицу $\left(\mathbf{U}(1)-\mathbf{E}\right)$. В итоге с учетом условий на $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ получим:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{U}(1)-\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ &\left(\mathbf{U}(1)-\mathbf{E}\right)^2\cdot\mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{v}^{(k)} = 1, \quad \mathbf{w}^{(k)} = 0. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Возникновение инвариантного тора. Модуль комплексно-сопряженной пары мультипликаторов $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ становится равным 1. Обозначая отвечающие им собственные векторы за $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$

$$\mathbf{U}(1)\cdot\left(\mathbf{u}+i\mathbf{v}\right)=(\alpha+i\omega)\cdot\left(\mathbf{u}+i\mathbf{v}\right) \qquad (9.10)$$

и приравнивая отдельно действительные и мнимые части равенства (9.10), имеем

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{U}(1)-\alpha\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{u}+\omega\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0},\\ &-\omega\cdot\mathbf{u}+\left(\mathbf{U}(1)-\alpha\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0},\\ &\mathbf{u}^{(k)}=1,\quad \mathbf{v}^{(k)}=0,\quad \alpha^2+\omega^2=1.\end{aligned} \qquad (9.11)$$

Подведем некоторые промежуточные итоги. Рассмотренные задачи анализа нелинейных моделей могут быть представлены в виде рис.9.4:

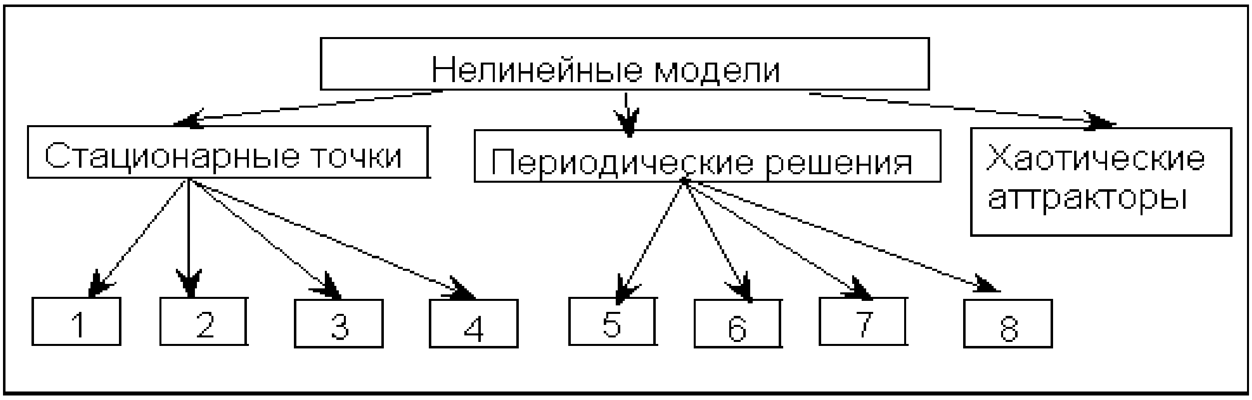


Рис. 9.4 Задачи анализа нелинейных моделей

1 – Нахождение стационарных точек
2 – Анализ устойчивости
3 – Построение диаграмм стационарных решений
4 – Построение бифуркационных диаграмм
5 – Нахождение периодических решений
6 – Анализ орбитальной устойчивости
7 – Построение диаграмм периодических решений
8 - Построение бифуркационных диаграмм периодических решений

Используемый при этом математический аппарат сводится к следующему.
Задача 1. Решается система нелинейных уравнений (7.1) при заданном значении ε.
Задача 2. Рассчитываются собственные значения матрицы Якоби в стационарной точке.
Задача 3. Многократно решается *задача 1*.
Задача 4. Аналогично *задачам 1 и 3* с использованием дополнительных уравнений (7.8) – (7.12).
Задача 5. Решается краевая задача (8.14).
Задача 6. Система (8.14) решается одновременно с (8.15) и рассчитываются собственные значения матрицы монодромии.
Задача 7. Многократно решается *задача 5*.
Задача 8. Аналогично *задачам 5 и 7* с использованием дополнительных уравнений (9.6) – (9.11).

При возникновении «хаотического» (или «странного») аттрактора отображение Пуанкаре дает хаотическую картину, но с очевидной ограниченностью решения. Познакомимся с объектами этого рода.

Лекция 10. Странные аттракторы. Явление Фейгенбаума.

Обратимся вновь к системе нелинейных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \tag{10.1}$$

и введем несколько определений.

Определение 1. Множество $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^n$ называется ***инвариантным множеством*** системы (10.1), если любая траектория его решения, имеющая с $\mathbf{M}$ хотя бы одну общую точку, целиком лежит в $\mathbf{M}$.

Простейшими примерами, удовлетворяющими этому определению, являются ранее рассмотренные стационарные точки и предельные циклы.

Определение 2. Замкнутое инвариантное множество $\mathbf{M}$ решения $\mathbf{x}(t)$ называется ***устойчивым по Ляпунову***, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in (0,\varepsilon))(\forall t \geq 0)\left(\rho\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{M}\right) \leq \delta \;\Rightarrow\; \rho\left(\mathbf{x}, \mathbf{M}\right) \leq \varepsilon\right) \tag{10.2}$$

Определение 3. Замкнутое инвариантное множество $\mathcal{A}$ называется ***аттрактором***, если существует открытое множество $\mathbf{U}$ такое, что $\mathcal{A} \in \mathbf{U}$ и

$$(\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{U})\left(\rho\left(\mathbf{x}, \mathcal{A}\right) \underset{t\to\infty}{\to} 0\right). \tag{10.3}$$

При этом $\mathbf{U}$ называется областью притяжения аттрактора $\mathcal{A}$.

Определение 4. Инвариантное множество $\mathbf{M}$ называется ***внутренне неустойчивым*** (или ***хаотическим***), если любая траектория, которая лежит в $\mathbf{M}$, является неустойчивой по Ляпунову так, что первоначально близкие траектории, лежащие в $\mathbf{M}$, разбегаются друг от друга с экспоненциальной скоростью.

Явление Фейгенбаума.

Рассмотрим разностное уравнение

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f(x) = 4\varepsilon \cdot x(1-x), \quad x \in [0,1], \quad \varepsilon \in [0,1] \tag{10.4}$$

где ε – параметр. Квадратичная функция $f(x)$ достигает своего максимального значения при $x = \frac{1}{2}$:

$$\max f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \varepsilon.$$

Таким образом, значения x_k никогда не покидают единичного промежутка.

Уравнение (10.4) имеет две стационарные точки:

$$x_1^{стац} = 0, \quad x_2^{стац} = 1 - \frac{1}{4\varepsilon}. \tag{10.5}$$

Обратимся к различным значениям ε.

Промежуток 1. $\varepsilon \in [0, 0.25)$. Вторая стационарная точка $x_2^{стац}$ не существует на промежутке $[0,1]$. Рассмотрим устойчивость $x_1^{стац}$. Чтобы нулевая точка была асимптотически устойчивой, производная $f'(0)$ должна быть по модулю меньше единицы, что реально имеет место для $\varepsilon \in [0, 0.25)$:

$$f'(x) = 4\varepsilon - 8\varepsilon \cdot x, \quad f'(0) = 4\varepsilon < 1 \tag{10.6}$$

Таким образом, $x_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ для всех x_0.

Промежуток 2. $\varepsilon \in [0.25, 0.75)$. Нулевая стационарная точка в соответствии с (10.6) становится неустойчивой, однако появляется вторая стационарная точка $x_2^{стац}$, которая, как следует из (10.6) и (10.7) асимптотически устойчива и все решения сходятся к ней:

$$f'(x_2^{стац}) = 4\varepsilon - 8\varepsilon \cdot x_2^{стац} = 4\varepsilon - 8\varepsilon \cdot \left(1 - \frac{1}{4\varepsilon}\right) = 2 - 4\varepsilon, \quad \left| f'(x_2^{стац}) \right| \le 1. \tag{10.7}$$

Промежуток 3. $\varepsilon \in [0.75, 0.86237...)$. Обе стационарные точки становятся неустойчивыми и можно показать, что появляются такие две точки x_1^* и x_2^*, что

$$x_2^* = f(x_1^*), \quad x_1^* = f(x_2^*),$$

и имеет место периодический аттрактор с периодом 2.

Промежуток 3. $\varepsilon \in [0.86237..., 0.88602...)$. Периодический аттрактор с периодом 2 становится неустойчивым, но появляется периодический аттрактор с периодом 4:

$$x_2^{**} = f(x_1^{**}), \quad x_3^{**} = f(x_2^{**}), \quad x_4^{**} = f(x_3^{**}), \quad x_1^{**} = f(x_4^{**}).$$

Промежуток 4. $\varepsilon \in [0.88602..., 0.89218...)$. Периодический аттрактор с периодом 4 становится неустойчивым, но появляется периодический аттрактор с периодом 8.

Описанный процесс удвоения периода продолжается и далее вплоть до $\varepsilon_\infty = 0.892486418...$. При этом длина каждого очередного промежутка сокращается в $\delta = 4.669201609...$ раз.

В результате последовательной бифуркации удвоения периода («субгармонический каскад») возникают хаотические аттракторы. Значения $\varepsilon > \varepsilon_\infty$ характеризуются сочетанием периодических аттракторов с режимом, который называют «хаосом». В последнем случае x_k порождаются так, что они не повторяются, зависят от x_0, и две первоначально близкие точки порождают траектории, расходящиеся друг от друга. Принципиальная непредсказуемость хаотического режима при $\varepsilon > \varepsilon_\infty$ еще не означает, что он полностью лишен определенного порядка, хотя этот порядок, на первый взгляд, и не виден.

Одной из характеристик хаотических аттракторов является их фрактальная размерность.

Фрактальные размерности.

Рассмотрим множество точек в $\mathbf{R}^n$. Пусть $N(\varepsilon)$ - наименьшее количество гиперкубов с ребром ε, необходимое для покрытия этого множества. Размерность Хаусдорфа-Безиковича D (***фрактальная размерность***) определяется как предел

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{10.7}$$

если он существует. Эта величина обобщает обычную геометрическую размерность и позволяет характеризовать объем «фрактальных» объектов.

Пример 1. Объект – точка. $N(\varepsilon) = 1 \Rightarrow D = 0$ (как и ожидалось!)

Пример 2. Объект – отрезок линии длиной L. $N(\varepsilon) = \dfrac{L}{\varepsilon} \Rightarrow D = 1$ (как и ожидалось!)

Пример 3. Объект – поверхность площадью S. $N(\varepsilon) = \dfrac{S}{\varepsilon^2} \Rightarrow D = 2$ (ожидаемо!)

Пример 4. Объект – канторовское множество. Из первоначального отрезка единичной длины удаляется центральная треть. На втором шаге у каждого из оставшихся отрезков удаляется центральная треть и т.д. Таким образом, последовательно имеем:

$$\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad N(\varepsilon) = 2;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9}, \quad N(\varepsilon) = 4;$$

....

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^m, \quad N(\varepsilon) = 2^m.$$

Переходя к пределу $m \to \infty$, что соответствует $\varepsilon \to 0$, получаем

$$D = \lim_{m \to \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63.$$

Пример 5. Объект – «снежинка» или «кривая Коха». Она обладает необычным свойством, которое имеют сечения Пуанкаре для многих хаотических аттракторов: фигура имеет *бесконечный периметр*, ограничивающий *конечную область* плоскости. Исходная фигура – равносторонний треугольник с единичной стороной. На первом шаге каждую сторону разделяем на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины 1/3. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев, увеличивая периметр опять в 4/3 раза, и т. д. Предельная кривая и есть кривая Коха. Для ребра гиперкуба и $N(\varepsilon)$ последовательно имеем

$$\varepsilon = 1, \quad N(\varepsilon) = 3;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad N(\varepsilon) = 3 \cdot 4;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9}, \quad N(\varepsilon) = 3 \cdot 4^2;$$

....

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^m, \quad N(\varepsilon) = 3 \cdot 4^m.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, что соответствует $\varepsilon \to 0$, получаем

$$D = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln\left(3 \cdot 4^m\right)}{\ln\left(3^m\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26\,.$$

Лекция 11. Аттрактор Лоренца. Автоматизация процесса построения модели.

Модель Лоренца описывает процесс конвекции для слоя жидкости бесконечной протяженности по горизонтали, подогреваемого снизу. Исходная задача в частных производных сводится к следующей системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sigma\left(y - x\right);$$

$$\frac{dy}{dt} = -x \cdot z + r \cdot x - y; \qquad (11.1)$$

$$\frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z;$$

где σ, r, b - параметры. Лоренц использовал эту модель как грубую модель земной атмосферы. Это первый хаотический аттрактор (1963г.), который был открыт исследователями.

Приравнивая нулю производные в (11.1), получаем три стационарные точки.

Первая точка: x = y = z = 0. Матрица Якоби системы (11.1)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

в нулевой точке имеет вид

$$\mathbf{J}(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

Из ее характеристического уравнения

$$\det\left(\mathbf{J}(0) - \lambda\mathbf{E}\right) = \left(-b - \lambda\right)\left(\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma - \sigma \cdot r\right) = 0$$

видно, что для $r < 1$ нулевая точка устойчива, а при $r > 1$ – нет.

Вторая и третья стационарные точки расположены симметрично и определяются равенствами

$$x = y = \pm\sqrt{\left(r-1\right)\cdot b}; \quad z = r - 1. \tag{11.4}$$

Они существуют только для $r > 1$. Оценим их устойчивость, подставляя (11.4) в (11.2) и записывая соответствующее характеристическое уравнение

$$\det\left(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}\right) = -\left(\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\cdot\lambda^2 + b\cdot(r+\sigma)\cdot\lambda + 2\sigma\cdot b\cdot(r-1)\right) = 0\,. \tag{11.5}$$

Свободный член полинома не может обращаться в нуль, поэтому вещественная бифуркация невозможна. Рассмотрим условия комплексной бифуркации. Если полином третьей степени $P(\lambda)$ имеет чисто мнимую пару корней $\pm i\omega$ и вещественный корень α, то его можно записать в виде

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda^2 + \omega^2) = \lambda^3 - \alpha\cdot\lambda^2 + \omega^2\cdot\lambda - \alpha\cdot\omega^2\,. \tag{11.6}$$

Легко заметить, что коэффициент при λ^2, умноженный на коэффициент при λ, равен свободному члену полинома. По этой причине для (11.5) запишем

$$(\sigma + b + 1)\cdot b\cdot(r+\sigma) = 2\sigma\cdot b\cdot(r-1)\ b\cdot(r+\sigma)\ 2\sigma\cdot b\cdot(r-1)\,,$$

откуда получаем

$$r = \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}\sigma\,. \tag{11.7}$$

Например, для $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ по формуле (11.7) вычисляем $r = \frac{470}{19} \approx 24.74$. Оказывается, что на промежутке $r \in [24.06,\ 24.74]$ существует три аттрактора: две стационарные точки и один хаотический аттрактор. При $24.74 < r < 30.1$ существует лишь хаотический аттрактор с фрактальной размерностью $D = 2.06$, а при $r > 30.1$ имеет место чередование хаотических аттракторов и периодических решений.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ

Компонентные и топологические уравнения на макроуровне.

В построении моделей из различных физических областей часто есть много общего. Поэтому особое место занимают методы, успешно применяющиеся в широком спектре задач. Одним из таких методов является ***метод прямой аналогии***. Он базируется на следующих положениях.

1. Система представляется суммой подсистем, каждая из которых по характеру протекающих в ней процессов должна быть физически однородной (механические, электрические, гидравлические, тепловые и др. подсистемы).
2. Состояние каждой подсистемы описывается множеством фазовых переменных двух типов: переменные потока и переменные потенциала. Для макроуровня существенной является также дискретизация пространства, что означает конечность множеств фазовых переменных в каждой подсистеме.
3. Структура каждой подсистемы представляется множествами элементов и связей их друг с другом: множеством узлов (вершин) и связывающих их ветвей (ребер).
4. Свойства элемента задаются его математической моделью, устанавливающей связь между фазовыми переменными, относящимися к ребрам и узлам данного элемента. Эти выражения называются ***компонентными уравнениями***.
5. Полная математическая модель есть совокупность компонентных и ***топологических уравнений***. Последние связывают однотипные фазовые переменные, относящиеся к взаимосвязанным элементам.

В большинстве технических систем можно выделить три типа простейших элементов:

- элемент типа R – элемент диссипации энергии; на этом элементе, как правило, происходит преобразование энергии в тепловую;
- элемент типа C;
- элемент типа L.

На последних двух элементах происходит накопление потенциальной и кинетической энергии.

Примеры компонентных уравнений различных подсистем		
Электрическая	Механическая поступательная	Механическая вращательная
Переменная потока: I – ток	Переменная потока: F – сила	Переменная потока: M – момент сил
Переменная потенциала: U – напряжение	Переменная потенциала: V – скорость	Переменная потенциала: ω – угловая скорость
Закон Ома: $I = \dfrac{U}{R}$	Уравнение вязкого трения: $F = kV = \dfrac{V}{R_M}$	Уравнение вязкого трения вращения: $M = k\omega = \dfrac{\omega}{R_{вр}}$
Уравнение емкости: $I = C\dfrac{dU}{dt}$	Второй закон Ньютона: $F = ma = m\dfrac{dV}{dt}$	Основное уравнение динамики вращательного движения: $M = J\dfrac{d\omega}{dt}$. J – момент инерции
Уравнение индуктивности: $U = L\dfrac{dI}{dt}$	Уравнение пружины: $F = kx \Rightarrow V = \dfrac{1}{k}\dfrac{dF}{dt}$	Уравнение кручения бруса с круглым сечением: $\omega = \dfrac{l}{G \cdot J_p}\dfrac{dM}{dt}$
Топологические уравнения различных подсистем		
Закон токов Кирхгофа – уравнение равновесия	Принцип Даламбера	Принцип Даламбера для вращательных систем
Закон напряжений К. – уравнение непрерывности	Принцип сложения скоростей	Принцип сложения скоростей вдоль оси вращ.

Программа анализа математических моделей.

В качестве примера остановимся на анализе модели электрической системы, состав которой традиционен: источники напряжения (E), источники тока (I), емкости (C), сопротивления (R), индуктивности (L), нелинейные элементы (N). Типовая структура простейшей программы анализа предполагает наличие следующих блоков.

Входной блок. Как правило, для удобного общения с пользователем здесь используется специальный язык. Возможный вариант структуры данных – каждому двухполюснику соответствует запись со следующими полями: тип двухполюсника; входной узел, выходной узел, номинал двухполюсника, начальные условия ($U_C(0)$ для емкости или $I_L(0)$ для индуктивности). В дальнейшем для описания схемы будем использовать язык теории графов.

Граф – множество вершин, соединенных отрезками линий (ребра, ветви графа). ***Ребро*** – двухполюсник, ***вершина*** – место соединения соседних элементов.

Блок построения уравнений модели. На основе компонентных и топологических уравнений одним из специальных методов строится модель системы.

Блок численной реализации модели. Для решения дифференциальных и алгебраических уравнений модели используются численные методы, являющиеся предметом курса «Вычислительная математика».

Выходной блок. Результаты предыдущего блока оформляются в удобном для пользователя виде: таблицы, графики и др.

Предметом нашего рассмотрения в настоящем курсе является второй блок – *блок построения уравнений модели* на основе информации, собранной в первом блоке.

В качестве примера обратимся к схеме, представленной на рис.11.1.

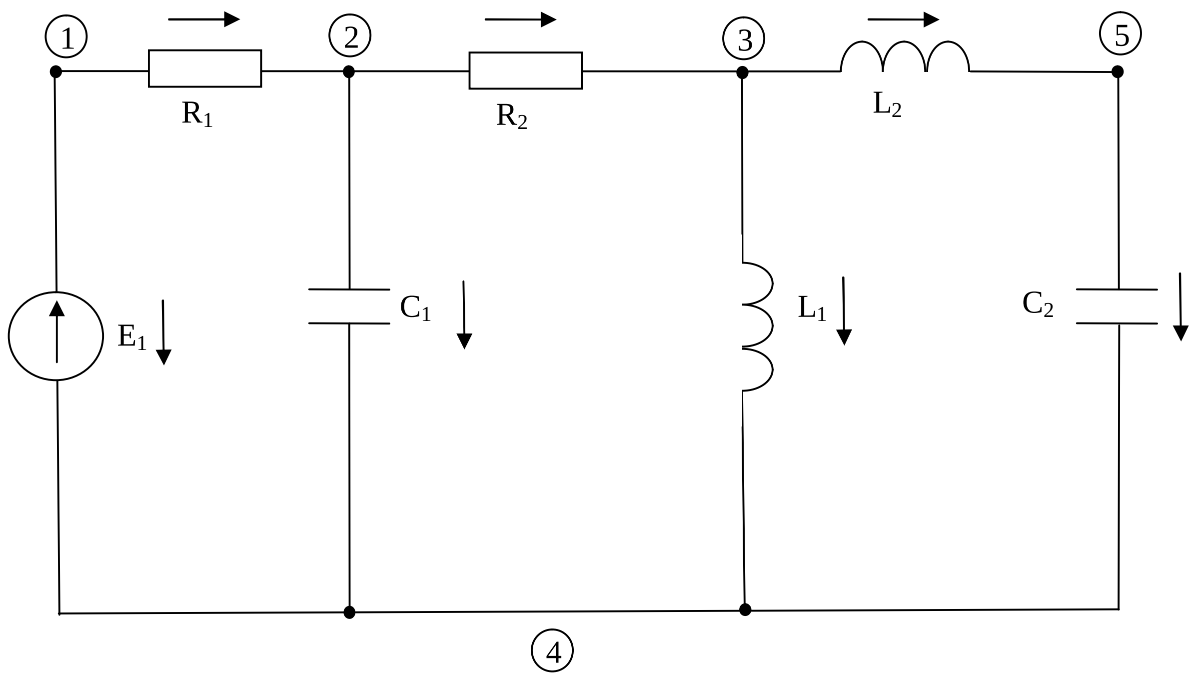


Рис. 11.1

Отвечающий ей направленный граф представлен на рис.11.2.

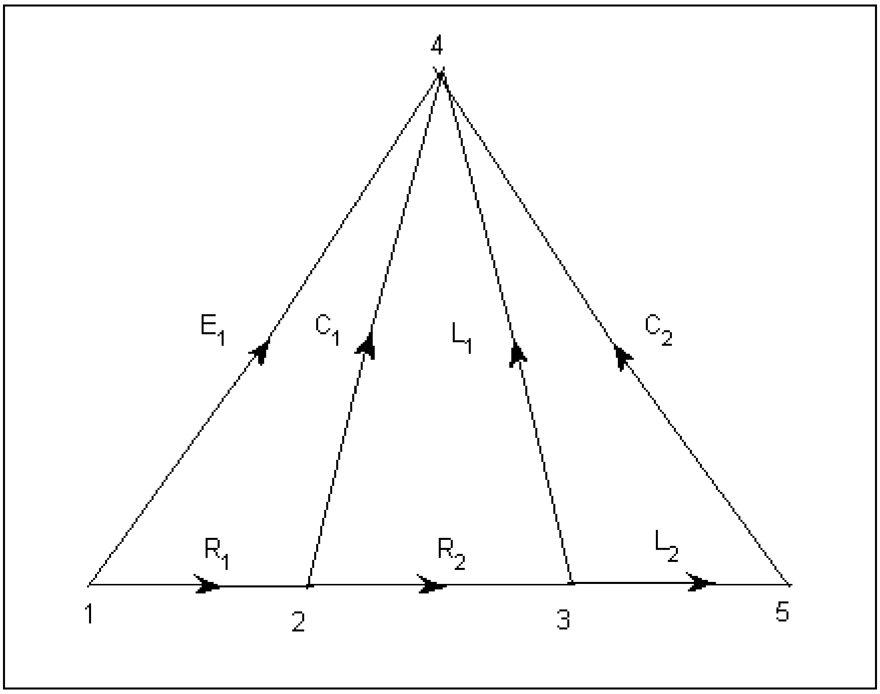


Рис. 11.2.

Для удобной записи в матрично-векторном виде законов Кирхгофа введем понятие ***матрицы инциденций***. Один из узлов схемы (принципиально любой!) принимаем за *базовый* (в нашем примере это узел 4). Строки матрицы инциденций – это все остальные узлы кроме базового, а столбцы – это все двухполюсники схемы. Для каждого столбца в соответствующей строке ставим (+1), если этот узел является входным для данного двухполюсника; (-1), если это выходной узел; и (0) – во всех остальных случаях. Таким образом, в каждом столбце будут не более двух ненулевых элементов. Для схемы рис.11.1 матрица инциденций $\mathbf{A}$ имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cccccccc} \textit{узел} & E_1 & C_1 & C_2 & R_1 & R_2 & L_1 & L_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \qquad (11.8)$$

Матрица $\mathbf{A}$ легко строится по столбцам на основе данных входного блока.

Теперь введем три вектора: вектор токов $\mathbf{I}$, вектор напряжений $\mathbf{U}$, перечень компонент которых согласован с порядком столбцов матрицы инциденций:

$$\mathbf{I} = \left(i_{E_1}, i_{C_1}, i_{C_1}, i_{R_1}, i_{R_1}, i_{L_1}, i_{L_1}\right)^T, \qquad \mathbf{U} = \left(u_{E_1}, u_{C_1}, u_{C_1}, u_{R_1}, u_{R_1}, u_{L_1}, u_{L_1}\right)^T,$$

а также вектор потенциалов узлов $\boldsymbol{\varphi}$, компоненты которого согласованы со строками матрицы $\mathbf{A}$:

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_5)^T .$$

Легко заметить, что не только для данной схемы, но и в общем случае имеют место следующие формулы:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}, \qquad (11.9)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \varphi . \qquad (11.10)$$

Первая формула отвечает закону токов Кирхгофа, а вторая связывает напряжения на двухполюсниках с потенциалами входных и выходных узлов.

Лекция 12. Узловой метод.

Для записи компонентных уравнений в матрично-векторном виде запишем все двухполюсники в следующем порядке: сначала все емкости, затем все сопротивления, потом индуктивности и нелинейные элементы. Нелинейным элементом может быть независимый источник тока или источник тока, управляемый напряжением, а также нелинейный двухполюсник с заданной вольт-амперной характеристикой: $i_N = f_N(\varphi_i - \varphi_k)$. Тогда векторы напряжений и токов всей системы могут быть составлены из следующих подвекторов:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_C, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_N)^T, \quad \mathbf{I} = (\mathbf{I}_C, \mathbf{I}_R, \mathbf{I}_L, \mathbf{I}_N)^T \qquad (12.1)$$

В соответствии с этим порядком матрица инциденций также оказывается составленной из подматриц:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_C, \mathbf{A}_R, \mathbf{A}_L, \mathbf{A}_N). \qquad (12.2)$$

Компонентные уравнения для каждого вида двухполюсника имеют вид:

$$i_{C_i} = C_i \frac{du_{C_i}}{dt}; \quad i_{R_i} = R_i^{-1} u_{R_i}; \quad i_{L_i} = L_i^{-1} \int u_{L_i} dt; \quad i_{N_i} = f_i(\varphi)$$

Их же можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{U}_C}{dt}; \quad \mathbf{I}_R = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_R; \quad \mathbf{I}_L = \mathbf{L}^{-1} \int \mathbf{U}_L dt; \quad \mathbf{I}_N = \mathbf{f}(\varphi), \qquad (12.3)$$

где $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$ – диагональные матрицы:

$$\mathbf{C} = diag(C_1, C_2, ...); \quad \mathbf{R} = diag(R_1, R_2, ...); \quad \mathbf{L} = diag(L_1, L_2, ...).$$

Теперь уравнение (11.9) может быть представлено в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}_C \mathbf{I}_C + \mathbf{A}_R \mathbf{I}_R + \mathbf{A}_L \mathbf{I}_L + \mathbf{A}_N \mathbf{I}_N = \mathbf{0}. \qquad (12.4)$$

Подставляя в него компонентные уравнения из (12.3) и выражая после этого напряжения через потенциалы по формуле (11.10), получаем

$$\mathbf{A}_C \mathbf{C} \mathbf{A}_C^T \frac{d\varphi}{\partial t} + \mathbf{A}_R \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_R^T \varphi + \mathbf{A}_L \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}_L^T \int \varphi dt + \mathbf{A}_N \mathbf{f}(\varphi) = \mathbf{0}. \qquad (12.5)$$

Полученные уравнения могут быть положены, например, в основу следующих трех методов для автоматизации процесса построения модели.

Узловой метод

Аппроксимируем производные, входящие в компонентные уравнения, руководствуясь неявной схемой метода ломаных Эйлера

$$\frac{d\mathbf{x}(t_n)}{dt} \approx \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h}; \quad t_n = t_0 + nh, \tag{12.6}$$

который эффективен и в случае, когда интегрируемая система дифференциальных уравнений является жесткой. В соответствии с (12.6) имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{I}_C(t_n) \approx \mathbf{C}\frac{\mathbf{U}_C(t_n) - \mathbf{U}_C(t_{n-1})}{h}; \quad \mathbf{I}_R(t_n) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_R(t_n); \\ &\mathbf{U}_L(t_n) \approx \mathbf{L}\frac{\mathbf{I}_L(t_n) - \mathbf{I}_L(t_{n-1})}{h} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_L(t_n) = \mathbf{I}_L(t_{n-1}) + h\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}_L(t_n) \end{aligned}. \tag{12.7}$$

Подставляя эти токи в (12.4) и выражая напряжения по формуле $\mathbf{U}(t_n) = \mathbf{A}^T\varphi(t_n)$, получаем следующую систему разностных уравнений первого порядка

$$\mathbf{B} \cdot \varphi(t_n) = \mathbf{d}_n, \tag{12.8}$$

$$\text{где} \quad \begin{aligned} &\mathbf{B} = h^{-1}\mathbf{A}_C\mathbf{C}\mathbf{A}_C^T + \mathbf{A}_R\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}_R^T + h \cdot \mathbf{A}_L\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_L^T; \\ &\mathbf{d}_n = h^{-1}\mathbf{A}_C\mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_C(t_{n-1}) - \mathbf{A}_L \cdot \mathbf{I}_L(t_{n-1}) - \mathbf{A}_N\mathbf{f}(\varphi(t_n)) \end{aligned}. \tag{12.9}$$

В отношении $\mathbf{f}(\varphi(t_n))$ рассмотрим три варианта.

Вариант 1. $\mathbf{f}(\varphi(t_n)) = \mathbf{I}_I(t)$ – независимый источник тока. Тогда матрица $\mathbf{B}$ – симметрическая, а вектор $\mathbf{d}_n$ известен с предыдущего шага. Первые шаги выглядят следующим образом. Вычисляем $\mathbf{d}_1 = h^{-1}\mathbf{A}_C\mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_C(0) - \mathbf{A}_L \cdot \mathbf{I}_L(0) - \mathbf{A}_N\mathbf{f}(h)$, решаем систему (12.8) и получаем $\varphi(h)$. Далее определяем

$$\mathbf{U}_C(h) = \mathbf{A}_C^T\varphi(h), \quad \mathbf{U}_L(h) = \mathbf{A}_L^T\varphi(h), \quad \mathbf{I}_L(h) = \mathbf{I}_L(0) + h\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}_L(h),$$

$$\mathbf{d}_2 = h^{-1}\mathbf{A}_C\mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_C(h) - \mathbf{A}_L \cdot \mathbf{I}_L(0) - h\mathbf{A}_L\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{U}_L(h) - \mathbf{A}_N\mathbf{f}(2h)$$

и вновь решаем систему (12.8) и т.д. Если бы матрица $\mathbf{B}$ системы (12.8) имела произвольный вид, то однократно выполнялось бы ее **LU**-разложение программой ***DECOMP***, и в дальнейшем использовалась бы только программа ***SOLVE***. Для симметрической матрицы объем вычислений может быть сокращен еще примерно в два раза, если разложение $\mathbf{B}$ выполнять на основе метода квадратного корня.

Вариант 2. $\mathbf{f}(\varphi(t_n))$ – линейная функция $\varphi(t_n)$. Тогда соответствующее слагаемое $\mathbf{A}_N\mathbf{f}(\varphi(t_n))$ в (12.8) переносится в левую часть и корректирует матрицу $\mathbf{B}$, после чего все сводится к предыдущему варианту.

Вариант 3. $\mathbf{f}(\varphi(t_n))$ – относительно произвольная функция. Тогда (12.8) является системой нелинейных уравнений относительно $\varphi(t_n)$, которую можно решать, например, методом Ньютона. При этом решение линейной части (12.8) является хорошим начальным приближением.

Главным достоинством узлового метода является его несомненная простота реализации. Это касается как построения матрицы инциденций и матрицы $\mathbf{B}$, так и последующего решения (12.8). К числу недостатков следует отнести то, что процесс построения модели и ее численного решения оказались связанными воедино. Если возникнет необходимость в замене неявного метода ломаных Эйлера на какой-нибудь другой, то всю программу придется переделывать. Еще одним недостатком является то, что с уменьшением шага интегрирования матрица $\mathbf{B}$ становится заметно хуже обусловленной.

С***ведение системы интегро-дифференциальных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.***

Еще один метод построения модели часто применяется на практике пользователями без привлечения компьютера для схем с небольшим числом узлов и двухполюсников. Однако применение компьютера для построения моделей больших размерностей таким способом сталкивается с целым рядом больших трудностей. Продифференцируем систему (12.5), вводя при этом еще одну векторную переменную $\mathbf{\Theta} = \dfrac{d\varphi}{dt}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_C\mathbf{C}\mathbf{A}_C^T \cdot \frac{d\mathbf{\Theta}}{\partial t} = -\mathbf{A}_R\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}_R^T \cdot \mathbf{\Theta} - \mathbf{A}_L\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_L^T\varphi - \mathbf{A}_N\mathbf{f}'(\varphi)\cdot\mathbf{\Theta}, \\ &\frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{\Theta}. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Применить для решения (12.10) стандартную программу решения дифференциальных уравнений (например, ***RKF45***) мешают два обстоятельства.

Во-первых, система (12.10) не разрешена относительно производной, а с обращением матрицы $\mathbf{A}_C\mathbf{C}\mathbf{A}_C^T$ возникает целый ряд сложностей. Как известно, ранг произведения матриц не превышает наименьшего ранга сомножителей. В подавляющем большинстве схем количество узлов превышает количество емкостей. Тогда число строк матрицы $\mathbf{A}_C$ больше числа ее столбцов и ранг $\mathbf{A}_C$ не превышает общего числа емкостей. Матрица $\mathbf{A}_C\mathbf{C}\mathbf{A}_C^T$ оказывается матрицей неполного ранга и, следовательно, особенной ($\det(\mathbf{A}) = 0$). В таких условиях ряд преобразований первого уравнения (12.10) позволяет превратить несколько дифференциальных уравнений в алгебраические и исключить часть переменных. Это легко выполняется человеком для простой схемы, но организовать этот процесс на компьютере для схем высокой размерности является очень сложной задачей.

Во-вторых, есть серьезная проблема с начальными условиями для (12.10). Во входном блоке задаются начальные условия вида $\mathbf{U}_C(0)$ для емкости или $\mathbf{I}_L(0)$ для индуктивности. Здесь же требуется задать $\varphi(0)$ и $\Theta(0)$, что опять-таки для схем высокой размерности часто представляется непреодолимым препятствием.

Все сказанное приводит к тому, что рассмотренный подход для задач автоматизации процесса построения модели практически не используется.

Учитывая недостатки рассмотренных двух подходов, сформулируем желаемые свойства «хорошей» программы построения модели:

- модель должна быть разрешена относительно производных, и процесс построения модели следует отделить от процесса ее численного решения;
- в роли фазовых переменных следует использовать векторы $\mathbf{U}_C$ и $\mathbf{I}_L$, для которых есть начальные условия.

Решить эти проблемы позволяет нижеследующий метод.

Лекция 13. Метод переменных состояния.

Первоначально введем определения некоторых элементов теории графов. ***Граф*** – множество вершин и связанных с ним ребер. Будем рассматривать только ***связный граф***, когда обязательно существует путь по ребрам из любой вершины в любую другую (нет изолированных ребер!). ***Подграф*** – подмножество вершин и связывающих их ребер. ***Маршрут*** – некоторая последовательность соединенных ребер. ***Цепь*** – маршрут, не содержащий повторяющихся ребер. ***Цикл*** (***контур***) – цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в одной и той же вершине. ***Дерево графа*** – любой подграф без циклов. ***Фундаментальное*** (***покрывающее***) дерево – дерево, содержащее все узлы. ***Ветви*** – ребра, входящие в дерево. ***Хорды*** – остальные ребра графа. ***Контур хорды*** – множество ребер графа, образующих цикл при присоединении хорды к дереву. ***Сечение*** – любая замкнутая линия. ***Сечение ветви*** – множество ребер, пересекаемых линией сечения при условиях:

- пересекается единственная ветвь;
- все ребра пересекаются по одному разу.

Для анализа электронных схем введем специальный термин. ***Нормальное дерево*** – фундаментальное дерево, которое строится в соответствии с иерархией: $\mathbf{E},\mathbf{C},\mathbf{R},\mathbf{L},\mathbf{I}$ (т.е. первоначально для назначения ветвей используем все $\mathbf{E},\mathbf{C}$ и лишь затем $\mathbf{R},\mathbf{L},\mathbf{I}$).

Введем следующие обозначения:

$\mathbf{E}$ – источники напряжения **ветвей**;
$\mathbf{C}$ – емкости **ветвей;**
$\mathbf{r}$ – сопротивления **ветвей**;
$\mathbf{Г}$ – индуктивности **ветвей**;

$\mathbf{S}$ – емкости **хорд**;
$\mathbf{R}$ – сопротивления **хорд**;
$\mathbf{L}$ – индуктивности **хорд**;
$\mathbf{I}$ – источники тока **хорд**.

В соответствии с ними векторы напряжений и токов для ветвей и хорд состоят из следующих подвекторов:

$\mathbf{U}_B = \left(\mathbf{U}_E, \mathbf{U}_C, \mathbf{U}_r, \mathbf{U}_\Gamma\right)^T$ – вектор напряжения **ветвей**;

$\mathbf{I}_B = \left(\mathbf{I}_E, \mathbf{I}_C, \mathbf{I}_r, \mathbf{I}_\Gamma\right)^T$ – вектор токов **ветвей**;

$\mathbf{U}_X = \left(\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_I\right)^T$ – вектор напряжения **хорд**;

$\mathbf{I}_X = \left(\mathbf{I}_S, \mathbf{I}_R, \mathbf{I}_L, \mathbf{I}_I\right)^T$ – вектор токов **хорд**.

Аналогично тому, как в узловом методе определялась матрица инциденций, введем понятие ***матрицы контуров и сечений*** $\mathbf{M}$. Строки этой матрицы – хорды, а столбцы – ветви рассматриваемой схемы. Если ветви и хорды уже определены, то матрица заполняется по строкам в соответствии с контуром данной хорды. Элемент $\mathbf{M}$ равен (+1), если направление ветви совпадает с направлением хорды при обходе по контуру, он равен (-1), если направление противоположное, и он равен (0), если ветвь не входит в контур данной хорды. В соответствии с нумерацией компонент векторов токов и напряжений матрица $\mathbf{M}$ приобретает вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{SE} & \mathbf{M}_{SC} & \mathbf{M}_{Sr} & \mathbf{M}_{S\Gamma} \\ \mathbf{M}_{RE} & \mathbf{M}_{RC} & \mathbf{M}_{Rr} & \mathbf{M}_{R\Gamma} \\ \mathbf{M}_{LE} & \mathbf{M}_{LC} & \mathbf{M}_{Lr} & \mathbf{M}_{L\Gamma} \\ \mathbf{M}_{IE} & \mathbf{M}_{IC} & \mathbf{M}_{Ir} & \mathbf{M}_{I\Gamma} \end{pmatrix}. \qquad (13.1)$$

Теперь топологические уравнения могут быть записаны в матричном виде. Уравнения контуров хорд (закон напряжений Кирхгофа):

$$\mathbf{U}_X = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{U} \qquad (13.2)$$

и уравнения сечения ветвей (закон токов Кирхгофа)

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{I}_X\,. \qquad (13.3)$$

Три матрицы в (13.1) всегда нулевые:

$$\mathbf{M}_{Sr} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{M}_{S\Gamma} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{M}_{R\Gamma} = \mathbf{0}.$$

Действительно, предположим, что $\mathbf{M}_{Sr} \neq \mathbf{0}$. Это свидетельствует о наличии контура, в котором в роли ветви выступает сопротивление, а в роли хорды – емкость, но это противоречит правилу формирования нормального дерева. Следовательно, все эти три матрицы нулевые. Говорят, что в схеме ***отсутствуют топологические вырождения***, если дополнительно к сказанному равны нулю еще пять матриц:

$$\mathbf{M}_{SE} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{SC} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{Rr} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{L\Gamma} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{I\Gamma} = \mathbf{0}. \qquad (13.4)$$

Программа метода переменных состояний может быть представлена следующими последовательными этапами.

Этап 1. Деление всех двухполюсников на ветви и хорды и построение дерева графа.
Этап 2. Построение (заполнение) матрицы $\mathbf{M}$ контуров и сечений.
Этап 3. Получение уравнений модели.

Начнем с *этапа 3*, предполагая, что первые два этапа выполнены и матрица $\mathbf{M}$ построена.

Метод переменных состояния без наличия топологических вырождений

Размерности векторов $\mathbf{U}_X$, $\mathbf{I}_X$, $\mathbf{U}_B$, $\mathbf{I}_B$**,** а также матрицы $\mathbf{M}$ уменьшаются:

$\mathbf{U}_B = \left(\mathbf{U}_E, \mathbf{U}_C, \mathbf{U}_r\right)^T$ – вектор напряжения **ветвей**;

$\mathbf{I}_B = \left(\mathbf{I}_E, \mathbf{I}_C, \mathbf{I}_r\right)^T$ – вектор токов **ветвей**;

$\mathbf{U}_X = \left(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_I\right)^T$ – вектор напряжения **хорд**;

$\mathbf{I}_X = \left(\mathbf{I}_R, \mathbf{I}_L, \mathbf{I}_I\right)^T$ – вектор токов **хорд**.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{RE} & \mathbf{M}_{RC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{LE} & \mathbf{M}_{LC} & \mathbf{M}_{Lr} \\ \mathbf{M}_{IC} & \mathbf{M}_{Ir} & \mathbf{M}_{Ir} \end{pmatrix}; \tag{13.5}$$

Уравнения (13.2) и (13.3) принимают вид:

$$\mathbf{U}_R = -\mathbf{M}_{RE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC}\mathbf{U}_C; \quad ; \tag{13.6}$$

$$\mathbf{U}_L = -\mathbf{M}_{LE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr}\mathbf{U}_r; \tag{13.7}$$

$$\mathbf{U}_I = -\mathbf{M}_{IE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{IC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Ir}\mathbf{U}_r; \tag{13.8}$$

$$\mathbf{I}_E = \mathbf{M}_{RE}^T\mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LE}^T\mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IE}^T\mathbf{I}_I; \tag{13.9}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{M}_{RC}^T\mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LC}^T\mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T\mathbf{I}_I; \tag{13.10}$$

$$\mathbf{I}_r = \qquad \mathbf{M}_{Lr}^T\mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T\mathbf{I}_I; \tag{13.11}$$

Компонентные уравнения:

$$\frac{d\mathbf{I}_L}{dt} = \mathbf{L}^{-1}\cdot\mathbf{U}_L; \quad \frac{d\mathbf{U}_C}{dt} = \mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{I}_C; \qquad \mathbf{U}_r = \mathbf{r}\cdot\mathbf{I}_r; \qquad \mathbf{U}_R = \mathbf{R}\cdot\mathbf{I}_R;$$

где $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{C}$ – диагональные матрицы.

В соответствии с уравнениями (13.6) и (13.10) имеем уравнение относительно $\mathbf{U}_C$:

$$\frac{d\mathbf{U}_C}{dt} = \mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{I}_C = \mathbf{C}^{-1}\cdot\left(\mathbf{M}_{RC}^T\mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LC}^T\mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T\mathbf{I}_I\right) = \mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{M}_{RC}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_R + \mathbf{M}_{LC}^T\mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T\mathbf{I}_I\right) =$$

$$= \mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{M}_{RC}^T\mathbf{R}^{-1}\left(-\mathbf{M}_{RE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC}\mathbf{U}_C\right) + \mathbf{M}_{LC}^T\mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T\mathbf{I}_I\right). \tag{13.12}$$

Аналогично на основе (13.7) и (13.11) для $\mathbf{I}_L$ имеем:

$$\frac{d\mathbf{I}_L}{dt} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{U}_L = \mathbf{L}^{-1}\left(-\mathbf{M}_{LE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr}\mathbf{r} \cdot \mathbf{I}_r\right) =$$
$$= \mathbf{L}^{-1}\left(-\mathbf{M}_{LE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr}\mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{M}_{Lr}^T\mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T\mathbf{I}_I\right)\right) \quad (13.13)$$

Как итог, имеем систему уравнений (13.12)-(1313) в форме Коши относительно векторов фазовых переменных $\mathbf{U}_C$ и $\mathbf{I}_L$.

Метод переменных состояния при наличии топологических вырождений

Векторы токов и напряжений теперь сохраняют полный вид:

$\mathbf{U}_B = \left(\mathbf{U}_E, \mathbf{U}_C, \mathbf{U}_r, \mathbf{U}_\Gamma\right)^T$, $\mathbf{I}_B = \left(\mathbf{I}_E, \mathbf{I}_C, \mathbf{I}_r, \mathbf{I}_\Gamma\right)^T$,

$\mathbf{U}_X = \left(\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_I\right)^T$, $\mathbf{I}_X = \left(\mathbf{I}_S, \mathbf{I}_R, \mathbf{I}_L, \mathbf{I}_I\right)^T$

а к компонентным уравнениям добавляются еще два:

$$\mathbf{I}_S = \mathbf{S}\frac{d\mathbf{U}_S}{dt}; \qquad \mathbf{U}_\Gamma = \frac{d\mathbf{I}_\Gamma}{dt}.$$

В матрице $\mathbf{M}$ лишь три подматрицы остаются нулевыми $\left(\mathbf{M}_{Sr},\ \mathbf{M}_{S\Gamma},\ \mathbf{M}_{R\Gamma}\right)$, что означает наличие в схеме топологических вырождений. Рассмотрим электрические и вычислительные аспекты этого факта.

1) Если $\mathbf{M}_{SE} \neq \mathbf{0}$ или $\mathbf{M}_{SC} \neq \mathbf{0}$, то это означает наличие в схеме контуров из источников напряжения и емкостей. В вычислительном плане это связано с дополнительным решением системы линейных алгебраических уравнений относительно $\mathbf{I}_S$.

2) Если $\mathbf{M}_{Rr} \neq \mathbf{0}$, это означает наличие в схеме контуров из резисторов и решение дополнительной системы уравнений относительно $\mathbf{U}_r$.

3) Наконец, если $\mathbf{M}_{L\Gamma} \neq \mathbf{0}$ или $\mathbf{M}_{I\Gamma} \neq \mathbf{0}$, это означает наличие в схеме контуров из индуктивностей и источников тока и решение дополнительной системы уравнений относительно $\mathbf{U}_\Gamma$.

В соответствии с (13.1)-(13.3) интересующие топологические уравнения принимают вид:

$$\mathbf{U}_S = -\mathbf{M}_{SE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{SC}\mathbf{U}_C \quad ; \quad (13.14)$$

$$\mathbf{U}_R = -\mathbf{M}_{RE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Rr}\mathbf{U}_r \quad ; \quad (13.15)$$

$$\mathbf{U}_L = -\mathbf{M}_{LE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr}\mathbf{U}_r - \mathbf{M}_{L\Gamma}\mathbf{U}_\Gamma; \quad (13.16)$$

$$\mathbf{U}_I = -\mathbf{M}_{IE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{IC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Ir}\mathbf{U}_r - \mathbf{M}_{I\Gamma}\mathbf{U}_\Gamma \quad ; \quad (13.17)$$

$$\mathbf{I}_E = \mathbf{M}_{SE}^T\mathbf{I}_S + \mathbf{M}_{RE}^T\mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LE}^T\mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IE}^T\mathbf{I}_I \quad ; \quad (13.18)$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{M}_{SC}^T \mathbf{I}_S + \mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I \quad ; \tag{13.19}$$

$$\mathbf{I}_r = \qquad \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I \,; \tag{13.20}$$

$$\mathbf{I}_\Gamma = \qquad \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{I\Gamma}^T \mathbf{I}_I \,. \quad . \tag{13.21}$$

Последовательно выражаем векторы $\mathbf{U}_r$, $\mathbf{U}_\Gamma$, $\mathbf{I}_S$ через векторы фазовых переменных $\mathbf{U}_C$ и $\mathbf{I}_L$. При этом предварительно выражаем $\mathbf{I}_R$ через $\mathbf{U}_R$, а затем с учетом (13.15) и через $\mathbf{U}_r$.

1) Система для $\mathbf{U}_r$:
$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{-1}\mathbf{U}_r = \mathbf{I}_r &= \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I = \\ &= \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{R}^{-1}\left(-\mathbf{M}_{RE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Rr}\mathbf{U}_r\right) + \mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I\end{aligned} \;;$$

$$\left[\mathbf{r}^{-1} + \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}_{Rr}\right]\mathbf{U}_r = \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{R}^{-1}\left(-\mathbf{M}_{RE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC}\mathbf{U}_C\right) + \mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I$$

Имеем систему линейных алгебраических уравнений на каждом шаге относительно $\mathbf{U}_r$ (программа типа ***DECOMP*** вызывается один раз!).

2) Система для $\mathbf{U}_\Gamma$:

$$\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{U}_\Gamma = \frac{d\mathbf{I}_\Gamma}{dt} = \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \frac{d\mathbf{I}_L}{dt} + \mathbf{M}_{I\Gamma}^T \frac{d\mathbf{I}_I}{dt} =$$

$$= \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \mathbf{L}^{-1}\left(-\mathbf{M}_{LE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr}\mathbf{U}_r - \mathbf{M}_{L\Gamma}\mathbf{U}_\Gamma\right) + \mathbf{M}_{I\Gamma}^T \frac{d\mathbf{I}_I}{dt}$$

$$\left[\mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}_{L\Gamma}\right]\mathbf{U}_\Gamma == \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \mathbf{L}^{-1}\left(-\mathbf{M}_{LE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr}\mathbf{U}_r\right) + \mathbf{M}_{I\Gamma}^T \frac{d\mathbf{I}_I}{dt}$$

Опять система линейных алгебраических уравнений на каждом шаге!

3) Система для $\mathbf{I}_S$:
$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}_S &= \frac{d\mathbf{U}_S}{dt} = -\mathbf{M}_{SE}\frac{d\mathbf{U}_E}{dt} - \mathbf{M}_{SC}\frac{d\mathbf{U}_C}{dt} = -\mathbf{M}_{SE}\frac{d\mathbf{U}_E}{dt} - \\ &-\mathbf{M}_{SC} C^{-1}\left(\mathbf{M}_{SC}^T \mathbf{I}_S + \mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I\right)\end{aligned}$$

$$\left[\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{M}_{SC} C^{-1}\mathbf{M}_{SC}^T\right]\mathbf{I}_S = -\mathbf{M}_{SE}\frac{d\mathbf{U}_E}{dt} -$$

$$-\mathbf{M}_{SC} C^{-1}\left(\mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I + \mathbf{M}_{RC}^T R^{-1}\left(-\mathbf{M}_{RE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Rr}\mathbf{U}_r\right)\right)$$

Итак, еще одна система линейных алгебраических уравнений для $\mathbf{I}_S$!

Теперь окончательно имеем систему уравнений (13.22)-(13.23) в форме Коши относительно векторов фазовых переменных $\mathbf{U}_C$ и $\mathbf{I}_L$:

$$\frac{d\mathbf{U}_C}{dt} = \mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{M}_{SC}^T \mathbf{I}_S + \mathbf{M}_{RC}^T R^{-1}\left(-\mathbf{M}_{RE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Rr}\mathbf{U}_r\right) + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I\right)$$

$$\frac{d\mathbf{I}_L}{dt} = \mathbf{L}^{-1}\left(-\mathbf{M}_{LE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr}\mathbf{U}_r - \mathbf{M}_{L\Gamma}\mathbf{U}_\Gamma\right)$$

Для вычисления этих производных **на каждом шаге** предварительно решаются **три** системы линейных алгебраических уравнений относительно $\mathbf{U}_r$, $\mathbf{U}_\Gamma$, $\mathbf{I}_S$. Полезно отметить, что матрицы всех трех систем симметричны и при решении могут быть использованы специальные численные методы.

Теперь вернемся к *этапу 1*. Разделить все двухполюсники на ветви и хорды позволяет следующий алгоритм.

Алгоритм «склеивания вершин».

Его работу проиллюстрируем на примере схемы рис.13.1.

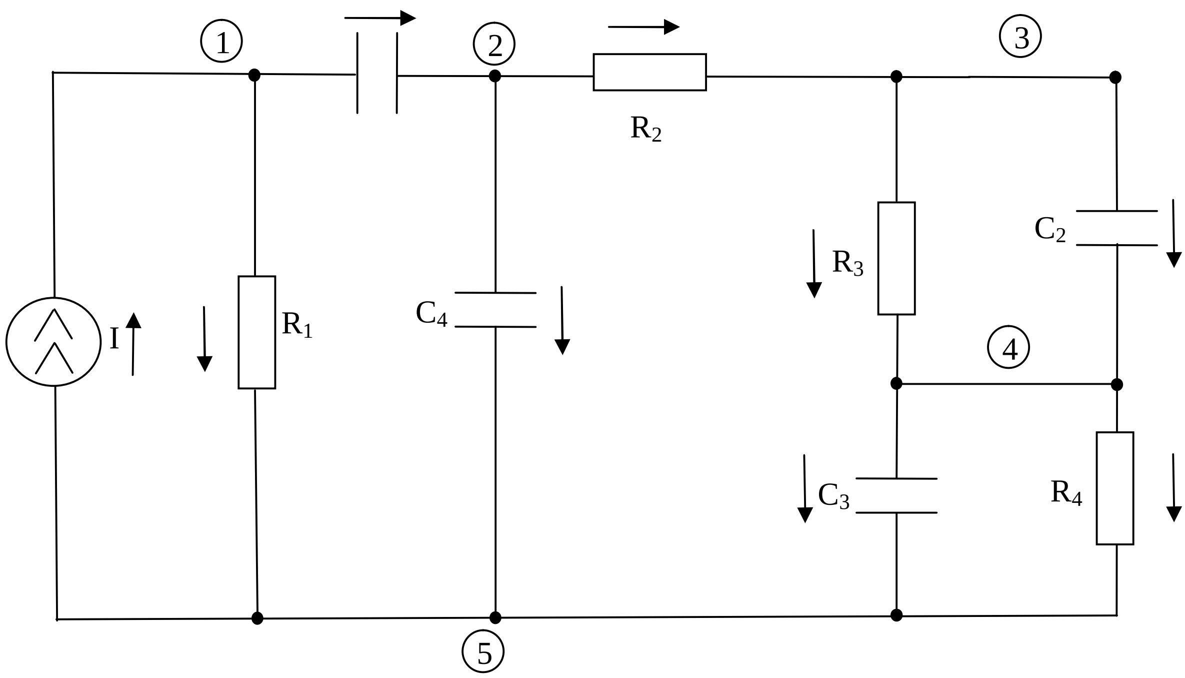


Рис. 13.1

Его результаты отражены в нижеследующей таблице.

Первоначально записываем в таблицу все двухполюсники, а также их входные и выходные узлы, в строго определенном порядке в соответствии с правилами формирования нормального дерева. На каждом шаге сравниваются номера входного и выходного узла первого сверху двухполюсника. Если они различаются, то двухполюсник объявляется ветвью и удаляется из списка, а во всем остальном списке номер его выходного узла заменяется номером входного. На следующем шаге процедура повторяется. Как видно из таблицы в список ветвей попали все емкости C_1, C_2, C_3, C_4, а хордами стали четыре сопротивления R_1, R_2, R_3, R_4 и источник тока I .

			Шаг1		*Шаг 2*		*Шаг 3*		*Шаг 4*	
C_1	**1**	**2**	C_1 – ветвь							
C_2	**3**	**4**	**3**	**4**	C_2 – ветвь					
C_3	**4**	**5**	**4**	**5**	**3**	**5**	C_3 – ветвь		C_4 – ветвь	
C_4	**2**	**5**	**1**	**5**	**1**	**5**	**1**	**3**	**1**	**1**
R_1	**1**	**5**	**1**	**5**	**1**	**5**	**1**	**3**	**1**	**1**
R_2	**2**	**3**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**3**	**1**	**1**
R_3	**3**	**4**	**3**	**4**	**3**	**3**	**3**	**3**	**1**	**1**
R_4	**4**	**5**	**4**	**5**	**3**	**5**	**3**	**3**	**1**	**1**
I	**5**	**1**	**5**	**1**	**5**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**

После определения списка ветвей и хорд переходят к *этапу 2* и заполняют матрицу контуров и сечений **M** в соответствии со следующим алгоритмом.

Алгоритм «обрезания хвостов»

Для каждой строки матрицы **M** (т.е. для каждой хорды) строится следующая таблица. В верхней строке указывается рассматриваемая хорда, а под ней все ветви графа со своими входными и выходными узлами. При просмотре сверху вниз двухполюсник, входной или выходной узел которого встречается в списке ***однократно,*** удаляется. Просмотр повторяется до тех пор, пока кандидатов на вычеркивание не останется. Элементы строк **M**, отвечающие вычеркнутым ветвям, назначаются нулевыми. Если направление ветви совпадает с направлением хорды при обходе по контуру, то соответствующий элемент равен (+1), а если оно противоположно, то (-1). Легко заметить, что в результате, например, в контур хорды R_1 вошли емкости C_1 и C_4, а в контур хорды R_4 только емкость C_3.

Контур хорды R_1							Контур хорды R_4								
			Шаг 1		*Шаг 2*					*Шаг 1*		*Шаг 2*		*Шаг 3*	
R_1	**1**	**5**	**1**	**5**	**1**	**5**	R_4	**4**	**5**	**4**	**5**	**4**	**5**	**4**	**5**
C_1	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	C_1	**1**	**2**	**---**	**---**	**---**	**---**	**---**	**---**
C_2	**3**	**4**	**---**	**---**	**---**	**---**	C_2	**3**	**4**	**3**	**4**	**---**	**---**	**---**	**---**
C_3	**4**	**5**	**4**	**5**	**---**	**---**	C_3	**4**	**5**	**4**	**5**	**4**	**5**	**4**	**5**
C_4	**2**	**5**	**2**	**5**	**2**	**5**	C_4	**2**	**5**	**2**	**5**	**2**	**5**	**---**	**---**

Лекция 14. Элементы теории возмущений. Калибровочные функции

В настоящем разделе будем рассматривать разложение решения как статических (7.1), так и динамических (6.1) моделей по малому или большому параметру ε $(\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to \infty)$, который возникает в уравнениях естественно или вводится искусственно. Предварительно целесообразно получить представление моделей в безразмерной форме, чтобы понятие «малый» или «большой» стало более определенным. Обратимся к модели движения тележки массой m с нелинейной пружиной:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + ku + k_2u^3 = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0, \tag{14.1}$$

где k, k_2 – параметры пружины. При введении масштаба по переменной u целесообразно учитывать размеры тележки или начальное отклонение u_0, а масштаб по времени может быть привязан к ожидаемой частоте колебаний. В соответствии со сказанным выполним в (14.1) замену переменных

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

С новыми переменными уравнение (14.1) приобретает вид:

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tau^2} + \tilde{u} + \varepsilon\tilde{u}^3 = 0, \quad \tilde{u}(0) = 1, \quad \frac{d\tilde{u}}{dt}(0) = 0, \quad \varepsilon = \frac{k_2u_0^2}{k}. \tag{14.2}$$

В новых координатах понятия «большой» или «малый» приобретают более отчетливый вид, в частности, при малом ε период колебаний близок к 2π.

Первоначально рассмотрим возмущение по координате.

Возмущение по координате.

Пусть есть решение для x_0. Тогда ищется разложение по степеням x при $(x \to 0)$ для $x_0 = 0$ или по степеням x^{-1} $(x \to \infty)$ для $x_0 = \infty$.

Пример 1. $x\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{du}{dx} + xu = 0, \quad u_0(0) = 1.$

(14.3)

Будем искать решение (14.3) для малых x в виде следующего разложения:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\mu}, \tag{14.4}$$

где a_k и μ – параметры. Подставляя (14.4) в (14.3), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mu+k)(\mu+k-1)\cdot a_k \cdot x^{\mu+k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(\mu+k)\cdot a_k \cdot x^{\mu+k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^{\mu+k+1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mu+k)^2 \cdot a_k \cdot x^{\mu+k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^{\mu+k+1} = 0.$$

(14.5)

Выделяя отдельно первые два слагаемых первой суммы, объединяем обе суммы в одну

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1} + \left(\mu+1\right)^2 a_1 x^{\mu} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\mu+k+2\right)^2 a_{k+2} + a_k\right]\cdot x^{\mu+k+1} = 0 . \tag{14.6}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем, на первый взгляд, два варианта разложений.

Вариант 1.

$$\mu = 0,\quad a_0 = 1,\ \ a_1 = 0,\ \ a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)^2},\ \ u(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots$$

Вариант 2.

$$a_0 = 0,\ \ \mu = -1,\ \ a_1 = 1,\ \ a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+1)^2},\ \ u(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots$$

Не трудно заметить, что в обоих вариантах получается одно и то же разложение для функции Бесселя.

Пример 2. $\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{1}{x}$.

$$\tag{14.7}$$

Для изучения характера поведения решения при $x \to \infty$ будем искать решение в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k} . \tag{14.8}$$

Подставляя (14.8) в (14.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot a_k x^{-k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^{-k} + \left(a_1 - 1\right)\frac{1}{x} = 0 ,$$

$$a_1 = 1,\quad a_{k+1} = k a_k,\quad u(x) = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots + \frac{(n-1)!}{x^n} + \ldots$$

Символы порядка и калибровочные функции.

Для изучения характера поведения функции $f(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ и сравнения с $g(\varepsilon)$ используются два хорошо известных выражения $O(\varepsilon)$ и $o(\varepsilon)$:

$f(\varepsilon) = \ \left(\ (\varepsilon)\right)$ при $\varepsilon \to 0$, если $\left(\exists A > 0\right)\left(\exists \varepsilon_0 > 0\right)\left(\forall \varepsilon > \varepsilon_0\right)\left(\left|f(\varepsilon)\right| \le A\cdot\left|g(\varepsilon)\right|\right)$,

или $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right| < \infty$;

$f(\varepsilon) = \ \left(\ (\varepsilon)\right)$ при $\varepsilon \to 0$, если $\left(\exists \delta > 0\right)\left(\exists \varepsilon_0 > 0\right)\left(\forall \varepsilon > \varepsilon_0\right)\left(\left|f(\varepsilon)\right| \le \delta\cdot\left|g(\varepsilon)\right|\right)$,

или $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right| = 0$.

Однако на практике этих понятий явно не достаточно. В общем случае имеет место одна из следующих трех ситуаций:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = \begin{cases} 0 \\ A \neq 0 \\ \pm\infty \end{cases}.$$

Во всех случаях важна не только сходимость, но и скорость сходимости, которую нужно с чем-то сравнивать. С этой целью вводится понятие ***калибровочных функций***, в роли которых часто выступают целые степени ε:

$$\ldots,\varepsilon^{-n},\ldots,\varepsilon^{-2},\varepsilon^{-1},1,\varepsilon,\varepsilon^{2},\ldots,\varepsilon^{n},\ldots$$

Достаточно ли только таких функций? Рассмотрим функцию $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ при $\varepsilon \to +0$ и сравним ее поведение с ε^n:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Для функций такого вида список калибровочных функций явно нужно расширять. Рассмотрим еще одну функцию $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ при $\varepsilon \to +0$ и сравним ее поведение с любой отрицательной степенью ε, не обязательно целой:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{-\alpha}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}} = 0, \quad \forall\alpha > 0.$$

Очевидно, что список калибровочных функций вновь нуждается в расширении, но уже с другой стороны. А если рассмотреть функцию $\ln\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$? Очевидно, что список калибровочных функций никогда не может быть полным и в каждой конкретной ситуации необходимо подбирать что-то подходящее для оценки скорости сходимости.

Асимптотические последовательности и ряды.

Рассмотрим следующую функцию $F(x)$ при $x \geq 0$ и ее разложение в ряд:

$$1 > F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}dt \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k!x^k \qquad (14.9)$$

При очевидной ограниченности $F(x)$ для положительных значений x ряд в (14.9) расходится. Можно, однако, показать, что любая частная сумма этого ряда приближает $F(x)$ с погрешностью меньшей, чем модуль первого отбрасываемого слагаемого в (14.9). Пусть $x = 0.1$. Тогда слагаемое для $k = 10$ оказывается не слишком большим: $10!\cdot 0.1^{10} \approx 0.000363$. Если эта погрешность решения приемлема, то можно пользоваться расходящимся рядом для оценки значений $F(x)$. Обобщим рассмотренный случай. Если $f(\varepsilon)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \varepsilon^k + \quad \left(\varepsilon^N\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{14.10}$$

то (14.10) называют ***асимптотическим рядом типа Пуанкаре***. Не обязательно ограничиваться степенями ε^k. Достаточно воспользоваться ***асимптотической последовательностью*** $\delta_k(\varepsilon) = o\left[\delta_{k-1}(\varepsilon)\right]$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда выражение

$$f(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} a_k \delta_k(\varepsilon) + \quad \left(\delta_N(\varepsilon)\right), \qquad \varepsilon \to \tag{14.11}$$

называется асимптотическим разложением типа Пуанкаре. В роли $\delta_k(\varepsilon)$ могут выступать функции: ε^k, $\varepsilon^{\frac{k}{10}}$, $\left(\ln(\varepsilon)\right)^{-k}$ и т.п.

Лекция 15. Возмущения по параметру. Статическая модель.

I. Статическая модель. Алгебраические уравнения.

Пример 1. $f(x,\varepsilon) = x^2 - (3+2\varepsilon)x + 2 + \varepsilon = 0$

$$\tag{15.1}$$

Уравнение (15.1) называется ***возмущенным уравнением*** в отличие от ***невозмущенного (или вырожденного) уравнения***, отвечающего $\varepsilon = 0$:

$$f(x,0) = x^2 - 3x + 2 = 0. \tag{15.2}$$

Будем искать решение (15.1) в виде следующего разложения

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varepsilon^{\,k} = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots \tag{15.3}$$

На практике ограничиваются небольшим количеством слагаемых в (15.3). Подставим (15.3) в (15.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε:

$$\left(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots\right)^2 - \left(3 + 2\varepsilon\right)\left(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots\right) + 2 + \varepsilon = 0,$$

$$\left(x_0^2 - 3x_0 + 2\right) + \varepsilon\left(2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1\right) + \varepsilon^2\left(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1\right) + \ldots = 0$$

ε^0) $\quad x_0^2 - 3x_0 + 2, \qquad x_0^{(1)} = 1, \qquad x_0^{(2)} = 2;$

ε^1) $\quad 2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1 = 0, \qquad x_1^{(1)} = -1, \qquad x_1^{(2)} = 3;$

ε^2) $\quad 2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1 = 0, \qquad x_2^{(1)} = 3, \qquad x_2^{(2)} = -3.$

Для обоих корней получаем

$$x^{(1)} = 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots, \qquad\qquad x^{(2)} = 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \ldots$$

Пример 2. $x^2+(\varepsilon-2)x+1=0$.

(15.4)

Аналогично предыдущему попробуем искать разложение решения (15.4) в виде (15.3). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+...\right)^2+\left(\varepsilon-2\right)\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+...\right)+1=0,$$

$\varepsilon^0)$ $x_0^2-2x_0+1=0,\quad x_0^{(1)}=x_0^{(2)}=1;$

$\varepsilon^1)$ $2x_0x_1+x_0-2x_1=0 \Rightarrow 1=0$!!!

Очевидно, что разложение (15.3) в данном случае неприемлемо. В каком же виде искать решение (15.4)? Решением вырожденного уравнения являются два кратных единичных корня. Если записать $x\left(\varepsilon\right)$ в виде $x\left(\varepsilon\right)=1+\delta$, где δ стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, то из (15.4) имеем

$$x^2+(\varepsilon-2)x+1=0 \Rightarrow \left(x-1\right)^2=-\varepsilon\cdot x, \Rightarrow \delta^2=-\varepsilon\left(1+\delta\right).$$

Отсюда видно, что δ при малых ε ведет себя как $\sqrt{\varepsilon}$. Поэтому будем искать разложение решения (15.4) в виде

$$x\left(\varepsilon\right)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k\varepsilon^{\frac{k}{2}}=x_0+x_1\sqrt{\varepsilon}+x_2\varepsilon+..., \tag{15.5}$$

$$\left(x_0+x_1\sqrt{\varepsilon}+x_2\varepsilon+...\right)^2+(\varepsilon-2)\left(x_0+x_1\sqrt{\varepsilon}+x_2\varepsilon+...\right)+1=0,$$

$\varepsilon^0)$ $x_0^2-2x_0+1=0,\quad x_0^{(1)}=x_0^{(2)}=1;$

$\sqrt{\varepsilon})$ $2x_0x_1-2x_1=0,\quad 0=0;$

$\varepsilon)$ $x_1^2+2x_0x_2+x_0-2x_2=0,\quad x_1^2+1=0,\quad x_1^{(1)}=i,\quad x_1^{(2)}=-i$;

$\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ $2x_0x_3+2x_1x_2+x_1-2x_3=0,\quad x_2^{(1)}=x_2^{(2)}=-\dfrac{1}{2}$.

Теперь для обоих корней получаем

$$x^{(1)}(\varepsilon)=1+i\cdot\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}+...,\qquad x^{(1)}(\varepsilon)=1-i\cdot\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}+...$$

Очевидно, что в случае трехкратного корня в разложении будут присутствовать слагаемые вида $\varepsilon^{\frac{k}{3}}$.

Пример 3. $\varepsilon x^2+x+1=0$.

(15.6)

Отличие этого примера от предыдущих двух заключается в том, что вырожденное и невырожденное уравнение имеют принципиально *различную структуру* (одно из них квадратное, а другое линейное). Такой вид возмущений с малым параметром при старшей степени x получил название ***сингулярное возмущение***. Как и ранее, попробуем искать разложение решения (15.6) в виде (15.3)

$$\varepsilon\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\ldots\right)+\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\ldots\right)+1=0\,,$$

$\varepsilon^0)\quad x_0+1=0,\qquad x_0^{(1)}=-1;$

$\varepsilon^1)\quad x_0^2+x_1=0,\qquad x_1^{(1)}=-1;$

$\varepsilon^2)\quad 2x_0x_1+x_2=0,\qquad x_2^{(1)}=-2\,;$

Заметно, что разложение получается лишь для одного корня, в то время как уравнение является квадратным. Следовательно, разложение для второго корня нужно искать в другом виде. Точное выражение для корней квадратного уравнения (15.6) выглядит следующим образом:

$$x^{(1,2)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon},\quad \sqrt{1-4\varepsilon}\approx 1-2\varepsilon-2\varepsilon^2+\ldots,$$

$$x^{(1)}=-1-\varepsilon-2\varepsilon^2+\ldots,\qquad x^{(2)}=-\frac{1}{\varepsilon}+1+\varepsilon+2\varepsilon^2+\ldots$$

Теперь очевидно, что в разложении должны присутствовать отрицательные степени ε. Будем искать разложение решения (15.6) в виде

$$x(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k\varepsilon^{\,k-p}=x_0\varepsilon^{-p}+x_1\varepsilon^{-p+1}+x_2\varepsilon^{-p+2}+\ldots \tag{15.7}$$

Подстановка в (15.6) дает

$$\varepsilon\left(x_0\varepsilon^{-p}+x_1\varepsilon^{-p+1}+x_2\varepsilon^{-p+2}+\ldots\right)^2+\left(x_0\varepsilon^{-p}+x_1\varepsilon^{-p+1}+x_2\varepsilon^{-p+2}+\ldots\right)+1=0\,,$$

$$\varepsilon^{1-2p}\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\ldots\right)^2+\varepsilon^{-p}\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\ldots\right)+1=0\,.$$

Чтобы не получить тривиальное $x_0=0$, значение p должно быть равным единице. Тогда последовательно получаем

$\varepsilon^{-1})\quad x_0^2+x_0=0,\qquad x_0^{(1)}=0,\qquad x_0^{(2)}=-1;$

$\varepsilon^0)\quad 2x_0x_1+x_1+1=0,\qquad x_1^{(1)}=-1,\qquad x_1^{(2)}=1;$

$\varepsilon^1)\quad 2x_0x_2+x_1^2+x_2=0,\qquad x_2^{(1)}=-1,\qquad x_2^{(2)}=1;$

$$x^{(1)}(\varepsilon)=-1-\varepsilon-2\varepsilon^2+\ldots,\qquad x^{(2)}(\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}+1+\varepsilon+2\varepsilon^2+\ldots$$

Если заранее знать, что $p=1$, то можно выполнить в (15.6) замену переменных $x=\dfrac{z}{\varepsilon}$ и для z получаем уравнение,

$$z^2+z+\varepsilon=0,$$

разложение для которого ищется в форме (15.3), как это было для *примера 1*.

II. Статическая модель. Трансцендентные уравнения.

Выше отмечалось, что малый параметр может присутствовать в уравнениях естественно или вводится искусственно. Следующий пример иллюстрирует второй случай. Интерес представляют положительные корни уравнения

$$tg(x)=\frac{1}{x}. \tag{15.8}$$

Оно имеет бесконечное множество корней. Если пронумеровать их слева направо, то с ростом номера корня его значения становится все ближе к значению $n\cdot\pi$. Требуется выяснить зависимость корня от его номера. С этой целью выполним в (15.8) замену переменных $x=n\cdot\pi+\delta$, введем малый параметр $\varepsilon=\dfrac{1}{n\cdot\pi}$ и в новых обозначениях получим

$$tg(n\cdot\pi+\delta)=\frac{1}{n\cdot\pi+\delta}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\cdot\delta}\;\Rightarrow\;tg(\delta)=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\cdot\delta}. \tag{15.9}$$

Разложение $\delta(\varepsilon)$ будем искать в виде

$$\delta(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\varepsilon^k=\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\delta_3\varepsilon^3+\ldots \tag{15.10}$$

Учитывая известное разложение в степенной ряд для тангенса

$$tg(\delta)=\delta+\frac{\delta^3}{3}+\frac{2\delta^5}{15}+\ldots,$$

последовательно получаем

$$\left(\delta+\frac{\delta^3}{3}+\frac{2\delta^5}{15}+\ldots\right)\cdot\left(1+\varepsilon\delta\right)=\varepsilon,$$

$$\left(\left(\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\delta_3\varepsilon^3+\ldots\right)+\frac{\left(\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\delta_3\varepsilon^3+\ldots\right)^3}{3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\varepsilon\left(\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\delta_3\varepsilon^3+\ldots\right)\right)=\varepsilon,$$

$\varepsilon^1)$ $\quad\delta_1=1;$

$\varepsilon^2)\quad \delta_2 = 0;$

$\varepsilon^3)\quad \delta_3 + \dfrac{\delta_1^3}{3} + \delta_1^2 = 0, \quad \delta_3 = -\dfrac{4}{3}.$

Требуемая зависимость корня от его номера имеет вид

$$x(\varepsilon) = n\cdot\pi + \delta(\varepsilon) = n\cdot\pi + \varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^3 + \ldots = n\cdot\pi + \frac{1}{n\cdot\pi} - \frac{4}{3(n\cdot\pi)^3} + \ldots$$

Этот пример особо примечателен тем, что малый параметр не присутствовал в уравнении изначально и вводился искусственно в соответствии с целями решаемой задачи.

Лекция 16. Возмущения по параметру. Динамическая модель.

В качестве примера рассмотрим модель осциллятора с кубической нелинейностью

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + \varepsilon\cdot u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0. \tag{16.1}$$

Решение (16.1) будем искать в виде следующего разложения, коэффициенты которого зависят от t

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon\cdot u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \ldots \tag{16.2}$$

Очевидно, что все начальные условия в данном случае будут отнесены к $u_0(t)$, а для остальных $u_k(t)$ они будут нулевыми. Это связано с тем, что начальные условия не зависят от ε. Подставляя (16.2) в (16.1) последовательно получаем:

$\varepsilon^0)\quad \dfrac{d^2u_0(t)}{dt^2} + u_0(t) = 0, \quad u_0(0) = a, \quad \dfrac{du_0}{dt}(0) = 0 \;\Rightarrow\; u_0(t) = a\cdot\cos(t);$

$\varepsilon^1)\quad \dfrac{d^2u_1(t)}{dt^2} + u_1(t) = -u_0^3(t) = -a^3\cos^3(t) = -a^3\dfrac{\cos(3t) + 3\cos(t)}{4}, \quad u_1(0) = 0, \quad \dfrac{du_1}{dt}(0) = 0$

С учетом начальных условий решение таково:

$$u_1(t) = -\frac{3}{8}a^3\cdot t\cdot\sin(t) + \frac{a^3}{32}\big(\cos(3t) - \cos(t)\big). \tag{16.3}$$

Тогда первые слагаемые (16.2) выглядят следующим образом:

$$u(t,\varepsilon) = a\cdot\cos(t) + \varepsilon\cdot\left(-\frac{3}{8}a^3\cdot t\cdot\sin(t) + \frac{a^3}{32}\big(\cos(3t) - \cos(t)\big)\right) + \ldots$$

Желательно, чтобы слагаемое с ε было малой поправкой к $a\cdot\cos(t)$. Однако, при достаточно больших значений t порядка $\dfrac{1}{\varepsilon}$ это не так. Составляющая вида $t\cdot\sin(t)$ появилось в связи с тем, что в правой части уравнения для $u_1(t)$

стоит слагаемое $\cos(t)$, которое одновременно является решением однородного уравнения. Более того, оказывается, что при ε^k появляются составляющие вида $t^k \cdot \sin(t)$ и $t^k \cdot \cos(t)$, что также не способствует эффективности разложения при больших значениях t. Причина этого заключается в том, что частота колебаний в (16.1) должна зависеть от ε, а коэффициенты разложения (16.2) этот факт не учитывают. Проблема решается м помощью следующей методики.

Методика растянутых параметров Линдштедта-Пуанкаре.

Будем учитывать, что частота колебаний в (16.1) зависит от ε:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot \omega_1 + \varepsilon^2 \cdot \omega_2 + \ldots \tag{16.4}$$

В нашем примере очевидно $\omega_0 = 1$. Введем новую независимую переменную $\tau = \omega \cdot t$. Тогда (16.1) принимает вид:

$$\omega^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} + u + \varepsilon \cdot u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \frac{du}{d\tau}(0) = 0 \tag{16.5}$$

Разложение для $u(\tau, \varepsilon)$ будем искать в форме, аналогичной (16.2)

$$u(\tau,\varepsilon) = u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \ldots \tag{16.6}$$

Подставляя (16.4) и (16.6) в (16.5) получаем:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \varepsilon \cdot \omega_1 + \varepsilon^2 \cdot \omega_2 + \ldots\right)^2 \cdot \frac{d^2}{d\tau^2}\left(u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \ldots\right) + \\ &+ \left(u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \ldots\right) + \varepsilon \cdot \left(u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \ldots\right)^3 = 0 \end{aligned} \tag{16.7}$$

ε^0) $\dfrac{d^2 u_0(\tau)}{dt^2} + u_0(\tau) = 0, \ \Rightarrow \ u_0(\tau) = a \cdot \cos(\tau)$;

ε^1)
$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1(\tau)}{dt^2} + u_1(\tau) &= -u_0^3(\tau) - 2\omega_1 \frac{d^2 u_0(\tau)}{dt^2} = -a^3 \cos^3(\tau) + 2\omega_1 \cdot a \cdot \cos(\tau) = \\ &= -\frac{a^3}{4}\cos(3\tau) - \left(\frac{3}{4}a^2 - 2\omega_1\right) a \cdot \cos(\tau) \end{aligned}.$$

Выбираем значение $\omega_1 = \dfrac{3}{8} a^2$ так, чтобы нежелательное слагаемое с $\cos(\tau)$ отсутствовало. Тогда выражение для $u_1(\tau)$

$$u_1(\tau) = \frac{a^3}{32}\left(\cos(3\tau) - \cos(\tau)\right)$$

уже не содержит слагаемого вида $t \cdot \sin(t)$, и разложение принимает вид:

$$u(t,\varepsilon) = a\cdot\cos(\omega t) + \varepsilon\cdot\frac{a^3}{32}\left(\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)\right) + \ldots$$

$$\omega = 1 + \varepsilon\cdot\frac{3a^2}{8} + \ldots$$

Малый параметр при старшей производной (сингулярный случай).

Ранее рассматривались малые возмущения, которые действали в течение длительного времени. Соответствующие амплитуды и фазы были медленно меняющимися функциями времени. Здесь будут рассмотрены возмущения, действующие в узких областях, или зонах. При этом зависимые переменные испытывают весьма резкие изменения. Эти узкие зоны чаще всего лежат вблизи границы области, в которой решается задача. В задачах механики жидкостей и газов такие зоны называют обычно ***пограничными слоями***, в механике твердого тела – ***областями краевого эффекта***, в электрических приложениях – ***поверхностными*** или ***скин-слоями***.

В качестве примера обратимся к следующей краевой задаче

$$\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2} + \left(1+\varepsilon^2\right)\frac{dx}{dt} + \left(1-\varepsilon^2\right)x = 0, \qquad t\in[0,1], \qquad x(0)=\alpha, \qquad x(1)=\beta. \tag{16.8}$$

Ее решение попробуем искать в виде следующего разложения

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon\cdot x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots \tag{16.9}$$

Как и в случае со статической моделью (15.6), сингулярное возмущение резко изменяет структуру невозмущенной модели, так при $\varepsilon = 0$ получаем уравнение первого порядка в отличие от второго порядка (16.8). Подставляя (16.9) в краевые условия и полагая $t=0$ и $t=1$ соответственно, для коэффициентов (16.9) имеем:

$x_0(0)=\alpha, \quad x_0(1)=\beta, \quad x_k(0)=x_k(1)=0, \quad k=1,2,3,\ldots$

Аналогичная подстановка в (16.8) дает следующие результаты:

$$\varepsilon\frac{d^2}{dt^2}\left(x_0(t)+\varepsilon\cdot x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\ldots\right) + \left(1+\varepsilon^2\right)\frac{d}{dt}\left(x_0(t)+\varepsilon\cdot x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\ldots\right) +$$
$$+\left(1-\varepsilon^2\right)\left(x_0(t)+\varepsilon\cdot x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\ldots\right) = 0,$$

Все уравнения для $x_k(t)$ оказываются первого порядка в отличие от (16.8). Без объяснения причин воспользуемся везде вторым краевым условием для $t=1$

$$\varepsilon^0)\quad \frac{dx_0}{dt} + x_0 = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \beta\cdot e^{1-t};$$

$$\varepsilon^1)\quad \frac{dx_1}{dt} + x_1 = -\frac{d^2x_0}{dt} = -\beta\cdot e^{1-t} \;\Rightarrow\; x_1 = \beta\cdot e^{1-t}\cdot(1-t)$$

Как результат, получаем разложение,

$$x(t,\varepsilon) = \beta \cdot e^{1-t} + \varepsilon \cdot \beta \cdot e^{1-t} \cdot (1-t) + \ldots \tag{16.10}$$

которое явно учитывает не все составляющие решения (16.8). Рассмотрим причины этого.

Характеристическое уравнение для (16.8) и его корни имеют вид

$$\varepsilon \cdot \lambda^2 + \left(1+\varepsilon^2\right) \cdot \lambda + \left(1-\varepsilon^2\right) = 0, \quad \lambda_1 = -1-\varepsilon, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon} + 1. \tag{16.11}$$

Из (16.11) явно следует, что λ_1 вполне согласуется с разложением (16.10), а экспонента, отвечающая λ_2, быстро убывает в пределах пограничного слоя, длина которого порядка ε. Само уравнение (16.8) при этом является жестким.

Разложение (16.10) хорошо описывает поведение решения вне пограничного слоя, т.е. почти на всем промежутке. Этим и объясняется тот факт, почему мы воспользовались вторым краевым условием при $t=1$. На практике в большинстве случаев такого описания вполне достаточно. Но, если все же необходимо построить разложение, описывающее все решение, включая пограничный слой, используют следующий подход.

Лекция 17. Сращивание асмптотических разложений. Упрощение жестких систем.

Приближенное решение ищется в виде нескольких разложений, в которых используется два и более масштаба, пригодных лишь в части рассматриваемой области. Эти масштабы выбираются таким образом, чтобы: а) полный набор разложений охватывал всю область; б) области применимости соседних разложений перекрывались. Для реализации второго условия необходимо согласовать (срастить) соседние разложения и связать их между собой.

Вернемся вновь к уравнению (16.8). Одно разложение (16.9), описывающее решение вне пограничного слоя и принимающее вид (16.10), было уже построено. Второе построим после замены переменной $t = \varepsilon \cdot \tau$, где τ принимает какие-то конечные значения. Исходное уравнение примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(1+\varepsilon^2\right)\frac{dx}{d\tau} + \varepsilon\left(1-\varepsilon^2\right)x = 0, \tag{17.1}$$

а разложение для него будем искать в виде, аналигичном (16.9), но уже с учетом новой независимой переменной

$$x(\tau,\varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon \cdot x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \ldots \tag{17.2}$$

Подстановка (17.2) в (17.1) приводит к следующему:

$$\varepsilon^0)\quad \frac{d^2x_0}{dt^2}+\frac{dx_0}{dt}=0 \;\Rightarrow\; x_0(\tau)=C_1+C_2e^{-\tau};$$

(17.3)

$$\varepsilon^1)\quad \frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{dx_1}{dt}=-x_0\ .$$

Теперь решение $x_0(\tau)$ в (17.3) должно удовлетворять первому краевому условию в нулевой точке $C_1+C_2=\alpha \;\Rightarrow\; x_0(\tau)=C_1+(\alpha-C_1)e^{-\tau}$. Константа C_1 выбирается из условия перекрытия областей применимости обоих разложений, когда действие разложения по τ «уже завершилось» ($\tau\to\infty$), а разложение по t еще только «начинает действовать». ***Принцип сращивания имеет*** вид:

$$\lim_{\tau\to\infty} x(\tau,\varepsilon)=\lim_{t\to 0} x(t,\varepsilon). \qquad (17.4)$$

Естественно, что условие (17.4) должно записываться для каждого коэффициента разложений (16.9) и (17.2) отдельно, в частности:

$$\lim_{\tau\to\infty} x_0(\tau)=\lim_{t\to 0} x_0(t) \;\Rightarrow\; C_1=\beta e. \qquad (17.5)$$

Оба разложения можно совместить в общей формуле:

$$x_0^{общ}=x_0(\tau)+x_0(t)-\beta e=(\alpha-\beta e)e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\beta e^{1-t}. \qquad (17.6)$$

При этом внутри пограничного слоя $x_0(t)-\beta e=0$ и $x_0^{общ}=x_0(\tau)$, а за пограничным слоем $x_0(\tau)-\beta e=0$ и $x_0^{общ}=x_0(t)$. Аналогичные выражения с использованием принципа (17.4) строятся и для других коэффициентов обоих разложений $x_1(\tau)$ и $x_1(t)$, $x_2(\tau)$ и $x_2(t)$ и т.д.

Упрощение математических моделей, описываемых жесткими уравнениями.

Приведем уравнение (16.8) к системе уравнений первого порядка, выполнив замену переменных $x_1=\dfrac{dx}{dt},\quad x_2=x,\quad \mathbf{x}=(x_1,x_2)^T$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{dx_1}{dt}=-\left(1+\varepsilon^2\right)x_1-\left(1-\varepsilon^2\right)x_2,\\ &\frac{dx_2}{dt}=x_1\end{aligned}\ . \qquad (17.7)$$

Если первое уравнение разделить на ε и записать (17.7) в матричном виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon} & -\dfrac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17.8}$$

то собственные значения $\lambda_1 = -1-\varepsilon$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\varepsilon}+1$ матрицы **A** будут равны корням характеристического уравнения (16.8) и система (17.8) является жесткой.

В инженерной практике часто пренебрегают слагаемым с малым параметром при производной $\varepsilon\dfrac{dx_1}{dt}$, превращая первое уравнение в (17.7) в алгебраическое. В области химической кинетики этот подход получил название ***метод квазистационарных концентраций*** Боденштейна-Семенова. Термин «***квази***» учитывает тот факт, что, полагая приближенно $\varepsilon\dfrac{dx_1}{dt}\approx 0$, вовсе не подразумевают величину x_1 постоянной, а считают значение $\varepsilon\dfrac{dx_1}{dt}$ малым по сравнению с другими слагаемыми в первом уравнении (17.7). Выполняя это допущение и выражая x_1 через x_2, получаем

$$\begin{gathered} -\left(1+\varepsilon^2\right)x_1 - \left(1-\varepsilon^2\right)x_2 \approx 0, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \approx \frac{-\left(1-\varepsilon^2\right)}{\left(1+\varepsilon^2\right)}x_2 \approx \left(-1+2\varepsilon^2+\ldots\right)x_2 \end{gathered}. \tag{17.9}$$

Легко заметить, что упрощенная система (17.9) меньшего дифференциального порядка хорошо описывает поведение решения (17.7) вне пограничного слоя. При этом величина $\left(-1+2\varepsilon^2+\ldots\right)$ с точностью до ε совпадает с $\lambda_1 = -1-\varepsilon$.

Обратимся к еще одному числовому примеру.

$$\begin{gathered} 10^{-3}\cdot\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 0.999x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 \end{gathered}. \tag{17.10}$$

Если разделить первое уравнение (17.10) на 10^{-3}, то матрица получившейся системы обладает следующими собственными значениями: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1001$. В соответствии с «инженерным подходом» пренебрегаем слагаемым $10^{-3}\cdot\dfrac{dx_1}{dt}$ в первом уравнении и получаем

$$-x_1 + 0.999x_2 \approx 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 \approx -1.001 \cdot x_2 \, .$$

И вновь, как и в предыдущем примере, значение -1.001 оказывается весьма близким к $\lambda_1 = -1$.

Однако, применение такого подхода на практике сталкивается со следующими трудностями:

- трудно оценить погрешность такого пренебрежения малым параметром;
- трудно уменьшить эту погрешность, если она недостаточно мала;
- количество уравнений с малым параметром при производной может не совпадать с количеством быстроубывающих в пограничном слое составляющих решения.

Последний факт иллюстрирует следующий пример.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -501 & 500 \\ 500 & -501 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3]. \tag{17.11}$$

Если разделить оба уравнения на 1000, то получаются два уравнения с малым параметром при производной и складывается впечатление, что матрица (17.11) обладает двумя большими по модулю собственными значениями, соответствующие две экспоненты быстро исчезают в пределах пограничного слоя, и решение почти на всем промежутке $t \in [0,3]$ оказывается равным нулю (стационарная точка (17.11)). Однако, это не так. Собственные значения $\mathbf{A}$ равны: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1001$. Таким образом, пренебрегая малым параметром в обоих уравнениях, мы ошибочно удаляем из решения вне пограничного слоя экспоненту с показателем $\lambda_1 = -1$. Если предположить, что последний факт нам известен, и можно пренебрегать малым параметром лишь в одном уравнении, то это приводит к следующему результату:

$$x_1 \approx \frac{500}{501} x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} \approx -\left(501 - \frac{500^2}{501}\right) x_2 = -\frac{1001}{501} x_2 \approx -2x_2 .$$

Важно не только то, что ошибка в определении $\lambda_1 = -1$ составила 100%, но и то, что реально на практике мы не знаем, что такая погрешность есть!

Справиться с возникшими трудностями позволяет ***принцип квазистационарности производных*** (ПКП), выдвинутый Ю.В.Ракитским. Пренебрегать следует не первой, а производными более высокого порядка. С этой целью выбранные уравнения системы дифференцируются, а возникающие производные заменяются их выражениями из исходных уравнений. В качестве примера продифференцируем первое уравнение (17.11) и пренебрежем второй производной $\dfrac{d^2 x_1}{dt^2} \approx 0$:

$$0 \approx \frac{d^2x_1}{dt^2} = -501\frac{dx_1}{dt} + 500\frac{dx_2}{dt} = -501\left(-501x_1 + 500x_2\right) + 500\left(500x_1 - 501x_2\right),$$
$$x_1 \approx \frac{1000\cdot 501}{501^2+500^2}x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} \approx -\left(501 - 500\frac{1000\cdot 501}{501^2+500^2}\right)x_2 \approx -1.001x_2 .$$

Погрешность 10^{-3} в определении $\lambda_1 = -1$ весьма мала. Ее можно уменьшить до 10^{-6}, если пренебречь не второй, а третьей производной. Почему ПКП приводит к таким хорошим результатам? Поясним это на примере нелинейной системы

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right), \\ &\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{f}_2\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) \end{aligned} , \tag{17.12}$$

где $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ – подвекторы вектора решения (17.12). Пренебрегая первой производной в первом уравнении (17.12) и считая величину $\varepsilon\frac{d\mathbf{x}_1}{dt}$ малой по сравнению с $\mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right)$, получаем алгебраическое уравнение вне пограничного слоя

$$\mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) \approx 0 . \tag{17.13}$$

Теперь продифференцируем первое уравнение (17.12) и пренебрежем второй производной:

$$\begin{aligned} &\mathbf{0} \approx \varepsilon\frac{d^2\mathbf{x}_1}{dt^2} = \frac{\partial\mathbf{f}_1}{\partial\mathbf{x}_1}\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} + \frac{\partial\mathbf{f}_1}{\partial\mathbf{x}_2}\frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \frac{\partial\mathbf{f}_1}{\partial\mathbf{x}_1}\frac{\mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right)}{\varepsilon} + \frac{\partial\mathbf{f}_1}{\partial\mathbf{x}_2}\mathbf{f}_2\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) \\ &\mathbf{0} \approx \varepsilon^2\frac{d^2\mathbf{x}_1}{dt^2} = \frac{\partial\mathbf{f}_1}{\partial\mathbf{x}_1}\mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{f}_1}{\partial\mathbf{x}_2}\mathbf{f}_2\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) \end{aligned} . \tag{17.14}$$

Здесь алгебраическое уравнение вне пограничного слоя выглядит следующим образом

$$\mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial\mathbf{f}_1}{\partial\mathbf{x}_1}\right)^{-1}\frac{\partial\mathbf{f}_1}{\partial\mathbf{x}_2}\mathbf{f}_2\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) \approx \mathbf{0} . \tag{17.15}$$

Оно получается как (17.13) с поправкой к нему порядка ε. При этом, если прежде пренебрегали величиной $\varepsilon\frac{d\mathbf{x}_1}{dt}$, то теперь величиной $\varepsilon^2\frac{d^2\mathbf{x}_1}{dt^2}$. Этим и предопределяется успех ПКП в получении более точных алгебраических связей вне пограничного слоя.

Для линейных систем с постоянной матрицей ПКП может быть доказан строго. Предварительно обратимся к некоторому свойству жестких систем.

Свойство жестких систем. Для линейных жестких систем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \tag{17.16}$$

вне пограничного слоя $\tau_{ПС}$ между переменными существуют почти точные алгебраические связи, число которых равно количеству быстроубывающих в пограничном слое частных решений. Эти уравнения могут быть использованы для понижения дифференциального порядка системы и, таким образом, ее решение будет описываться системой меньшей размерности, уже не являющейся жесткой.

Пусть все собственные значения λ_k матрицы $\mathbf{A}$ жесткой системы (17.16) разделены на две группы. В первой группе λ_k обладают относительно большими модулями и большими по модулю отрицательными вещественными частями

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_k\right) \cdot \tau \quad << -1, \quad k = 1, 2, ..., p. \tag{17.17}$$

Отвечающие им составляющие решения быстро убывают в пределах пограничного слоя $\left(t \in [0, \tau_{ПС}]\right)$. Вторую группу составляют оставшиеся λ_k , определяющие поведение решения за пограничным слоем $\left(t > \tau_{ПС}\right)$:

$$\lambda_k, \quad k = p+1, p+2, ..., m. \tag{17.18}$$

В соответствии с формулой (4.1) решение (17.16) записывается в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T e^{\lambda_k t}\mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{u}_k \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_0\right) e^{\lambda_k t} \tag{17.19}$$

где $\mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_k$ – собственные векторы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ соответственно. С учетом равенств (3.7) и (3.8) умножим (17.19) слева на собственный вектор $\mathbf{v}_i^T$ из первой группы

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_k \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_0\right) e^{\lambda_k t} = \mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_i \left(\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_0\right) e^{\lambda_i t} = \left(\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_0\right) e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, ..., p \tag{17.20}$$

Учитывая (17.17), вне пограничного слоя при $t > \tau_{ПС}$ получаем почти точные алгебраические связи

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}(t) = 0, \quad i = 1, 2, ..., p \tag{17.21}$$

Эти равенства являются неотъемлемым свойством жестких систем. ПКП позволяет приближенно построить эти уравнения, не решая проблему собственных значений и не вычисляя непосредственно собственные векторы.

Пусть для простоты $p = 1$, т.е. первая группа состоит из одного собственного значения. Продифференцируем (17.16) S раз и пренебрежем S-й производной в уравнении с номером j:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}^2\mathbf{x}; \qquad \frac{d^S\mathbf{x}}{dt^S} = \mathbf{A}^S\mathbf{x}; \qquad \mathbf{A}^S = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T \lambda_k^S$$

$$0 \approx \frac{d^S x_j}{dt^S} = \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}^S \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{m} \left(\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_k \right) \mathbf{v}_k^T \lambda_k^S \mathbf{x} = \left(\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_1 \right) \mathbf{v}_1^T \lambda_1^S \mathbf{x} + \sum_{k=1}^{m} \left(\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_k \right) \mathbf{v}_k^T \lambda_k^S \mathbf{x} =$$
$$= \lambda_1^S \left(\left(\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_1 \right) \mathbf{v}_1^T \mathbf{x} + \sum_{k=1}^{m} \left(\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_k \right) \frac{\lambda_k^S}{\lambda_1^S} \mathbf{v}_k^T \mathbf{x} \right) \tag{17.22}$$

Так как $\left| \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right| \ll 1$, то с ростом S сумма в правой части (17.22) быстро убывает, и все выражение принимает вид:

$$\lambda_1^S \left(\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_1 \right) \mathbf{v}_1^T \mathbf{x} \approx 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_1^T \mathbf{x} \approx 0 , \tag{17.23}$$

совпадающий с (17.21). Таким образом, для линейных систем ПКП – это способ приближенного построения уравнений (17.21).

Теперь все перечисленные трудности «инженерного подхода» пренебрежения малым параметром при производной легко решаются. Погрешность легко оценивается сравнением коэффициентов алгебраических связей для S и $S+1$, а повышение точности достигается увеличением S. Первыми кандидатами на пренебрежение производными в (17.22) являются уравнения с большими по модулю элементами матрицы $\mathbf{A}$.

Лекция 18. Антиинтуитивные системы, типичные ошибки при управлении ими.

Встречая сложные, обладающие сильными внутренними связями социальные и экономические системы, люди часто приходят к неправильным выводам, так как при выработке оценок они пользуются обычными методами и интуицией. За всю долгую историю человечества человек не нуждался в понимании этих систем, однако, теперь это не так. Эволюционный процесс не выработал в нас интеллектуальной способности, необходимой для правильного понимания динамического поведения систем, частью которых мы сами являемся. Создаваемая интуитивно «мыслительная» модель несовершенна и не точно формализуема. Более того, даже у одного и того же человека мысленная модель изменяется со временем, например, в течение беседы. Человеческий разум компонует некоторые взаимосвязи для того, чтобы приспосабливаться к смыслу дискуссии. … Фундаментальные гипотезы меняются, но никогда не высказываются. Цели различны и остаются не идентифицированными. Не удивительно, что поиск компромиссов занимает так много времени.

Достоинствами человеческого интеллекта является то, что он:

- в высшей степени приспособлен к **анализу элементарных сил и воздействий**, составляющих систему;
- очень эффективен при **идентификации структуры** сложной ситуации;
- легко воспринимает отрицательные явления, опасения, цели, особенности, предубеждения, задержки, сопротивляемость к изменению,

мотивы, доброжелательность, жадность и другие чисто человеческие характеристики, которые регулируют взаимосвязи между отдельными ячейками социальных систем.

Однако, когда модель построена, разум становится недостаточным для целей предвидения, для изучения ***динамики поведения***, которое свойственно системе. Иными словами, построив модель, человек не способен выполнить то, с чем легко справляется типовая программа решения дифференциальных уравнений (например, ***RKF45)***.

Интуитивно очевидные «решения» социальных проблем имеют тенденцию заводить в одну из нескольких ***<u>ловушек</u>***, обусловленных характером сложных систем. Так, типичными ***<u>признаками</u>*** **антиинтуитивных систем** и ***<u>ошибками</u>*** при принятии для них управленческих решений без моделирования являются следующие.

Первый тип ошибок связан с появлением новых проблем при разрешении старых. «Нос вытащишь – хвост увязнет!»

Второй тип ошибок вызывается тем, что *кратковременная* и *долговременная* реакция социальной системы на разные методы управления обычно *противоречат* друг другу. Хорошие методы и программы, улучшающие положение системы в долгосрочном плане, первоначально могут ухудшать его. И наоборот. Это особенно коварное явление! Краткосрочная перспектива бросается в глаза и требует немедленных действий! Многие проблемы сложных систем являются конечным результатом ранее принятых краткосрочных решений. Так, например, большие капиталовложения и более интенсивное использование земли в сельском хозяйстве увеличили производство пищевых продуктов в краткосрочной перспективе, но в долговременной перспективе они нарушили продуктивность огромных земельных площадей из-за эрозии и засорения.

Третий тип ошибок обусловлен противоречиями между целями одной *подсистемы* и *системы в целом*. Так целью города является его расширение и повышение уровня жизни. Однако, по мере того, как эти цели реализуются, вся страна сталкивается с ростом населения, индустриализ., загрязнения и потребности в продуктах питания. Аналогично интересы стран вступают в противоречие с интересами мира в целом.

Четвертый тип ошибок связан с тем, что человеческий опыт работы с простыми системами учит нас, что причину затруднения следует искать *рядом* с его проявлениями. Социальная система «подставляет» нам кажущуюся причину, которую мы на основе «опыта» считаем правдоподобной. Например, возникают явные симптомы загрязнения окружающей среды. Вместо изучения проблемы народонаселения, давление ослабляется созданием новых городских районов в сельской местности. И только через много лет будет видно, что население увеличилось настолько, что даже прежний уровень жизни невозможно поддержать.

В качестве примера рассмотрим простую модель Вольтерра «хищник-жертва»,

$$\frac{dr}{dt} = 2r - \alpha \cdot r \cdot f,$$
$$\frac{df}{dt} = \alpha \cdot r \cdot f - f \qquad (18.1)$$

описывающую совместное существование кроликов (r), имеющих неограниченный запас пищи и лис (f), питающимися кроликами. Коэффициент α отражает вероятность их встречи с понятными последствиями.

Что можно ожидать от такого сообщества спустя длительное время? Одно из интуитивных решений подсказывает, что в системе установится равновесие (стационарная точка), когда число лис и кроликов сбалансировано. Рассмотрим это подробнее. Система имеет две стационарные точки. Одна из них нулевая, а вторая x^* выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ f \end{pmatrix}, \quad x^* = \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 2/\alpha \end{pmatrix}. \qquad (18.2)$$

Оценим ее устойчивость. Матрица Якоби $\mathbf{J}$ системы (18.1) имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 - \alpha \cdot f & -\alpha \cdot r \\ \alpha \cdot f & -1 + \alpha \cdot r \end{pmatrix}$$

и в стационарной точке x^* принимает следующее значение

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{x}^*\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения оказываются чисто мнимыми $\left(\lambda_{1,2} = i \cdot \sqrt{2}\right)$, и дальнейший анализ показывает, что стационарная точка оказывается неустойчивой. Вместо этого в системе устанавливается орбитально устойчивый предельный цикл. Первоначально большое число кроликов приводит к росту числа лис, следствием чего является сокращение количества кроликов, что, в свою очередь, приводит к вымиранию лис. Число кроликов вновь возрастает и т.д. Именно такая картина и складывается реально в природе. Первоначальная гипотеза о наличии устойчивой стационарной точки оказалась ошибочной.

Проблемам построения социально-экономических моделей посвящен целый ряд работ Дж. Форрестера («Основы кибернетики предприятия», «Динамика развития города», «Мировая динамика»). В качестве примера обратимся к некоторым результатам последней книги, где строится очень упрощенная «учебная» модель мировой динамики. В ней присутствуют пять фазовых переменных (так называемые ***уровни***, характеризующие накопления внутри системы): ***население, фонды в промышленности, фонды в сельском***

хозяйстве, природные ресурсы, загрязнение. При этом не учитывается научно-технический прогресс, и учитываются только разведанные природные ресурсы.

Базовый эксперимент в исходной системе показал, что процесс роста экономики сменяется упадком в результате истощения природных ресурсов.

Эксперимент 1. Темп использования природных ресурсов уменьшен в 4 раза (!) – новые технологии. Но на использование естественных ресурсов влияет *численность населения и материальный уровень* жизни, а эти факторы продолжают изменяться. Уменьшение потребности в естественных ресурсах устраняет один из факторов ограничения развития, но в системе *возникает другая сила, подавляющая рост*, – **катастрофа загрязнения**. Загрязнение возрастает более, чем в **40** раз (перегрузка природных механизмов очистки), население падает в **6** раз от максимума.

Эксперимент 2. Природные ресурсы вообще не тратятся, а темпы загрязнения в **10** раз меньше. Это нереальные предположения, но… Население достигает 9.7 млрд., плотность в 2.65 раза выше, чем в 1970г. Качество жизни настолько падает, что к 2060г. численность становится практически постоянной (перенаселение).

Эксперимент 3. Если дополнительно к предыдущему пренебречь влиянием плотности на рост населения, то ограничивающим фактором становится недостаток продуктов питания.

Эксперимент 4. Увеличение капиталовложений (скорость накопления на 20% больше). Качество жизни стало падать, и была ускорена индустриализация. Возникает кризис загрязнения задолго до того, как истощились ресурсы земли. Т.о., заменили одну проблему другой.

Эксперименты 5и 5а. Сокращение рождаемости (нормальный темп рождаемости уменьшен в 1,5 раза). Возникает короткая пауза в росте численности после начала кампании контроля над рождаемостью. Однако во время этой паузы капиталовложения продолжают возрастать. В течение десятилетия, пока население остается стабильным, возрастают материальный уровень жизни и относительный уровень питания. Все это ослабляет воздействия, ранее сдерживающие рост населения. Это типичный пример, как уменьшение роли одного из факторов вызывает возрастание роли других, и, таким образом, с лихвой компенсируется влияние этого уменьшения. Программа контроля над рождаемостью только на короткое время отсрочит угрозу перенаселения, но истощение запасов природных ресурсов (определяющий фактор) в дальнейшем уменьшит численность населения.

А если истощаемость природных ресурсов как-то исключить, программа контроля над рождаемостью может быть будет успешной? Одновременно уменьшили скорость использования природных ресурсов и рождаемость. Рост численности населения замедлился, пока увеличение относительного уровня питания и качество жизни не заставили его возобновиться. Загрязнение окружающей среды больше зависит от индустриализации, чем от численности населения, и кризис загрязнения не слишком уж замедлится.

Эксперимент 6. Уменьшение загрязнения (применили новые технологии). Численность населения и объем капиталовложений будут расти еще 20 лет по сравнению с прежней ситуацией… до наступления кризиса загрязнения (более тяжелого на новом уровне с большей плотностью населения). Если предельно сильно уменьшать загрязнение, то кризис будет заметно позднее из-за истощения природных ресурсов.

Эксперимент 7. Повышение продуктивности сельского хозяйства. Это вызвало моментальный рост качества жизни, увеличился темп рождаемости и … возвращение качества жизни к прежней ситуации через 20 лет.

Траектории развития мировой системы могут иметь и более обнадеживающий вид. Однако выработка лучших стратегий потребует таких самоограничений и целеустремленности в долгосрочной перспективе, которые человек может оказаться не в состоянии проявить. Самой сложной задачей является переход от ***роста*** к ***равновесию***. Развитые государства имеют давние традиции, которые поощряли рост. До сих пор все проблемы перенаселения решались переселением на новые земли. Всегда было, *что* и *где* взять, и все проблемы разрешались…

Что делать? Чувствительные точки в большинстве случаев находятся не там, где их можно ожидать. Если мы хотим остановить рост, нужно разорвать **естественные петли положительной обратной связи**. Были выполнены многочисленные эксперименты.

Эксперимент 8. Уменьшен рост капиталовложений. Одновременно реализованы более низкая скорость использования природных ресурсов и меньшее образование загрязнения. Все приходит к равновесию, но качество жизни ниже его максимальной величины («лучше мы уже жили!»).

Эксперимент 8а. В дополнение производство продуктов питания снижено на 20%. Относительный уровень питания снизился всего на 3% (!). Численность – на уровне стартовой. Уровень жизни в равновесии – на более высоком уровне, чем в **эксперименте8**, но качество жизни еще ниже, чем на старте. Теперь пора заняться рождаемостью.

Эксперимент 9. Наконец, первоначальная модель изменили следующим образом:

- темп использования природных ресурсов уменьшен на 75%;
- образование загрязнения уменьшено на 50%;
- фондообразование уменьшено на 40%;
- производство продуктов питания уменьшено на 20%;
- темп рождаемости уменьшен на 30%.

Численность населения устанавливается немного ниже стартового уровня, а качество жизни увеличивается. Природные ресурсы медленно истощаются и со временем вызовут кризис, если не будет решена проблема регенерации отходов и применения заменителей.

Эти эксперименты показывают, что ***глобальное равновесие в принципе возможно***. Будет ли оно достигнуто – вопрос другой. Предлагаемые решения принять нелегко. Видимо, потребуется более значительное воздействие окружающих условий на человечество, чтобы эти вопросы рассматривались с достаточным вниманием и серьезностью. Но к тому времени останется еще меньше времени для действия…

Литература

1. Зимницкий В.А., Устинов С.М. Методы анализа математических моделей динамических систем. Учебное пособие.-Л.: изд. ЛГТУ, 1991, 80с.
2. С.М.Устинов, В.А.Зимницкий. Вычислительная математика. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 336с. – (Учебное пособие.)
3. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек И. Методы анализа нелинейных динамических моделей. -М.: Мир, 1991.
4. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002 .- 334 с.
5. Найфе А. Введение в методы возмущений. -М.: Мир, 1984.
6. Шеннон Р. Иммитационное моделирование систем – искусство и наука. - М.: Мир, 1978.
7. Методы автоматизации моделирования технических объектов.
Метод.указ. /Сост. Н.Н.Черноруцкая и др. -Л.: ЛПИ, 1980.-28с.
8. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. -М.: Наука, 1979, 208с.
9. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. -М.: Прогресс, 1971.
10. Форрестер Дж. Динамика развития города. -М.: Прогресс, 1974.
11. Форрестер Дж. Мировая динамика. -М.: Наука, 1978, 168с.
12. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.-М.: Мир, 1980, 280с.