

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ЮНЕСКО ПО НОВЫМ ИНФОРМАЦИОННЫМ ТЕХНОЛОГИЯМ

К.Е. Афанасьев, С.В. Стуколов

**КМГЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ
ГИДРОДИНАМИКИ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ НА
ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ**

Учебное пособие

Кемерово 2001

ББК В253.31я73

А 94

УДК 532.5

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Кемеровского государственного университета*

Рецензенты: доктор тех. наук, профессор В.П. Потапов,

кафедра вычислительной техники и информационных технологий Кузбасского государственного технического университета

А 94 Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. КМГЭ для решения плоских задач гидродинамики и его реализация на параллельных компьютерах: Учебное пособие. – Кемерово: КемГУ, 2001. - 208с.

ISBN 5-8353-0080-8

В пособии приведена теория плоских нелинейных задач гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, дается описание метода комплексных гравитационных элементов (КМГЭ) и построенных на его основе численных алгоритмов. Приводятся результаты численного решения некоторых задач гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами. Даётся введение в теорию параллельных вычислений и приведены результаты по распараллеливанию КМГЭ.

Пособие рассчитано на студентов старших курсов и аспирантов математического факультета, специализирующихся по вычислительной и прикладной математике.

А $\frac{1603040100}{ЛР №020464}$ Без объявл.

ББК В253.31я73

ISBN 5 -8353-0080-8

© К.Е. Афанасьев
С.В. Стуколов, 2001

© Кемеровский государственный
университет, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

6

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

9

§1. ГИПОТЕЗА СПЛОШНОСТИ СРЕДЫ	9
§2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ	10
§3. ИНДИВИДУАЛЬНАЯ И МЕСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ	13
§4. СТАЦИОНАРНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ	14
§5. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ	15
§6. ТРАЕКТОРИИ, ЛИНИИ ТОКА, ЦИРКУЛЯЦИЯ СКОРОСТИ	15
§7. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ (УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ)	17
§8. МАССОВЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ СИЛЫ	19
§9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ	19
§10. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОН КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ	21
§11. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ФОРМЕ ГРОМЕКИ-ЛЕМБА	23
§12. ИНТЕГРАЛ БЕРНУЛЛИ	24
§13. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТЕЙ	24
§14. ИНТЕГРАЛ Коши-ЛАГРАНЖА	25
§15. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ	26

ГЛАВА 2. ПЛОСКИЕ БЕЗВИХРЕВЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ

27

§16. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ	27
§17. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ПЛОСКИХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ	29
§18. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО КОНТУРА ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ	35
§19. МЕТОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ	40
§20. ПОСТУЛАТ ЖУКОВСКОГО-ЧАПЛЫГИНА	42
§21. ФОРМУЛЫ ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И МОМЕНТА СИЛ	44

§22. ТЕОРЕМА ЖУКОВСКОГО	46
§23. ПРОФИЛЬ ЖУКОВСКОГО.	
ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ЖУКОВСКОГО	47
§24. ЗАДАЧА ОБ ОБТЕКАНИИ ЭЛЛИПСА ВБЛИЗИ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ	53

**ГЛАВА 3. КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ**

§25. ПОСТАНОВКА ПЛОСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ	60
§26. ОСНОВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ КМГЭ	61
§27. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ	62
§28. ДВОЙНЫЕ УЗЛЫ	65
§29. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	65
§30. ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ	66
§31. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССЫ, ЭНЕРГИИ, ДАВЛЕНИЯ	68
§32. ТЕСТОВЫЙ РАСЧЕТ	70
§33. ДВУСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ	71
§34. СЛУЧАЙ БЕЗГРАНИЧНОЙ ОБЛАСТИ	73
§35. СЛУЧАЙ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА ВБЛИЗИ ЭКРАНА	73
§36. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	77

**ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО МЕТОДА
ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ
ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ**

§37. СТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ДОННЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ	80
§38. ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЕЙ СТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ	100

§39. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН С РАЗЛИЧНЫМИ ПРЕГРАДАМИ	120
§40. ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА	140
<u>ГЛАВА 5. РЕАЛИЗАЦИЯ КМГЭ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ</u>	<u>144</u>
§41. ДВЕ МОДЕЛИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ: ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ И ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ	144
§42. ДВЕ ПАРАДИГМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	147
§43. АРХИТЕКТУРА ЭВМ для ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ	152
§44. КЛАССИФИКАЦИЯ ФЛИННА	156
§45. ОСНОВНЫЕ КОНЦЕПЦИИ АРХИТЕКТУРЫ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ	158
§46. ОПЕРАТИВНАЯ ПАМЯТЬ	162
§47. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ	164
§48. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПАРАЛЛЕЛИЗМА	168
§49. ЗАКОН АМДАЛЯ	171
§50. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА	173
§51. ТЕСТИРОВАНИЕ КЛАСТЕРА	173
§52. ПРОСТЕЙШИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ	181
§53. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ КМГЭ и ЕГО РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ	191
<u>ЛИТЕРАТУРА</u>	<u>199</u>

ВВЕДЕНИЕ

Теория движений жидкости со свободными границами является одним из наиболее бурно развивающихся направлений современной гидродинамики. Результаты исследований течений жидкости со свободными поверхностями находят многочисленные технические приложения, прежде всего в тех областях, где вязкостью жидкости можно пренебречь. Однако, несмотря на многочисленные приложения, методы решения таких задач далеки от совершенства. Это обусловлено тем, что даже в рамках идеальной несжимаемой жидкости наличие свободных границ становится серьезным препятствием для исследования. Основная трудность заключается в том, что положение свободной границы заранее неизвестно и должно быть определено в ходе решения. Кроме того, на неизвестной свободной границе задаются нелинейные краевые условия.

В нелинейной постановке, при режимах движения наиболее интересных для исследований, наблюдаются нелинейные эффекты, связанные с весомостью: опрокидывание волн, разрушение волн на мелководье и т.д. Физические эксперименты для изучения этих явлений оказываются сложными и дорогостоящими, а быстрота протекания реальных процессов делает численные методы единственным источником информации о поле течения, поэтому разработка и тестирование надежных численных алгоритмов является актуальной задачей.

Цель пособия – познакомить читателя с комплексным методом граничных элементов (КМГЭ) и разработанными на его основе алгоритмами для решения плоских стационарных и нестационарных задач гидродинамики со свободными границами.

Пособие по своему логическому содержанию разбито на пять глав. В первой главе даются общие сведения по гидродина-

мике идеальной несжимаемой жидкости, а именно: вводится ряд понятий, формулируются законы сохранения, приводятся уравнения движения жидкости. Вторая глава посвящена описанию простейших плоских потенциальных течений. При написании этих глав были использованы монографии следующих авторов: Бэтчелор Д. [23], Валландер С.В. [26], Голубев В.В. [31], Гуревич М.И. [38], Киселев О.М., Котляр Л.М. [46], Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. [54], Седов Л.И. [74], Сретенский Л.Н. [76].

В третьей главе приводится описание комплексного метода граничных элементов [36]. В отличие от [36] в пособии показана применимость КМГЭ для решения задач с двусвязной областью, рассмотрены случаи безграничной области течения жидкости и обтекания тела вблизи экрана. Итогом в каждом случае является построение дискретного аналога интегрального соотношения, удобного для программирования. Кроме этого, здесь же приводится способ нахождения производных от функций, заданных таблично на границе области решения.

Наиболее интересные результаты численных экспериментов с использованием КМГЭ, выполненных авторами [2 - 18, 51, 75, 77, 78, 79, 94, 95], нашли свое отражение при написании четвертой главы. Приведены результаты решения следующих задач: стационарное обтекание донных препятствий и стационарное циркуляционное обтекание профилей сверхкритическим потоком тяжелой жидкости конечной глубины со свободной границей, нестационарные задачи взаимодействия уединенных волн (солитонов) с различными преградами, горизонтальное движение полу бесконечного тела. Каждая задача сопровождается подробным описанием алгоритма ее решения, которые читатель при необходимости может легко запрограммировать.

КМГЭ, в отличие от метода конечных элементов и конечных разностей [49], требует разбиения лишь границы рассматриваемой области, при этом размерность задачи снижается на единицу, что очень важно при проведении численных расчетов. Но даже при такой отличной особенности метода некоторые расчеты реальных задач занимают довольно продолжительное время. Например, один расчет нестационарной задачи наката уединенной

волны на наклонный берег занимал от 8 до 20 часов на ПК класса Пентиум II с оперативной памятью 32Mb, а так как эта задача, да и большинство других являются многопараметрическими, то для полного изучения рассматриваемой задачи затрачивалось много времени(порядка нескольких недель). Сократить время расчетов удалось за счет перехода в программировании на совершенно новый уровень – параллельное программирование.

В 2000 году в КемГУ создана кафедра ЮНЕСКО по новым информационным технологиям, которая приступила к чтению спецкурсов по высокопроизводительным вычислениям в рамках специальности “прикладная математика”. Программирование на суперкомпьютере или кластере ПК - это далеко не всегда простая задача, и простой перенос программы на многопроцессорную вычислительную систему может не дать ожидаемого выигрыша в производительности программы. Может случиться и так, что в результате такого переноса программа будет работать медленнее, чем на компьютере с традиционной архитектурой. Таким образом, изучение методов распараллеливания последовательных программ, анализ свойств параллельных алгоритмов является актуальной задачей. Этой тематике и посвящена пятая глава пособия. Особое внимание уделяется описанию вычислительного кластера на базе сети ПК, его тестированию. Затем приводится описание простейших параллельных алгоритмов для более глубокого понимания идей параллельного программирования. В завершении пособия дается описание параллельного аналога КМГЭ и показана его эффективность. При написании главы были использованы материалы информационно-аналитического центра НИВЦ МГУ [62], ВЦ РАН [63], монографии следующих авторов: Голуб Дж., Ван Лоун Ч. [30], Корнеев В.В. [52], Ортега Дж.[66], Шнитман В.[90], учебное пособие [121].

Предлагаемое учебное пособие является частью плановой работы, которая была определена департаментом информационных технологий Организации Объединенных Наций по вопросам образования, науки и культуры (UNESCO), при создании в Кемеровском государственном университете кафедры Юнеско по новым информационным технологиям в образовании и науке.

Г л а в а 1.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§1. Гипотеза сплошности среды

Гидродинамика есть раздел механики, посвященный изучению законов движения жидкостей, а также законов взаимодействия жидких сред с находящимися в них телами. При этом, как правило, размеры рассматриваемых объемов жидкостей и твердых тел оказываются несопоставимо большими по сравнению с размерами молекул и межмолекулярными расстояниями. По этой причине обычно жидкости принимаются как сплошные среды, масса которых непрерывно распределена по объему. Такая идеализация позволяет представить жидкость как непрерывно распределенную по пространству среду, обладающую физическими свойствами реальной жидкости. Для описания движения такой среды мы можем использовать хорошо разработанный математический аппарат гладких функций, то есть непрерывных и имеющих достаточное число производных.

Согласно гипотезе сплошности среды масса среды распределена в объеме непрерывно. Основной динамической характеристикой среды является плотность среды.

Плотность среды ρ в произвольной точке A определяется соотношением:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V},$$

где ΔM - масса, заключенная в малом объеме ΔV , включающем точку A ; предел берется при сжатии объема ΔV к этой точке.

Плотность среды может изменяться от точки к точке и в данной точке со временем: $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

Жидкость с постоянной во всей области течения плотностью $\rho(x, y, z, t) = const$ называется несжимаемой и однородной.

§2. Способы задания движения жидкости

Существуют две точки зрения на изучение движения жидкости: точка зрения Лагранжа и точка зрения Эйлера. Соответственно используются два вида переменных для описания законов движения жидкости – переменные Лагранжа и переменные Эйлера.

Переменные Лагранжа

Пусть в момент времени t_0 произвольная частица жидкости находилась в точке A_0 . В момент времени t частица жидкости переместилась из точки A_0 в точку A . Положение частицы определяется координатами x, y, z той точки пространства, которое частица занимала в момент времени t . Координаты частицы в момент времени t зависят от положения, которое частица занимала в начальный момент времени t_0 . Начальное положение частицы может быть задано ее декартовыми координатами a, b, c в момент времени t_0 . Если известен закон движения частицы жидкости, то его можно представить в виде

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t). \quad (1.1)$$

В запись закона движения частицы жидкости (1.1) входят четыре переменные – начальные координаты a, b, c и время t . Если a, b, c будут фиксированными, а t – переменным, то (1.1) представляет собой закон движения одной фиксированной точки жидкости. Если a, b, c будут переменными, а t – фиксированным,

то функции (1.1) дадут распределение точек жидкости в данный момент времени. Если a, b, c и t будут переменными, то на (1.1) можно смотреть как на формулы, определяющие движение жидкости. Координаты a, b, c и время t называются переменными Лагранжа. Основная задача гидродинамики заключается в определении функций (1.1), задающих закон движения жидкости.

Переменные Эйлера

Предположим теперь, что нас интересует не закон движения индивидуальных точек жидкости, а то, что происходит в разные моменты времени в данной точке пространства. Пусть наше внимание концентрируется на данной точке пространства, в которую приходят разные частицы жидкости. Это и составляет сущность точки зрения Эйлера на изучение движения жидкости. Например, движение воды в реке можно изучать, либо следя за движением каждой частицы воды от верховьев реки до ее устья (точка зрения Лагранжа), либо наблюдая изменение параметров течения воды в определенных местах реки, не прослеживая движения отдельных частиц воды вдоль всей реки (точка зрения Эйлера).

Выберем в пространстве некоторую точку A с координатами x, y, z . Движение, с точки зрения Эйлера, считается известным, если интересующие величины (плотность ρ , скорость v , ускорение a и т.д.) заданы как функции

$$\rho = \rho(x, y, z, t), \vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t), \vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t). \quad (1.2)$$

Функции (1.2), при фиксированных x, y, z и переменном t , определяют изменения со временем плотности, скорости, ускорения и т.д. в данной точке пространства для разных приходящих в эту точку частиц. При фиксированном t и переменных x, y, z эти функции дают распределения характеристик движения в пространстве в данный момент времени t . При переменных x, y, z и t - распределения характеристик движения в пространстве в разные моменты времени. Переменные x, y, z, t носят название переменных Эйлера.

Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера и обратно

1. Пусть задача движения жидкости решена в переменных Лагранжа и требуется записать решение в переменных Эйлера.

В переменных Лагранжа решение имеет вид

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t); \quad (1.3)$$

$$\rho = \rho(a, b, c, t), \quad \vec{v} = \vec{v}(a, b, c, t), \quad \vec{a} = \vec{a}(a, b, c, t). \quad (1.4)$$

Так как между координатами x, y, z и a, b, c имеет место взаимно-однозначное соответствие, то систему (1.3) можно разрешить относительно a, b, c и найти

$$a = a(x, y, z, t), \quad b = b(x, y, z, t), \quad c = c(x, y, z, t). \quad (1.5)$$

Подставив (1.5) в (1.4) получим решение задачи, записанное в переменных Эйлера:

$$\rho = \rho(x, y, z, t), \quad \vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t), \quad \vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t). \quad (1.6)$$

2. Пусть задача решена в переменных Эйлера и требуется записать закон движения жидкости в переменных Лагранжа.

В переменных Эйлера решение имеет вид (1.6). В формулах (1.3) величины a, b, c играют роль начальных координат, постоянных для каждой частицы, а время t - независимая переменная. Поэтому, рассматривая координаты частицы как функции времени, можем написать

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad (1.7)$$

где v_x, v_y, v_z - компоненты вектора скорости v .

Компоненты вектора скорости известны (1.6) по условию. Подставив их в правые части (1.7), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t). \quad (1.8)$$

Проинтегрировав систему (1.8), найдем x, y, z как функции t :

$$x = x(C_1, C_2, C_3, t), \quad y = y(C_1, C_2, C_3, t), \quad z = z(C_1, C_2, C_3, t). \quad (1.9)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные. По определению при $t = t_0$ $x = a$, $y = b$, $z = c$. Подставляя эти значения в (1.9) и решая полученные равенства относительно C_1, C_2, C_3 , находим C_1, C_2, C_3 как функции a, b, c . В итоге получили систему уравнений вида (1.3). Подставляя формулы (1.3) в известные выражения для гидродинамических величин (1.6), получим эти величины в переменных Лагранжа.

§3. Индивидуальная и местная производная

Пусть A - некоторая гидродинамическая величина. Распределение данной величины по пространству можно задать как с точки зрения Лагранжа: $A(a, b, c, t)$, так и с точки зрения Эйлера: $A(x, y, z, t)$. Изменение величины A в предположении, что эта величина относится к фиксированной частице, характеризуется производной от A по времени, которая называется индивидуальной производной. Обозначим эту производную A'_u .

Если A задано в переменных Лагранжа, то индивидуальная производная этой величины будет равна $A'_u = \frac{\partial A}{\partial t}$.

Пусть A - функция переменных Эйлера. Для фиксированной частицы координаты в соответствии с законом ее движения будут функциями времени

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \text{ и } A(t) = A[x(t), y(t), z(t)]. \quad (1.10)$$

Поэтому для вычисления индивидуальной производной величины A надо воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции.

$$A'_u = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Учитывая (1.7), A'_u записывается следующим образом

$$A'_u = \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z}. \quad (1.11)$$

Индивидуальная производная имеет смысл полной производной, поэтому в дальнейшем будем обозначать ее $\frac{dA}{dt}$.

Производная $\frac{\partial A}{\partial t}$, входящая в уравнение (1.11), называется местной или локальной производной и характеризует изменение величины A в единицу времени в данной точке пространства (x, y, z) .

§4. Стационарные и нестационарные движения

Течение жидкости называется установившимся или стационарным, если в каждой фиксированной точке пространства, принадлежащей области движения, все гидродинамические величины не зависят от времени. Это означает, что если A - некоторая величина, характеризующая движение, то местная производная $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ и $A = A(x, y, z)$.

Если гидродинамические величины во всем пространстве, занятом жидкостью, или в какой-либо его части изменяются с течением времени, то движение называется неустановившимся или нестационарным.

Важно отметить, что в зависимости от выбора системы координат движение может быть как установившимся, так и неустановившимся. Например, движение уединенной волны стационар-

но относительно ее вершины и нестационарно относительно берега.

§5. Скорости и ускорения

Скорость частицы является индивидуальной производной от радиус-вектора по времени, ускорение – индивидуальной производной от вектора скорости по времени.

Если задача о движении жидкости решается в переменных Эйлера, то $v_x = v_x(x, y, z, t)$, $v_y = v_y(x, y, z, t)$, $v_z = v_z(x, y, z, t)$.

Ускорение можно вычислить, используя формулу (1.11)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z},$$

или в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Если задача решается в переменных Лагранжа, то известны функции $x = x(a, b, c, t)$, $y = y(a, b, c, t)$, $z = z(a, b, c, t)$ и компоненты вектора скорости легко вычисляются по следующим формулам:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Соответственно

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

§6. Траектории, линии тока, циркуляция скорости

Траекторией частицы (точки жидкости) называется геометрическое место точек пространства, через которые движущаяся частица последовательно проходит во времени.

Если движение задано в переменных Лагранжа, то известны функции

$$x = x(a, b, c, t), y = y(a, b, c, t), z = z(a, b, c, t). \quad (1.12)$$

Уравнения (1.12) есть параметрические уравнения траектории той жидкой частицы, положение которой в момент $t = t_0$ определялось параметрами a, b, c .

Если задача решена в переменных Эйлера, то известны $v_x = v_x(x, y, z, t)$, $v_y = v_y(x, y, z, t)$, $v_z = v_z(x, y, z, t)$. Если x, y, z - координаты точки на траектории, то

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t). \quad (1.13)$$

Чтобы найти траекторию частицы, которая при $t = t_0$ имела координаты x_0, y_0, z_0 , требуется решить задачу Коши для системы (1.13).

Линией тока называется линия, которая для данного момента времени t обладает следующим свойством: вектор скорости \vec{v} , вычисленный в любой точке этой линии, направлен по касательной к ней. Пусть $d\vec{s}$ - бесконечно малый элемент линии тока с проекциями dx, dy, dz , тогда условие коллинеарности $d\vec{s}$ и \vec{v} в проекциях записывается в следующем виде

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{v_y}{v_z}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{v_x}{v_z}. \quad (1.14)$$

Для установившихся течений траектории и линии тока совпадают, для неустановившихся – в общем случае они не совпадают.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.14), определяющих линию тока, имеет единственное решение, если правые части являются однозначными функциями. Это значит, что через каждую точку пространства можно провести лишь единственную линию тока. Однако если в некоторых точках

$|\vec{v}| = 0$ или $|\vec{v}| = \infty$, то правые части (1.14) становятся неопределенными. Следовательно, через такие точки можно провести сколько угодно линий тока. Такие точки относятся к типу особых и называются критическими точками.

Возьмем в жидкости некоторую кривую l . Пусть \vec{v} - скорость частиц жидкости в точках этой кривой, v_l - проекция \vec{v} на касательную к ней. Циркуляцией скорости по некоторой кривой l с концами A, B называется вычисленный вдоль этой кривой интеграл

$$\Gamma = \int_A^B v_l dl = \int_A^B v_x dx + v_y dy + v_z dz. \quad (1.15)$$

Выберем в жидкости замкнутый контур l и проведем через каждую его точку линию тока. Получим трубчатую поверхность, которая называется трубкой тока. Очевидно, трубка тока имеет то свойство, что через ее боковую поверхность жидкость не протекает. Обозначим через S площадку любого поперечного сечения трубы тока, \vec{n} - нормаль к площадке, v_n - проекция вектора скорости на нормаль \vec{n} . Объемным расходом жидкости через поверхность S называется следующая величина

$$Q = \int_S v_n dS. \quad (1.16)$$

§7. Закон сохранения массы (уравнение неразрывности)

Пусть D - фиксированная область с границей C , занятая идеальной несжимаемой и однородной жидкостью, то есть жидкостью с постоянной во всей области течения плотностью ρ .

Скорость изменения массы жидкости в области D , обусловленная движением жидкости через границу со скоростью \vec{v} , равна

$$\int_C \vec{n} \cdot \rho \vec{v} ds.$$

Здесь \vec{n} - вектор единичной внешней нормали к элементу поверхности ds , символ " \cdot " означает скалярное произведение векторов.

С другой стороны, скорость изменения массы жидкости в области D (элемент объема которой обозначается dV) дается формулой: $\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$.

Приравнивая выписанные выражения для скоростей изменения массы жидкости, приходим к уравнению неразрывности

$$\int_C \vec{n} \cdot \rho \vec{v} ds = - \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (1.17)$$

Применяя к преобразованию интеграла по границе формулу Гаусса, приведем уравнение (1.17) к виду: $\int_D \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \right] dV = 0$.

Поскольку это уравнение справедливо и для любой части области D , то имеет место уравнение неразрывности в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0. \quad (1.18)$$

Вводя в рассмотрение материальную производную

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla,$$

уравнение неразрывности (1.18) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.19)$$

Для несжимаемой однородной жидкости с постоянной плотностью уравнение (1.18) сводится к соотношению

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.20)$$

§8. Массовые и поверхностные силы

Взаимодействие жидкости с твердым телом характеризуется распределением давления по поверхности. Если давление p не зависит от направления, то есть выполняется закон Паскаля, то жидкость называют идеальной. В этом случае силовое воздействие давления жидкости на поверхность тела осуществляется по нормали. Если S - поверхность тела, соприкасающаяся с жидкостью, \vec{n} - единичный вектор нормали к поверхности, направленный внутрь жидкости, то результирующая сила воздействия жидкости на тело вычисляется с помощью интеграла

$$\vec{R} = - \iint_S p \vec{n} dS. \quad (1.21)$$

Кроме поверхностных сил на жидкость действуют массовые силы, которые характеризуются векторной функцией \vec{f} . Результирующая сила всех массовых сил вычисляется из интеграла

$$\vec{F} = \iiint_V \rho \vec{f} dV. \quad (1.22)$$

Векторная функция \vec{f} во многих задачах гидродинамики известна. Например, в поле сил тяжести с ускорением \vec{g} функция $\vec{f} = \vec{g}$.

§9. Закон сохранения энергии

Для записи закона сохранения энергии необходимо выяснить, из каких видов энергии складывается полная энергия жидкого объема, определить виды притоков энергии извне и учсть превращения одного вида энергии в другой.

Рассмотрим сначала некоторую покоящуюся однородную массу жидкости M в объеме V . Исходное состояние жидкости

определяется некоторым набором параметров: давлением, температурой и др. В результате нагрева, сжатия и других воздействий масса жидкости перейдет в новое состояние, определяемое другими значениями параметров. Переход состояния массы жидкости связан с изменением $\Delta\varepsilon$ энергии. Пусть в начальном состоянии масса M имела запас энергии ε_0 . Тогда можно ввести величину $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$.

Таким образом, через $\Delta\varepsilon$ определяется величина внутренней энергии ε данной массы жидкости.

Введем величину E - внутреннюю энергию, отнесенную к единице массы:

$$E_p = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{M}. \quad (1.23)$$

Из (1.23) следует, что запас внутренней энергии в массе dm равен $d\varepsilon = E_p dm = E_p \rho dV$. Внутренняя энергия конечной массы жидкости в объеме V :

$$\varepsilon = \iiint_V \rho E_p dV. \quad (1.24)$$

Если жидкость движется, то помимо внутренней энергии она обладает кинетической энергией. Кинетическая энергия dE_k массы dm , движущейся со скоростью \vec{v} , равна:

$$dE_k = dm \frac{v^2}{2} = \rho \frac{v^2}{2} dV.$$

Кинетическая энергия массы, заключенной в объеме V :

$$E_k = \iiint_V \frac{\rho v^2}{2} dV.$$

Полной энергией называется сумма кинетической и внутренней энергий:

$$E = E_k + \varepsilon = \iiint_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + E_p \right) dV.$$

Закон сохранения полной энергии в интегральной форме записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + E_p \right) dV = \iiint_V \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV + \iint_S (p \cdot v) dS + \iiint_V \sigma dV + \iint_S t_n dS$$

Первое слагаемое в правой части характеризуется работой массовых сил, второе – поверхностных сил, третье учитывает объемное поглощение энергии (σ - приток тепла, отнесенное к единице объема), четвертое – поток тепла через поверхность (t_n - тепловой поток, отнесененный к единице площади).

§10. Уравнения движения.

Закон количества движения

Пусть вектор K - количество движения массы жидкости, заполняющей объем V , ограниченный поверхностью S . Количество движения элементарного объема dV с массой ρdV , имеющего скорость \vec{v} , равно $dK = \rho \vec{v} dV$.

Количество движения массы, заключенной в объеме V

$$K = \iiint_V \rho \vec{v} dV. \quad (1.25)$$

Закон количества движения формулируется следующим образом: производная по времени от количества движения некоторой системы масс равна сумме главных векторов массовых и поверхностных сил:

$$\frac{dK}{dt} = F^M + F^S. \quad (1.26)$$

Подставляя (1.21), (1.22), (1.25) в (1.26) получаем

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v dV = \iiint_V \rho F dV - \iint_S p_n dS$$

$$\text{или } \iiint_V \left(\frac{d}{dt}(\rho v) + \rho v \operatorname{div}(v) - \rho F \right) dV = - \iint_S p_n dS. \quad (1.27)$$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса, преобразуем интеграл по S в правой части (1.27) к интегралу по объему V :

$$\iint_S p_n dS = \iint_S (p \cos(n, x) + p \cos(n, y) + p \cos(n, z)) dS = \iiint_V \operatorname{grad}(p) dV.$$

Подставляя данное уравнение в (1.27), получим

$$\iiint_V \left(\frac{d}{dt}(\rho v) + \rho v \operatorname{div}(v) - \rho F + \operatorname{grad}(p) \right) dV = 0. \quad (1.28)$$

Так как (1.28) справедливо для любого объема V , то

$$\frac{d}{dt}(\rho v) + \rho v \operatorname{div}(v) - \rho F + \operatorname{grad}(p) = 0. \quad (1.29)$$

Уравнение (1.29) – уравнение количества движения в дифференциальной форме.

Выполнив дифференцирование в первом слагаемом уравнения (1.29), получим

$$\rho \frac{dv}{dt} + v \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(v) \right) = \rho F - \operatorname{grad}(p).$$

Учитывая уравнение неразрывности: $\rho \frac{dv}{dt} = \rho F - \operatorname{grad}(p)$.

$$\text{Или } \frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p). \quad (1.30)$$

Уравнение (1.30) – уравнение движения идеальной жидкости, носящее название уравнения Эйлера.

В проекциях на оси координат

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1.31)$$

Уравнение неразрывности и (1.31) составляют систему уравнений гидродинамики для идеальной жидкости: система четырех уравнений при известных массовых силах F_x, F_y, F_z содержит пять неизвестных функций v_x, v_y, v_z, p, ρ . В некоторых случаях рассматриваемая жидкость является несжимаемой, тогда к указанной системе уравнений добавляется следующее:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

и система становится замкнутой.

§11. Уравнения движения в форме Громеки-Лемба

Введем понятие вектора вихря ω . В проекциях на оси координат

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (1.32)$$

Уравнения (1.32) можно записать в следующем виде

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Для проекции ускорения на ось x имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) v_y + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_z = \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + 2(\omega_y v_z - \omega_z v_y) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + 2(\omega \times v)_x. \end{aligned}$$

Аналогичные формулы получаются для проекций ускорения на оси y и z . Поэтому ускорение в векторной форме запишется следующим образом

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + 2(\omega \times v),$$

а уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + 2(\omega \times v) = F - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p). \quad (1.33)$$

Уравнения (1.33) носят название уравнений движения Эйлера в форме Громеки-Лемба.

§12. Интеграл Бернулли

Пусть жидкость идеальная, несжимаемая, массовые силы консервативны, движение установившееся. Так как массовые силы консервативны, то

$$F = -\text{grad}(P).$$

При условии, что движение установившееся, из уравнения движения Эйлера в форме Громеки-Лемба получаем уравнение движения вдоль линии тока

$$\frac{1}{2} \text{grad}(v^2) = -\text{grad}(P) - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) \quad (1.34)$$

$$\text{или } \frac{1}{2}v^2 + P + \frac{p}{\rho} = C. \quad (1.35)$$

Равенства (1.34), (1.35) имеют место на любой линии тока, но постоянная C в (1.35) может меняться при переходе от одной линии тока к другой. Соотношение (1.35) называют интегралом Бернулли.

Если массовые силы есть силы тяжести, то $P = gz$ и интеграл

$$\text{Бернулли в этом случае равен: } \frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C.$$

§13. Потенциальные движения.

Потенциал скоростей

Движение называется потенциальным или безвихревым, если $\omega = 0$ (1.32) или в проекциях на оси координат $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$. При выполнении этих условий дифференциальная

форма $v_x dx + v_y dy + v_z dz$ будет полным дифференциалом некоторой функции $\phi(x, y, z, t)$, т.е. $d\phi = v_x dx + v_y dy + v_z dz$, где

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (1.36)$$

Компоненты вектора скорости есть частные производные от функции $\phi(x, y, z, t)$, называемой потенциалом скоростей.

Равенства (1.36) эквивалентны уравнению $\vec{v} = \text{grad } \phi$.

Для несжимаемой однородной жидкости с постоянной плотностью уравнение неразрывности $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. При условии потенциальности течения оно преобразуется к уравнению Лапласа относительно потенциала скоростей

$$\Delta \phi = 0. \quad (1.37)$$

§14. Интеграл Коши-Лагранжа

Если жидкость несжимаемая, массовые силы есть силы тяжести, движение безвихревое, то уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p). \quad (1.38)$$

Так как по условию: $F = -\text{grad}(gz)$, $v = \text{grad} \phi$, $\frac{\partial v}{\partial t} = \text{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t}$,

то (1.38) запишется следующим образом

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0.$$

Выражение в скобках не зависит от координат, но может зависеть от времени:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (1.39)$$

Уравнение (1.39) носит название интеграла Коши-Лагранжа.

Дополнительно предполагая, что движение установившееся, получим интеграл Бернулли в виде

$$\frac{|\nabla \phi|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C.$$

§15. Начальные и граничные условия

Для решения системы дифференциальных уравнений (уравнения движения жидкости и уравнение неразрывности) необходимо задать начальные и граничные условия. Начальные условия задают поле скоростей и давлений в жидкости в начальный момент времени t_0 : $v(x, y, z, t_0) = v_0$, $p(x, y, z, t_0) = p_0$.

Граничные условия бывают двух типов: кинематические (условия для скорости на границах жидкости) и динамические (связанные с давлением). Рассмотрим движение твердого тела в жидкости. Если жидкость безгранична, то вызванное телом движение жидкости затухает на бесконечности

$$v = 0 \quad \text{при } (x, y, z) \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим граничное условие на поверхности тела: обозначим через v^0 скорость движения тела и v_n^0 - нормальная составляющая проекции скорости произвольной точки поверхности тела, а через v_n - нормальную составляющую скорости частицы жидкости, прилегающей к этой точке поверхности тела.

Условие непротекания жидкости через твердую стенку записывается следующим образом $v_n = v_n^0$.

Если тело покоятся, а жидкость движется, то $v = v_\infty$ при $(x, y, z) \rightarrow \infty$, v_∞ - скорость жидкости на бесконечности; $v_n = 0$ на твердой стенке тела.

Динамические граничные условия накладывают ограничения на давления, действующие на границах потока. Рассмотрим условие для давления на свободной поверхности воды. На границе раздела двух сред (воды и воздуха) должно быть одно и то же значение давления. Давление на свободной границе равно атмосферному: $p = p_a$.

Г л а в а 2.

ПЛОСКИЕ БЕЗВИХРЕВЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ

§16. Плоскопараллельное движение жидкости. Комплексный потенциал

Течение называется плоским, если все частицы движутся параллельно некоторой плоскости, причем скорости частиц в соответствующих точках плоскостей, параллельных этой фиксированной плоскости, одинаковы по величине и направлению. В таком случае достаточно рассмотреть течение в одной плоскости, которую примем за плоскость (x, y) . Это означает, что

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\phi(x, y) = 0.$$

Из уравнения неразрывности следует: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$, которое является условием того, что дифференциальная форма $v_x dy - v_y dx$ есть полный дифференциал некоторой функции $\psi(x, y)$: $d\psi = v_x dy - v_y dx$.

Компоненты вектора скорости:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Выпишем уравнение линий тока: $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$, из которого следует $d\psi = v_x dy - v_y dx = 0$ или $\psi = const$. Равенство $\psi = const$ дает уравнение линий тока, а функцию $\psi(x, y)$ называют функцией тока.

Расход жидкости, протекающей через кривую AB равен

$$Q = \int_A^B v_n dS = \int_A^B v_x dy - v_y dx = \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A,$$

то есть расход жидкости равен разности значений функции тока в концах кривой AB .

Из условия отсутствия вихря $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ следует $\Delta \psi = 0$,

то есть функция тока, как и потенциал, тоже удовлетворяет уравнению Лапласа.

Сравнивая формулы для компонент вектора скорости через потенциал скорости и функцию тока, получаем следующие равенства

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Равенства (2.1) носят название уравнений Коши-Римана, которые гарантируют существование функции комплексного потенциала: $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, $\phi = \operatorname{Re} w$, $\psi = \operatorname{Im} w$.

Производная от $w(z)$ по z дает комплексно-сопряженную скорость $w'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y$.

Из уравнений Коши-Римана следует $\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, которое является условием ортогональности линий $\psi = const$ - линий тока, $\phi = const$ - эквипотенциали (линии равного потенциала).

Выясним свойства интеграла по произвольному замкнутому контуру L от сопряженной скорости:

$$\oint_L \bar{v} dz = \oint_L \frac{dw}{dz} dz = \oint_L dw = \oint_L (d\phi + i d\psi),$$

$$\operatorname{Re} \oint_L \bar{v} dz = \oint_L d\phi = \oint_L \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \oint_L v_x dx + v_y dy = \Gamma, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Im} \oint_L \bar{v} dz = \oint_L d\psi = Q. \quad (2.3)$$

Таким образом, действительная часть интеграла по замкнутому контуру от комплексно-сопряженной скорости равна циркуляции скорости по замкнутому контуру, а мнимая – расходу жидкости через этот контур.

§17. Простейшие примеры плоских потенциальных течений

Рассмотрим некоторые функции комплексного потенциала простейшего вида и определим, каким видам течений они соответствуют.

Прямолинейный поток

Рассмотрим функцию $w(z) = az$, где a - постоянное комплексное число. Так как $\frac{dw}{dz} = a$, то величина a представляет собой комплексно-сопряженную скорость, которая постоянна во всей области течения. Обозначив компоненты вектора скорости через v_x^0 и v_y^0 , запишем

$$a = v_x^0 - iv_y^0 = |a|e^{-i\alpha}.$$

Чтобы определить потенциал скорости и функцию тока, запишем $w = \phi + i\psi = (v_x^0 - iv_y^0)(x + iy) = (v_x^0 x + v_y^0 y) + i(v_x^0 y - v_y^0 x)$.

Отделяя мнимую и действительную части, получим

$$\operatorname{Re} w = \phi = v_x^0 x + v_y^0 y, \quad \operatorname{Im} w = \psi = v_x^0 y - v_y^0 x.$$

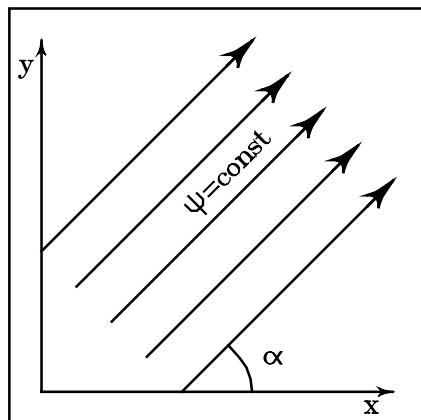


Рис. 1. Прямолинейный поток

Уравнение линий тока запишется в следующем виде $\psi = v_x^0 y - v_y^0 x = const$, которое описывает семейство параллельных прямых, наклоненных к оси x под углом α , причем $\operatorname{tg} \alpha = v_y^0 / v_x^0$ (рис.1). Эквипотенциали представляют собой семейство прямых, ортогональных к линиям тока.

Источник (сток)

Пусть $w = a \ln z$, где a - постоянное вещественное число. Вычислим интеграл по замкнутому контуру L от комплексно-сопряженной скорости

$$\oint_L \bar{v} dz = a \oint_L \frac{dz}{z}.$$

Если контур интегрирования L охватывает точку $z = 0$, то интеграл равен $2\pi i$ и, соответственно, $a = Q/2\pi$. Для такого течения $w = \frac{Q}{2\pi} \ln z$. При $Q > 0$ комплексный потенциал представляет собой источник, расположенный в начале координат, при $Q < 0$ - сток.

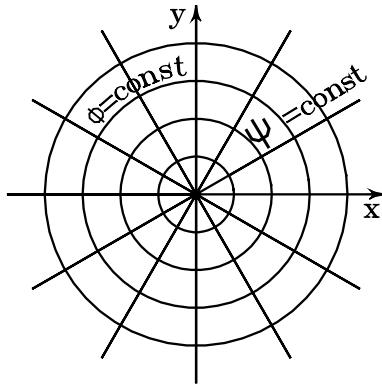


Рис. 2. Течение от источника

Чтобы определить потенциал скорости и функцию тока, представим z в показательной форме $z = re^{i\theta}$. Тогда $w = \frac{Q}{2\pi}(\ln r + i\theta)$. Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.4)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (2.5)$$

Из равенств (2.4), (2.5) следует, что уравнением линий тока будет $y/x = \text{const}$, представляющие собой прямые, проходящие через начало координат, а эквипотенциалей - $x^2 + y^2 = \text{const}$, представляющие собой окружности с центром в начале координат (рис.2).

Вычислим проекции скорости в полярных координатах:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0.$$

Скорость потока убывает обратно пропорционально расстоянию от центра источника (стока), в точке $z = 0$ скорость обращается в бесконечность (центр источника или стока является особой точкой).

Диполь

Пусть в точке A расположен источник обильности Q , а в точке B - источник обильности $-Q$, причем координаты точек

$z_A = \frac{l}{2}e^{i\alpha}$, $z_B = -\frac{l}{2}e^{i\alpha}$. Комплексный потенциал течения, вызываемого каждым из источников, имеет вид

$$w_A(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(z - \frac{l}{2}e^{i\alpha} \right), \quad w_B(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left(z + \frac{l}{2}e^{i\alpha} \right).$$

Комплексный потенциал совместного течения от источников будет

$$w(z) = w_A(z) + w_B(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(\frac{z - \frac{l}{2}e^{i\alpha}}{z + \frac{l}{2}e^{i\alpha}} \right).$$

Разлагая логарифмы в ряды по $\frac{l}{z}$ при $|z| \gg l$, получим

$$w(z) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{l}{z} e^{i\alpha} + \dots$$

Пусть $l \rightarrow 0$, а обильность $Q \rightarrow \infty$, причем так, чтобы произведение $Ql = M = \text{const}$. Тогда комплексный потенциал

$$w(z) = -\frac{M}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{z} \quad (2.6)$$

описывает течение от расположенного в начале координат диполя с моментом M и осью диполя, образующей угол α с осью x .

Рассмотрим картину течения от диполя при $\alpha = 0$, тогда

$$w(z) = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad \phi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \psi = \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Линиями тока будут линии, на которых $x^2 + (y - c)^2 = c^2$, т.е. окружности, проходящие через начало координат, центры кото-

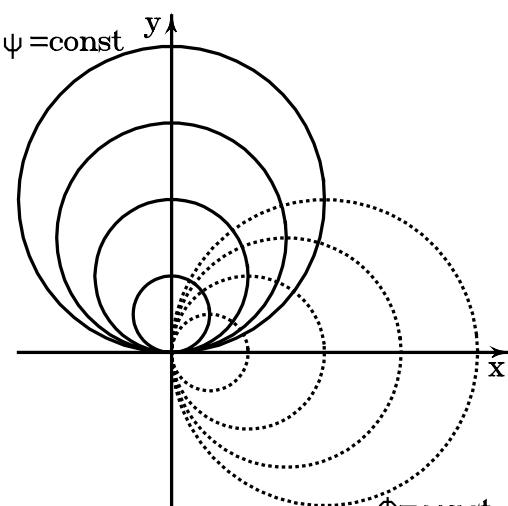


Рис. 3. Течение от диполя

рых лежат на оси y .

Эквипотенциали – окружности, проходящие через начало координат с центрами на оси x (рис. 3).

Вихрь

Пусть теперь $w = ia \ln z$, где a – постоянное вещественное число. Вычислим интеграл по замкнутому контуру L от комплексно-сопряженной скорости

$$\oint_L \bar{v} dz = ia \oint_L \frac{dz}{z}.$$

Если контур интегрирования L охватывает точку $z = 0$, то интеграл равен $2\pi i$ и, соответственно, $a = -\Gamma / 2\pi$. Для такого течения $w = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$ и описывает течение с циркуляцией Γ . Для любого контура, охватывающего начало координат, циркуляция равна одной и той же величине. Аналогично предыдущему примеру находим $w = -\frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta)$. Разделяя действительную и мнимую части, получим

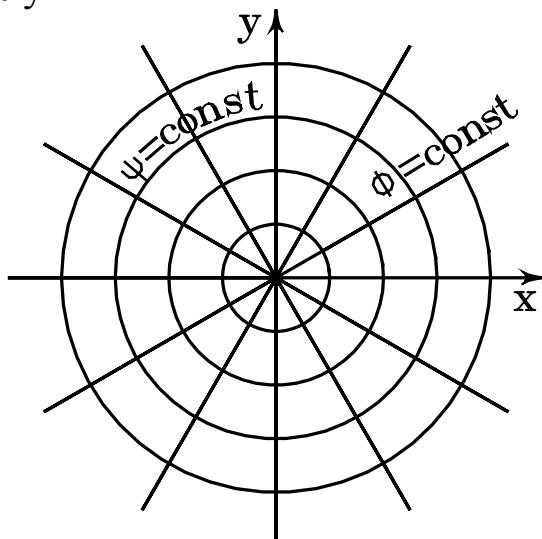


Рис. 4. Течение от вихря

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (2.7)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.8)$$

Из равенств (2.7), (2.8) следует, что линиями тока будут концентрические окружности с центром в начале координат, а экви-потенциалами – прямые, выходящие из центра координат (рис.4).

Вычислим проекции скорости в полярных координатах:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

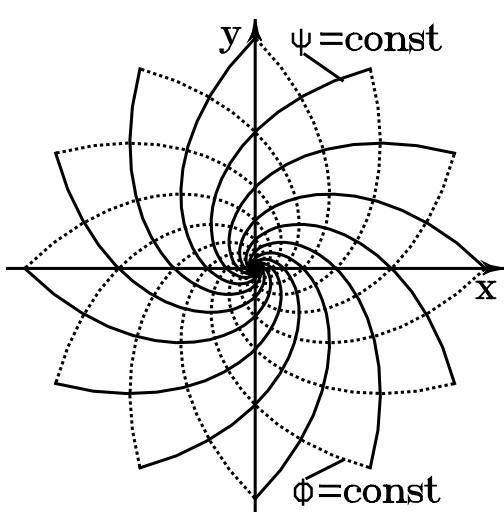


Рис. 5. Течение от вихреисточника

Скорость потока направлена по касательной к окружности и убывает обратно пропорционально расстоянию от центра, точка $z = 0$ – особая точка течения.

17.5. Вихреисточник

Рассмотрим течение, вызываемое присутствием в начале координат источника и вихря:

$$w_1(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z, \quad w_2(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z,$$

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (2.9)$$

Течение, описываемое комплексным потенциалом (2.9), называется течением от вихреисточника. Найдем линии тока этого течения.

$$w = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta),$$

$$\phi = \frac{1}{2\pi} (Q \ln r + \Gamma \theta), \quad \psi = \frac{1}{2\pi} (Q\theta - \Gamma \ln r).$$

Линии тока $Q\theta - \Gamma \ln r = const$ представляют собой логарифмические спирали, эквипотенциали – тоже логарифмические спирали, ортогональные линиям тока (рис. 5).

§18. Потенциальное обтекание кругового контура потоком идеальной несжимаемой жидкости

Пусть круговой контур радиуса R движется со скоростью U в потоке жидкости, имеющем на бесконечности заданную скорость V . Данное течение описывается комплексным потенциалом $w(z)$, комплексно-сопряженная скорость которого определена во всех точках плоскости вне круга радиуса R . $\bar{v}(z)$ однозначна и ограничена, а значит, может быть разложена в ряд Лорана по отрицательным степеням z :

$$\bar{v}(z) = c_0 + \frac{c}{z} + \frac{c_1'}{z^2} + \frac{c_2'}{z^3} + \dots$$

Так как, при $z \rightarrow \infty$, $\bar{v}(z) = c_0 = V = V_x - iV_y$, то

$$\bar{v}(z) = V_x - iV_y + \frac{c}{z} + \frac{c_1'}{z^2} + \frac{c_2'}{z^3} + \dots \quad (2.10)$$

Проинтегрировав (2.10) по z , получим функцию комплексного потенциала, учитывающую условие на бесконечности

$$w(z) = (V_x - iV_y)z + c \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \quad (2.11)$$

Границное условие на поверхности кругового контура в полярных координатах (r, θ) запишется в следующем виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = U_x \cos \theta + U_y \sin \theta. \quad (2.12)$$

Для того чтобы найти постоянные в (2.11), запишем $w(z)$ в полярных координатах, выделим вещественную часть $\phi = \operatorname{Re} w$ и, продифференцировав по r , подставим в (2.12). Искомые постоянные могут быть комплексными, поэтому положим

$$c = A + iB, \quad c_n = A_n + iB_n, \quad z = re^{i\theta}.$$

Подставив эти выражения в (2.11), получим

$$\begin{aligned} w(z) = & \left(V_x - iV_y \right) r (\cos \theta + i \sin \theta) + (A + iB) (\ln r + i\theta) + \\ & + (A_1 + iB_1) \frac{1}{r} (\cos \theta + i \sin \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n + iB_n) \frac{1}{r^n} (\cos n\theta + i \sin n\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi = & \left(V_x r + \frac{A_1}{r} \right) \cos \theta + \left(V_y r + \frac{B_1}{r} \right) \sin \theta + A \ln r - B\theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^n} \cos n\theta + \frac{B_n}{r^n} \sin n\theta \right). \end{aligned}$$

Продифференцировав ϕ по r и подставив в (2.12), получим уравнение для определения постоянных

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = & \left(V_x - \frac{A_1}{R^2} \right) \cos \theta + \left(V_y - \frac{B_1}{R^2} \right) \sin \theta + \frac{A}{R} - \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{R^{n+1}} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = U_x \cos \theta + U_y \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Справа и слева в (2.13) стоят ряды Фурье. Сравнивая соответствующие коэффициенты, получим

$$A = 0, \quad A_1 = (V_x - U_x) R^2, \quad B_1 = (V_y - U_y) R^2, \quad A_k = B_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Коэффициент B остался неопределенным. Введем для него обозначение через новую постоянную Γ . Положим $B = -\frac{\Gamma}{2\pi}$.

После подстановки найденных констант, получим выражение для функции комплексного потенциала

$$w(z) = (V_x - iV_y)z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \frac{(V_x - U_x)R^2 + (V_y - U_y)R^2}{z}$$

или $w(z) = \bar{V}z + \frac{(V-U)R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (2.14)$

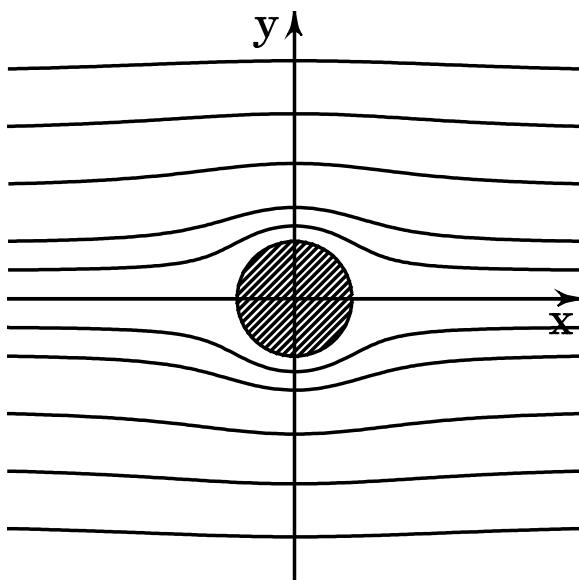


Рис. 6. Обтекание цилиндра

стных случаев.

- 1) Пусть цилиндр неподвижен ($U = 0$) и скорость потока на бесконечности равна нулю ($V = 0$), то из (2.14) получаем чисто циркуляционное обтекание кругового контура

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

- 2) Цилиндр движется в жидкости, покоящейся на бесконечности ($V = 0$)

$$w(z) = -\frac{UR^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Выражение (2.14) – общий вид комплексного потенциала обтекания кругового цилиндра, представляющего собой сумму трех слагаемых. Первое слагаемое – комплексный потенциал поступательного потока, второе – комплексный потенциал течения от диполя, третье – комплексный потенциал течения от вихря. Постоянная Γ входит в решение как параметр.

Рассмотрим несколько частных случаев.

3) Пусть обтекается неподвижный цилиндр ($U = 0$). Тогда

$$w(z) = \bar{V}z + \frac{VR^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Предположим дополнительно, что поток на бесконечности направлен вдоль оси x ($V_y = 0$), тогда

$$w(z) = V \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Рассмотрим два случая: бесциркуляционное и циркуляционное обтекания.

A. Если $\Gamma = 0$, то

$$w(z) = V \left(z + \frac{R^2}{z} \right), \quad \phi = Vx \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right), \quad \psi = Vy \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Линиями тока являются линии, на которых

$$y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = \text{const}. \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) представляет собой кривые третьего порядка, симметричные относительно оси y . Линии $\psi = c$ и $\psi = -c$ симметричны относительно оси x . При $\psi = 0$ уравнение линии тока распадается на два множителя: $y = 0$ - ось x и $x^2 + y^2 = R^2$ - окружность (рис.6).

Найдем компоненты вектора скорости. Перейдем к полярным координатам (r, θ) . Тогда

$$\begin{aligned} \phi &= Vr \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right), \quad v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = V \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -V \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

На поверхности кругового контура $r = R$, $v_r = 0$, $v_\theta = -2V \sin \theta$. В точках цилиндра $\theta_A = \pi, \theta_B = 0$ скорость равна нулю, то есть точки A и B - критические.

В. Обтекание цилиндра потоком с циркуляцией.

$$\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz} = V \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}. \quad (2.16)$$

Найдем критические точки потока, то есть точки, для которых $v_x = v_y = 0$. Приравнивая (2.16) к нулю, получим квадратное

$$\text{уравнение: } Vz^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - VR^2 = 0.$$

Решением его будут точки

$$z_{1,2} = \frac{1}{2V} \left(-\frac{\Gamma}{2\pi i} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma}{4\pi} + 4V^2 R^2} \right).$$

В зависимости от знака подкоренного выражения возможны три случая:

а) $-\frac{\Gamma}{4\pi} + 4V^2 R^2 > 0$ - критические точки расположены на обтекаемом цилиндре симметрично относительно оси y ,

$\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2, \operatorname{Re} z_1 = -\operatorname{Re} z_2$.

б) $-\frac{\Gamma}{4\pi} + 4V^2 R^2 = 0$ - две критические точки сливаются в од-

ну, расположенную на мнимой оси $|z_{1,2}| = R$, $z_1 = z_2 = \frac{\Gamma}{4\pi V} i$.

в) $-\frac{\Gamma}{4\pi} + 4V^2 R^2 < 0$ - оба корня уравнения мнимые, причем

$|z_1| < R$, $|z_2| > R$, то есть в области течения имеется одна критическая точка на мнимой оси вне цилиндра.

Картины течений для рассмотренных случаев при $\Gamma > 0$ приведены на рис. 7. Линии тока симметричны относительно оси y , следовательно, давления в точках цилиндра, симметричных относительно оси y , одинаковы по величине, а это значит, что сила в направлении оси x равна нулю. Этот факт носит название парадокса Даламбера.

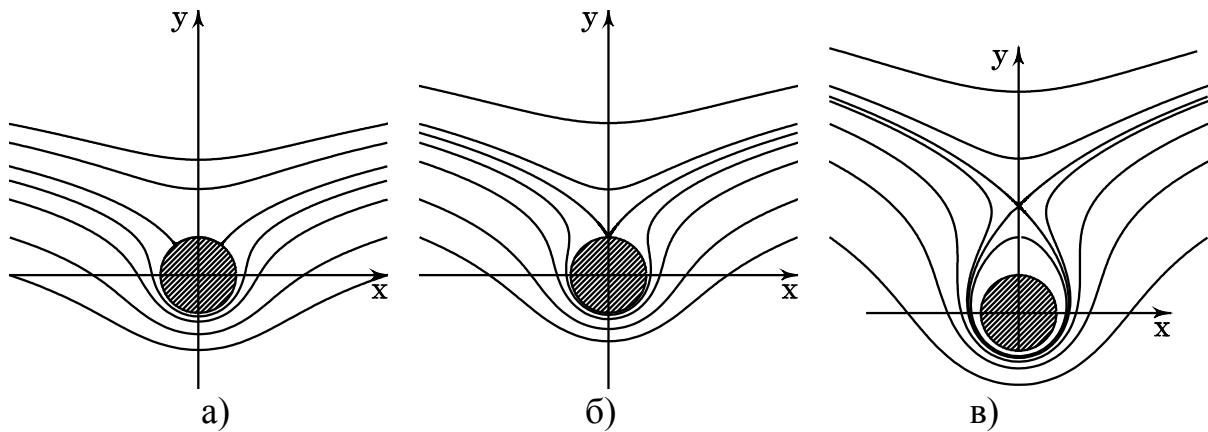


Рис. 7. Обтекание цилиндра с циркуляцией

§19. Метод конформных отображений

Рассмотрим решение об обтекании контура произвольной формы (рис. 8). Плоскость, в которой расположен контур l , обозначим через $z = x + iy$. Одновременно с плоскостью z рассмотрим плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ и в ней круг радиуса R . Область вне контура l в плоскости z обозначим через D , а область плоскости ζ вне окружности l' обозначим через D' .

По теореме Римана о конформном отображении существует аналитическая функция $z = f(\zeta)$, преобразующая область D' в D , причем контур l' переходит в l . Если выполняются дополнительные условия:

- 1) бесконечно удаленная точка $\zeta = \infty$ переходит при отображении в бесконечно удаленную точку $z = \infty$;
- 2) направление вектора скорости на бесконечности, при переходе из плоскости ζ в плоскость z сохраняется;

то отображение будет единственным и существует обратное отображение $\zeta = F(z)$. Причем для функции $f(\zeta)$ в бесконечно уда-

ленной точке $\zeta = \infty$ производная $\frac{dz}{d\zeta} = k > 0$, где k - вещественное число.

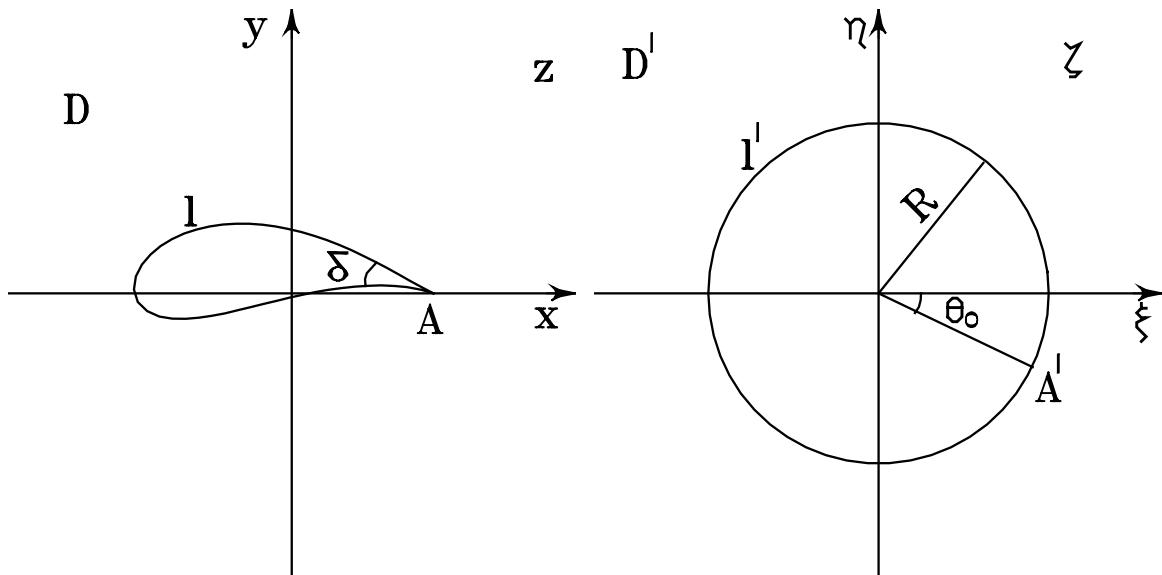


Рис. 8. Обтекание профиля

Пусть $w(z)$ - искомый комплексный потенциал течения в плоскости z , а $W(\zeta)$ - комплексный потенциал течения во вспомогательной плоскости ζ . Между $w(z)$ и $W(\zeta)$ имеется следующая связь

$$w(z) = w(f(\zeta)) = W(\zeta).$$

Найдем комплексно-сопряженную скорость на бесконечности в плоскости ζ

$$\vec{v}(\zeta) \Big|_{\zeta=\infty} = \frac{dW}{d\zeta} \Bigg|_{\zeta=\infty} = \frac{dw}{dz} \Bigg|_{z=\infty} \frac{dz}{d\zeta} \Bigg|_{\zeta=\infty} = k\vec{v}(\infty) = k\vec{v}_\infty.$$

Функция $W(\zeta)$ определяет в плоскости ζ течение вне круга, причем скорость на бесконечности равна $k\vec{v}_\infty$. Комплексный потенциал обтекания кругового контура известен

$$W(\zeta) = k\bar{v}_\infty \zeta + \frac{k v_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta.$$

Заменяя ζ на $F(z)$, получим

$$w(z) = k\bar{v}_\infty F(z) + \frac{k v_\infty R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln F(z). \quad (2.17)$$

Таким образом, если известно решение геометрической задачи о конформном отображении области D на D' , то есть известна функция $\zeta = F(z)$, то (2.17) дает решение задачи. Циркуляция скорости в выражении (2.17) по-прежнему остается неопределенной.

§20. Постулат Жуковского-Чаплыгина

Пусть в плоскости z имеется профиль с одной угловой точкой, причем угол $\delta < \pi$ (рис. 8). Пусть функция $z = f(\zeta)$ отображает область вне круга радиуса R вспомогательной плоскости ζ на внешность профиля. Угловую точку профиля обозначим через A . В плоскости ζ ей будет соответствовать точка A' , лежащая на границе круга. Функция $z = f(\zeta)$ преобразует угол π в точке A' в угол $2\pi - \delta$ в точке A . Поэтому в окрестности точки A конформность отображения нарушается, и $z(\zeta)$ должна иметь разложение вида

$$z - z_A = M (\zeta - \zeta_{A'})^{\frac{2\pi - \delta}{\pi}} + \dots$$

Отсюда

$$\left. \frac{dz}{d\zeta} \right|_{A'} = \frac{2\pi - \delta}{\pi} M (\zeta - \zeta_{A'})^{\frac{\pi - \delta}{\pi}} \Bigg|_{\zeta = \zeta_{A'}} = 0. \quad (2.18)$$

Комплексно-сопряженная скорость в точке A может быть представлена в виде

$$\bar{v}_A = \frac{dw(z)}{dz} \Big|_A = \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{A'} \frac{d\zeta}{dz} \Big|_A = \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{A'} \frac{1}{\frac{d\zeta}{dz} \Big|_{A'}}.$$

Учитывая (2.18), $\bar{v}_A = \infty$, если $\frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{A'} \neq 0$, что физически недопустимо.

По постулату Жуковского-Чаплыгина скорость v_A должна быть конечна, что равносильно тому, что A' является критической точкой в потоке, обтекающем цилиндр во вспомогательной плоскости.

Постулат Жуковского-Чаплыгина позволяет определить значение циркуляции Γ .

Комплексный потенциал во вспомогательной плоскости имеет вид

$$W(\zeta) = k\bar{v}_\infty \zeta + \frac{k v_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta.$$

Комплексная скорость

$$\frac{dW}{d\zeta} = k\bar{v}_\infty - \frac{k v_\infty R^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta}.$$

Скорость в точке $\zeta = \zeta_{A'}$ равна

$$\frac{dW}{d\zeta} \Big|_{A'} = k\bar{v}_\infty - \frac{k v_\infty R^2}{\zeta_{A'}^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta_{A'}} = 0.$$

Из последнего равенства

$$\Gamma = 2\pi i k \left(\frac{v_\infty R^2}{\zeta_{A'}} - \bar{v}_\infty \zeta_{A'} \right). \quad (2.19)$$

Пусть поток, набегающий на профиль, наклонен под углом α к оси x , то есть

$$v_\infty = |v_\infty| e^{i\alpha}, \bar{v}_\infty = |v_\infty| e^{-i\alpha}. \quad (2.20)$$

Полагая $\zeta_{A'} = \operatorname{Re}^{i\theta_0}$, из (2.19) с учетом (2.20) получим

$$\Gamma = 4\pi kR |v_\infty| \sin(\theta_0 - \alpha).$$

Угол $(\theta_0 - \alpha)$ называется углом атаки, θ_0 - угол, определяющий положение точки A' на окружности радиуса R во вспомогательной плоскости. Циркуляция обращается в нуль, когда $(\theta_0 - \alpha) = 0$.

§21. Формулы Чаплыгина для вычисления главного вектора и момента сил

Определим динамическое воздействие потока на находящийся в нем профиль.

Главный вектор сил, действующих на профиль, равен

$$\vec{F} = -\oint_l p \vec{n} dl$$

или в проекциях на оси координат

$$F_x = -\oint_l p \cos(n, x) dl = -\oint_l p dy, \quad F_y = -\oint_l p \cos(n, y) dl = \oint_l p dx.$$

Образуем величину $\bar{R} = F_x - iF_y$:

$$\bar{R} = -\oint_l p dy - i \oint_l p dx = -i \oint_l p (dx - idy) = -i \oint_l p d\bar{z}. \quad (2.21)$$

Вдоль контура l справедлив интеграл Бернулли

$$p = \rho C - \rho \frac{v^2}{2}. \quad (2.22)$$

Подставляя (2.21) в (2.22), получим

$$\bar{R} = -i \oint_l \rho C d\bar{z} + i \oint_l \rho \frac{v^2}{2} d\bar{z} = i \frac{\rho}{2} \oint_l v^2 d\bar{z}. \quad (2.23)$$

Пусть θ - угол между касательной к контуру l и осью x , тогда

$$dz = e^{i\theta} dl, \quad d\bar{z} = e^{-i\theta} dl, \quad d\bar{z} = e^{-2i\theta} dz,$$

$$ve^{-i\theta} = v \cos \theta - iv \sin \theta = v_x - iv_y = \bar{v}. \quad (2.24)$$

После подстановки (2.23) в (2.24), получаем

$$\bar{R} = i \frac{\rho}{2} \oint_l v^2 d\bar{z} = i \frac{\rho}{2} \oint_l v^2 e^{-2i\theta} dz = i \frac{\rho}{2} \oint_l \bar{v}^2 dz. \quad (2.25)$$

Формула (2.25) носит название формулы Чаплыгина для вычисления главного вектора сил. Так как $\bar{v} = \frac{dw}{dz}$, то (2.25) можно записать в следующем виде

$$\bar{R} = i \frac{\rho}{2} \oint_l \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Момент сил, действующих на профиль, относительно начала координат выражается следующей формулой

$$L = \oint_l p(xdx + ydy).$$

Используя интеграл Бернулли, получим

$$L = C\rho \oint_l (xdx + ydy) - \frac{\rho}{2} \oint_l v^2 (xdx + ydy) = -\frac{\rho}{2} \oint_l v^2 (xdx + ydy).$$

Учитывая, что $xdx + ydy = \operatorname{Re}(z d\bar{z})$, имеем

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\rho}{2} \oint_l v^2 \operatorname{Re}(z d\bar{z}) = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \oint_l v^2 z d\bar{z} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \oint_l v^2 e^{-2i\theta} z dz \right) = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \oint_l \bar{v}^2 z dz \right) = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \oint_l \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Формула (2.26) носит название формулы Чаплыгина для вычисления главного момента сил относительно начала координат.

§22. Теорема Жуковского

Комплексно-сопряженная скорость вне контура l может быть разложена в ряд Лорана по неположительным степеням z

$$\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (2.27)$$

Полагая $z = \infty$, находим $A_0 = \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=\infty} = \bar{v}_\infty$.

Вычислим интеграл по контуру l от ряда Лорана (2.27). По теореме о вычетах получим

$$\oint_l \frac{dw}{dz} dz = 2\pi i A_1.$$

С другой стороны, интеграл по замкнутому контуру от комплексно-сопряженной скорости равен

$$\oint_l \frac{dw}{dz} dz = \Gamma + iQ.$$

Так как профиль непроницаем и в потоке отсутствуют источники, то $Q = 0$, а значит $A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}$ и

$$\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz} = \bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

$$\bar{v}^2(z) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = \bar{v}_\infty^2 + 2\bar{v}_\infty \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \left(2A_2 \bar{v}_\infty - \frac{\Gamma^2}{4\pi} \right) \frac{1}{z^2} + \dots$$

По теореме о вычетах $\oint_l \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = 2\bar{v}_\infty \Gamma$, а следовательно

$$\bar{R} = i\rho \bar{v}_\infty \Gamma \text{ или } R = i\rho v_\infty \Gamma. \quad (2.28)$$

Последнее равенство и определяет теорему Жуковского: главный вектор сил давлений, действующих на профиль, численно равен произведению плотности и абсолютных величин скорости и циркуляции и имеет направление, получаемое путем поворота вектора скорости v_∞ на угол $\pi/2$ в сторону, противоположную циркуляции.

Из (2.28) следует, что $R_x = 0$ - парадокс Даламбера в случае идеальной жидкости.

В практике принято вычислять коэффициенты

$$C_x = \frac{2R_x}{\rho v_\infty^2 S} \text{ и } C_y = \frac{2R_y}{\rho v_\infty^2 S},$$

где S - площадь характерного сечения обтекаемого объекта.

§23. Профиль Жуковского. Обтекание профиля Жуковского

Известно, что функция Жуковского отображает внешность круга единичного радиуса в плоскости ζ на внешность отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси плоскости z и имеет вид:

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (2.29)$$

Взяв производную $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)$, видим, что $\zeta = \pm 1$ являются особыми точками конформного отображения, так как производная в этих точках равна нулю. Очевидно, что любая окружность, проходящая через обе особые точки, при отображении перейдет в некоторый разрез плоскости z с двумя угловыми точками, а окружности, не проходящие через особые точки, перейдут в гладкие кривые, не имеющие угловых точек. Крыловые профили Жуковского имеют одну особую точку и могут быть получены отображением окружности, проходящей лишь через одну особую точку плоскости ζ .

Рассмотрим несколько случаев.

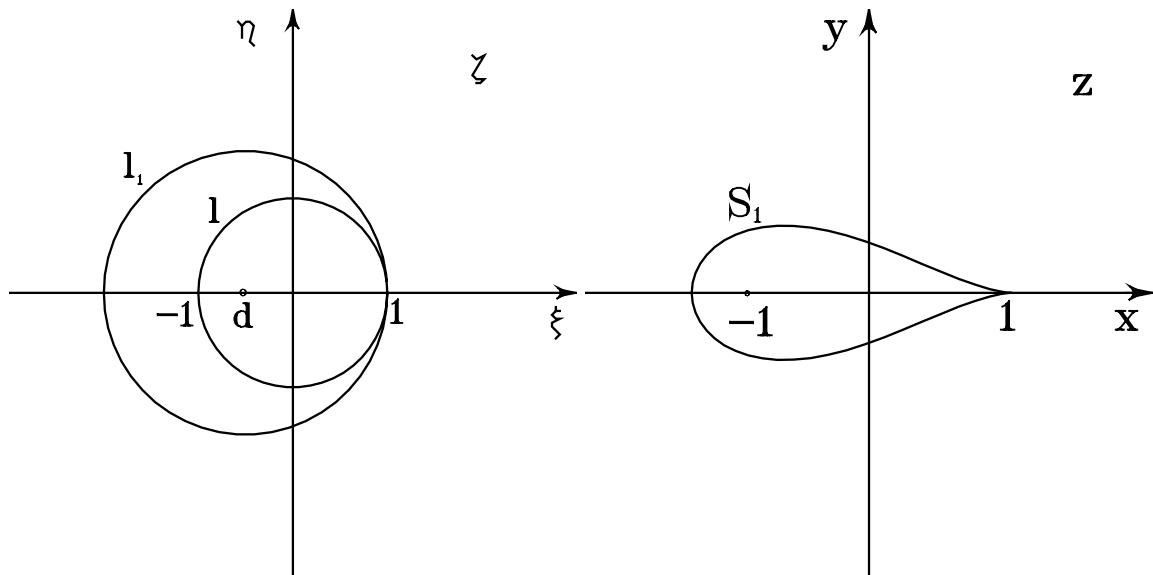


Рис. 9. Отображение профиля

Поместим центр окружности l_1 в точку $\zeta = d$, причем l_1 проходит через особую точку $\zeta = 1$ (рис. 9). При отображении (2.29) в плоскости z получим симметричный профиль S_1 , называемый рулём Жуковского. Разрез $z \in [-1, 1]$ служит скелетом руля Жуковского в том смысле, что при уменьшении d профиль S_1 будет стягиваться к этому разрезу.

Окружность l_1 получается из l растяжением l на радиус l_1 , равный $R = 1 + d$, и сдвигом на d по оси ξ влево. Следовательно, если принять $\zeta_1 = R\zeta - d$, то отображение

$$z = \frac{1}{2} \left(R\zeta - d + \frac{1}{R\zeta - d} \right).$$

будет переводить окружность радиуса R в плоскости ξ в симметричный профиль Жуковского в плоскости z .

Поместим теперь центр окружности l_2 в точку $\zeta = ih$, причем окружность l_2 проходит через обе особые точки $\zeta = \pm 1$ (рис. 10).

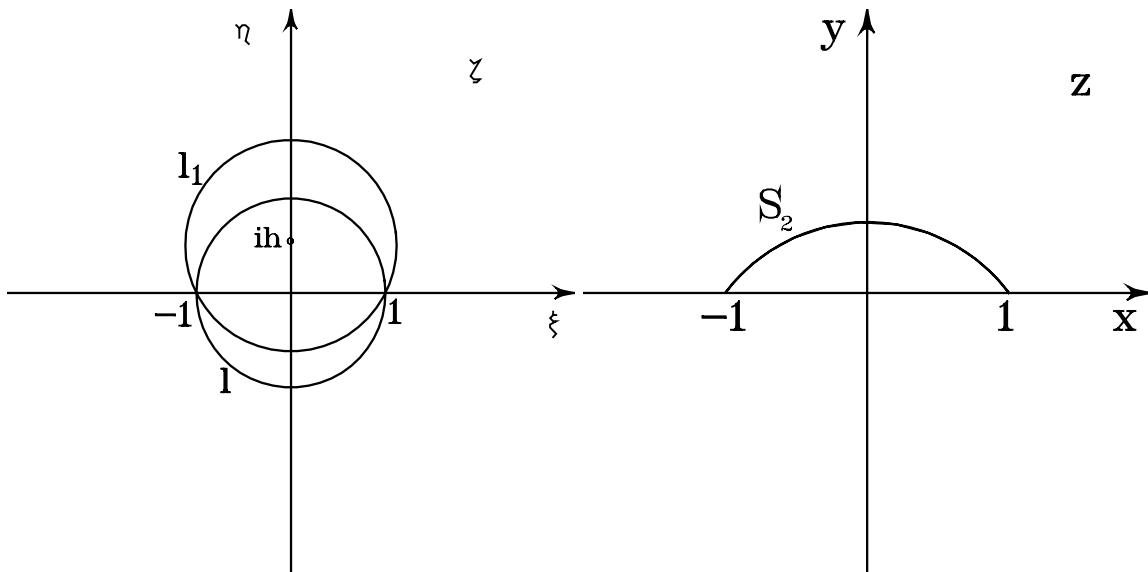


Рис. 10. Дополнительные преобразования

Окружность l_2 при отображении (2.29) перейдет в изогнутый разрез (дужку) плоскости z с концами $z = \pm 1$. Окружность l_2 получается из l растяжением l на радиус l_2 , равный $R = \sqrt{1 + h^2}$, поворотом ее на угол $(-\gamma)$ и смещением на h вверх по оси η . Если принять $\zeta_2 = R\zeta e^{-i\gamma} + ih$, то получим искомое отображение в виде

$$z = \frac{1}{2} \left(R\zeta e^{-i\gamma} + ih + \frac{1}{R\zeta e^{-i\gamma} + ih} \right).$$

Окружность l_3 с центром, не лежащим на координатных осях и проходящая через одну особую точку, отображается в изогнутый профиль Жуковского (рис. 11). Окружность l_3 получается из l_2 растяжением l_2 на радиус, равный $R_2 + d$, и сдвигом на d влево по оси ξ_2 , то есть $\zeta_3 = R\zeta_2 - d = (R\zeta - d)e^{-i\gamma} + ih$, где $R = \sqrt{1+h^2} + d$ и

$$z = \frac{1}{2} \left((R\zeta - d)e^{-i\gamma} + ih + \frac{1}{(R\zeta - d)e^{-i\gamma} + ih} \right). \quad (2.30)$$

Таким образом, профили Жуковского зависят от двух параметров - h и d , где h характеризует искривленность профиля, d - толщину. Если $h = 0$, то получается руль Жуковского, если $d = 0$, то - дужка.

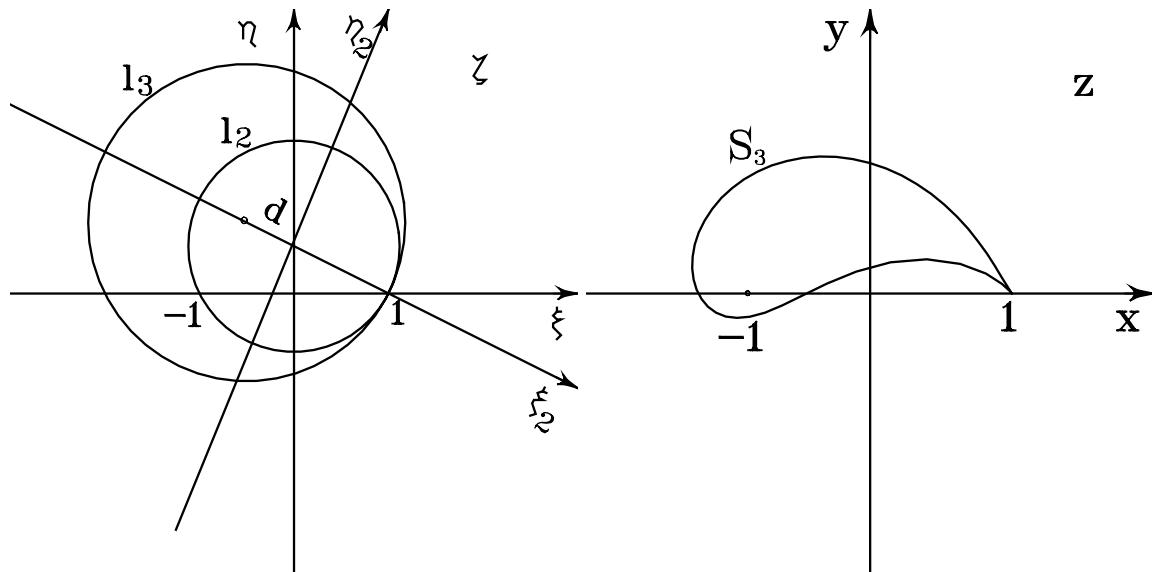


Рис. 11. К отображению изогнутых профилей

Для решения задачи об обтекании профиля Жуковского потоком жидкости со скоростью v_∞ , направленной под углом α к оси Ox , можно воспользоваться методом конформного отображения. Проведем в плоскости ζ оси ξ' и η' с началом координат в центре смещенной окружности, причем ξ' и η' параллельны ξ и η . Функции ζ и ζ' связаны соотношением $\zeta = hi - de^{-\gamma i} + \zeta'$.

Комплексный потенциал обтекания круглого цилиндра радиуса R с центром в начале координат в плоскости ζ' имеет вид

$$W(\zeta') = k\bar{v}_\infty \zeta' + \frac{k v_\infty R^2}{\zeta'} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta', \quad v_\infty = |v_\infty| e^{i\alpha}. \quad (2.31)$$

Для того, чтобы найти функцию комплексного потенциала $w(z)$ обтекания профиля Жуковского, нужно:

1) выразить ζ' через z ;

2) найти $k = \left. \frac{dz}{d\zeta'} \right|_\infty$;

3) определить циркуляцию Γ при помощи постулата Жуковского-Чаплыгина.

Из $z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$ получаем: $\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1}$. Тогда

$$\zeta' = z + \sqrt{z^2 - 1} - (hi - de^{-i\gamma}), \quad (2.32)$$

$$k = \left. \frac{dz}{d\zeta'} \right|_\infty = \left. \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\left(\zeta' - (hi - de^{-i\gamma}) \right)^2} \right) \right) \right|_\infty = \frac{1}{2}. \quad (2.33)$$

Для циркуляции Γ была получена формула

$$\Gamma = 4\pi kR |v_\infty| \sin(-\gamma - \alpha) = -2\pi R |v_\infty| \sin(\gamma + \alpha). \quad (2.34)$$

Подставляя (2.32)-(2.34) в (2.31), получим окончательный вид комплексного потенциала обтекания профиля Жуковского

$$w(z) = \frac{|v_\infty|}{2} e^{-i\alpha} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} - (hi - de^{-i\gamma}) \right) +$$

$$+\frac{|v_\infty|}{2}e^{i\alpha}\frac{\left(\sqrt{1+h^2}+d\right)^2}{\left(z+\sqrt{z^2-1}-\left(hi-de^{-i\gamma}\right)\right)}+ \\ +i\left(\sqrt{1+h^2}+d\right)|v_\infty|\sin(\gamma+\alpha)\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}-\left(hi-de^{-i\gamma}\right)\right). \quad (2.35)$$

Для использования полученных результатов в дальнейшем для тестирования численных алгоритмов удобнее переписать (2.30) и (2.35) в параметрическом виде. Перейдем в (2.30) к полярным координатам (r, t) .

$$\zeta = re^{it} = e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad \zeta' = R \cdot e^{-i\gamma} e^{it}, \\ (R \cdot e^{it} - d)e^{-i\gamma} + ih = R \cdot e^{i(t-\gamma)} - de^{-i\gamma} + ih = c + ib,$$

где

$$c = R \cos(t - \gamma) - d \cos \gamma, \quad b = R \sin(t - \gamma) + d \sin \gamma + h.$$

Окончательно

$$x(t) = \frac{c(c^2 + b^2 + 1)}{2(c^2 + b^2)}, \quad y(t) = \frac{c(c^2 + b^2 - 1)}{2(c^2 + b^2)}. \quad (2.36)$$

Изменяя параметр t от 0 до 2π , в плоскости z получаем профиль Жуковского.

Перепишем (2.31) в следующем виде

$$W(\zeta') = \frac{|v_\infty|e^{-i\alpha}}{2}\zeta' + \frac{|v_\infty|e^{i\alpha}R^2}{\zeta'} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta'$$

и найдем $W(t)$:

$$W(t) = \frac{|v_\infty|R}{2} \left(e^{i(t-\alpha-\gamma)} + e^{-i(t-\alpha-\gamma)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} (\ln R + i(t - \gamma)), \quad (2.37)$$

$$\phi(t) = |v_\infty|R \cos(t - \alpha - \gamma) + \frac{\Gamma}{2\pi}(t - \gamma), \quad \psi(t) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R,$$

$$\frac{d\phi}{dt} = |v_\infty| R \sin(\alpha + \gamma - t) + \frac{\Gamma}{2\pi},$$

$$V_s(t) = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\phi}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{|v_\infty| R \sin(\alpha + \gamma - t) + \frac{\Gamma}{2\pi}}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \quad (2.38)$$

$$V_n(t) = -\frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{ds} = 0.$$

§24. Задача об обтекании эллипса вблизи твердой стенки

Рассмотрим два комплексных потенциала:

$$w_1(z) = V \left(z - ih + \frac{R^2}{z - ih} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - ih), \quad (2.39)$$

$$w_2(z) = V \left(z + ih + \frac{R^2}{z + ih} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + ih). \quad (2.40)$$

Каждый из комплексных потенциалов описывает циркуляционное обтекание цилиндра, причем формула (2.39) соответствует обтеканию цилиндра радиуса R с центром в точке $z = ih$ с циркуляцией Γ , а формула (2.40) - с центром в точке $z = -ih$ с циркуляцией $-\Gamma$ и радиусом R (рис. 12).

Рассмотрим комплексный потенциал

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z),$$

$$w(z) = V \left(2z + \frac{R^2}{z - ih} + \frac{R^2}{z + ih} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} (\ln(z - ih) - \ln(z + ih)). \quad (2.41)$$

Данный комплексный потенциал соответствует обтеканию эллипса вблизи твердой стенки, положение которого и оси подлежат дальнейшему определению.

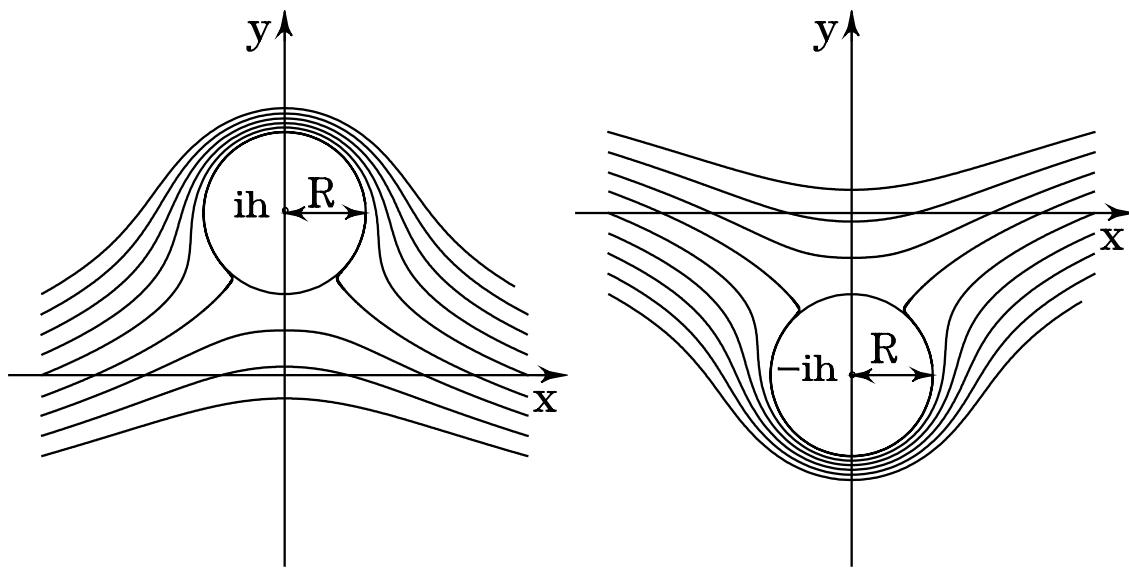


Рис. 12. К обтеканию цилиндра у стенки

Найдем критические точки потока, то есть точки в которых $\bar{v}(z) = 0$:

$$\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz} = V \left(2 - \frac{R^2}{(z-ih)^2} - \frac{R^2}{(z+ih)^2} \right) + \frac{\Gamma h}{2\pi i} \frac{1}{(z-ih)(z+ih)}. \quad (2.42)$$

Приравнивая (2.42) к нулю, получим следующее уравнение
 $2V(z-ih)^2(z+ih)^2 - VR^2((z-ih)^2 + (z+ih)^2) + \frac{\Gamma h}{\pi}(z-ih)(z+ih) = 0$
или $(z^2 + h^2)^2 + \left(\frac{\Gamma h}{2V\pi} - R^2\right)(z^2 + h^2) + 2R^2h^2 = 0$.

Обозначив $a = (z^2 + h^2)$, $C_1 = \left(\frac{\Gamma h}{2V\pi} - R^2\right)$, $C_2 = 2R^2h^2$, получим квадратное уравнение $a^2 + C_1a + C_2 = 0$. Решением его будут точки $a_{1,2} = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_2}}{2}$. После замены переменной получаем решение исходного уравнения

$$z_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_2}}{2} - h^2}. \quad (2.43)$$

Критические точки расположены симметрично относительно оси y , две из них лежат в верхней полуплоскости, две в нижней $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2, \operatorname{Re} z_1 = -\operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_3 = \operatorname{Im} z_4, \operatorname{Re} z_3 = -\operatorname{Re} z_4$ (рис. 13).

Найдем уравнение линий тока $\psi(x, y) = C$. Выделим мнимую часть функции комплексного потенциала

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = V \left(2y - \frac{R^2(y-h)}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{R^2(y+h)}{x^2 + (y+h)^2} \right) - \\ - \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\ln(x^2 + (y-h)^2) - \ln(x^2 + (y+h)^2) \right). \end{aligned}$$

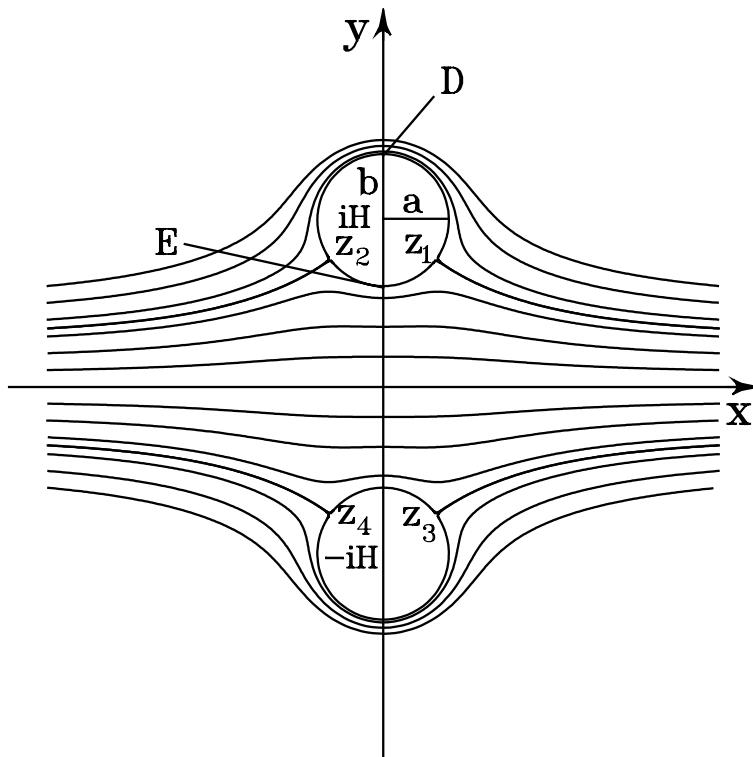


Рис. 13. Обтекание цилиндра возле твердой стенки

Заметим, что при $y=0$ функция тока $\psi(x, y)=0$, то есть $y=0$ - линия тока и может быть интерпретирована как твердая стенка.

Пусть точка z_1 - критическая точка, определенная выше (2.43) и имеющая координаты (x_0, y_0) . Подставив координаты точки z_1 в уравнение линий тока, найдем константу $C = \psi(x_0, y_0)$, соответствующую линии тока, описывающей обтекаемое тело. Подставив $x = 0$ в уравнение для этой линии тока, найдем еще две точки D, E , принадлежащие обтекаемому телу.

$$\begin{aligned}\psi(0, y) = & V \left(2y - \frac{R^2}{(y-h)} - \frac{R^2}{(y+h)} \right) - \\ & - \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln(y-h) - \ln(y+h)) - C = 0.\end{aligned}\quad (2.44)$$

Пусть координаты точек D, E - $(0, y_1)$ и $(0, y_2)$, соответственно.

Уравнение эллипса может быть записано в следующем виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-H)^2}{b^2} = 1. \quad (2.45)$$

Для определения уравнения эллипса необходимо найти его оси a и b , расстояние H его центра от действительной оси Ox .

$$H = |y_1 + y_2|/2, b = |y_1 - y_2|/2. \quad (2.46)$$

После того, как H и b найдены, a можно определить по формуле

$$a = \frac{|bx_0|}{\sqrt{b^2 - (y_0 - H)^2}}, \quad (2.47)$$

где (x_0, y_0) - координаты точки z_1 .

Таким образом, в результате сложения двух комплексных потенциалов вида (2.39), (2.40) получили комплексный потенциал (2.41) циркуляционного обтекания эллипса (2.45) вблизи стенки. Циркуляция скорости вычисляется по формуле (2.2) и равна Γ .

Данный результат можно использовать для тестирования численных алгоритмов для расчетов задач циркуляционного обтекания.

Основная трудность заключается в решении уравнения (2.44) для определения координат точек D, E . В аналитическом виде решения этого уравнения получить не удалось, поэтому для его решения были применены численные методы. Метод Ньютона [19, 84] для решения нелинейного уравнения (2.44) дает удовлетворительные результаты, если в качестве начальных приближений принимать $h + R$ и $h - R$, соответственно.

Приведем пример расчета.

- 1) Задаем следующие параметры: h, R, Γ .
- 2) По (2.43) находим (x_0, y_0) координаты точки z_1 .
- 3) Определяем константу C из уравнения $C = \psi(x_0, y_0)$.
- 4) Решая методом Ньютона уравнение (2.44), находим координаты точек D, E - $(0, y_1)$ и $(0, y_2)$, соответственно.
- 5) Подставляя найденные значения x_0, y_0, y_1, y_2 в (2.46), (2.47), получим a, b и H .

В таблице 1 приведены расчетные данные для трех вариантов начальных данных. При численном решении уравнения (2.44) использовалась невязка $\varepsilon = 10^{-7}$. В таблице также приведены начальные приближения y_1^0, y_2^0 . Процесс уточнения y_1, y_2 сходился за 4-5 итераций.

Таблица 1

h	R	Γ	x_0	y_0	C	$y_1,$ y_1^0	$y_2,$ y_2^0	a	b	H
2	1	-10	0.627454	1.517284	1.13082	2.770309 3	1.199722 1	0.781124	0.785293	1.98501
1.01	1	-10	0.682796	0.427292	0.09896	1.827539 2.01	0.120364 0.01	0.889034	0.853587	0.97395
5	1	-1	0.707033	4.960042	9.47871	5.708199 6	4.291905 4	0.708164	0.708147	5.00005

Г л а в а 3.

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В предыдущей главе были рассмотрены простейшие примеры потенциальных течений с известными аналитическими решениями. На практике же возникают существенно более сложные задачи, которые аналитическими методами решить весьма проблематично, либо вообще невозможно. В этом случае на помощь приходят либо различные модификации численно-аналитических методов (эти направления нашли развитие в работах В.П. Житникова [40, 41], Е.Т.Коковина [48], Д.В. Маклакова [56-58]), либо численные методы [47, 99, 100, 104, 106, 123].

Стационарные и нестационарные задачи динамики несжимаемой жидкости со свободными границами традиционно считаются непростыми, поскольку к нелинейности уравнений гидродинамики добавляется дополнительная нелинейность, связанная с заранее неизвестной формой свободной границы, положение которой должно быть определено в ходе решения задачи.

В нелинейной постановке, при режимах движения наиболее интересных для исследований, наблюдаются нелинейные эффекты, связанные с весомостью: неединственность волновых движений, опрокидывание волн, разрушение волн на мелководье и т.д. Физические эксперименты для изучения этих явлений оказываются сложными и дорогостоящими, а быстрота протекания реальных процессов делает численные методы единственным источником информации о поле течения.

Волновое движение массы воды со свободной поверхностью в канале с неровным дном под действием силы тяжести является одним из наиболее интересных приложений нелинейной гидродинамики. Волны на свободной поверхности всегда были заманчивым предметом для исследования, так как они представляют собой хорошо всем известное, и вместе с тем достаточно сложное, явление, которое легко доступно наблюдению, но которое весьма непросто описать.

Опрокидывание волн представляет собой одно из наиболее удивительных явлений из всех видов движения волн и является наиболее трудной задачей для математического моделирования вследствие быстроты протекающих явлений и существенной нелинейности поведения волны в последние перед обрушением моменты времени.

Появление быстродействующих ЭВМ и создание вычислительных методов внесло новую струю в решение задач со свободными поверхностями. Среди множества методов, применяемых для решения задач гидродинамики со свободными границами, хорошо зарекомендовали себя методы конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ), методы граничных элементов (МГЭ) и комплексных граничных элементов (МКГЭ).

Метод конечных элементов, как и метод конечных разностей, требует для решения задачи разбиения всей области течения, в то время как методы на основе граничных интегральных уравнений - только границы рассматриваемой области. Вместе с тем, если возникает необходимость отыскания решения в любой внутренней точке, то это можно сделать, используя известные значения функций на границе области. В результате использования методов на основе граничных интегральных уравнений размерность расчетной области понижается на единицу.

Полный обзор по технологии использования методов граничных элементов можно найти в монографиях [21, 24, 36, 96].

§25. Постановка плоской нестационарной задачи со свободной границей

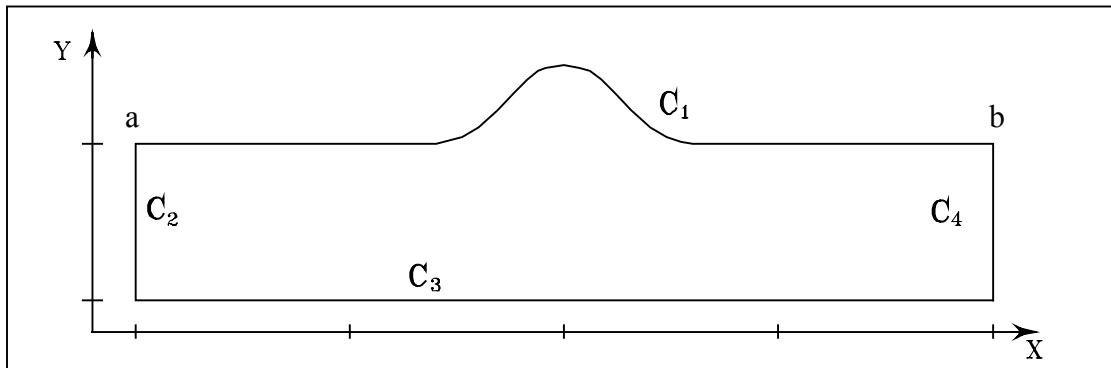


Рис. 14. К постановке нестационарной задачи

Пусть в расчетной области течения D , ограниченной свободной поверхностью C_1 и твердыми стенками C_2 , C_3 , C_4 (рис.14), решается уравнение Лапласа для функции комплексного потенциала:

$$\Delta w(z, t) = 0, \quad z = z(x, y) \in D. \quad (3.1)$$

На твердых границах выполняется условие непротекания:

$$\psi = 0, \quad z \in C_2, C_3, C_4. \quad (3.2)$$

На свободной поверхности выполняются кинематическое и динамическое условия:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad z \in C_1, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gy = 0, \quad z \in C_1, \quad (3.4)$$

где g - ускорение свободного падения под действием силы тяжести. Кроме того, необходимо задать начальное положение свободной границы C_1^0 и распределение потенциала ϕ^0 на ней.

Требуется найти положение свободной поверхности жидкости в последующие моменты времени и поле скоростей в эти моменты в точках границы области.

§26. Основное интегральное соотношение КМГЭ

Для области D , ограниченной кусочно-гладкой замкнутой границей $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, справедлива интегральная формула Коши, которую можно записать с помощью предельных формул Сохоцкого в виде:

$$w(z_0) = \frac{1}{\varepsilon(z_0)i} \int_C \frac{w(z)}{z - z_0} dz, \quad (3.5)$$

где $\varepsilon(z_0) = 2\pi$ для внутренней точки, $\varepsilon(z_0) = \pi$ для точки на гладкой границе C , $\varepsilon(z_0) = \beta$ для угловой точки границы C (β - угол при вершине). Положительное направление обхода контура C берется таким образом, чтобы область D оставалась слева. C_1 - свободная граница, на которой обычно задается потенциал скоростей, $C_2 - C_4$ - твердые стенки, на которых задается функция тока.

Учитывая, что на свободной поверхности известна действительная часть $\phi(x, y)$ функции $w(z)$, а мнимая часть $\psi(x, y)$ известна на твердых стенках, мы имеем смешанную краевую задачу для функции $w(z)$.

Численное решение этой задачи можно получить, разбив контур C на N линейных элементов Γ_j узлами $z_j (j=1, N)$. Тогда $w(z) = \lim_{\max|\Gamma_j| \rightarrow 0} G(z)$, где $G(z)$ - линейная глобальная пробная

функция для $z \in \sum_{j=1}^N \Gamma_j$ и

$$G(z) = \sum_{j=1}^N w_j \Lambda_j(z),$$

где w_j - значение $w(z)$ в точке z_j , $\Lambda_j(z)$ - линейная базисная функция:

$$\Lambda_j(z) = \begin{cases} (z - z_j)/(z_j - z_{j-1}), & z \in \Gamma_{j-1} \\ (z_{j+1} - z)/(z_{j+1} - z_j), & z \in \Gamma_j \\ 0, & z \notin \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_j \end{cases} \quad (3.6)$$

§27. Вычисление интегралов

После указанного разбиения и линейной аппроксимации функции $w(z)$ на границе интеграл Коши можно вычислить аналитически в смысле главного значения при $z \rightarrow z_j$.

$$2\pi i w(z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j^-} \int_C \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Обозначение $z \rightarrow z_j^-$ означает, что точка z стремится к точке z_j , оставаясь все время внутри области D .

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_j^-} \int_C \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \lim_{z \rightarrow z_j^-} \int_{\Gamma_j} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \lim_{z \rightarrow z_j^-} \int_{\Gamma_{j+1}} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \\ &+ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j \\ m \neq j+1}}^N \int_{\Gamma_m} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z_j} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Введем обозначение: $I_m = \int_{\partial_m} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z_j} d\zeta$.

В выражении (3.7) интегралы под знаком суммы не имеют особенности и вычисляются следующим образом:

$$I_m = \int_{\partial_m} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z_j} d\zeta = \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{w_m \Lambda_m + w_{m+1} \Lambda_{m+1}}{\zeta - z_j} d\zeta = \\ w_{m+1} - w_m + \left[\frac{(z_j - z_m)w_{m+1}}{z_{m+1} - z_m} - \frac{(z_j - z_{m+1})w_m}{z_{m+1} - z_m} \right] \ln \left(\frac{z_{m+1} - z_j}{z_m - z_j} \right). \quad (3.8)$$

Два оставшихся интеграла имеют особенности при $z \rightarrow z_j$ и могут быть представлены в виде:

$$I_j + I_{j+1} = \lim_{z \rightarrow z_j} \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{w_{j-1} \Lambda_{j-1} + w_j \Lambda_j}{\zeta - z_j} d\zeta + \lim_{z \rightarrow z_j} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{w_j \Lambda_j + w_{j+1} \Lambda_{j+1}}{\zeta - z_j} d\zeta = \\ = \lim_{z \rightarrow z_j} \left[\frac{w_j - w_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\zeta - z}{\zeta - z_j} d\zeta + \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_i - z_{i-1}} w_j - \frac{z - z_j}{z_i - z_{i-1}} w_{j-1} \right) \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right] + \\ + \lim_{z \rightarrow z_j} \left[\frac{w_{j+1} - w_j}{z_{j+1} - z_j} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\zeta - z}{\zeta - z_j} d\zeta + \left(\frac{z - z_j}{z_{i+1} - z_j} w_{j+1} - \frac{z - z_{j+1}}{z_{i+1} - z_i} w_j \right) \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right].$$

Комбинируя четные и нечетные слагаемые по индексу j , получим:

$$I_j + I_{j+1} = w_{j+1} - w_{j-1} + w_j \ln \left(\frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} \right).$$

Комплексный логарифм в последнем слагаемом расписывается на действительную и мнимую части следующим образом:

$$\ln \left(\frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} \right) = \ln \left| \frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} \right| + i \left[\arg(z_{j+1} - z_j) - \arg(z_{j-1} - z_j) \right] = \\ = \ln \left| \frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} \right| + i(2\pi - \varepsilon(z_j)),$$

где $\varepsilon(z_j)$ - угол при вершине, образованный Γ_j и Γ_{j+1} элементами.

Выражение (3.7) окончательно может быть записано в виде:

$$\varepsilon i w_j = w_{j+1} - w_{j-1} + w_j \ln \left| \frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} \right| + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j, j+1}}^N I_m, \quad (3.9)$$

где интегралы I_m вычисляются по формуле

$$I_m = \int_{\partial_m} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z_j} d\zeta = \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{w_m \Lambda_m + w_{m+1} \Lambda_{m+1}}{\zeta - z_j} d\zeta = \\ w_{m+1} - w_m + \left[\frac{(z_j - z_m)w_{m+1}}{z_{m+1} - z_m} - \frac{(z_j - z_{m+1})w_m}{z_{m+1} - z_m} \right] \ln \left(\frac{z_{m+1} - z_j}{z_m - z_j} \right). \quad (3.8)$$

Записывая уравнение (3.9) для каждого узла границы и разделив мнимые и действительные части, получим

$$AX + iBX = 0,$$

где A и B - полнозаполненные матрицы $N \times 2N$ (N - строк, $2N$ - столбцов), вектор $X = X(\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2, \dots, \phi_N, \psi_N)$. Далее, следуя [36], получаем следующую систему уравнений

$$CY = F, \quad (3.10)$$

в которой матрица C и вектор правой части F получаются следующим образом: если в узле z_j задан потенциал скорости ϕ_j , то берется j -ая строка матрицы B , в которой после выборки всех элементов, соответствующих неизвестным значениям ϕ_m или ψ_m ($m \neq j$), получается j -ая строка матрицы C , j -ым элементом вектора Y будет ψ_j , а j -ый элемент вектора F – это сумма известных значений ϕ_m или ψ_m , умноженных на соответствующие элементы матрицы B ; если в узле z_j задана функция тока ψ_j , то

для построения j -ой строки системы (3.10) используется матрица A .

§28. Двойные узлы

При решении гидродинамических задач численными методами приходится сталкиваться с серьезной проблемой удовлетворения граничных условий в угловых точках, принадлежащих одновременно границам задания вещественной и мнимой частей функции w . Некорректное обращение с данными узловыми “особенностями” существенно влияет на точность полученных результатов и устойчивость алгоритма при моделировании свободных границ [2, 7]. В методах граничных элементов обойти указанные сложности удается с помощью введения двойных узлов.

Пусть двойной узел описывается тождеством $z_{m+1} \equiv z_m$. Предположим, что $z_m \in C_1$, и в этом узле задан потенциал ϕ_m , а $z_{m+1} \in C_2$, и в нем задана функция тока ψ_{m+1} . В силу непрерывности функции $w(z)$ в двойном узле будут выполняться естественные условия

$$\psi_m = \psi_{m+1}, \quad \phi_{m+1} = \phi_m. \quad (3.11)$$

В этом случае из системы уравнений (3.10) следует исключить m и $(m+1)$ -е строки, заменив их условием (3.11). Кроме того, в элементах m и $(m+1)$ -х столбцов матрицы C системы уравнений (3.10) отсутствуют вклады интегралов по элементу Γ_m , имеющему нулевую длину.

§29. Решение системы линейных алгебраических уравнений

Решение краевых задач численными методами сопряжено с решением больших систем линейных уравнений. Методов для их решения существует великое множество. Все методы решения СЛАУ можно разделить на две группы: прямые (Гаусса, Краута и т.д.) и итерационные (Зейделя, сопряженных градиентов и т.д.). Выбор метода для решения конкретной СЛАУ зависит от ее свойств.

Матрица C в системе (3.10) является полностью заполненной. В КМГЭ исходный эллиптический дифференциальный оператор сводится к интегральному уравнению Фредгольма II рода. Следовательно, полученная в результате применения метода граничных элементов матрица системы линейных алгебраических уравнений обладает хорошими свойствами и может быть решена прямым или итерационным методом.

Число обусловленности. Важным критерием близости матрицы A к вырожденной является число обусловленности $cond(A) = |A| \cdot |A^{-1}|$, которое играет роль множителя в увеличении относительной ошибки. Для определения числа обусловленности применяется алгоритм, изложенный в монографии [84]. Из этой же работы взяты программы DECOMP и SOLVE, осуществляющие декомпозицию матрицы A и ее решение прямым методом Гаусса с выбором ведущего элемента.

§30. Формулы численного дифференцирования функций, заданных на границе области

Для решения поставленной задачи необходимо вычислять компоненты вектора $\nabla\phi$. Другими словами надо уметь вычислять производные от дискретно заданной функции комплексного потенциала по пространственным переменным.

Компоненты вектора скорости будем вычислять по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где \vec{s} - единичный вектор касательной, \vec{n} - единичный вектор внешней нормали. Обход по границе области осуществляется против часовой стрелки.

Для вычисления узловых значений компонент вектора скорости можно использовать подход, предложенный в работе [109] и в дальнейшем развитый в работах [2, 7, 113]. Суть его состоит в следующем: строится отображение элемента границы области на пространство номеров узлов (числовую ось), как показано на рис.15.

В силу того, что

$$\phi = \phi(x, y, t), \quad \psi = \psi(x, y, t), \quad x = x(t), \quad y = y(t),$$

можно записать

$$\phi = \phi(j, t), \quad \psi = \psi(j, t), \quad x = x(j), \quad y = y(j).$$

Очевидно, что при таком отображении будем иметь:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial j} / \frac{\partial s}{\partial j} \right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial j} / \frac{\partial s}{\partial j} \right),$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \left(\frac{dx}{dj} / \frac{ds}{dj} \right), \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \left(\frac{dy}{dj} / \frac{ds}{dj} \right),$$
(3.13)

где

$$\frac{ds}{dj} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dj} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dj} \right)^2}.$$

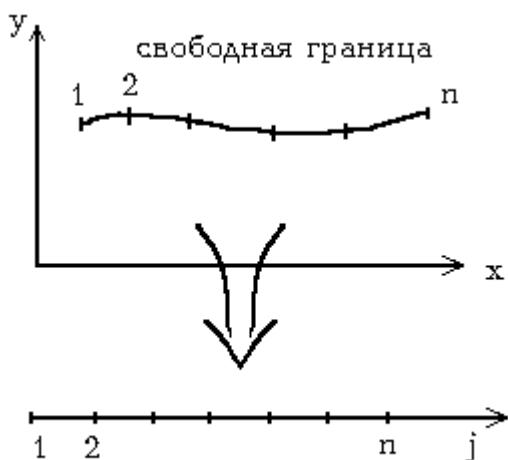


Рис. 15. Отображение свободной границы на числовую ось

Остается определить значения $\frac{\partial\phi}{\partial j}$, $\frac{\partial\psi}{\partial j}$, $\frac{\partial x}{\partial j}$ и $\frac{\partial y}{\partial j}$. Так как j

- это номер точки на числовой оси, то мы имеем дело с дифференцированием указанных функций на равномерной сетке с шагом $h \equiv 1$.

Для нахождения первых производных воспользуемся формулами численного дифференцирования 5-го порядка точности [19, 22]:

$$\begin{aligned} f_0' &= \frac{1}{12}(-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4), \\ f_1' &= \frac{1}{12}(-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4), \\ f_2' &= \frac{1}{12}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4), \\ f_3' &= \frac{1}{12}(-f_0 + 6f_1 - 18f_2 + 10f_3 + 3f_4), \\ f_4' &= \frac{1}{12}(3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Используя (3.13), нетрудно получить дискретные значения для выражений, описываемых формулами (3.14).

§31. Вычисление массы, энергии, давления

При решении нестационарных задач распространения волн по бассейну конечной глубины и их взаимодействию с различными преградами актуальными являются задачи определения давления \square на преграду и донные сооружения, изменения кинетической \square и потенциальной \square энергий. Кроме того, сохранение полной энергии \square позволяет осуществлять контроль за консервативностью численного метода.

Кинетическая и потенциальная энергии вычисляются на каждом временном шаге по формулам [2, 8]:

$$E_k = -\frac{1}{2} \int_a^b \phi \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \quad (3.15)$$

$$= -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N_g} \left(2\phi_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_i + \phi_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_{i+1} + \phi_{i+1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_i + 2\phi_{i+1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_{i+1} \right) L_i$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_g} (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2)(x_i - x_{i+1}). \quad (3.16)$$

Здесь a и b - абсциссы точек пересечения границ \square и \square , \square (рис.14), L_i - длина i -го элемента, N_g - количество точек на свободной поверхности.

Очень хорошим контролем точности метода для задач со свободными границами является закон сохранения массы:

$$M = \frac{1}{2} \left(\oint_C y dx - \oint_C x dy \right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N ((y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1}) + (x_i + x_{i+1})(y_i - y_{i+1})) . \quad (3.17)$$

Циркуляция вычисляется по формуле

$$\Gamma = \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial s} ds = \phi_b - \phi_a . \quad (3.18)$$

Для вычисления давления необходимо решить дополнительную краевую задачу [78]:

$$\Delta w_t(z) = 0, \quad z \in D \quad (3.19)$$

$$\phi_t = -\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - y, \quad z \in C_1 \quad (3.20)$$

$$\psi_t = 0, \quad z \in C_2, \quad (3.21)$$

где $w_t(z) = \frac{\partial w(z)}{\partial t} = \phi_t + i\psi_t$. Применяя комплексный метод граничных элементов для решения уравнения (3.19) с граничными условиями (3.20), (3.21) находим \square на твердой границе \square , \square , \square . После этого давление можно вычислить по формуле:

$$P(x, y) = -\left(\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + y \right), \quad z \in C_2, \square, \square. \quad (3.22)$$

§32. Тестовый расчет

Точность аппроксимации интегральной формулы Коши проверялась по тесту, приведенному в [67]. Требуется найти решение уравнения Лапласа в области

$$D = \{0 \leq x \leq 2\pi; -1 \leq y \leq 0,5\sin(x)\}.$$

На дне и вертикальных стенках ставится условие непротекания $\psi(x, y) = 0$, а на верхней границе – условие $\phi(x, y) = -\cos(x)\operatorname{ch}(y+1)$, правая часть в котором является гармонической функцией. Зная эти условия нетрудно восстановить функцию тока на верхней границе

$$\psi^T(x, y) = \sin(x)\operatorname{sh}(y+1).$$

Получаемые из решения краевой задачи узловые значения функции тока $\psi^K(x, y)$ сравниваются с точным решением $\psi^T(x, y)$.

Этот пример является хорошим тестом, так как его можно интерпретировать как расчет на одном временном шаге задачи о движении жидкости в прямоугольном бассейне.

Во второй колонке таблицы 2 приведены относительные погрешности точного и численного значений функции тока

$$\varepsilon_1 = \frac{\max |\psi^T - \psi^K|}{\max |\psi^T|}$$

в зависимости от дискретизации области (N -

число узлов на всей границе, N_g - на верхней границе).

Таблица 2

$N(N_g)$	ε_1	ε_2	ε_3	$K(C)$
72(30)	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	3,38
145(60)	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	3,60
290(120)	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	5,23
580(240)	$7,6 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	6,25

В третьем и четвертом столбцах таблицы 2 приведены относительные погрешности численно найденных V_x^K , V_y^K и аналити-

чески вычисленных V_x^T , V_y^T компонент вектора скорости в зависимости от дискретизации границы.

Точные значения компонент вектора скорости вычислены по формулам:

$$V_x^T = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin(x) \cosh(y+1), \quad V_y^T = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\cos(x) \sinh(y+1).$$

В пятой колонке таблицы приводятся числа обусловленности $K(C)$ матрицы \mathbf{C} системы линейных алгебраических уравнений (3.10). Сравнительно небольшое число обусловленности объясняется тем, что в основе численного метода лежит уравнение Фредгольма II рода.

§33. Двусвязная область

В §26 - 27 мы предполагали, что область D односвязная. В случае двусвязной области D интегральная формула Коши (3.5) также справедлива, если интегрирование вдоль сложного контура $C = C_1 \cup C_2$ осуществляется следующим образом: вдоль контура C_1 интегрирование осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки), вдоль C_2 - в отрицательном (по часовой стрелке) (рис. 16).

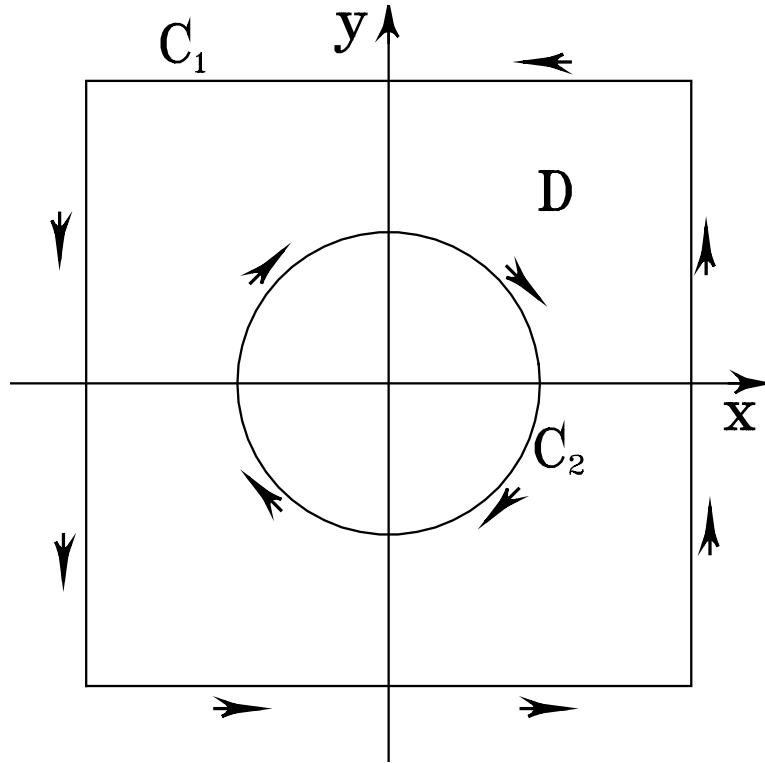


Рис. 16. К вопросу решения задачи в двусвязной области

$$w(z_0) = \frac{1}{\varepsilon(z_0)i} \int_C \frac{w(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{\varepsilon(z_0)i} \left(\int_{C_1} \frac{w(z)}{z - z_0} dz + \int_{C_2} \frac{w(z)}{z - z_0} dz \right). \quad (3.23)$$

Дискретный аналог уравнения (3.23) запишется в следующем виде:

$$\varepsilon i w_j = w_{j+1} - w_{j-1} + w_j \ln \left| \frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} \right| + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j, j+1}}^{N_1} I_m + \sum_{\substack{m=N_1 \\ m \neq j, j+1}}^{N_2} I_m, \quad (3.24)$$

где \$N_1, N_2\$ - количество точек разбиения границ \$C_1\$ и \$C_2\$, соответственно.

При вычислении первой суммы в (3.24) надо полагать, что \$z_{N_1+1} = z_1, w_{N_1+1} = w_1, z_0 = z_{N_1}, w_0 = w_{N_1}\$, а при вычислении второй \$-z_{N_2+1} = z_{N_1+1}, w_{N_2+1} = w_{N_1+1}, z_{N_1} = z_{N_2}, w_{N_1} = w_{N_2}\$. Остальные рассуждения о построении результирующей матрицы описаны в §27.

§34. Случай безграничной области

Интегральная формула Коши справедлива и для безграничной области D , если функция $w(z)$ обращается в нуль на бесконечности или равна константе. Например, при обтекании профиля безграничным бесциркуляционным потоком жидкости комплексный потенциал на бесконечности имеет следующее разложение:

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = A + V_\infty e^{-i\beta} z, \quad (3.25)$$

где A - произвольная комплексная постоянная, β - угол атаки профиля.

Уравнение	(3.5)	с	учетом
$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = A + V_\infty e^{-i\beta} z,$			(3.25)

примет вид:

$$w(z_0) = V_\infty e^{-i\beta} z_0 + \frac{1}{\varepsilon(z_0)i} \int_C \frac{w(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.26)$$

В данном случае контур обходится по часовой стрелке. При построении системы уравнений (3.10) следует добавить слагаемое в известный правый вектор \mathbf{F} (мнимую или действительную часть $V_\infty e^{-i\beta} z_0$ к каждому элементу вектора в зависимости от заданного граничного условия в j узле).

§35. Случай обтекания тела вблизи экрана

Пусть область течения D_1 ограничена контуром C_1 и прямой линией C_0 , на которой выставлено условие непротекания: $\psi = 0$ (рис. 17). Без ограничения общности можно положить, что граница C_0 совпадает с осью Ox . Пусть w_1 - функция комплексного потенциала, соответствующая обтеканию контура C_1 вблизи бесконечной твердой стенки C_0 .

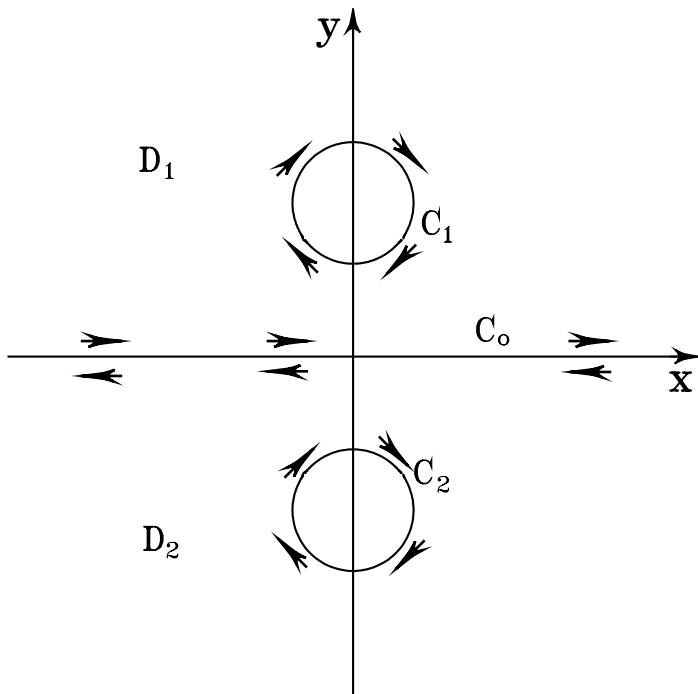


Рис. 17. Обтекание тела возле твердой стенки

Интегральная формула Коши для функции $w_1(z)$ запишется следующим образом

$$w_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_1} \frac{w_1(z)}{z - z_0} dz + \int_{C_0} \frac{w_1(z)}{z - z_0} dz \right). \quad (3.27)$$

Для численных расчетов эта формула непригодна, так как интеграл по C_0 имеет бесконечные пределы интегрирования.

Задача обтекания контура вблизи бесконечной твердой стенки может быть сведена к задаче обтекания двух контуров безграничным потоком жидкости – исходного C_1 и C_2 , полученного зеркальным отображением C_1 относительно C_0 . При этом комплексный потенциал $w_2(z)$, соответствующий обтеканию контура в нижней полуплоскости D_2 , является аналитическим продолжением $w_1(z)$ в нижнюю полуплоскость относительно C_0 и обладает свойствами

$$w_2(z) = w_1(z), \quad \psi_2(x, y) = \psi_1(x, y) = 0 \text{ при } z \in C_0,$$

$$w_2(z) = \overline{w_1(\bar{z})} \text{ при } z \in D_2.$$

Так как функция $w_2(z)$ аналитична в области D_2 , то для нее также справедлива интегральная формула Коши

$$w_2(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_2} \frac{w_2(z)}{z - z_0} dz - \int_{C_0} \frac{w_2(z)}{z - z_0} dz \right). \quad (3.28)$$

Знак «-» перед вторым интегралом в выражении (3.28) становится потому, что сменилось направление обхода границы C_0 .

Определим функцию –

$$w(z) = \begin{cases} w_1(z), & z \in D_1 \\ w_2(z), & z \in D_2 \end{cases}.$$

Построенная таким образом функция $w(z)$ будет кусочно-аналитической в области $D = D_1 \cup D_2$ и будет обладать следующим свойством $w(\bar{z}) = \overline{w(z)}$.

Записав интегральную формулу Коши для $w(z)$, получим

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_1} \frac{w(z)}{z - z_0} dz + \int_{C_2} \frac{w(z)}{z - z_0} dz \right). \quad (3.29)$$

Интегралы по C_0 взаимно уничтожаются. Выражение (3.29) можно использовать для численных расчетов и при $z \in D_1$ будем иметь исконую функцию $w_1(z)$. Учитывая, что контур C_2 получен зеркальным отображением C_1 относительно C_0 , упростим выражение (3.29), сведя интегрирование по контуру C_2 к интегрированию по контуру C_1 . Эта процедура позволит при численных расчетах сократить число расчетных точек ровно в два раза.

Выпишем интегральные выражения для $w(\bar{z}_0)$ и $\overline{w(z_0)}$.

$$w(\bar{z}_0) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_1} \frac{w(z)}{z - \bar{z}_0} dz + \int_{C_2} \frac{w(t)}{t - \bar{z}_0} dt \right). \quad (3.30)$$

$$\overline{w(z_0)} = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_1} \frac{\overline{w(z)}}{\bar{z} - z_0} d\bar{z} + \int_{C_2} \frac{\overline{w(t)}}{\bar{t} - z_0} d\bar{t} \right). \quad (3.31)$$

Сделав замену переменной в выражении (3.31) в первом интеграле $t = \bar{z}$ и во втором - $z = \bar{t}$, получим

$$\overline{w(z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_2} \frac{w(t)}{t - z_0} dt + \int_{C_1} \frac{w(z)}{z - z_0} dz \right).$$

Сравнивая (3.30) и (3.31), получим

$$\int_{C_2} \frac{w(t)}{t - z_0} dt = \int_{C_1} \frac{w(z)}{z - \bar{z}_0} dz. \quad (3.32)$$

Подставляя (3.32) в (3.29), найдем

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} w(z) \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right) dz. \quad (3.33)$$

Выражение (3.33) является основным при проведении расчетов в задачах обтекания объектов вблизи экрана. Изменение ядра интеграла не влечет никаких трудностей при выписывании дискретного аналога, алгоритм создания которого описан в параграфах 26 - 27.

§36. Модифицированный метод комплексных граничных элементов

При решении некоторых задач целесообразнее пользоваться функцией комплексно-сопряженной скорости ($W(z) = V_x - iV_y$), которая является аналитической функцией в области D и, следовательно, можно применять приведенный выше аппарат для решения уравнения Лапласа для функции комплексно-сопряженной скорости. При решении задач обтекания тел на границах области известны касательные и нормальные компоненты вектора скорости V_s и V_n , то интегральную формулу Коши с помощью предельных формул Сохоцкого для аналитической в области D функции комплексно-сопряженной скорости $W(z)$ следует записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} W(z_0) &= (V_n(z_0) - iV_s(z_0))e^{-i\alpha(z_0)} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon(z_0)i} \int_C \frac{(V_n(z) - iV_s(z))e^{-i\alpha(z)}}{z - z_0} dz, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $\varepsilon(z_0) = 2\pi$ для внутренней точки, $\varepsilon(z_0) = \pi$ для точки на гладкой границе C , $\varepsilon(z_0) = \theta$ для угловой точки границы C (θ - угол при вершине). Положительное направление обхода контура C берется таким образом, чтобы область D оставалась слева (внешняя граница обходится против часовой стрелки, внутренняя - по часовой).

Зная V_s и V_n , можно найти V_x и V_y по формулам:

$$V_x = V_n \cos \alpha - V_s \sin \alpha, \quad V_y = V_s \cos \alpha + V_n \sin \alpha. \quad (3.35)$$

Поскольку в ходе решения задачи на свободной границе известна касательная составляющая скорости, а на дне, боковых стенках и профиле - нормальная составляющая, то имеем смешанную краевую задачу.

Разобьем границу области на N линейных элементов Γ_j узлами z_j . Воспользовавшись уравнением (3.9), записанным для функции комплексно-сопряженной скорости $W(z)$, расписанной по касательным V_s и нормальным V_n составляющим вектора скорости, получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon i(V_{n_j} - iV_{s_j})e^{-i\alpha_j} = & (V_{n_{j+1}} - iV_{s_{j+1}})e^{-i\alpha_{j+1}} - (V_{n_{j-1}} - iV_{s_{j-1}})e^{-i\alpha_{j-1}} + \\ & + (V_{n_j} - iV_{s_j})e^{-i\alpha_j} \ln \left| \frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} \right| + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j, j+1}}^N I_m, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned} I_m = & (V_{n_{m+1}} - iV_{s_{m+1}})e^{-i\alpha_{m+1}} - (V_{n_m} - iV_{s_m})e^{-i\alpha_m} + \\ & + \left[\frac{(z_j - z_m)(V_{n_{m+1}} - iV_{s_{m+1}})e^{-i\alpha_{m+1}}}{z_{m+1} - z_m} - \frac{(z_j - z_{m+1})(V_{n_m} - iV_{s_m})e^{-i\alpha_m}}{z_{m+1} - z_m} \right] \ln \left(\frac{z_{m+1} - z_j}{z_m - z_j} \right) \\ e^{-i\alpha_j} = & -i \frac{\frac{z_{j+1} - z_j}{|z_{j+1} - z_j|^2} + \frac{z_j - z_{j-1}}{|z_j - z_{j-1}|^2}}{\left| \frac{z_{j+1} - z_j}{|z_{j+1} - z_j|^2} + \frac{z_j - z_{j-1}}{|z_j - z_{j-1}|^2} \right|}. \end{aligned}$$

Записывая уравнение (3.36) для каждого узла границы и разделяя мнимые и действительные части, получим

$$AX+iBX=0,$$

где A и B - полнозаполненные матрицы $N \times 2N$ (N - строк, $2N$ - столбцов), вектор $X = X(V_{s_1}, V_{n_1}, V_{s_2}, V_{n_2}, \dots, V_{s_N}, V_{n_N})$. Далее, следуя [36], получаем результирующую систему уравнений

$$\mathbf{CY}=\mathbf{F},$$

в которой матрица \mathbf{C} и вектор правой части \mathbf{F} получаются исходя из правил, описанных в параграфе 27 при построении системы уравнений (3.10).

Г л а в а 4

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

§37. Стационарное обтекание донных препятствий потоком жидкости конечной глубины

Постановка задачи

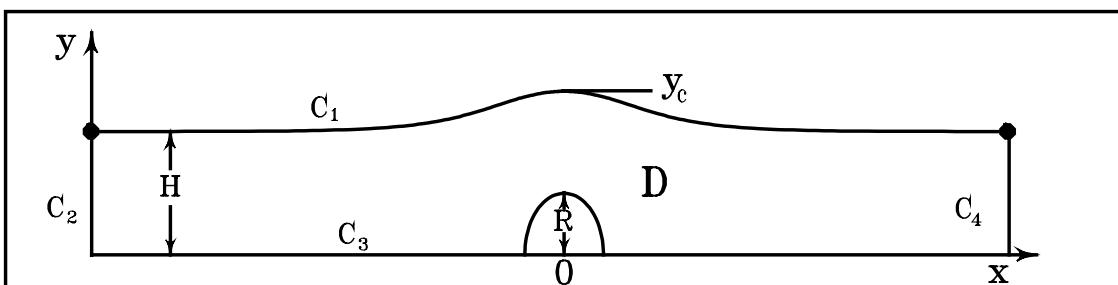


Рис. 18. Схема области течения и основные обозначения

Пусть задано течение идеальной невязкой несжимаемой жидкости со свободной границей (рис. 18). Область течения D ограничена свободной границей C_1 , участками втекания C_2 и вытекания C_4 , а также участком дна C_3 , состоящего из прямолинейных участков и полукругового цилиндрического выступа радиуса R . Глубина жидкости на бесконечности принимается равной H , скорость течения V_∞ , давление на свободной поверхности предполагается равным нулю ($p = 0$), ускорение силы тяжести g на-

правлено вниз, против направления оси y . Границы C_2 и C_4 должны быть выбраны на достаточно большом удалении от выступа с тем, чтобы поток через эти участки границы был близок к параллельному.

Данная задача описывается уравнением Лапласа

$$\Delta w(z) = 0, \quad z = x + iy \in D, \quad (41)$$

для функции комплексного потенциала $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\phi(x, y)$ - потенциал скорости и $\psi(x, y)$ - функция тока, удовлетворяющие условиям Коши-Римана.

На боковых участках границы области и дне выполняются краевые условия вида:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= y, & z \in C_2, C_4; \\ \psi(x, y) &= 0, & z \in C_3. \end{aligned} \quad (42)$$

Свободная граница является линией тока ($\psi(x, y) = 1$), на которой справедливо уравнение Бернулли

$$\frac{1}{2} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 + gy = \frac{V_\infty^2}{2} + gH, \quad z \in C_1. \quad (43)$$

Задача является нелинейной в силу нелинейности условия (43) и в силу того, что свободная граница C_1 заранее неизвестна и ее положение должно быть определено в ходе решения задачи.

Для численных расчетов задача приводится к безразмерному виду. В качестве характерных размерных величин выбирается глубина H и скорость потока V_∞ на бесконечности. Краевая задача останется без изменения за исключением условия (43), которое преобразуется к виду

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = 1 + 2 \frac{1-y}{Fr^2}, \quad (44)$$

где $Fr = \frac{V_\infty}{\sqrt{gH}}$ - число Фруда.

Следует отметить, что данная задача имеет неединственное решение для некоторого диапазона изменения числа Фруда. Этот результат впервые был получен Н.Н. Моисеевым [65], который изучал в приближенной постановке задачу обтекания бугра или впадины сверхкритическим потоком. Приведенная к безразмерному виду краевая задача зависит от двух параметров: радиуса обтекаемого препятствия R и числа Фруда Fr . В работе [68] с помощью вариационного принципа доказано, что для бесконечного множества значений числа Фруда задача имеет, по крайней мере, два различных решения. Следовательно, для получения однозначного решения использовать число Фруда в качестве параметра задачи нецелесообразно. В работе [37] отмечается, что данная задача имеет единственное решение, если в качестве определяющего течения параметра вместо числа Фруда задавать безразмерный параметр $V = \frac{V_0}{V_\infty}$, характеризующий отношение скорости V_0 в вершине волны к скорости набегающего потока на бесконечности V_∞ . При этом число Фруда есть функция от V : $Fr = Fr(V)$.

Определение функциональной зависимости $Fr(V)$.

Уравнение (43) справедливо для любой точки свободной границы. Обозначим через y_0 - ординату вершины волны. Тогда

$$\frac{V_0^2}{2} + gy_0 = \frac{V_\infty^2}{2} + gH.$$

Поделив правую и левую части этого равенства на V_∞^2 и воспользовавшись выражением для числа Фруда, получим

$$Fr^2 = 2 \frac{y_0 - 1}{1 - V^2}. \quad (45)$$

После этого (44) перепишется следующим образом

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = 1 - (1 - V^2) \frac{y - 1}{y_0 - 1}. \quad (46)$$

Параметр V изменяется в пределах $[0;1]$; 1 - соответствует бесконечному числу Фруда, 0 - числу Фруда, близкому к единице, при котором амплитуда построенной волны максимальна для заданного радиуса обтекаемого препятствия.

Алгоритм построения свободной границы

Нахождение потенциала. Пусть задано некоторое начальное положение свободной границы C_1 . Для того, чтобы начать итерационный процесс ее уточнения, необходимо сначала определить потенциал $\varphi(x, y) = \operatorname{Re} w(z)$ на свободной границе C_1 . Обозначим модуль вектора скорости через

$$q = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{1 - (1 - V^2) \frac{y - 1}{y_0 - 1}}. \quad (47)$$

Поскольку граница C_1 является линией тока, то вектор скорости на ней направлен по касательной. Отсюда следует, что $q = \partial\phi / \partial s$. Так как потенциал скорости определяется с точностью до аддитивной константы, полагаем $\phi_1 = 0$. Далее для любой точки свободной границы имеем

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \frac{q_i + q_{i+1}}{2} \Delta s_i, \quad (48)$$

где $i = \overline{1, N_g - 1}$ - номера узлов точек свободной границы, $q_i = q(y_i)$ определяется формулой (47),

$\Delta s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$ - длина i -го элемента свободной границы.

Определение формы свободной границы. Алгоритм нахождения свободной границы осуществляется по следующей схеме:

- 1) пусть на k -й итерации известно некоторое положение свободной границы C_1^k ;
- 2) по формуле (48) определяются значения ϕ_i в узлах z_i на C_1^k ;
- 3) решается краевая задача с заданным распределением потенциала ϕ_i^k на свободной границе C_1^k ;
- 4) в точках свободной границы C_1^k определяются значения компонент вектора скорости: $U_i = \operatorname{Re} \frac{dw}{dz}$, $V_i = -\operatorname{Im} \frac{dw}{dz}$;
- 5) из условия коллинеарности вектора скорости и касательной к границе ($dy/dx = V/U$) вычисляется новое положение свободной границы C_1^{k+1}

$$y_{i+1}^{k+1} = y_i^{k+1} + \Delta y_i^k,$$

где приращение Δy_i^k определяется на основе разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \Delta y_i^k = & \frac{V_i}{U_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{d}{dx} \left(\frac{V_i}{U_i} \right) (x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + \\ & + \frac{1}{4!} \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{V_i}{U_i} \right) (x_{i+1} - x_i)^4. \end{aligned}$$

Цикл повторяется до выполнения требуемой точности

$$\max_i |y_i^{k+1} - y_i^k| < \varepsilon. \quad (49)$$

После сходимости итерационного процесса вычисляется число Фруда по формуле (45).

Во всех расчетах в качестве нулевого приближения берется прямая линия $y^0 = 1$, исключение составляет окрестность точки y_0 , в которой начальное значение $y_0^0 = 1 + 0,001$.

Данный алгоритм был использован в работе [8, 81].

Альтернативный алгоритм построения свободной границы

Приведенный алгоритм построения свободной поверхности имеет несколько недостатков. Во-первых, погрешность вычислений складывается из погрешности метода восстановления функции $w(z)$ на C_1 плюс погрешность вычислений векторного поля на свободной поверхности. Во-вторых, поиск решения осуществляется из условия коллинеарности вектора скорости и касательной к границе, что при дискретизации границы линейными элементами привносит дополнительную погрешность в вычисления.

Отличной проверкой достоверности полученных приближений свободной границы может служить условие:

$$\psi(x, y) = 1, \quad z \in C_1 \quad (410)$$

являющееся условием того, что свободная граница есть линия тока.

В расчетах, проводимых в работе [8], критерий останова итерационного процесса (49) при $\varepsilon = 10^{-6}$ гарантировал выполнение условия (410) лишь с точностью $10^{-3} - 10^{-4}$.

Такое внимание к точности получаемых результатов вычислений вполне обосновано. При решении задачи были получены зависимости $A(Fr)$, графики которых в зоне волн максимальной амплитуды имеют быстро убывающий колебательный характер. Для обратной зависимости $Fr(A)$ можно отметить последовательность экстремумов, координаты которых стремятся к параметрам волны максимальной амплитуды. Первый экстремум этой зависимости соответствует минимальному числу Фруда, при котором существует стационарное решение задачи при сверхкритическом обтекании препятствия. Его наличие отмечается в работах

почти всех исследователей. Расчеты по предложенному в предыдущем пункте алгоритму построения свободной границы позволяют зафиксировать наличие первых двух экстремумов этой зависимости, что означает существование зоны чисел Фруда, при которых данная задача имеет три решения (для одного и того же числа Фруда можно получить три волны различной амплитуды).

Предлагаемый ниже алгоритм построения свободной границы позволяет находить решение, не вычисляя векторное поле скоростей на свободной границе.

В основу альтернативного метода расчета [77] положено условие того, что свободная граница является линией тока, на которой выполняется условие $\psi(x, y) = 1$.

Таким образом, задача сводится к нахождению комплексного потенциала w , отображающего область течения D в плоскости (z) на полосу $0 \leq \psi \leq 1$ в плоскости (w) .

Для любой точки $z(x, y) \in C_1$ очевидно выполняется условие

$$\psi(x, y) \leq y \quad (411)$$

или $\psi(x, y) = K(x, y) \cdot y$,

где $K(x, y) \leq 1$, $\forall z \in C_1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x, y) = 1$.

Например, для случая обтекания цилиндра в безграничной жидкости

$$K(x, y) = \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right).$$

Если ввести следующие обозначения:

y_i^T - точное значение в узлах границы,

y_i^k - численное решение на k -м шаге,

$\psi_i^T = 1$ - точное значение функции тока в узлах границы,

ψ_i^k - численное значение функции тока на k -м шаге,

то из (411) получаем

$$1 - \psi_i^k \leq y_i^T - y_i^k. \quad (412)$$

Алгоритм нахождения свободной границы модифицируется следующим образом:

пункты 1), 2), 3) предыдущего алгоритма остаются без изменений;

4) вычисляется новое положение свободной границы

$$y_i^{k+1} = y_i^k + \Delta y_i^k, \text{ где } \Delta y_i^k = 1 - \psi_i^k.$$

Критерием останова итерационного процесса в данном алгоритме является то же самое условие

$$\max_i |y_i^{k+1} - y_i^k| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \max_i |1 - \psi_i^k| < \varepsilon,$$

следовательно, в результате решения найдется такая свободная граница, на которой отклонение численно найденной функции тока от известного значения ($\psi = 1, z \in C_1$) не превысит заданного ε .

Обтекание полукругового цилиндрического выступа

На рис. 19 представлены результаты расчета задачи по нахождению свободной границы при отсутствии препятствия на дне, выполненные по обоим алгоритмам. В обоих случаях брались одинаковые параметры: $V=0; 0,4; 0,7$; $\varepsilon = 10^{-6}$, количество элементов по всей границе составляло 500, по свободной границе - 300.

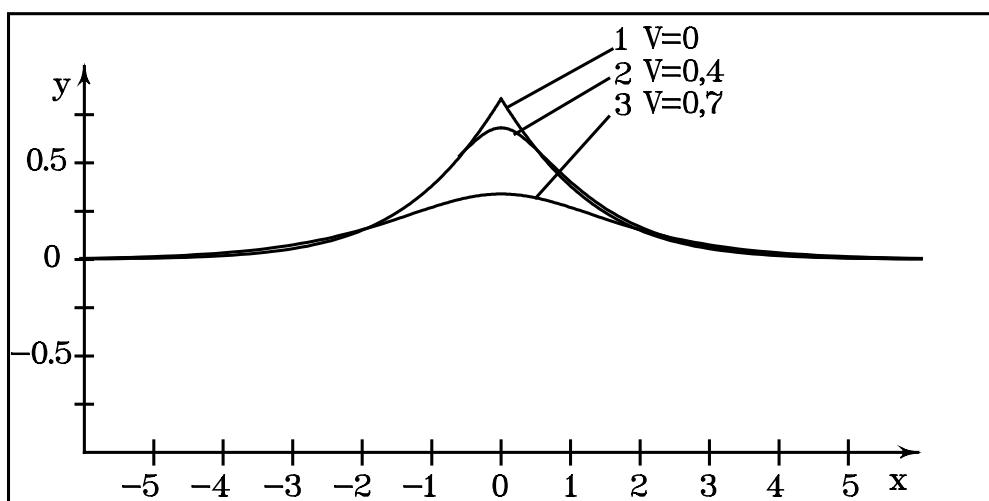


Рис. 19. Три формы уединенных волн

Как видно, формы свободной поверхности, полученные приведенными алгоритмами, визуально не отличаются друг от друга. В таблице 3 приводятся численные характеристики построенных волн. В скобках даются значения для волн, построенных по альтернативному алгоритму. Анализ последнего столбца таблицы позволяет сделать вывод о том, что результаты решения задачи, полученные по второму алгоритму, являются более точными. Таким образом, в дальнейших расчетах использовался второй алгоритм построения свободной границы, учитывая его большую точность и эффективность.

Таблица 3

V	Fr	A	$\max_i 1 - \psi_i^k $
0	1,291075(1,290950)	0,833437(0,833276)	$5,7 \cdot 10^{-4} (10^{-6})$
0,4	1,274337(1,274487)	0,682053(0,682213)	$3,6 \cdot 10^{-4} (10^{-6})$
0,7	1,153264(1,154001)	0,339154(0,339587)	$1,2 \cdot 10^{-4} (10^{-6})$

На рис. 20,а приведены результаты расчетов зависимости амплитуды A от числа Фруда Fr для различных значений радиуса обтекаемого препятствия R . Кривая 1 - соответствует радиусу $R = 0$ (отсутствие препятствия на дне) и описывает уединенную волну. Далее цифрой 2 обозначено решение задачи при значениях радиуса $R = 0,1$; цифрой 3 - 0,2; 4 - 0,3; 5 - 0,5; 6 - 0,7; 7 - 0,9; 8 - 1; 9 - 1,1. На этом же рисунке пунктирной линией в зоне кривой 5 нанесен расчет из работы [122]. Линия, соединяющая вершины кривых, является графиком зависимости амплитуды A от числа Фруда Fr : $A = Fr^2 / 2$. Эта зависимость характеризует волну, у которой скорость в вершине волны $V_0 = 0$. На рис. 20,а показано наличие двух решений задачи при числах Фруда, близких к единице.

На рис. 20,б приведен фрагмент из рис. 20,а в увеличенном масштабе, позволяющий удостовериться в том, что есть зоны чисел Фруда, при которых задача имеет три решения. Здесь же пунктиром для уединенной волны нанесены результаты расчетов, проведенные Д.В. Маклаковым на основе разработанной им теории.

рии [58], расчеты для радиуса препятствия $R = 0,1$ взяты из работы [37], для радиуса $R = 0,2$ из работы [122]. На рис. 20,в в еще более крупном масштабе приведена область волн предельной амплитуды. Благодаря увеличению на этом рисунке заметен еще один изгиб решения.

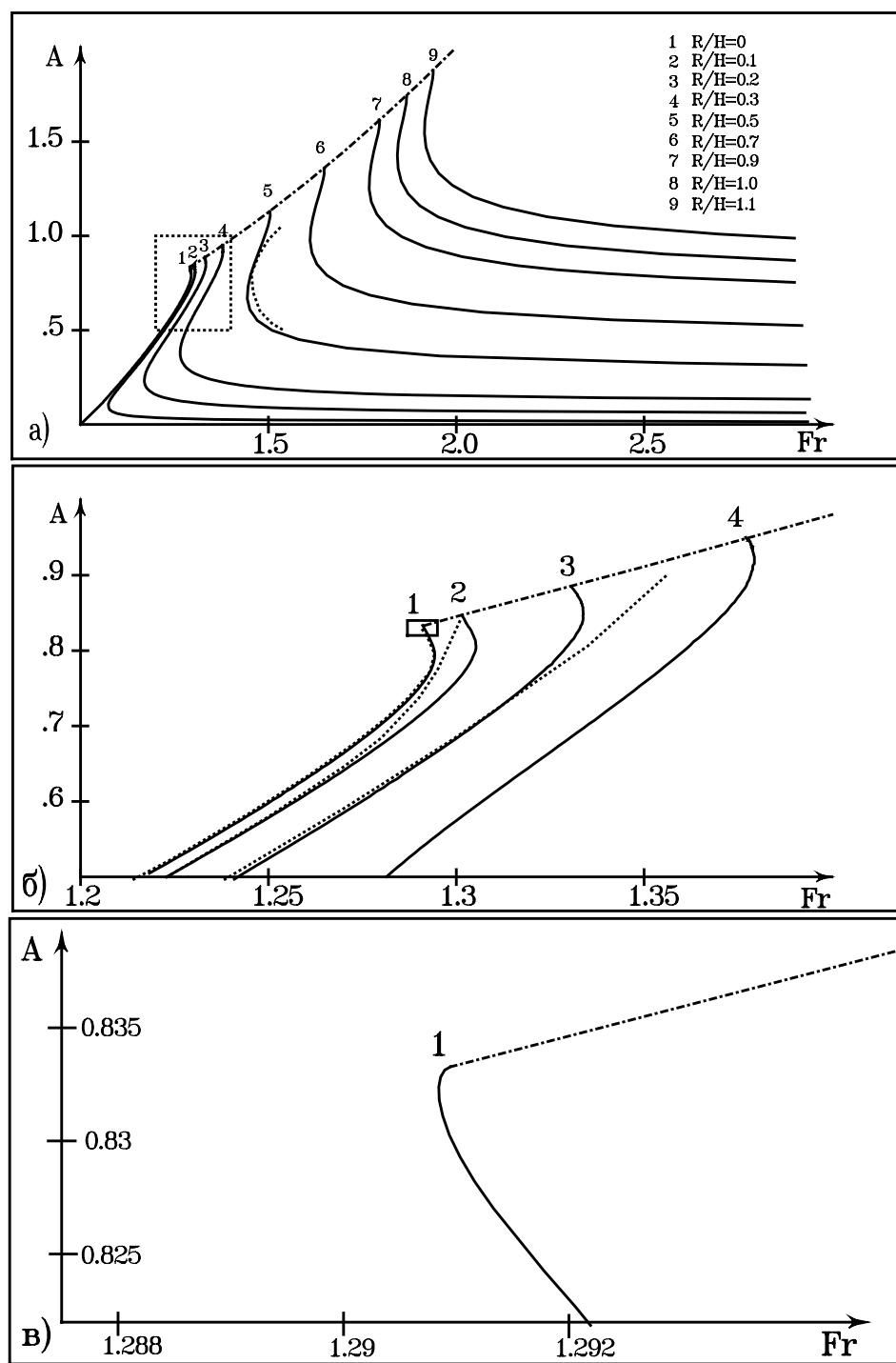


Рис. 20. Неединственность решения при построении уединенных волн

Анализируя кривые, приведенные на рис. 20, можно сделать вывод о том, что решение задачи в зоне волн предельной амплитуды имеет быстро убывающий колебательный характер. Поскольку колебания наблюдаются в зоне волн, полученных численно с приближенной точностью, то для нахождения последующих экстремумов зависимости $Fr = Fr(A)$ необходимо проводить численные расчеты со все возрастающей точностью. Расчет по второму алгоритму позволяет зафиксировать только три первых экстремума этой зависимости. Для получения более точных расчетов необходимо использовать другие методы, так как тесты, приведенные в §32, показывают, что используемый метод позволяет добиться точности решения лишь в пятом знаке после запятой.

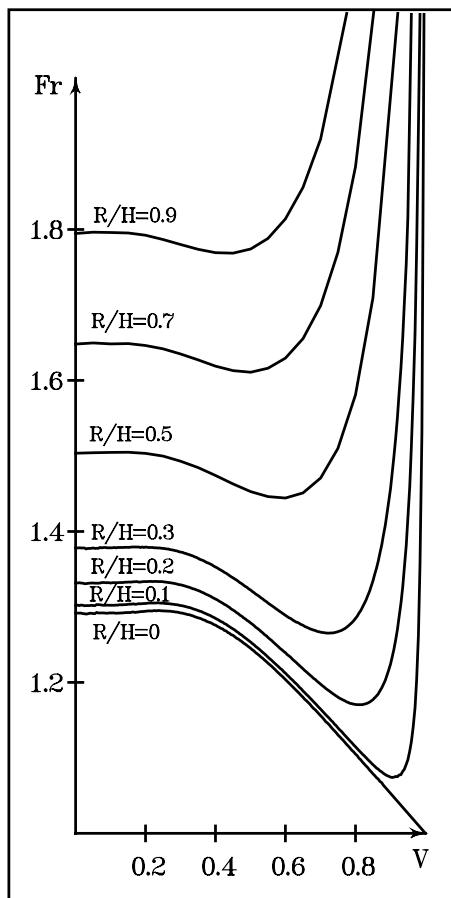


Рис. 21. Зависимость числа Фруда от параметра V

На рис. 21 показана зависимость числа Фруда Fr от безразмерного параметра V . Здесь тоже имеется, хоть и менее четко

выраженная, неоднозначная зависимость $Fr = Fr(V)$ в зоне предельных волн.

Исходя из результатов расчетов, можно сделать вывод о том, что существуют диапазоны чисел Фруда, при которых задача обтекания полукруговых препятствий (вплоть до нулевого радиуса) имеет одно, два, три, четыре и, возможно, более решений.

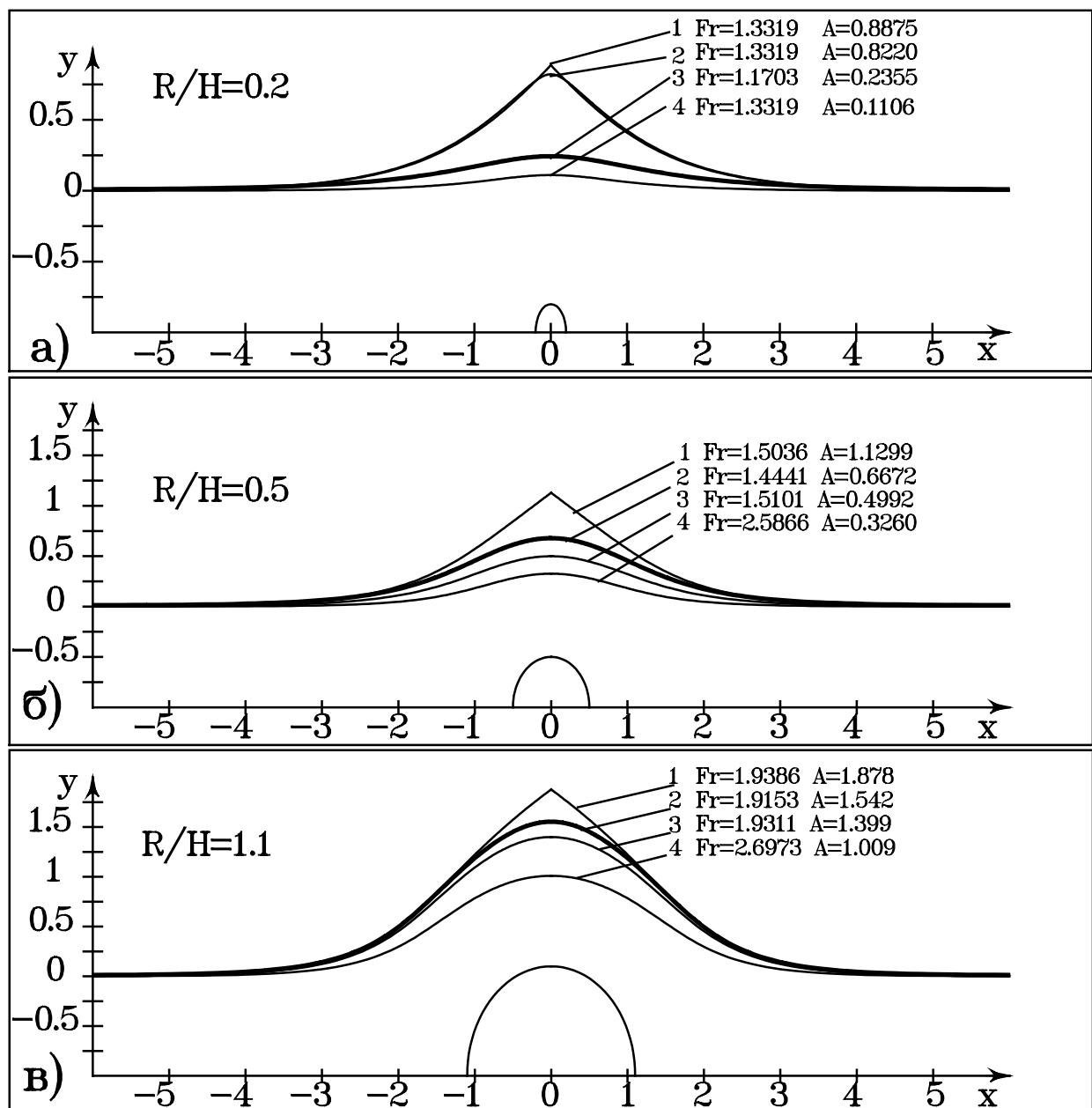


Рис. 22. Различные формы свободной поверхности при обтекании цилиндра

На рис. 22 показаны формы свободной поверхности для радиусов $R = 0,2$ (рис. 22,а), $R = 0,5$ (рис. 22,б), $R = 1,1$ (рис. 22,в). Жирной линией выделены кривые, соответствующие минимальному числу Фруда, при котором были получены стационарные решения. Цифрой 1 обозначены волны максимальной амплитуды (безразмерный параметр $V=0$). На рис. 22,а кривые 1, 2 и 4 демонстрируют неединственность решения задачи: для одного и того же значения числа Фруда имеем три различные формы свободной поверхности ($Fr = 1,3319$; $A=0,8875$ - кривая 1; $A=0,822$ - кривая 2; $A=0,1106$ - кривая 4). На этом рисунке не приведена форма свободной поверхности, отвечающая четвертому решению для того же числа Фруда, ввиду ее графического совпадения с кривой 1.

Построение нелинейных уединенных волн

Задача нахождения формы и всех характеристик нелинейных уединенных волн представляет самостоятельный интерес в связи со многими научными и практическими приложениями. В 1834 году Джон Скотт Рассел в своем интересном экспериментальном исследовании обратил особое внимание на необычные волны, которые он назвал “уединенные волны”. Такая волна представляла собой одиночное возвышение, высота которого не обязательно была мала по сравнению с глубиной жидкости. Она могла проходить большие расстояния вдоль равномерного канала, практически не меняя своего типа. В 1844 году Дж. Рассел сделал публичный доклад о своем открытии в Британской ассоциации развития науки. Исторический обзор развития теории волн на поверхности жидкости можно найти в обзоре [42]. Здесь же приводятся уравнения для описания уединенной волны Буссинеска и Рэлея, Кортевега-де Вриза и др.

В литературе приводится немалое количество примеров уединенных волн (солитонов). Отметим лишь некоторые из них, полученные аналитически по различным линейным и приближенным нелинейным теориям с помощью численного анализа точных и приближенных нелинейных уравнений: [56-58, 60, 70, 72, 91, 105, 117, 120]; а также путем моделирования волн различными подвижками боковых стенок, дна, или с помощью создания

локального возвышения уровня жидкости: [88, 114], найденные в эксперименте [25, 59], и отмеченные в обзоре [80]. Для решения нестационарных задач о распространении уединенных волн по бассейну конечной глубины и их взаимодействию с различными преградами необходимо задавать начальную форму волны и распределение потенциала на ней. Эти формы берутся из решения стационарной задачи при радиусе препятствия $R = 0$.

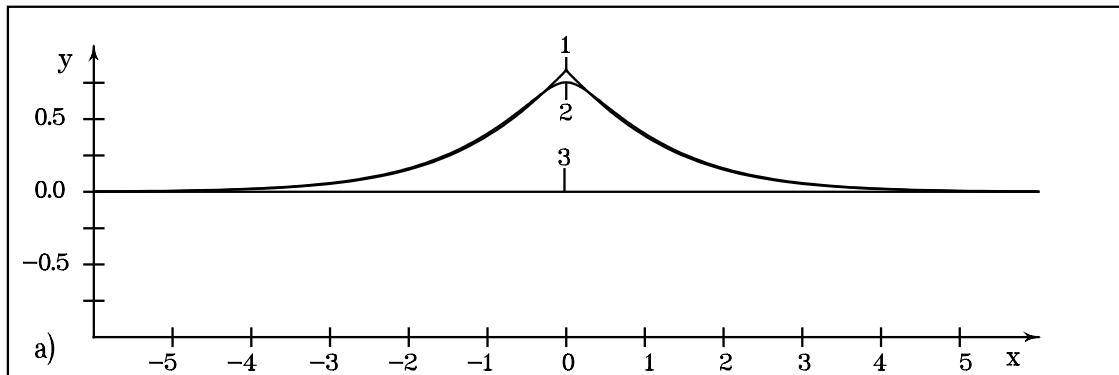


Рис. 23. Три решения уединенной волны

На рис. 23 приведены формы свободной поверхности, соответствующие трем решениям при $R/H = 0$ (уединенная волна), $Fr = 1,29095$ ($A = 0,83327$ - кривая 1, $A = 0,75283$ - кривая 2, $A = 0$ - кривая 3).

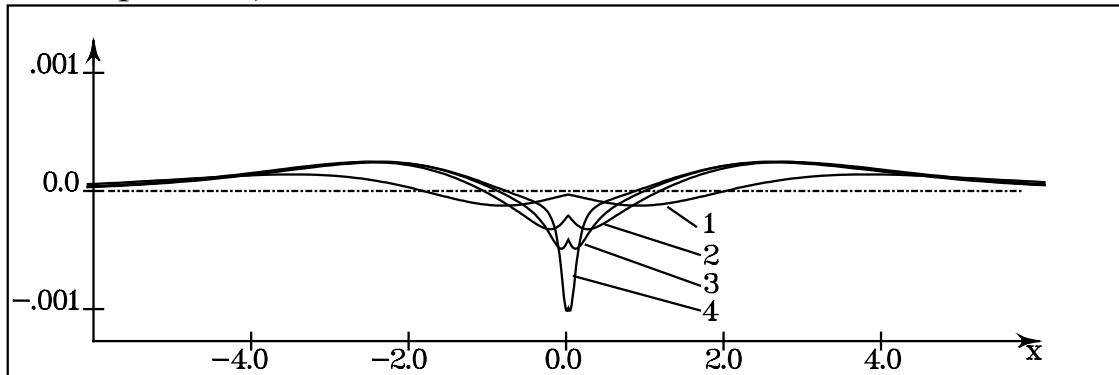


Рис. 24. Графики второй производной от форм уединенных волн

Важным свойством уединенной волны является то, что она описывается кривой, имеющей лишь две, симметрично расположенных относительно оси симметрии, точки перегиба. Для проверки данного свойства полученных кривых была вычислена вто-

рая производная $\frac{d^2y}{dx^2}$, которая теоретически должна иметь лишь одну (до оси симметрии) точку пересечения с осью Ox. На рис. 24 представлены графики второй производной: кривая 1 для амплитуды $A=0,33958$ ($V=0,7$), кривая 2 - $A=0,68221$ ($V=0,4$), кривая 3 - $A=0,75862$ ($V=0,3$), кривая 4 - $A=0,80419$ ($V=0,2$).

Для описания уединенной волны, распространяющейся по «спокойной воде», вводится новая функция

$$W(z) = Fr(w(z) - z), \Phi(x, y) = \operatorname{Re} W(z), \Psi(x, y) = \operatorname{Im} W(z).$$

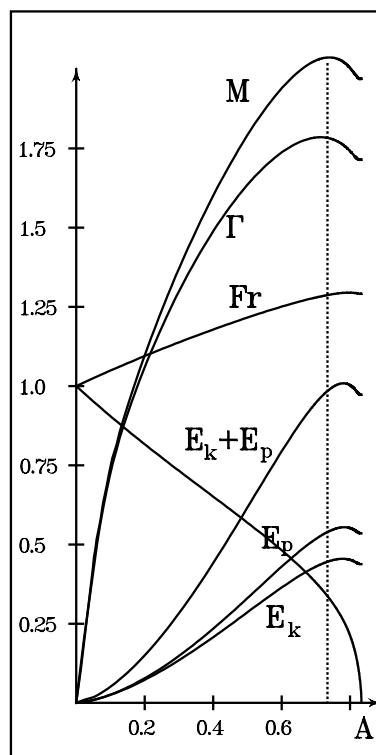


Рис. 25. Графики зависимостей интегральных характеристик от амплитуды

Важным моментом в исследовании уединенных волн является задача определения интегральных характеристик таких, как циркуляция Γ , масса M , потенциальная E_p и кинетическая E_k энергии волны. Закон сохранения массы и полной энергии позволяет использовать их для контроля точности численного метода.

В работе [110] для уединенных волн доказывается справедливость соотношений:

$$E_k = Fr(Fr \cdot M - \Gamma)/2, E_p = (Fr^2 - 1)M/3. \quad (413)$$

Эти интегральные зависимости служат хорошим критерием для контроля точности получаемых численно уединенных волн. Все величины, входящие в эти уравнения, определялись численно по формулам (3.15) - (3.18).

Абсолютная погрешность вычислений потенциальной и кинетической энергий по формулам

$$E_k = Fr(Fr \cdot M - \Gamma)/2, E_p = (Fr^2 - 1)M/3. \quad (413)$$

равнялась 10^{-3} для малых и предельных волн и 10^{-5} для волн в середине исследуемого диапазона.

В табл. 4 приведены рассчитанные характеристики уединенных волн: амплитуда A , число Фруда Fr , циркуляция Γ , масса M , потенциальная E_p , кинетическая E_k и полная $E_p + E_k$ энергии. Значения характеристик, приведенные в таблице, получены при решении задачи с шагом 0,001 по параметру V . Важно отметить, что все максимальные значения характеристик уединенных волн достигаются до наступления максимальной амплитуды (выделены жирным шрифтом). Кроме того, все они принимают максимальные значения при разных амплитудах уединенной волны. Этот факт также отмечается в работе [110]. Далее в таблице приводятся значения локальных минимумов интегральных характеристик, лежащих в зоне предельных волн (выделены жирным курсивом). В этом случае экстремумы интегральных характеристик также принимают свои минимальные значения при различных амплитудах уединенной волны. Эти же характеристики представлены в виде графиков на рис. 25, наглядно демонстрирующем наличие максимумов интегральных характеристик уединенной волны. На рис. 26 приведены графики этих же зависимостей в более крупном масштабе, позволяющем различить наличие локальных минимумов интегральных характеристик в зоне волн предельной амплитуды.

В табл. 5 приведены результаты из работ других авторов, посвященных вопросам построения волн максимальной амплитуды. Наиболее точными расчетами по уединенным волнам, вероятно, следует считать результаты, полученные в работах [89, 102] ($A = 0,833199$, $Fr = 1,290890$). Значения характеристик, получен-

ные в результате решения задачи альтернативным алгоритмом, отличаются от них в пятом знаке после запятой.

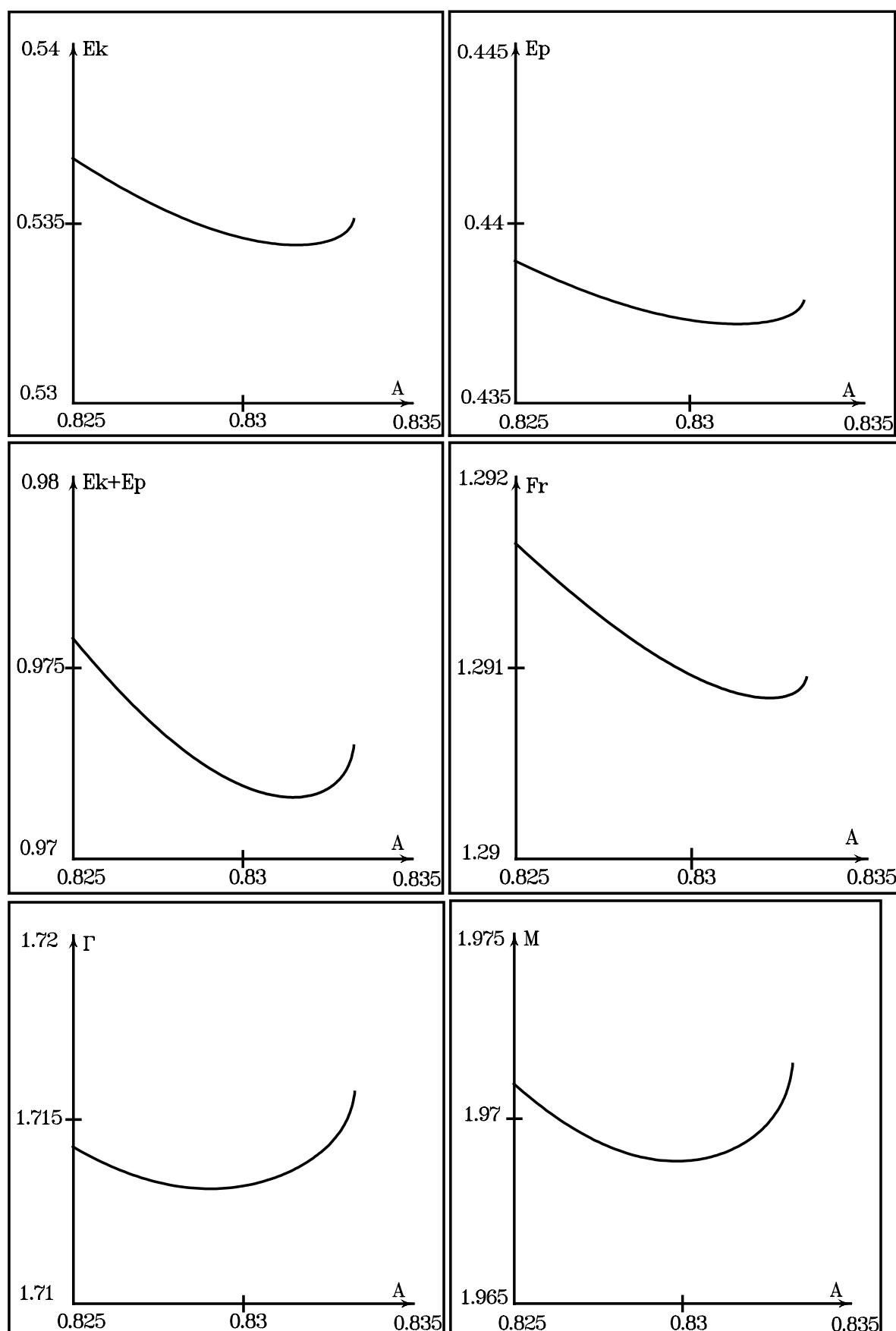


Рис. 26. Фрагменты графиков энергетических характеристик

Таблица 4

A	V	Fr	E_k	E_p	$E_p + E_k$	Γ	M
0.10492347	0.9	1.05093247	0.02797752	0.02691426	0.05489177	0.75720493	0.77097943
0.14952229	0.86	1.07163711	0.04880974	0.04626661	0.09507635	0.91092380	0.93500408
0.20715459	0.81	1.09760597	0.08189261	0.07625524	0.15814785	1.07746961	1.11767455
0.25456728	0.77	1.11831980	0.11382632	0.10454832	0.21837464	1.19625238	1.25183012
0.30290205	0.73	1.13883674	0.15033622	0.13627396	0.28661018	1.30425961	1.37723013
0.35187174	0.69	1.15899967	0.19095800	0.17092346	0.36188145	1.40210136	1.49423232
0.40111946	0.65	1.17862643	0.23498074	0.20780967	0.44279041	1.48976554	1.60247215
0.45021304	0.61	1.19750988	0.28140940	0.24604463	0.52745404	1.56689630	1.70113019
0.49864015	0.57	1.21541555	0.32894360	0.28453179	0.61347539	1.63295527	1.78909163
0.55733263	0.52	1.23603297	0.38748009	0.33103289	0.71851297	1.69911915	1.88211650
0.60200208	0.48	1.25078099	0.43137933	0.36522482	0.79660415	1.73842772	1.94156918
0.65381360	0.43	1.26659067	0.47947397	0.40188299	0.88135697	1.77037965	1.99573024
0.70070551	0.379	1.27924818	0.51754168	0.43003730	0.94757898	1.78417461	2.02744143
0.71396422	0.363	1.28243559	0.52677763	0.43667500	0.96345263	1.78493977	2.03266365
0.73960401	0.329	1.28792586	0.54183457	0.44716717	0.98900175	1.78170647	2.03692509
0.75042725	0.313	1.28990744	0.54677531	0.45043477	0.99721009	1.77821790	2.03602860
0.77850447	0.264	1.29369865	0.55400774	0.45443600	1.00844374	1.76203334	2.02427430
0.78142211	0.258	1.29394433	0.55416476	0.45438279	1.00854755	1.75967953	2.02213267
0.78330565	0.254	1.29408398	0.55419287	0.45429141	1.00848428	1.75808608	2.02064520
0.79666363	0.222	1.29457468	0.55252469	0.45220429	1.00472899	1.74509600	2.00760299
0.80024463	0.212	1.29452959	0.55144609	0.45116444	1.00261053	1.74112328	2.00333962
0.81000342	0.180	1.29392919	0.54695105	0.44717963	0.99413068	1.72953214	1.99024635
0.82007175	0.135	1.29251309	0.54017279	0.44159253	0.98176533	1.71806037	1.97615273
0.82898427	0.073	1.29106593	0.53488437	0.43750932	0.97239370	1.71312314	1.96892447
0.82979421	0.065	1.29098024	0.53464974	0.43734579	0.97199554	1.71317029	1.96885284
0.83007792	0.062	1.29095397	0.53458392	0.43730178	0.97188570	1.71321199	1.96885938
0.83132761	0.047	1.29086645	0.53441382	0.43720433	0.97161815	1.71357321	1.96911231
0.83147244	0.045	1.29085988	0.53440909	0.43720507	0.97161417	1.71363702	1.96916938
0.83161202	0.043	1.29085440	0.53440814	0.43720869	0.97161683	1.71370385	1.96923113
0.83222981	0.033	1.29084246	0.53445601	0.43726655	0.97172257	1.71407833	1.96960313
0.83327595	0.000	1.29095002	0.53512123	0.43784294	0.97296417	1.71574990	1.97147931

Таблица 5

Fr	A	M	E_p	E_k	источник
1,28607	0,82699	1,973	0,435	0,534	[45]
1,2881	0,8296	1,963	0,431	0,527	[108]
1,290889	0,833197	1,970	0,438	0,534	[124]
1,290906	0,833219				[122]
1,2909	0,8332	1,970	0,438	0,534	[102]
1,290890455	0,833199083	1,970	0,438	0,534	[89]
1,2909	0,8332	1,970	0,438	0,534	Настоящая работа

§38. Циркуляционное обтекание профилей стационарным потоком тяжелой жидкости конечной глубины со свободной границей

Решению задач обтекания профилей различными методами посвящено большое количество работ. Например, в работе [20] для решения задач обтекания профиля используется метод дискретных вихрей, который широко применяется в расчетах.

Решение краевых задач обтекания профилей часто сводится к решению сингулярных интегральных уравнений, которые помимо сингулярной имеют также параметрическую особенность (максимальная толщина профиля). Эта особенность проявляется в том, что по мере утончения профиля уменьшается расстояние между соседними точками на верхней и нижней сторонах его контура. В результате уравнения, записанные отдельно для верхней и нижней сторон профиля, становятся одинаковыми, что создает большие трудности при численном решении задачи в случае тонких профилей и в окрестности задней кромки.

В работе Д.Н. Горелова [32] получена система интегральных уравнений относительно касательных составляющих скоростей на верхней и нижней сторонах профиля, которая не имеет указанной параметрической особенности. Для решения системы уравнений применяется метод дискретных вихрей, показана применимость предложенного метода для решения задач обтекания профилей любой толщины, включая сколь угодно малую.

В работе [33] Д.Н. Гореловым построена аппроксимирующая функция для интенсивности вихревого слоя вблизи передней кромки профиля с учетом ее формы. Приведены формулы для расчета распределения давления и суммарных гидродинамических реакций. Показано, что в предельном случае бесконечно тонкого профиля предлагаемая аппроксимация позволяет точно определять подсасывающую силу.

В работах [34, 35] предложенная идея применена для решения линейной задачи о движении профиля под границей и над границей раздела двух тяжелых жидкостей.

Конструктивный метод решения плоской задачи об установившемся движении системы двух профилей произвольной формы под свободной поверхностью весомой жидкости предложен в работе [55]. Проведено исследование разрешимости и единственности решения рассматриваемой задачи. Метод решения основан на конформном отображении кругового кольца на область, внешнюю относительно профилей.

В работе [82] методом граничных элементов (МГЭ) решается задача циркуляционного обтекания системы профилей безграничным потоком жидкости. В качестве интегрального соотношения применяется третья формула Грина для функции тока.

Для решения задач циркуляционного обтекания профилей применять МГЭ с использованием третьей формулы Грина для функции потенциала скоростей $\phi(x, y)$ нельзя, так как $\phi(x, y)$ неоднозначно определена и при циркуляции, отличной от нуля, терпит разрыв первого рода в острой кромке профиля, в то время как функция тока $\psi(x, y)$ остается непрерывной [31].

Однако, если ввести новую однозначную функцию $\Phi(x, y) = \phi(x, y) - \Gamma \arg z / 2\pi$, то можно для решения использовать третью формулу Грина, при этом циркуляция Γ входит в решение как дополнительная неизвестная.

В работе [93] решается стационарная задача обтекания профилей МГЭ с использованием третьей формулы Грина для функции тока, но уже в ограниченном потоке со свободной поверхностью. Для определения неизвестной свободной границы в работе предложены итерационные алгоритмы для малых и больших чисел Фруда. Решение же задачи при числах Фруда, близких к единице, приведенными в работе алгоритмами невозможно.

Для решения задачи обтекания профиля в работе [111] предложен метод с использованием интегральной формулы Коши, записанной для касательной и нормальной составляющих скорости. Задача в безграничном потоке решена как для изолированного профиля, так и для системы профилей.

Постановка задачи

Для решения задачи используется метод комплексных гравитационных элементов, основанный на интегральной формуле Коши для комплексно-сопряженной скорости (см. §36). В основе алгоритма построения свободной границы лежит условие коллинеарности вектора скорости и касательной к границе.

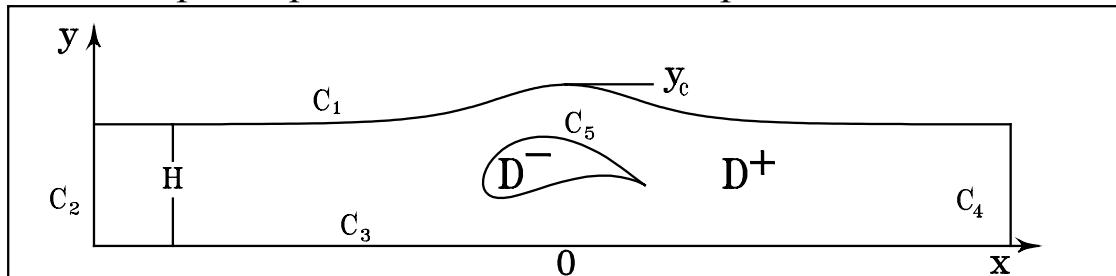


Рис. 27. Обтекание профиля ограниченным потоком жидкости

Пусть одиночный профиль с границей C_5 обтекается потоком весомой жидкости, ограниченной свободной поверхностью C_1 , прямолинейным дном C_3 , участками втекания C_2 и вытекания C_4 (рис. 27). Введем обозначения: V_∞ - скорость втекающего потока, H - глубина жидкости на бесконечности, g - ускорение свободного падения. Границы C_2 и C_4 должны быть выбраны на достаточно большом удалении от обтекаемого объекта с тем, чтобы поток через эти участки границы был близок к параллельному.

Будем рассматривать задачу в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Движение жидкости описывается функцией $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\phi(x, y)$ - потенциал скорости и $\psi(x, y)$ - функция тока. Для решения задачи циркуляционного обтекания профилей применять метод комплексных гравитационных элементов с использованием интегральной формулы Коши для функции комплексного потенциала $w(z)$ затруднительно, так как потенциал скорости $\phi(x, y)$ неоднозначно определен и при циркуляции, отличной от нуля, терпит разрыв первого рода в острой кромке профиля, в то время как поле скоростей остается непрерывным [31]. Поэтому задачу проще решать в терминах комплексно-сопряженной скорости

$$W(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_x - i V_y. \quad (414)$$

Пусть ξ - точка, принадлежащая контуру, тогда выражение (414) может быть записано в виде

$$W(\xi) = V_x(\xi) - i V_y(\xi) = (V_n(\xi) - i V_s(\xi)) e^{-i\alpha(\xi)},$$

где V_s и V_n касательная и нормальная компоненты вектора скорости в точке ξ , α - угол между вектором V_n и осью OX .

Задача об обтекании профиля может быть сведена к решению уравнения Лапласа

$$\Delta W(z) = 0, \quad z = x + iy \in D, \quad (415)$$

для аналитической в области течения D функции $W(z)$.

На профиле и дне выполняется условие непротекания

$$V_n = 0, \quad z \in C_5, C_3. \quad (416)$$

На боковых границах области ставится условие втекания и вытекания жидкости

$$V_n = \pm V_\infty, \quad z \in C_2, C_4. \quad (417)$$

Если ввести обозначения: V_s^+ и V_s^- - касательные составляющие векторов скорости при подходе к острой кромке с верхней и нижней сторон профиля, соответственно, то условие Жуковского-Чаплыгина можно записать следующим образом:

$$V_s^+ + V_s^- = 0. \quad (418)$$

В работах разных авторов, посвященных численному решению задачи циркуляционного обтекания профилей, предлагается несколько способов учета постулата Жуковского-Чаплыгина. На-

пример, Н.Н. Ясько [93] приводит следующую методику: на малом расстоянии от острой кромки профиля выбирается некоторая точка, лежащая в области течения на биссектрисе угла, образованного острой кромкой профиля; делается предположение, что эта точка принадлежит линии тока, сходящей с профилем, а следовательно, функция тока в этой точке равна функции тока на профиле. Далее, записывается гранично-интегральное уравнение, связывающее функцию тока для указанной точки с ее значениями по границе области. Циркуляция скорости по профилю входит в уравнение как дополнительный параметр, определяемый в ходе решения задачи.

Авторы работы [82] записывали постулат Жуковского-Чаплыгина в виде: $(V_s)_\delta^+ + (V_s)_\delta^- = 0$, где δ - малое расстояние от задней кромки на профиле, то есть контрольные точки располагаются на профиле. При использовании МГЭ с постоянными элементами учет постулата реализуется следующим образом: $(V_s)_1 + (V_s)_n = 0$, где $(V_s)_1$ и $(V_s)_n$ - значения скорости в первой и в последней контрольных точках, считая от задней кромки профиля.

Подход к удовлетворению условия Жуковского-Чаплыгина, описанный в [93], вносит определенную погрешность в вычисления, так как требует предопределения характера течения вблизи острой кромки профиля.

Подход, предложенный в [82], легко реализуется при использовании МГЭ с постоянными граничными элементами, но его затруднительно использовать при линейной аппроксимации функций на элементе.

Поэтому для учета постулата Жуковского-Чаплыгина был реализован следующий подход: в силу того, что V_n^+ и V_n^- равны нулю, то \vec{V}_s^+ и \vec{V}_s^- представляют собой два вектора одинаковой длины (рис. 28). Если ввести обозначение $\vec{V}_s^0 = \vec{V}_s^+ + \vec{V}_s^-$, то условие Жуковского-Чаплыгина в острой кромке запишется следующим образом:

$$V_s^0 = 0, \quad (419)$$

причем в данном случае угол α будет образован биссектрисой угла в острой кромке и осью OX .

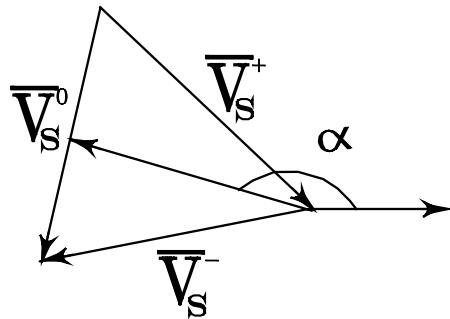


Рис.28. К вопросу об удовлетворении условия Жуковского-Чаплыгина

Свободная граница является линией тока, на которой справедливо уравнение Бернулли

$$\frac{1}{2} |W(z)|^2 + gy = \frac{V_\infty^2}{2} + gH, \quad z \in C_1. \quad (420)$$

Для численных расчетов задача приводится к безразмерному виду. В качестве характерных размерных величин выбирается глубина H и скорость потока V_∞ на бесконечности. Краевая задача останется без изменения за исключением условий (417), (420), которые преобразуются к виду

$$V_n = \pm 1, \quad z \in C_2, C_4 \quad (421)$$

$$|W(z)|^2 = 1 + 2 \frac{1-y}{Fr^2}, \quad z \in C_1, \quad (422)$$

где $Fr = \frac{V_\infty}{\sqrt{gH}}$ - число Фруда.

Приведенная к безразмерному виду краевая задача зависит от следующих параметров: числа Фруда Fr , формы обтекаемого те-

ла, глубины его погружения, в случае обтекания крыла - угол атаки, толщина и искривленность крылового профиля.

Алгоритм построения свободной границы

Нахождение касательной составляющей скорости

Пусть на k -м приближении известна граница C_1 . Для того, чтобы начать итерационный процесс ее уточнения, необходимо найти V_s на границе C_1 . Выразим из уравнения Бернулли (422) модуль вектора скорости

$$|W| = \sqrt{1 + 2(1 - y)/Fr^2}. \quad (423)$$

Применяя методику, изложенную в работах [8, 37], для однозначного решения задачи вводим безразмерный параметр $V = V_0/V_\infty$, характеризующий отношение скорости в вершине волны к скорости потока на бесконечности. Тогда уравнение (423) примет вид:

$$|W| = \sqrt{1 - (1 - V^2) \frac{y - 1}{y_0 - 1}}, \quad (424)$$

где y_0 - ордината точки свободной поверхности, в которой задана скорость V_0 .

Поскольку граница C_1 является линией тока, то вектор скорости на ней направлен по касательной. Отсюда следует, что $|W| = V_s$. Для любой точки свободной границы имеем

$$V_{s_j} = \sqrt{1 - (1 - V^2) \frac{y_j - 1}{y_0 - 1}}, \quad (425)$$

где $i = \overline{1, N_g}$ - номера узлов точек свободной границы.

Определение формы свободной поверхности

Алгоритм нахождения свободной границы осуществляется по схеме, описанной в предыдущем параграфе.

После того как процесс устанавливается, число Фруда вычисляется по формуле

$$Fr = \sqrt{2(y_0 - 1)/(1 - V^2)}.$$

В качестве нулевого приближения берется прямая линия $y^0 = 1$, исключение составляет окрестность точки y_0 , в которой начальное значение $y_0^0 = 1 + 0,001$.

Построение линий тока

Для построения линий тока существует несколько способов. Например, построив внутри области сетку конечных элементов, найти в каждой внутренней точке функцию тока и построить изолинии.

В данной работе использовался другой подход. После определения формы свободной поверхности C_1 и компонент вектора скорости V_x , V_y , а следовательно и функции комплексно-сопряженной скорости на всей границе области D ($W(z) = V_x - iV_y$), находилась с помощью интегральной формулы Коши функция комплексно-сопряженной скорости в любой точке, лежащей внутри области течения D

$$W(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{W(z)}{z - z_0} dz, \quad z \in D. \quad (426)$$

Используя формулу (3.9) можно дискретный аналог выражения (426) записать следующим образом:

$$W(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^N \left[\frac{(z_0 - z_m)W_{m+1}}{z_{m+1} - z_m} - \frac{(z_0 - z_{m+1})W_m}{z_{m+1} - z_m} \right] \ln \left(\frac{z_{m+1} - z_0}{z_m - z_0} \right). \quad (427)$$

В результате алгоритм построения линий тока осуществлялся по следующей схеме:

- 1) задавалась точка $z_0^k \in D$, лежащая на линии тока, которую требуется построить;
- 2) по формуле (427) вычислялись компоненты вектора скорости в точке z_0^k $V_x(z_0^k), V_y(z_0^k)$;
- 3) из условия коллинеарности вектора скорости и касательной к линии тока $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} \right)$ вычислялись новые значения точки z_0^{k+1} , принадлежащей этой же линии тока, по формулам:

$$x_0^{k+1} = x_0^k + \delta \cdot V_x(z_0^k), \quad y_0^{k+1} = y_0^k + \delta \cdot V_y(z_0^k),$$

где δ - малая величина;

- 4) осуществляется переход к п.2.

В представленных ниже результатах расчетов линии тока строились вблизи обтекаемого контура. Расчетная область ограничивалась вертикальными прямыми $x = \pm 15$. Исходные точки z_0 задавались на вертикальной прямой $x = -10$ с некоторым шагом по ординате. Процесс построения конкретной линии тока прекращался после того, как она пересекалась с вертикальной прямой $x = 10$.

Нулевая линия тока строилась следующим образом: от точки схода отступаем на δ внутрь области течения по биссектрисе угла острой кромки профиля и таким образом определяем точку z_0 и, используя приведенный выше алгоритм, строим первую часть линии тока. На противоположной стороне контура критическая точка находилась следующим образом: определялся граничный элемент, на котором касательная составляющая вектора скорости меняет знак, из условия:

$$V_{s_j} \cdot V_{s_{j+1}} < 0.$$

Затем, используя линейную аппроксимацию функции V_s на граничном элементе, находилась точка, в которой $V_s = 0$. Отсту-

пая на δ внутрь области течения по направлению, перпендикулярному к граничному элементу, определялась точка z_0 . В данном случае построение части линии тока осуществлялось по формулам:

$$\begin{aligned}x_0^{k+1} &= x_0^k - \delta \cdot V_x(z_0^k) \\y_0^{k+1} &= y_0^k - \delta \cdot V_y(z_0^k).\end{aligned}$$

Остановка процесса построения этой части линии тока происходила после пересечения ее с вертикальной прямой $x = -10$.

Во всех расчетах по построению линий тока использовался параметр $\delta_1 = 0,001$. Использование $\delta_2 = 0,0001$ увеличивает время построения линий тока в 10 раз, максимальное отклонение полученных линий тока от линий тока, построенных при использовании δ_1 составляло 10^{-5} .

Тестовые расчеты

Проверка точности вычислений в области с фиксированной границей

Для проверки точности модифицированного КМГЭ проводился тест, заключающийся в следующем: требуется найти решение уравнения Лапласа для функции $W(z)$ в области

$$D = \{0 \leq x \leq 2\pi; -1 \leq y \leq 0,5 \sin(x)\},$$

для которой на дне и вертикальных стенках ставится условие непротекания $V_n = 0$, а на верхней границе гармоническая функция

$$V_s = \frac{\sin x \cosh(y+1) - \cos^2 x \sinh(y+1)}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}.$$

Во второй колонке таблицы 6 приведена относительная погрешность вычисления нормальной составляющей вектора скорости в зависимости от числа узлов по границе области

$$E_1 = \frac{\max |V_n^T - V_n^M|}{\max |V_n^T|},$$

где V_n^M - численное значение нормальной компоненты вектора скорости, а точное значение вычислено по формуле:

$$V_n^T = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} (\sin x \cosh(y+1) + \sinh(y+1)).$$

В третьей колонке приведены числа обусловленности $K(C)$ результирующей системы линейных алгебраических уравнений.

Таблица 6

N	E_1	$K(C)$
77	$1,2 \cdot 10^{-2}$	9,44
144	$2,8 \cdot 10^{-3}$	10,32
288	$6,9 \cdot 10^{-4}$	11,26
496	$1,7 \cdot 10^{-4}$	13,43

Проверка сходимости алгоритма построения свободной границы

Проверка алгоритма построения свободной поверхности проводится на решении стационарной задачи о построении уединенных волн. При отсутствии препятствия в потоке, варьируя параметр V , в результате решения задачи получены уединенные стационарные волны, по своим параметрам мало отличающиеся от волн, полученных в работе [8], в которой использовался аналогичный метод построения свободной границы, но решение задачи основано на обычном КМГЭ. В таблице 7 приведены числа Фруда Fr и амплитуды уединенных волн A : первая строка соответствует параметру $V = 0,001$, вторая - $V = 0,7$, в первом столбце приведены значения, полученные с использованием модифицированного КМГЭ, во второй - обычного КМГЭ.

Таблица 7

$Fr(A)$ (модифицированный КМГЭ)	$Fr(A)$ (обычный КМГЭ)
1,2913(0,8337)	1,2909(0,8332)
1,1541(0,3396)	1,1540(0,3395)

Обтекание профиля Жуковского безграничным потоком жидкости, вычисление циркуляции, подъемной силы и момента

Третий тест проводился на решении задачи обтекания профиля Жуковского безграничным потоком жидкости. Данная задача имеет аналитическое решение и является хорошей тестовой проверкой численного метода.

Профиль Жуковского может быть задан параметрически в виде [82]:

$$x(t) = \frac{c(c^2 + b^2 + 1)}{2(c^2 + b^2)} - 1, \quad y(t) = \frac{c(c^2 + b^2 - 1)}{2(c^2 + b^2)}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (428)$$

где $c = R \cos(\beta + \gamma) - d \cos \gamma$, $b = R \sin(\beta + \gamma) + d \sin \gamma + h$,

$$R = \sqrt{1 + h^2} + d, \quad \gamma = \arctan h.$$

Параметры d и h характеризуют толщину и искривленность профиля. Для профиля Жуковского скорость потока на профиле определяется аналитически в параметрическом виде:

$$V_s(t) = \frac{V_\infty R \sin(\beta + \gamma - t) + \Gamma / 2\pi}{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}}, \quad (429)$$

где β - угол атаки.

Циркуляция скорости вдоль контура профиля вычисляется аналитически:

$$\Gamma = -2\pi R V_\infty \sin(\beta + \gamma). \quad (430)$$

Численное значение циркуляции вычислялось по формуле [26]:

$$\Gamma = \int_C V_s ds. \quad (431)$$

Очень важными являются следующие гидродинамические характеристики крылового профиля - подъемная сила и момент ее относительно острой кромки профиля. Коэффициенты подъемной силы F_y и силы сопротивления F_x вычислялись по формулам:

$$F_x = \int_C V_s^2 \cos \alpha(s) ds, \quad F_y = - \int_C V_s^2 \sin \alpha(s) ds.$$

Дополнительным критерием правильности численных расчетов может служить условие $F_x = 0$ - парадокс Даламбера в случае идеальной жидкости.

Коэффициент момента подъемной силы M относительно острой кромки профиля с координатами (x_0, y_0) может быть вычислен по формуле:

$$M(x_0, y_0) = - \int_C V_s^2 ((x - x_0) \sin \alpha(s) + (y - y_0) \cos \alpha(s)) ds.$$

Физическая интерпретация гидродинамических характеристик следующая: если $\Gamma < 0$, то коэффициент подъемной силы $F_y > 0$, и наоборот, если $\Gamma > 0$, то коэффициент подъемной силы $F_y < 0$; отрицательное значение момента подъемной силы относительно (x_0, y_0) означает, что F_y стремится повернуть тело относительно точки (x_0, y_0) по часовой стрелке, и наоборот, если $F_y > 0$, то против часовой.

На рис. 29 представлены графики распределения V_s^2 по профилю, а также форма самого профиля. Параметры профилей следующие: рис. 29,а - $\beta = 0^\circ; d = 0,2; h = 0,2$; рис. 29,б -

$\beta = 0^0; d = 0,2; h = 0,5$; рис. 29,в - $\beta = 15^0; d = 0,2; h = 0$; рис. 29,г - $\beta = 15^0; d = 0,2; h = 0,2$; рис. 29,д - $\beta = 15^0; d = 0,2; h = 0,5$. Следует отметить, что численные расчеты квадрата скорости по профилю, результаты которых представлены на рис. 29, совпали с графической точностью с аналитически вычисленными при помощи формулы (429). Квадрат скорости на всех графиках при обходе крыла на нижней стороне принимает большие значения, чем на верхней. Так как обход крыла при численных расчетах задавался положительным (по часовой стрелке), то циркуляция скорости по профилю должна быть отрицательной, а подъемная сила – положительной.

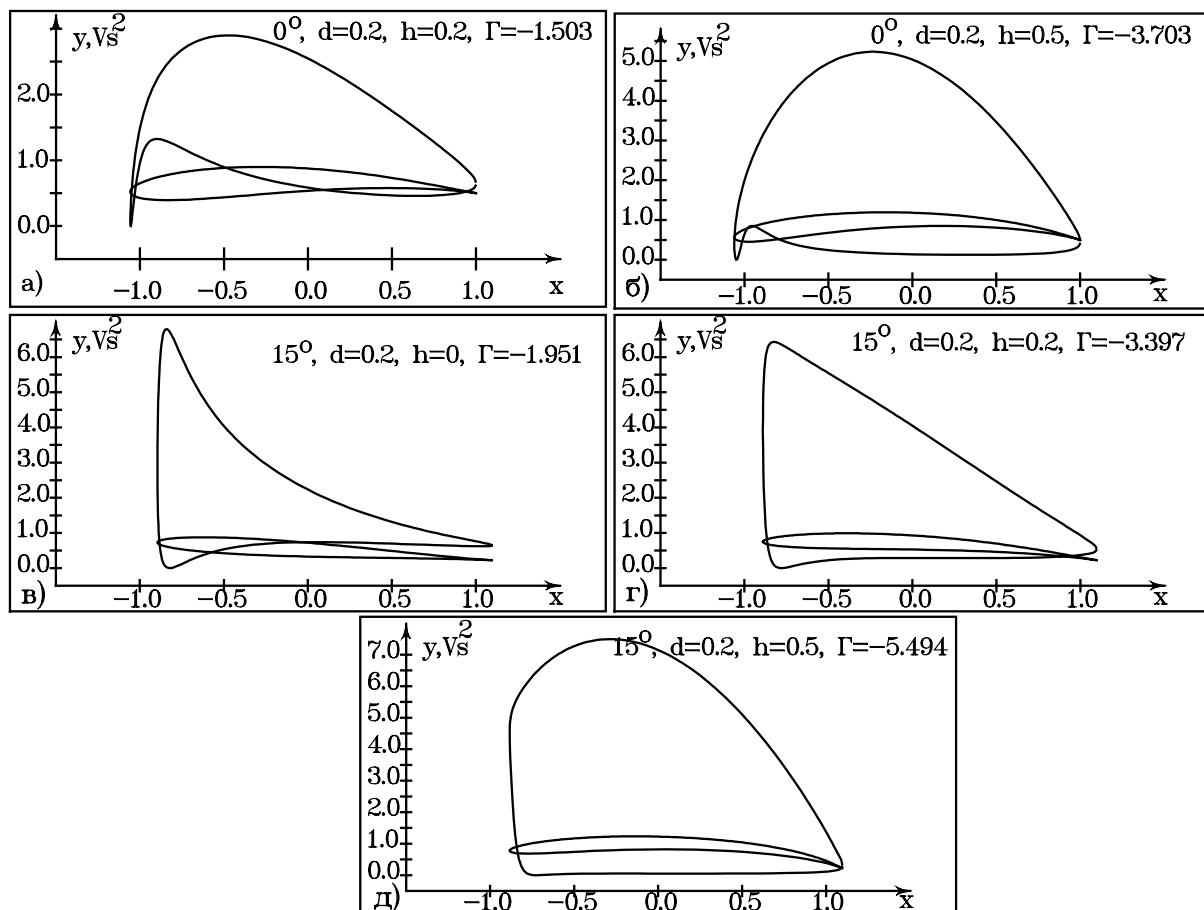


Рис.29. Тесты по обтеканию профилей в безграничной жидкости

В таблице 8 приведены значения гидродинамических характеристик в зависимости от угла атаки β , толщины d и искривленности h профиля. Символом Γ обозначено точное значение

циркуляции; Γ_{200} - численное значение циркуляции, цифра 200 означает количество узлов по границе профиля;

$$E_2(200) = \frac{\max |V_s^T - V_s^M|}{\max |V_s^T|} - \text{относительная погрешность, где } V_s^T -$$

точное значение касательных компонент скорости по профилю, определяемых формулой (429), V_s^M - численные значения, полученные КМГЭ; F_x , F_y - коэффициенты силы сопротивления и подъемной силы, M - момент подъемной силы относительно острой кромки профиля.

Таблица 8

β	0^0	0^0	15^0	15^0	15^0
d	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
h	0,2	0,5	0	0,2	0,5
Γ	-1,503	-3,703	-1,951	-3,397	-5,494
Γ_{200}	-1,489	-3,671	-1,947	-3,371	-5,446
$E2(200)$	0,004	0,007	0,002	0,007	0,009
F_x	0,0002	0,001	0,0005	0,002	0,003
F_y	2,978	7,34	3,893	6,739	10,887
M	-3,318	-8,111	-5,912	-8,886	-12,744

Приведенные значения F_x близки к нулю, а относительная погрешность найденных значений V_s незначительна, что свидетельствует о достаточно высокой точности разработанного метода.

Численные результаты расчета задачи о циркуляционном обтекании тел

В качестве примеров рассмотрены две задачи: циркуляционное обтекание кругового контура диаметра $0,4H$ и руля Жуковского $d = 0,2H; h = 0$, построенного по формулам (428), а затем пропорционально уменьшенного до $l = 0,4H$, где l - длина хорды профиля. Граница области аппроксимировалась 500 эле-

ментами, 100 из которых задавали обтекаемый объект, 200 - свободную границу.

Если для руля Жуковского точка схода линий тока находится в острой кромке, то для кругового профиля она неизвестна и для однозначного решения задачи необходимо принудительно задавать либо циркуляцию скорости на круговом контуре, либо точку схода. В описанной процедуре решения задачи оказалось очень просто задавать точку схода - для этого нужно выставить условие Жуковского-Чаплыгина (419) в этой точке.

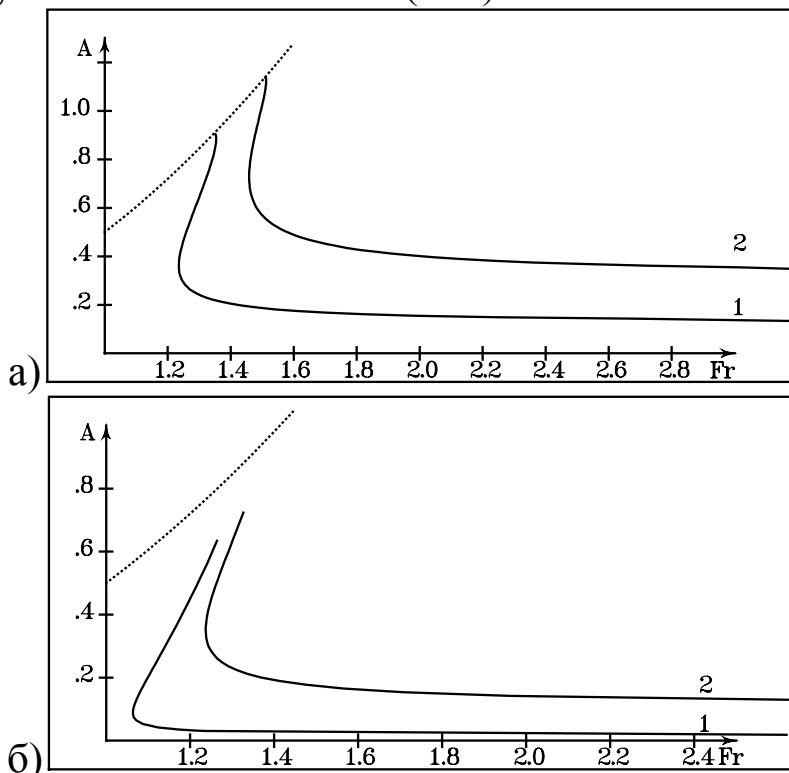


Рис. 30. К вопросу о неединственности решения при обтекании профилей

Анализ результатов расчетов задачи циркуляционного обтекания кругового контура и руля Жуковского позволяет утверждать, что при числах Фруда, близких к единице, задача имеет неединственное решение. На рис. 30,а представлены результаты расчетов зависимости амплитуды A волн от числа Фруда при обтекании кругового контура, центр которого находился в точке $(0; 0,5)$ (кривая 1 - точка схода $(0,2; 0,5)$, кривая 2 - $(0,152; 0,37)$). На рис. 30,б представлена зависимость $A(Fr)$ при обтекании руля Жуковского, острия кромка которого находилась в точке $(0; 0,5)$ (кривая 1 - угол атаки $\beta = 0^0$, кривая 2 - $\beta = 15^0$). Штриховая ли-

ния соответствует графику зависимости $A_{\max} = Fr^2 / 2$ и является пределом по амплитуде существования стационарных решений. Кривые $A = A(Fr)$ на рис. 30,б не достигают штриховой линии, видимо, для циркуляционного обтекания профилей справедлива другая оценка верхней границы для амплитуд, при которых задача имеет стационарное решение. Качественное поведение кривых на рис. 30 аналогично кривым, полученным при решении стационарной задачи обтекания полукругового выступа на дне.

На рис. 31, а, б показаны формы свободной поверхности при обтекании кругового контура (а - точка схода $(0,2;0,5)$ $Fr=1,351$; $A=0,904$; $Fr=1,346$; $A=0,818$; $Fr=1,235$; $A=0,356$; $Fr=1,346$; $A=0,22$; кривые (1-4); б - точка схода $(0,152;0,37)$ $Fr=1,511$; $A=1,138$; $Fr=1,506$; $A=1,057$; $Fr=1,458$; $A=0,718$; $Fr=1,506$; $A=0,562$; кривые (1-4)).

На рис. 31, в, г - для руля Жуковского (в - $\beta = 0^0$ $Fr=1,264$; $A=0,634$; $Fr=1,173$; $A=0,383$; $Fr=1,064$; $A=0,087$; $Fr=1,173$; $A=0,035$; кривые (1-4); г - $\beta = 15^0$ $Fr=1,326$; $A=0,724$; $Fr=1,291$; $A=0,602$; $Fr=1,237$; $A=0,355$; $Fr=1,291$; $A=0,236$; кривые (1-4)).

На рис. 31 кривые 1 соответствуют волне максимальной амплитуды, для которой было получено стационарное решение, кривые 2-4 по отдельности на каждом рисунке соответствуют одному и тому же числу Фруда, но различным амплитудам (демонстрируют неединственность), кривые 3 соответствуют числу Фруда, ниже которого стационарных решений нет.

На рис. 32 приведены картины линий тока поля течения вблизи обтекаемого объекта: а) круговой контур, точка схода $(0,2;0,5)$; $Fr=1,235$; $A=0,356$; б) круговой контур, точка схода $(0,152;0,37)$; $Fr=1,458$; $A=0,718$; в) руль Жуковского, угол атаки $\beta = 0^0$; $Fr=1,064$; $A=0,087$; г) руль Жуковского, угол атаки $\beta = 15^0$; $Fr=1,237$; $A=0,355$.

Для построения линий тока вычислялось поле скоростей внутри области течения. Хорошее согласование картин течения с условием Жуковского может служить косвенным подтверждением правильности расчетов.

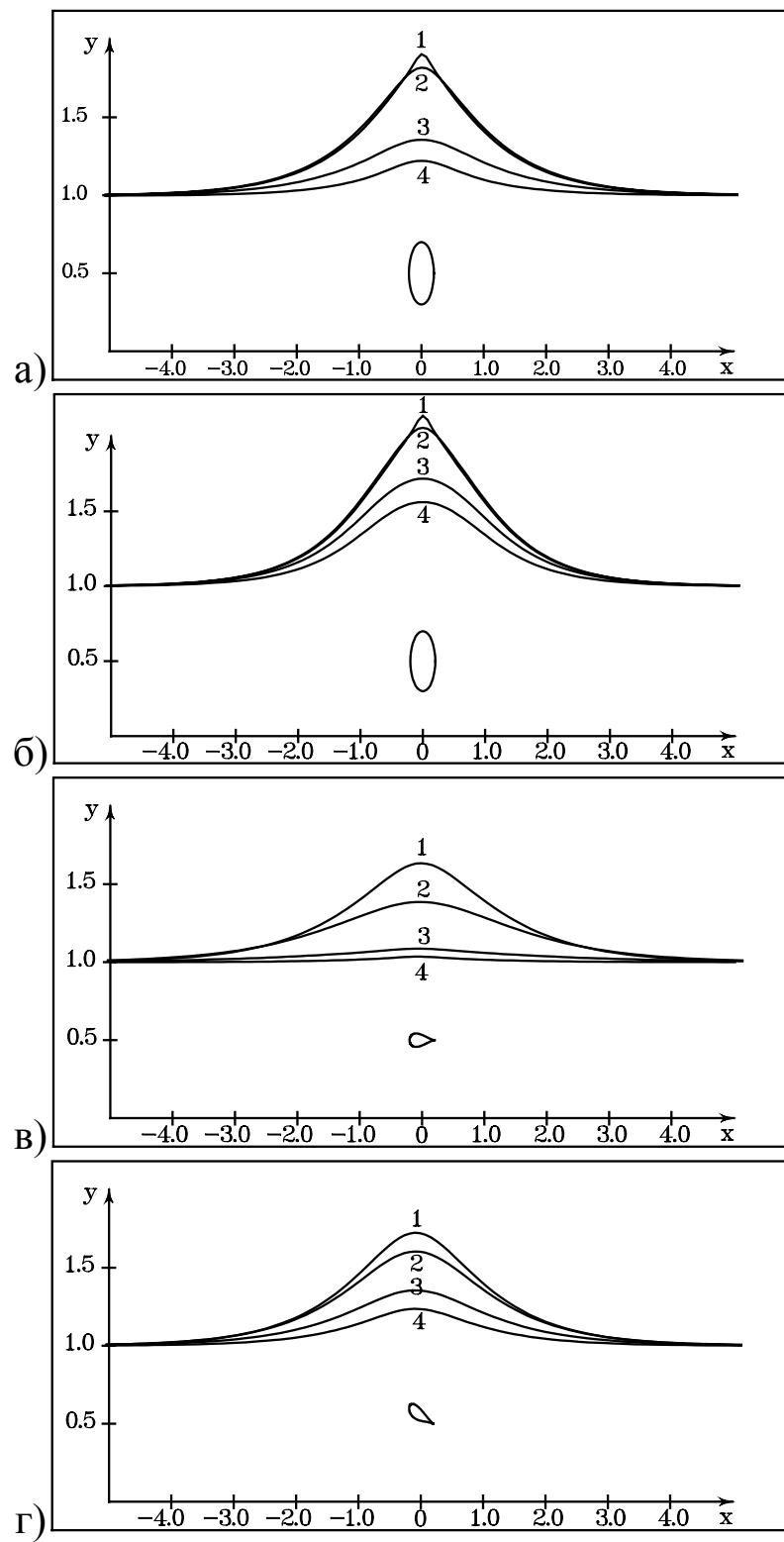


Рис. 31.

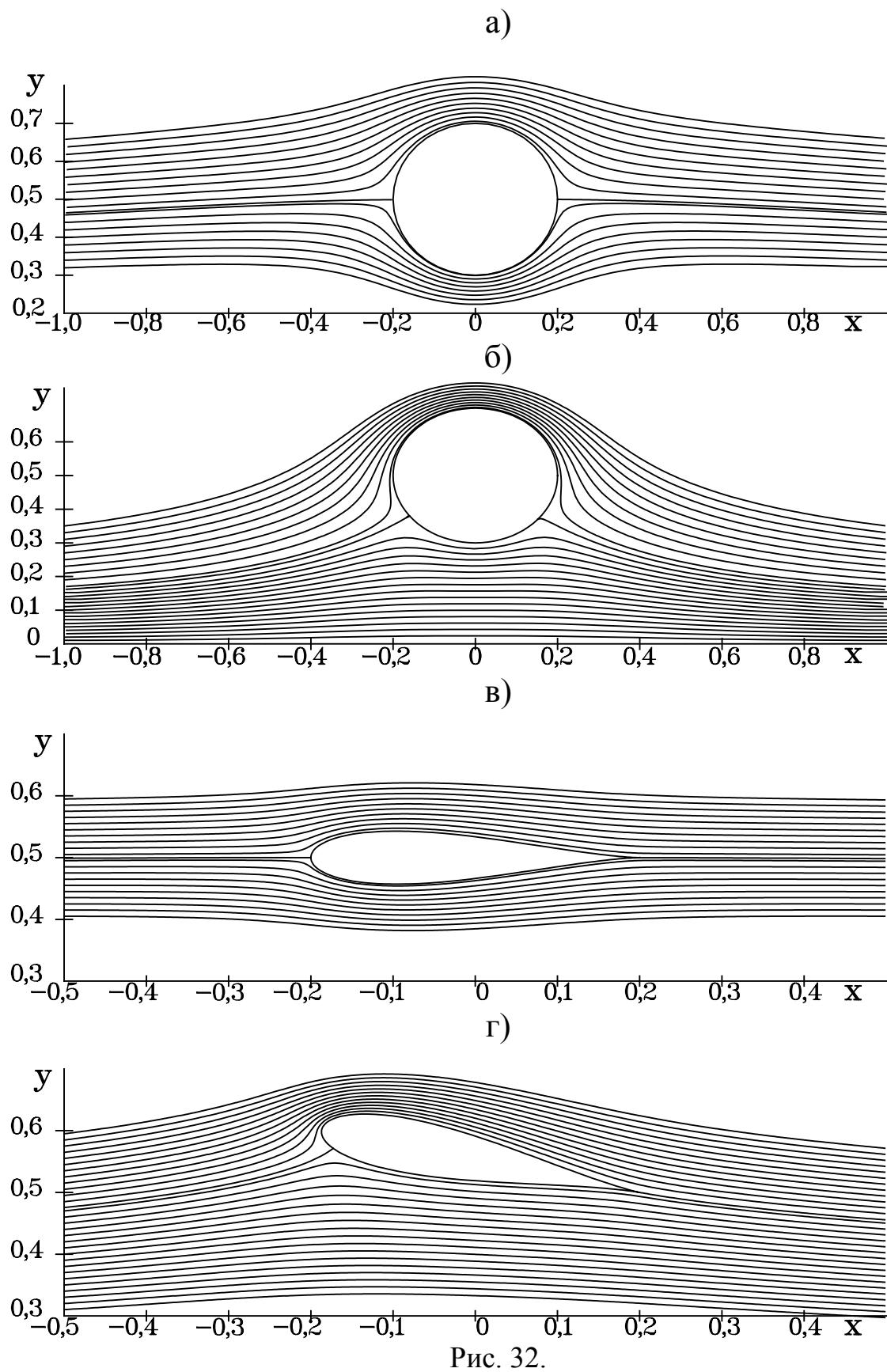


Рис. 32.

На рис. 33 представлены зависимости гидродинамических характеристик от числа Фруда (а - при обтекании цилиндра, точка схода $(0,152; 0,37)$; б - при обтекании руля Жуковского, угол атаки $\beta = 15^0$). Кривые 1, 2, 3 на рис. 33, а соответствуют F_y , $M \times (-5)$, $\Gamma \times (-1)$; на рис. 33, б - $M \times (-5)$, $\Gamma \times (-2)$, F_y . Для двух других обтекаемых объектов графики не приведены ввиду малости значений их гидродинамических характеристик.

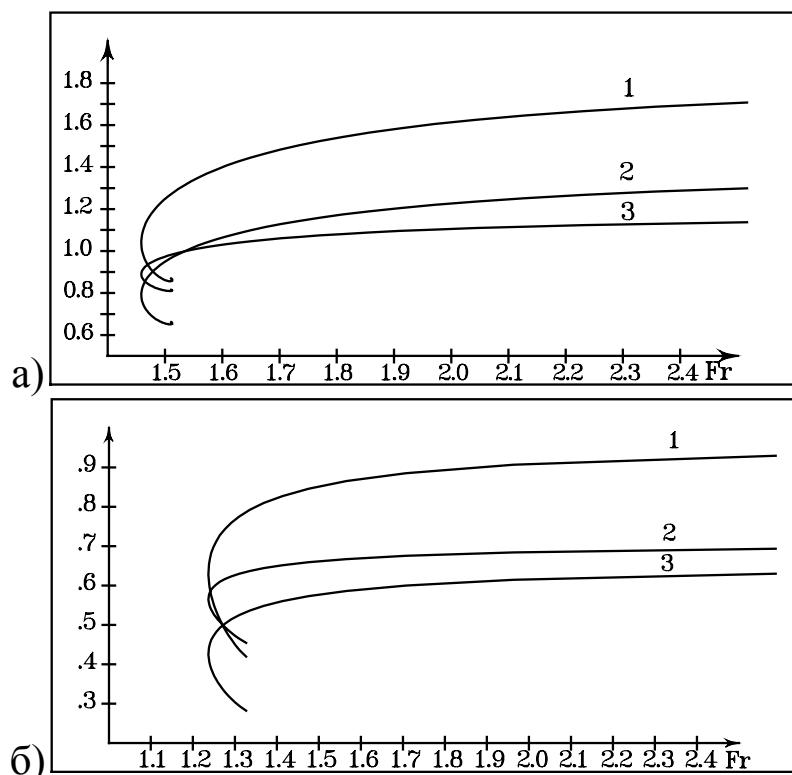


Рис. 33.

§39. Нестационарные задачи взаимодействия уединенных волн с различными препятствиями

В данном параграфе приводится методика расчетов нестационарных задач при взаимодействии уединенных волн с различными препятствиями, например, наклонной твердой стенкой. Задачам такого типа посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ в связи с важностью вопросов по определению воздействия волн на гидротехнические сооружения и акватории портов. Основное внимание в задачах наката уединенных волн на наклонный берег уделяется, как правило, определению максимального значения заплеска и откату волны, динамическому воздействию волны на береговое сооружение. В этой же работе изучаются эффекты, связанные с нелинейностью процесса взаимодействия волн с препятствиями. Факт опрокидывания волн представляет несомненный интерес, потому что имеет практическое значение в таких вопросах как скорость размыва берегов, разрушение плотин и т.д.

К недостаткам выбранного метода следует отнести невозможность проводить расчет после того, как гребень опрокидывающейся волны соприкоснется с поверхностью водоема.

Постановка задачи

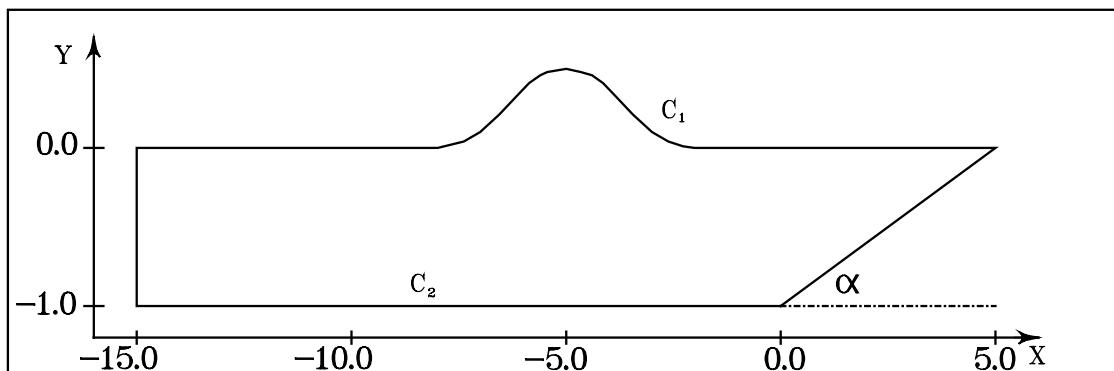


Рис. 34. Схема области течения и основные обозначения

В расчетной области течения D , ограниченной свободной поверхностью C_1 и твердыми стенками C_2 (рис.34), решается уравнение Лапласа

$$\Delta w(z) = 0, \quad z = x + iy \in D, \quad (432)$$

для аналитической в области течения D функции комплексного потенциала $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$.

На твердых границах области выполняется условие непротекания

$$\psi = 0, \quad z \in C_2. \quad (433)$$

На свободной границе выполняются кинематическое и динамическое условия

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad z \in C_1, \quad (434)$$

$$\frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gy = 0, \quad z \in C_1, \quad (435)$$

где g - ускорение свободного падения. Начальное положение свободной границы, соответствующее уединенной волне, и распределение потенциала на ней получены из решения стационарной задачи об уединенной волне (см. §37). При этом предполагается, что на бесконечности жидкость покойится: $y(\infty) = 0, z \in C_1$.

В численных расчетах область течения ограничивается вертикальными стенками, на которых ставится условие непротекания. Для удобства численной реализации задача приводится к безразмерному виду. В качестве характерных размерных величин выбираются ускорение свободного падения g и глубина бассейна H . При этом краевая задача (432)-(434) останется без изменений, а уравнение (435) примет вид:

$$\frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + y = 0, \quad z \in C_1. \quad (436)$$

По заданному начальному положению свободной границы и расположению препятствия требуется найти положение свободной границы в последующие моменты времени.

*Алгоритм движения по времени***Метод Эйлера для движения по времени**

Используемый ниже метод решения задачи впервые был предложен М.А. Лаврентьевым и Б.В. Шабатом [54] и хорошо зарекомендовал себя при решении задач со свободными границами [7, 9, 11, 13, 14, 75].

Краевая задача (432)-(434), (436) является нестационарной, но в отличие от традиционных задач математической физики время явно входит только в граничные условия (434), (436), представляющие собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, для интегрирования которых используется явный метод Эйлера.

Пусть в некоторый момент времени t_0 задано положение свободной границы C_1^0 и распределение потенциала ϕ^0 на ней. Далее необходимо решить уравнение Лапласа (432) в области D с условием ϕ^0 на C_1^0 и условием (433) на C_2 . Новое положение свободной границы и распределение потенциала на ней для момента времени $t_0 + \tau$ можно вычислить, используя условия (434) и (436), дискретный аналог которых расписывается по схеме Эйлера следующим образом:

$$z^{k+1} = z^k + (\nabla \phi)^k \tau \quad (437)$$

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \left(0,5 |(\nabla \phi)^k|^2 - y^k \right) \tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (438)$$

где y^k, z^k, ϕ^k - значения функций на k -м шаге по времени.

Таким образом, получается смешанная краевая задача для уравнения Лапласа (432) с граничными условиями (433) и $k = 0, 1, 2, \dots$ (438), но уже для момента времени $t_0 + \tau$. Повторное ее решение и использование граничных условий позволяет определить положение свободной границы и распределение потенциала на ней для момента времени $t_0 + 2\tau$ и т.д.

Выбор шага по времени

Соотношения (437) и $k = 0, 1, 2, \dots$ (438) представляют собой метод Эйлера 1-го порядка точности. Во многих случаях точность метода Эйлера бывает недостаточной, поэтому необходимо проводить интегрирование уравнений (434) и (436) по схемам более высокого порядка точности [101, 109, 112] или использовать различные модификации неявных методов [107, 114].

Описанная в предыдущем пункте процедура движения по времени характеризует явный метод Эйлера, а поэтому условно устойчивый. В работе [101] приводится условие устойчивости метода Рунге-Кутта 4-го порядка для линеаризованных условий на свободной границе. Это условие имеет вид:

$$\Delta t^2 \leq \frac{8}{\pi} \cdot \frac{|\Delta x|}{g},$$

где Δt - шаг по времени, Δx - по пространству, g - ускорение свободного падения.

В работах [97, 98] временной шаг выбирается из условия

$$\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\max_i \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + gy \right)},$$

где $\Delta\phi$ - некоторая заданная константа, обычно выбираемая равной 0.01, i - номер точки на свободной границе. Таким образом, авторы упомянутых работ вводят ограничение на величину изменения потенциала в пределах временного шага.

В работе для выбора шага интегрирования по времени используется алгоритм, описанный в [2, 7]. Предложенная методика позволяет выбирать шаг по времени, исходя из двух условий:

- 1) любая частица жидкости за временной шаг не может переместиться на расстояние больше заданного;
- 2) узлы любого элемента не могут изменять ориентацию относительно друг друга (исключается самопересечение области).

Введем величину β по следующему правилу

$$\beta = \alpha \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \leq 1,$$

где S_{\max} - длина максимального граничного элемента свободной границы, S_{\min} - длина минимального элемента, α - некоторый коэффициент из промежутка $0 < \alpha \leq 1$. Величина β будет характеризовать собой некоторую относительную меру дискретизации границы расчетной области.

Первое условие приводит к следующему ограничению шага по времени

$$\tau_1 \leq \frac{\beta R}{V},$$

где R - заданное максимальное перемещение частиц за один временной шаг, V - модуль максимальной скорости частиц.

Второе условие приводит к следующему ограничению

$$\tau_2 \leq \frac{\beta S_{\min}}{V}.$$

Окончательно, шаг по времени будет - $\tau = \min(\tau_1, \tau_2)$.

При численных расчетах целесообразно задавать нижнюю границу временного шага τ_{\min} . Кроме того, задается ограничение на максимальный временной шаг τ_{\max} . Это значение используется в качестве начального шага и служит ограничителем при увеличении шага по времени. Увеличение шага выполняется принудительно в случае, если за n шагов τ не изменялось. В расчетах увеличение шага производилось в полтора раза, а n равнялось 50, $\tau_{\max} = 0,01$, $\tau_{\min} = 0,0001$.

Приведенная методика выбора шага по времени тестировалась на нелинейной задаче Релея о схлопывании сферической газовой полости в безграничной жидкости, для которой известно аналитическое решение [7].

Тестовые расчеты

Движение уединенной волны по бассейну с ровным дном

Для подтверждения работоспособности выбранного метода движения по времени проводится ряд тестов.

Первый тест проводится на решении нестационарной задачи о движении уединенной волны амплитуды $A = 0,5$ по бассейну, постоянной глубины $H = 1$. В этом teste важным является то, что уединенные волны в процессе движения не изменяют амплитуду и скорость, сохраняют форму и полную энергию. Для расчета была взята область $D = \{-15 \leq x \leq 15; -1 \leq y \leq y_0\}$, где y_0 описывает уединенную стационарную волну. На границе области было взято 350 элементов, из них 200 на свободной поверхности. Вершина волны при $t = 0$ находилась в точке $x = -5, y = 0,5$. Расчет проводился до момента безразмерного времени $t = 8,28$, когда вершина волны перешла в точку с абсциссой $x = 5$. К этому моменту времени волна прошла путь равный 1,3 длины волны, определяемой длиной отрезка по оси x , на котором выполняется условие [71]

$$\operatorname{Im} z(t) \geq 0,01A(t), \quad z \in C_1.$$

На рис.35 показаны профили свободной границы для нескольких моментов времени и процент отклонения полной энергии.

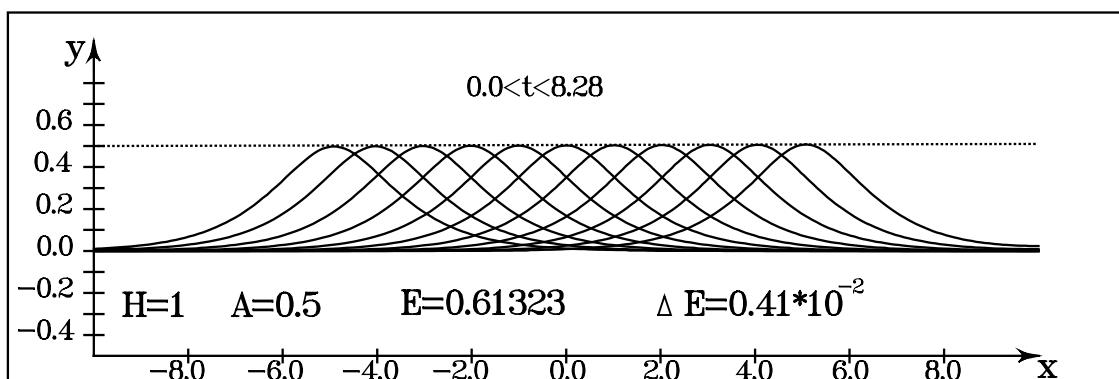


Рис.35. Тестовый расчет по движению солитона амплитуды $A=0,5$ по ровному дну

На рис.36 приведены результаты расчетов задачи распространения солитона амплитуды $A=0,7$ по ровному дну. Вершина вол-

ны при $t = 0$ находилась в точке $x = -5, y = 0,7$. Расчет проводился до момента безразмерного времени $t = 6,85$, когда вершина волны перешла в точку с абсциссой $x = 3,8$. К этому моменту времени волна прошла путь, равный длине волны.

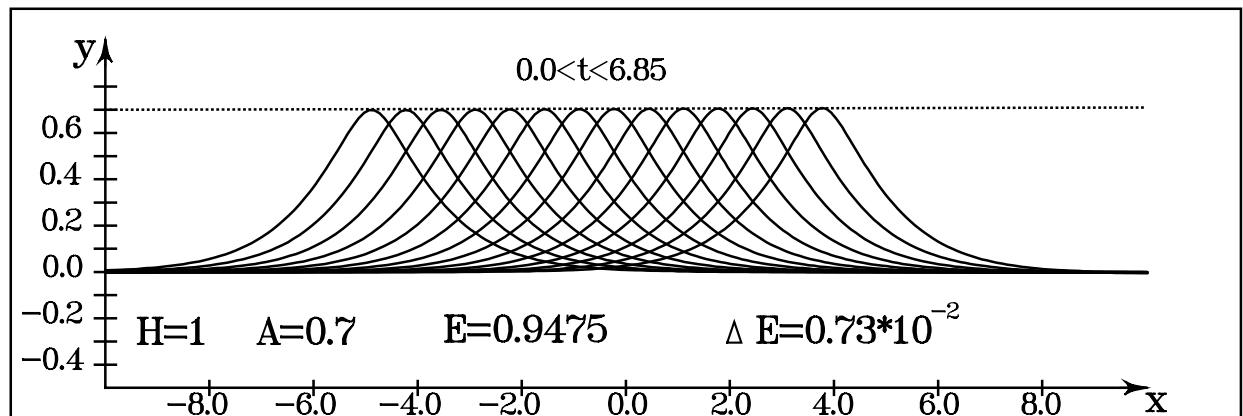


Рис.36. Тестовый расчет по движению солитона амплитуды $A=0,7$ по ровному дну

Отсутствие диспергирующего хвоста из волн малой амплитуды позади основной волны объясняется достаточно точным заданием начальной поверхности солитона и распределения потенциала на ней, полученным на основе численного решения стационарной задачи об уединенной волне. Использование в качестве начальных условий известных приближений уединенных волн [91] дает заметный диспергирующий след. Эта волновая рябь, бегущая за основной волной, несомненно оказывает влияние как на характеристики основной волны, так и на волны, образованные вследствие взаимодействия с какими-либо препятствиями. Это обстоятельство изучено в работе [2].

Кроме того, выполнение закона сохранения полной энергии и отсутствие диспергирующего следа позволяет судить о применимости метода Эйлера с выбором шага по времени для решения нелинейных нестационарных задач со свободной поверхностью.

Взаимодействие солитонов с вертикальными преградами

Данный тест представляет собой расчет взаимодействия уединенных волн амплитуд $A=0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ с вертикальной стенкой, имеющей абсциссу $x=5$. Остальные параметры задачи были взяты из предшествующего теста.

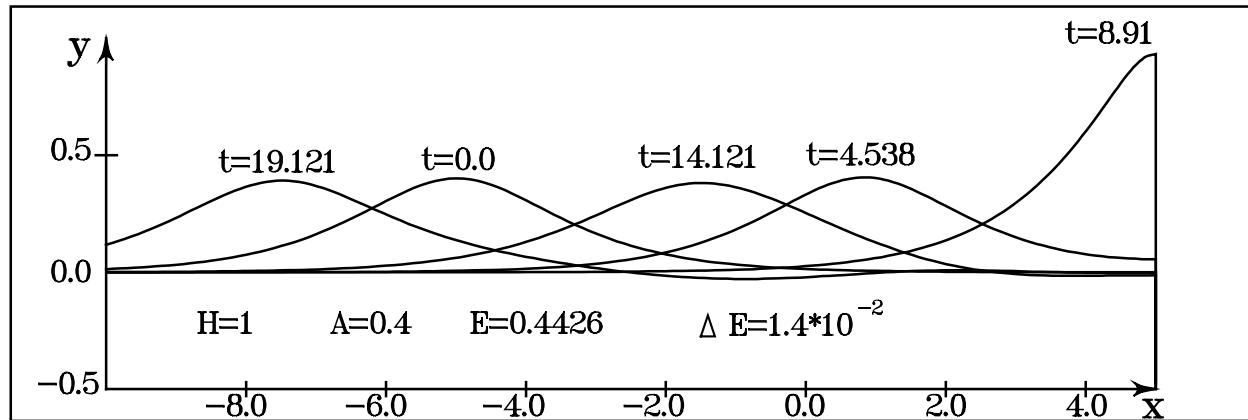


Рис.37. Тестовый расчет по накату солитона амплитуды $A=0,4$ на вертикальную стенку

На рис. 37 приведены профили свободной поверхности при накате солитона амплитуды $A=0,4$ на вертикальную стенку для нескольких моментов безразмерного времени ($t = 0, y_{\max} = 0,4$ - первоначальная форма солитона; $t = 8,91, y_{\max} = 0,95$ - форма свободной поверхности в момент максимального заплеска; $t = 19,12, y_{\max} = 0,392$ - форма восстановленного солитона, вершина которого в этот момент времени находилась в точке с абсциссой $x=-7,5$).

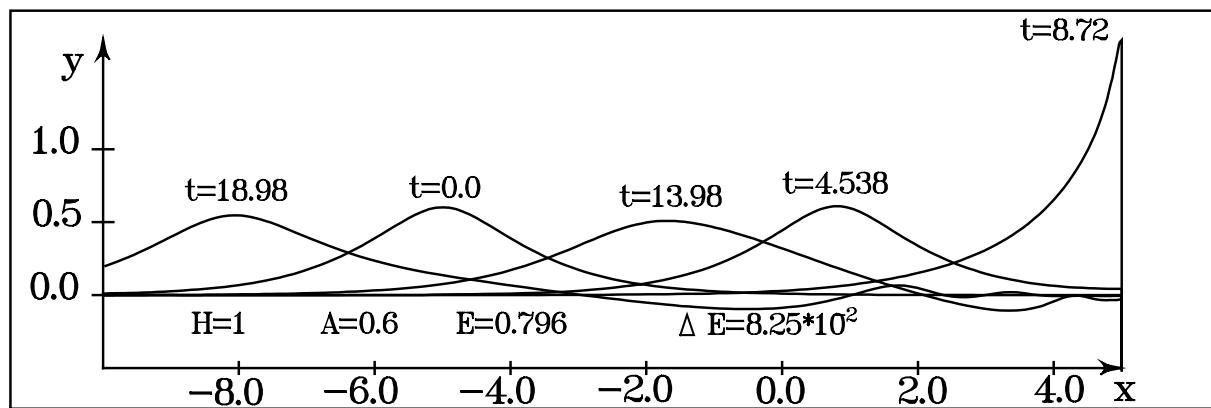


Рис. 38. Тестовый расчет по накату солитона амплитуды $A=0,6$ на вертикальную стенку

На рис. 38 приведены результаты расчетов задачи по накату солитона амплитуды $A=0,6$ на вертикальную стенку для нескольких моментов безразмерного времени ($t = 0, y_{\max} = 0,6$ - первоначальная форма солитона; $t = 8,72, y_{\max} = 1,747$ - форма свободной поверхности в момент максимального заплеска;

$t = 18,98$, $y_{\max} = 0,546$ - форма восстановленного солитона, вершина которого в этот момент времени находилась в точке с абсциссой $x=-8$.

Анализ представленных графиков позволяет утверждать, что отражение волны от стенки приводит к изменению амплитуды волны и формированию хвоста из вторичных волн малой амплитуды, что находится в полном соответствии с результатами численных исследований [71].

На рис. 39 представлены зависимости кинетической, потенциальной и полной энергий от времени при накате волны амплитуды $A=0,6$ на вертикальную стенку. На оси абсцисс отмечены значения безразмерного времени, соответствующие максимальному заплеску волны на стенку (момент максимума заплеска волны на стенку отмечен дополнительной риской на оси абсцисс).

Необходимо отметить, что максимум потенциальной энергии и максимальный заплеск на стенку смешены по времени друг относительно друга. Особенно это заметно при накате относительно высоких волн. Эта временная несогласованность может служить объяснением фазового сдвига набегающей и отраженной волн.

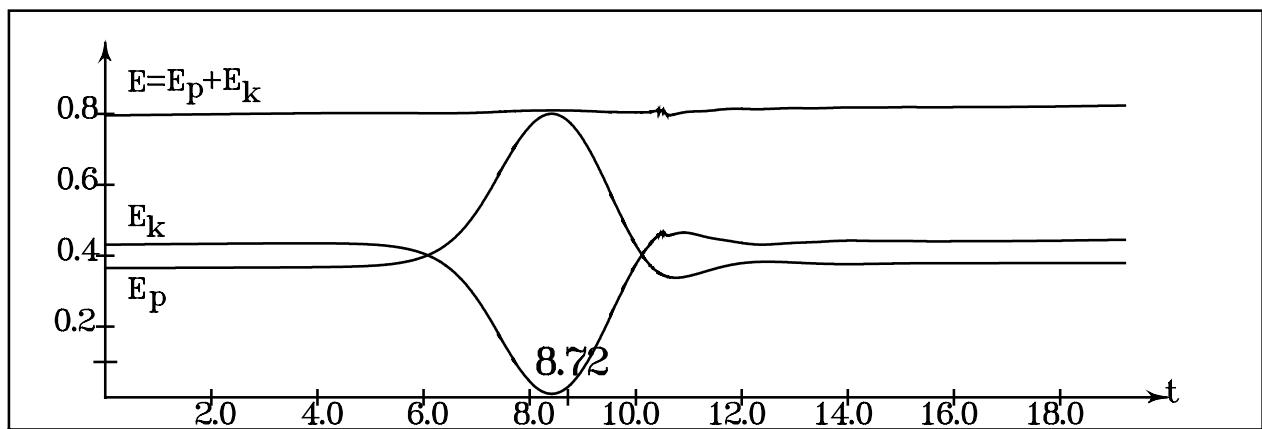


Рис. 39. Изменение кинетической и потенциальной энергий: $A=0,6$

После того, как энергия начинает возвращаться к своему первоначальному состоянию, волна еще некоторое время остается прилипшей к стенке, а затем резко падает, принимая свое минимальное значение, опускаясь ниже первоначального уровня. В этот момент потенциальная энергия также минимальна, а кинети-

ческая - имеет величину большую, чем в начале движения, что объясняет, почему скорость волны, имеющей меньшую амплитуду, больше чем у начального солитона [71].

Кроме кинематических особенностей возникающих течений интерес представляет задача определения динамического воздействия волн на вертикальную стенку.

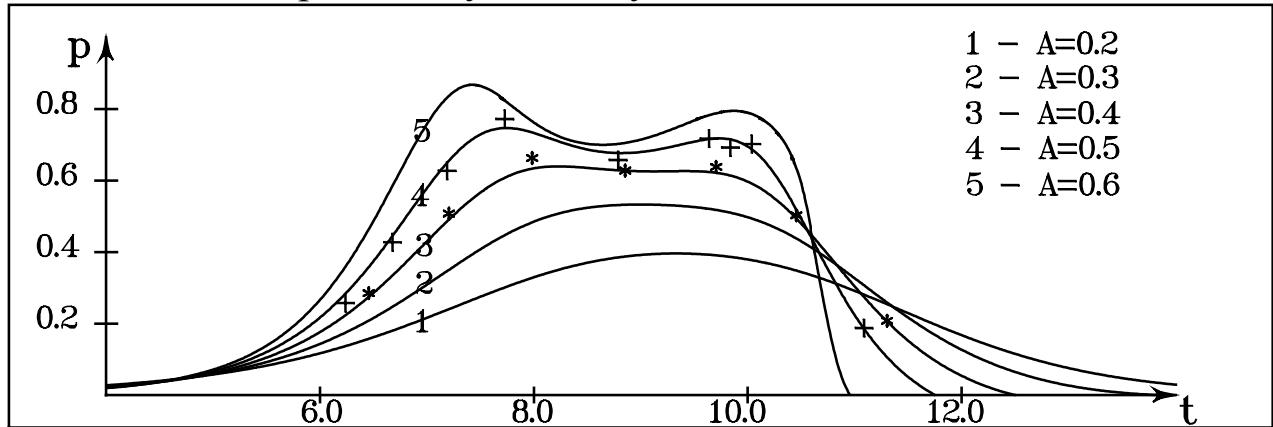


Рис. 40. Хронограммы волнового давления

На рис. 40 для волн различных амплитуд показаны хронограммы волнового давления в точке стенки, совпадающей с начальным урезом жидкости.

Символами "*" и "+" на график нанесены результаты расчетов для волн амплитуды $A=0.4$ и $A=0.5$, соответственно, из работы [91].

При амплитудах $A > 0.3$ расчетные хронограммы имеют два локальных максимума. Это явление можно объяснить следствием действия сил инерции. Кроме того, первый максимум имеет большее значение, чем второй, при этом момент максимального заплеска волны на стенку не совпадает с моментами локальных максимумов давления. Эти особенности при накате солитонов на вертикальную стенку подтверждаются экспериментами [59].

Движение уединенных волн над прямоугольным уступом

Изучению взаимодействия уединенных волн с подводными препятствиями уделяется в последнее время много внимания. По этой тематике имеется обширная научная литература, в которой приводятся результаты как натурных экспериментов [59, 119], так и теоретических расчетов, выполненных на основе аналити-

ческих, полуаналитических методов или численных методов [73, 86, 91, 115, 116].

Основными определяющими параметрами задачи являются амплитуда волны и высота подводного уступа. Основное внимание уделяется для анализа процессов опрокидывания волн при их взаимодействии с прямоугольными подводными уступами.

Геометрия области течения схематически показана на рис. 41. Глубина бассейна $H = 1$, высота уступа - h . Бассейн имел длину $x \in [-20; 20]$, уступ располагался в точке $x = 0$, гребень волны в начальный момент времени $t = 0$ имел абсциссу $x = -10$. Граница области аппроксимировалась 500 элементами, из них 300 – задавали свободную границу, 50 – вертикальные стенки бассейна, 150 – горизонтальные участки дна. Контроль точности за решением осуществлялся по закону сохранения полной энергии. Относительная ошибка изменения полной энергии для всех расчетов не превышала 0,2%. Меняющимися параметрами задачи были высота уступа, которая изменялась в пределах $h \in [0,1; 0,7]$, и амплитуда набегающей уединенной волны $A \in [0,1; 0,7]$.

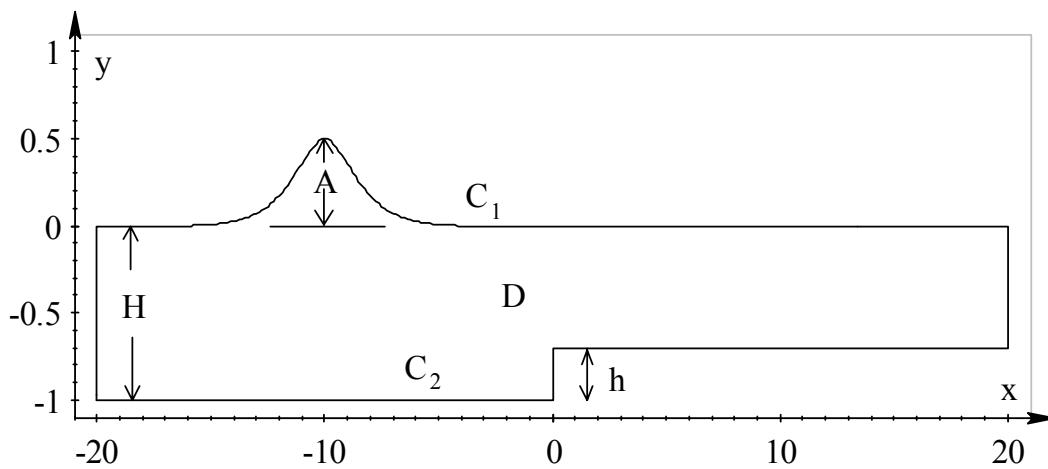


Рис. 41.

Модель идеальной несжимаемой жидкости позволяет моделировать опрокидывание волны правда лишь до момента соприкосновения опрокидывающейся волны с жидкостью, однако она позволяет определить при каких параметрах задачи наступает опрокидывание и каков его характер.

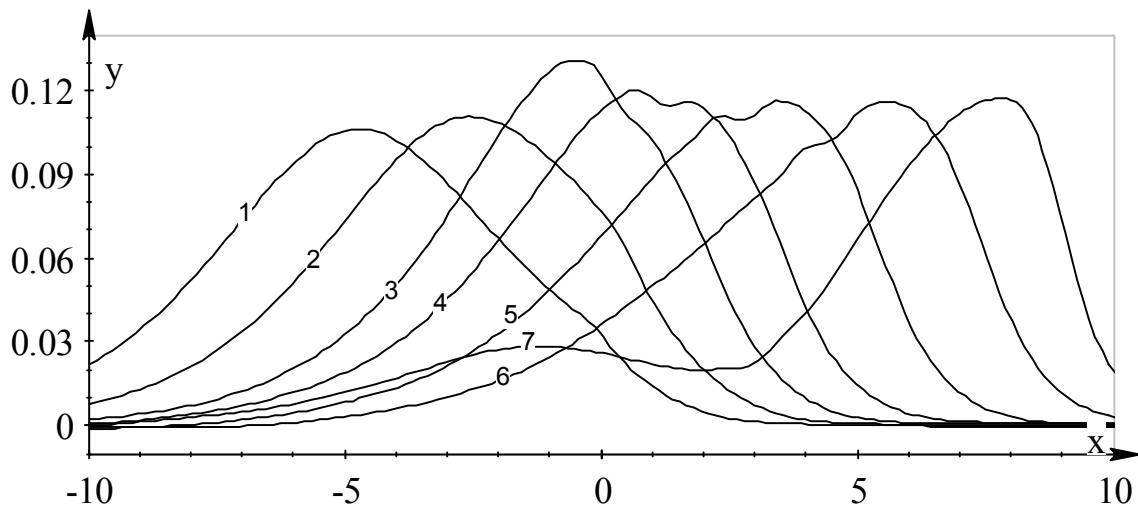


Рис. 42. Режим движения волны малой амплитуды
($A = 0,1; h = 0,7; t \in [5;14,5]$)

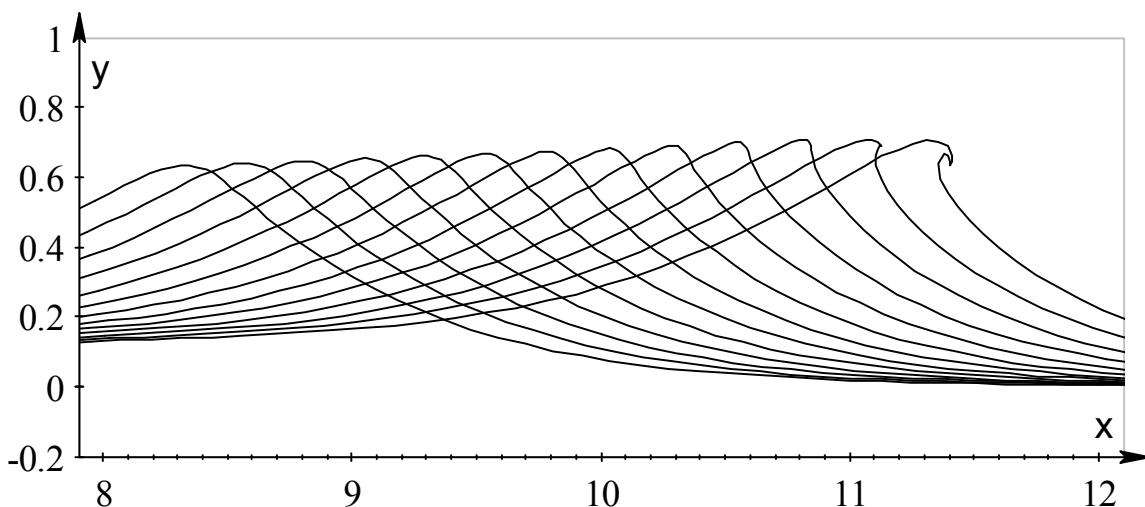


Рис. 43. Режим скользящего бурана
($A = 0,5; h = 0,3; t \in [15;17,4]$)

При анализе наката волн на подводный уступ был обнаружен один эффект, связанный с тем, что на переднем фронте волны, при подходе его к границе уступа, зарождается волновой сгусток, движущийся по основной волне против ее движения. Этот эффект лучше заметен при накате волн малой амплитуды. На рис. 42 представлена картина наката волны амплитуды $A = 0,1$ на уступ высоты $h = 0,7$. На переднем фронте волны (кривые 1-2) зарождается возмущение, передвигающееся к вершине волны (кривые 3-4) и переваливающееся через нее (кривые 5-7). Далее это

возмущение с большой скоростью распространяется против движения основной волны. При дальнейшем движении по бассейну с меньшей глубиной амплитуда волны возрастает, длина волны уменьшается, увеличивается скорость ее движения, позади основной волны образуется цуг из волн малой амплитуды, движущихся с меньшей скоростью. Затем процесс устанавливается, а основная волна принимает форму стационарной уединенной волны амплитуды большей, чем первоначальная волна.

При увеличении высоты уступа и амплитуды волны наблюдаются режимы опрокидывания, которые могут быть классифицированы как скользящий и ныряющий бурун. Первый случай показан на рис.43, где приведен фрагмент наката волны амплитуды $A = 0,5$ на уступ высоты $h = 0,3$. Данный режим характеризуется тем, что опрокидывание волны происходит с гребня на передний фронт волны.

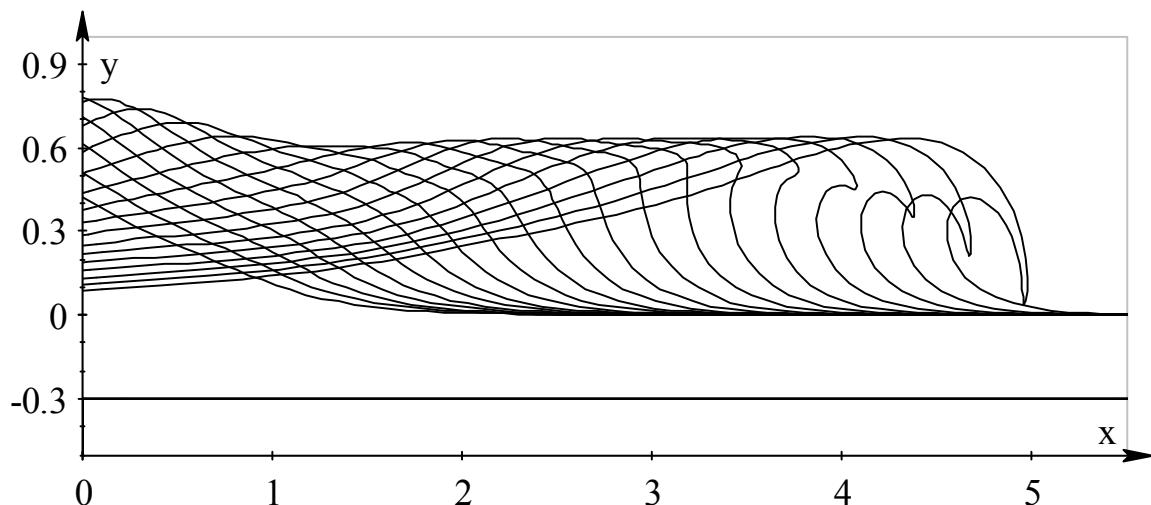


Рис. 44. Режим ныряющего буруна
($A = 0,7; h = 0,7; t \in [7;10,8]$)

Второй случай представлен на рис.44 для взаимодействия волны амплитуды $A = 0,7$ с уступом высоты $h = 0,7$. Для данного режима обнаружено, что зарождающийся волновой сгусток, взаимодействуя с гребнем, образует брызговую струю, формирующуюся на переднем фронте волны, а не на ее гребне. Опрокидывание волны происходит на переднюю часть подошвы волны.

В результате расчетов задачи взаимодействия уединенных волн с прямоугольным подводным уступом выявлены три типа волновых течений: режим, при котором волна:

- 1) не опрокидывается и при дальнейшем движении приобретает форму стационарной волны большей амплитуды, чем волна первоначальная;
- 2) опрокидывается с гребня на передний фронт (скользящий бурун);
- 3) опрокидывается с переднего фронта на свою подошву (ныряющий бурун).

Кроме того, изучен процесс формирования диспергирующего хвоста из волн малой амплитуды позади основной волны. Зарождение каждой отходящей волны происходит с переднего фронта волны, на котором формируется волновой сгусток, перекатывающийся через гребень волны, а затем отходящий от нее.

Классификация волновых режимов при накате уединенных волн на наклонный берег

В многочисленных работах зарубежных и отечественных авторов, посвященных вопросам взаимодействия уединенных волн с наклонными преградами, как правило, основное внимание уделяется вопросам определения максимального заплеска и динамического воздействия волны на преграду. Для некоторых параметров задачи накат волны сопровождается ее опрокидыванием. Это явление необходимо учитывать при проектировании гидротехнических береговых сооружений, так как опрокидывание волны способствует более интенсивному их разрушению и размыву. Модель идеальной несжимаемой жидкости позволяет моделировать опрокидывание волны лишь до момента соприкосновения опрокидывающейся волны с жидкостью, однако она позволяет определить, при каких параметрах задачи наступает опрокидывание и каков его характер.

Геометрия области течения схематически показана на рис. 34. Глубина бассейна $H=1$, дно начинает возвышаться в точке $x=0$, $y=-1$ под углом α , вершина волны в начальный момент находилась в точке $x=-5$, $y=A$ (A - вершина волны). На границе области бралось 350 элементов, из них 200 на свободной поверхности.

Контроль точности за решением осуществлялся по закону сохранения полной энергии. Относительная ошибка изменения полной энергии для всех расчетов не превышала 2%. Меняющимися параметрами задачи были угол наклона правой стенки, который принимал значения от 5° до 90° с шагом 5° , и амплитуда $0,2 \leq A \leq 0,6$.

В результате расчетов были выявлены четыре зоны течений по типу опрокидывания в зависимости от угла наклона стенки (рис. 45). Ниже, на примерах наката волн амплитуды $A=0,5$ на наклонный берег, приводится смысловое объяснение каждой из полученных зон.

Первая зона (О-В) - опрокидывание вперед соответствует малым углам наклона стенки (пологое дно) и характеризуется тем, что волна опрокидывается вперед (по ходу движения в начальный момент времени) во время наката на берег. Опрокидывание волны происходит до прохождения основной массы волны точки первоначально невозмущенного уровня свободной поверхности. На рис. 46,а представлены профили свободной поверхности в последние перед обрушением моменты времени для угла наклона стенки $\alpha = 5^\circ$ и $A = 0,5$.

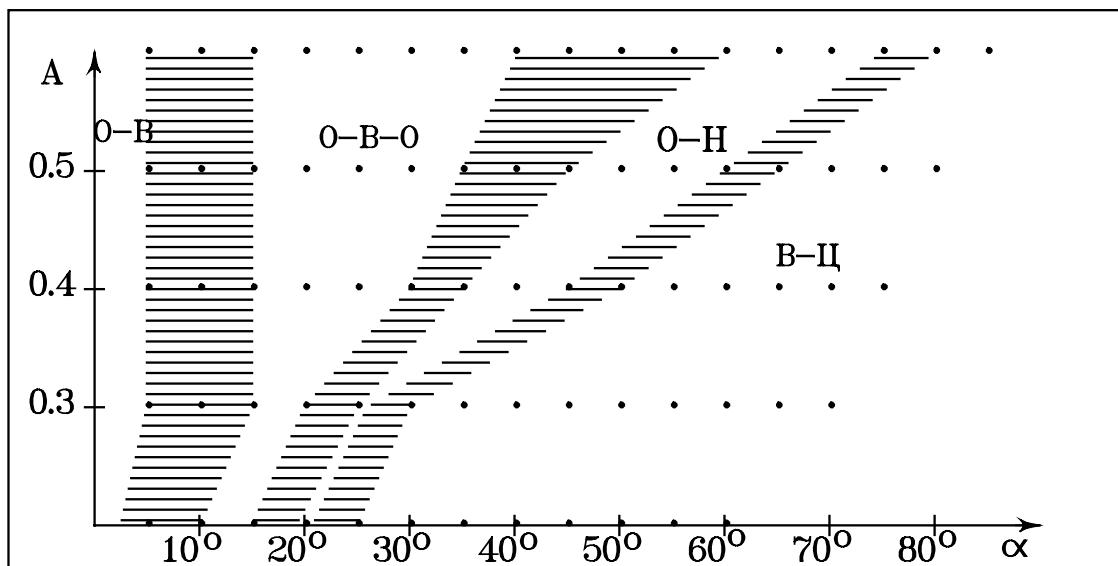


Рис. 45. Диаграмма волновых режимов при накате уединенных волн на наклонный берег

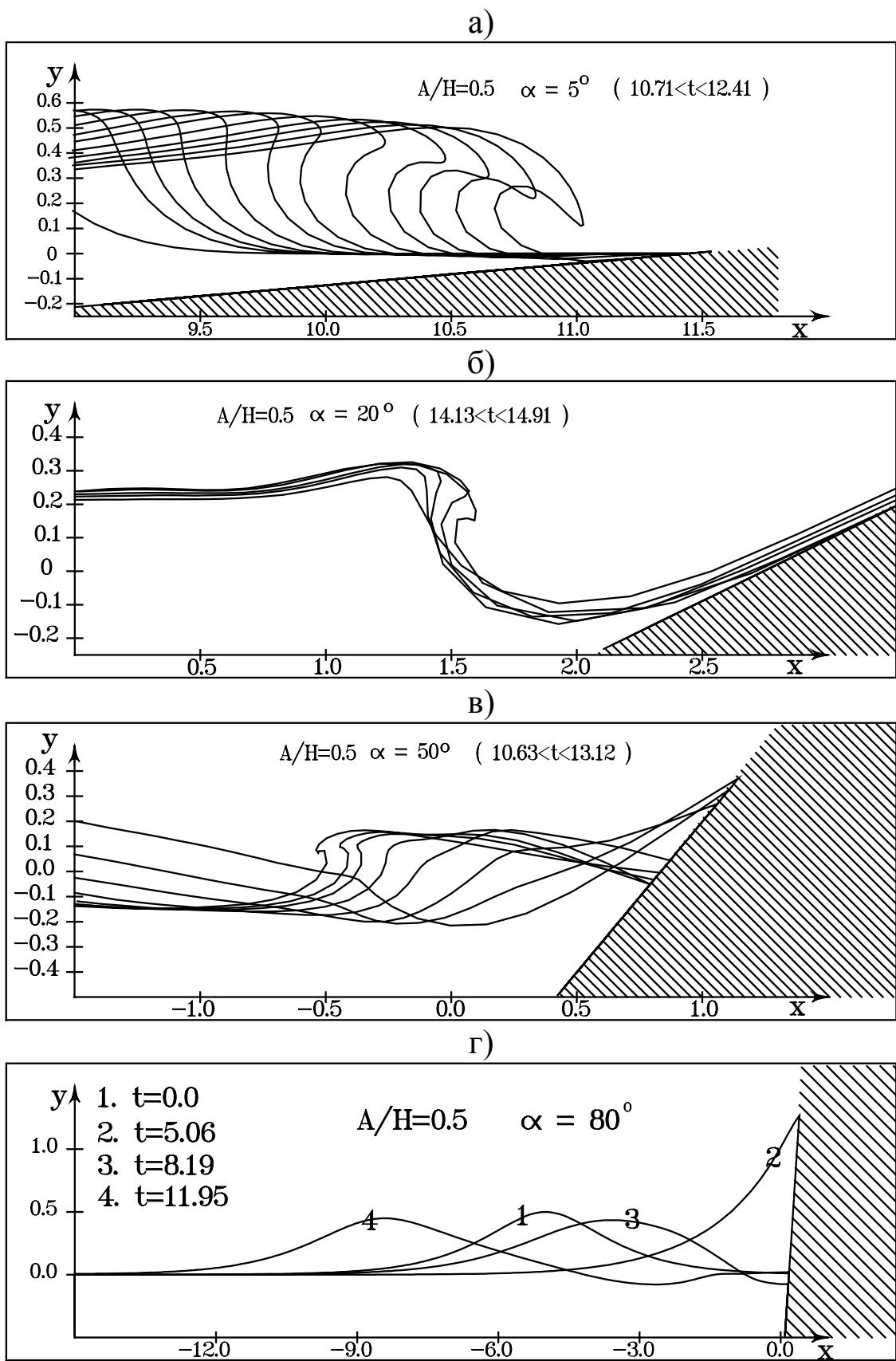


Рис. 46. Различные режимы наката волн на наклонный берег

Вторая зона (О-В-О) - опрокидывание вперед во время отката характеризуется тем, что волна опрокидывается по-прежнему вперед, но во время отката от берега. На рис. 46,б демонстрируются результаты расчета для угла наклона стенки $\alpha = 20^\circ$ и $A = 0,5$.

Третья зона (О-Н) - опрокидывание назад характеризуется тем, что волна опрокидывается во время отката от берега, но в противоположном направлении относительно движения в начальный момент времени. Пример такого поведения волны при накате на наклонную стенку ($\alpha = 50^\circ$, $A = 0,5$) приведен на рис. 46,в.

В диапазоне углов наклона стенки, близких к вертикальным, волна откатывается без опрокидывания, порождая за собой след из затухающих волн малой амплитуды (В-Ц) - волновой цуг (рис. 46,г).

Заштрихованные переходные зоны на рис. 45 соответствуют параметрам задачи, при которых возникающие волновые картины имеют признаки соседствующих зон. Строились они следующим образом: отмечались параметры задачи, для которых возникающую волновую картину можно с уверенностью отнести к одному типу опрокидывания, а затем параметры, соответствующие другому типу опрокидывания. Область параметров, лежащих между ними, штриховалась. Для построения приведенной диаграммы было выполнено около 100 расчетов (отмечены точками на рис. 45).

На рис. 47 приведены графики изменения потенциальной E_p , кинетической E_k и полной энергии $E_p + E_k$, соответствующие результатам расчетов, представленных на рис. 46.

На рис. 48 показаны хронограммы волнового давления при накате волны амплитуды $A=0,5$ на наклонную стенку в точках:

- а) $x=0$, где дно начинает возвышаться;
- б) в точке стенки, совпадающей с начальным урезом жидкости.

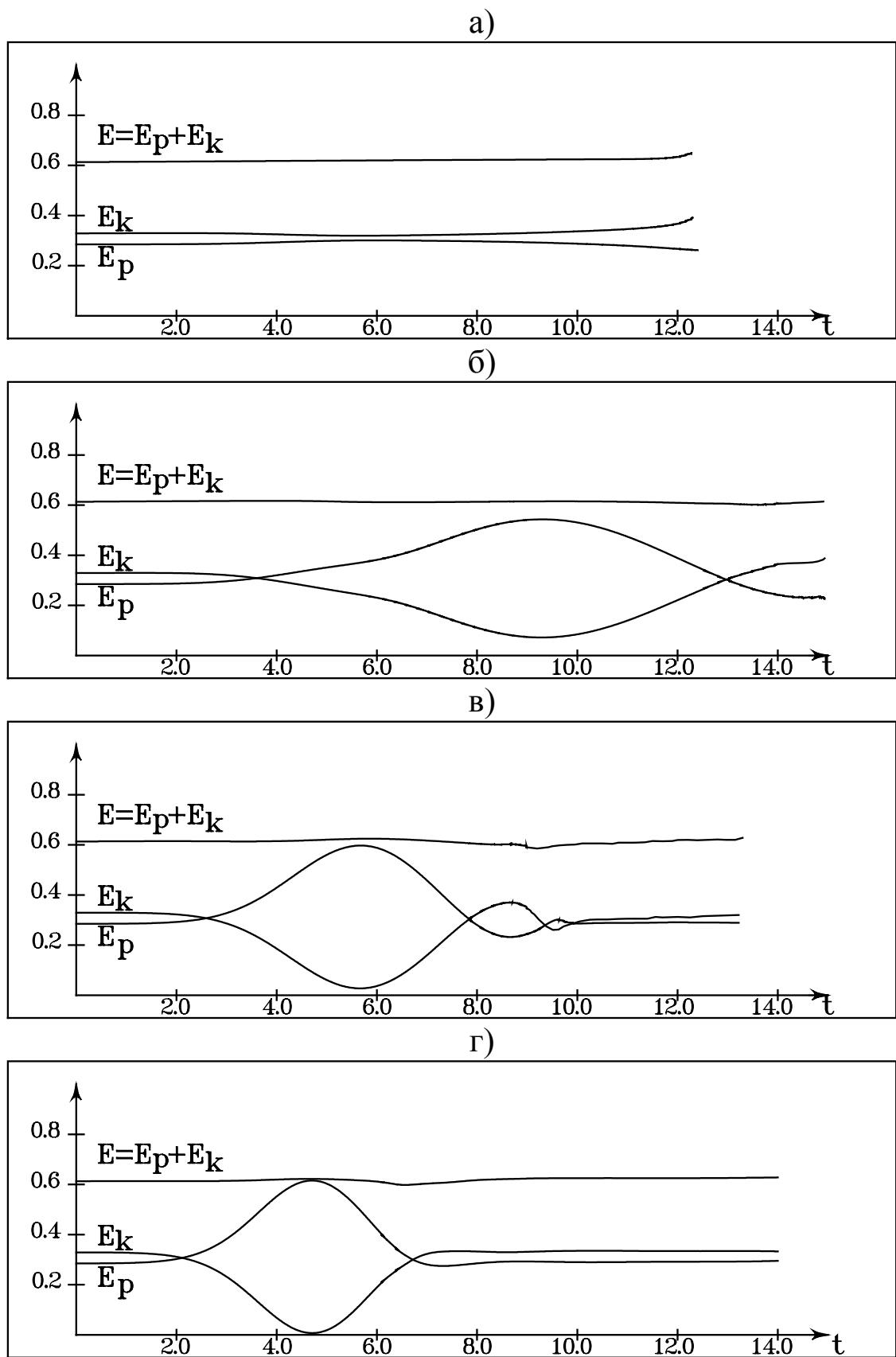


Рис. 47. Изменение кинетической и потенциальной энергий при различных режимах наката волн на наклонный берег

Кривая 1 рис. 48,а соответствует расчету наката волны на пологое дно ($\alpha = 5^\circ$) и имеет одно максимальное значение. Этот факт объясняется тем, что волна успевает полностью миновать точку излома дна до своего опрокидывания. Кривая 2 соответствует углу $\alpha = 20^\circ$ и также имеет один максимум, но с некоторого момента времени давление начинает увеличиваться. Это объясняется тем, что к моменту опрокидывания волны ее некоторая часть уже отразилась от стенки и проходит над точкой излома дна.

Наличие двух максимумов кривой 3 объясняется тем, что на момент опрокидывания волны ее большая часть уже отразилась от стенки и прошла точку излома.

Кривая 4 соответствует режиму, когда опрокидывание волны не наблюдается. Данная хронограмма похожа на кривую, полученную при накате на вертикальную стенку.

Аналогичные выводы можно сделать и для кривых на рис. 48,б. Кривая 1 на рис. 48,б, соответствующая пологому дну, отсутствует в связи с тем, что при накате волны амплитуды $A=0,5$ на наклонную стенку под углом $\alpha = 5^\circ$ волна опрокидывается до подхода к начальной точке уреза жидкости.

На рис. 49 представлены графики максимального заплеска волн в зависимости от угла наклона стенки. Символами \square и \circ нанесены результаты расчетов, выполненные на основе дискретной нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды [86, 87], для $A=0,2$ и $A=0,29$, соответственно. Символами \times и $*$ нанесены экспериментальные данные из работы [59] для $A=0,3$ и $A=0,4$; а символами \diamond и $+$ - из работы [119] для $A=0,2$ и $A=0,5$, соответственно. Заметно качественное совпадение поведения графиков. Количественное же различие можно объяснить, с одной стороны, тем, что используемая для решения задачи модель не учитывает вязкости жидкости; с другой стороны, тем, что при проведении экспериментов трудно получить уединенную волну, заданной амплитуды. В результате движения волнопродуктора порождается волна, которая при последующем движении по ровному дну, принимает форму солитона, но при этом может уменьшиться ее амплитуда.

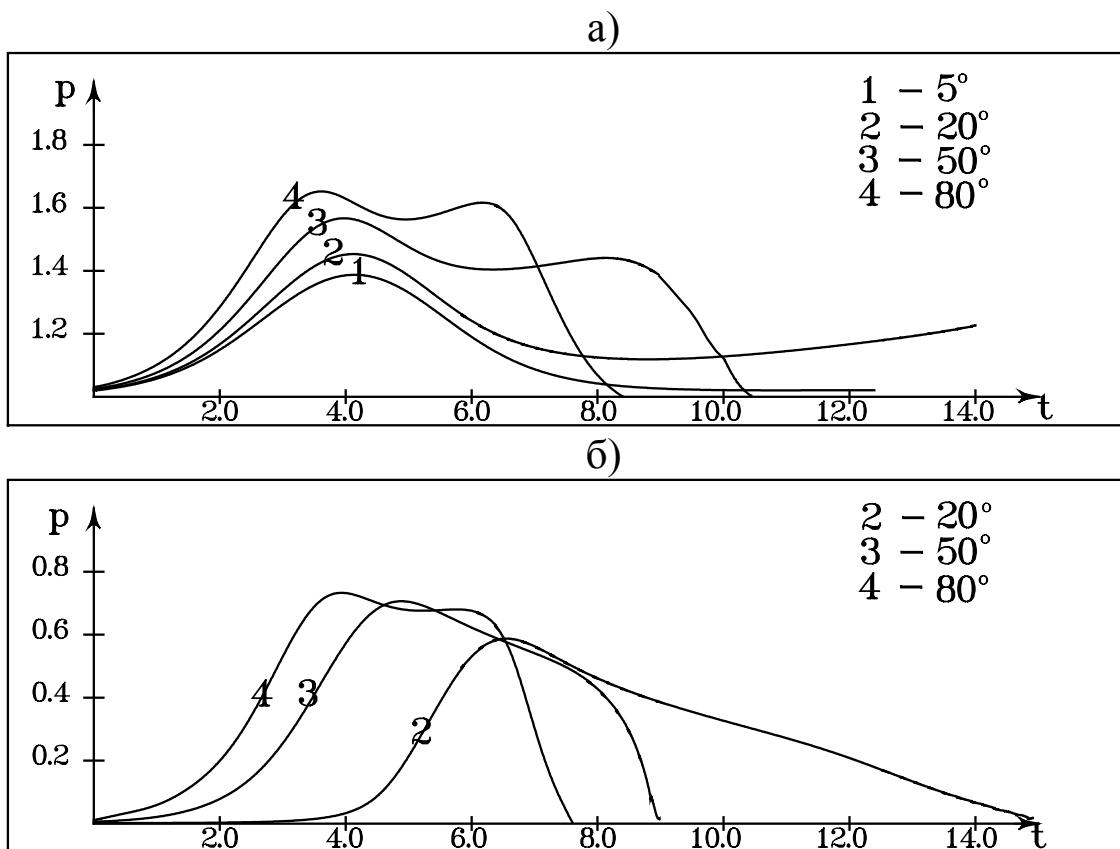


Рис. 48. Хронограммы давления

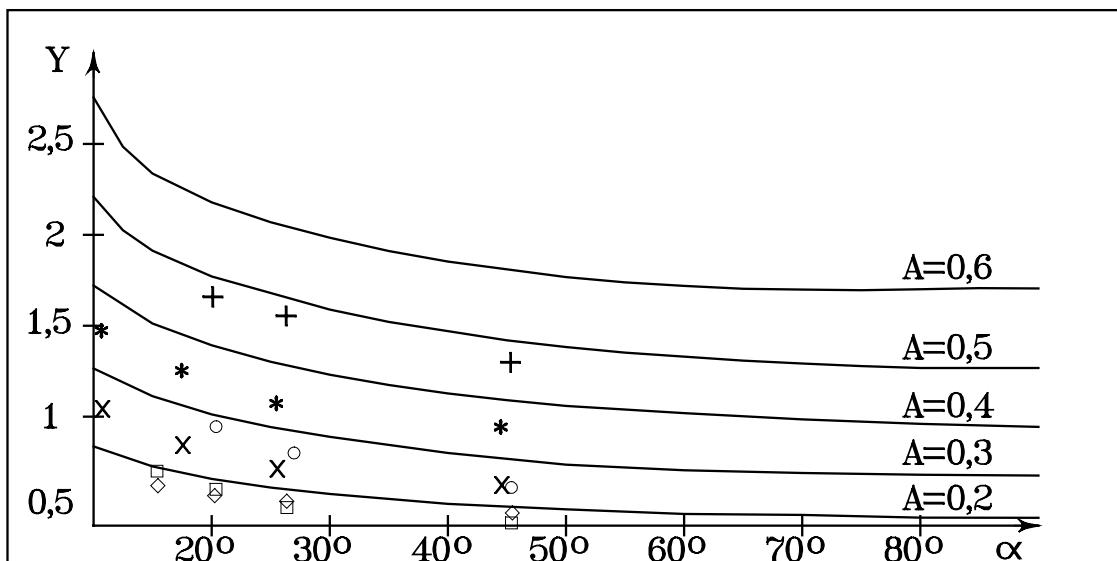


Рис. 49. Графики максимального заплеска от угла наклона

§40. Горизонтальное движение полубесконечного тела

Данный параграф посвящен применению метода комплексных граничных элементов для моделирования сильных возмущений свободной поверхности жидкости, вызванных движением полубесконечного тела, движущегося горизонтально, с постоянной скоростью.

Постановка задачи

В начальный момент времени геометрия течения задается в виде:

$$S_B = \begin{cases} y = 0, & -10 \leq x \leq 0 \\ x = 0, & -1 \leq y \leq 0 \end{cases}, \quad S_F = \{y = 0, 0 \leq x \leq 10,$$

$$\Sigma = \begin{cases} x = -10, & -10 \leq y \leq -1 \\ y = -10, & -10 \leq x \leq 10 \\ x = 10, & -10 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

где S_B - твердая граница полубесконечного тела, S_F - свободная граница, Σ - граница далекого поля.

Начало системы координат в начальный момент времени совпадает с точкой контакта свободной границы и фронтальной границей тела. Тело движется с постоянной скоростью в сторону возрастания ОХ.

Функция тока на S_B в течение всего времени задается соотношением:

$$\psi(z, t) = U(y + d), \quad z \in S_B.$$

На свободной поверхности и на границе далекого поля выполняются кинематическое и динамическое условия:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= u + iv, \quad z \in S_F, \quad \Sigma, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - \frac{y}{Fr^2}, \quad z \in S_F, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2, \quad z \in \Sigma, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gd}} ; \quad \bar{t} = t \frac{d}{U}. \end{aligned} \quad (439)$$

Здесь $y=y(x,t)$ - уравнение свободной поверхности, Fr -число Фруда, g - ускорение свободного падения, U - скорость движения тела, d - смоченная часть фронтальной поверхности тела.

Для решения краевой задачи (439) необходимы начальные условия, которые задаются в следующем виде :

$$y(x, 0) = 0, \quad z \in S_F, \quad z=z_0, \quad z \in \Sigma;$$

$$\phi(z, 0) = \varphi_0, \quad z \in S_F, \quad \phi(z, 0) = 0, \quad z \in \Sigma.$$

Функция φ_0 есть распределение потенциала на границе S_F , найденного из решения краевой задачи для системы (439) в предположении, что S_F – твердая стенка.

Численные расчеты

На рис. 50 - 52 представлены результаты расчетов для чисел Фруда 0,7, 1,0 и 2,0, соответственно. Графики эволюции свободной поверхности приведены в системе координат, перемещающейся вместе с телом. Количество точек по границе равнялось 100, из них 50 было на свободной поверхности. Результаты, приведенные на рис. 50 и 51, практически повторяют аналогичные расчеты, ранее выполненные в работе [103]. Это косвенно подтверждает достоверность проведенных расчетов. В цитируемой работе авторы не рассматривали течений с числами Фруда $Fr>1$, хотя эти режимы представляют несомненный интерес. Поэтому были проведены расчеты в более широком диапазоне, один из которых для $Fr=2.0$ приведен на рис. 52.

На рис. 53 для числа Фруда $Fr=1$ проведено сравнение с расчетами других авторов. Цифрой 1 отмечен настоящий расчет, кривая 2 - расчет из работы [103], 3 - работа [118].

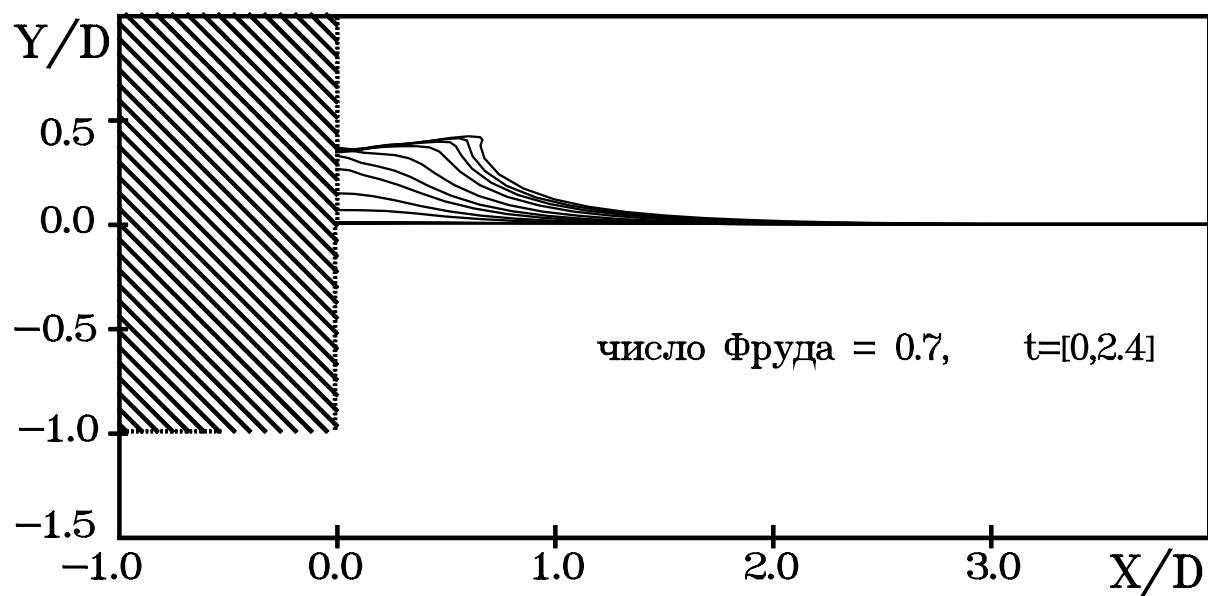


Рис. 50. Эволюция свободной поверхности для $Fr=0,7$

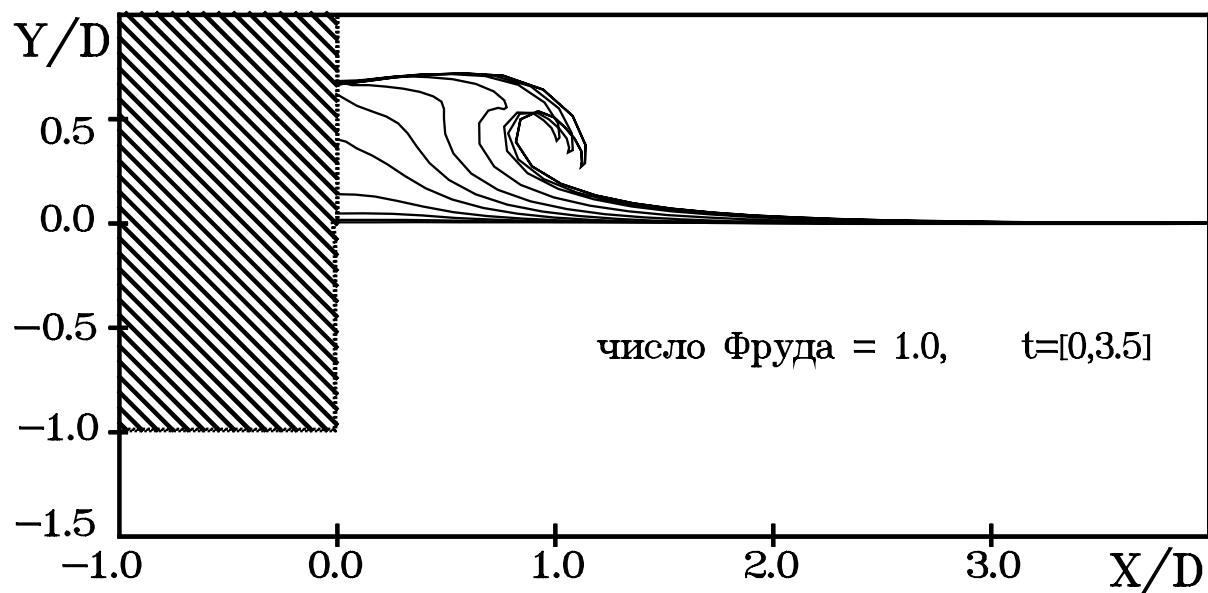
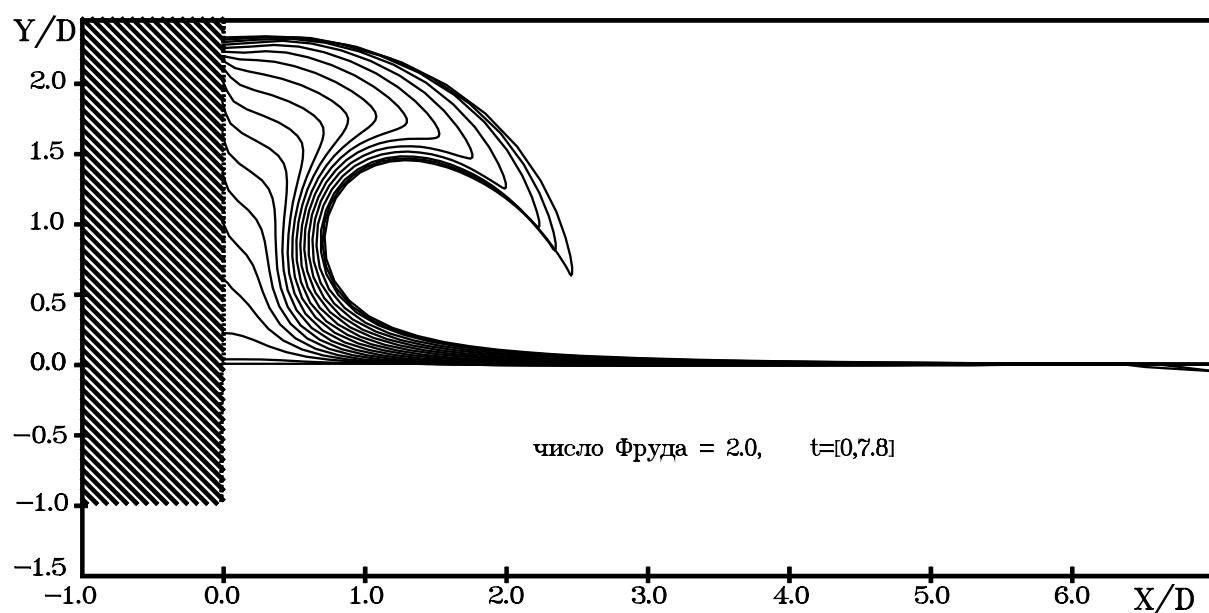
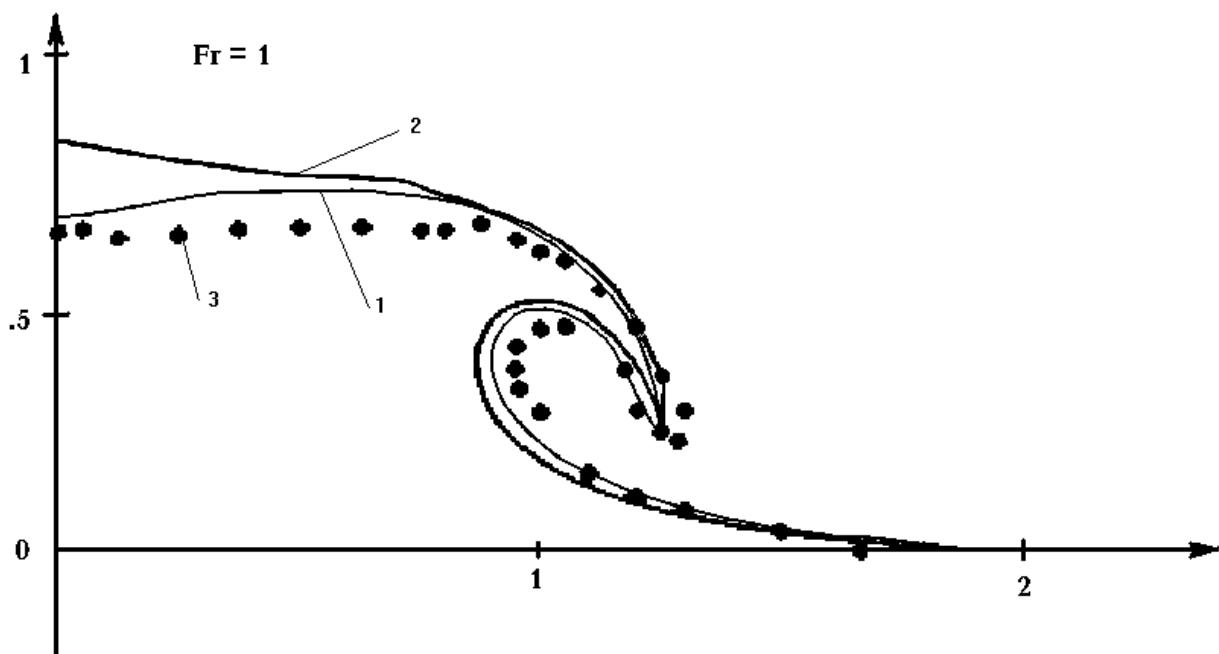


Рис. 51. Эволюция свободной поверхности для $Fr=1$

Рис. 52. Эволюция свободной поверхности для $Fr=2$ Рис. 53. Сравнение с расчетами других авторов:
1 - настоящий расчет, 2 - расчет из работы [103], 3 - работа [118]

Г л а в а 5.

РЕАЛИЗАЦИЯ КМГЭ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ

§41. Две модели программирования: по-следовательная и параллельная

Стремительное развитие наук, как фундаментальных, так и прикладных, использующих сложные реалистические (многомерные, многопараметрические) математические модели или требующих сложной, но быстрой обработки информации, а также быстрый технологический прогресс, привели к тому, что значительно возросла потребность в применении мощных вычислительных средств.

Мы являемся свидетелями быстрого прогресса вычислительной техники. Производительность современных компьютеров на много порядков превосходит производительность первых ЭВМ и продолжает возрастать заметными темпами. Увеличиваются и другие ресурсы, такие как объем и быстродействие оперативной и постоянной памяти, скорость передачи данных между компонентами компьютера и т.д. Совершенствуется архитектура ЭВМ.

Вместе с тем следует заметить, что уже сейчас прогресс в области микроэлектронных компонент сталкивается с ограничениями, связанными с фундаментальными законами природы. Вряд ли можно надеяться на то, что в ближайшее время основной

прогресс в быстродействии электронно-вычислительных машин будет достигнут лишь за счет совершенствования их элементной базы. Переход на качественно новый уровень производительности потребовал от разработчиков ЭВМ и новых архитектурных решений.

Традиционная архитектура ЭВМ была последовательной. Это означало, что в любой момент времени выполнялась только одна операция и только над одним операндом. Совокупность приемов программирования, структур данных, отвечающих последовательной архитектуре компьютера, называется моделью последовательного программирования. Ее основными чертами являются применение стандартных языков программирования (как правило, это ФОРТРАН-77, ФОРТРАН-90, С/С++), достаточно простая переносимость программ с одного компьютера на другой и невысокая производительность.

Появление в середине шестидесятых первого компьютера класса суперЭВМ, разработанного в фирме CDC знаменитым Сеймуром К्रэем, ознаменовало рождение новой - векторной архитектуры. Основная идея,ложенная в основу новой архитектуры, заключалась в распараллеливании процесса обработки данных, когда одна и та же операция применяется одновременно к массиву (вектору) значений. В этом случае можно надеяться на определенный выигрыш в скорости вычислений. Идея параллизма оказалась плодотворной и нашла воплощение на разных уровнях функционирования компьютера.

В основе параллельного компьютера лежит идея использования для решения одной задачи нескольких процессоров, работающих сообща. Расчет делается на то, что если одному процессору для выполнения задачи требуется время t , то p процессоров смогут решить эту задачу, разбитую на подзадачи, за время t/p . Однако это идеальное ускорение удается получить лишь в очень специальных ситуациях, когда подзадачи полностью независимы. На практике же целью программиста является построение алгоритмов, способных извлечь из наличия нескольких процессоров максимальную выгоду для данной задачи.

Первые промышленные образцы мультипроцессорных систем на базе векторно-конвейерных компьютеров появились в се-

редине 80-х годов. Они были чрезвычайно дороги и, как альтернатива, была предложена идея создавать эквивалентные по мощности многопроцессорные системы из большого числа серийно выпускаемых дешевых микропроцессоров. Однако такая архитектура обладает весьма ограниченными возможностями по наращиванию числа процессоров в системе из-за конфликтов при обращении к общей шине памяти. В связи с этим оправданной представлялась идея снабдить каждый процессор собственной оперативной памятью, превращая компьютер в объединение независимых вычислительных узлов. Такой подход значительно увеличил степень масштабируемости многопроцессорных систем, однако потребовал создания специального механизма обмена данными между вычислительными узлами. В настоящее время две последних архитектуры являются доминирующими в развитии суперкомпьютерных технологий.

В 70-80-х годах в России велись интенсивные исследования, направленные на создание параллельных вычислительных систем. Примерами могут служить системы PHOENIX [1], ПС-2000 [69]. К реально действующим суперЭВМ того времени можно отнести машину БЭСМ-6 [62] с быстродействием около 1 млн. одноадресных операций в секунду, многопроцессорные вычислительные комплексы Эльбрус [50] (Эльбрус-1 около 10 млн. оп./с., Эльбрус-2 около 100 млн. оп./с.), "Электроника ССБИС" [62] и др.

Принципы, заложенные в основу структурной организации упомянутых машин, не потеряли своего значения до сих пор. Машины БЭСМ-6 и вычислительные комплексы, созданные на их основе, интенсивно использовались в научно-исследовательских институтах, центрах обработки информации, решающих наиболее важные для народного хозяйства, науки и обороны задачи. За время использования этой машины накоплено огромное по составу, чрезвычайно важное по значимости математическое обеспечение, сконцентрировавшее в себя лучшие достижения советских ученых в области вычислительной математики, программирования, решения задач проектирования сложнейших объектов, в области решения задач, связанных с освоением космического пространства.

Одновременно с проектированием параллельных вычислительных систем ведущими учеными велись работы по распараллеливанию алгоритмов решения сложных задач, например, [29, 61] посвящены общим вопросам распараллеливания алгоритмов, [83] – распараллеливанию численных методов линейной алгебры, [44, 92] – уравнений в частных производных и т.д.

В настоящее время в России создан ряд суперкомпьютерных ресурсов, перечень которых можно найти на WWW-странице НИВЦ МГУ [62].

Важнейшей составной частью создания и внедрения высокопроизводительных технологий является существенное расширение компьютерного образования и подготовка квалифицированных специалистов в этой области. Многие вузы начали подготовку специалистов по данному направлению [39, 53].

§42. Две парадигмы параллельного программирования

В настоящее время существуют два основных подхода к распараллеливанию вычислений. Это параллелизм данных и параллелизм задач. В англоязычной литературе соответствующие термины - *data parallel* и *message passing*. В основе обоих подходов лежит распределение вычислительной работы по доступным пользователю процессорам параллельного компьютера. При этом приходится решать разнообразные проблемы. Прежде всего, это достаточно равномерная загрузка процессоров, так как если основная вычислительная работа будет ложиться на один из процессоров, мы приходим к случаю обычных последовательных вычислений и в этом случае никакого выигрыша за счет распараллеливания задачи не будет. Сбалансированная работа процессоров - это первая проблема, которую следует решить при организации параллельных вычислений. Другая и не менее важная проблема - скорость обмена информацией между процессорами. Если вычисления выполняются на высокопроизводительных процессорах, загрузка которых достаточно равномерная, но скорость обмена данными низкая, основная часть времени будет тратиться впустую на ожидание информации, необходимой для дальнейшей работы данного процессора. Рассматриваемые парадигмы программирования различаются методами решения этих

двух основных проблем. Разберем более подробно параллелизм данных и параллелизм задач.

Основная идея подхода, основанного на параллелизме данных, заключается в том, что одна операция выполняется сразу над всеми элементами массива данных. Различные фрагменты такого массива обрабатываются на векторном процессоре или на разных процессорах параллельной машины. Распределением данных между процессорами занимается программа. Векторизация или распараллеливание в этом случае чаще всего выполняется уже на этапе компиляции - перевода исходного текста программы в машинные команды. Роль программиста в этом случае обычно сводится к заданию опций векторной или параллельной оптимизации компилятору, директив параллельной компиляции, использованию специализированных языков для параллельных вычислений. Наиболее распространенными языками для параллельных вычислений являются высокопроизводительный ФОРТРАН (High Performance FORTRAN) и параллельные версии языка С (это, например, C*).

Более детальное описание рассматриваемого подхода к распараллеливанию содержит указание на следующие его основные особенности:

1. Обработкой данных управляет одна программа.
2. Пространство имён является глобальным, то есть для программиста существует одна единственная память, а детали структуры данных, доступа к памяти и межпроцессорного обмена данными от него скрыты.
3. Слабая синхронизация вычислений на параллельных процессорах, то есть выполнение команд на разных процессорах происходит, как правило, независимо и только лишь иногда производится согласование выполнения циклов или других программных конструкций - их синхронизация. Каждый процессор выполняет один и тот же фрагмент программы, но нет гарантии, что в заданный момент времени на всех процессорах выполняется одна и та же машинная команда.
4. Параллельные операции над элементами массива выполняются одновременно на всех доступных данной программе процессорах.

Таким образом, в рамках данного подхода от программиста не требуется больших усилий по векторизации или распараллеливанию вычислений. Даже при программировании сложных вычислительных алгоритмов можно использовать библиотеки подпрограмм, специально разработанных с учетом конкретной архитектуры компьютера и оптимизированных для этой архитектуры.

Подход, основанный на параллелизме данных, базируется на использовании при разработке программ базового набора операций:

- 1) операции управления данными;
- 2) операции над массивами в целом и их фрагментами;
- 3) условные операции;
- 4) операции приведения;
- 5) операции сдвига;
- 6) операции сканирования;
- 7) операции, связанные с пересылкой данных.

Рассмотрим эти базовые наборы операций.

Управление данными

В определенных ситуациях возникает необходимость в управлении распределением данных между процессорами. Это может потребоваться, например, для обеспечения равномерной загрузки процессоров. Чем более равномерно загружены работой процессоры, тем более эффективной будет работа компьютера.

Операции над массивами

Аргументами таких операций являются массивы в целом или их фрагменты (сечения), при этом данная операция применяется одновременно (параллельно) ко всем элементам массива. Примерами операций такого типа являются вычисление поэлементной суммы массивов, умножение элементов массива на скалярный или векторный множитель и т.д. Операции могут быть и более сложными - вычисление функций от массива, например.

Условные операции

Эти операции могут выполняться лишь над теми элементами массива, которые удовлетворяют какому-то определенному

условию. В сеточных методах это может быть четный или нечетный номер строки (столбца) сетки или неравенство нулю элементов матрицы.

Операции приведения

Операции приведения применяются ко всем элементам массива (или его сечения), а результатом является одно единственное значение, например, сумма элементов массива или максимальное значение его элементов.

Операции сдвига

Для эффективной реализации некоторых параллельных алгоритмов требуется операции сдвига массивов. Примерами служат алгоритмы обработки изображений, конечно-разностные алгоритмы.

Операции сканирования

Операции сканирования еще называются префиксными / суффиксными операциями. Префиксная операция, например, суммирование, выполняется следующим образом. Элементы массива суммируются последовательно, а результат очередного суммирования заносится в очередную ячейку нового, результирующего массива, причем номер этой ячейки совпадает с числом просуммированных элементов исходного массива.

Операции пересылки данных

Это, например, операции пересылки данных между массивами разной формы (то есть имеющими разную размерность и разную протяженность по каждому измерению).

При программировании на основе параллелизма данных часто используются специализированные языки - CM FORTRAN, C*, FORTRAN+, MPP FORTRAN, Vienna FORTRAN, а также HIGH PERFORMANCE FORTRAN (HPF). HPF основан на языке программирования ФОРТРАН 90, что связано с наличием в последнем удобных операций над массивами [64].

Стиль программирования, основанный на параллелизме задач, подразумевает, что вычислительная задача разбивается на

несколько относительно самостоятельных подзадач и каждый процессор загружается своей собственной подзадачей. Компьютер при этом представляет собой MIMD - машину. Аббревиатура MIMD обозначает в известной классификации архитектур ЭВМ компьютер, выполняющий одновременно множество различных операций над множеством, вообще говоря, различных и разнотипных данных. Для каждой подзадачи пишется своя собственная программа на обычном языке программирования, обычно это ФОРТРАН или С. Чем больше подзадач, тем большее число процессоров можно использовать, тем большей эффективности можно добиться. Важно то, что все эти программы должны обмениваться результатами своей работы, практически такой обмен осуществляется вызовом процедур специализированной библиотеки. Программист при этом может контролировать распределение данных между процессорами и подзадачами и обмен данными. Очевидно, что в этом случае требуется определенная работа для того, чтобы обеспечить эффективное совместное выполнение различных программ. По сравнению с подходом, основанным на параллелизме данных, данный подход более трудоемкий, с ним связаны следующие проблемы:

- 1) повышенная трудоемкость разработки программы и ее отладки;
- 2) на программиста ложится вся ответственность за равномерную загрузку процессоров параллельного компьютера;
- 3) программисту приходится минимизировать обмен данными между задачами, так как пересылка данных - наиболее "времяемкий" процесс;
- 4) повышенная опасность возникновения тупиковых ситуаций, когда отправленная одной программой посылка с данными не приходит к месту назначения.

Привлекательными особенностями данного подхода являются большая гибкость и большая свобода, предоставляемая программисту в разработке программы, эффективно использующей ресурсы параллельного компьютера и, как следствие, возможность достижения максимального быстродействия. Примерами специализированных библиотек являются библиотеки MPI (Message Passing Interface) [121] и PVM (Parallel Virtual

Machines)[125]. Эти библиотеки являются свободно распространяемыми и существуют в исходных кодах. Библиотека MPI разработана в Аргоннской национальной лаборатории (США), а PVM - разработка Окриджской национальной лаборатории, университетов штата Теннеси и Эмори (Атланта).

§43. Архитектура ЭВМ для высокопроизводительных вычислений

Преимуществом использования языков программирования высокого уровня является универсальность программ и их простая переносимость между различными компьютерами (разумеется, если на этих компьютерах имеется необходимое программное обеспечение, компиляторы). Обычно в повседневной жизни программиста ситуация близка к идеальной - имеется компилятор, порождающий эффективный исполняемый код. В этом случае можно надеяться на то, что при грамотном и аккуратном программировании вычислительная программа будет обладать хорошими показателями по быстродействию. В применении языков низкого уровня (ассемблеров) здесь нет необходимости. Но бывает и так, что программисту требуется знание устройства компьютера и принципов (и даже деталей) его работы. Если речь идет о большом проекте, когда расчет требует суток и недель процессорного времени, оптимизация программы, увеличивающая ее быстродействие даже на несколько процентов, может сэкономить часы процессорного времени. Можно привести следующий пример. При разработке программ для параллельных ЭВМ часто используются специализированные библиотеки, позволяющие организовать обмен данными между отдельными подзадачами и их синхронизацию. Для эффективной организации обмена данными необходимо знать, как происходит пересылка информации между процессорами, какова ее скорость и т.д.

В вычислительной науке используются три термина, связанные с устройством электронно-вычислительной машины. *Архитектура компьютера* - это описание компонент компьютера и их взаимодействия. *Организация компьютера* - это описание конкретной реализации архитектуры, ее воплощения "в железе".

Компьютеры CRAY, например, имеют сходную архитектуру. С точки зрения программиста у них одинаковое число внутренних регистров, используемых для временного хранения данных, одинаковый набор машинных команд, одинаковый формат представления данных. Организация же компьютеров Cray разных моделей может существенно различаться: у них может быть разное число процессоров, разный размер оперативной памяти, разное быстродействие и т.д. Третий термин - это *схема компьютера*, детальное описание его электронных компонент, их соединений, устройств питания, охлаждения и других. Программисту довольно часто требуется знание архитектуры компьютера, реже его организации и никогда - схемы компьютера.

Массивно-параллельные компьютеры (MPP системы)

Массивно-параллельные компьютеры с распределенной памятью. Идея построения компьютеров этого класса тривиальна: возьмем серийные микропроцессоры, снабдим каждый своей локальной памятью, соединим посредством некоторой коммуникационной среды - вот и все. Достоинства у такой архитектуры: если нужна высокая производительность, то можно добавить еще процессоров, если ограничены финансы или заранее известна требуемая вычислительная мощность, то легко подобрать оптимальную конфигурацию и т.п.

Однако есть и решающий "минус", сводящий многие "плюсы" на нет. Дело в том, что межпроцессорное взаимодействие в компьютерах этого класса идет намного медленнее, чем происходит локальная обработка данных самими процессорами. Именно поэтому написать эффективную программу для таких компьютеров очень сложно, а для некоторых алгоритмов иногда просто невозможно.

К данному классу можно отнести компьютеры Intel Paragon, IBM SP1, Parsytec, IBM SP2 и CRAY T3D/T3E. К этому же классу можно отнести и сети компьютеров, которые все чаще рассматривают как дешевую альтернативу крайне дорогим суперкомпьютерам.

Компьютеры с общей памятью (SMP системы)

Вся оперативная память таких компьютеров разделяется несколькими одинаковыми процессорами. Это снимает проблемы предыдущего класса, но добавляет новые - число процессоров, имеющих доступ к общей памяти, по чисто техническим причинам нельзя сделать большим. В данное направление входят многие современные многопроцессорные SMP-компьютеры или, например, отдельные узлы компьютеров HP Exemplar и Sun StarFire.

Векторно-конвейерные компьютеры

Конвейерные функциональные устройства и набор векторных команд - это две особенности таких машин. В отличие от традиционного подхода, векторные команды оперируют целыми массивами независимых данных, что позволяет эффективно загружать доступные конвейеры, т.е. команда вида $A=B+C$ может означать сложение двух массивов, а не двух чисел. Как правило, несколько специальных векторно-конвейерных процессоров (1-16) работают одновременно над общей памятью (аналогично SMP) в рамках многопроцессорных конфигураций. Несколько таких узлов могут быть объединены с помощью коммутатора (аналогично MPP). Характерным представителем данного направления является семейство векторно-конвейерных компьютеров CRAY, куда входят, например, CRAY EL, CRAY J90, CRAY T90.

Системы с неоднородным доступом к памяти (NUMA)

NUMA-архитектуры представляют собой нечто среднее между SMP и MPP. В таких системах память физически распределена, но логически общедоступна. Система состоит из однородных базовых модулей (плат), состоящих из небольшого числа процессоров и блока памяти. Модули объединены с помощью высокоскоростного коммутатора. Поддерживается единое адресное пространство, аппаратно поддерживается доступ к удаленной памяти, т.е. к памяти других модулей. При этом доступ к локальной памяти в несколько раз быстрее, чем к удаленной.

Компьютерные кластеры

В узком смысле кластер понимается как дешевый вариант МРР-системы, где каждый вычислительный модуль (обычный ПК) работает над своей памятью и связан с другими модулями через коммуникационный адаптер. В широком смысле кластерная архитектура не является самостоятельной, а есть комбинация МРР и SMP систем. Из нескольких процессоров (традиционных или векторно-конвейерных) и общей для них памяти формируется вычислительный узел. Если полученной вычислительной мощности не достаточно, то несколько узлов объединяются высокоскоростными каналами. По такому принципу построены CRAY SV1, HP Exemplar, Sun StarFire, NEC SX-5, последние модели IBM SP2 и другие. Именно это направление является в настоящее время наиболее перспективным для конструирования компьютеров с рекордными показателями производительности.

Мета-Компьютинг

Этот термин возник вместе с развитием высокоскоростной сетевой инфраструктуры в начале 90-х годов и относился к объединению нескольких разнородных вычислительных ресурсов в локальной сети организации для решения одной задачи. Основная цель построения мета-компьютера в то время заключалась в оптимальном распределении частей работы по вычислительным системам различной архитектуры и различной мощности. Например, предварительная обработка данных и генерация сеток для счета могли производиться на пользовательской рабочей станции, основное моделирование на векторно-конвейерном суперкомпьютере, решение больших систем линейных уравнений - на массивно-параллельной системе, а визуализация результатов - на специальной графической станции.

В дальнейшем исследования в области технологий мета-компьютинга были развиты в сторону однородного доступа к вычислительным ресурсам большого числа (вплоть до нескольких тысяч) компьютеров в локальной или глобальной сети. Компонентами "мета-компьютера" могут быть как простейшие ПК, так и мощные массивно-параллельные системы. Что важно, мета-компьютер может не иметь постоянной конфигурации - отдель-

ные компоненты могут включаться в его конфигурацию или отключаться от нее; при этом технологии мета-компьютинга обеспечивают непрерывное функционирование системы в целом. Современные исследовательские проекты в этой области направлены на обеспечение прозрачного доступа пользователей через Интернет к необходимым распределенным вычислительным ресурсам, а также прозрачного подключения простаивающих вычислительных систем к мета-компьютерам.

Очевидно, что наилучшим образом для решения на мета-компьютерах подходят задачи переборного и поискового типа, где вычислительные узлы практически не взаимодействуют друг с другом и основную часть работы производят в автономном режиме. Основная схема работы в этом случае примерно такая: специальный агент, расположенный на вычислительном узле (компьютере пользователя), определяет факт простоя этого компьютера, соединяется с управляющим узлом мета-компьютера и получает от него очередную порцию работы (область в пространстве перебора). По окончании счета по данной порции вычислительный узел передает обратно отчет о фактически проделанном переборе или сигнал о достижении цели поиска.

§44. Классификация Флинна

В литературе часто используется та или иная схема классификации компьютерных архитектур и одной из наиболее популярных является *таксономия Флинна* [90]. В ее основу положено описание работы компьютера с потоком команд и потоком данных. По Флинну принято классифицировать все возможные архитектуры компьютеров на четыре категории:

1. SISD (Single Instruction Stream - Single Data Stream) - один поток команд и один поток данных;
2. SIMD (Single Instruction Stream - Multiple Data Stream) - один поток команд и множество потоков данных;
3. MISD (Multiple Instruction Stream - Single Data Stream) - множество потоков команд и один поток данных;
4. MIMD (Multiple Instruction Stream - Multiple Data Stream) - множество потоков команд и множество потоков данных.

Рассмотрим эту классификацию более подробно.

SISD компьютеры

SISD компьютеры это обычные, "традиционные" последовательные компьютеры, в которых в каждый момент времени выполняется лишь одна операция над одним элементом данных (числовым или каким-либо другим значением). Большинство современных персональных ЭВМ, например, попадает именно в эту категорию. Иногда сюда относят и некоторые типы векторных компьютеров, это зависит от того, что понимать под потоком данных, но обсуждать эти детали здесь мы не будем.

SIMD компьютеры

SIMD компьютеры состоят из одного командного процессора (управляющего модуля), называемого контроллером, и нескольких модулей обработки данных, называемых процессорными элементами. Управляющий модуль принимает, анализирует и выполняет команды. Если в команде встречаются данные, контроллер рассыпает на все процессорные элементы команду, и эта команда выполняется на нескольких или на всех процессорных элементах. Каждый процессорный элемент имеет свою собственную память для хранения данных. Одним из преимуществ данной архитектуры считается то, что в этом случае более эффективно реализована логика вычислений. До половины логических инструкций обычного процессора связано с управлением выполнением машинных команд, а остальная их часть относится к работе с внутренней памятью процессора и выполнению арифметических операций. В SIMD компьютере управление выполняется контроллером, а "арифметика" отдана процессорным элементам. Векторные компьютеры представляют собой пример архитектуры SIMD.

MISD компьютеры

Вычислительных машин такого класса практически нет и трудно привести пример их успешной реализации. Один из немногих - *систолический массив* процессоров, в котором процессоры находятся в узлах регулярной решетки, роль ребер которой

играют межпроцессорные соединения. Все процессорные элементы управляются общим тактовым генератором. В каждом цикле работы каждый процессорный элемент получает данные от своих соседей, выполняет одну команду и передает результат соседям.

MIMD компьютеры

Эта категория архитектур вычислительных машин наиболее богата, если иметь в виду примеры ее успешных реализаций. В нее попадают симметричные параллельные вычислительные системы, рабочие станции с несколькими процессорами, кластеры рабочих станций и т.д. Уже довольно давно появились компьютеры с несколькими независимыми процессорами, но вначале на таких компьютерах был реализован только параллелизм заданий, то есть на разных процессорах одновременно выполнялись разные и независимые программы. Разработке первых компьютеров для параллельных вычислений были посвящены проекты под условным названием СМ* и С.ММР в университете Карнеги (США). Технической базой для этих проектов были процессоры DEC PDP-11. В начале 90-х годов именно MIMD компьютеры выходят в лидеры на рынке высокопроизводительных вычислительных систем.

§45. Основные концепции архитектуры высокопроизводительных вычислительных систем

Архитектура традиционных последовательных компьютеров включает в себя центральный процессор, оперативную память - адресное пространство с линейной адресацией и блок управления. Последовательность команд применяется к последовательности данных. Быстродействие такого традиционного компьютера определяется быстродействием его центрального процессора и временем доступа к оперативной памяти. Быстродействие центрального процессора может быть увеличено за счет увеличения тактовой частоты, величина которой зависит от плотности элементов в интегральной схеме, способа их "упаковки" и быстродействия микросхем оперативной памяти.

Другие методы повышения быстродействия последовательного компьютера основаны на расширении традиционной неймановской архитектуры, а именно:

- 1) применении RISC процессоров, то есть процессоров с сокращенным набором команд. В RISC процессорах большая часть команд выполняется за 1-2 такта;
- 2) применении суперскалярных процессоров;
- 3) применении конвейеров.

В высокопроизводительных вычислительных системах используются как традиционные элементы архитектуры, так и ее расширения, а также новые элементы такие, например, как векторные процессоры и т.д. В этом разделе мы рассмотрим такие важнейшие концепции организации высокопроизводительных вычислительных систем, как векторная обработка данных, конвейеры, методы и типы межпроцессорных коммуникаций, организация оперативной памяти.

Термин "конвейер" в компьютерной архитектуре обозначает ... конвейер. Идея конвейера состоит в том, чтобы сложную операцию разбить на множество более простых, которые могут выполняться одновременно. При движении объектов по конвейеру на разных его участках выполняются разные операции, а при достижении каждым объектом конца конвейера он окажется полностью обработанным. Конвейеры применяются как при обработке команд, так и в арифметических операциях. Для эффективной реализации конвейера должны выполняться следующие условия: система выполняет повторяющуюся операцию; эта операция может быть разделена на независимые части, степень перекрытия которых невелика; трудоемкость подопераций примерно одинакова.

Количество подопераций называют *глубиной конвейера*. Важным условием нормальной работы конвейера является отсутствие конфликтов, то есть данные, подаваемые в конвейер, должны быть независимыми. В том случае, когда очередной операнд зависит от результата предыдущей операции, возникают такие периоды работы конвейера ("пузыри"), когда он пуст. Это еще одна проблема в работе конвейерных систем.

В конвейерах команд также могут возникать простоя, источником которых является зависимость между командами. Такие ситуации возникают при наличии в циклах ветвлений, то есть условных операторов.

Суперскалярный процессор представляет собой нечто большее, чем обычный последовательный (скалярный) процессор. В отличие от последнего он может выполнять несколько операций за один такт. Основными компонентами суперскалярного процессора являются устройства для интерпретации команд, снабженные логикой, позволяющей определить, являются ли команды независимыми, и достаточное число исполняющих устройств. В исполняющих устройствах могут быть конвейеры. Суперскалярные процессоры реализуют параллелизм на уровне команд.

Примером компьютера с суперскалярным процессором является IBM RISC/6000. Тактовая частота процессора у ЭВМ была 62.5 МГц, а быстродействие системы на вычислительных тестах достигало 104 Mflop (Mflop - единица измерения быстродействия процессора - миллион операций с плавающей точкой в секунду). Суперскалярный процессор не требует специальных векторизующих компиляторов, хотя компилятор должен в этом случае учитывать особенности архитектуры.

Векторный процессор "умеет" обрабатывать одной командой не одно единственное значение, а сразу массив (вектор) значений. Пусть A1, A2 и P - это три массива, имеющие одинаковую размерность и одинаковую длину, и имеется оператор

$$P = A1 + A2.$$

Векторный процессор за один цикл выполнения команды выполнит попарное сложение элементов массивов A1 и A2 и присвоит полученные значения соответствующим элементам массива P. Каждый operand при этом хранится в особом, векторном регистре. Обычному, последовательному процессору пришлось бы несколько раз выполнять операцию сложения элементов двух массивов. Векторный процессор выполняет лишь одну команду.

Очевидно, за счет векторизации можно надеяться получить высокую производительность. Кроме того, векторным ЭВМ при-

сущи и другие интересные особенности. Количество команд, необходимых для выполнения одной и той же программы, использующей векторизуемые операции, меньше в случае векторного процессора, чем обычного, скалярного. Уменьшение потока команд позволяет снизить требования к устройствам коммуникации, в том числе между процессором и оперативной памятью компьютера. Другой момент заключается в том, что при соответствующей организации оперативной памяти данные в процессор будут передаваться на каждом такте, что дает значительный выигрыш в производительности компьютера.

Следует заметить, что именно векторные ЭВМ были первыми высокопроизводительными компьютерами и традиционно именно ЭВМ с векторной архитектурой называются суперкомпьютерами.

Векторные компьютеры различаются тем, как операнды передаются командам процессора. Здесь можно выделить следующие основные схемы: *из памяти в память* - в этом случае операнды извлекаются из оперативной памяти, загружаются в арифметическое устройство, и результат возвращается в оперативную память; *из регистра в регистр* - операнды вначале загружаются в векторные регистры, затем operand передается в арифметическое устройство, и результат возвращается в один из векторных регистров.

Преимущество первой схемы заключается в том, что она дает возможность работать с векторами произвольной длины, тогда как во втором случае требуется разбиение длинных векторов на части, длина которых соответствует возможностям векторного регистра. С другой стороны, в первом случае имеется определенное время запуска между инициализацией команды и появлением в конвейере первого результата. Если конвейер уже загружен, результат на его выходе будет получаться в каждом такте. В векторных компьютерах, работающих по схеме регистр-регистр, длина вектора гораздо меньше. Для компьютеров серии Cray это 64. Но существенно меньшее время запуска позволяет добиться хороших показателей по быстродействию. Правда, если работать с длинными векторами, их приходится разбивать на части меньшей длины, что снижает быстродействие. Векторные компью-

ры, работающие по схеме из регистра в регистр, в настоящее время доминируют на рынке векторных компьютеров, и наиболее известными представителями являются машины семейства Cray, NEC, Fujitsu и Hitachi.

§46. Оперативная память

Характеристики оперативной памяти и особенности ее устройства являются важнейшим фактором, от которого зависит быстродействие компьютера. Ведь даже при наличии быстрого процессора скорость выборки данных из памяти может оказаться невысокой, и именно эта невысокая скорость работы с оперативной памятью будет определять быстродействие компьютера. Время цикла работы с памятью t_m обычно заметно больше, чем время цикла центрального процессора t_c . Если процессор инициализирует обращение к памяти, она будет занята в течение времени $t_c + t_m$ и в течение этого промежутка времени ни одно другое устройство, в том числе и сам процессор, не смогут работать с оперативной памятью. Таким образом, возникает проблема доступа к памяти.

Эта проблема решается специальной организацией оперативной памяти. Принята следующая классификация параллельных компьютеров по архитектуре подсистем оперативной памяти: *системы с разделяемой памятью*, у которых имеется одна большая виртуальная память и все процессоры имеют одинаковый доступ к данным и командам, хранящимся в этой памяти; *системы с распределенной памятью*, у которых каждый процессор имеет свою локальную оперативную память и к этой памяти у других процессоров нет доступа.

Для программиста часто бывает важно знать тип оперативной памяти компьютера, на котором он работает. Ведь архитектура памяти определяет способ взаимодействия между различными частями параллельной программы. На компьютере с распределенной памятью программа перемножения матриц, например, должна создать копии перемножаемых матриц на каждом процессоре, что технически осуществляется передачей на эти процессоры сообщения, содержащего необходимые данные. В случае системы с разделяемой памятью достаточно лишь один

раз задать соответствующую структуру данных и разместить ее в оперативной памяти. Остановимся подробнее на различных архитектурах подсистемы памяти.

Простейший способ создать многопроцессорный вычислительный комплекс с разделяемой памятью - взять несколько процессоров, соединить их с общей шиной и соединить эту шину с оперативной памятью. Этот простой способ является не очень удачным, поскольку между процессорами возникает борьба за доступ кшине, и если один процессор принимает команду или передает данные, все остальные процессоры вынуждены будут перейти в режим ожидания. Это приводит к тому, что начиная с некоторого числа процессоров, быстродействие такой системы перестанет увеличиваться при добавлении нового процессора.

Несколько улучшить картину может применение кэш-памяти для хранения команд. При наличии локальной, то есть принадлежащей данному процессору, кэш-памяти, следующая необходимая ему команда с большой вероятностью будет находиться в кэш-памяти. В результате этого уменьшается количество обращений кшине, и быстродействие системы возрастает. Вместе с тем возникает новая проблема - проблема *кэш-когерентности*. Эта проблема заключается в том, что если, скажем, двум процессорам для выполнения различных операций понадобилось значение V, это значение будет храниться в виде двух копий в кэш-памяти обоих процессоров. Один из процессоров может изменить это значение в результате выполнения своей команды, и оно будет передано в оперативную память компьютера. Но в кэш-памяти второго процессора все еще хранится старое значение! Следовательно, необходимо обеспечить своевременное обновление данных в кэш-памяти всех процессоров компьютера.

Имеются и другие реализации разделяемой памяти. Это, например, разделяемая память с дискретными модулями памяти. Физическая память состоит из нескольких модулей, хотя виртуальное адресное пространство остается общим. Вместо общей шины в этом случае используется переключатель, направляющий запросы от процессора к памяти. Такой переключатель может одновременно обрабатывать несколько запросов к памяти, поэтому,

если все процессоры обращаются к разным модулям памяти, быстродействие возрастает.

В вычислительных системах с распределенной памятью оперативная память имеется у каждого процессора. Процессор имеет доступ только к своей памяти. В этом случае отпадает необходимость в шине или переключателе. Нет и конфликтов по доступу к памяти, так как каждый процессор работает только со своей собственной памятью. Нет присущих системам с разделяемой памятью ограничений на число процессоров, нет, разумеется, и проблемы с кэш-когерентностью. Но, с другой стороны, возникают проблемы с организацией обмена данными между процессорами. Обычно такой обмен осуществляется при помощи обмена сообщениями-посылками, содержащими данные. Для формирования такой посылки требуется время, для получения и считывания полученных данных тоже требуется определенное время. Эти дополнительные затраты времени - плата за все те преимущества, о которых шла речь.

Программирование для систем с распределенной памятью - более сложная задача. Оно требует разбиения исходной вычислительной задачи на подзадачи, выполнение которых может быть разнесено на разные процессоры.

§47. Связь между элементами параллельных вычислительных систем

Важнейшим элементом архитектуры любого компьютера, а высокопроизводительных вычислительных систем в особенности, являются средства обмена данными между процессором и оперативной памятью, процессором и другим процессором, процессором и другими устройствами и т.д. Организация внутренних коммуникаций вычислительной системы называется ее *топологией*. Далее речь идет о многопроцессорных компьютерах, которые в данном контексте принято рассматривать как набор узлов (процессорных элементов, модулей памяти, переключателей) и соединений между узлами.

Приведем несколько определений. Два узла называются *соседними*, если между ними имеется прямое соединение. Порядком узла называется количество его соседей. *Диаметром* сети (а

речь идет, фактически, о локальных сетях) называется максимальный путь между любыми двумя узлами. *Масштабируемость* характеризует возрастание сложности соединений при добавлении в конфигурацию новых узлов. Если система обладает высокой степенью масштабируемости, ее сложность будет незначительно изменяться при наращивании системы, неизменным будет и диаметр сети.

Приведем примеры топологий, которые применяются в параллельных вычислительных системах. Распространенной является хорошо масштабируемая топология "гиперкуб" (рис. 54 - 56).



Рис. 54. 1-мерный гиперкуб

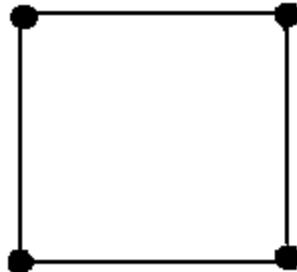


Рис. 55. 2-мерный гиперкуб

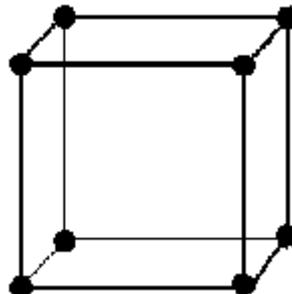


Рис. 56. 3-мерный гиперкуб

Для адресации узлов в гиперкубе каждому узлу присваивается свой идентификационный номер, при этом двоичные представления идентификационных номеров соседних узлов отличаются одним битом. Алгоритм пересылки сообщения от одного узла к другому в этом случае достаточно простой и основан на

побитовом сравнении двоичных представлений идентификационных номеров текущего узла и адресата.

Другим примером топологии является двумерная решетка рис. 57. Это обычная квадратная решетка с границчными соединениями разного рода:

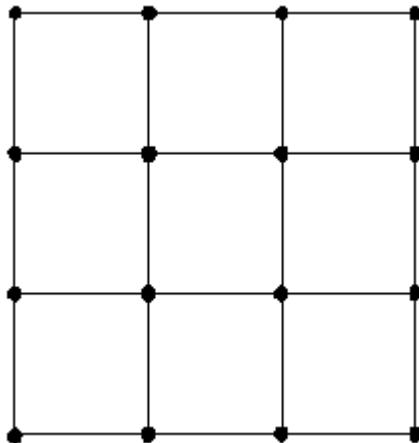


Рис. 57. Плоская решетка

Более сложный тип коммуникации дается многоступенчатыми соединениями. В этом случае на одном конце соединения находятся процессоры, а на другом – процессоры или другие узлы. В середине располагаются переключатели. При передаче данных от узла к узлу переключатели устанавливаются таким образом, чтобы обеспечить требуемое соединение. Очевидно, для этого требуется некоторое время - "время установки". Примерами многоступенчатых соединений являются соединения "бабочка" (рис. 58) и "омега". Эти соединения формируются из переключателей, имеющих 2 входа и 2 выхода. Входы и выходы коммутируются. Количество переключателей, необходимое для нормальной работы сети с n входами и n выходами, $O(n \log_2 n)$.

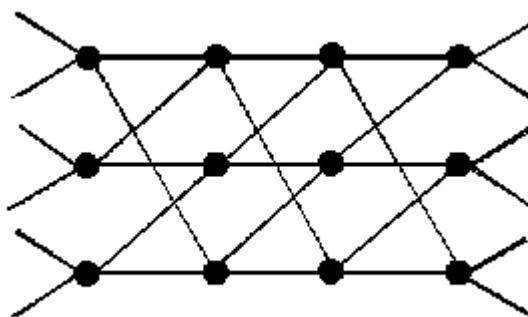


Рис. 58. Соединение "бабочка"

Более устойчивую и эффективную работу обеспечивает перекрестное соединение (рис. 59). Переключатели динамически конфигурируются так, чтобы обеспечить требуемое соединение. Масштабируемость такого соединения не очень хорошая, так как добавление нового узла требует включения дополнительно $2n-1$ переключателей.

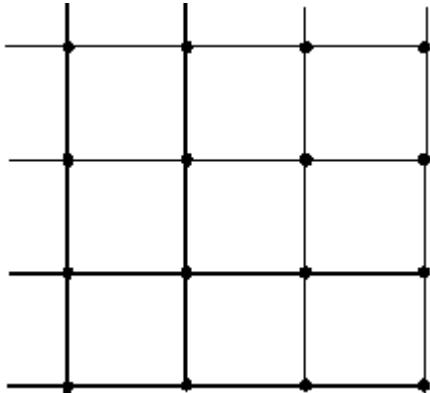


Рис. 59. Перекрестное соединение

Важнейшими атрибутами системы коммуникаций являются стратегии управления, переключения и синхронизации. Что касается управления, то здесь можно выделить две альтернативы: централизованное управление единым контроллером (модулем управления) и распределенное управление. Примерами распределенного управления являются работа многоступенчатых соединений, где каждый узел принимает решение, как поступить с поступившим сообщением - оставить его себе или передать соседу. Другой вариант используется, например, в соединениях типа "звезда", где каждое сообщение пересыпается в контроллер, который определяет его дальнейшую судьбу.

Синхронизация тоже может быть глобальной, когда синхронизующая последовательность импульсов передается всем узлам вычислительной системы, но может быть и локальной, когда каждый узел имеет свой собственный генератор. Последний вариант называется асинхронной работой. Преимущество глобальной синхронизации, характерной для SIMD машин заключается в более простой аппаратной и программной реализации, а асинхронные системы, чаще всего это MIMD-компьютеры - более гибкие.

Стратегии переключения тоже бывают двух видов. Во-первых, это пакетное переключение, когда сообщение разбивается на более мелкие пакеты, пересыпаемые по сети. Преодолев

очередное соединение, пакет попадает на очередной узел, который определяет, куда этот пакет должен быть отправлен и должен ли он быть отправлен вообще. В конце концов пакеты должны прибыть на узел-адресат, причем пути их могут быть разными. На последнем узле пакеты собираются и восстанавливаются переданное сообщение. Во-вторых, возможно цепное переключение, когда между отправителем и адресатом создается магистраль, по которой и передается сообщение целиком.

§48. Основные понятия параллелизма

В этом параграфе представлен ряд основных понятий и способов измерения параллелизма [30, 66]. Начнем со случая параллельной системы, состоящей из p процессоров. Дадим, прежде всего, некоторые определения.

Определение 1. Степенью параллелизма численного алгоритма называется число его операций, которые можно выполнять параллельно.

Проиллюстрируем это определение несколькими примерами и по ходу дела уточним его. Начнем с задачи сложения двух векторов a и b . Сложения $a_i + b_i$, $i = 1, \dots, n$ независимы и могут выполняться параллельно. Таким образом, степень параллелизма этого алгоритма равна n . Отметим, что понятие степени параллелизма не связано с числом процессоров нашей системы, оно является характеристикой параллелизма, внутренне присущего алгоритму. Разумеется, от числа процессоров зависит время, необходимое для завершения вычислений. Например, если $n = 1000$ и число процессоров p также равно 1000, то все суммы условно можно вычислить за один временной шаг, однако при $p = 10$ потребуется 100 временных шагов.

Рассмотрим теперь задачу сложения n чисел a_1, \dots, a_n . Обычный последовательный алгоритм: $s = a_1$, $s = s + a_i$, $i = 2, \dots, n$ – не-пригоден для параллельных вычислений. Однако в самой задаче заключен немалый параллелизм. На рис. 60 показано, как можно осуществить суммирование восьми чисел в три этапа. Задача суммирования разделена на меньшие подзадачи, которые могут решаться независимо. Граф на рис. 60 называется *графом свай-*

вания. В частности, та же идея применима к вычислению произведения n чисел $a_1 a_2 \dots a_n$, достаточно заменить на рис. 60 знак $+$ на знак $*$. Точно так же, чтобы найти максимальное из n чисел $a_1 a_2 \dots a_n$, можно заменить знак операции сложения символом \max ; например, вместо $a_1 + a_2$ на рис. 60 стояло бы $\max(a_1, a_2)$, и т. д. Заметим, что граф на рис. 60 представляет собой *двоичное дерево*, поэтому операцию, выполняемую с помощью графа сдавивания, иногда называют *операцией на дереве*.

Для $n = 2^q$ чисел алгоритм сдавивания состоит из $q = \log n$ ¹ этапов; на первом этапе выполняются $n/2$ сложений, на втором - $n/4$, и т. д., пока на последнем этапе не будет выполнено единственное сложение. Очевидно, что на первом этапе степень параллелизма равна $n/2$, на втором - $n/4$, и т. д.

Определение 2. Средней степенью параллелизма численного алгоритма называется отношение общего числа операций алгоритма к числу его этапов.

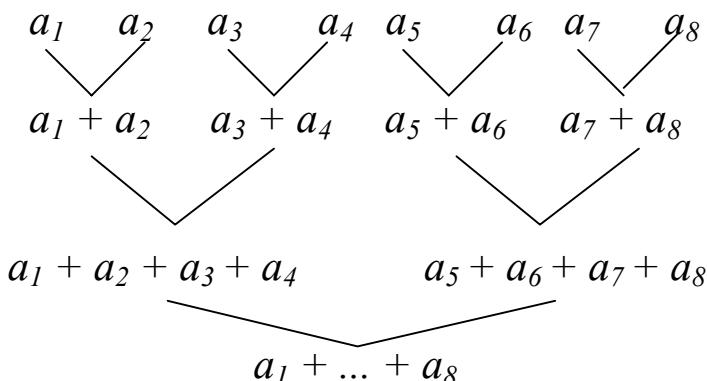


Рис. 60

Для алгоритма сдавивания средняя степень параллелизма равна $\frac{1}{q} \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + 1 \right) = \frac{2^q - 1}{q} = \frac{n-1}{\log n} = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$, тогда как при

сложении двух n -векторов средняя степень параллелизма равна n , т. е. совпадает со степенью параллелизма. Этот последний алгоритм обладает «идеальным» параллелизмом, в то время как для

¹ Запись \log означает, что логарифм берется по основанию 2

алгоритма сдваивания средняя степень параллелизма в $\log n$ раз меньше идеальной. И все же алгоритм сдваивания можно считать хорошо параллелизуемым, особенно по сравнению с последовательным алгоритмом, для которого средняя степень параллелизма равна $(n-1)/(n-1) = 1$.

Со степенью параллелизма также связано понятие *зернистости*. *Крупнозернистость* задачи означает наличие в ней больших независимых подзадач, которые можно обрабатывать параллельно. Примером может служить задача решения шести различных больших систем линейных уравнений, решения этих систем комбинируются на более поздних стадиях вычислительного процесса. Мелкозернистость соответствует возможности параллельного выполнения малых подзадач. Так, для сложения двух векторов подзадачей является сложение одноименных компонент.

Определение 3. Ускорением параллельного алгоритма называется отношение:

$$S_p = \frac{\text{время выполнения алгоритма на одном процессоре}}{\text{время выполнения алгоритма в системе из } P \text{ процессоров}}$$

Для задачи сложения векторов следовало бы ожидать, что $S_p = p$, т.е. ускорение максимальное. Заметим, однако, что в определении подразумеваются действительные времена вычислений. Это делает определение более реалистичным, но затрудняет его использование в том случае, если требуемые времена неизвестны. Рассмотрим сложение n чисел с помощью алгоритма сдваивания в системе из $n/2$ процессоров с локальной памятью. Пусть a_1 и a_2 хранятся в памяти процессора 1, a_3 и a_4 – в памяти процессора 2, и т. д. Прежде чем можно будет выполнять сложения второго этапа, необходимо передать число a_3+a_4 процессору 1, число a_7+a_8 – процессору 3, и т.д. Аналогичные переносы данных требуются на каждом этапе, что, конечно, увеличивает общее время выполнения алгоритма. Предположим, что для одного сложения нужно время t , а для переноса одного числа – время αt ; обычно α больше единицы. Игнорируя прочие издержки, имеем для алгоритма сложения (с учетом равенства $p=n/2$)

$$S_p = \frac{(n-1)t}{(\log n)(1+\alpha)t} = \frac{1}{1+\alpha} \frac{2p-1}{1+\log p}.$$

Заметим, что в данном случае ускорение есть средняя степень параллелизма, деленная на $1+\alpha$. Если, α - величина, близкая к единице, т.е. на обмены затрачивается примерно столько же времени, сколько на арифметику, то ускорение уменьшится приблизительно вдвое по сравнению с идеальной ситуацией, когда $\alpha=0$. С другой стороны, если α велико, скажем, $\alpha=10$, то время на обмены доминирует над временем вычислений; соответственно падает ускорение. Ускорение позволяет сравнивать поведение данного алгоритма для одного и p процессоров.

С ускорением связана эффективность, параллельного алгоритма.

Определение 4. Эффективностью параллельного алгоритма называется величина: $E_p = \frac{S_p}{p}$.

Поскольку $S_p \leq p$, то $E_p \leq 1$. Если алгоритм достигает максимального ускорения ($S_p = p$), то $E_p = 1$.

§49. Закон Амдаля

Одной из целей при конструировании параллельных алгоритмов является достижение по возможности большего ускорения; в идеальном случае $S_p = p$. Однако мы уже видели на примере сложения n чисел, что эта ситуация не всегда достижима. В самом деле, максимальное ускорение можно получить только для задач, по существу тривиальных.

Главные факторы, обусловливающие отклонение от максимального ускорения, таковы:

1. Отсутствие максимального параллелизма в алгоритме и/или несбалансированность нагрузки процессоров.
2. Обмены, конфликты памяти и время синхронизации.

Хотя задержки, связанные с синхронизацией, обменами и конфликтами памяти, по своей природе весьма различны, их воздействие на общий процесс вычисления одинаково: они замедляют

его на время, необходимое для подготовки данных, нужных для дальнейшего счета. Поэтому иногда мы будем объединять все три фактора задержки, как это сделано в следующем определении.

Определение 5. Временем подготовки данных называется задержка, вызванная обменами, конфликтами памяти или синхронизацией и необходимая для того, чтобы разместить данные, требующиеся для продолжения вычислений, в соответствующих ячейках памяти.

Обратимся теперь к фактору отсутствия максимального параллелизма. Он может проявляться по-разному. При сложении n чисел мы видели, что на первом этапе алгоритма параллелизм максимальен, однако на каждом последующем этапе степень параллелизма уменьшается вдвое. Таким образом, в большинстве случаев средняя степень параллелизма алгоритма меньше n .

Рассмотрим теперь формальную модель ускорения, в которой

$$S_p = \frac{T_1}{(\alpha + (1 - \alpha)/p)T_1 + t_d},$$

где T_1 - время, затрачиваемое на реализацию алгоритма на одном процессоре, α - доля операций в алгоритме, выполняемых одним процессором, $(1 - \alpha)$ - доля операций, выполняемых всеми p процессорами, t_d - общее время, требуемое для подготовки данных.

В случае если $\alpha=0$ и $t_d=0$, ускорение максимально $S_p = p$. Предпосылки данного случая заключаются в том, что все операции выполняются с максимальным параллелизмом и отсутствуют задержки на подготовку данных.

В случае $t_d=0$ получаем формулу, выражющую закон Амдалья

$$S_p = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha)/p}.$$

Предположим, что $\alpha = 1/2$, то есть половина операций в алгоритме может выполняться параллельно, а половина нет. Тогда ускорение принимает вид

$$S_p = \frac{2}{1+1/p} < 2.$$

Таким образом, независимо от количества процессоров и даже при игнорировании всех затрат на подготовку данных ускорение параллельного алгоритма всегда меньше 2.

§50. Исследование свойств параллельного алгоритма

При реализации алгоритмов на параллельных компьютерах для анализа эффективности варианта распараллеливания можно порекомендовать проводить исследование по следующей схеме:

- 1) написать последовательный алгоритм решения задачи;
- 2) вычислить кол-во операций на реализацию последовательного алгоритма $F(n)$, где n - размерность задачи;
- 3) определить время, затраченное на реализацию последовательного алгоритма $T_1(n)$;
- 4) определить производительность компьютера на последовательном алгоритме ($MFLOP(n)$);
- 5) написать параллельный алгоритм решения задачи;
- 6) определить время, затраченное на реализацию параллельного алгоритма $T_p(n)$ (p – количество процессоров);
- 7) определить производительность кластера на параллельном алгоритме ($MFLOP_p(n)$);
- 8) вычислить ускорение параллельного алгоритма по сравнению с последовательным $S_p(n) = \frac{T_1(n)}{T_p(n)}$;
- 9) вычислить эффективность параллельного алгоритма $E_p(n) = \frac{S_p(n)}{p}$.

§51. Тестирование кластера

Для более глубокого понимания и наглядности ниже приведены подробные результаты тестирования кластера кафедры Юнеско КемГУ.

Характеристика отдельного узла кластера следующая – Celeron/400Mhz, 64 Mb RAM, 6 Gb HDD (из них 2 Gb отведено под Windows для обучения студентов, и 4 Gb под Linux для работы кластера). Сетевая среда – 100 Mbps Fast Ethernet (802.3u), сетевые адаптеры DFE-530TX 10/100, коммутатор Allied Telesyn AT-FS716 10/100. Операционная система кластера – Red Hat Linux 6.2 Intel, компиляторы - GNU GCC/G77, коммуникационная библиотека – MPICH 1.2.1.

MPI (Message passing interface) - это стандарт на программный инструментарий для обеспечения связи между ветвями параллельного приложения. Минимально в состав MPI входят: библиотека программирования (заголовочные и библиотечные файлы для языков Си, Си++ и Фортран) и загрузчик приложений.

Для MPI принято писать программу, содержащую код всех ветвей сразу. MPI-загрузчиком запускается указываемое количество экземпляров программы. Каждый экземпляр определяет свой порядковый номер в запущенном коллективе и в зависимости от этого номера и размера коллектива выполняет ту или иную ветку алгоритма. Такая модель параллелизма называется *Single program/Multiple data* (SPMD) и является частным случаем модели *Multiple instruction/Multiple data* (MIMD). Каждая ветвь имеет пространство данных, полностью изолированное от других ветвей. Обмениваются данными ветви только в виде сообщений MPI.

Все ветви запускаются загрузчиком одновременно как процессы Unix. Количество ветвей фиксировано - в ходе работы порождение новых ветвей невозможно. Если MPI-приложение запускается в сети, запускаемый файл приложения должен быть построен на каждой машине. Загрузчик MPI приложений - утилита `mpirun`. Параллельное приложение будет образовано N задачами-копиями. В момент запуска все задачи одинаковы, но получают от MPI разные номера от 0 до N-1. В тексте параллельной программы эти номера используются для указания конкретному процессу, какую ветвь алгоритма он должен выполнять.

Специфика MPI - осуществляет связь между процессорами, передавая необходимые данные между ветвями параллельного алгоритма. Реализуется с помощью набора подпрограмм MPI.

Проблемы использования MPI: во-первых, перед запуском приложения необходимо копирование приложения на все компьютеры кластера; во-вторых, перед запуском приложения необходима информация о реально работающих компьютерах кластера для редактирования файла конфигурации кластера, который содержит имена машин; в-третьих, в MPI, установленной версии, не поддерживается динамическое регулирование процессом, т.е. если один из узлов выходит из строя, то общий вычислительный процесс прекращается, и если добавляются новые узлы, то в запущенном ранее процессе они не участвуют.

Основным преимуществом MPI по сравнению с другими коммуникационными библиотеками является то, что он может работать как на сети ПК, так и на компьютерах с процессорами на общей памяти. Кроме того, содержит огромный набор функций для передачи сообщений (порядка нескольких сотен) и поддерживается многими платформами.

Создание параллельной программы можно разбить на следующие этапы: последовательный алгоритм подвергается декомпозиции (распараллеливанию), т.е. разбивается на независимо работающие ветви; для взаимодействия в ветви вводятся две нематематические функции: прием и передача данных; распараллленный алгоритм записывается в виде программы, в которой операции приема и передачи записываются в терминах MPI, тем самым обеспечивая связь между ветвями.

Тестирование производительности кластера можно разбить на несколько частей: тестирование коммуникаций, производительности отдельного узла кластера на наиболее популярном тесте и тестирование всего кластера при реализации параллельного алгоритма.

Пропускная способность и латентность

Предположим, что на двух процессорах (узлах) вычислительной системы работают два процесса, между которыми с помощью сети (другой коммуникационной среды) персылаются сообщения. В передаче информации, помимо аппаратных устройств, участвует и программное обеспечение, например, протокольный стэк (встроенный в ОС) и реализация интерфейса пере-

дачи сообщений MPI. Какими характеристиками определяется эффективность передачи информации между процессами параллельного приложения?

Основными характеристиками быстродействия сети являются латентность (latency) и пропускная способность (bandwidth) [62].

Определение 7. Под **пропускной способностью R** сети понимают количество информации, передаваемой между узлами сети в единицу времени (байт в секунду).

Очевидно, что реальная пропускная способность снижается программным обеспечением за счет передачи разного рода служебной информации.

Определение 8. Латентностью (задержкой) называется время, затрачиваемое программным обеспечением и устройствами сети на подготовку к передаче информации по данному каналу. Полная латентность складывается из программной и аппаратной составляющих.

Различают следующие виды пропускной способности сети:

- 1) пропускная способность односторонних пересылок ("точка-точка", **uni-directional bandwidth**), равная максимальной скорости, с которой процесс на одном узле может передавать данные другому процессу на другом узле;
- 2) пропускная способность двусторонних пересылок (**bi-directional bandwidth**), равная максимальной скорости, с которой два процесса могут одновременно обмениваться данными по сети.

В чем измеряются эти величины?

Значения пропускной способности выражают в мегабайтах в секунду (MB/sec), значения латентности - в микросекундах (usec = 10^{-6} sec).

Из чего складывается время на пересылку сообщения?

Время $T(L)$, необходимое на передачу сообщения длины L байт, можно определить следующим образом: $T(L)=s+L/R$, где s – латентность, а R – пропускная способность сети.

Для приложений с тонкой параллельной структурой (fine-grained parallelism), какими, как правило, являются вычислительные программы, крайне важны малые величины латентности; то-

гда как для приложений, использующих большие объемы пересылок (а это, как правило, коммерческие приложения БД), более важно максимальное увеличение пропускной способности.

Методика измерения пропускной способности

Для измерения пропускной способности "точка-точка" используется следующая методика. Процесс с номером 0 посыпает процессу с номером 1 сообщение длины L байт. Процесс 1, приняв сообщение от процесса 0, посыпает ему ответное сообщение той же длины. Используются блокирующие (blocking) вызовы MPI (MPI_Send, MPI_Recv). Эти действия повторяются N раз с целью минимизировать погрешность за счет усреднения. Процесс 0 измеряет время T, затраченное на все эти обмены. Пропускная способность R определяется по формуле

$$R=2NL/T.$$

Пропускная способность двунаправленных обменов определяется по той же формуле. В этом случае используются неблокирующие (non-blocking) вызовы MPI (MPI_Isend, MPI_Irecv). При этом производится измерение времени, затраченного процессом 0 на передачу сообщения процессу 1 и прием ответа от него, при условии, что процессы начинают передачу информации одновременно после точки синхронизации.

Методика измерения латентности

Латентность измеряется как время, необходимое на передачу сигнала, или сообщения нулевой длины. При этом, для снижения влияния погрешности и низкого разрешения системного таймера, важно повторить операцию посылки сигнала и получения ответа большое число раз.

Пропускная способность кластера при однонаправленных обменах для различных размеров пересыпаемого пакета приведена в таблице 9, при двунаправленных обменах – в таблице 10.

Таблица 9

Размер данных, байт	1024	16384	32768	65536
Скорость пересылки, Mb/sec	4,4	8,5	8,7	8,7

Таблица 10

Размер данных, Байт	1024	16384	32768	65536
Скорость пересылки, Mb/sec	6,7	9,2	9,6	9,9

Латентность в среднем составила $100 \cdot 10^{-6}$ sec.

Результаты тестирования сети полностью соответствуют прогнозам: скорость передачи данных растет с увеличением размера пакета и на пакетах длиной 64 Kb достигает 10 Mb/sec.

Тест LINPACK

Изначально кластера создавались для решения научно-технических задач, в которых существенно используется арифметика с плавающей точкой. Для оценки их производительности применяется единица измерения MFLOP, равная миллиону элементарных операций над числами с плавающей точкой, выполненных в секунду. Для кластеров вводится понятие суммарной производительности, равной количеству процессоров умноженному на производительность одного из процессоров. Эта характеристика на реальных приложениях недостижима, т.к. ее можно получить лишь в одном вырожденном случае, когда ветви приложения, запущенные на разных процессорах, никак друг с другом не взаимодействуют.

Производительность кластера Юнеско КемГУ определялась с использованием алгоритма из пакета LINPACK [<http://www.netlib.org/lipack>] для решения систем линейных алгебраических уравнений методом LU разложения, который представляет собой набор последовательных фортрановских подпрограмм для матричных вычислений [30, 66, 85]. Суммарная производительность кластера составила 162 MFLOP (27 MFLOP на каждом узле) для чисел с плавающей точкой одинарной точности и 102 MFLOP (17 MFLOP на каждом узле) для двойной точности при размерности обращаемой матрицы 1000x1000 в обоих случаях. На рис. 61 приведена зависимость производительности компьютера от размерности обращаемой матрицы.

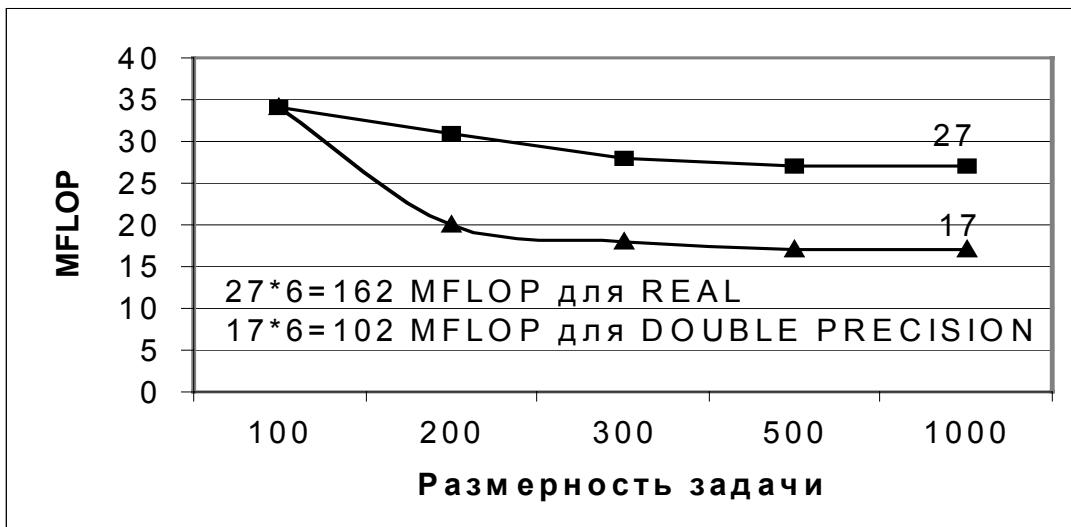


Рис. 61

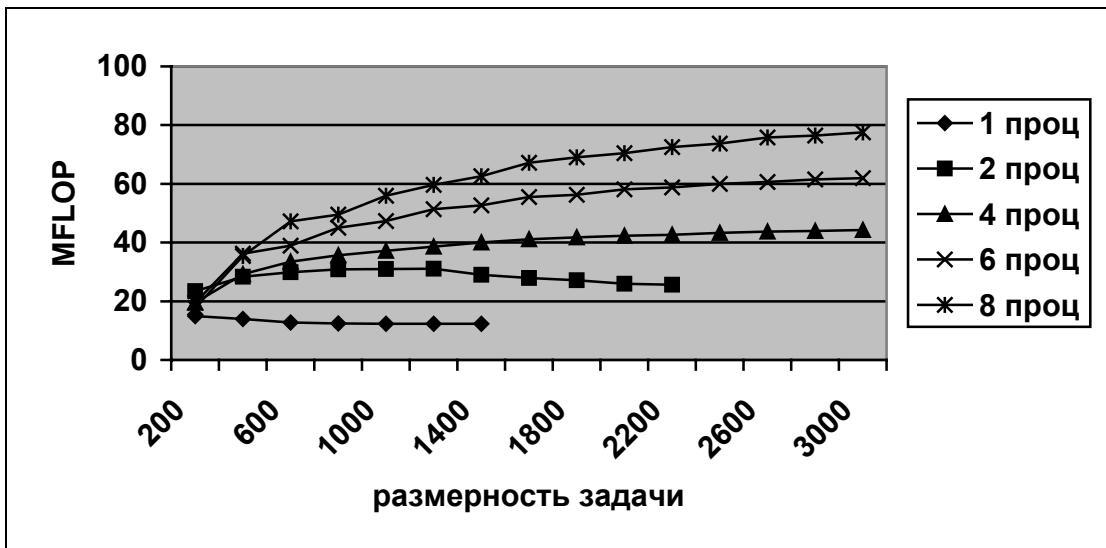


Рис. 62

Для сравнения на кластере была установлена библиотека SCALAPACK [<http://www.netlib.org/scalapack>] для матричных вычислений, являющаяся параллельным аналогом библиотеки LINPACK. Для тестирования кластера был выбран тот же самый алгоритм. Число выполненных операций с плавающей точкой оценивается по формуле $2n^3/3 + 2n^2$ (здесь n - размерность матрицы). При решении системы уравнений с матрицей 3000x3000 на 8 процессорах кластера была получена производительность 78 MFLOP.

Результаты замеров производительности в зависимости от размерности обращаемой матрицы и количества узлов кластера (1, 2, 4, 6, 8) приведены на рис. 62.

На рис. 63 показана масштабируемость кластера при обращении матрицы размерности 1500x1500 при количестве узлов, составляющих кластер – 1, 2, 4, 6, 8. Данная характеристика демонстрирует эффективность добавления новых узлов для реализации параллельного алгоритма. Анализируя рис. 63, можно утверждать, что с ростом числа процессоров производительность увеличивается и при некотором числе процессоров достигнет своего максимума, после чего добавление новых узлов повлечет ухудшение производительности. Этот эффект можно объяснить, исходя из того, что с ростом числа процессоров для реализации одного и того же алгоритма растет доля межпроцессорного обмена, при этом доля вычислений для каждого процессора в отдельности уменьшается.

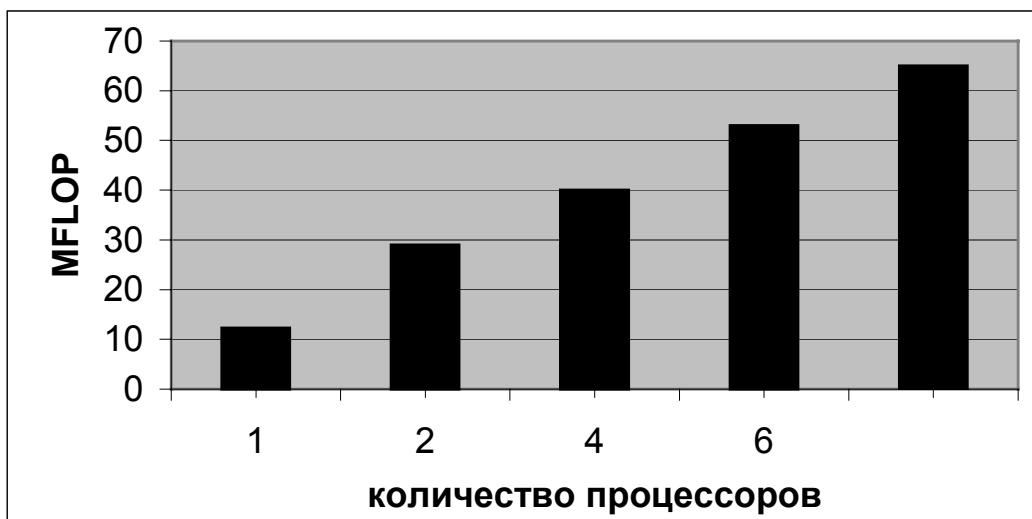


Рис. 63

На рис. 64, 65 приведены ускорение и эффективность алгоритма решения СЛАУ при его реализации на 2, 4 и 6 процессорах, соответственно.

Тестирование кластера показало привлекательность использования такого подхода для создания вычислительного ресурса. С одной стороны, никаких дополнительных финансовых затрат – компьютерный класс с необходимым коммуникационным оборудованием уже был и использовался для учебного процесса, с другой стороны, при тестировании кластера на реальных приложениях была получена высокая вычислительная производительность.

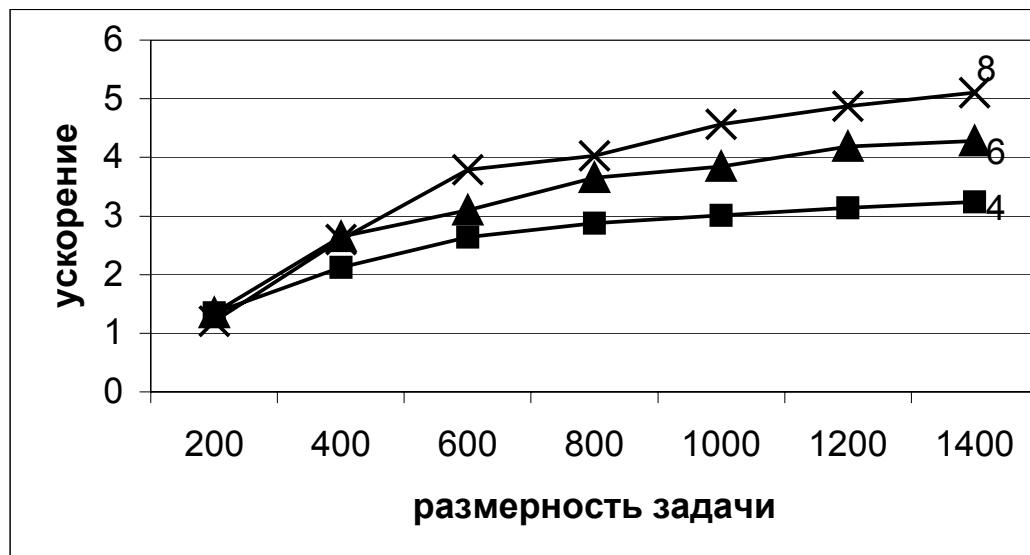


Рис. 64

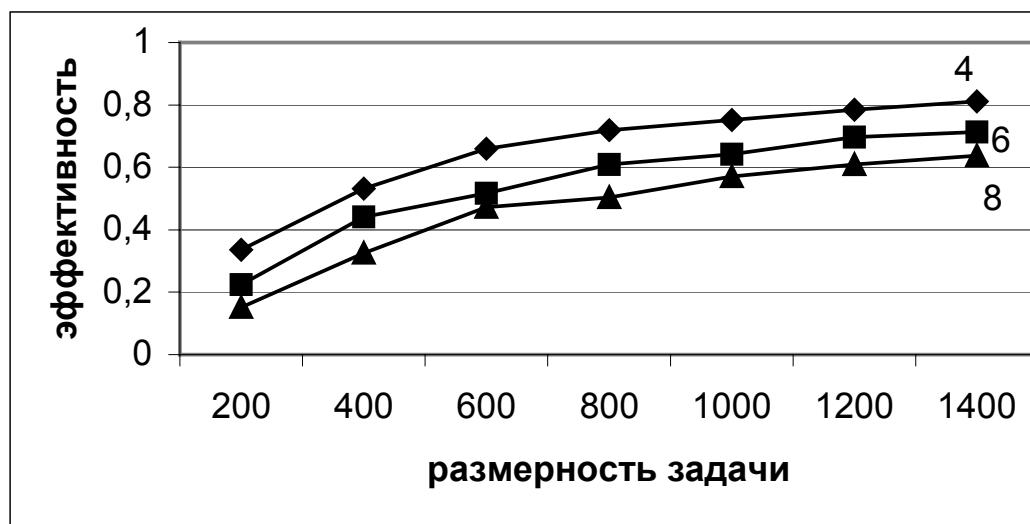


Рис. 65

В дальнейшем планируется создание неоднородного кластера, но при этом остро встанет проблема равномерной загрузки процессоров [27].

§52. Простейшие параллельные алгоритмы

Отличие параллельного алгоритма от последовательного заключается в том, что для его реализации добавляются две нематематические функции: прием и передача данных.

Для более детального описания приводимых ниже алгоритмов введем следующие обозначения: p -общее число процессоров, P_j - j -й процессор, $P_j(data_send) \rightarrow P_k(data_receive)$ - j -й

процессор пересыпает переменные $data_send$, k -й процессор получает данные и присваивает их переменным $data_receive$, если имена передаваемых и получаемых переменных совпадают, то справа в записи операции передачи данных имя переменной будет опускаться.

Алгоритм суммирования ряда чисел

Требуется найти сумму ряда $S = \sum_{i=1}^n a_i$. Последовательный

алгоритм выглядит следующим образом:

Шаг 1: формируется массив a_i , $i = 1, n$.

Шаг 2: $S = 0$.

Шаг 3: $S = S + a_i$, $i = 1, n$.

Параллельный алгоритм можно построить из соображений того, что при расчетах обычно p много меньше n , и, следовательно, на каждом процессоре можно параллельно вычислить частичные суммы, переслать их значения на один процессор, выполнить суммирование p чисел и получить окончательный результат.

Приведем алгоритм:

Шаг 1: формируется массив a_i , $i = 1, n$ на P_1 .

Шаг 2: $P_1(a_{i+j-1}, i = 1, n, p) \rightarrow P_j, j = 2, p$.

Шаг 3: $S_{P_j} = 0$ на $P_j, j = 1, p$.

Шаг 4: $S_{P_j} = S_{P_j} + a_{i+j-1}, i = 1, n, p$ на $P_j, j = 1, p$.

Шаг 5: $P_j(S_{P_j}) \rightarrow P_1, j = 2, p$.

Шаг 6: $S = S + S_{P_j}, j = 1, p$ на P_1 .

Для правильной интерпретации алгоритма приведем описание результата выполнения 2 шага: на 1 процессоре будут храниться $a_1, a_{p+1}, a_{2p+1}, \dots$, на 2 процессоре $a_2, a_{p+2}, a_{2p+2}, \dots$, на j -м — $a_j, a_{p+j}, a_{2p+j}, \dots$

Заметим, что приведенный параллельный алгоритм вычисления суммы ряда на практике будет выполняться медленнее, чем

последовательный. Это объясняется тем, что для выполнения 4 шага пришлось осуществлять рассылку данных, причем количество выполняемых арифметических операций примерно одинаково числу посылаемых данных, а так как выполнение одной арифметической операции занимает меньше времени, чем пересылка одного машинного слова, то в итоге реализации такого параллельного алгоритма получается проигрыш по времени по сравнению с последовательным. Следовательно, распараллеливать алгоритм суммирования имеет смысл лишь в том случае, если члены ряда формируются независимо на каждом процессоре или в процессе выполнения глобального расчета они уже распределены по процессорам.

Алгоритм сложения векторов

Даны два вектора $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b(b_1, b_2, \dots, b_n)$, требуется найти их сумму: $c = a + b$. Как и в предыдущем случае, данный алгоритм является мелкозернистым и его распараллеливать имеет смысл, если вектора уже распределены по процессорам. Алгоритм имеет степень параллелизма n и является очевидным, поэтому его описание мы опускаем.

Алгоритм скалярного умножения векторов

Алгоритм скалярного умножения векторов состоит из двух этапов: покомпонентное умножение координат вектора и суммирование получающихся произведений. Допустим, что оба вектора уже распределены по процессорам, тогда один из вариантов параллельного алгоритма скалярного произведения векторов можно записать в следующем виде:

Шаг 1: $S_{P_j} = 0$ на $P_j, j = 1, p$.

Шаг 2: $S_{P_j} = S_{P_j} + a_{i+j-1}b_{i+j-1}, i = 1, n, p$ на $P_j, j = 1, p$.

Шаг 3: $P_j(S_{P_j}) \rightarrow P_1, j = 2, p$.

Шаг 4: $S = S + S_{P_j}, j = 1, p$ на P_1 .

Алгоритм умножения матрицы на вектор

Алгоритм умножения матрицы A (для простоты возьмем квадратную матрицу) размерности $n \times n$ на вектор b размерности n можно представить как n скалярных умножений векторов, получающихся из строк матрицы A , на вектор b . Если строки матрицы A слоистым образом распределены по процессорам и вектор b хранится на каждом процессоре, то параллельный алгоритм можно записать следующим образом:

Шаг 1: $c_{i+k-1} = 0, i = 1, n, p$ на $P_k, k = 1, p$.

Шаг 2: $c_{i+k-1} = c_{i+k-1} + a_{i+k-1,j} b_j, i = 1, n, p; j = 1, n$ на $P_k, k = 1, p$.

Шаг 3: $P_k(c_k) \rightarrow P_1, k = 2, p$.

На втором шаге на каждом процессоре параллельно вычисляются соответствующие блоки результирующего вектора c , затем (если это необходимо) на третьем шаге они пересылаются на первый процессор.

Предположим, что столбцы матрицы A распределены слоистым образом по процессорам. В этом случае необходимо модифицировать алгоритм с учетом хранения матрицы. Результат матрично-векторного произведения можно получить, умножив каждый столбец матрицы A на соответствующий элемент вектора b и сложив получившиеся вектора. Степень параллелизма этого алгоритма меньше, чем в предыдущем, и обусловлена тем, что приходится осуществлять суммирование.

Условно, по шагам алгоритм записывается следующим образом:

Шаг 1: $S_{i,j+k-1} = 0, i = 1, n; j = 1, n, p$ на $P_k, k = 1, p$.

Шаг 2: $a_{i,j+k-1} = a_{i,j+k-1} b_{j+k-1}, i = 1, n; j = 1, n, p$ на $P_k, k = 1, p$.

Шаг 3: $S_{i,j+k-1} = S_{i,j+k-1} + a_{i,j+k-1}, i = 1, n; j = 1, n, p$ на $P_k, k = 1, p$.

Шаг 4: $P_k(S_{i,j+k-1}, i = 1, n; j = 1, n, p) \rightarrow P_1, k = 2, p$.

Шаг 5: $c_i = c_i + S_{i,j}, j = 1, p, i = 1, n$ на P_1 .

На втором шаге осуществляется покомпонентное умножение векторов, на третьем – частичное суммирование, на четвертом – пересылка частичных сумм на первый процессор, на последнем – завершающее суммирование.

Матрично-векторное умножение обычно является частью более широкого процесса вычислений и для выбора того или иного алгоритма главную роль играет способ хранения A и b в момент, когда требуется их произведение. Например, если b_i и $a_{i,j} (j = 1, n)$ уже находятся в памяти i -го процессора, то эффективнее использовать второй алгоритм, хотя степень параллелизма в нем ниже, чем в первом. Еще один важный фактор при выборе параллельного алгоритма - желаемое расположение результата по окончании операции умножения: во втором алгоритме вектор-результат размещается в памяти одного процессора, тогда как в первом он распределен по процессорам.

Алгоритм умножения матриц

Приведенные параллельные алгоритмы матрично-векторного произведения естественным образом обобщаются на задачу умножения матриц. Приведенные же ниже алгоритмы будут обсуждаться с точки зрения того, как хранились матрицы до операции произведения и после нее.

Для простоты возьмем квадратные матрицы A и B размерности $n \times n$.

Первый вариант параллельного алгоритма матричного умножения будем строить, предполагая, что матрица A распределена по процессорам слоистым образом по строкам, а матрица B - целиком. В этом случае искомый результат можно получить, выполнив параллельно на каждом процессоре n^2 / p скалярных произведений.

Приведем алгоритм:

Шаг 1: $c_{i+k-1,j} = 0, i = 1, n, p; j = 1, n$ на $P_k, k = 1, p$.

Шаг 2: $c_{i+k-1,j} = c_{i+k-1,j} + a_{i+k-1,l} b_{l,j}, i = 1, n, p; j = 1, n; l = 1, n$ на $P_k, k = 1, p$ (причем циклы по индексам расположены в следующей последовательности i, j, l).

Шаг 3: $P_k(c_{i+k-1,j}) \rightarrow P_1, k = 2, p$.

Второй вариант параллельного алгоритма матричного умножения будем строить, предполагая, что матрица A распределена по процессорам слоистым образом по столбцам, а матрица B -

целиком. В этом случае искомый результат можно получить, выполнив параллельно на каждом процессоре умножение соответствующих столбцов матрицы A на соответствующие элементы строк матрицы B , затем необходимо осуществить частичное суммирование получившихся произведений и на последнем шаге, переслав матрицы с частичными суммами на один процессор, закончить суммирование. Алгоритм опустим ввиду его громоздкости и очевидности.

Возможные способы хранения исходных матриц порождают другие алгоритмы. Например, матрица B распределена по процессорам слоистым образом по строкам, а матрица A - целиком, или B распределена по процессорам слоистым образом по столбцам, а A - целиком. Алгоритмы при этом схожи с рассмотренными выше.

Возможно также построение алгоритмов, которые основаны на блочном распределении матриц A и B по процессорам.

Если разбиения обеих матриц на блоки согласованы, то

$$C = AB = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & \dots & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & \dots & B_{ss} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^s A_{ik} B_{kj},$$

где A_{ij} или B_{ij} - миноры соответствующих матриц. Это представление можно реализовать разными алгоритмами. Пусть, например, число процессоров p равно s^2 (числу миноров матрицы C). При условии, что матрицы A и B распределены соответствующим образом по процессорам, все миноры матрицы C можно вычислять одновременно.

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \tag{5.1}$$

с невырожденной матрицей A размером $n \times n$. Наиболее известной формой гауссова исключения является та, в которой система (5.1) приводится к верхнетреугольному виду путем вычитания одних уравнений, умноженных на подходящие числа, из других уравнений, полученная треугольная система решается с помощью

обратной подстановки. Математически все это эквивалентно тому, что вначале строится разложение $A = LU$, где L - нижнетреугольная матрица, с единицами на главной диагонали, а U - верхнетреугольная матрица. Затем решаются треугольные системы:

$$Ly = b, \quad Ux = y . \quad (5.2)$$

Процесс их решения называется *прямой* и *обратной подстановками*. Рассмотрим сначала LU – разложение, занимающее большую часть времени всего процесса решения СЛАУ. Псевдокод разложения можно представить следующим образом:

Для k=1 до n-1 Для i=k+1 до n $l_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ Для j=k+1 до n $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} * a_{kj}$	Для k=1 до n-1 Для s=k+1 до n $l_{sk} = a_{sk}/a_{kk}$ Для j=k+1 до n $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} * a_{kj}$
Строчно-ориентированная схема LU – разложения	Столбово-ориентированная схема LU – разложения

Предположим вначале, что мы располагаем вычислительной системой с локальной памятью и числом процессоров $p = n$. Пусть i -я строка матрицы A хранится в процессоре i . Тогда один из возможных вариантов организации LU-разложения заключается в следующем: на первом шаге первая строка рассыпается всем процессорам, после чего вычисления

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad a_{ij} = a_{ij} - l_{i1} \cdot a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n$$

могут выполняться параллельно процессорами p_2, \dots, p_n . На втором шаге вторая строка приведенной матрицы рассыпается из процессора p_2 процессорам p_3, \dots, p_n , а затем проводятся параллельные вычисления и т. д. Алгоритм первых четырех шагов приведен ниже.

Шаг 1: $P_1(a_{1,j}, j = 1, n) \rightarrow P_k, k = 2, p$.

Шаг 2: $l_{k1} = \frac{a_{k1}}{a_{11}}, \quad a_{kj} = a_{kj} - l_{k1} \cdot a_{1j}, \quad j = 2, \dots, n \quad \text{на } P_k, k = 2, p$.

Шаг 3: $P_2(a_{2,j}, j = 2, n) \rightarrow P_k, k = 3, p$.

$$\text{Шаг 4: } l_{k2} = \frac{a_{k2}}{a_{22}}, a_{kj} = a_{kj} - l_{k2} \cdot a_{2j}, j = 3, \dots, n \quad \text{на } P_k, k = 3, p.$$

Отметим два главных недостатка этого подхода: значительный объем обмена данными между процессорами и уменьшение числа активных процессоров на 1 через каждый шаг.

Альтернативой хранению по строкам является вариант, в котором i -й столбец матрицы A хранится в процессоре i . В этом случае на первом шаге все множители l_{i1} вычисляются в процессоре 1 и рассылаются остальным процессорам. Затем процессорами $2, \dots, n$ параллельно производятся модификации

$$a_{ij} = a_{ij} - l_{i1} \cdot a_{1j}, j = 2, \dots, n.$$

Вычислив множители l_{i1} , процессор 1 прекращает работу; вообще, с каждым шагом число простаивающих процессоров увеличивается на единицу. Возникает та же, что и в строчно-ориентированном алгоритме, проблема балансировки нагрузки.

Слоистая схема хранения

В более реалистической ситуации, когда $p \leq n$, проблема балансировки нагрузки в известной степени смягчается. Предположим, что $n = kp$ и применяется хранение по строкам. Поместим первые k строк матрицы A в память процессора 1, следующие k строк в память процессора 2 и т. д. Этот способ хранения назовем *блочной схемой*. Снова первая строка рассыдается из процессора 1 остальным процессорам, а затем выполняются необходимые вычисления, однако теперь это делается блоками по k наборов операций в каждом процессоре. Как и прежде, в ходе приведения все большее число процессоров становятся бездействующими, однако отношение общего времени вычислений к времени обменов и времени простоев является возрастающей функцией от k .

Более привлекательна схема хранения, в которой строки, распределенные в разные процессоры, как бы прослаивают друг друга. Будем по-прежнему считать, что $n = kp$, и пусть строки 1, $p+1, 2p+1, \dots$ хранятся в процессоре 1, строки $2, p+2, 2p+2, \dots$ в процессоре 2 и т. д. Такой способ хранения мы будем называть *циклической слоистой схемой*. Проблема простоев процессоров для этой схемы теряет остроту; например, процессор 1 будет ра-

ботать почти до самого конца приведения, а именно до тех пор, пока не закончится обработка строки $(k-1)p+1$. Разумеется, некоторая неравномерность загрузки процессоров сохранится. Так, после первого шага строка 1 станет не нужна, и на следующем шаге процессору 1 придется обрабатывать на одну строчку меньше, чем остальным процессорам. Неравномерность сходного типа возникает и в том вполне вероятном случае, когда n не кратно числу процессоров.

Тот же принцип прослаивания можно использовать при хранении по столбцам: теперь столбцы $1, p+1, \dots, (k-1)p+1$ закреплены за процессором 1, столбцы $2, p+2, \dots, (k-1)p+2$ - за процессором 2 и т. д. Снова все процессоры (при небольшом дисбалансе нагрузки) будут работать почти до конца приведения.

Опережающая рассылка и опережающее вычисление

Обсудим теперь более подробно LU-разложение с использованием циклической слоистой схемы хранения. На первом шаге аннулируются элементы первого столбца. Если процесс ведется обычным последовательным образом, то вычисляются множители l_{i1} , модифицируются соответствующие строки, а затем начинается второй шаг. В начале этого шага процессор, хранящий вторую строку, должен переслать ее остальным процессорам. Следовательно, возникает задержка на время этой пересылки. Очевидным выходом из положения является немедленная рассылка процессором 2 модифицированной второй строки, как только эта строка приняла окончательный вид. Такую стратегию мы назовем *опережающей рассылкой*. Если можно совместить вычисления и обмены, то все процессоры будут заняты модификациями первого шага, пока идет рассылка. То же самое будет происходить и на других шагах: на k -м шаге $(k+1)$ -я строка рассылается сразу после того, как окончится ее модификация. Насколько выгодна эта стратегия для конкретной вычислительной системы, зависит от топологии ее межпроцессорных связей.

Решение треугольных систем

После выполнения LU-разложения нужно решать треугольные системы уравнений. Мы рассмотрим только верхнетреуголь-

ную систему $Ux=c$. Основными методами снова будут обсуждавшиеся ранее столбцовый алгоритм и алгоритм скалярных произведений. Псевдокод решения верхнетреугольной системы уравнений можно представить следующим образом:

Для $i=n$ с шагом -1 до 1 Для $j=i+1$ до n $c_i = c_i - x_j u_{ij}$ $x_j = c_j / u_{jj}$	Для $j=n$ с шагом -1 до 1 $x_j = c_j / u_{jj}$ Для $i=1$ до $j-1$ $c_i = c_i - x_j u_{ij}$
Строчно-ориентированный алгоритм	Столбцово-ориентированный алгоритм

Если считать, что матрица U является результатом ранее выполненного LU-разложения, то способ распределения (хранения) матрицы U уже предопределен схемой хранения, использовавшейся при разложении. Например, если использовалась строчная циклическая слоистая схема распределения при разложении, то точно таким же образом построчно будет распределена и матрица U . Предположим, что и правая часть системы распределена послойно по процессорам. Тогда одна из возможных реализаций строчно-ориентированного алгоритма выглядит так:

$$\text{Шаг 1: } x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}, \text{ на } P_p.$$

$$\text{Шаг 2: } P_p(x_n) \rightarrow P_k, k = 1, p-1.$$

$$\text{Шаг 3: } c_{i+k-1} = c_{i+k-1} - u_{i+k-1,n} x_n, i = 1, n-1, p \quad \text{на } P_k, k = 1, p.$$

$$\text{Шаг 4: } x_{n-1} = \frac{c_{n-1}}{u_{n-1,n-1}}, \text{ на } P_{p-1}.$$

$$\text{Шаг 5: } P_{p-1}(x_{n-1}) \rightarrow P_k, k = 1, p-2 \text{ и } p.$$

$$\text{Шаг 6: } c_{i+k-1} = c_{i+k-1} - u_{i+k-1,n-1} x_{n-1}, i = 1, n-2, p \text{ на } P_k, k = 1, p.$$

На первом шаге c_n и u_{nn} хранятся на последнем процессоре, где вычисляется значение x_n , на втором шаге оно пересыпается на все процессоры, на третьем шаге все процессоры пересчитывают хранящиеся на нем компоненты правой части, затем в процессоре, содержащем $(n-1)$ -ю строку, вычисляется x_{n-1} и т.д. В результате повторения этого процесса вычисляется x_{n-2} ,

$x_{n-3} \dots x_1$. Для реализации как строчно-, так и столбцово-ориентированных алгоритмов присущи следующие недостатки: на каждом шаге для вычисления последующего элемента вектора неизвестных необходима пересылка данных, на заключительных шагах все большее число процессоров пристаивает.

Если учесть, что на реализацию LU-разложения приходится $\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2$ арифметических операций, а на решение треугольной системы - $2n^2$ операций и при недостаточно высокой скорости передачи данных, то алгоритм решения верхнетреугольной системы уравнений целесообразнее не распараллеливать.

В таблице 11 приведены временные затраты на LU-разложение и решение верхнетреугольной системы уравнений. Из данной таблицы видно, что решение верхнетреугольной системы уравнений занимает много меньше 1% от общего времени решения СЛАУ и его алгоритм вполне можно не распараллеливать.

Таблица 11

Размерность (n)	Время на LU-разложение	Время на решение верхнетреугольной системы уравнений
1000	62,54	0,21
2000	494,95	0,47

§53. Последовательный алгоритм КМГЭ и его распараллеливание

В предыдущей главе были приведены результаты численного решения следующих задач:

- 1) стационарное обтекание донных препятствий потоком жидкости со свободной границей;
- 2) стационарное циркуляционное обтекание профилей потоком жидкости конечной глубины со свободной границей;
- 3) нестационарное движение идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами;

4) нестационарное движение тел в жидкости со свободными границами.

Все задачи можно подразбить на две категории: стационарные и нестационарные.

Для обоих случаев характерен однотипный алгоритм расчета, блок-схема для которого приведена на рис. 66. В начальный момент времени известна геометрия границы расчетной области, на части которой задан потенциал, а на другой части – функция тока. Далее на каждом временном шаге или на каждой итерации (в случае стационарной задачи) производится вычисление интегралов, подстановка граничных условий (построение СЛАУ), решение СЛАУ методом Гаусса с выбором ведущего элемента, вычисление компонент вектора скорости, вычисление интегральных характеристик (энергии, массы и т.п.), вычисление значений исходной функции во внутренних узлах области (при необходимости). В случае нестационарной задачи производится автоматический выбор шага по времени. Далее находится новое положение свободной границы и распределение потенциала на ней. Остановка процесса расчета производится по какому-либо заранее заданному условию. Это может быть, например, превышение максимального момента времени (для нестационарных задач) либо достижение заданной точности расчета (для стационарных задач).

В ходе вычислений через заданное число временных шагов результаты записываются в файл для обеспечения возможности их дальнейшей обработки или возобновления расчета после прерывания.

Ввод исходных данных

Для выполнения расчета необходимы следующие граничные и начальные данные:

$x_i, y_i, i = 1, n$ - узловые координаты точек z_i границы области жидкости;

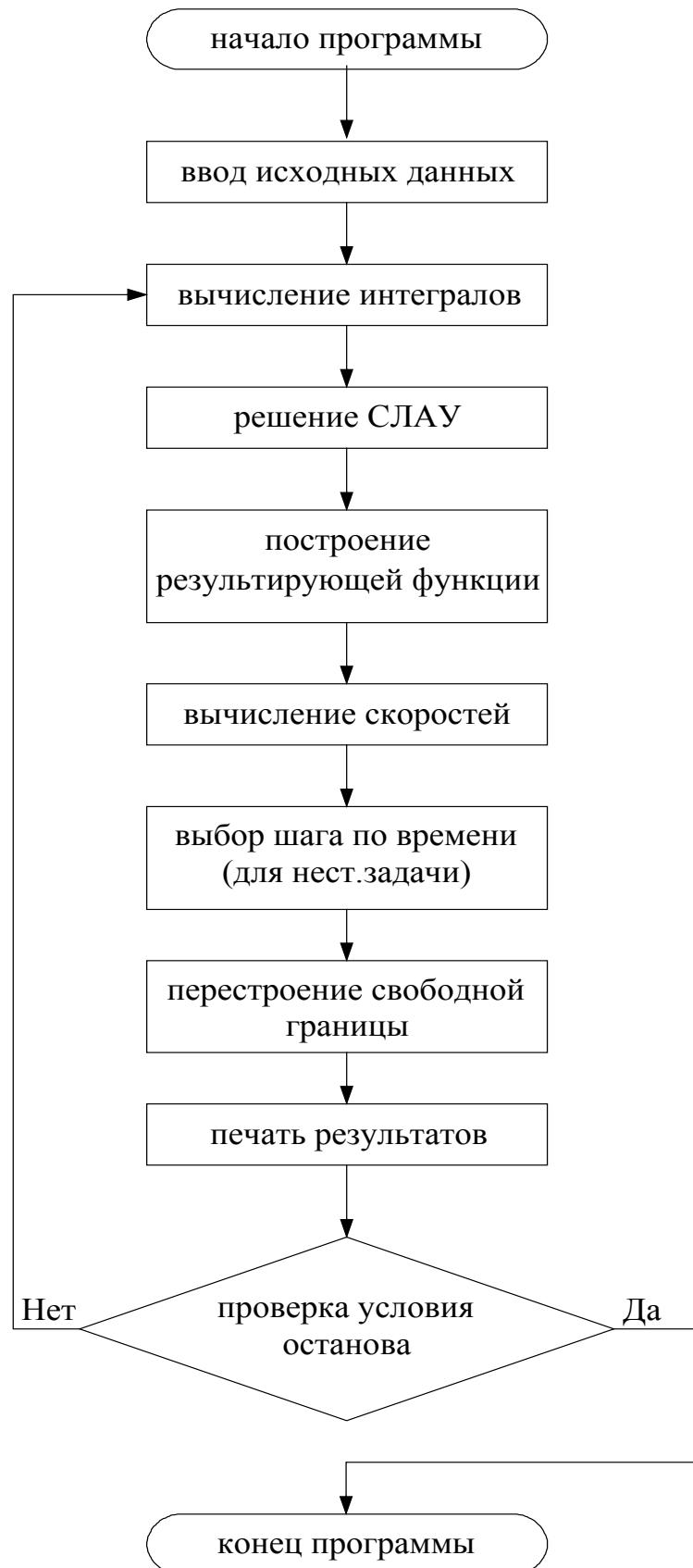


Рис. 66

$Ktype_i, i = 1, n$ - тип граничного условия в i -м узле границы, если $Ktype_i = 0$, то в узле задан потенциал, если $Ktype_i = 1$ - функция тока;

$Value_i, i = 1, n$ - заданное значение потенциала или функции тока в i -м узле границы.

Распараллеливание этого блока не требуется, так как ввод всех необходимых начальных и граничных данных происходит во время расчета лишь один раз. Для избежания межпроцессорных пересылок считывание данных целесообразно осуществить на каждом процессоре вычислительного комплекса.

Вычисление интегралов

На этом шаге алгоритма формируется СЛАУ, то есть матрица C размерностью $n \times n$ и вектор правой части F (см. §27). Следует привести некоторые соображения: каждая строка результирующей матрицы C строится независимо от других, следовательно, степень параллелизма данного блока алгоритма максимальна и равна n . Далее, на этом же этапе следует позаботиться о циклическом слоистом распределении строк матрицы C по процессорам для ее дальнейшего решения.

Решение СЛАУ

Так как во втором блоке алгоритма распределение матрицы C по процессорам было строчное, то для LU-факторизации целесообразно использовать строчно-ориентированный алгоритм, описанный в предыдущем параграфе. Решение же получившейся верхнетреугольной системы уравнений можно как распараллеливать, так и нет.

Построение результирующей функции

Если алгоритм решения получившейся в результате LU-факторизации верхнетреугольной системы уравнений распараллелен, то результат решения распределен по процессорам, если нет – он собран на одном процессоре. В первом случае построение результирующей функции будет осуществляться параллельно, во втором – последовательно. Обозначим вектор решения че-

рез $S_i, i = 1, n$, $\operatorname{Re} w_i, \operatorname{Im} w_i$ - действительная и мнимая части результирующей функции, соответственно. Суть построения результирующей функции заключается в следующем:

- a) если в i -м узле задан потенциал, то есть $Ktype_i = 0$, то вещественная часть результирующей функции равна заданному граничному условию, то есть $\operatorname{Re} w_i = Value_i$, а мнимая часть равна компоненте вектора решения - $\operatorname{Im} w_i = S_i$;
- b) если в i -м узле задана функция тока, то есть $Ktype_i = 1$, то мнимая часть результирующей функции равна заданному граничному условию, то есть $\operatorname{Im} w_i = Value_i$, а вещественная часть равна компоненте вектора решения - $\operatorname{Re} w_i = S_i$.

Этот блок алгоритма занимает ничтожную по времени часть всего алгоритма, поэтому специально заботиться о его распараллеливании не имеет смысла.

Вычисление скоростей

На этом шаге алгоритма по известным узловым координатам $x_i, y_i, i = 1, n$ и найденным действительным и мнимым частям функции комплексного потенциала $\operatorname{Re} w_i, \operatorname{Im} w_i$ вычисляются узловые компоненты вектора скорости Vx_i, Vy_i (см. §30). Степень параллелизма этого блока тоже максимальна и равна n . При распараллеливании следует учесть, что массивы $x_i, y_i, i = 1, n$ уже имеются на каждом процессоре, дополнительно следует разослать лишь $\operatorname{Re} w_i, \operatorname{Im} w_i$.

Выбор шага по времени (для нестационарной задачи)

В случае решения нестационарной задачи требуется осуществлять выбор шага по времени (см. §39). Для его определения необходимы следующие величины: S_{\max} - длина максимального граничного элемента свободной границы, S_{\min} - длина минимального элемента, V_{\max} - модуль максимальной скорости частиц, для нахождения которых можно применить алгоритм сдвигивания, описанный выше и имеющий степень параллелизма $\log n$.

Перестройка свободной границы

В случае нестационарной задачи новое положение свободной границы и распределение потенциала на ней находится по схеме Эйлера (см. §39). Для реализации этого блока алгоритма необходимы следующие данные: $x_i, y_i, Vx_i, Vy_i, \text{Re } w_i, i = 1, n$. Так как в результате предыдущих пунктов алгоритма все массивы, кроме Vx_i, Vy_i , целиком хранятся на каждом процессоре, то распараллеливание этого блока обусловлено хранением Vx_i, Vy_i на процессорах. Степень параллелизма этого блока тоже максимальна и равна n . В случае стационарной задачи перестройка свободной границы осуществляется из условия того, что вектор скорости направлен по касательной к линии тока, распределение потенциала на новой границе определяется из интеграла Бернулли (см. §37). Рассуждения по необходимым данным для выполнения итерации аналогичны случаю нестационарной задачи.

Для перехода на новую итерацию необходимо разослать на все процессоры следующие данные: $x_i, y_i, Value_i, i = 1, n$ - новое положение свободной границы и распределение потенциала на ней.

Печать результатов

Так как при реализации предыдущих пунктов все необходимые данные хранятся на каждом процессоре, то печать промежуточных результатов можно осуществить на любом процессоре.

Проверка условия останова

В случае нестационарной задачи условием останова итерационного процесса может служить ограничение по времени, проверка которого может быть проведена на любом процессоре. В случае стационарной задачи критерием останова итерационного процесса является:

$$\max_i |y_i^{k+1} - y_i^k| < \varepsilon,$$

где k обозначает номер итерации. Для поиска максимума отклонения свободной границы от ее положения с предыдущей итерацией можно применить алгоритм сдваивания, надо лишь позабо-

титься о сохранении ординат свободной границы с предыдущего шага итерации.

В таблице 12 приведены временные затраты в секундах на реализацию каждого из блоков при выполнении последовательного алгоритма. Время для реализации блоков, отсутствующих в таблице, для всех приведенных размерностей задачи не превышало 0,01 секунды. Анализируя табличные данные, можно утверждать, что из всех блоков алгоритма наиболее дорогостоящими по времени являются блок вычисления интегралов и блок решения СЛАУ.

Таблица 12

Размерность задачи	Чтение данных	Вычисление интегралов	Решение СЛАУ
400	0,03	1,01	4,06
800	0,05	3,96	32,14
1200	0,08	8,97	107,74
1600	0,10	15,95	254,55
2000	0,13	25,09	495,42

На основании сделанных выше рассуждений было проведено распараллеливание последовательного алгоритма КМГЭ. На рис. 67 приведены графики временных затрат на реализацию одного итерационного шага параллельного алгоритма КМГЭ на 1, 2, 3 и 4 процессорах, соответственно.

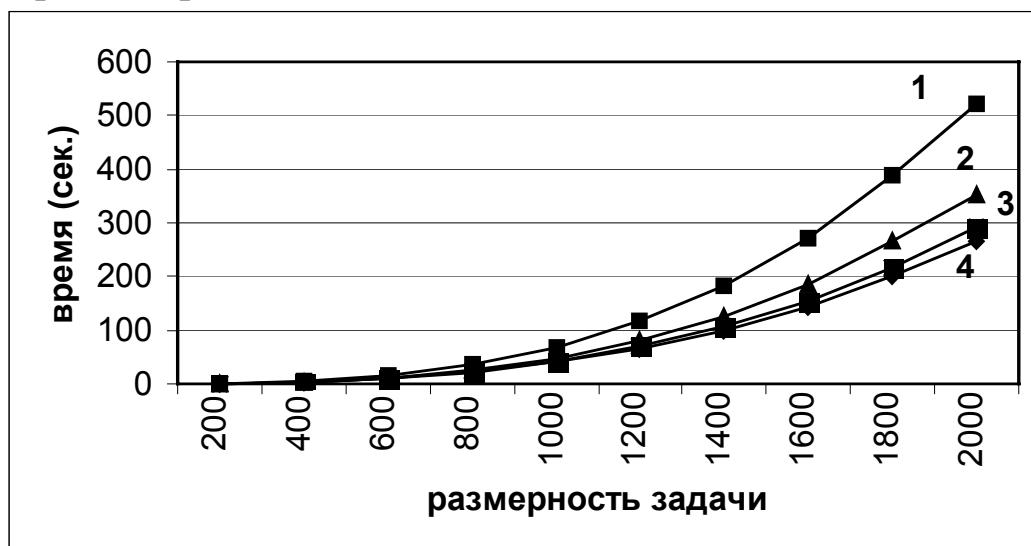


Рис. 67

На рис. 68, 69 приведены ускорение и эффективность параллельного алгоритма КМГЭ при его реализации на 1, 2, 3 и 4 процессорах, соответственно.

Проведенный анализ реализации параллельного алгоритма КМГЭ позволяет сделать вывод о том, что даже на кластере из обычных ПК можно получить ускорение на реальных задачах в 1,5-2 раза на 3-4 процессорной вычислительной системе.

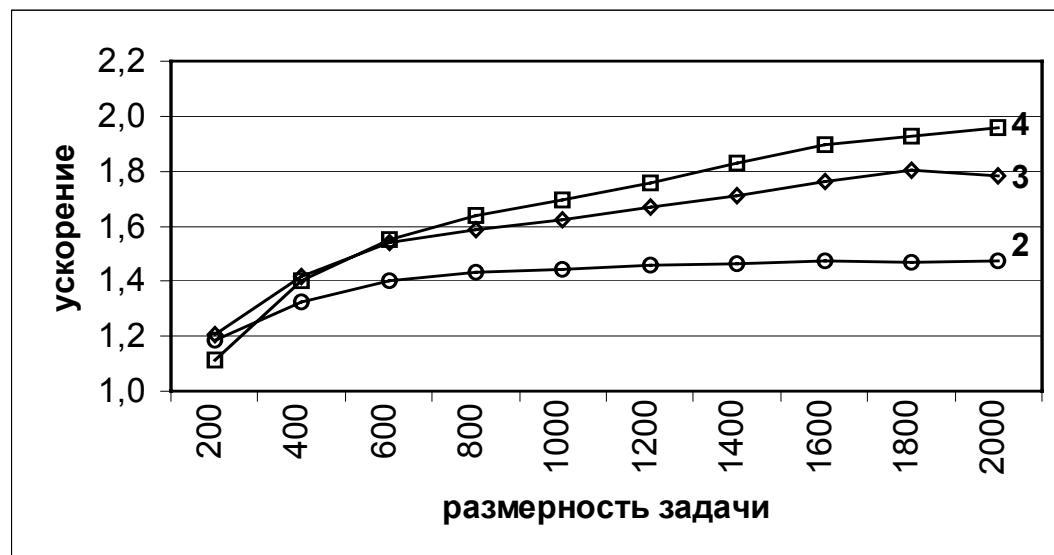


Рис. 68

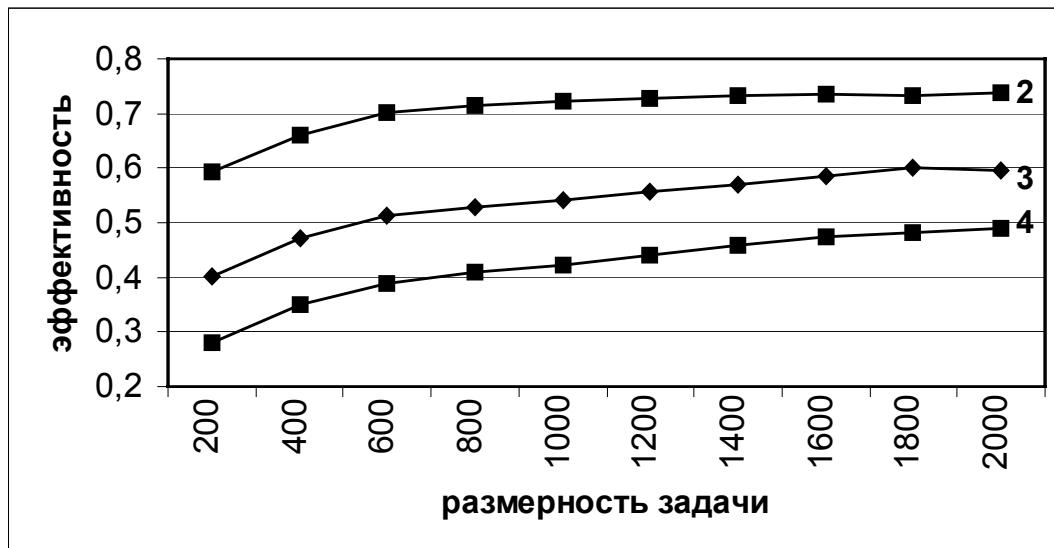


Рис. 69

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов В.П., Бочков С.В., Мошков А.А. Структура и характеристики высокопроизводительных ЭВМ и систем // Зарубеж. радиоэлектрон. 1982. Ч. I. № 3. С. 35-53; Ч. II. № 4. С. 33-57.
2. Афанасьев К.Е. Решение нелинейных задач гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами методами конечных и граничных элементов: Автореф. дисс...докт. физ.-мат. наук. Кемерово, 1997. 38 с.
3. Афанасьев К.Е. Приближение нелинейной уединенной волны// Труды VI науч. шк. "Гидродинамика больших скоростей" / Чуваш. гос. ун-т им. И.Н. Ульянова. Чебоксары, 1996. С. 3-10.
4. Афанасьев К.Е. Моделирование сильно нелинейных волновых течений // Вычислительные технологии. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1998. Т. 3. № 1. С.3-11.
5. Афанасьев К.Е., Афанасьева М.М., Терентьев А.Г. Исследование эволюции свободных границ методами конечных и граничных элементов при нестационарном движении тел в идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. № 5. 1986. С. 8-13.
6. Афанасьев К.Е., Коротков Г.Г., Стуколов С.В. Математическое моделирование задач со свободными границами// Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98): Тезисы докладов, часть II. Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1998. С. 83 - 84.
7. Афанасьев К.Е., Самойлова Т.И. Техника использования метода граничных элементов в задачах со свободными границами // Вычислительные технологии. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1995. Вып. 7. № 11. С. 19-37.
8. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. О наличии трех решений при обтекании препятствий сверхкритическим установившимся потоком тяжелой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 1. С. 27-35.

9. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. Накат уединенной волны на наклонный берег // Вестник Омского ун-та. 1998. № 3. С. 9-12.
10. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. Моделирование опрокидывающихся волн методом комплексных граничных элементов // Труды VI научной школы "Гидродинамика больших скоростей"/ Чуваш. гос. ун-т им. И.Н. Ульянова. Чебоксары, 1996. С. 11-17.
11. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. Численное моделирование взаимодействий уединенных волн с препятствиями// Вычислительные технологии. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1999. Т. 4. № 3. С. 3-16.
12. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. Циркуляционное обтекание профилей стационарным плоскопараллельным потоком тяжелой жидкости конечной глубины со свободной поверхностью// ПМТФ. 2000. Т. 41. № 3. С. 101-110.
13. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. Численное моделирование взаимодействий уединенных волн с подводным прямоугольным уступом // Вестник КемГУ. Серия Математика. 2000. Вып. 4. С.117-123.
14. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. Численное моделирование взаимодействия уединенных волн с наклонной стенкой// Математические проблемы механики сплошных сред. Новосибирск: Изд-во ин-та гидродинамики СО РАН, 1997. С.16.
15. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. О неединственности решения стационарной задачи при обтекании препятствий потоком тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице// Всесибирские чтения по математике и механике: Тезисы докладов. Т. 2. Механика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. С. 111-112.
16. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. О неединственности решения стационарной задачи при обтекании препятствий потоком идеальной несжимаемой жидкости// Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98): Тезисы докладов, часть II. Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1998. С. 84.

-
17. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. Стационарная задача обтекания профиля плоскопараллельным потоком конечной глубины со свободной поверхностью// Математические модели и методы их исследования (задачи механики сплошной среды, экологии, технологических процессов, экономики): Тезисы докладов. Красноярск: Изд-во Красноярского гос. ун-та, 1999. С. 25.
 18. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. Циркуляционное обтекание профилей потоком жидкости конечной глубины со свободной поверхностью // Труды Международной научной конференции «Моделирование, вычисления, проектирование в условиях неопределенности – 2000». Уфа, 2000. С. 154-160.
 19. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
 20. Белоцерковский С.М. и др. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988.
 21. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
 22. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1966. Т.1.
 23. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
 24. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
 25. Букреев В.И., Турнов Н.П. Эксперименты с волнами на мелкой воде, генерируемыми движением торцевой стенки бассейна// ПМТФ. 1996. Т. 37. № 6. С. 44-50.
 26. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1978.
 27. Васенин В.А., Роганов В.А., Слепухин А.Ф. Метакомпьютинг, распределенные приложения в ИНТЕРНЕТ и система GRADE //Новые информационные технологии в университете образовании: Тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во СГУПС и ИДМИ, 2001. С.179-184.
 28. Введение в динамику сосудов с жидкостью / Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дрижинина Г.В. и др. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1987. 143 с.

29. Воеводин В.В. Некоторые машинные аспекты распараллеливания вычислений / Препринт. ОВМ АН СССР. М., 1981. 22 с.
30. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления/ Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.
31. Голубев В.В. Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке. М.: Гос. объединен. науч.-тех. изд. НКПТ СССР, 1938.
32. Горелов Д.Н. Об интегральных уравнениях задачи обтекания профиля // МЖГ. 1992. № 4. С.173-177.
33. Горелов Д.Н. Расчет распределения давления вблизи передней кромки профиля в методе дискретных вихрей // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 1. С. 114-118.
34. Горелов Д.Н., Горлов С.И. Линейная задача о движении профиля под границей раздела двух тяжелых жидкостей // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 5. С. 43-47.
35. Горлов С.И. Движение профиля над границей раздела двух тяжелых жидкостей // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 5. С. 48-51.
36. Громадка Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов. М.: Мир, 1990.
37. Гузевский Л.Г. Обтекание препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины // Динамика сплошных сред с границами раздела / Чуваш. госун-т им. И.Н. Ульянова. Чебоксары, 1982. С. 61-69.
38. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
39. Дацюк В.Н., Букатов А.А., Жегуло А.И. Методическое пособие по курсу “Многопроцессорные системы и параллельное программирование” / Ростов. госун-т. Ростов-на-Дону, 2000. Ч. I. 36 с. Ч. II. 65 с.
40. Житников В.П. Гравитационные волны на ограниченном участке поверхности жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 2. С. 83-89.
41. Житников В.П. Обобщение метода Леви-Чивиты для исследования плоских и осесимметричных течений с нелиней-

-
- ными условиями на неизвестных границах: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Казань, 1993. 32 с.
42. Зейтурян Р.Х. Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны// Успехи физических наук. 1995. Т. 165. № 12. С.1403-1456.
43. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 317 с.
44. Ильин В.П., Фет Я.И. Параллельный процессор для решения задач математической физики/ Препринт. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1979. 217 с.
45. Карабут Е.А. К задаче об уединенной волне на поверхности жидкости // ДАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 339-341.
46. Киселев О.М., Котляр Л.М. Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Казан. гос. ун-т, 1978.
47. Коган В.Р., Кузнецов В.В. Метод численного моделирования нестационарных гравитационно-капиллярных волн конечной амплитуды // Журнал выч. мат. и мат. физики. 1989. Т. 29. № 6. С.844-852.
48. Коковин Е.Т. Применение метода конформного отображения к решению осесимметричных задач потенциального обтекания // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1989. 17 с.
49. Коннор Дж., Бреббия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979. 204 с.
50. Королев Л.Н. Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение / Гл. ред. физ.-мат. лит. М.: Наука, 1978. С. 166-169.
51. Коротков Г.Г., Стуколов С.В. Пакет прикладных программ для волновых задач гидродинамики // Материалы Всероссийской молодежной научной школы-конференции по мат. моделированию, геометрии и алгебре. Казань: Изд-во Казанского мат. общества, 1998. С. 71-79.
52. Корнеев В.В. Параллельные вычислительные системы. М: Нолидж, 1999. 320 с.
53. Кусимов С.Т. и др. Высокопроизводительные вычислительные ресурсы УГАТУ: состояние, перспективы развития и

подготовка кадров // Теоретические и прикладные вопросы современных информационных технологий: Материалы конференции. Улан-Удэ: изд. ВСГТУ. 2001. С. 17-21.

54. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.

55. Лотфуллин М.В. Расчет гидродинамических характеристик системы профилей вблизи свободной поверхности вязкой жидкости. М., 1987. Деп. в ВИНИТИ, № 4004-В87.

56. Маклаков Д.В. Нелинейная теория докритических течений. Предельные режимы обтекания / Препринт № 2, Казан. ГУ. Казань, 1992. 48 с.

57. Маклаков Д.В. Предельные режимы докритического обтекания препятствия // Вычислительные технологии. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1993. Т. 2. № 4. С. 55-70.

58. Маклаков Д.В. Обтекание препятствия с образованием нелинейных волн на свободной поверхности. Предельные режимы// Изв. АН. МЖГ. 1995. № 2. С. 108-117.

59. Манойлин С.В. Некоторые экспериментально-теоретические методы определения воздействия волн цунами на гидroteхнические сооружения и акватории морских портов/ Препринт № 5. ВЦ СО АН СССР. Красноярск, 1989.

60. Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983. 175 с.

61. Марчук Г.И., Котов В.Е. Проблемы вычислительной техники и фундаментальные исследования // Автоматика и выч. техника. 1979. № 2. С. 3-14

62. Материалы информационно-аналитического центра НИВЦ МГУ – www.parallel.ru

63. Материалы ВЦ РАН - www.ccas.ru/paral

64. М.Меткалф и Дж.Рид. Описание языка программирования ФОРТРАН 90. М.: Мир, 1995.

65. Моисеев Н.Н. О неединственности возможных форм установившихся течений тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21. №6. С. 860 - 864.

-
66. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем/Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 367 с.
67. Петров А.Г., Смолянин В.Г. Расчет нестационарных волн на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 137-143.
68. Плотников П.И. Неединственность решения задачи об уединенных волнах и бифуркации критических точек гладких функционалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55. № 2. С. 339 - 366.
69. Прангишвили И.В. Архитектурные концепции высокопроизводительных параллельных вычислительных систем 80-х годов // Вопр. кибернетики. 1981. №79. С. 3-14.
70. Протопопов Б.Е. Численное моделирование поверхностных волн в канале переменной глубины // Динамика сплошной среды. 1988. № 84. С. 91-105.
71. Протопопов Б.Е. Численный анализ трансформации уединенной волны при отражении от вертикальной преграды // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1990. № 5. С. 115-123.
72. Протопопов Б.Е., Струрова И.В. Генерация плоских поверхностных волн при наличии малой неровности дна // ПМТФ. 1989. № 1. С. 125-133.
73. Рузиев Р.А., Хакимзянов Г.С. Численное моделирование трансформации уединенной волны над подводным уступом // Вычислительные технологии. ИВТ СО РАН. 1992. Т. 1. № 1. С. 5-21.
74. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том I, II. М.: Наука, 1973.
75. Сидякин Е.В., Стуколов С.В. Расчет нагрузок на гидротехнические сооружения от прибойных волн// Вестник КемГУ. Серия Математика. 2000. Вып. 4. С. 134-140.
76. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1972. 815 с.
77. Стуколов С.В. Численное моделирование уединенных стационарных волн на поверхности жидкости конечной глубины//Сб. науч. трудов “Математические проблемы механики

сплошных сред". Новосибирск: Изд-во ин-та гидродинамики СО РАН, 1999. Т. 114. С.129-134.

78. Стуколов С.В. Решение нелинейных волновых задач гидродинамики идеальной жидкости комплексным методом граничных элементов: Автореф. дис...канд. физ.-мат. наук. Кемерово, 1999. 26 с.

79. Стуколов С.В. Вопросы построения и производительности кластеров на базе сети ПК //Новые информационные технологии в университетеобразовании: Тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во СГУПС и ИДМИ, 2001. С.46.

80. Стурова И.В. Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн / Препринт № 5. ВЦ СО РАН. Красноярск, 1990. 48 с.

81. Терентьев А.Г., Афанасьев К.Е. Численные методы в гидродинамике: Учеб. пособие / Чуваш. ун-т. им. И.Н. Ульянова. Чебоксары: ЧГУ, 1987. 94 с.

82. Терентьев А.Г., Картузова Т.В. Численные исследования системы крыловых профилей методом граничных элементов // Актуальные задачи математики и механики/ Чуваш. ун-т. Чебоксары, 1995. С.108-116.

83. Фаддеева В.Н., Фаддеев Д.К. Параллельные вычисления в линейной алгебре // Кибернетика. 1977. № 6. С. 28-40.

84. Форсайт Дж., Мальcolm M., Моулер К. Машины методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.

85. Фортран 77 для ПЭВМ ЕС: Справ. изд./ З.С. Брич и др. М.: Финансы и статистика, 1991. 288с.

86. Франк А.М. Дискретная нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды // ПМТФ. 1993. № 5. С.15-24.

87. Франк А.М. Численное моделирование уединенных поверхностных волн в рамках дискретной модели несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1989. № 3. С. 95-101.

88. Франк А.М. Дискретные модели несжимаемой жидкости:Автореф.дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1994. 30 с.

89. Шерыхалина Н.М. Разработка численных алгоритмов решения задач гидродинамики с особыми точками на свободной

поверхности и экспериментальное исследование скорости их сходимости. М., 1995. Деп. в ВИНИТИ 16 декабря, № 2550-В95.

90. Шнитман В. Современные высокопроизводительные компьютеры. 1996г. <http://www.citforum.ru/hardware/svk/contents.shtml>

91. Шокин Ю.И., Рузиев Р.А., Хакимзянов Г.С. Численное моделирование плоских потенциальных течений жидкости с поверхностными волнами / Препринт № 12. ВЦ СО АН СССР. Красноярск, 1990.

92. Яненко Н.Н. Вопросы модульного анализа и параллельных вычислений в задачах математической физики // Параллельное программирование и высокопроизводительные системы. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1980. Ч. 1. С. 135-144.

93. Ясько Н.Н. Численное решение нелинейной задачи о движении плоского крылового профиля под свободной поверхностью идеальной несжимаемой жидкости // МЖГ. 1995. № 4. С.100-107.

94. Afanas'ev K.E., Stukolov S.V. On the existence of three solutions for a supercritical steady flow of a heavy fluid over obstructions / J. Applied Mech. and Tech. Phys. 1999. V.40. № 1. P. 20-27.

95. Afanas'ev K.E., Stukolov S.V. Circulation flow around airfoils by a steady plane-parallel flow of a heavy liquid of finite depth with a free surface / J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2000. V. 41. №3. P. 470-478.

96. Brebbia C.A. The boundary element method for Engineers / Pentech Press. London, 1988. 189 p.

97. Best J.P., Kusera A. A numerical investigation of non-spherical rebounding bubbles // J. Fluid Mech. 1992. V. 245. P. 137-154.

98. Betts P.L. A variational principle in terms of stream function for free-surface flows and its application to the finite element method // Comput. and Fluids. 1979. V. 7. № 2. P. 145-153.

99. Cooker M.J. A boundary-integral method for water wave motion over irregular beds // Fug. Anal. Bound. Elem. 1990. V. 7. № 4. P. 205-213.

100. Cooker M.J., Peregrine D.H., Vidal C., Dold J.W. The interaction between a solitary wave and a submerged semicircular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 215. P. 1-22.
101. Domermuth G.D., Yue D.K.P. Numerical simulations of nonlinear axisymmetric flows with a free surface // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 178. P. 195-219.
102. Evans W.A.B., Ford M.J. An exact integral equation for solitary waves (with new numerical results for some 'integral' properties) // *I. Proc. Roy. Soc. Lond.* 1996. A.452. P. 373-390.
103. Grosenbaugh M., Yeung R. Nonlinear free-surface flow at a two-dimensional bow // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 209. P. 57-75.
104. Kawahara M., Miwa T. Finite element analysis of wave motion // *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1984. V. 20. P. 1193-1210.
105. Karabut E.A. Asymptotic expansions in the problem of a solitary wave // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 319. P. 109-123.
106. King A.C., Bloor M.I.G. Free-surface flow of a stream obstructed by an arbitrary bed topography // *Q. J. Mech. appl. Math.* 1990. V. 43. Pt. 1. P.87-106.
107. Liu P.L.-F., Liggett J.A. Boundary element formulations and solutions for some non-linear water wave problems // Develop. in Boundary Element Methods. London, 1986. P. 171-190.
108. Longuet-Higgins M.S. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave // *Proc. R. Soc. Lond.* 1974. A. 337. P. 1-13.
109. Longuet-Higgins M.S., Cokelet E.D. The deformation of steep surface waves on water. 1. A numerical method of computation // *Proc. Roy. Soc., A.* 1976. V. 350. P. 1-26.
110. Longuet-Higgins M.S., Fenton J.D. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave // II. *Proc. R. Soc. Lond.* 1974. A340. P. 471-493
111. Mokry M. Complex variable boundary element method for external potential flows // *AIAA Journal.* 1990. V.127. P.1-11.
112. Nakayama T. Boundary element analysis of nonlinear water wave problems//*Int. J.Num. Meth. Engng.* 1983. V. 19. P. 953-970.

-
113. Nakayama T. A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free surface // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1990. V. 10. P. 683-695
114. Nakayama T., Washizu K. Boundary element analysis of nonlinear sloshing problems // Develop. in boundary element methods. 1986. P. 171-190.
115. Protopopov B.E. An efficient numerical method for calculation of strongly nonlinear water waves// Вычислительные технологии. 1998. Т. 3. № 3. С. 55-71.
116. Seabra-Santos F.J., Renouard D.P., Temperville A.M. Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle // J. Fluid Mech. 1987. V. 176. P. 117-134.
117. Su C.H., Mirie R.M. On head-on collisions between two solitary waves // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. № 3. P. 509-525.
118. Suzuki K. Calculation of nonlinear water waves around d2-dimensional body in uniform flow by means of boundary element method // Fifth Int. Conf. on Numeric. Ship Hydrod., part 1. 1989. P. 157-167.
119. Synolakis C.E. The runup of solitary waves. J. Fluid Mech. 1987. V. 185. P. 523-545.
120. Tanaka M. The stability of solitary waves // Physics of Fluids. 1986. V. 29 (3). P. 650-655.
121. Tutorial on MPI: The Message-Passing Interface William Gropp Mathematics and Computer Science Division Argonne National Laboratory Argonne, IL 60439 www-unix.mcs.anl.gov/mpi/tutorial
122. Vanden-Broeck J.M. Free surface flow over an obstruction in a channel // Phys. fluids. 1987. V. 30. № 8. P. 2315 - 2317.
123. Vinje T., Brevig P. Numerical simulation of breaking waves // Adv. Water Resour. 1981. V. 4. P. 77-82.
124. Williams J.M. Limiting gravity waves in water of finite depth//Philos.Trans.Roy.Soc. London Ser A. 1981. V. 303. P.139-188.
125. www.epm.ornl.gov/pvm

**Афанасьев Константин Евгеньевич
Стуколов Сергей Владимирович**

**КМГЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ
ГИДРОДИНАМИКИ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ НА
ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ**

Учебное пособие

Редактор Григорьева О.С.

Лицензия на издательскую деятельность ЛР №020464 от 9.06.1997 г.

Подписано к печати . Печать офсетная. Формат 60x 84 1/16.
Бумага типографская. Печ.л. 13,25. Уч.-изд. л. 11,2. Тираж 300 экз.
Заказ № 346

Кемеровский госуниверситет. 650043, Кемерово, ул. Красная, 6.
Отпечатано в типографии ООО “Фирма Полиграф”. 650099, ул. Островского, 16