Домашнее задание №5. **Лупуляк Василий**

$\boxed{2.}$ Построить однозначную КС грамматику, эквивалетную грамматике

$$S \to aSbbbb \mid aaaSbb \mid c$$

Сделаем так, чтобы первое и второе правила нужно было применять последовательно:

$$S \to aSbbbb \mid T \mid c$$
$$T \to aaaTbb \mid c$$

Покажем, что теперь грамматика однозначна. Пусть слово, принадлежащее грамматике, имеет вид $a^x cb^y$. Пусть его можно получить с помощью n первых правил, k вторых правил и одной замены нетерминала на c. Тогда $x = n + 3k, y = 4n + 2k$, откуда

$$n = \tfrac{3y-2x}{10},\ k = \tfrac{4x-y}{10},$$

то есть набор примененных правил определяется однозначно. Все вторые правила применяются после первых, поэтому порядок тоже однозначен, то есть грамматика однозначна.

$\boxed{3.}$ Описать язык, порождаемый грамматикой

$$F \to \varepsilon \mid aFaFbF$$

Этот язык можно описать следующим образом: множество слов из $\{a, b\}^*$, у которых на любом префиксе букв a хотя бы вдвое больше, чем букв b, а всего букв a ровно вдвое больше, чем букв b. Докажем, что любое слово, порождаемое грамматикой, имеет такой вид. Оба свойства можно доказать по индукции по длине слова (для ε они выполняются, для $aFaFbF$ второе свойство очевидно, а первое выполняется, так как как перед каждым из трех F количество букв a хотя бы вдвое больше количества букв b, а внутри F это верно по предположению индукции).

Теперь докажем, что любое слово из этого языка порождается нашей грамматикой. Будем доказывать индукцией по длине слова, база для пустого слова верна. Переход: рассмотрим первый непустой префикс, на котором количество букв a равно удвоенному количеству букв b (такой точно есть, так как всё слово подходит). Заметим, что он оканчивается на b, так как иначе на предыдущем префиксе баланс был бы отрицательным (балансом слова называем разность количества букв a и удвоенного количества букв b в этом слове). Пусть это префикс wb слова wbv. Тогда v лежит в языке (так как до него баланс нулевой, поэтому все условия выполняются). Значит, по предположению индукции, слово v порождается грамматикой.

Заметим, что w начинается на aa, иначе на втором префиксе баланс был бы отрицательным. Теперь рассмотрим балансы на префиксах w длины хотя бы 2. По выбору w, они все положительны. Рассмотрим два случая:

1) Все эти балансы не ниже двух. Тогда если $w = aau$, то для u верно, что баланс на каждом префиксе неотрицателен и баланс на всем u равен нулю. Значит, u порождается грамматикой. Таким образом, исходное слово имеет вид $a\varepsilon aubv$, где ε, u и v порождаются грамматикой, то есть слово порождается грамматикой.

2) На каком-то префиксе баланс равен одному. Тогда рассмотрим последний из таких префиксов. После него обязательно идет буква a, так как иначе баланс на следующем префиксе был бы отрицательным. Пусть это префикс au и $w = auas$. Тогда на всех префиксах от aua до $auas$ баланс не меньше двух, при этом баланс на aua равен двум и баланс на $auas$ равен двум. Значит, s лежит в языке и, следовательно, порождается грамматикой. Аналогичное верно и для u. Значит, слово имело вид $auasbv$, где u, s и v порождаются грамматикой, поэтому и само слово порождалось грамматикой. Переход доказан.