Институт систем обработки изображений РАН – филиал Федерального научно-исследовательского центра «Кристаллография и фотоника» Российской академии наук, Самара, Россия,

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

В.В. Котляр, А.А. Ковалев

УСКОРЯЮЩИЕСЯ И ВИХРЕВЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2018

Введение

Точные решения уравнений Максвелла или других уравнений оптики — уравнения Гельмгольца, параксиального уравнения распространения типа уравнения Шредингера — всегда привлекали внимание исследователей. Эти решения описывают электромагнитные световые когерентные поля и лазерные пучки, которые широко применяются на практике и свойства которых можно подробно описать аналитически. К таким известным световым полям, имеющим точное аналитическое описание, относятся: плоская волна, сферическая волна, Гауссов и Бесселев пучки [1]. Некоторое время назад были открыты новые световые пучки, имеющие точное аналитическое описание: модовые пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса [2], пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса [3], эллиптические пучки Матье [4] и Айнса [5], гипергеометрические пучки [6], ускоряющиеся пучки Эйри [7], самофокусирующиеся пучки Пирси [8] и другие. Световые поля можно разделить на два класса имеющие орбитальный угловой момент (ОУМ) [9] и не имеющие его. Пучки, обладающие ОУМ, называются вихревыми или сингулярными. Вихревые лазерные пучки [10] имеют такие отличительные черты: винтовую или спиральную фазу, дислокации волнового фронта, изолированные точки нулевой интенсивности. Вихревые лазерные пучки в последнее время получили шировокое распространение, их применяют при зондировании атмосферы в присутствии турбулентности [11], в беспроводных системах связи [12], для уплотнения каналов передачи информации по волокну [13], в астрономии [14], квантовой информатики [15] и микроманипуляции [16].

Авторы ранее уже писали про вихревые лазерные пучки [10], но за прошедшие после этого несколько лет появились новые вихревые пучки: асимметричные пучки Бесселя и Лагерра–Гаусса, вихревые пучки Эрмита–Гаусса, моды Ломмеля, половинные пучки Пирси, векторные вихревые пучки Ханкеля и другие. Их рассмотрению и посвящена данная книга.

Книга написана по результатам, полученным в ходе выполнения проектов по грантам РФФИ № 14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, 15-47-02492, 16-29-11698, 16-47-630483. А также на основе лекций, которые авторы читают в Самарском университете для магистров по специальности прикладные физика и математика.

Авторы выражают благодарность научному сотруднику Самарского университета к.ф.-м.н. Порфирьеву А. П. за проведение экспериментальных исследований вихревых лазерных пучков и научному сотруднику ИСОИ РАН к.ф.-м.н. Налимову А. Г. за моделирование фокусировки света с помощью градиентных элементов микрооптики.

Глава 1

УСКОРЯЮЩИЕСЯ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ

1.1. Пучки Эйри с непараболической траекторией

1.1.1. Пучки Эйри с параболической траекторией. В 1974 году Kalnins и Miller [17] нашли решение параксиального уравнения распространения в виде функций Эйри. В 1979 году Berry и Balazs [18] рассмотрели не уширяющиеся волновые пакеты в квантовой механике. В 1994 году Besieris и др. [19] нашли решение 2D параксиального уравнения

$$2i\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U}{\partial s_x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial s_y^2} = 0 \tag{1.1}$$

в виде

$$U\left(s_x, s_y, \xi\right) = \mathrm{Ai}\left(s_x - \frac{\xi^2}{4}\right)\mathrm{Ai}\left(s_y - \frac{\xi^2}{4}\right)\exp\left(\frac{is_x\xi}{2} + \frac{is_y\xi}{2} - \frac{i\xi^3}{6}\right), \tag{1.2}$$

где $\mathrm{Ai}(x)$ — функция Эйри, равная при вещественных положительных значениях аргумента

$$\mathrm{Ai}(x) = \pi^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)^{1/2} K_{1/3}\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right) = \sqrt{x}\,\frac{I_{-1/3}(2x^{3/2}/3) - I_{1/3}(2x^{3/2}/3)}{3}, \tag{1.3}$$

$I_{1/3}(x)$ и $K_{1/3}(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго родов, $s_x = x/x_0$, $s_y = y/x_0$, $\xi = z/(kx_0^2)$ — безразмерные поперечные и продольная декартовы координаты, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, x_0 — произвольный поперечный размер. Пучки Эйри (ПЭ) в [1–3] имеют бесконечную энергии, так как функция Эйри медленно убывает при $x \to \infty$:

$$\mathrm{Ai}\left(-x\right) \approx \pi^{-1/2}x^{-1/4}\sin\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]. \tag{1.4}$$

В 2007 году Siviloglou и Christodoulides [7] рассмотрели ПЭ в оптике с конечной энергией. Они показали, что решением уравнения (1.1) в 1D варианте

$$2i\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = 0 \tag{1.5}$$

имеет вид

$$U(s,\xi) = \mathrm{Ai}\left(s - \frac{\xi^2}{4} + ia\xi\right)\exp\left(\frac{is\xi}{2} + \frac{ia^2\xi}{2} - \frac{i\xi^3}{12} - \frac{a\xi^2}{2} + as\right), \tag{1.6}$$

который в начальной плоскости при $\xi = 0$ дает функцию Эйри с экспоненциальной аподизацией

$$U\left(s, \xi = 0\right) = \mathrm{Ai}\left(s\right) \exp\left(as\right) \ , \quad a > 0, \tag{1.7}$$

где a — постоянная. В [7] также показано, что сформировать 1D пучок ПЭ с конечной энергией можно при освещении гауссовым пучком фазовой маски с кубической зависимостью от поперечной координаты и выполнением преобразования Фурье с помощью сферической линзы. Это следует из того, что Фурье-образ начального поля (1.7) имеет вид:

$$F(t) = \exp\left(-at^2\right) \exp\left(\frac{it^3}{3} - ia^2 t + \frac{a^3}{3}\right). \tag{1.8}$$

Главной особенностью ПЭ является изогнутость траектории главного максимума (основного лепестка). Он распространяется по параболической траектории. Поэтому ПЭ называются ускоряющимися или баллистическими (так как свободно падающее тело двигается по параболе с ускорением g). Однако в [20] показано, что для ПЭ с конечной энергией (1.6), (1.7) «центр тяжести пучка» не смещается при распространении и ускоряющий эффект проявляется только при малых значениях параметра $a \ll 1$. В [21] экспериментально, с помощью жидкокристаллического модулятора света, была получена параболическая траектория распространения 1D ПЭ, которая хорошо описывалась формулой ($a = 0{,}1$):

$$x = \left(\frac{\lambda z}{4\pi x_0^{3/2}}\right)^2. \tag{1.9}$$

где (x, z) — поперечная и продольная декартовы координаты. В [22] получено обобщение ПЭ — пучки Эйри–Гаусса (ЭГ) и рассчитано их преобразование в оптической ABCD-системе. Если ПЭ с бесконечной энергией в начальной плоскости в [17,18] имеют вид $E_0(x, z = 0) = \mathrm{Ai}(x)$, а пучки с конечной энергией из [7] имеют в начальной плоскости вид (7): $E_0(x, z = 0) = \mathrm{Ai}(x) \exp\left(ax\right)$, то ЭГ-пучки из [22] в начальной плоскости имеют следующий вид:

$$E_2\left(x, z = 0\right) = \mathrm{Ai}\left(\frac{x + \delta}{\beta}\right) \exp\left[(a + ib)x - \frac{x^2}{w^2} + \frac{ikx^2}{2R}\right], \tag{1.10}$$

где δ, β, a, b, w, R — параметры. В [23] показано, что добавка к ПЭ [17] линейного наклона позволяет управлять параметрами параболической траектории. Получено выражение для преобразования Френеля от ПЭ в начальной плоскости вида

$$E_3\left(s, z = 0\right) = \mathrm{Ai}\left(s\right) \exp\left(as + i\nu s\right) \quad , \ s = \frac{x}{x_0}, \tag{1.11}$$

и показано, что траектория такого пучка, в отличие от (1.9), имеет вид

$$x = \frac{vz}{kx_0} + \frac{z^2}{4k^2 x_0^3}. \tag{1.12}$$

В [24] численно рассчитан вектор Пойнтинга и орбитальный угловой момент для ПЭ. В [25] Bandres рассмотрел ускоряющиеся параболические пучки. В начальной плоскости их комплексная амплитуда имеет вид:

$$E_4\left(u, v, z=0\right) = \theta_n\left(\eta\right)\theta_n\left(i\xi\right)\exp\left[iw\left(\eta^2-\xi^2\right)/2 + i\xi^3/3\right], \quad (1.13)$$

где ξ и η — параболические координаты:

$$\begin{cases} u-\lambda-w^2 = \left(\eta^2-\xi^2\right)/2, \\ v = \eta\xi, \end{cases} \quad (1.14)$$

а функции $\theta_n(x)$ удовлетворяют уравнению ангармонического осциллятора:

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\eta^4}{4}\right)\theta_n\left(\eta\right) = E_n\theta_n\left(\eta\right). \quad (1.15)$$

Для функции $\theta_n(x)$ не известно аналитического решения в виде специальных функций, известна только асимптотика:

$$\theta_n\left(i\xi\right) \approx \frac{\sin\left(\sqrt{2}\,\xi^2/6+\pi/6\right)}{\xi}, \quad \xi\to\infty. \quad (1.16)$$

В [26] экспериментально с помощью 35 фс импульса на средней длине волны $\lambda = 0{,}8$ мкм с энергией 10 мДж в воздухе из-за многофотонной ионизации получен искривленный плазменный канал радиусом около $\sigma = 132$ мкм и длиной 69 см, который хорошо описывается формулой:

$$x = 0{,}037\,\frac{\lambda^2 z^2}{\sigma^3}, \quad (1.17)$$

где σ — радиус гауссова пучка. В [27] Bandres рассмотрел еще один тип ПЭ — ускоряющиеся пучки. Он нашел решение уравнения

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)E\left(u, v, \xi\right) = 0 \quad (1.18)$$

в виде

$$E_5\left(u, v, \xi\right) = \mathrm{Ai}\left(u+\omega^2\right)\exp\left[i\xi\left(u-\lambda-\xi^2\right) + i\xi^3/3\right]\exp\left(i\omega v\right), \quad (1.19)$$

где λ, ω — константы. Хотя этот пучок двумерный, но по одной координате его траектория параболическая как у 1D ПЭ. В [28] численно показано в непараксиальном случае, что 2D поле с кубической фазой, ограниченной круглой диафрагмой с радиусом R

$$E_x\left(x, y, z=0\right) = \mathrm{circl}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)\exp\left[i\beta\left(x^3+y^3\right)\right] \quad (1.20)$$

также имеет параболическую траекторию до и после фурье-плоскости. В [29] с помощью 3-х волнового смешения в нелинейном фотонном кристалле и с помощью управления температурой получили два

режима (генерацию второй гармоники и генерацию разностной частоты), в которых начальный кубический волновой фронт генерировал ПЭ с параболами, направленными в разные стороны. Аналогично [28] в [30] численно исследуются 1D ПЭ, ограниченные по поперечной координате и линейная комбинация ПЭ, которая при распространении формирует две параболы, направленными в разные стороны, аналогично [29]. В [31] исследуется влияние взаимного смещения центра гауссова пучка и центра кубической фазовой маски на формирование модернизированных ПЭ в Фурье-плоскости. Получено явное выражение для Фурье-преобразования от начальной функции

$$E_6(t) = \exp\left[-a(t-t_0)^2\right]\exp\left\{i\left[\frac{(t-t_1)^3}{3} - a^2(t-t_1) - i\frac{a^3}{3}\right]\right\}. \tag{1.21}$$

Показано, что выбором постоянных t_0 и t_1 можно управлять видом параболической траектории ПЭ. В [32] изучается другой тип ограниченных с одной стороны по поперечной координате 1D ПЭ с конечной энергией. В начальной плоскости эти ПЭ имеют следующую комплексную амплитуду:

$$E_7(s, \xi = 0) = \mathrm{Ai}_0(s) \pm i\,\mathrm{Bi}_1(s), \tag{1.22}$$

где $\mathrm{Ai}(x)$ и $\mathrm{Bi}(x)$ — два линейно независимых решения уравнения Эйри

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\right)E(x) = 0, \tag{1.23}$$

но ограниченных с одной стороны специальным образом:

$$\mathrm{Ai}_0(s) = \begin{cases} \mathrm{Ai}(s)\exp(as), & s < s_0 = -2{,}3381, \\ 0, & s \geqslant s_0, \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\mathrm{Bi}_1(s) = \begin{cases} \mathrm{Bi}(s)\exp(as), & s < s_1 = -1{,}1737, \\ 0, & s \geqslant s_1. \end{cases} \tag{1.25}$$

Распространение таких модернизированных ПЭ исследуется в [32] численно. В [33] предложен радиально-симметричный ПЭ с конечной энергией, который «самофокусируется» на определенном расстоянии:

$$E_8(r) = \mathrm{Ai}(r - r_0)\exp[a(r - r_0)], \tag{1.26}$$

где r и r_0 — переменная и постоянная поперечные радиальные координаты. Фокусное расстояние зависит от величины r_0 . Распространение пучка моделируется численно. В [34] теоретически показано, что с помощью тонкого клинообразного кристалла, толщина которого меняется по поперечной координате линейно, и при накачке гауссовым пучком вблизи выходной поверхности кристалла возникает обрезанный ПЭ с ускорением (с параболической траекторией движения). В [35] численно и экспериментально рассматривается ПЭ, названный «световой

пулей». В начальной плоскости в любой момент времени его комплексная амплитуда имеет вид:

$$E_9\left(x,y,z,t\right)=\mathrm{Ai}\left(x/x_0\right)\mathrm{Ai}\left(y/y_0\right)\mathrm{Ai}\left(\tau/\tau_0-\frac{\beta z^2}{4\tau_0^4}\right), \tag{1.27}$$

где $\tau = t - z/c$, x_0, y_0, τ_0 и β — постоянные.

1.1.2. Пучки, ускоряющиеся по непараболической траектории. В [36] методом стационарной фазы из интеграла Френеля получено выражение для комплексной амплитуды поля, которое фокусируется на кривой (стационарные точки которого лежат на этой кривой) $x = f(z)$:

$$E_{10}\left(x,z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\,\mathrm{Ai}\left[\frac{k^{2/3}\left(\varphi''\left(x_{0n}\right)+1/z\right)^2}{2^{2/3}\left(\varphi'''\left(x_{0n}\right)\right)^{4/3}}\right], \tag{1.28}$$

где φ, φ'', φ''' — фазовая функция поля в начальной плоскости $z = 0$ и ее вторая и третья производные, x_{0n} — стационарные точки показателя экспоненты в интеграле Френеля, равного $k\varphi + k(x - x_0)^2/(2z)$, где x_0 — координата в начальной плоскости. Эти стационарные точки удовлетворяют условию $x = x_{0n} + z\varphi'(x_{0n})$. С помощью формулы (1.28) и пространственного модулятора света экспериментально получены ПЭ, траектории которых описываются полиномом $x = z^m$, где $m = 1{,}5$; 2; 3; 4; 5. В [37] рассмотрено световое поле, распространяющееся в планарной градиентной неоднородной среде с линейным распределением показателя преломления и удовлетворяющее параксиальному уравнению в безразмерных единицах (подобному уравнению (1)):

$$\left(i\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\alpha(z)x}{2}\right)E(x,z)=0, \tag{1.29}$$

где $\alpha(z)$ — функция от продольной переменной z. Получено решение уравнения (29) в виде интегралов для любой $\alpha(z)$ и при начальном поле вида $E_0(x, z = 0) = \mathrm{Ai}(\gamma^{1/3}x)$, где γ — масштабирующий множитель. В [38] получено уравнение для фазы $\varphi(x)$ светового поля, которое направляет лучи на 1D каустическую кривую $c(z)$:

$$\frac{d\varphi\left(x\right)}{dx}=\frac{k\left[c(z)-x\right]}{\sqrt{\left[c(z)-x\right]^2+z^2}}, \tag{1.30}$$

где k — волновое число света. Из этого уравнения следует, что при $c(z) = az^2$ фаза получается в степени 3/2, а сама амплитуда ПЭ в начальной плоскости имеет вид:

$$E_{11}(x,z=0)=\exp\left(-i4\sqrt{a}\,kx^{3/2}/3\right), \tag{1.31}$$

где a — постоянная. Если уравнение каустики имеет вид $c(z) = az^4$, то начальное поле будет иметь следующий вид:

$$E_{12}(x,z=0)=\exp\left(-i16(3a)^{1/3}kx^{7/4}/21\right). \tag{1.32}$$

Аналогично в [38] найдена явная фаза для каустики $c(z) = az^m$, где m — целое число.

В [39] теоретически и экспериментально изучалось ускорение ПЭ с помощью градиентной оптики. Для параксиального уравнения со слабым линейным показателем преломления:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k\delta x}{2n}\right) E(x,z) = 0, \tag{1.33}$$

где $\delta \cdot x \ll n$, n — показатель преломления среды, получено явное решение в виде:

$$\begin{aligned} E_{13}(x,z) = \\ = \mathrm{Ai}\left[\frac{1}{x_0}\left(x - \frac{z^2}{4k^2x_0^3} - \frac{\delta z^2}{2n}\right) + i\frac{az}{kx_0}\right] \exp\left[ax - \frac{az^2}{2}\left(\frac{1}{k^2x_0^3} + \frac{\delta}{n}\right)\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{iz^3}{12}\left(\frac{1}{k^3x_0^6} + \frac{2k\delta^2}{n^2} + \frac{3\delta}{nkx_0^3}\right) + \frac{ia^2z}{2k}\right] \times \\ \times \exp\left[ixz\left(\frac{1}{2kx_0^3} + \frac{k\delta}{n}\right)\right], \end{aligned} \tag{1.34}$$

удовлетворяющее граничному условию $E(x, z = 0) = \mathrm{Ai}(x/x_0)\exp(ax)$, $a > 0$. В [40] экспериментально получены плазмонные ПЭ с помощью матрицы субволновых отверстий в пленке серебра, периодических вдоль оси z и непериодических (аппроксимирующих фазу степени 3/2) вдоль оси x. Падающая на отверстия плазмонная волна распространяется вдоль оси x, а ПЭ распространяется вдоль оси z. В [41] с помощью жидкокристаллического модулятора, пропускание которого описывается фазовой функцией степени 3/2: $\varphi(x) = ax^{3/2}$, был сформирован ПЭ. В [42] рассмотрен 2D тройной ПЭ в начальной плоскости в виде:

$$E_{14}(x, y, z = 0) = \mathrm{Ai}(by + c)\,\mathrm{Ai}\left(b\frac{x\sqrt{3} - y}{2} + c\right)\mathrm{Ai}\left(b\frac{-x\sqrt{3} - y}{2} + c\right). \tag{1.35}$$

Этот пучок имеет конечную энергию. Фурье-образ этого пучка в [42] найден аналитически, а преобразование Френеля рассчитывается численно. В [43] во внешнем резонаторе ND:YAG лазера в качестве зеркала использована отражающая дифракционная решетка с рельефом:

$$T(x,y) = \frac{h_0}{2}\left[\mathrm{sign}\left\{\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{a}\right)\right\} + 1\right], \tag{1.36}$$

где h_0 — высота зубьев решетки, a — масштабирующий множитель.

В этом случае лазер генерирует 2D ПЭ. В [44] в интегральной форме для функции Бесселя предложено интегрировать только

по половине круга от нуля до π:

$$J_\nu^+(x,z) = \int\limits_0^\pi \exp\left[i\nu t + ik\left(x\cos t + z\sin t\right)\right]dt. \qquad (1.37)$$

Формула (1.37) описывает 1D ускоряющийся пучок, распространяющийся по круговой траектории с поворотом почти на 90 градусов. В [45] рассмотрены 2D пучок Бесселя, но интерпретирован он как 1D пучок, распространяющийся вдоль оси z:

$$E_{15}(x,z) = J_\nu\left(k\sqrt{x^2+z^2}\right)\exp\left(i\nu\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{x}\right), \qquad (1.38)$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя. Причем при $z=0$ выбирается только на полуоси:

$$E_{15}^+(x,z=0) = J_\beta(kx+\beta)\exp(-ax)\,\theta(x+\beta/k), \qquad (1.39)$$

где $\theta(x)$ — функция Хэвисайда. Ускоряющийся пучок (1.39), как и пучок (1.37), поворачивается при распространении по окружности на 90°. В [46] экспериментально с помощью модулятора и лазерного импульса длительностью 10 фс получен световой пучок с кривой каустикой в виде окружности с радиусом 35 мкм. При этом на жидкокристаллическом модуляторе формировалась фазовая функция, рассчитанная с помощью уравнения геометрической оптики, аналогичного уравнению (1.30):

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{kc'}{\sqrt{1+(c')^2}}, \quad c' = \frac{dc}{dz}. \qquad (1.40)$$

В (1.40) функция $c(x)$ задает нужную каустическую кривую, например, дугу окружности.

В [47] рассмотрен круговой ПЭ с оптическим вихрем с начальной амплитудой:

$$E_{16}(r,\varphi,z=0) = \mathrm{Ai}\left(\frac{r-r_0}{w}\right)\exp\left[a\frac{r-r_0}{w}\right]\left[r\exp(i\varphi) - r_0\exp(i\varphi_0)\right]^n, \qquad (1.41)$$

где n — топологический заряд вихря. Этот пучок формирует в фокусе световое кольцо. В [48] методом виртуального источника найдены непараксиальные поправки к параксиальным ПЭ. В [49] исходя из 2D пучка Матье, взяв его одномерное сечение, рассмотрены ускоряющиеся по эллиптическим орбитам лазерные пучки. Пучок Матье выбирается в виде:

$$E_{17}(u,v,z=0) = A\,\mathrm{ce}_m(v)\,\mathrm{Mc}_m(u) + iB\,\mathrm{se}_m(v)\,\mathrm{Ms}_m(u), \qquad (1.42)$$

где A, B — постоянные, (u,v) — эллиптические координаты $x = f\,\mathrm{ch}(u)\cos(v)$, $y = f\,\mathrm{sh}(u)\sin(v)$, ce, se — угловые и Mc, Ms — радиальные функции Матье. Для ускоряющегося пучка надо положить $v=0$ (или $v=\pi/2$).

В приведенном выше подробном обзоре работ по ускоряющимся пучкам и, в частности ПЭ, нет работ по ПЭ, которые ускоряются по гиперболическим траекториям. Чтобы заполнить этот проблем рассмотрим далее пучки Эйри второго рода (ПЭ-2) или гиперболические ПЭ (ГПЭ).

1.1.3. Лазерные пучки Эйри второго рода. В [50] предложен другой тип ускоряющихся пучков Эйри. Обычно 1D ПЭ формируют с помощью начального поля (1.8) — фазовой кубической маски, далее формируют с помощью сферической линзы фурье-спектр поля (1.8), который описывается функцией (1.7). А за фурье-плоскостью формируется ПЭ с комплексной амплитудой (1.6). ПЭ-2 возникают в зоне Френеля фазовой маски (1.8). Чтобы показать это, рассмотрим комплексную амплитуду гауссова пучка сразу за кубической фазовой маской:

$$E\left(x,0\right)=\exp\left[-\frac{x^2}{w^2}+i\alpha\left(\frac{x}{x_0}\right)^3+i\beta\left(\frac{x}{x_0}\right)\right], \tag{1.43}$$

где w — радиус перетяжки гауссова пучка, α и β — безразмерные параметры фазовой маски. Тогда на расстоянии z от начальной плоскости в параксиальном приближении амплитуда светового поля будет описываться преобразованием Френеля:

$$E\left(x,z\right)=\sqrt{\frac{-ik}{2\pi z}}\exp\left(ikz\right)\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{ik}{2z}\left(x-t\right)^2\right]\exp\left[-\frac{t^2}{w^2}+i\alpha\left(\frac{t}{x_0}\right)^3+i\beta\left(\frac{t}{x_0}\right)\right]dt. \tag{1.44}$$

Дополняя показатель экспоненты до полного куба и используя известное интегральное представление для функции Эйри

$$\mathrm{Ai}\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{it^3}{3}+ixt\right)dt, \tag{1.45}$$

можно вычислить интеграл в (1.44). Тогда получим:

$$E(x,z)=\sqrt{\frac{-i2\pi k}{z}}\,wp\exp\left[\frac{ikx^2}{2z}+sp\left(qp\right)^2+\frac{2}{3}\left(qp\right)^6+ikz\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{Ai}\left[sp+\left(qp\right)^4\right], \tag{1.46}$$

где

$$z_0=\frac{kw^2}{2},\quad q^2=1-\frac{iz_0}{z},\quad s=\frac{w}{x_0}\left(\beta-\frac{kx_0x}{z}\right),\quad p=\frac{x_0}{w\sqrt[3]{3\alpha}}. \tag{1.47}$$

В исходных обозначениях из (1.43) вместо (1.46) можно записать:

$$E(x,z)=\sqrt{\frac{-i2\pi k}{z}}\,\frac{x_0}{\sqrt[3]{3\alpha}}\times$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{x_0}{w}\right)^2\left(\beta-\frac{kx_0x}{z}\right)+\frac{2}{27\alpha^2}\left(\frac{x_0}{w}\right)^6\left(1-3\frac{z_0^2}{z^2}\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left[\frac{ikx^2}{2z}-\frac{iz_0}{z}\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{x_0}{w}\right)^2\left(\beta-\frac{kx_0x}{z}\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{2i}{27\alpha^2}\left(\frac{x_0}{w}\right)^6\left(3\frac{z_0}{z}-\frac{z_0^3}{z^3}\right)+ikz\right]\times$$
$$\times\mathrm{Ai}\left\{\frac{1}{(3\alpha)^{1/3}}\left[\beta-\frac{kx_0x}{z}+\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{x_0}{w}\right)^4\left(1-\frac{iz_0}{z}\right)^2\right]\right\}\quad(1.48)$$

Выражение (1.48) описывает ПЭ-2 с конечной энергией. Из (1.48) видно, что ПЭ-2, в отличие от ПЭ (1.6), имеет квадратичную фазу, а не линейную фазу, и поэтому при распространении он будет расходиться. Кроме того, в (1.48) аргумент функции Эйри комплексный, как и в (1.6), но зависимость от координаты z имеет другой характер: в (1.6) значение аргумента функции Эйри пропорционально z^2, а в (1.48) — обратно пропорционально z. ПЭ-2 с бесконечной энергией можно получить, если вместо гауссова пучка осветить кубическую фазовую маску плоской волной ($w\to\infty$). Тогда вместо (1.48) получим выражение:

$$E(x,z)=\sqrt{\frac{-i2\pi k}{z}}\,\frac{x_0}{\sqrt[3]{3\alpha}}\times$$
$$\times\exp\left[\frac{ik}{2z}\left(x^2+\frac{kx_0^3x}{3\alpha z}-\frac{\beta x_0^2}{3\alpha}+\frac{k^2x_0^6}{54\alpha^2z^2}\right)+ikz\right]\times$$
$$\times\mathrm{Ai}\left[\frac{1}{(3\alpha)^{1/3}}\left(\beta-\frac{kx_0x}{z}-\frac{k^2x_0^4}{12\alpha z^2}\right)\right].\quad(1.49)$$

Выражение (1.49) описывает ПЭ-2 с бесконечной энергией. Но квадратичная зависимость фазы сохраняется и поэтому пучок (1.49) будет при распространении расходиться. Аргумент функции Эйри в (1.49) действительный. Приравняем этот аргумент к значению, в котором функция Эйри имеет локальные максимумы y_m:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3\alpha}}\left(\beta-\frac{kx_0x}{z}-\frac{k^2x_0^4}{12\alpha z^2}\right)=y_m.\quad(1.50)$$

Числа y_m в (1.50) принимают значения, представленные в табл. 1.1.

Из уравнения (1.50) можно найти явное уравнение траектории максимума ПЭ-2:

$$x=\frac{z}{kx_0}\left(\beta-y_m\sqrt[3]{3\alpha}\right)-\frac{kx_0^3}{12\alpha z}.\quad(1.51)$$

Таблица 1.1

m	y_m
0	−1,01879
1	−3,2482
2	−4,8201
3	−6,16331
4	−7,37218
5	−8,48849
6	−9,53545
7	−10,5277
8	−11,4751
9	−12,3848
10	−13,2622

В отличие от параболической траектории (1.9), по которой распространяются ПЭ, ПЭ-2 распространяются по гиперболической траектории.

Найдем производные по z от выражения (1.51):

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{kx_0}\left(\beta - y_m\sqrt[3]{3\alpha}\right) + \frac{kx_0^3}{12\alpha z^2}, \tag{1.52}$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{kx_0^3}{6\alpha z^3}. \tag{1.53}$$

Гиперболическая траектория (1.51) обладает ускорением на тех участках, на которых производные первого и второго порядка (1.52) и (1.53) имеют один знак. Отсюда следует, что для ускорения траектории должно быть

$$\frac{1}{z^2} < \frac{12\alpha}{k^2x_0^4}\left(y_m\sqrt[3]{3\alpha} - \beta\right), \tag{1.54}$$

причем условие для ускорения не зависит от знака x_0/α. Для существования расстояний z, удовлетворяющих (1.54), правая часть этих выражений должна быть положительной. Это возможно, когда $\alpha > 0$ и $\beta < y_m(3\alpha)^{1/3}$, либо $\alpha < 0$ и $\beta > y_m(3\alpha)^{1/3}$, т. е.

$$\operatorname{sign}(\alpha)\,\beta < y_m\sqrt[3]{3\,|\alpha|}\,. \tag{1.55}$$

Если условие (1.55) выполняется, то ускорение наблюдается на расстояниях

$$z > z_1 = \frac{kx_0^2}{2\sqrt{3\alpha\left(y_m\sqrt[3]{3\alpha} - \beta\right)}}, \tag{1.56}$$

причем, в отличие от пучков Эйри первого типа, ускорение не постоянное, а убывающее пропорционально z^{-3}, начиная со значения

$$\left.\frac{d^2x}{dz^2}\right|_{z=z_1} = \begin{cases} -\dfrac{4\sqrt{3\alpha}}{k^2x_0^3}\left(y_m\sqrt[3]{3\alpha}-\beta\right)^{3/2}, & \alpha>0, \\ \dfrac{4\sqrt{-3\alpha}}{k^2x_0^3}\left(\beta-y_m\sqrt[3]{3\alpha}\right)^{3/2}, & \alpha<0. \end{cases} \tag{1.57}$$

Рассмотрим для примера следующие значения параметров: $\lambda = 532$ нм, $x_0 = \lambda$, $\alpha = -1$, $\beta = 10$, $m = 0$, $y_0 = -1{,}01879$. В этом случае условие (1.55) выполняется и траектория обладает ускорением при $z > z_1 \approx 330$ нм. График траектории при указанных параметрах изображен на рис. 1.1 *а*, а распределение интенсивности поля (1.49) при этих же параметрах — на рис. 1.1 *б*. Расчетная область на рис. 1.1 *б* имеет размеры $-10\lambda \leqslant x \leqslant +10\lambda$, $0 \leqslant z \leqslant 4\lambda$.

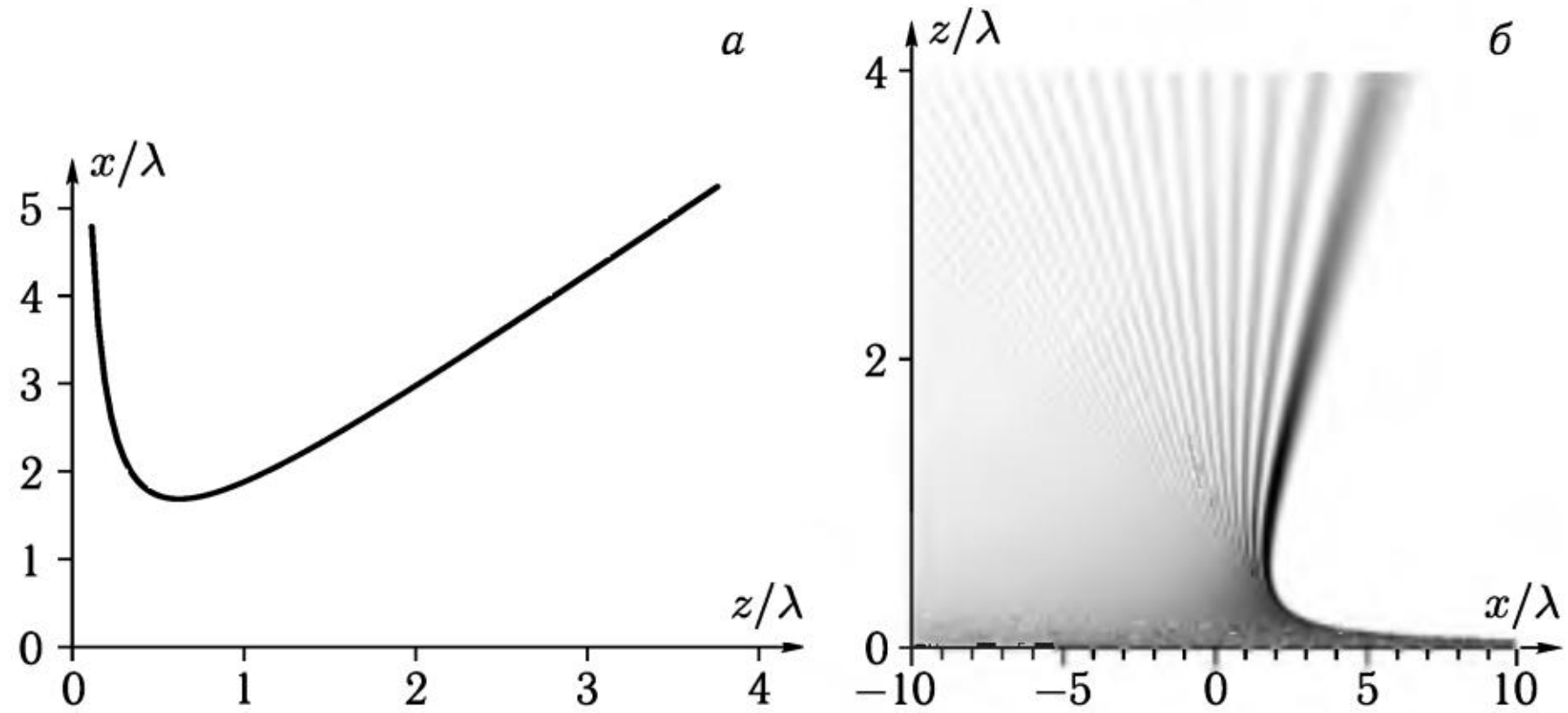


Рис. 1.1. Траектория ПЭ-2 с ускорением (*а*) и распределение интенсивности ПЭ-2 с ускорением в плоскости xz (*б*)

На рис. 1.2 показаны сечения интенсивности в плоскостях $z = \lambda/2$ (*а*), λ (*б*), 2λ (*в*), 3λ (*г*), 4λ (*д*).

Для сравнения рассмотрим пучок Эйри первого типа (1.6) при $a = 0$. Приравняем в (1.6) аргумент функции Эйри к значению, в котором она имеет локальные максимумы y_m и найдем явное уравнение траектории максимума ПЭ:

$$x = x_0 y_m + \frac{z^2}{4k^2x_0^3}. \tag{1.58}$$

Из (1.58) видно, что пучок ПЭ обладает постоянным ускорением, равным $1/(2k^2x_0^3)$. Из (1.58) также видно, что ПЭ (1.6) — нерасходящийся (бездифракционный), так как $x_1 - x_2 = x_0(y_m - y_n)$ не зависит от z, а для ПЭ-2 из (1.51) следует, что $x_1 - x_2 = (3\alpha)^{1/3}z(y_m - y_n)\times$ $\times\,(kx_0)^{-1}$ и пучок линейно расходится с ростом z.

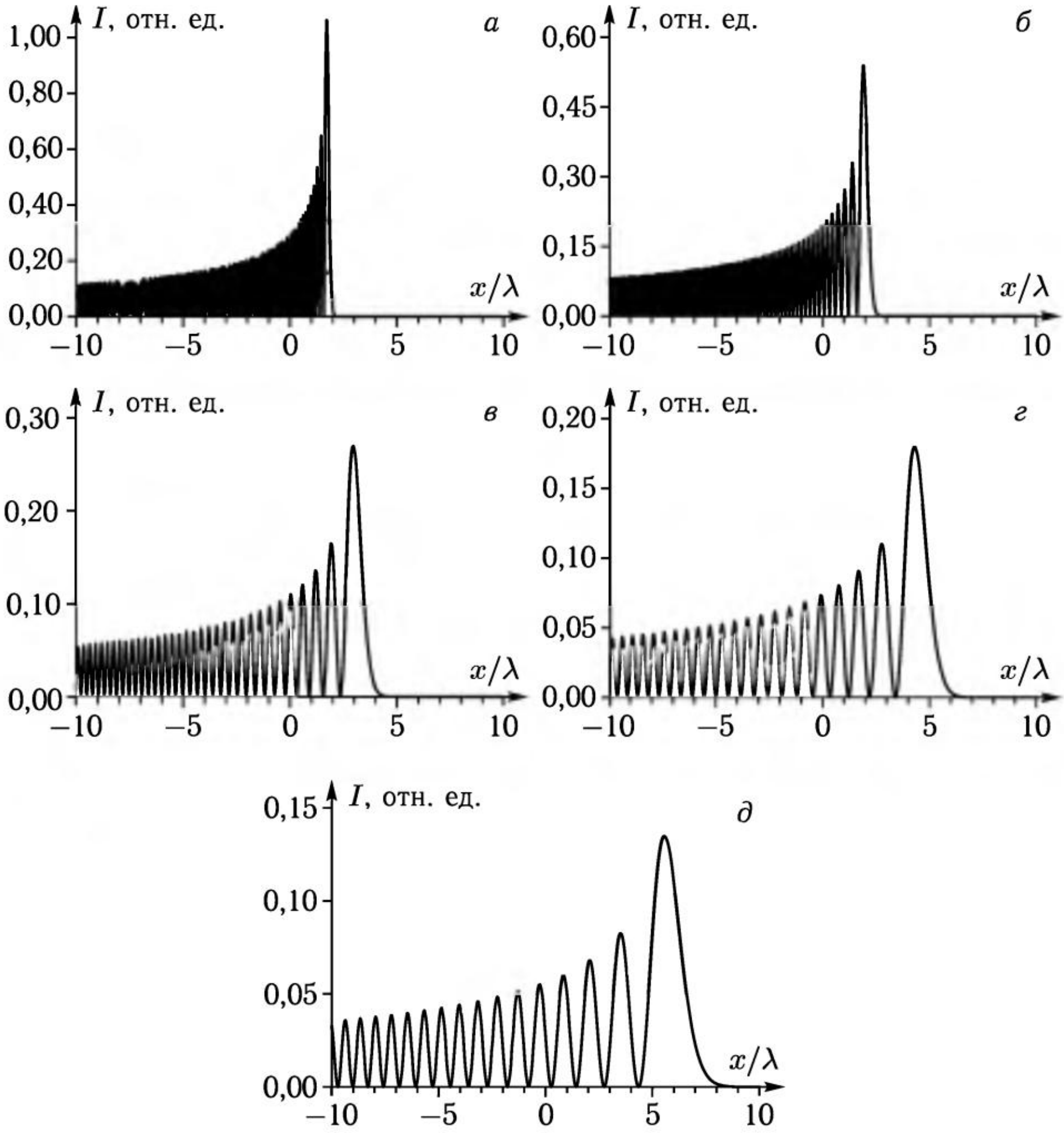


Рис. 1.2. Сечения интенсивности пучка ПЭ-2 в плоскостях $z = \lambda/2$ (*а*), λ (*б*), 2λ (*в*), 3λ (*г*), 4λ (*д*)

На рис. 1.3 показано распределение интенсивности поля (1.6) при следующих параметрах — $\lambda = 532$ нм, $x_0 = \lambda/2$. Расчетная область на рис. 1.3 имеет те же размеры $-10\lambda \leqslant x \leqslant +10\lambda$, $0 \leqslant z \leqslant 4\lambda$. Согласно (1.58), ускорение для такого пучка равно $1/(\pi^2\lambda)$, тогда как, согласно (1.57), для пучка ПЭ-2, показанного на рис. 1.1 *б*, при $z = z_1 \approx$ ≈ 330 нм (z_1 получено из (1.56)) оно равно примерно $19{,}87/(\pi^2\lambda)$. Этим и определяется более изогнутая форма траекторий на рис. 1.1 *б*.

В разделе получены следующие результаты. Приведен достаточно подробный обзор научных работ по ускоряющимся лазерным пучкам, в том числе и пучкам Эйри; обзор сделан с целью доказать, что световые пучки, порожденные кубической фазовой маской в зоне Френеля, до сих пор рассмотрены не были. Получен явный вид комплексной

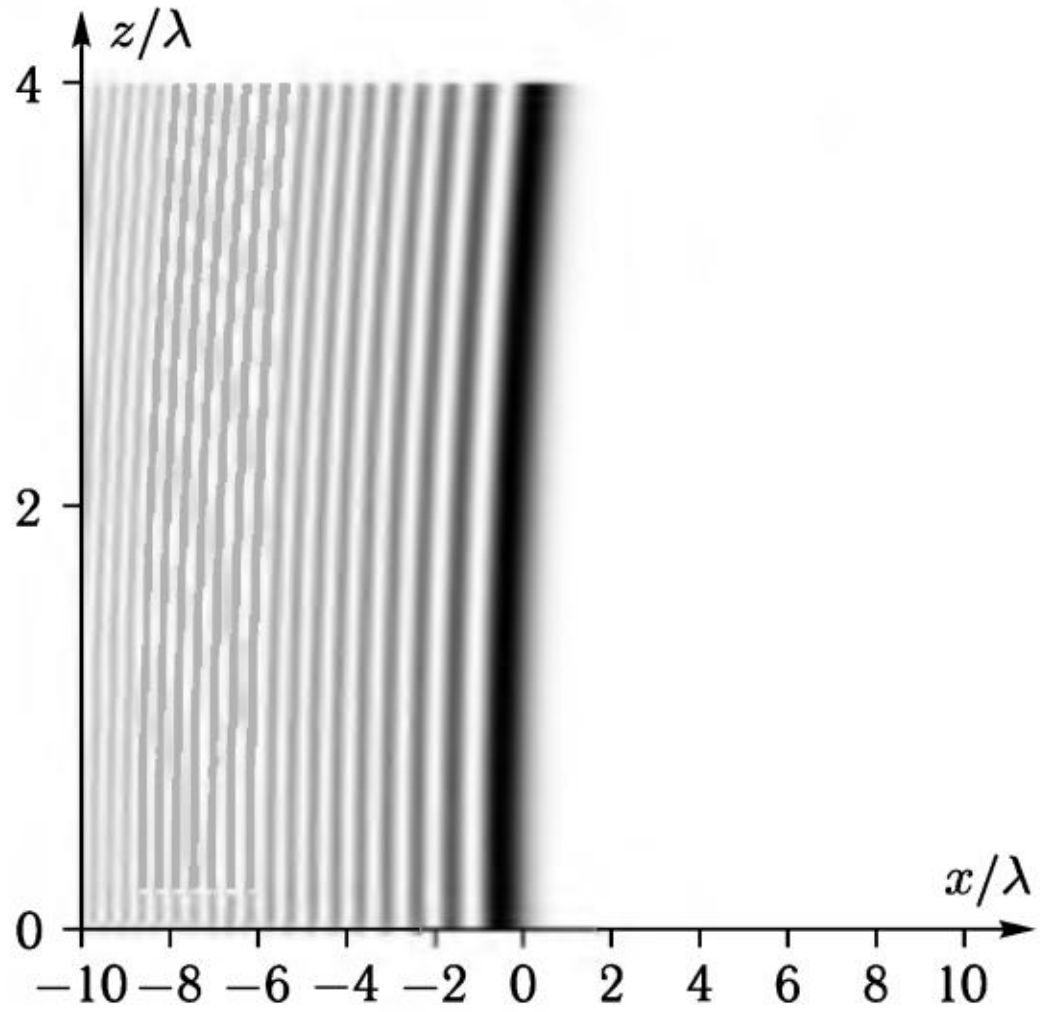


Рис. 1.3. Распределение интенсивности ПЭ-1 (с постоянным ускорением) в плоскости xz

амплитуды, описывающий дифракцию Френеля гауссова пучка на фазовой маске с кубической зависимостью фазы от поперечной координаты (уравнение (1.48)). Рассмотрены одномерные пучки Эйри второго рода с конечной энергией (уравнение (1.48)) и с бесконечной энергией (уравнение (1.49)), которые распространяются с ускорением на участке гиперболической траектории (уравнение (1.57)). Показано, что пучки Эйри второго рода имеют неоднородное «ускорение», которое быстро затухает (пропорционально кубу расстояния) и пучок продолжает распространяться по прямолинейной траектории (рис. 1.1). Показано также, что пучки Эйри второго рода в ближней зоне (несколько длин волн от кубической фазовой маски) имеют «ускорение» на порядок большее (при прочих равных параметрах), чем обычные пучки Эйри, распространяющиеся по параболической траектории. Пучки Эйри второго рода с бесконечной энергией при распространении расходятся (центральный максимум интенсивности уширяется) линейно с расстоянием от начальной плоскости.

1.2. Расстояние бездифракционного распространения пучка Эйри

Как известно, пучки Эйри [7, 18] обладают бесконечной энергией, и поэтому при распространении по параболе сохраняют свою интенсивность, то есть распространяются бездифракционно. Но на практике приходится либо ограничивать пучок Эйри в начальной плоскости конечной апертурой [51], либо аподизировать его экспоненциальной [7] или гауссовой функцией [52]. При этом пучок Эйри на начальном

участке своей траектории сохраняет свои замечательные свойства (бездифракционность, распространение по параболе и самовосстановление при искажении) до определенного расстояния, а затем начинает расходиться, и амплитуда в главном максимуме начинает убывать до нуля. В работе [51] было показано, что пучок Эйри, ограниченный по апертуре, значительно меньше подвержен дифракции, чем пучок Эйри, усеченный функцией Гаусса либо экспоненциально. Целью данного раздела является получение формулы для определения максимального расстояния по оптической оси (начиная от начальной плоскости), на котором ограниченный по апертуре пучок Эйри сохраняет свойство инвариантности.

1.2.1. Получение расстояния инвариантности из уравнения траектории. Пучок Эйри описывается комплексной амплитудой [7, 18]:

$$E\left(s,\xi\right)=\mathrm{Ai}\left(s-\frac{\xi^2}{4}\right)\exp\left[i\left(-\frac{\xi^3}{12}+\frac{s\xi}{2}\right)\right], \tag{1.59}$$

где $s=x/x_0$ — безразмерная поперечная координата вдоль оси x, x_0 — масштаб функции Эйри $\mathrm{Ai}(x)$, $\xi=z/\left(kx_0^2\right)$ — безразмерная продольная координата вдоль оптической оси z, $k=2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ. Пучок (1.58) распространяется по параболической траектории, которая описывается уравнением:

$$\Delta x=\frac{z^2}{4k^2x_0^3}, \tag{1.60}$$

где Δx — поперечное смещение точки пучка Эйри, которая была в начале координат ($x=z=0$). Из (1.60) следует, что точка пучка Эйри, которая при $z=0$ имела координату $x=-\Delta x$, при другом значении z из уравнения (1.60) будет иметь координату $x=0$. То есть, если мы будем считать $\Delta x=R$ модулем координаты края диафрагмы (далее эту величину будем называть радиусом диафрагмы), ограничивающей на отрицательной части оси пучок Эйри

$$E(x,z=0)=\begin{cases}\mathrm{Ai}\left(x/x_0\right), & x\geqslant -R,\\ 0, & x<-R,\end{cases} \tag{1.61}$$

то из (1.60) найдем выражение для расстояния z_1, за которое точка с координатами ($x=-R$, $z=0$) (край диафрагмы) сместится в точку с координатами ($x=0$, $z=z_1$) (оптическая ось):

$$z_1=2kx_0^{3/2}\sqrt{R}\,. \tag{1.62}$$

При выводе (1.62) мы неявно предполагали, что луч, вышедший из начальной точки с координатами ($x=-R$, $z=0$) пересечется с параболической траекторией главного максимума пучка Эйри в точке с координатами ($x=R,z$). Далее мы докажем эту гипотезу и покажем, что это расстояние z_1 и есть расстояние инвариантности пучка Эйри.

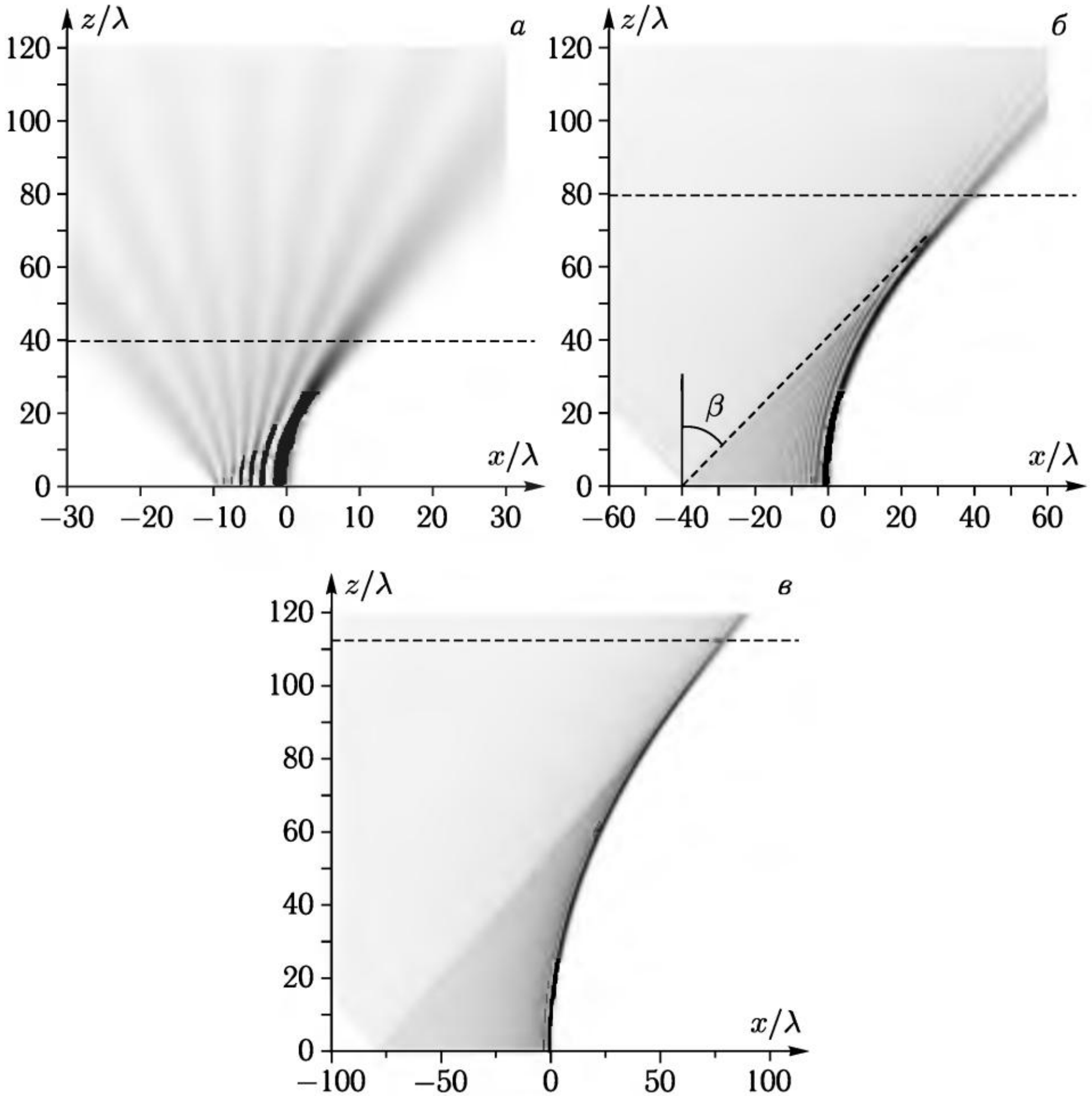


Рис. 1.4. Интенсивность в плоскости Oxz для радиусов диафрагм $R = 10\lambda$ (*а*), $R = 40\lambda$ (*б*) и $R = 80\lambda$ (*в*). Горизонтальной прерывистой линией показана длина инвариантности пучка Эйри, вычисленная по формуле (1.62)

На рис. 1.4 показано распределение интенсивности в плоскости Oxz для разных значений радиуса диафрагмы. Из рис. 1.4 видно, что траектория главного максимума образует каустику, причем луч, выходящий из крайней точки диафрагмы ($x = -R$, $z = 0$), распространяется под углом β к оптической оси и является касательным к каустике (рис. 1.4 *б*). Найдем угол β, предполагая, что $R > 0$. Очевидно, траектория главного максимума, описываемая формулой (1.60), и прямая, соответствующая лучу, вышедшему из крайней точки диафрагмы под углом β, должны пересекаться ровно в одной точке. Поэтому дискриминант квадратного уравнения

$$\frac{z^2}{4k^2x_0^3} = -R + z\,\mathrm{tg}\,\beta \tag{1.63}$$

должен быть равен нулю:

$$D = \operatorname{tg}^2\beta - 4\,\frac{1}{4k^2x_0^3}R = 0, \tag{1.64}$$

т. е. $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{R}\Big/\left(kx_0^{3/2}\right)$. Само расстояние при этом равно корню данного квадратного уравнения:

$$z_{\max} = \frac{tg\beta}{2\Big/\left(4k^2x_0^3\right)} = 2kx_0^{3/2}\sqrt{R}\,, \tag{1.65}$$

т. е. получилось расстояние, совпадающее с (1.62).

Бездифракционный пучок Эйри является двумерным. В трехмерном случае бездифракционным пучком является пучок Бесселя, который на практике также сохраняет свою инвариантность на некотором расстоянии, зависящем от радиуса круглой дифрагмы R. Сравним выражение (1.62) с аналогичным выражением [1] для ограниченного пучка Бесселя $J_0(kr\sin\theta)$:

$$z_{\max} = \frac{R}{\operatorname{tg}\theta}, \tag{1.66}$$

где r — радиальная координата, θ — угол наклона конической волны, формирующей пучок Бесселя, $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Из (1.66) видно, что длина инвариантности для ограниченного пучка Бесселя пропорциональна радиусу апертуры R, а аналогичная длина инвариантности пучка Эйри (1.62) пропорциональна корню квадратному из R. То есть при прочих равных условиях пучок Бесселя будет оставаться бездифракционным на большем участке траектории, чем пучок Эйри.

1.2.2. Получение расстояния инвариантности из асимптотики фазы пучка Эйри. Функция Эйри из (1.58) при больших (по модулю) отрицательных значениях аргумента $s \ll -1$ имеет асимптотику (выражение 10.4.60 в [53]), из которой следует, что

$$\operatorname{Ai}(-s) \approx \frac{s^{-1/4}}{2i\sqrt{\pi}}\left[\exp\left(i\,\frac{2}{3}\,s^{3/2} + \frac{i\pi}{4}\right) - \exp\left(-i\,\frac{2}{3}\,s^{3/2} - \frac{i\pi}{4}\right)\right]. \tag{1.67}$$

Поле с комплексной амплитудой (1.67) представляет собой суперпозицию двух полей с противоположными фазами. Фаза второго поля равна

$$\varphi(s) = -\frac{2}{3}\,s^{3/2}. \tag{1.68}$$

Асимптотика (1.68) была использована в [41] для формирования пучка Эйри с помощью жидко-кристаллического модулятора света. Используем выражение (1.68), чтобы получить формулу для расчета расстояния инвариантности ограниченного пучка Эйри. Световой луч, приходящий с начальной плоскости из точки с координатами ($x = sx_0$,

$z = 0$) в точку траектории пучка Эйри с координатами $(\Delta x, z)$ определяется производной фазы (1.68)

$$\frac{1}{k}\frac{d}{dx}\varphi(s) = -\frac{x^{1/2}}{kx_0^{3/2}}, \tag{1.69}$$

Производная фазы (1.69) равна тангенсу угла наклона φ луча к оси z:

$$\left|\frac{1}{k}\frac{d}{dx}\,\varphi(s)\right| = \operatorname{tg}\varphi. \tag{1.70}$$

С другой стороны тангенс (1.70) равен отношению суммы расстояния от начала координат до точки начала луча $x = sx_0$ и смещению Δx (1.60) к расстоянию z до точки наблюдения на траектории пучка Эйри:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x + \Delta x}{z}, \tag{1.71}$$

Приравнивая правые части (1.69) и (1.71), получим:

$$z = 2kx_0^{3/2}\sqrt{x}\,. \tag{1.72}$$

Пусть расстояние x равно модулю координаты конца диафрагмы, ограничивающей в начальной плоскости пучок Эйри $x = R$, тогда получим формулу для расстояния инвариантности ограниченного пучка Эйри:

$$z_2 = 2kx_0^{3/2}\sqrt{R}\,. \tag{1.73}$$

Первое слагаемое в (1.67) соответствует полю, лучи которого направлены в противоположную сторону (симметрично относительно оптической оси). Эти лучи пересекаются только в области отрицательных значений z, т. е. образуют мнимую каустику, поэтому вклад от данного поля не влияет на расстояние инвариантности ограниченного пучка Эйри.

Сравнивая (1.62) и (1.73), заключаем, что оба выражения, полученные разными способами, для длины инвариантности ограниченного с одной стороны пучка Эйри равны $z_1 = z_2$. В [54] исследован вопрос соответствия лучей, выходящих из начальной плоскости пучка Эйри, точкам параболической траектории главного максимума. Но выражения, типа (1.62) или (1.73) в [54] не были получены.

1.2.3. Результаты моделирования. На рис. 1.5 показаны зависимости максимальной интенсивности ограниченного пучка Эйри (1.66) от пройденного расстояния z для различных значений радиуса диафрагмы R: 10λ (*а*), 40λ (*б*), 80λ (*в*).

Определим длину ограниченного пучка Эйри как расстояние, на котором максимальная интенсивность спадает до некоторого уровня. Чтобы определить этот уровень, рассмотрим по аналогии ограниченный пучок Бесселя с комплексной амплитудой в начальной плоскости $J_0(r/r_0)\,\mathrm{circ}(r/R)$ (r — радиальная полярная координата, $\mathrm{circ}(x)$ — функция круга, равна единице при $x \leqslant 1$ и равная нулю при $x > 1$).

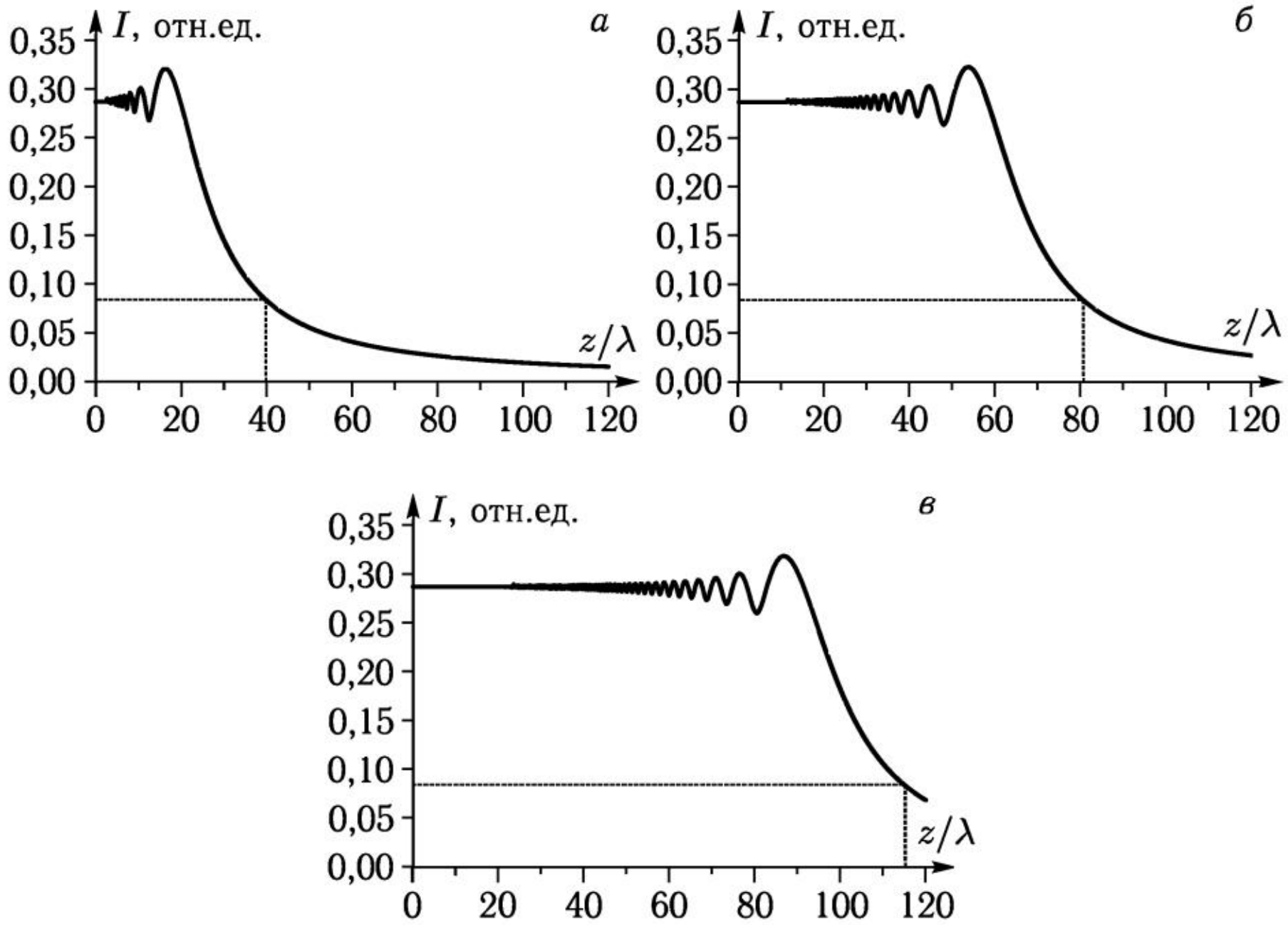


Рис. 1.5. Зависимости максимальной интенсивности ограниченного пучка Эйри (1.61) от пройденного расстояния z для различных значений радиуса диафрагмы R: 10λ (*а*), 40λ (*б*), 80λ (*в*)

При $\lambda = 532$ нм, $R = 10\lambda$ и $r_0 = \lambda$ длина пучка Бесселя согласно формуле (1.66) равна $z_{\max} = R[(kr_0)^2 - 1]^{1/2} \approx 33$ мкм. Численное моделирование показало, что на этом расстоянии осевая интенсивность Бесселева пучка составляет 16 % от начальной интенсивности (рис. 1.6).

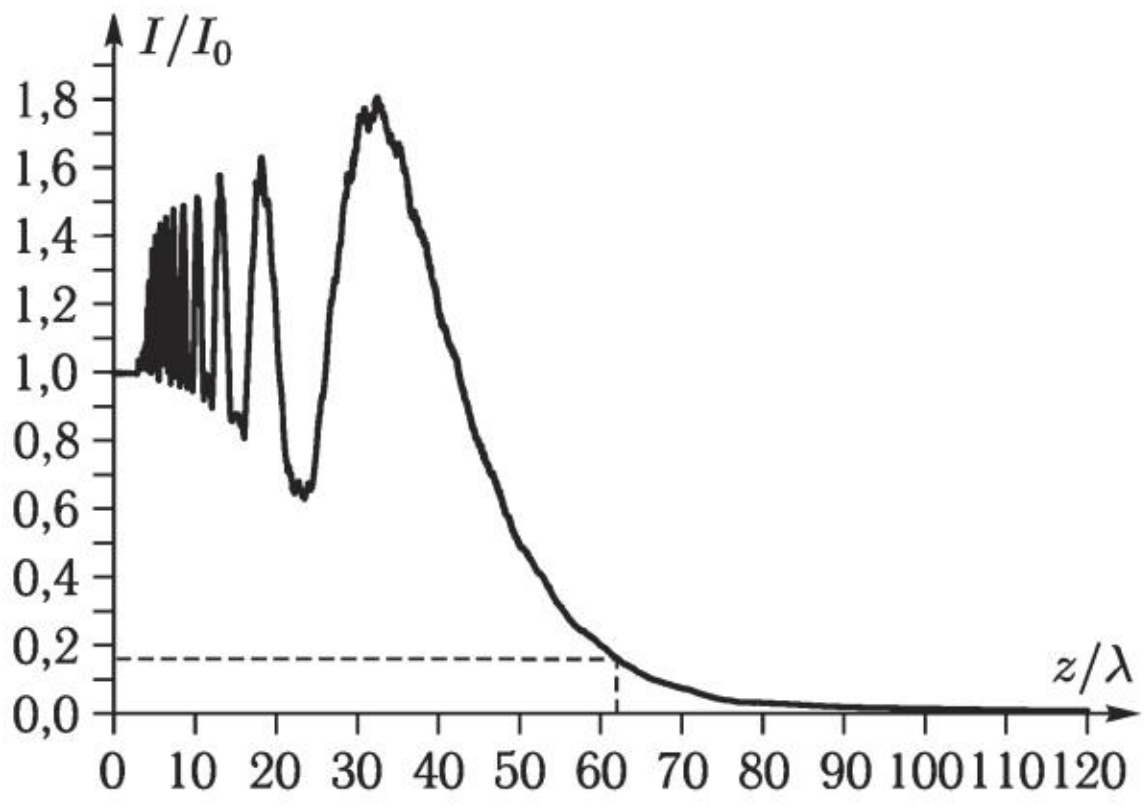


Рис. 1.6. Зависимость максимальной (осевой) интенсивности ограниченного пучка Бесселя от пройденного расстояния z ($R = 10\lambda$). Пунктирной линией обозначены расстояние $z_{\max} = 33$ мкм и интенсивность $I/I_0 = 0{,}16$

Из рис. 1.6 видно, что на расстоянии $z_{\max}$ зависимость осевой интенсивности от расстояния z не имеет никаких характерных особенностей. Так, например, она не является точкой максимума или минимума, а также не является точкой полуспада интенсивности от начального уровня. По аналогии, определим условно длину пучка Эйри так, чтобы для какого-либо определенного радиуса диафрагмы эта длина совпала с расчетным значением, вычисленным по формуле (1.62). Выберем этот радиус диафрагмы равным $R = 10\lambda$. Длина такого ограниченного пучка Эйри согласно (4) равна $z_{\max} \approx 39{,}7\lambda$. Интенсивность пучка на этом расстоянии, рассчитанная ВРМ-методом, составляет 29,3 % от начального уровня. Далее для всех других радиусов диафрагм определим длину пучка как расстояние, на котором интенсивность спадает до 29,3 % (рис. 1.5). На рис. 1.7 показана зависимость расстояния инвариантности ограниченного пучка Эйри от радиуса диафрагмы, вычисленная по формуле (4) и ВРМ-методом.

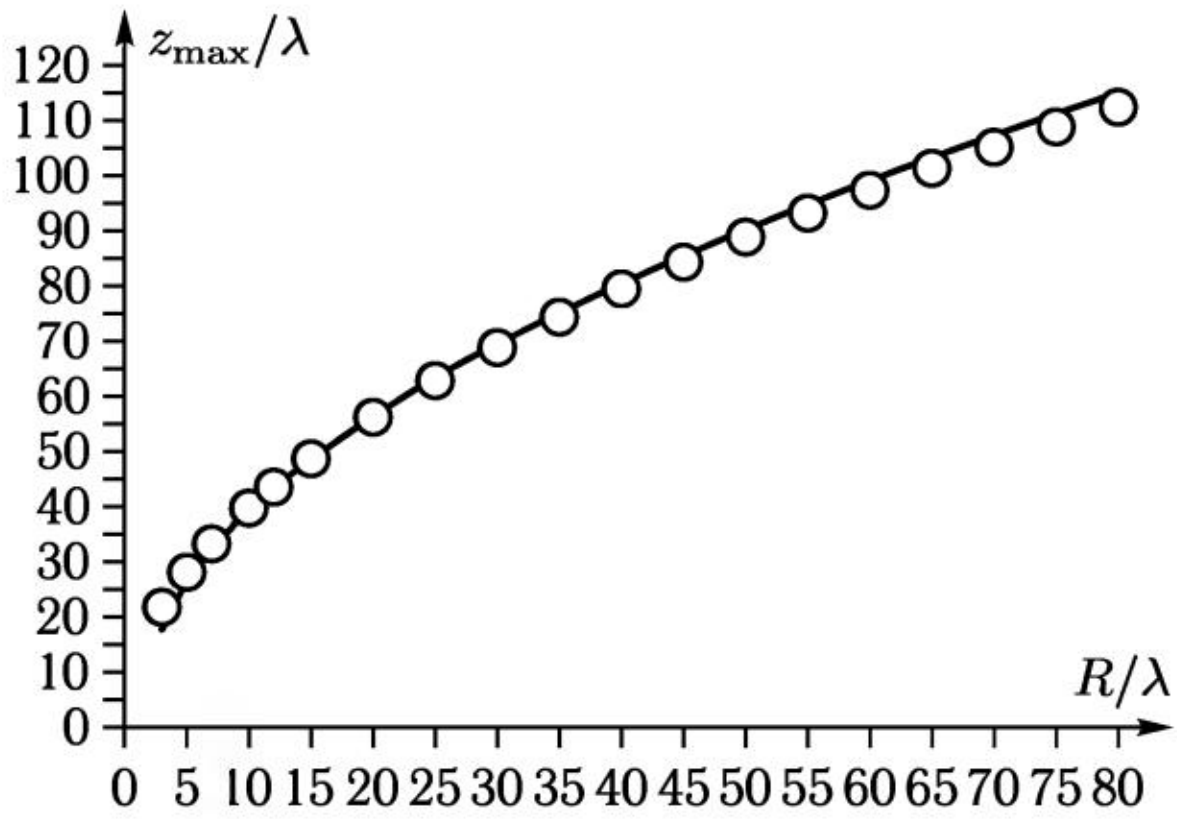


Рис. 1.7. Зависимость расстояния инвариантности ограниченного пучка Эйри от радиуса диафрагмы, вычисленная по формуле (1.62) (сплошная кривая) и ВРМ-методом (точечная кривая)

Моделирование показало, что при малом радиусе диафрагмы теоретическое и расчетное расстояния инвариантности существенно отличаются, однако при $R \geqslant 10\lambda$ ошибка составляет менее 5 %.

В данном разделе получено явное выражение, определяющее расстояние инвариантности ограниченного пучка Эйри, т. е. расстояние, на котором пучок Эйри, ограниченный в начальной плоскости со стороны медленного убывания амплитуды, распространяется по параболической траектории без изменения амплитуды (почти без дифракции). Это расстояние получено двумя способами — из уравнения траектории и из распределения фазы пучка Эйри. В отличие от аналогичного расстояния для бездифракционного пучка Бесселя, пропорционального радиусу ограничивающей пучок круглой диафрагмы, расстояние инвариантности для пучка Эйри пропорционально корню квадратному

от координаты края (по абсолютной величине) ограничивающей диафрагмы. Для пучка Бесселя это расстояние не зависит от длины волны света, в то время как для пучка Эйри оно обратно пропорционально длине волны. При прочих равных условиях расстояние инвариантности для пучка Эйри больше, чем для пучка Бесселя.

1.3. Преобразование замедляющихся пучков в ускоряющиеся

Недавно [55] рассмотрены непараксиальные сохраняющие свою форму ускоряющиеся пучки Вебера, которые распространяются вдоль параболической траектории. Эти пучки Вебера похожи на пучки «половины Бесселя» [44], но в отличие от последних описываются аналитическим выражением. Пучки Вебера–Эрмита также известны как решения параксиального уравнения распространения [56]. В [57] рассматривается общая теория 3D непараксиальных ускоряющихся пучков на основе известных решений уравнения Гельмгольца в параболических, вытянутых и сплюснутых сфероидальных координатах. Эти пучки распространяются по дуге окружности. В [50] предложены пучки Эйри, распространяющиеся с неоднородным ускорением по гиперболической траектории. Хотя эти пучки не сохраняют свою форму (расходятся при распространении), они могут иметь более изогнутую траекторию на конечном ее участке, чем обычные пучки Эйри [7].

В этом разделе рассмотрен другой подход к формированию ускоряющихся пучков. Он заключается в следующем. Известны параксиальные 2D световые поля, у которых аргумент функции комплексной амплитуды зависит от переменных как x^2/z, где x — поперечная координата, а z — продольная координата. Это, например, световое поле, которое формируется при дифракции плоской волны на угловой фазовой ступеньке [58]. Или хорошо известное решение задачи дифракции на краю непрозрачного экрана [59].

В этом разделе мы рассмотрим и другие решения параксиального уравнения распространения. Световые поля, комплексная амплитуда которых имеет аргумент вида x^2/z, распространяются по траектории корневой параболы $x = z^{1/2}$. Такие пучки являются замедляющимися, так как «ускорение» (вторая производная вдоль траектории) $x'' = -z^{3/2}$ имеет противоположный знак со скоростью (первой производной вдоль траектории) $x' = z^{-1/2}$. Если же амплитуду такого светового поля на расстоянии z_0 заменить на комплексно сопряженную и сдвинуть начало оптической оси в точку z_0, то световое поле с такой амплитудой будет распространяться с ускорением по траектории $x = (z_0 - z)^{1/2}$. В этой работе приводятся аналитические выражения для комплексных амплитуд таких ускоряющихся пучков. Кроме того, приводятся параксиальные пучки «половины Бесселя», которые отличаются от непараксиальных [44].

1.3.1. Ускоряющиеся пучки. Пусть для каждого фиксированного пройденного расстояния z координата максимума интенсивности некоторого лазерного пучка имеет вид $x_{\max}(z)$. Чтобы траектория пучка обладала ускорением на некотором участке, необходимо, чтобы первая и вторая производные координаты максимума $x_{\max}$ по пройденному расстоянию z имели один знак [50]:

$$\left(\frac{dx_{\max}}{dz}\right)\left(\frac{d^2x_{\max}}{dz^2}\right) > 0. \tag{1.74}$$

Наиболее широко известными ускоряющимися пучками являются пучки Эйри, комплексная амплитуда которых имеет вид [7]:

$$E(x,z) = \mathrm{Ai}\left(s - \frac{\xi^2}{4}\right)\exp\left(\frac{is\xi}{2} - \frac{i\xi^3}{12}\right), \tag{1.75}$$

где (x,z) — декартовы координаты, $s = x/x_0$, $\xi = z/\left(kx_0^2\right)$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, x_0 — произвольный масштабирующий множитель, $\mathrm{Ai}(x)$ — функция Эйри [53, разд. 10.4]. Координаты максимумов интенсивности таких пучков имеют вид:

$$x_{\max} = x_0 y_m + \frac{z^2}{4k^2x_0^3}, \tag{1.76}$$

где y_m — точка m-го максимума функции $[\mathrm{Ai}(x)]^2$. Тогда

$$\frac{dx_{\max}}{dz} = \frac{z}{2k^2x_0^3} \quad \text{и} \quad \frac{d^2x_{\max}}{dz^2} = \frac{1}{2k^2x_0^3}.$$

То есть условие (1.74) выполняется для любых расстояний $z > 0$, причем ускорение $d^2x_{\max}/dz^2$ имеет постоянную величину. Ниже рассмотрим лазерные пучки, также обладающие ускорением, но которое не является постоянным и уменьшается при распространении пучка.

Пучки Эйри с гиперболической траекторией. В работе [50] рассмотрены пучки Эйри с гиперболической траекторией, которые в начальной плоскости $z = 0$ имеют комплексную амплитуду

$$E(x,0) = \exp\left[i\alpha\left(\frac{x}{x_0}\right)^3 + i\beta\left(\frac{x}{x_0}\right)\right], \tag{1.77}$$

где x_0 — масштабирующий множитель, а α и β — безразмерные параметры. Траектория такого пучка в зоне дифракции Френеля имеет вид:

$$x_{\max} = \frac{\left(\beta - y_m\sqrt[3]{3\alpha}\right)z}{kx_0} - \frac{kx_0^3}{12\alpha z}. \tag{1.78}$$

Используя условие (1.74), в работе [50] было показано, что ускорение возникает на участке

$$z > z_1 = \frac{kx_0^2}{2\sqrt{3\alpha\left(y_m\sqrt[3]{3\alpha} - \beta\right)}}, \tag{1.79}$$

причем только в случае, когда $\operatorname{sign}(\alpha)\beta < y_m (3|\alpha|)^{1/3}$. Ускорение такого пучка спадает пропорционально z^{-3}:

$$\frac{d^2 x_{\max}}{dz^2} = -\frac{k x_0^3}{6\alpha z^3}.$$

Пучки Эрмита–Гаусса. Широко известные пучки Эрмита–Гаусса [60], оказывается, также обладают ускорением. Действительно, пусть в начальной плоскости $z = 0$ световое поле имеет комплексную амплитуду

$$E(x, z = 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) H_n\left(\frac{x}{a}\right), \tag{1.80}$$

где (x, z) — декартовы координаты, w — радиус перетяжки Гауссова пучка, n и a — порядок и масштаб полинома Эрмита. Тогда, применив преобразование Френеля, можно показать, что на расстоянии z от начальной плоскости сформируется поле со следующим распределением комплексной амплитуды [61]:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{-ik}{2pz}} \exp\left[-\frac{k}{2z}\left(\frac{k}{2zp} - i\right)x^2\right]\left(1 - \frac{1}{pa^2}\right)^{n/2} \times$$
$$\times H_n\left[\frac{-ikx}{2z\sqrt{(pa)^2 - p}}\right], \tag{1.81}$$

где $p = 1/w^2 - ik/(2z)$.

Рассмотрим для простоты случай, когда $n = 1$. Тогда интенсивность пучка (1.81) в плоскости, находящейся на расстоянии z от начальной, равна:

$$I(x, z) = |E(x, z)|^2 = \frac{k^3 x^2}{2a^2 |p|^3 z^3} \exp\left(-\frac{k^2 \operatorname{Re} p}{2z^2 |p|^2} x^2\right). \tag{1.82}$$

Продифференцировав обе части (1.82) по переменной x, получим необходимое условие для экстремумов интенсивности:

$$2x = \frac{k^2 \operatorname{Re} p}{z^2 |p|^2} x^3. \tag{1.83}$$

Случай $x = 0$ соответствует минимуму (так как интенсивность $I(0, z)$ равна нулю), а координаты максимумов равны

$$x_{\max} = \pm\sqrt{\frac{z^2 + z_0^2}{k z_0}}, \tag{1.84}$$

где $z_0 = kw^2/2$– расстояние Рэлея.

Нетрудно показать, что кривая с максимальной интенсивностью является гиперболой. Получим производные $x_{\max}$ по z первого и второго порядков:

$$\frac{dx_{\max}}{dz} = \pm\frac{z}{\sqrt{kz_0}\sqrt{z^2+z_0^2}},$$
$$\frac{d^2x_{\max}}{dz^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{kz_0}}\frac{z_0^2}{\left(z^2+z_0^2\right)^{3/2}}. \tag{1.85}$$

Из (1.85) видно, что при всех $z > 0$ произведение $\dfrac{dx_{\max}}{dz}\dfrac{d^2x_{\max}}{dz^2}$ положительно, т. е. пучок Эрмита–Гаусса обладает ускорением, которое, подобно рассмотренным выше пучкам Эйри с гиперболической траекторией, кубически убывает с пройденным расстоянием z. Наличие ускорения у обеих ветвей пучка Эрмита–Гаусса первого порядка может быть заметно при малых расстояниях z. На рис. 1.8 показана интенсивность такого пучка в плоскости Oxz, рассчитанная методом распространения пучка (BPM). Два локальных максимума пучка Эрмита–Гаусса на рис. 1.8 распространяются симметрично относительно оптической оси по двум гиперболическим траекториям с ускорением.

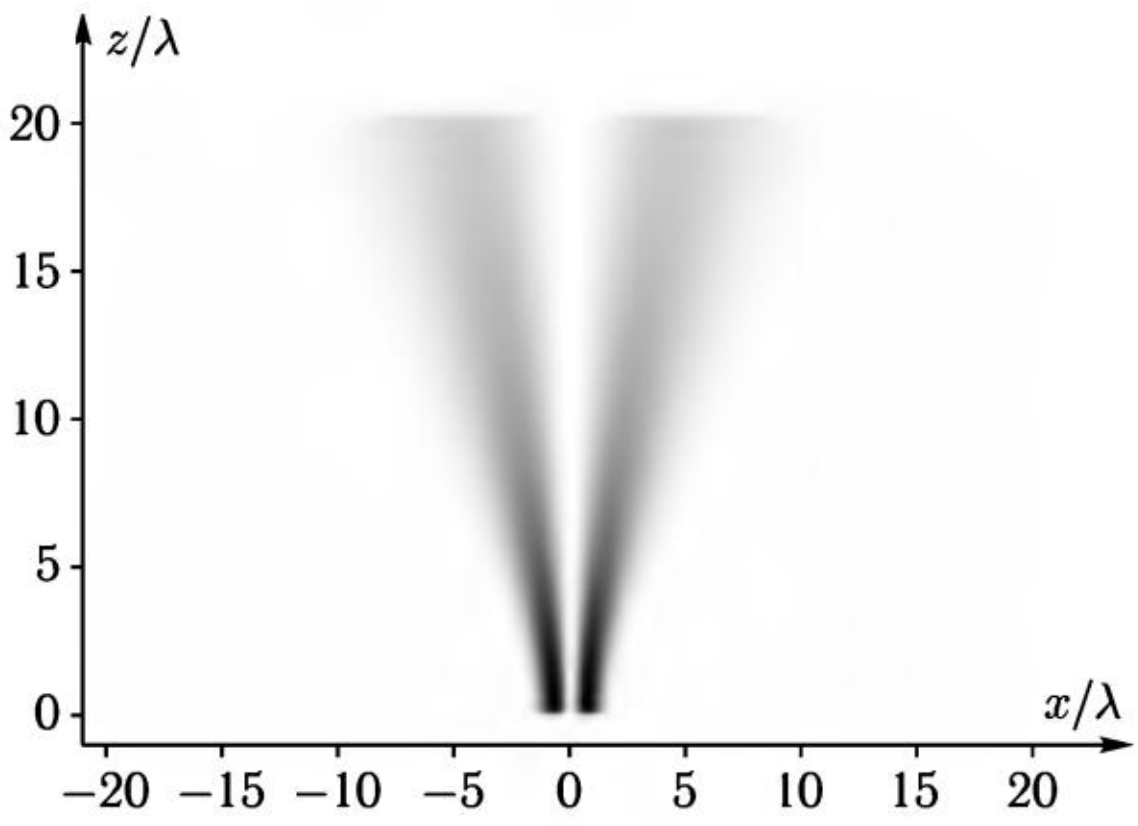


Рис. 1.8. Ускоряющийся пучок Эрмита–Гаусса ($\lambda = 532$ нм, $w = \lambda$, $a = 2\lambda$, $n = 1$)

Заметим, что с ростом номера n у пучка Эрмита–Гаусса (при $a = w/\sqrt{2}$) растет радиус (ширина) пучка и координата крайних нулей интенсивности (при разных расстояниях z) описывается оценкой сверху:

$$|x_{\max}^n| \leqslant \frac{w}{2}\sqrt{n\,(n-1)}\sqrt{1+\frac{z^2}{z_0^2}}, \tag{1.86}$$

из которой следует, с учетом (1.85), что величина ускорения пучка Эрмита–Гаусса с ростом номера n растет линейно при больших n.

Других параксиальных 2D ускоряющихся пучков, которые описываются аналитически, пока не известно. Поэтому в следующем разделе показано, как можно получить ускоряющиеся лазерные пучки из замедляющихся.

1.3.2. Замедляющиеся пучки. В отличие от рассмотренных выше ускоряющихся пучков (1.74), (1.76), (1.79), для замедляющихся пучков необходимо, чтобы первая и вторая производные координаты максимума интенсивности $x_{\max}$ по пройденному расстоянию z были разного знака:

$$\left(\frac{dx_{\max}}{dz}\right)\left(\frac{d^2x_{\max}}{dz^2}\right) < 0. \tag{1.87}$$

Рассмотрим примеры таких пучков.

Дифракция плоской волны на непрозрачном полубесконечном экране. Пусть плоская волна распространяется вдоль оптической оси z и при $z = 0$ проходит через полубесконечную плоскую апертуру, пропускающую свет в области $x < 0$ (x — координата в плоскости апертуры). Непосредственно за ней комплексная амплитуда будет равна:

$$E\left(x, z = 0\right) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.88}$$

После прохождения светом расстояния z его комплексная амплитуда будет определяться преобразованием Френеля от поля (1.88):

$$E\left(x, z\right) = \frac{1}{2}\left\{\left[1 - C\left(\xi\right) - S\left(\xi\right)\right] + i\left[C\left(\xi\right) - S\left(\xi\right)\right]\right\}, \tag{1.89}$$

где $\xi = \sqrt{2/(\lambda z)}\,x$, а $C\left(\xi\right)$ и $S\left(\xi\right)$ — интегралы Френеля:

$$C\left(\xi\right) = \int\limits_0^{\xi} \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt, \quad S\left(\xi\right) = \int\limits_0^{\xi} \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt. \tag{1.90}$$

Координаты максимумов интенсивности такого пучка $x_{\max}$ равны:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\,\xi_m, \tag{1.91}$$

где ξ_m — координата m-го максимума функции

$$I\left(\xi\right) = \left[1 - C\left(\xi\right) - S\left(\xi\right)\right]^2 + \left[C\left(\xi\right) - S\left(\xi\right)\right]^2.$$

Вычислим первую и вторую производные координаты максимума $x_{\max}$ по пройденному расстоянию z :

$$\begin{aligned} \frac{dx_{\max}}{dz} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2z}}\,\xi_m, \\ \frac{d^2x_{\max}}{dz^2} &= -\frac{1}{4z}\sqrt{\frac{\lambda}{2z}}\,\xi_m. \end{aligned} \tag{1.92}$$

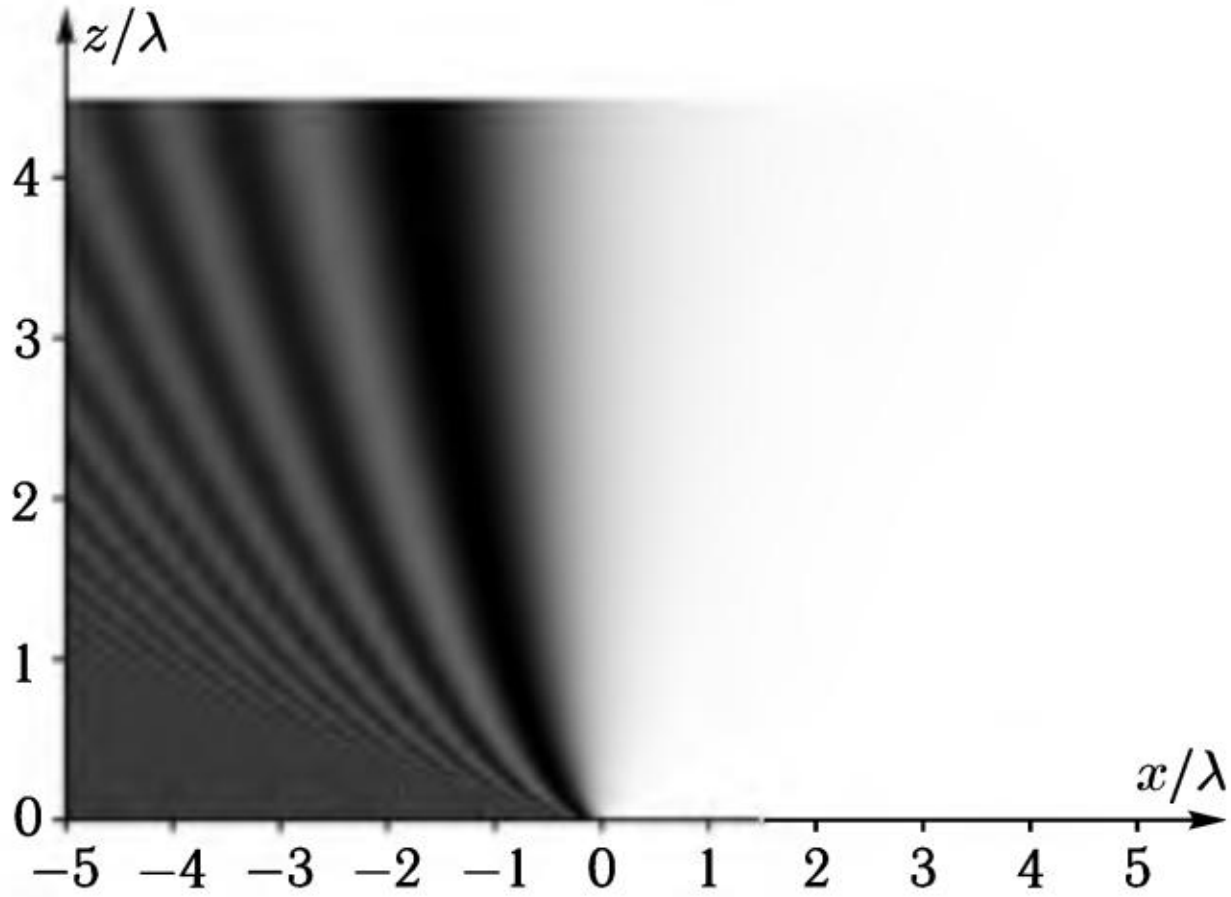


Рис. 1.9. Интенсивность в плоскости Oxz при дифракции плоской волны на полубесконечной апертуре ($\lambda = 532$ нм, $-5\lambda \leqslant x \leqslant 5\lambda$, $0{,}1\lambda \leqslant z \leqslant 5\lambda$)

Из (1.92) видно, что для всех $z > 0$ выполняется условие (1.87). Замедление каждого максимума видно на рис. 1.9, на котором показана интенсивность пучка (1.89).

Двумерные гипергеометрические пучки и пучки Бесселя. Подобно тому, как это сделано в [62], будем искать решение параксиального уравнения распространения

$$2ik\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0, \tag{1.93}$$

в виде $E(x,z) = x^p z^q F(sx^m z^n)$, где $F(x)$ — некоторая функция, s — масштабирующий множитель. Сведя полученное дифференциальное уравнение второго порядка к уравнению Куммера, получим следующее выражение для комплексной амплитуды 2D аналога 3D обобщенной гипергеометрической моды [63]:

$$E(x,z) = z^{-a}\,{}_1F_1\left(a, \frac{1}{2}, \frac{ikx^2}{2z}\right), \tag{1.94}$$

где a — произвольная постоянная. Известно, что производная любого решения уравнения (1.93) по любой декартовой координате также является решением уравнения (1.93). Поэтому можно рассмотреть световой пучок с амплитудой

$$E(x,z) = xz^{-a}\,{}_1F_1\left(a, \frac{3}{2}, \frac{ikx^2}{2z}\right). \tag{1.95}$$

В частном случае, при $a = 3/4$ из (1.95) следует решение уравнения (1.93) в виде пучка Бесселя дробного порядка:

$$E(x,z) = \sqrt{\frac{x}{z+z_0}}\,J_{1/4}\left[\frac{kx^2}{4(z+z_0)}\right]\exp\left[\frac{ikx^2}{4(z+z_0)}\right], \tag{1.96}$$

где z_0 — произвольная положительная постоянная (чтобы не возникало особенности в плоскости $z = 0$). При получении (1.96) было использовано тождество 13.6.1 из [53]. Координаты максимумов интенсивности такого пучка имеют вид:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{4\,(z + z_0)}{k} y_m}\,, \tag{1.97}$$

где y_m — m-й корень уравнения $J_{1/4}(y)\left[J_{1/4}(y) + 4J'_{1/4}(y)\,y\right] = 0$. Зависимость (1.97) подобна зависимости (1.91), т. е. $x_{\max}$ пропорционально $z^{1/2}$. Поэтому пучок (1.96) является замедляющимся, что видно

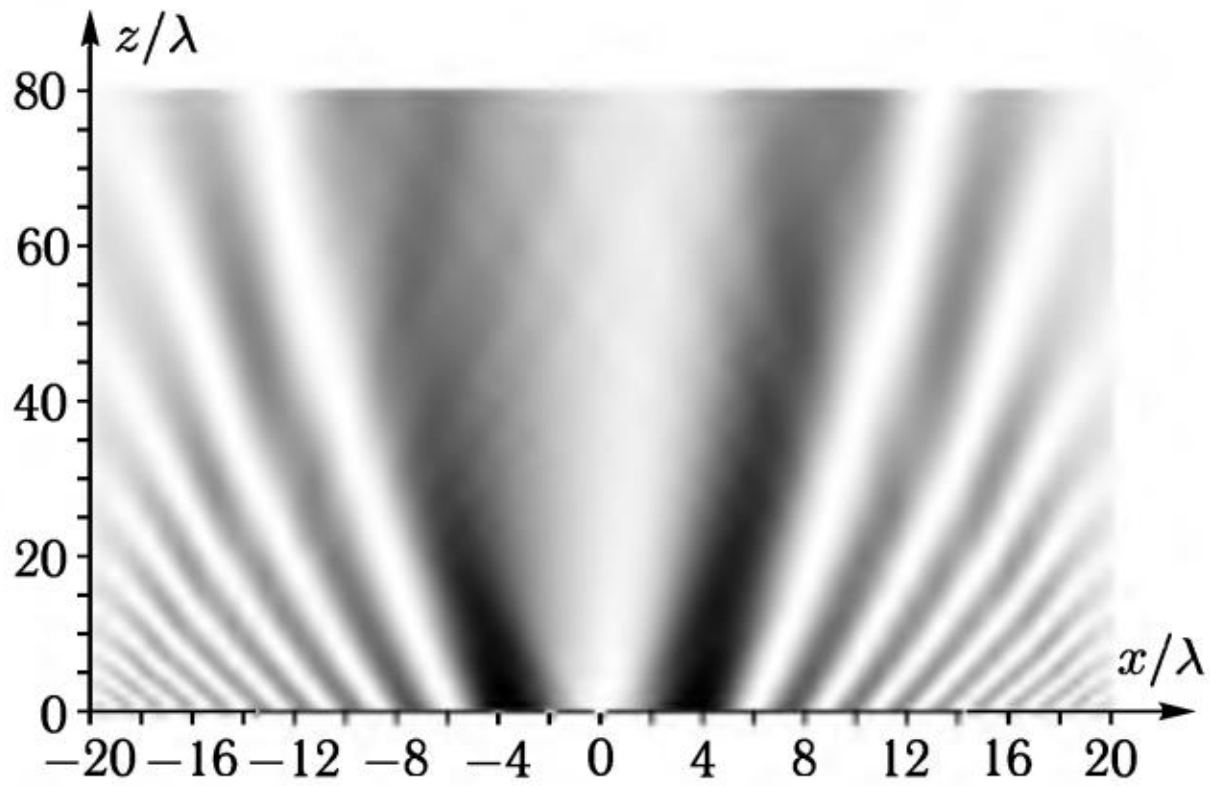


Рис. 1.10. Интенсивность в плоскости Oxz светового пучка (1.96)

из рис. 1.10, на котором показана интенсивность такого пучка, рассчитанная ВРМ-методом ($\lambda = 532$ нм, $z_0 = 20\lambda$, область моделирования $-20\lambda \leqslant x \leqslant 20\lambda$, $0 \leqslant z \leqslant 80\lambda$).

1.3.3. Замедляющиеся и ускоряющиеся пучки на разных участках траектории. Из (1.73) и (1.87) нетрудно заметить, что простая замена переменных $z \to z_0 - z$ приводит к смене ускорения на замедление и наоборот. В самом деле, рассмотрим световой пучок, комплексная амплитуда которого получается из (1.89) комплексным сопряжением и заменой ξ на $\xi = \sqrt{2/[\lambda\,(z_0 - z)]}\,x$:

$$E\,(x, z < z_0) = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} [1 - C\,(\xi) - S\,(\xi)] - \\ -\,i\,[C\,(\xi) - S\,(\xi)] \end{array}\right\}. \tag{1.98}$$

Световой пучок (1.98) будем называть пучком Френеля. Используя пределы

$$\lim_{x\to\infty} C\,(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} S\,(x) = \frac{1}{2}, \tag{1.99}$$

получим, что вблизи плоскости $z = z_0$ (вблизи фокальной плоскости), но при $z < z_0$, комплексная амплитуда имеет вид:

$$E\left(x, z \to z_0 - 0\right) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases} \tag{1.100}$$

Интенсивность светового пучка (1.98) в плоскости Oxz показана на рис. 1.11.

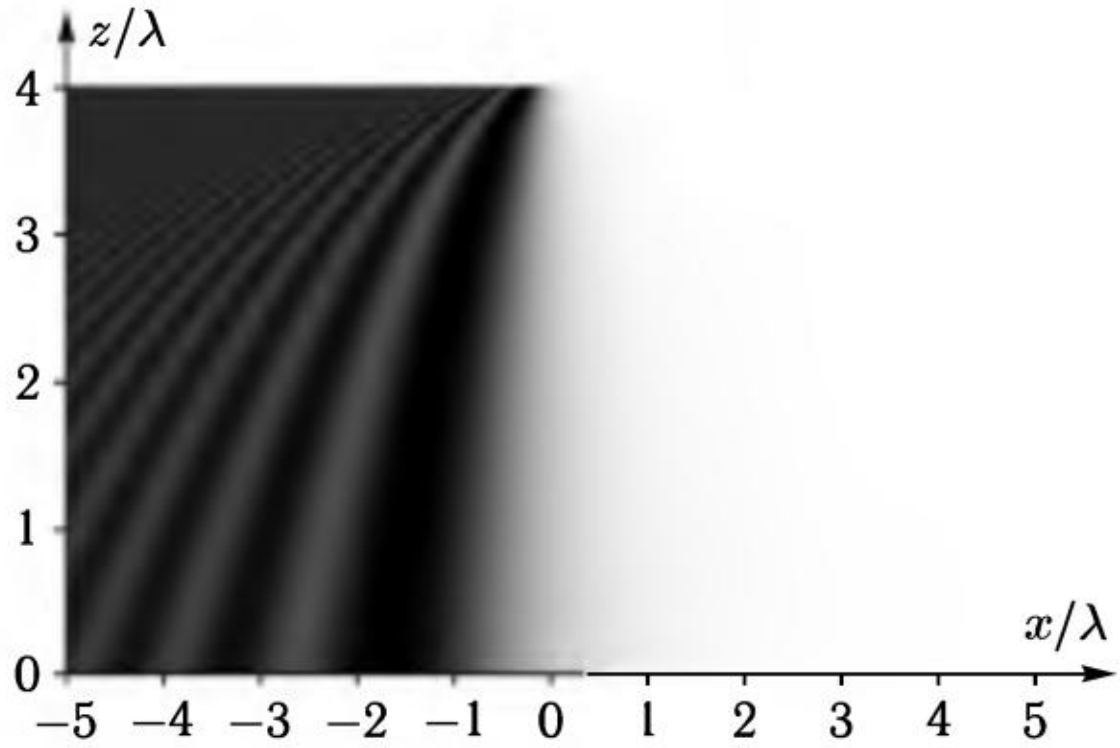


Рис. 1.11. Интенсивность светового пучка (1.98) в плоскости Oxz (длина волны $\lambda = 532$ нм, расстояние от $z = 0$ до фокальной плоскости равно $z_0 = 4{,}1\lambda$. Область моделирования: $-5\lambda \leqslant x \leqslant 5\lambda$, $0 \leqslant z \leqslant 4\lambda$)

Непосредственно за плоскостью $z = z_0$ аргументы ξ интегралов Френеля в (1.98) становятся мнимыми, так как $2/\left[\lambda\left(z_0 - z\right)\right] < 0$, причем мнимая часть может быть как положительной, так и отрицательной, поэтому возможны два решения, из которых лишь одно удовлетворяет граничному условию $E\left(x, z \to z_0 + 0\right) = E\left(x, z \to z_0 - 0\right)$. Используя тождества для интегралов Френеля от мнимых переменных $C\left(iz\right) = iC\left(z\right)$ и $S\left(iz\right) = -iS\left(z\right)$ [53, выражения 7.3.18], можно показать, что за плоскостью $z = z_0$ комплексная амплитуда имеет вид:

$$E\left(x, z > z_0\right) = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} \left[1 - C\left(\eta\right) - S\left(\eta\right)\right] + \\ + i\left[C\left(\eta\right) - S\left(\eta\right)\right] \end{array} \right\}, \tag{1.101}$$

где $\eta = \sqrt{2/\left[\lambda\left(z - z_0\right)\right]}\,x$. Второе решение, равное

$$E\left(x, z > z_0\right) = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} \left[1 + C\left(\eta\right) + S\left(\eta\right)\right] - \\ - i\left[C\left(\eta\right) - S\left(\eta\right)\right] \end{array} \right\}, \tag{1.102}$$

не удовлетворяет граничному условию.

Из сравнения (1.98) и (1.101) видно, что световой пучок при $z < z_0$ ускоряется, фокусируясь при $z = z_0$ в равномерное полубесконечное пятно, а амплитуда при $z > z_0$ является зеркальным отражением амплитуды при $z < z_0$, т. е. распространяется с замедлением. На рис. 1.12*а* показана интенсивность светового пучка (1.98), (1.101) в плоскости Oxz, а на рис. 1.12*б* показано сечение интенсивности

в плоскости $z = z_0$. Рисунок 1.12 получен путем расчета BPM-методом при $\lambda = 532$ нм, $z_0 = 4\lambda$, область моделирования $-20\lambda \leqslant x \leqslant 20\lambda$, $0 \leqslant z \leqslant 8\lambda$. Осцилляции интенсивности в окрестности $x = 0$ объясняются ограниченностью начального поля областью моделирования.

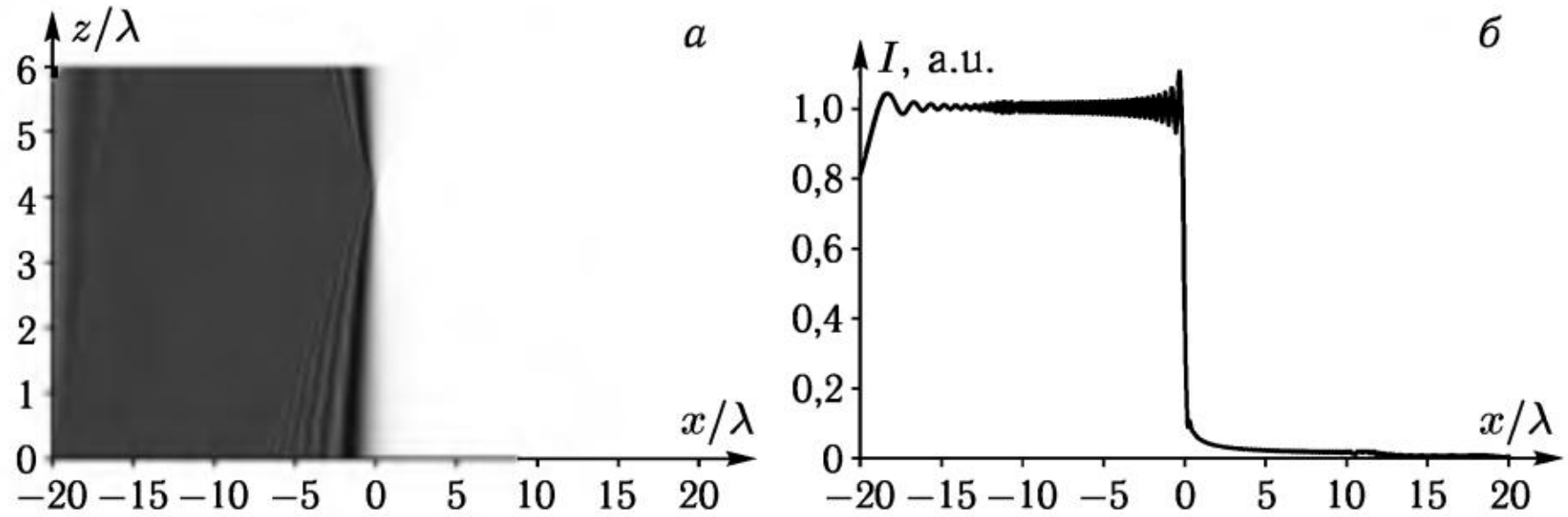


Рис. 1.12. Интенсивность светового пучка (1.98), (1.101), рассчитанная FDTD-методом: интенсивность в плоскости Oxz (*а*) и сечение интенсивности в плоскости $z = z_0$ (*б*)

Аналогично, заменив в (1.96) $z + z_0$ на $z_0 - z$ и применив комплексное сопряжение, получим световой пучок, комплексная амплитуда которого в начальной плоскости ($z = 0$) равна

$$E\,(x, z = 0) = \sqrt{\frac{x}{z_0}}\, J_{1/4}\left(\frac{kx^2}{4z_0}\right) \exp\left(-\frac{ikx^2}{4z_0}\right). \qquad (1.103)$$

Задав начальное поле (1.103), с помощью BPM-метода была рассчитана интенсивность в плоскости Oxz светового пучка (при $\lambda = 532$ нм, $z_0 = 4\lambda$), который, как видно из рис. 1.13, фокусируется с ускорением. Возникающая при этом асимметрия фокусного пятна объясняется наличием скачка фазы на $\pi/2$ у поля (1.103) в точке $x = 0$. Такая фокусировка с ускорением рассматривалась ранее в [64] для радиально-симметричного пучка Эйри.

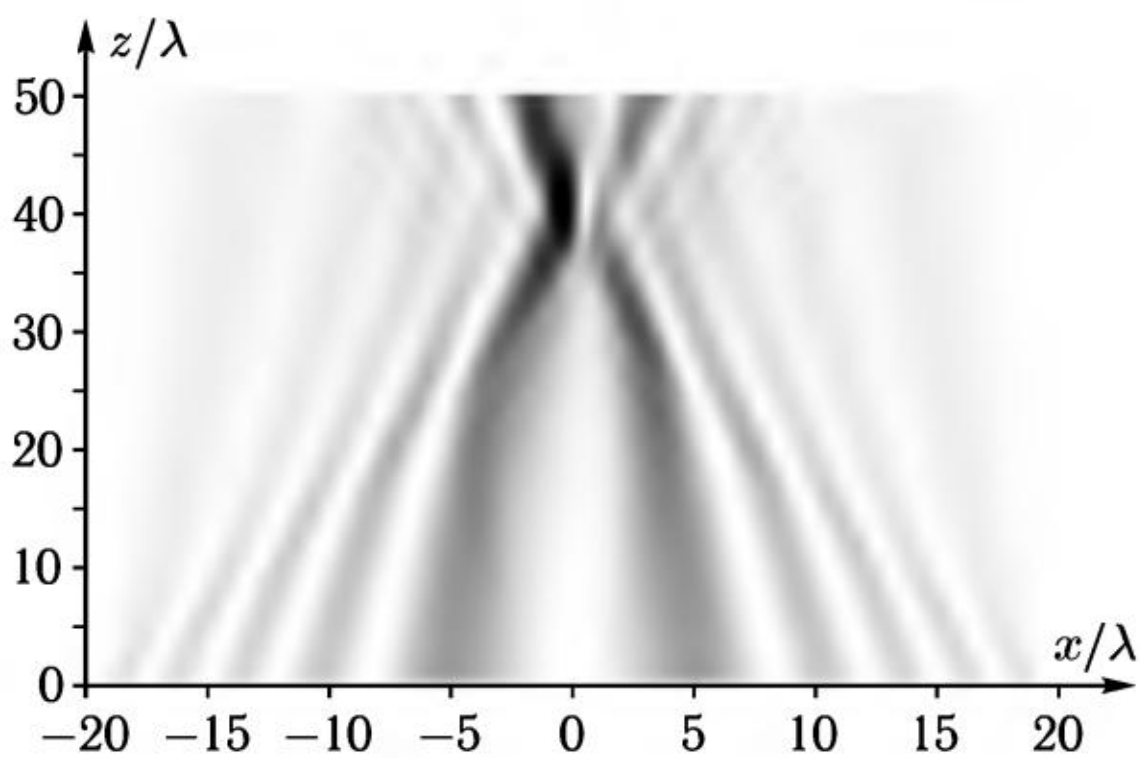


Рис. 1.13. Интенсивность в плоскости Oxz ускоряющегося светового пучка с распределением комплексной амплитуды в начальной плоскости (1.103)

Приравняем нулю амплитуду поля в начальной плоскости при $x < 0$:

$$E\left(x, z=0\right) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{z_0}}\, J_{1/4}\left(\dfrac{kx^2}{4z_0}\right) \exp\left(-\dfrac{ikx^2}{4z_0}\right), & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1.104}$$

На рис. 1.14 показана интенсивность пучка (1.104), полученная BPM-методом при тех же параметрах, что и на рис. 1.102.

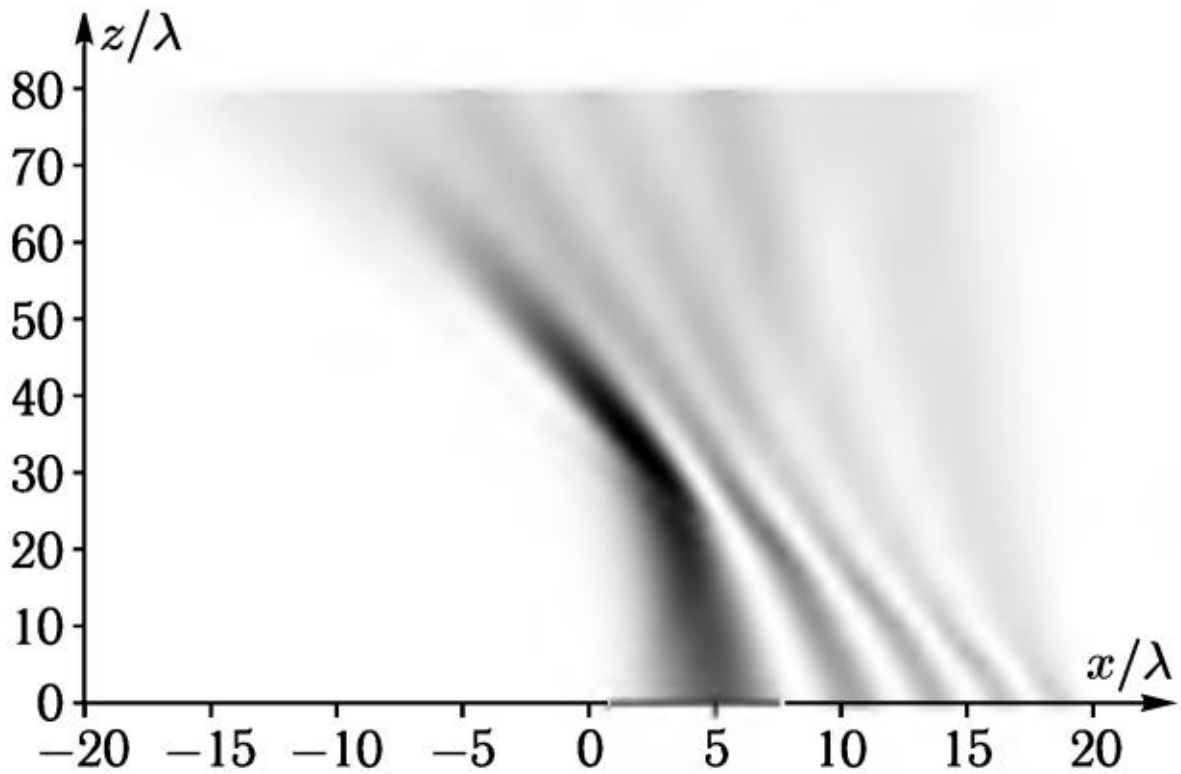


Рис. 1.14. Интенсивность в плоскости Oxz ускоряющегося светового пучка с распределением комплексной амплитуды в начальной плоскости (1.104)

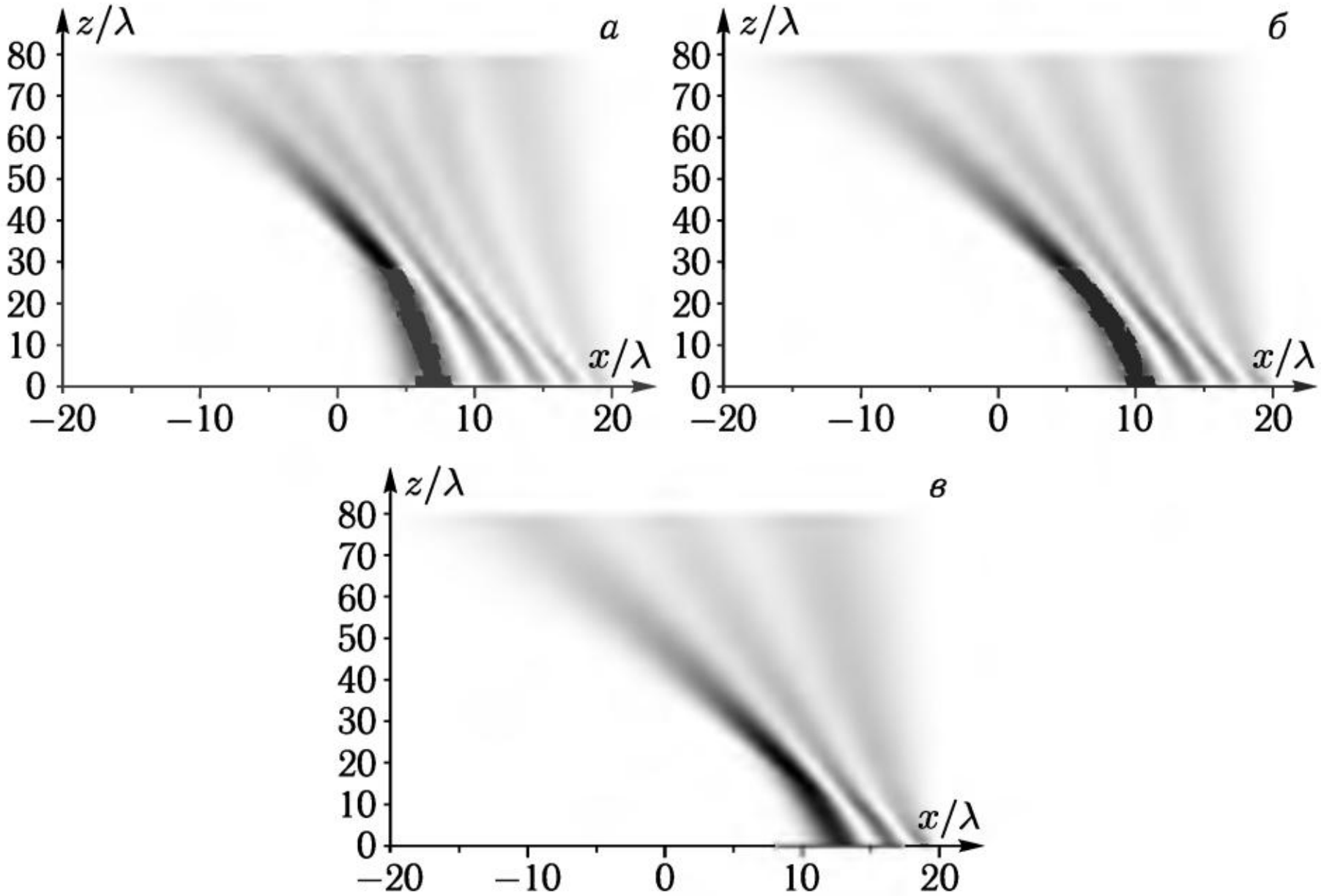


Рис. 1.15. Интенсивность пучка (1.104) с разными порядками функции Бесселя: 1 (*а*), 3 (*б*) и 5 (*в*)

Для других порядков функции Бесселя в (1.104) вид картины аналогичный (рис. 1.15).

Из рис. 1.15 видно, что с ростом порядка функции Бесселя ускорение падает. Ускоряющиеся параксиальные пучки (1.104) аналогичны непараксиальным пучкам «половины Бесселя» [44], поэтому будем их называть параксиальными пучками «половины Бесселя».

Дифракция гауссова пучка на полубесконечном непрозрачном экране. Рассмотрим еще пример, когда замедляющийся пучок описывается аналитической функцией. Пусть гауссов пучок с радиусом перетяжки w проходит через полубесконечную плоскую апертуру. Непосредственно за апертурой комплексная амплитуда будет равна:

$$E\left(x, z=0\right) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{x^2}{w^2}\right), & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.105}$$

После прохождения светом расстояния z его комплексная амплитуда будет определяться преобразованием Френеля от поля (1.105) и примет вид [65, 66]:

$$E\left(x, z\right) = \sqrt{\frac{-ik}{8pz}}\, \exp\left[\frac{ikx^2}{2\left(z - iz_R\right)}\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{-ikx}{2\sqrt{p}\, z}\right), \tag{1.106}$$

где $p = 1/w^2 - ik/\left(2z\right)$, $z_0 = kw^2/2$ расстояние Рэлея, $\operatorname{erfc}\left(x\right)$ — дополнительная функция ошибок:

$$\operatorname{erfc}\left(z\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(z\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z \exp\left(-t^2\right) dt. \tag{1.107}$$

Уравнение (1.106) может быть приведено к виду:

$$E\left(x, z\right) = \sqrt{\frac{-ik}{8pz}}\, \exp\left(\frac{ikx^2}{2z}\right) \exp\left(-y^2\right) \operatorname{erfc}\left(iy\right), \tag{1.108}$$

где

$$y = \frac{-kx}{2\sqrt{p}\, z} = -\left(\frac{x}{w}\right)\left(\frac{z_0}{z}\right)\left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)^{-1/4} \exp\left[i\,\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{z_0}{z}\right)\right]. \tag{1.109}$$

При $z \to 0$ аргумент переменной y почти не зависит от z: $\arg\left(y\right) \approx \pi/4$. Поэтому уравнение траектории такого пучка на малых расстояниях z имеет вид:

$$x_{\max} = -w\eta_m \sqrt{\frac{2z}{z_0}}, \tag{1.110}$$

где η_m — m-й максимум функции $\left|\operatorname{erfc}\left[\eta\left(i-1\right)\right]\right|^2$. Это означает, что, подобно световому пучку (1.89), пучок (1.109) будет замедляющимся.

По аналогии с формированием равномерного распределения интенсивности на полуплоскости (с помощью пучка (1.98), (1.101)) сформируем распределение (1.105) в плоскости $z = z_0$ с помощью светового пучка со следующим распределением комплексных амплитуд:

$$E(x,z) = \sqrt{\frac{ik}{8p(z_0 - z)}} \exp\left[\frac{-ikx^2}{2(z_0 - z + iz_R)}\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{ikx}{2\sqrt{p}\,(z_0 - z)}\right], \tag{1.111}$$

где $p = 1/w^2 + ik/[2(z_0 - z)]$. В (1.111) в качестве сомножителя входит интеграл вероятности или интеграл Лапласа. Поэтому будем называть пучки (1.111) пучками Лапласа. Из вида траектории (1.110) следует, что пучок (1.111) также будет ускоряющимся вблизи плоскости $z = z_0$. Это можно заметить на рис. 1.16 *а*, на котором показана интенсивность пучка (1.111) в плоскости Oxz. На рис. 1.16 *б* показано сечение интенсивности в плоскости $z = z_0$.

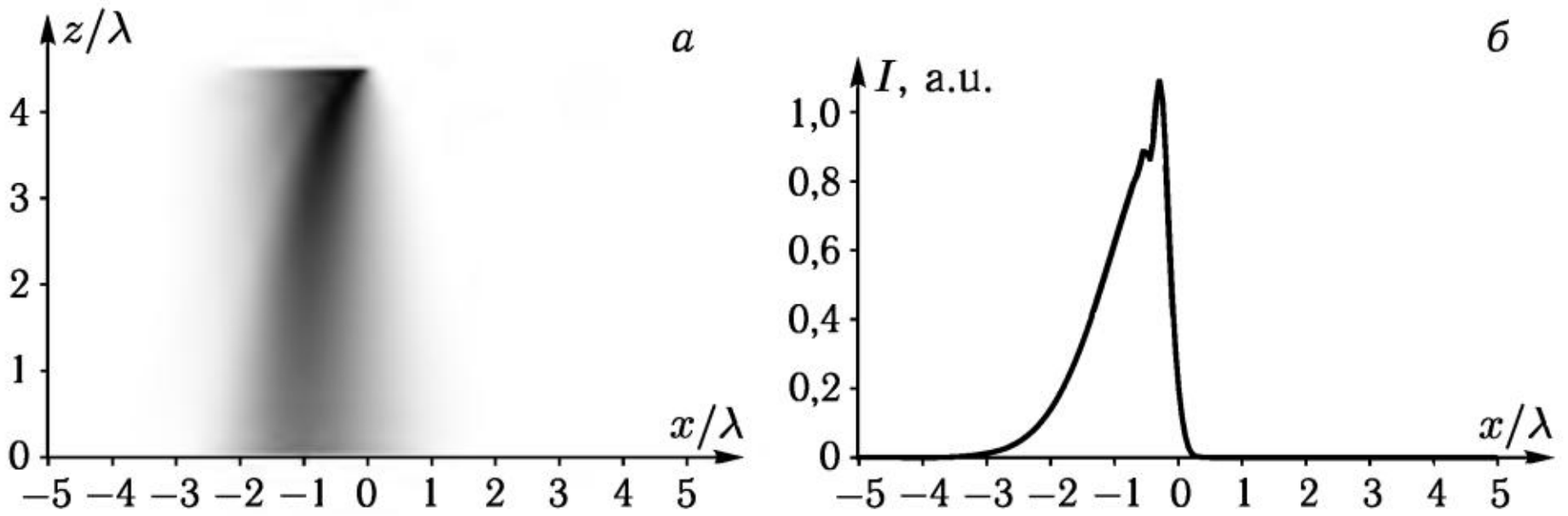


Рис. 1.16. Интенсивность светового пучка (1.111) в плоскости Oxz (*а*), а также сечение интенсивности в плоскости $z = z_0$ (*б*)

В разделе получены следующие результаты. Показано, что хорошо известные моды Эрмита–Гаусса и обобщенные пучки Эрмита–Гаусса (1.80) являются ускоряющимися пучками, то есть два крайних локальных максимума интенсивности, симметричных относительно оптической оси, распространяются по гиперболическим траекториям с неоднородным ускорением, которое уменьшается пропорционально кубу расстояния (1.84). Предложен метод преобразования двумерных световых пучков, распространяющихся с замедлением, в ускоряющиеся световые пучки. Рассмотрен ускоряющийся на конечном отрезке траектории пучок Френеля (1.98), который получен из комплексной амплитуды, описывающей дифракцию плоской волны на непрозрачном экране (1.89), путем комплексного сопряжения и сдвига по оптической оси. Рассмотрен параксиальный ускоряющийся на конечном отрезке пучок «половины Бесселя» (1.104), который распространяется по траектории корневой параболы, и получен из обобщенного гипергеометрического лазерного пучка (1.95), путем комплексного сопряжения, сдвига по оптической оси и «взятия половины». Аналогично рассмотрен

ускоряющийся на конечном отрезке пучок Лапласа (1.111), который получен на основе решения (1.15) задачи дифракции гауссова пучка на непрозрачном экране, путем комплексного сопряжения и сдвига по оптической оси комплексной амплитуды (1.106).

1.4. Пучки с искривленной траекторией в линейной градиентной среде

Для описания распространения световых полей в однородных средах и различных оптических системах часто используются интегральные преобразования. Наиболее универсальными являются формулы Стреттона–Чу [67], позволяющие определять комплексную амплитуда света в любой точке, если известна комплексная амплитуда на произвольной поверхности (без токов и зарядов). Из формул Стреттона–Чу может быть получено множество других менее универсальных интегральных преобразований. Так, в однородной среде свет описывается преобразованием Рэлея–Зоммерфельда [68, 69]. Если расстояние от начальной плоскости до плоскости наблюдения много больше длины волны, то это преобразование может быть заменено преобразованием Кирхгофа [67], которое при параксиальном распространении света становится преобразованием Френеля [67]. Если свет распространяется не в однородной 2D среде, а через оптическую систему, описываемую ABCD-матрицей, то при параксиальном распространении комплексные амплитуды во входной и выходной плоскостях связаны между собой ABCD-преобразованием [2]:

$$E\left(x,z\right)=\sqrt{\frac{-ik}{2\pi B}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E\left(\xi,0\right)\exp\left[\frac{ik}{2B}\left(A\xi^2-2x\xi+Dx^2\right)\right]d\xi. \tag{1.112}$$

где ξ и x — поперечные декартовы координаты во входной и выходной плоскостях соответственно, $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны света. В частности, если оптическая система — тонкая линза, то ABCD-преобразование принимает вид преобразования Фурье. ABCD-преобразование вызывало повышенный интерес в силу своей универсальности, так как могло применяться для любых систем, описываемых ABCD-матрицей. Множество работ посвящено эффективному вычислению интегралов с комплексной экспонентой, имеющую квадратичную фазу [70, 71]. Позже выяснилось, что такие интегральные преобразования возникают и в градиентных средах. ABCD-преобразование описывает распространение света в градиентном волноводе с параболической зависимостью показателя преломления от поперечной координаты [72–74, 22]

$$n(x)=n_0\left(1-\frac{x^2}{2a^2}\right).$$

В этом случае ABCD-матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(z/a) & a\sin(z/a) \\ -\sin(z/a)/a & \cos(z/a) \end{pmatrix}. \tag{1.113}$$

где n_0 — показатель преломления на оси волновода ($x = 0$), a — показатель, характеризующий скорость спада показателя преломления от оси волновода к его краю, z — расстояние между входной и выходной плоскостью.

В [37] получено решение параксиального уравнения распространения для планарной неоднородной вдоль оптической оси градиентной среды с линейным профилем в виде преобразования Фурье от неизвестного пространственного спектра.

В данном разделе, на основе методологии работы [37], показано, что в 2D градиентной среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечной координаты $n^2(x) = n_0^2(1 - \alpha x)$ в параксиальном приближении распространение света описывается интегральным преобразованием, ядро которого включает комплексную экспоненту, имеющую квадратичную фазу. Распространение света на расстояние z в такой среде эквивалентно прохождению через призму, сила которой пропорциональна z, последующему распространению в однородной среде с показателем преломления n_0, повторному прохождению через упомянутую призму, и дополнительному постоянному фазовому набегу, зависящему кубически от пройденного расстояния z. Показано, что при распространении гауссова пучка его центр смещается по параболе, пропорционально z^2, а его радиус совпадает с радиусом гауссова пучка, распространяющегося в однородной среде с показателем преломления n_0. Ускоряющийся по параболе гауссов пучок похож на пучок Эйри, ускоряющийся также по параболе в 2D однородном пространстве [17, 18]. С помощью полученного интегрального преобразования найдено явное выражение для комплексной амплитуды пучка Эйри в планарной градиентной среде с линейным профилем. Это решение совпадает с полученным ранее в [71]. Но в [71] не описан способ получения решения. Показано, что пучок Эйри, при согласовании его масштаба с градиентом линейной среды, распространяется по прямолинейной траектории.

1.4.1. Интегральное преобразование для линейной градиентной среды. Пусть дана 2D градиентная среда с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости (квадрата показателя преломления) от поперечной декартовой координаты:

$$n^2(x) = n_0^2(1 - \alpha x), \tag{1.114}$$

где x — декартова координата в плоскости, перпендикулярной оптической оси z, n_0 — показатель преломления на оптической оси, α — параметр изменения диэлектрической проницаемости при удалении от оптической оси в направлениях вдоль координат x. При TE-поляризации

уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды света E_y, распространяющегося в такой среде, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_0^2 n_0^2 (1 - \alpha x) E = 0, \tag{1.115}$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число в вакууме, λ_0 — длина волны света в вакууме. Будем считать, что свет распространяется преимущественно в направлении оптической оси и представим амплитуду в виде:

$$E(x, z) = U(x, z) \exp(ikz), \tag{1.116}$$

где $k = k_0 n_0$ — волновое число на оптической оси. Тогда, пренебрегая второй производной по z, получим из уравнения Гельмгольца следующее уравнение:

$$2ik\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - k^2 \alpha x U = 0, \tag{1.117}$$

решение которого будем искать в виде:

$$U(x, z) = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(u) \exp\left[i\left(Bx^2 + Cu^2 + Dux + Ex + Fu\right)\right] du, \tag{1.118}$$

где A, B, C, D, E, F — функции от z, а S — произвольная функция.

Подставим это выражение в параксиальное уравнение Гельмгольца (1.117), приведем подобные слагаемые и, с учетом произвольности функции $S(u)$ получим:

$$\begin{aligned} - A\left[2k\frac{dB}{dz} + 4B^2\right]x^2 - A\left[2k\frac{dC}{dz} + D^2\right]u^2 - A\left[2k\frac{dD}{dz} + 4BD\right]ux - \\ - A\left[2k\frac{dE}{dz} + 4BE + k^2\alpha\right]x - A\left[2k\frac{dF}{dz} + 2DE\right]u + \\ + \left[2ik\frac{dA}{dz} + 2iAB - AE^2\right] = 0. \end{aligned} \tag{1.119}$$

Так как это выражение верно для любых z, приравняем нулю коэффициенты при подобных слагаемых. Получится система из шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} k\dfrac{dB}{dz} + 2B^2 = 0, \\ 2k\dfrac{dC}{dz} + D^2 = 0, \\ k\dfrac{dD}{dz} + 2BD = 0, \\ 2k\dfrac{dE}{dz} + 4BE + k^2\alpha = 0, \\ k\dfrac{dF}{dz} + DE = 0, \\ 2ik\dfrac{dA}{dz} + 2iAB - AE^2 = 0. \end{cases} \tag{1.120}$$

Решением первого уравнения являются функции вида:

$$B(z) = \frac{k}{2(z + B_0)}, \tag{1.121}$$

где B_0 — произвольная постоянная.

Подставив (1.121) в третье уравнение (1.120) и решив его, получим:

$$D(z) = \frac{D_0}{z + B_0}, \tag{1.122}$$

где D_0 — произвольная постоянная.

Подставив (11) во второе уравнение системы (1.120), получим вид функций $C(z)$:

$$C(z) = \frac{D_0^2}{2k(z + B_0)} + C_0, \tag{1.123}$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Подставив (1.121) в четвертое уравнение системы (9) и решив его, получим вид функций $E(z)$:

$$E(z) = \frac{E_0}{z + B_0} - \frac{k\alpha}{4}(z + B_0), \tag{1.124}$$

где E_0 — произвольная постоянная.

Подставив найденные выражения для функций $D(z)$ и $E(z)$ в пятое уравнение системы (1.120) и решив его, получим вид функций $F(z)$:

$$F(z) = \frac{\alpha D_0 (z + B_0)}{4} + \frac{D_0 E_0}{k(z + B_0)} + F_0, \tag{1.125}$$

где F_0 — произвольная постоянная.

Шестое уравнение системы (1.120) решается в разделяющихся переменных. Подставим найденные ранее выражения для остальных функций, получим решение:

$$A(z) = \frac{A_0}{\sqrt{z + B_0}} \exp\left[\frac{iE_0^2}{2k(z + B_0)}\right] \exp\left[-\frac{ik\alpha^2}{96}(z + B_0)^3 + \frac{i\alpha E_0 z}{4}\right], \tag{1.126}$$

Амплитуда в начальной плоскости $z = 0$ имеет вид:

$$U(x, 0) = A^0 \exp\left[i\left(B^0 x^2 + E^0 x\right)\right] \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(u) \exp\left[i\left(C^0 u^2 + D^0 ux + F^0 u\right)\right] du, \tag{1.127}$$

где $A^0 = A(0)$, $B^0 = B(0)$, $C^0 = C(0)$, $D^0 = D(0)$, $E^0 = E(0)$, $F^0 = F(0)$.

Умножим начальное поле на множитель $e^{-iB^0x^2-i(E^0+D^0\xi)x}$ и, проинтегрировав по всей числовой оси, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x,0)\exp\left[-iB^0x^2-i\left(E^0+D^0\xi\right)x\right]dx=$$

$$=A^0\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(u)\exp\left[i\left(C^0u^2+F^0u\right)\right]\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[iD^0(u-\xi)x\right]dx\right\}du. \tag{1.128}$$

Внутренний интеграл представляет собой дельта-функцию Дирака и поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x,0)\exp\left[-iB^0x^2-i\left(E^0+D^0\xi\right)x\right]dx=$$

$$=\frac{2\pi A^0}{D^0}S(\xi)\exp\left[i\left(C^0\xi^2+F^0\xi\right)\right], \tag{1.129}$$

т. е. функция $S(u)$ выражается через начальное поле следующим образом:

$$S(u)=\frac{D^0}{2\pi A^0}\exp\left[-i\left(C^0u^2+F^0u\right)\right]\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,0)\exp\left[-iB^0\xi^2-i\left(E^0+D^0u\right)\xi\right]d\xi. \tag{1.130}$$

Подставляя (1.120) в (1.118) и интегрируя по переменной u возникающий интеграл Пуассона, получим:

$$U(x,z)=\frac{D^0A}{2\pi A^0}\exp\left[i\left(Bx^2+Ex\right)\right]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,0)\exp\left[-i\left(B^0\xi^2+E^0\xi\right)\right]\times$$

$$\times\sqrt{\frac{i\pi}{C-C^0}}\exp\left[\frac{\left(Dx-D^0\xi+F-F^0\right)^2}{4i\left(C-C^0\right)}\right]d\xi. \tag{1.131}$$

Подставляя в (1.131) функции (1.121)–(1.126), получим интегральное преобразование, связывающее комплексные амплитуды света в двух плоскостях, поперечных оптической оси:

$$U(x,z)=\sqrt{\frac{-ik}{2\pi z}}\exp\left(-\frac{ik\alpha^2z^3}{96}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,0)\exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi-x)^2-\frac{ik\alpha z}{4}(x+\xi)\right]d\xi. \tag{1.132}$$

Легко видеть, что при $\alpha=0$ интегральное преобразование (1.132) переходит в известное преобразование Френеля.

В трехмерном случае в среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечных декартовых координат $n^2(x, y) = n_0^2(1 - \alpha x - \beta y)$ аналогичное интегральное преобразование получается перемножением преобразований (1.132) по обеим координатам.

Из (1.132) видно, что распространение света на расстояние z в среде (1.114) эквивалентно прохождению через призму, сила которой пропорциональна z, последующему распространению в однородной среде с показателем преломления n_0, повторному прохождению через упомянутую призму, и дополнительному постоянному фазовому набегу, зависящему кубически от пройденного расстояния z.

Преобразование (1.132) не является сверткой, хотя и может быть вычислено с помощью преобразования Фурье. Преобразование (1.132) не описывает распространение света в ABCD-системе (1.112), но математически оно не отличается от него, так как ядро также является экспонентой с показателем в виде квадратичной формы. Следовательно известные решения для однородной среды (пучки Гаусса–Эрмита, пучки Эйри и др.) могут быть обобщены и для среды (1.114), а известные быстрые методы вычисления интегралов с комплексной экспонентой, имеющей квадратичную фазу [7, 75], также годятся для моделирования световых пучков в среде (3).

Заметим, что ABCD-преобразование (1.112) с матрицей (1.113) для волновода с параболическим распределением показателя преломления на самом деле не является решением параксиального уравнения Гельмгольца и является его приближенным решением только при малых изменениях показателя преломления. В то же время преобразование (1.132) является точным решением уравнения (1.117).

1.4.2. Распространение гауссова пучка в двумерной линейно-градиентной среде. Для примера рассмотрим распространение двумерного гауссова пучка с радиусом перетяжки w:

$$U(\xi, 0) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{w^2}\right). \tag{1.133}$$

Тогда на расстоянии z от перетяжки пучок будет иметь следующую комплексную амплитуду: оси:

$$U(x, z) = \left\{\frac{w_0}{w(z)} \exp\left[i\zeta(z)\right]\right\}^{1/2} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{[x - x_0(z)]^2}{w^2(z)} + \frac{ik[x - x_1(z)]^2}{2R(z)} + i\Phi(z)\right\}. \tag{1.134}$$

где $z_R = kw^2/2$ — расстояние Рэлея, $w(z)$ — зависимость ширины гауссова пучка от пройденного расстояния:

$$w(z) = w\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}. \tag{1.135}$$

Здесь $x_0(z)$ — зависимость координаты центра (максимума интенсивности) гауссова пучка от пройденного расстояния:

$$x_0(z) = -\frac{\alpha z^2}{4}, \tag{1.136}$$

$x_1(z)$ — зависимость координаты центра кривизны гауссова пучка от пройденного расстояния:

$$x_1(z) = -\left[x_0(z) - \frac{\alpha z_R^2}{2}\right], \tag{1.137}$$

$\zeta(z)$ — фаза Гоу:

$$\zeta(z) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_R}\right), \tag{1.138}$$

$R(z)$ — зависимость радиуса кривизны волнового фронта Гуассова пучка от пройденного расстояния:

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right], \tag{1.139}$$

$\Phi(z)$ — дополнительный фазовый набег:

$$\Phi(z) = \frac{k\alpha^2 z^2}{24}\left[2z - 3R(z)\right]. \tag{1.140}$$

Из полученных выражений (1.134)–(1.140) видно, что в градиентной среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечной координаты (1.114) при параксиальном распространении гауссова пучка его центр смещается по параболе, пропорционально z^2, а его радиус совпадает с радиусом гауссова пучка, распространяющегося в однородной среде с показателем преломления n_0.

Численное моделирование распространения гауссовых пучков в среде (1.114) проводилось конечно-разностным FDTD-методом решения уравнений Максвелла. Рассматривалась градиентная среда с диэлектрической проницаемостью, которая в области моделирования линейно менялась от $\varepsilon_a = 1$ (воздух) до $\varepsilon_g = 2{,}25$ (стекло) (рис. 1.17). Другие параметры моделирования были выбраны следующими: длина волны света в вакууме $\lambda = 633$ нм, область моделирования: $-20\lambda \leqslant x \leqslant 20\lambda$, $0 \leqslant z \leqslant 50\lambda$, время моделирования $0 \leqslant t \leqslant 100\lambda/c$ (c — длина волны света в вакууме), шаг дискретизации по обеим координатам $\lambda/16$, а по времени $\lambda/32$. Диэлектрическая проницаемость в центре равна $\varepsilon(x=0) = (\varepsilon_a + \varepsilon_g)/2 = 1{,}625$ (т. е. $n_0 = 1{,}27$). Параметр α был подобран исходя из условий $\varepsilon(x=-20\lambda) = \varepsilon_g$, $\varepsilon(x=+20\lambda) = \varepsilon_a$ и поэтому $\alpha = 1/52\lambda \approx 0{,}03$ мкм$^{-1}$. Радиус перетяжки гауссова пучка составлял $w = 2\lambda$, поляризация — TE, т. е. $\mathbf{E} \equiv (0, E_y, 0)$.

На рис. 1.18*а* показана усредненная по времени интенсивность в плоскости Oxz. Светлыми точками отмечены центры гауссова пучка при различных расстояниях z, вычисленные по формуле (1.136). Для сравнения на рис. 1.18*б* показана усредненная по времени интенсивность гауссова пучка при распространении в однородной среде

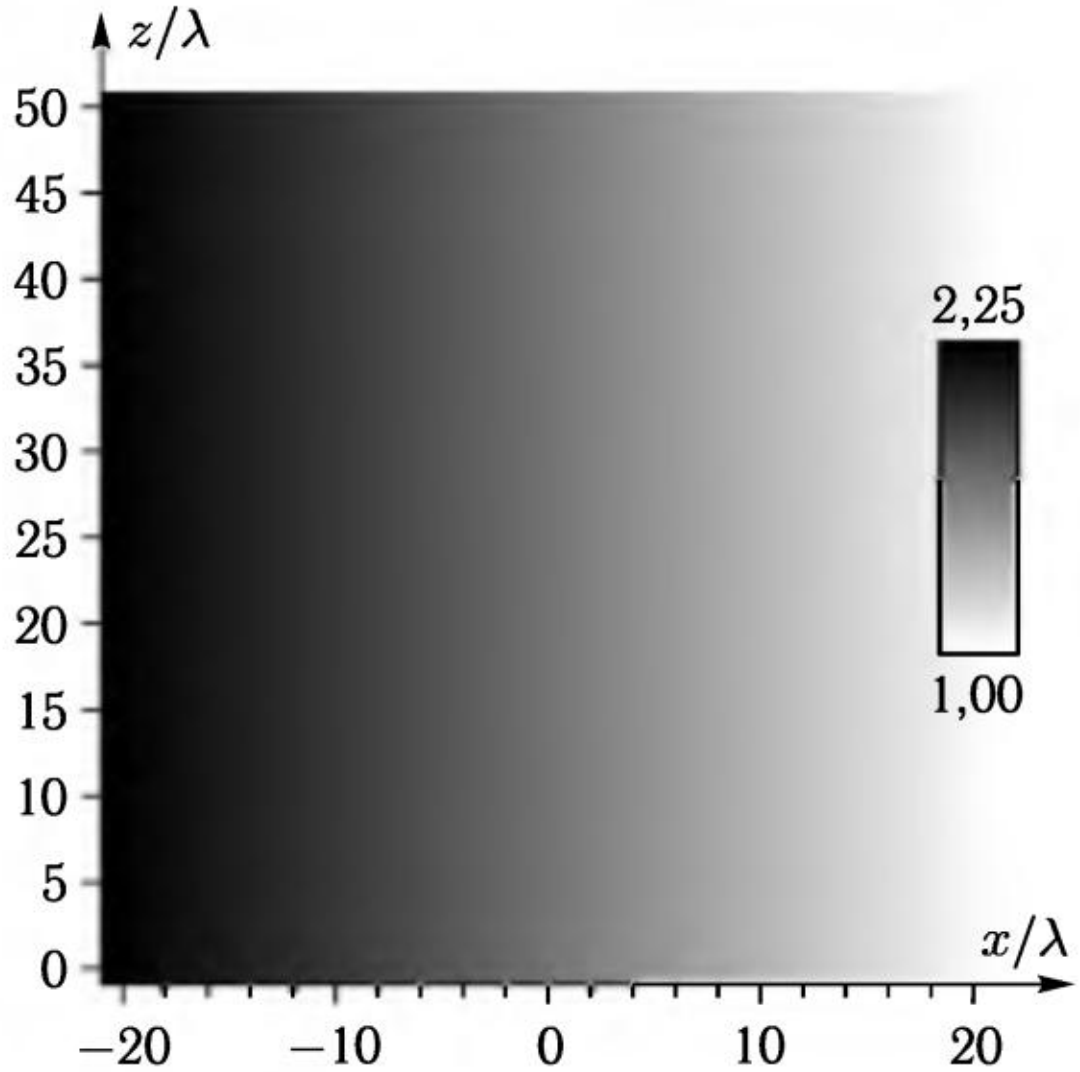


Рис. 1.17. Распределение диэлектрической проницаемости градиентной среды, линейно возрастающей от 1 (воздух, белый цвет, $x = 20\lambda$) до 2,25 (стекло, черный цвет, $x = -20\lambda$)

с показателем преломления $n_0 = 1{,}27$. Из сравнения рис. 1.18 *а* и 1.18 *б* видно, что на одних и тех же расстояниях z радиусы гауссовых пучков совпадают, т. е. формула (1.135) описывает радиус пучка не только в однородной среде, но и вградиентной среде (1.114).

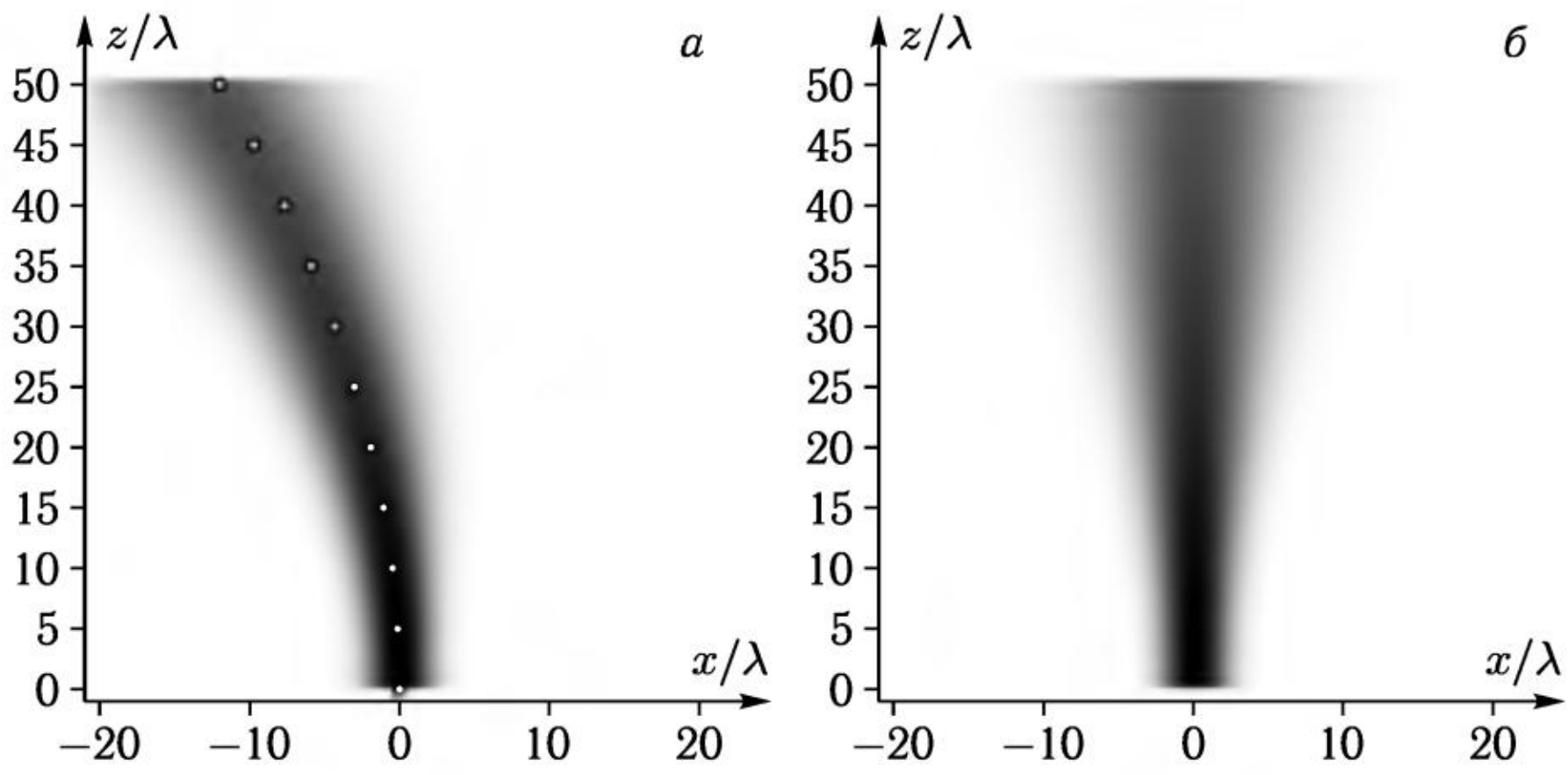


Рис. 1.18. Усредненная по времени интенсивность в плоскости Oxz гауссова пучка в среде (3) (*а*) и в однородной среде с показателем преломления $n_0 = 1{,}27$ (*б*)

Устремим радиус перетяжки гауссова пучка к бесконечности и добавим линейный градиент фазы во входной плоскости, т. е. при $z = 0$

комплексная амплитуда примет вид:

$$U(x, z=0) = \exp(ik\beta x), \tag{1.141}$$

где β — коэффициент, характеризующий угол наклона плоской волны. Подставляя (1.141) в интегральное преобразование (1.132), получим, что в произвольной поперечной плоскости на расстоянии z амплитуда примет вид:

$$U(x, z) = \exp\left\{ik\left[-\frac{\alpha^2 z^3}{24} + \frac{\alpha\beta z^2}{4} - \frac{\left(\alpha x + \beta^2\right)z}{2} + \beta x\right]\right\}. \tag{1.142}$$

Подобно плоской волне в однородном пространстве, поле (1.142) в среде (1.114) имеет постоянную интенсивность. Интересной особенностью (1.142) является кубическая зависимость фазы от пройденного расстояния z.

1.4.3. Распространение пучка Эйри в двумерной линейно-градиентной среде. Пусть в начальной плоскости задана комплексная амплитуда пучка Эйри с ограниченной энергией [7]:

$$U(x, z=0) = \mathrm{Ai}\left(\frac{x}{x_0}\right)\exp\left(a\frac{x}{x_0}\right), \tag{1.143}$$

где x_0 — масштабирующий множитель, a — показатель экспоненты, ограничивающей энергию светового пучка. Подставляя (1.143) в интегральное преобразование (1.132), получим, что в произвольной поперечной плоскости на расстоянии z амплитуда примет вид:

$$\begin{aligned} U(x, z) = \\ = \exp\left[i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{k^2 x_0^3 \alpha^2}{6} - \frac{1}{3k^2 x_0^3}\right)\frac{z^3}{4kx_0^3}\right]\exp\left[\frac{a}{2x_0}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{k^2 x_0^3}\right)z^2\right] \times \\ \times \exp\left[i\left(\frac{x}{x_0} - k^2\alpha x_0^2 x + a^2\right)\frac{z}{2kx_0^2} + a\left(\frac{x}{x_0}\right)\right] \times \\ \times \mathrm{Ai}\left[\frac{x}{x_0} + \left(\alpha - \frac{1}{k^2 x_0^3}\right)\frac{z^2}{4x_0} + \frac{iaz}{kx_0^2}\right]. \end{aligned} \tag{1.144}$$

В общем случае аргумент функции Эйри зависит от обеих декартовых координат x и z, однако при переходе к неограниченном пучку Эйри ($a = 0$) все экспоненты в (1.144) становятся чисто-фазовыми и легко видеть, что пучок Эйри распространяется по параболической траектории. При согласовании параметров x_0 и α, когда $\alpha = 1/\left(k^2 x_0^3\right)$, аргумент функции Эйри теряет зависимость от z и амплитуда (1.144) примет вид:

$$U(x, z) = \mathrm{Ai}\left(\frac{x}{x_0}\right). \tag{1.145}$$

Амплитуда (1.145) соответствует модовому решению уравнения (1.115), описанному в [75, 76]. Из (1.145) видно, что пучки Эйри, масштаб которых согласован со свойствами среды, распространяются

в линейно-градиентной среде (1.114) прямолинейно (рис. 1.19). Рисунок 1.19 получен при моделировании FDTD-методом, параметры моделирования те же, что и на рис. 1.18, однако область моделирования по оси x была расширена $-40\lambda \leqslant x \leqslant 40\lambda$. Небольшой изгиб траектории пучка на рис. 1.19 является следствием ограниченности пучка во входной плоскости.

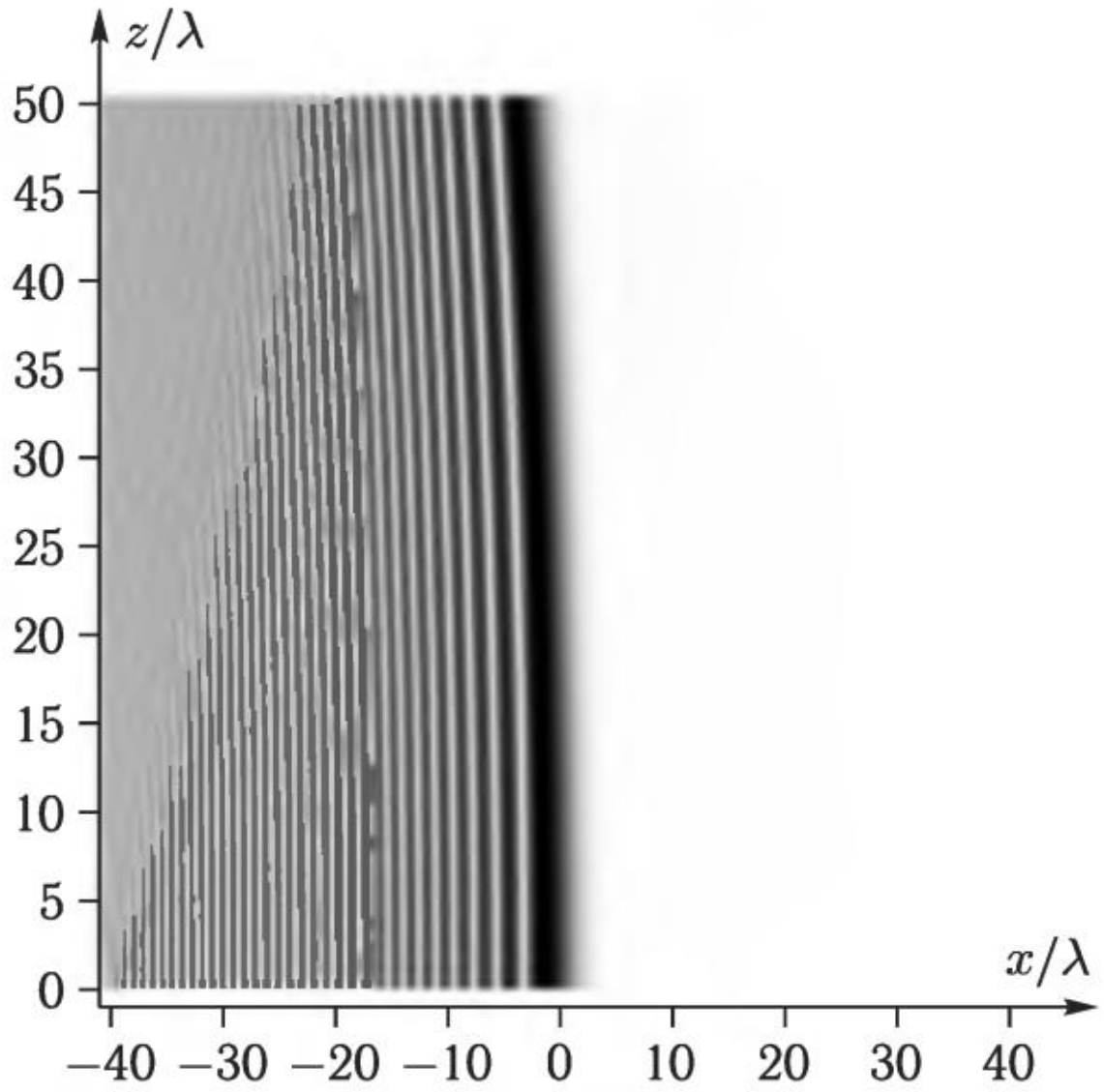


Рис. 1.19. Усредненная по времени интенсивность в плоскости Oxz прямолинейного пучка Эйри в среде (1.114)

В разделе получены следующие результаты. Получено интегральное преобразование (21), описывающее параксиальное распространение светового пучка в планарной градиентной среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечной координаты. Показано, что распространение света на расстояние z в такой среде эквивалентно прохождению через призму, сила которой пропорциональна z, последующему распространению в однородной среде с показателем преломления n_0, повторному прохождению через упомянутую призму, и дополнительному постоянному фазовому набегу, зависящему кубически от пройденного расстояния z. Показано, что при распространении гауссова пучка в градиентной среде (1.114) его центр смещается по параболе, пропорционально z^2, а его радиус совпадает с радиусом гауссова пучка, распространяющегося в однородной среде с показателем преломления на оптической оси среды (1.114). С помощью полученного интегрального преобразования (1.132) и начального поля (1.143) получено явное выражение для комплексной амплитуды пучка Эйри в планарной среде с линейным профилем (1.144), которое совпадает с выражением, полученным в [39] другим способом.

1.5. Ускоряющиеся двумерные пучки Бесселя

После открытия пучков Эйри с конечной энергией [7] возрос интерес к световым пучкам с искривленной траекторией. Пучки Эйри распространяются по параболической траектории и демонстрируют такие свойства, как бездифракционность и самовосстановление после искажения препятствиями. Пучки Эйри до сих пор активно исследуются: в [77] рассматриваются симметричные пучки Эйри, в [78] изучается влияние астигматизма на вид пучка Эйри. В [79] изучается трехмерный пучок Эйри с произвольным углом между «двумя крыльями», а в [80] рассмотрена спиральная фокусировка пучков Эйри с оптическим вихрем. Кроме пучков Эйри рассматривались и другие непараксиальные ускоряющиеся световые пучки с произвольной поперечной формой [81]. Однако пучки Эйри параксиальны, их комплексная амплитуда является решением уравнения Гельмгольца в параксиальном приближении (уравнения типа Шредингера). В связи с этим в последние годы предпринимались попытки преодолеть параксиальное ограничение и найти решения точного уравнения Гельмгольца, описывающие ускоряющиеся световые пучки [44, 82], способные поворачивать при распространении на большие углы, чем параксиальные пучки. Из любого точного решения трехмерного уравнения Гельмгольца, описывающего бездифракционный световой пучок, можно получить решение двумерного уравнения Гельмгольца. Для этого достаточно константу распространения принять равной нулю. Так, в работе [82] за основу взяты решения в виде пучков Матье и Вебера, а в [44] — моды Бесселя, но угловой спектр плоских волн был усечен, что привело к формированию светового пучка с траекторией в виде полукольца. В недавней работе [83] предложено преобразовывать с помощью зеркала световое поле от точечного источника в поле с круговой каустикой длиннее, чем полукольцо. Но полного кольца достигнуто до сих пор не было. В этом разделе предлагается формировать двумерный пучок Бесселя таким образом, чтобы сформировать световое кольцо, по которому свет циркулирует непрерывно.

Еще один недостаток пучков Эйри, как и многих других световых пучков, состоит в том, что распределение интенсивности в поперечном сечении помимо главного максимума имеет вспомогательные максимумы (боковые лепестки). В ряде работ рассматриваются методы подавления боковых лепестков. Так, в [84] предложено использовать конический аксикон для подавления этих лепестков в дальней зоне дифракции плоской волны на спиральной фазовой пластинке, ограниченной круглой диафрагмой. В [85] на основе векторных формул Дебая рассчитана кольцевая амплитудная маска для подавления боковых лепестков у радиально поляризованного остросфокусированного пучка Лагера–Гаусса. В [86] используется асимметричная аподизация фурье-спектра для усиления главного максимума интенсивности и подавления боковых лепестков у пучков Эйри.

В данном разделе мы, по аналогии с работой [44], рассмотрим двумерный бесселев пучок, однако за счет использования двух источников, расположенных напротив друг друга, будет показана возможность формирования светового кольца, которое можно считать ускоряющимся световым пучком, поворачивающим на угол 360 градусов. Кроме того, ниже рассматривается решение двумерного уравнения Гельмгольца, которое, также, как и пучки в [44, 82], получено из решения трехмерного уравнения Гельмгольца, описывающего бездифракционный пучок. Но в отличие от [44, 82] вместо стандартного пучка Бесселя за основу взято решение для асимметричного пучка Бесселя [87, 88]. Показано, что это решение может быть получено из традиционного пучка Бесселя путем вещественного сдвига вдоль одной декартовой координаты, и мнимого сдвига — вдоль другой, как это предлагается в работе [89]. Также показано, что с ростом параметра асимметрии светового пучка, комплексная амплитуда которого описывается найденным решением, уменьшается его расстояние распространения, но при этом падает и интенсивность боковых лепестков.

1.5.1. Моделирование формирования кольцевого 2D пучка Бесселя. Двумерное уравнение Гельмгольца имеет вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k^2 E = 0, \tag{1.146}$$

где $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты в плоскости Oxz ($x = r\ \cos\ \varphi$, $z = r\ \sin\ \varphi$), $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число для света с длиной волны λ. В разделяющихся переменных это уравнение имеет решение

$$E_n\left(r, \varphi\right) = J_n\left(kr\right) \exp\left(in\varphi\right), \tag{1.147}$$

где n — целое число (порядок моды Бесселя). Световое поле с комплексной амплитудой (1.147) можно представить, как суперпозицию плоских волн:

$$E_n\left(x, z\right) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \exp\left(in\theta + ikx\cos\theta + ikz\sin\theta\right) d\theta. \tag{1.148}$$

Легко видеть, что поле (1.148) состоит из плоских волн, которые имеют всевозможные направления, так как угол θ, который определяет направление их распространения, меняется от 0 до 2π. Поле (1.148) можно представить в виде:

$$E_n\left(x, z\right) = E_n^{+}\left(x, z\right) + E_n^{-}\left(x, z\right), \tag{1.149}$$

где

$$E_n^{\pm}\left(x, z\right) = \frac{(\mp i)^n}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \exp\left(in\theta \pm ikx\cos\theta \pm ikz\sin\theta\right) d\theta. \tag{1.150}$$

Поле (5) может быть представлено в виде ряда из функций Бесселя, Ангера и Вебера:

$$E_n^{\pm}(x,z) = \frac{(\mp i)^n}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\pm i)^m J_m(kx) \left[\mathbf{J}_{n-m}(\mp kz) + \mathbf{E}_{n-m}(\mp kz)\right], \tag{1.151}$$

где $\mathbf{J}_\nu(z)$ и $\mathbf{E}_\nu(z)$ — функции Ангера и Вебера:

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta, \quad \mathbf{E}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta. \tag{1.152}$$

Поле $E_n^-(x,z)$ распространяется в отрицательном направлении оси z. Это означает, что поле (1.147), смещенное на некоторую величину z_0 вдоль оптической оси, т. е. поле вида

$$E_n(x,z) = J_n\left(k\sqrt{x^2 + (z-z_0)^2}\right) \exp\left[in \operatorname{arctg}\left(\frac{z-z_0}{x}\right)\right], \tag{1.153}$$

нельзя сформировать, если в начальной плоскости $z = 0$ задать комплексную амплитуду в виде

$$E_n(x,0) = J_n\left(k\sqrt{x^2 + z_0^2}\right) \exp\left[-in \operatorname{arctg}\left(\frac{z_0}{x}\right)\right]. \tag{1.154}$$

В этом случае вместо светового кольца будет сформирована только его часть (почти полукольцо). Так, на рис. 1.20 показаны распределения интенсивности в плоскости Oxz, рассчитанные с помощью интеграла (1.148), но на рис. 1.20*а* нижний и верхний пределы интегрирования равны соответственно 0 и 2π, а на рис. 1.20*б* — 0 и π (т. е. на рис. 1.20*б* показана величина $|E_n^+(x,z)|^2$). Рисунок 1.20 получен для $\lambda = 532$ нм, $n = 20$, $-2\lambda \leqslant x,\ z \leqslant 2\lambda$.

Поэтому для формирования светового кольца требуется, чтобы плоские волны распространялись вдоль оптической оси как в положительном направлении, так и в отрицательном.

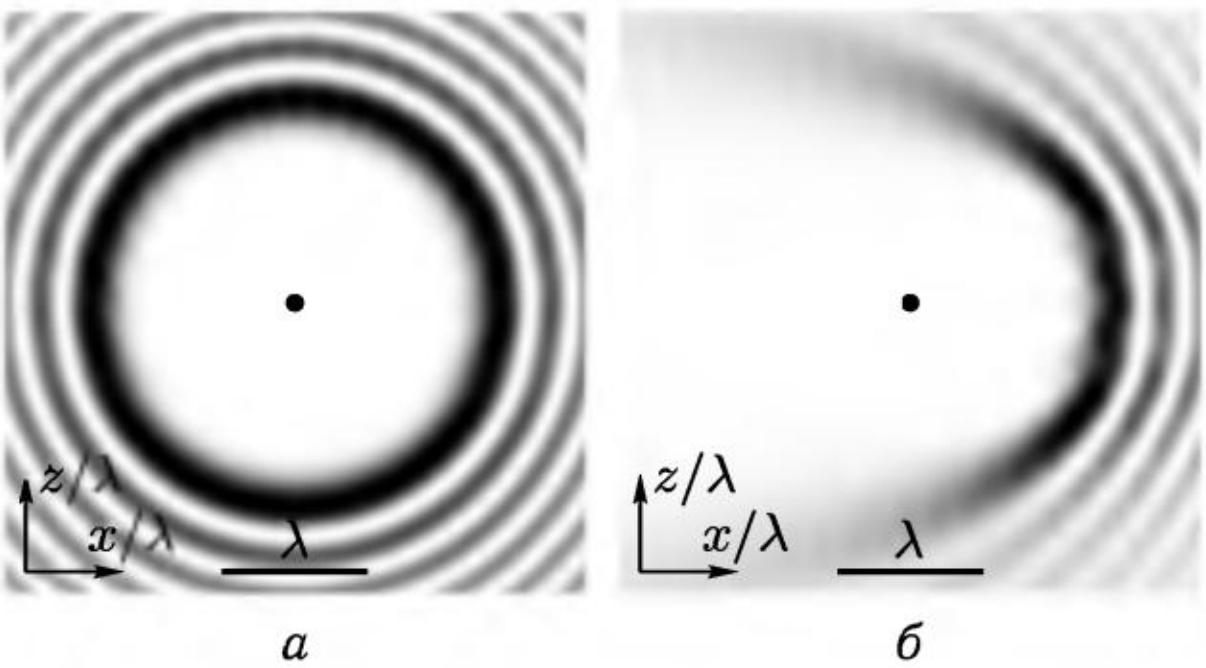


Рис. 1.20. Распределения интенсивности в плоскости Oxz, рассчитанные с помощью интеграла (1.148) для разных значений пределов интегрирования: от 0 до 2π (*а*), от 0 до π (*б*)

Если начальное поле задать в плоскости, проходящей через центр кольца, то сформируется полукольцо, показанное на рис. 1.21 *а*. Рисунок 1.21 *а* получен путем численного моделирования конечно-разностным FDTD-методом, когда начальное поле задавалось в виде (TE-поляризация):

$$E_y\,(x, z = 0) = J_n\,(kx) \tag{1.155}$$

при $n = 20$. Остальные параметры были равны: область моделирования: $-60\lambda \leqslant x,\ z \leqslant 60\lambda,\ 0 \leqslant z \leqslant 40\lambda$, время моделирования $100\lambda/c$, шаг дискретизации по обеим координатам $\lambda/32$, а по времени $\lambda/(64c)$.

Если начальное поле сместить от центра кольца и задать его в виде (1.154), то будет сформировано полукольцо, показанное на рис. 1.21 *б*.

Чтобы сформировать кольцо вместо полукольца, напрашивается встречное распространение двух бесселевых пучков (1.153). В этом случае действительно формируется световое кольцо, однако в результате интерференции на кольце ярко выражены существенные провалы интенсивности (рис. 1.21 *в*).

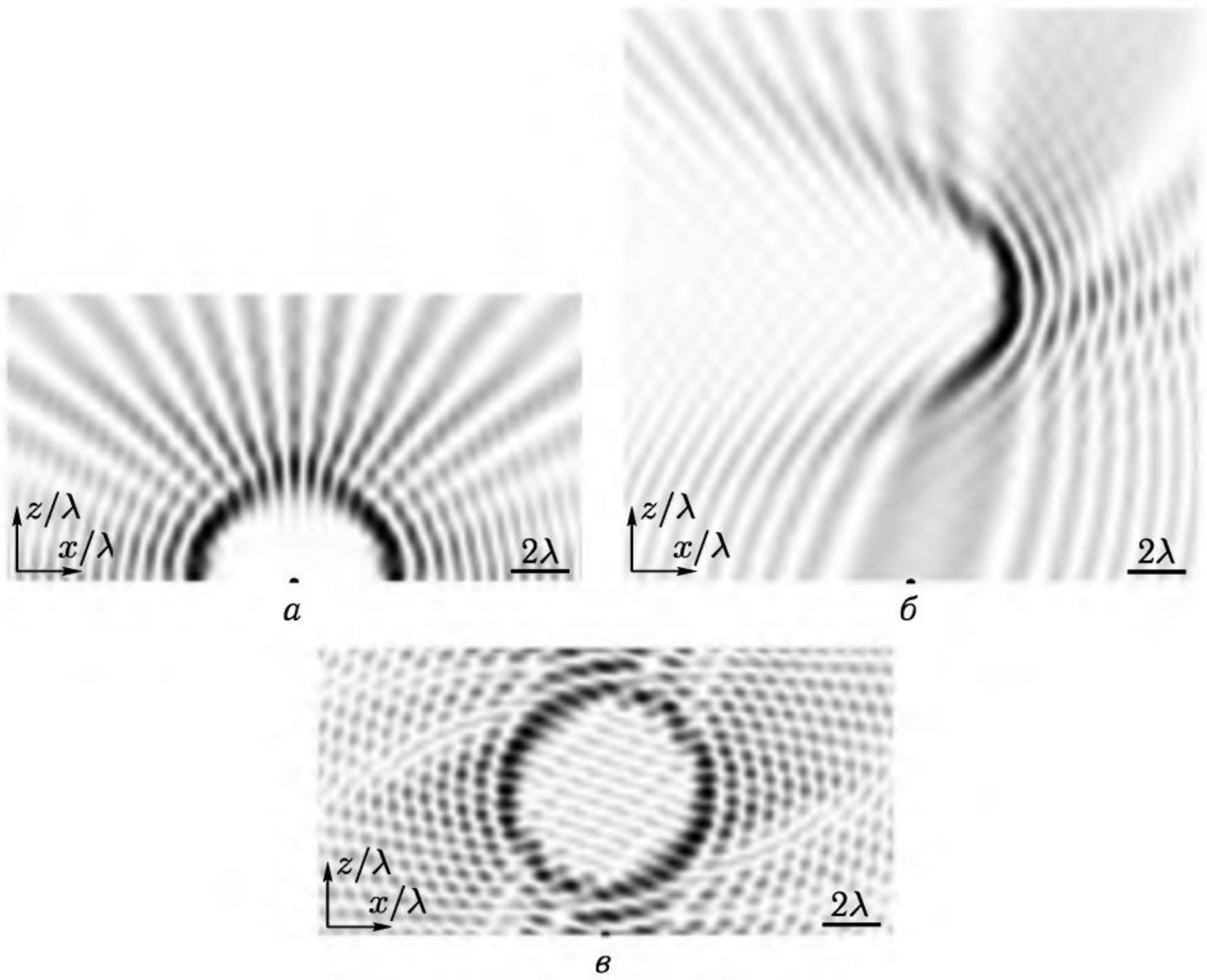


Рис. 1.21. Распределение усредненной по времени интенсивности светового поля в плоскости Oxz с начальной комплексной амплитудой (1.155) (*а*) и (1.154) (*б*), также в случае встречного распространения двух световых полей (1.153) (*в*)

Чтобы сформировать кольцо с постоянной интенсивностью, также моделировалось распространение полей (1.149) от двух источников, расположенных на расстоянии 10λ друг напротив друга. В плоскости $z = 0$ комплексная амплитуда была задана в виде

$$E(x, z = 0) = E_n^+(x, -z_0) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \times \\ \times \int_0^\pi \exp\left(in\theta + ikx\cos\theta - ikz_0\sin\theta\right) d\theta, \quad (1.156)$$

а в плоскости $z = 2z_0 = 10\lambda$ комплексная амплитуда была задана симметрично в виде $E\left(x, z = 2z_0\right) = E\left(-x, z = 0\right)$. Распределение амплитуды и фазы поля (1.156) показано на рис. 1.22.

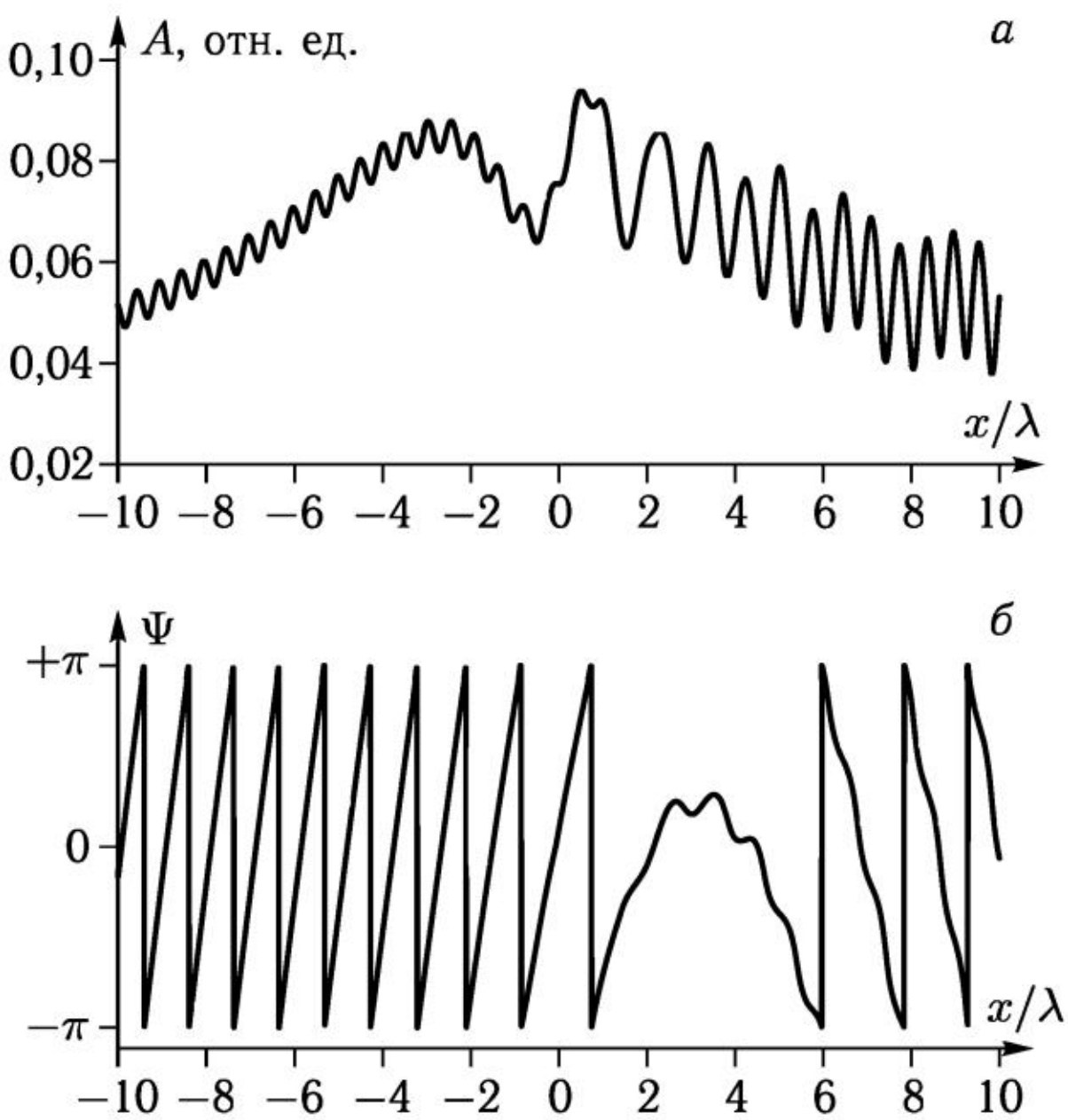


Рис. 1.22. Амплитуда A и фаза Ψ поля (1.156)

Эти два линейных источника генерируют пучки, распространяющиеся навстречу друг другу, и формируют двумерный бесселев пучок с центром в точке $x = 0$, $z_0 = 5\lambda$. Остальные параметры были равны: область моделирования: $-100\lambda \leqslant x$, $z \leqslant 100\lambda$, $0 \leqslant z \leqslant 10\lambda$, время моделирования $100\lambda/c$, шаг дискретизации по обеим координатам $\lambda/64$, а по времени $\lambda/(128c)$. На рис. 1.23 показана усредненная по времени интенсивность сформированного двумерного бесселева пучка с топологическим зарядом $n = 20$. Оставшаяся небольшая неравномерность распределения интенсивности на световом кольце объясняется конечными размерами обоих источников света.

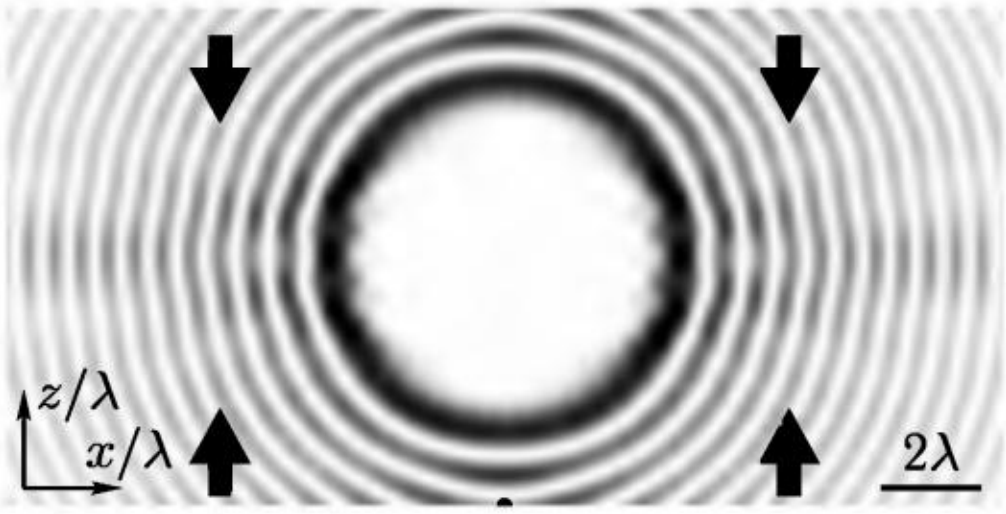


Рис. 1.23. Усредненная по времени интенсивность двумерного бесселева пучка, рассчитанная FDTD-методом (стрелками показаны направления распространения света от источников)

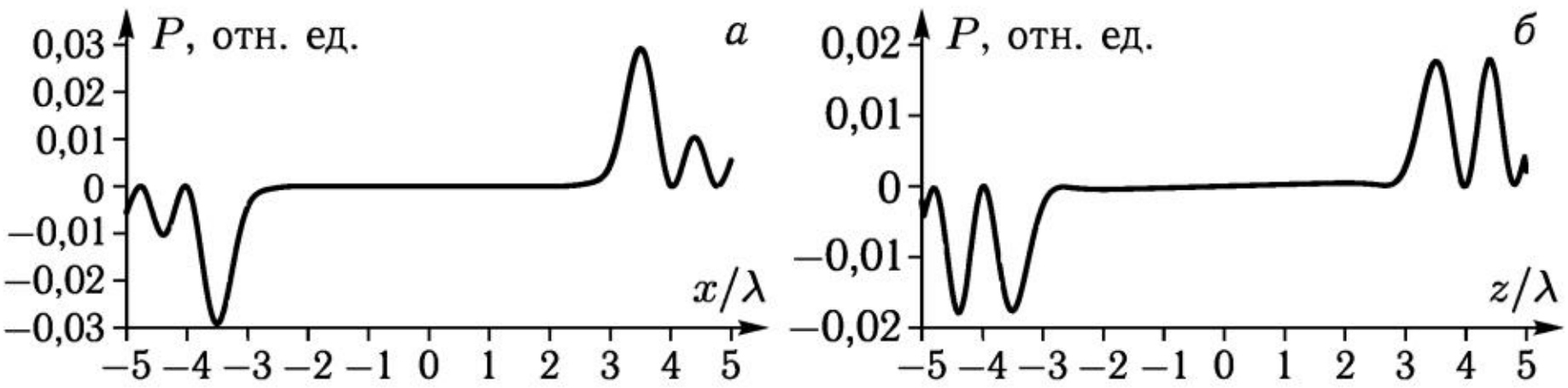


Рис. 1.24. Распределение величины потока мощности в плоскостях $z = 5\lambda$ (*а*) и $x = 0$ (*б*)

На рис. 1.24 показано распределение величины потока мощности в плоскости $z = 5\lambda$ (рис. 1.24 *а*) и в плоскости $x = 0$ (рис. 1.24 *б*).

Из рис. 1.24 следует, что поток световой мощности распространяется по световому кольцу (рис. 1.23) против часовой стрелки.

1.5.2. Моделирование распространения двумерного асимметричного пучка Бесселя. В работах [87, 88] рассмотрены асимметричные непараксиальные моды Бесселя, являющиеся точным решением трехмерного скалярного уравнения Гельмгольца. Аналогичное решение двумерного уравнения Гельмгольца можно получить, если поперечную координату y заменить на продольную координату z, а масштабирующий параметр бесселева пучка принять равным волновому числу k:

$$E_n(x, z; c) = \left[\frac{kr}{kr - 2c\exp(i\varphi)}\right]^{n/2} \times \\ \times J_n\left\{\sqrt{kr\left[kr - 2c\exp(i\varphi)\right]}\right\}\exp(in\varphi), \quad (1.157)$$

где (r, φ) — полярные координаты в плоскости Oxz. Переходя к декартовым координатам, получим выражение для комплексной амплитуды:

$$E_n(x, z; c) = \left[\frac{k(x + iz)^2}{k(x^2 + z^2) - 2c(x + iz)}\right]^{n/2} \times \\ \times J_n\left\{\sqrt{k^2(x^2 + z^2) - 2kc(x + iz)}\right\}. \quad (1.158)$$

Заметим, что пучок (1.158) совпадает с (1.155) при $c = 0$ и $z = 0$.

Известен способ получения решений уравнения Гельмгольца методом комплексного смещения источника. Эта идея возникла еще в 1967 г., когда Кравцов [89] показал, что поле точечного источника с мнимым расположением в параксиальном приближении сводится к параксиальному Гауссову пучку. Позже этот метод развивался в работах [90–93]. В данной работе покажем, что решение (1.158) также может быть получено из комплексной амплитуды обычного бесселева пучка, но ось которого смещена по оси x на действительную величину, а по оси y — на мнимую. Для этого введем две комплексные координаты:

$$\begin{cases} u = x - c/k, \\ v = z - ic/k. \end{cases} \tag{1.159}$$

Тогда (1.158) преобразуется следующим образом:

$$E_n(u, v) = \left(\frac{u + iv}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)^n J_n\left(k\sqrt{u^2 + v^2}\right). \tag{1.160}$$

Если бы координаты u и v были бы вещественными, выражение (1.160) описывало бы комплексную амплитуду традиционного бесселева пучка в декартовых координатах.

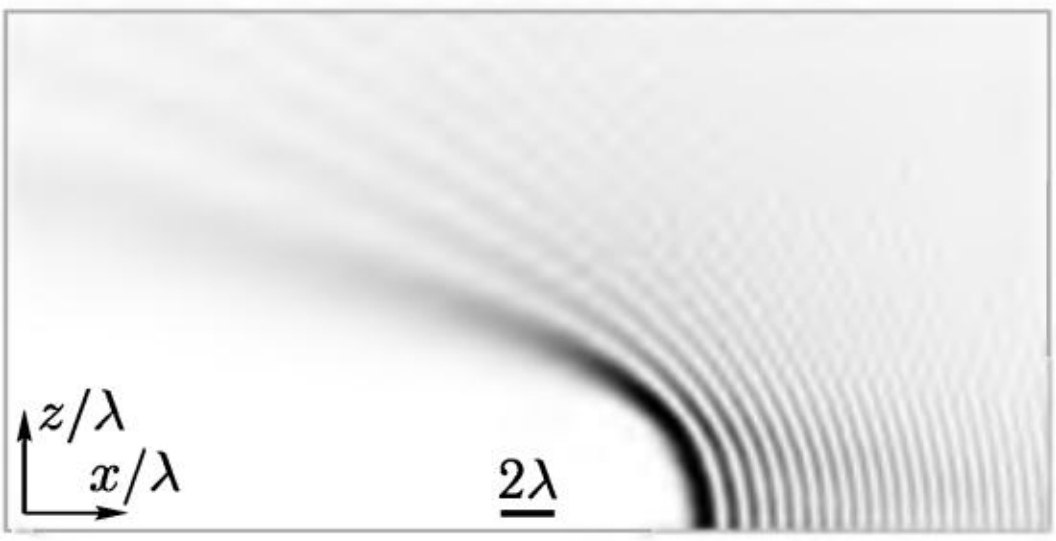


Рис. 1.25. Распределение усредненной по времени интенсивности пучка (16) в плоскости Oxz

На рис. 1.25 показано распределение усредненной по времени интенсивности в плоскости Oxz двумерного пучка Бесселя, а на рис. 1.26 — распределение интенсивности этого же пучка в плоскости $z = 0$.

Рисунки 1.25 и 1.26 получены путем численного моделирования конечно-разностным FDTD-методом (Finite difference in time-domain) решения системы уравнений Максвелла для следующих значений параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, порядок функции Бесселя $n = 40$, область моделирования $-60\lambda \leqslant x \leqslant 60\lambda$, $0 \leqslant z \leqslant 40\lambda$, шаг дискретизации по обеим декартовым координатам $\lambda/32$, по времени — $\lambda/(64c)$, где c — скорость света в вакууме. В качестве начального

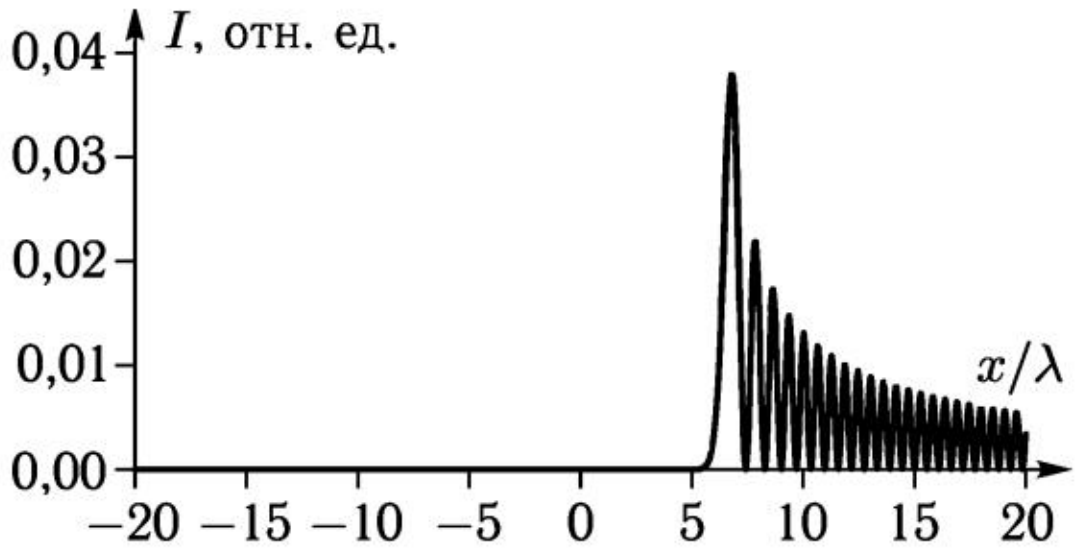


Рис. 1.26. Распределение интенсивности пучка (1.161) в плоскости $z = 0$

поля в плоскости $z = 0$ задавалась следующая комплексная амплитуда (TE-поляризация):

$$E_y\,(x, z = 0) = \begin{cases} J_n\,(kx), & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1.161}$$

Из рис. 1.25 и 1.26 видно, что у поля (1.161) помимо главного максимума интенсивности имеется множество побочных максимумов. Интенсивность второго максимума составляет 57 % от интенсивности главного максимума.

Для того, чтобы уменьшить контраст боковых лепестков, вместо поля (1.161) можно использовать поле (1.158) при $z = 0$ и разных значениях параметра асимметрии c. В начальной плоскости комплексная амплитуда такого поля имеет вид:

$$E_n\,(x, z = 0; c) = \left(\frac{kx}{kx - 2c}\right)^{n/2} J_n\left\{\sqrt{kx\,(kx - 2c)}\,\right\}. \tag{1.162}$$

На рис. 1.27 *а*, *б* показано распределение усредненной по времени интенсивности в плоскости Oxz двумерного асимметричного пучка Бесселя с начальным полем (1.162) для следующих значений параметра асимметрии: $c = 1$ (рис. 1.27 *а*) и $c = 2$ (рис. 1.27 *б*). Значения остальных параметров те же, что и на рис. 1.25 и 1.26. На рис. 1.28 показаны распределения интенсивности этих же пучков в плоскости $z = 0$.

Интенсивность второго максимума на рис. 1.28 *а* составляет 45 % от интенсивности главного максимума, а на рис. 1.28 *б* — 35 %. Интенсивность второго максимума по отношению к главному также вычислялась для $c = 0.5$, полученная зависимость оказалась почти линейной и показана на рис. 1.29. Из рис. 1.29 следует, что величину второго максимума можно снизить с 57 % до 20 %, т. е. почти в 3 раза.

Из сравнения рис. 1.25 и 1.27 видно, что длина распространения пучка с ростом параметра асимметрии c спадает. Определим эту длину как расстояние z_1, на котором интенсивность спадает в два раза:

$$\max_x |E\,(x, z_1)| = \frac{1}{2} \max_x |E\,(x, 0)|\,. \tag{1.163}$$

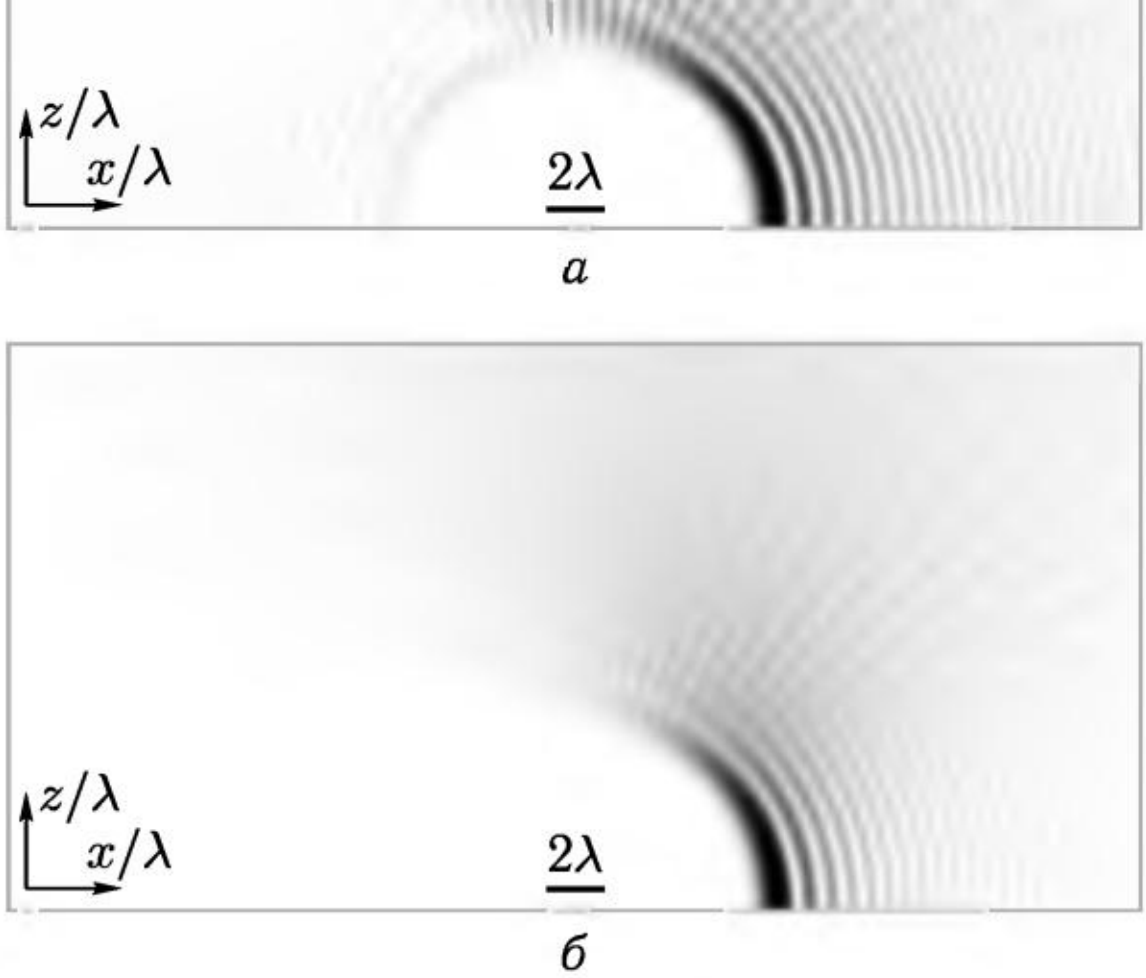


Рис. 1.27. Распределения усредненной по времени интенсивности пучка (1.158) в плоскости Oxz при $c = 1$ (*а*) и $c = 2$ (*б*)

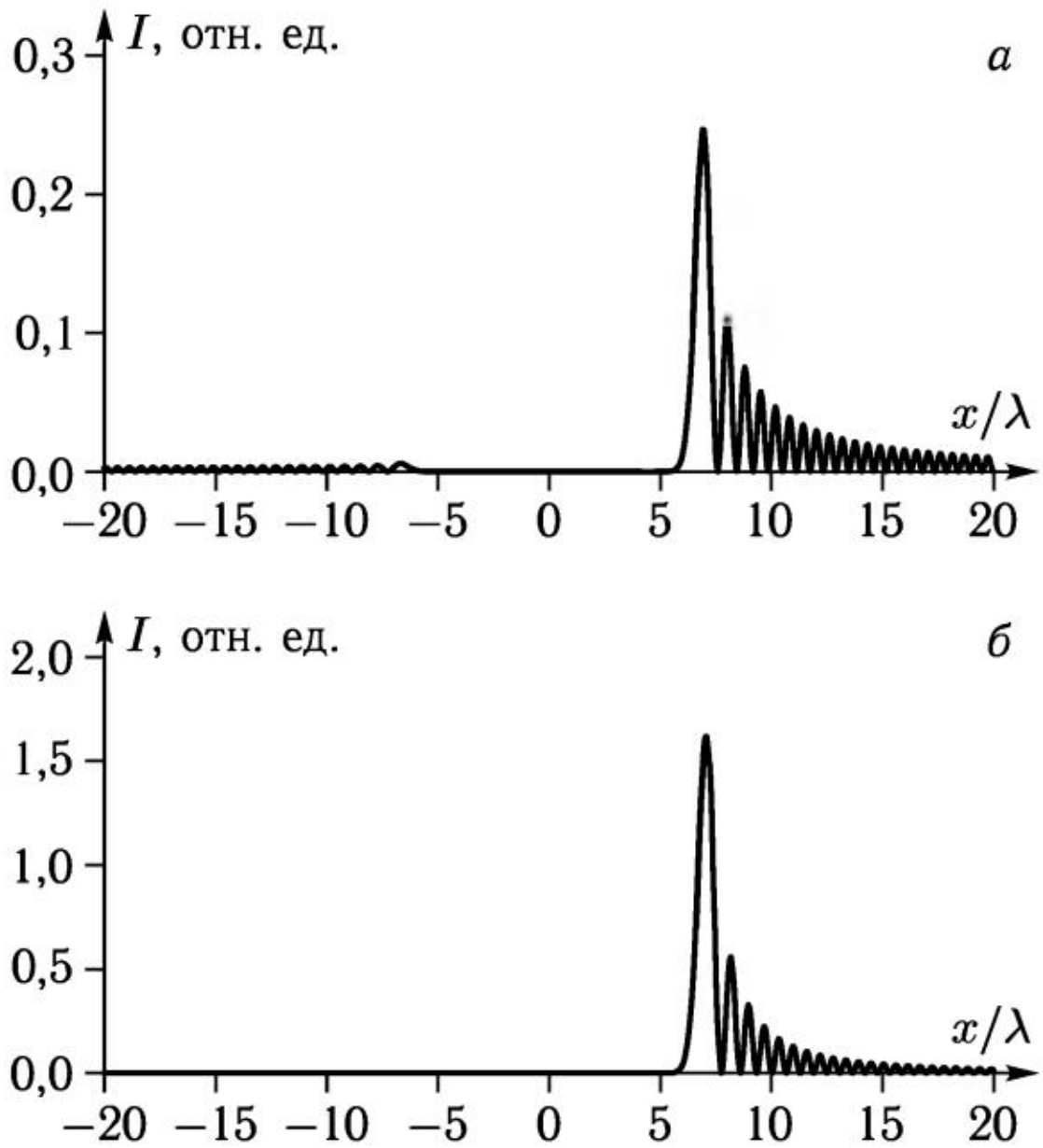


Рис. 1.28. Распределение интенсивности пучка (1.158) в плоскости $z = 0$ при $c = 1$ (*а*) и $c = 2$ (*б*)

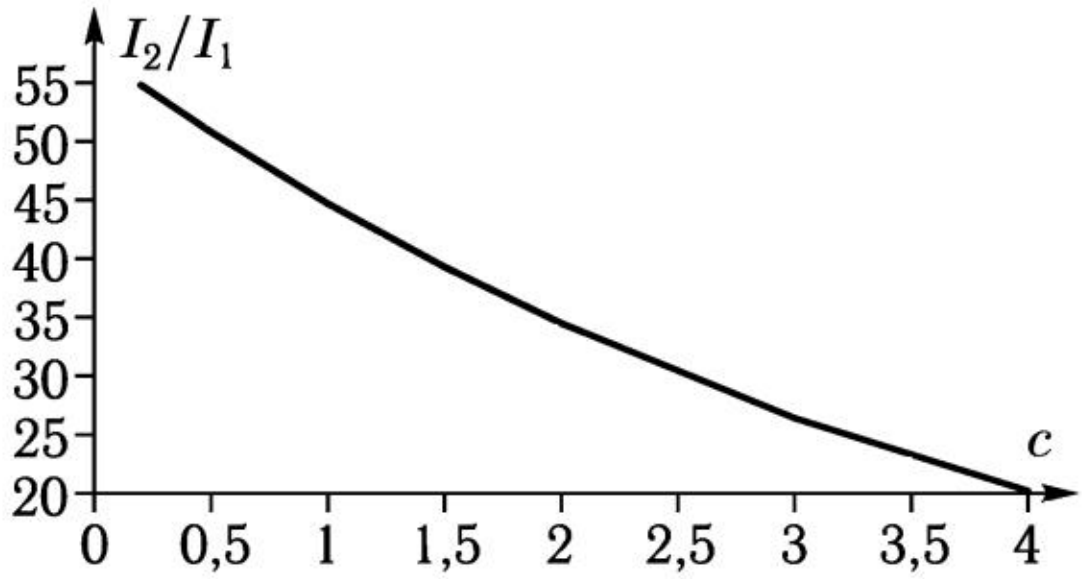


Рис. 1.29. Зависимость интенсивности второго максимума к интенсивности главного максимума от параметра асимметрии c

На рис. 1.30 приведена зависимость длины распространения пучка от параметра асимметрии c.

Из рис. 1.30 видно, что, хотя с ростом параметра асимметрии c двумерного пучка Бесселя (1.158) относительная величина боковых лепестков уменьшается, но и длина траектории тоже уменьшается (но медленнее).

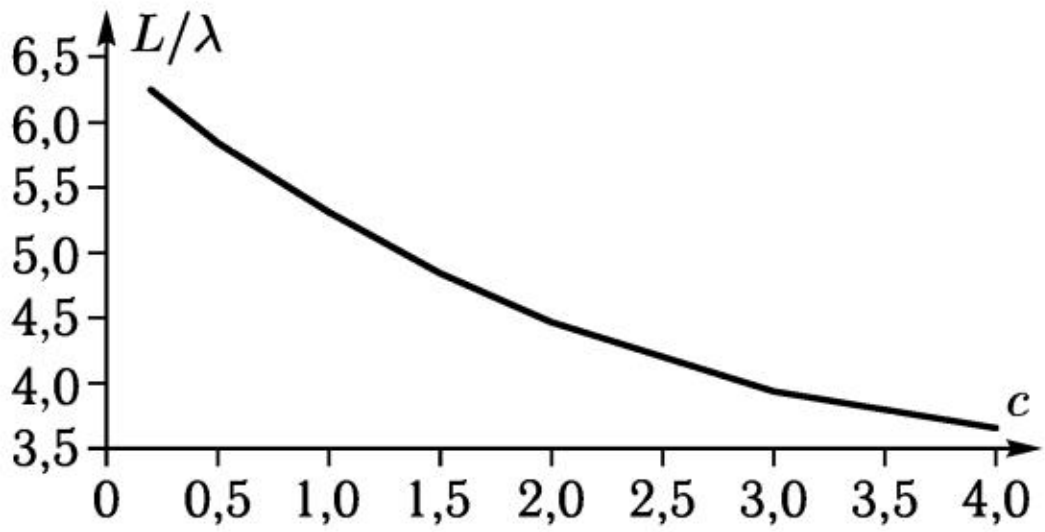


Рис. 1.30. Зависимость длины светового пучка (по полуспаду интенсивности) от параметра асимметрии c

В этом разделе получены следующие результаты. Показано, что если два двумерных пучка, комплексная амплитуда которых описывается рядом из функций Бесселя, Ангера, Вебера, направить навстречу друг другу, то сформируется световое кольцо, по которому циркулирует поток мощности (уравнения (1.149)–(1.151)). Аналитически показано, что асимметричная мода Бесселя получается путем смещения традиционной моды Бесселя вдоль декартовых координат, причем вдоль одной координаты смещение — мнимая величина (уравнение (1.160)). Получено решение двумерного уравнения Гельмгольца, описывающее двумерный ускоряющийся асимметричный бесселев пучок (уравнение (1.157)). Численно показано, что с ростом параметра асимметрии двумерного асимметричного бесселева пучка уменьшается расстояние распространения пучка, но также снижается величина бокового лепестка по отношению к главному лепестку (рис. 1.29 и 1.30).

Глава 2

ВИХРЕВЫЕ ПУЧКИ ЭРМИТА–ГАУССА

2.1. Линейная комбинация двух пучков Эрмита–Гаусса

В 1992 г. Allen [9] показал, что моды Лагерра–Гаусса (ЛГ) обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ). Таким же моментом обладают все оптические вихри или сингулярные лазерные пучки с фазовой особенностью или дислокацией волнового фронта [94]. У таких пучков вектор Умова–Пойнтинга (поток мощности) вращается по спирали вокруг точек фазовой сингулярности. Первая генерация лазерного пучка с фазовой сингулярностью была осуществлена в 1979 г. [95]. Было показано, что две моды Эрмита–Гаусса (ЭГ) HG_{01} и HG_{10} , складываясь интерференционно в резонаторе криптонового ионного лазера, формируют моду ЛГ LG_{01}. В 1989 г. в работе [96] был введен термин «оптический вихрь» (optical vortex). В 1990 г. Соскин [97] сформировал оптический вихрь с помощью амплитудной дифракционной решетки с «вилкой», а в 1992 г. сингулярный лазерный пучок был сформирован с помощью спиральной фазовой пластинки [98].

В 1991 г. Волостников с помощью астигматического модового конвертора преобразовал моду ЭГ высокого порядка в моду ЛГ, обладающую фазовой сингулярностью [99]. В [100] был рассмотрен интерференционный модовый $\pi/2$-конвертор. Орбитальный угловой момент лазерных пучков используется для вращения микрочастиц, в квантовой телекоммуникации, микроскопии, интерферометрии, метрологии и т. д. Современный обзор по ОУМ для света можно найти в [101]. Также многие применения вихревых лазерных пучков с ОУМ описаны в монографии [10]. Формированию оптических вихрей с помощью интерферометров посвящены работы [102–104]. В этих работах с помощью интерференции 3-х плоских волн сформирована матрица оптических вихрей.

В [99] получена формула, позволяющая получить моду ЛГ как конечную сумму мод ЭГ. Например, для того, чтобы получить моду ЛГ с топологическим зарядом 2, требуется сложить минимум три моды ЭГ с определенными комплексными коэффициентами. В этой работе мы покажем, что можно получить световое поле с любым целым ОУМ, сложив только две моды ЭГ с определенными номерами.

Заметим, что недавно с помощью алюминиевого отражающего дифракционного оптического элемента сформирован лазерный оптический вихрь с наибольшим ОУМ и наибольшим топологическим зарядом, равным 5050 [105]. Известны различные методы формирования лазерных пучков с дробным ОУМ [3, 106, 107]. В [106] с помощью

линейной комбинации мод ЛГ формировались лазерные пучки с полуцелым ОУМ. В [3] с помощью астигматического модового конвертора формировались пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса, обладающие дробным ОУМ. В [107] с помощью конической дифракции гауссова пучка с круговой поляризацией формировался пучок Бесселя с ОУМ меньшим, чем единица.

В данном разделе рассчитан ОУМ для линейной комбинации из двух пучков ЭГ, двойные номера которых состоят из прямых и переставленных местами соседних целых чисел, и которые (пучки) смещены по фазе друг по отношению к другу на $\pi/2$. Причем рассматриваются обобщенные пучки ЭГ, которые при определенных параметрах переходят в моды ЭГ и в элегантные пучки ЭГ. Показано, что модуль ОУМ для двух соответствующих мод ЭГ является целым числом, а модуль ОУМ для двух элегантных пучков ЭГ всегда равен единице. При сложении двух соответствующих гибридных пучков ЭГ модуль ОУМ всегда будет дробным числом. Исключением является тривиальный случай, когда складываются два обобщенных пучка ЭГ с номерами (0,1) и (1,0). В этом случае, как и для мод ЭГ модуль ОУМ равен 1.

2.1.1. Обобщенные лазерные пучки Эрмита–Гаусса. Моды Эрмита–Гаусса известны в оптике давно [60]. Элегантные пучки ЭГ, описываются функциями с комплексным аргументом. Эти пучки впервые рассмотрел в 1973 г. Siegman [108].

Однако имеются пучки ЭГ, которые также являются решением параксиального уравнения распространения и имеют явный аналитический вид. Эти пучки при определенных параметрах переходят в моды ЭГ [60] и элегантные пучки ЭГ [108].

Рассмотрим комплексную амплитуду света в начальной плоскости $z = 0$ вида $E_{nm}(x, y) = E_1(x)E_2(y)$, где $E_1(x) = \exp[-(x/a)^2]H_n(x/b)$ и $E_2(y) = \exp[-(y/c)^2]H_m(y/d)$, где a, b, c, d — действительные числа. Так как комплексная амплитуда является произведением двух функций, зависящих от разных декартовых координат, то распространение всего 2D пучка можно рассматривать как распространение 1D пучка по любой из поперечных координат. Комплексная амплитуда такого 1D светового поля на расстоянии z в параксиальном приближении вычисляется с помощью преобразования Френеля и равна:

$$E_1(x, z) = \left(\frac{-iz_0}{z}\right)^{1/2} i^n \left(1 - \frac{iz_0}{z}\right)^{-(n+1)/2} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 + \frac{iz_0}{z}\right]^{n/2} \times$$
$$\times \exp\left[-\left(\frac{x}{a(z)}\right)^2 + \frac{ikx^2}{2R(z)}\right] H_n\left(\frac{x}{b(z)}\right), \quad (2.1)$$

где

$$z_0 = \frac{ka^2}{2}, \quad a(z) = a\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}, \quad R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right], \quad (2.2a)$$

$$b(z) = b\left(\frac{z}{z_0}\right)\left(1 - \frac{iz_0}{z}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 + \frac{iz_0}{z}\right]^{1/2}. \qquad (2.2б)$$

Для комплексной амплитуды $E_2(y, z)$ можно получить выражения, аналогичные (2.1) и (2.2), заменив x, n, a, b на y, m, c, d, соответственно.

Из (2.1), (2.2) при $a/b = c/d = \sqrt{2}$ следует хорошо известное выражение для мод ЭГ:

$$E_n(x, z) = i^n \left[\frac{a}{a(z)}\right] H_n\left[\frac{\sqrt{2}\,x}{a(z)}\right] \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{x^2}{a^2(z)} + \frac{ikx^2}{2R(z)} - i(n + 1/2)\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right], \qquad (2.3)$$

В двумерном случае одномерные моды (2.3) перемножаются и получается двумерная мода ЭГ $E_{nm}(x, y, z) = E_n(x, z)E_m(y, z)$.

Если выполняется условие, что $a/b = c/d = 1$, то вместо (2.1), (2.2) получим выражение для элегантных мод ЭГ [108]:

$$E_e(x, z) = (q(z))^{-(n+1)/2} \exp\left[-\left(\frac{x}{aq(z)}\right)^2\right] H_n\left(\frac{x}{aq(z)}\right), \qquad (2.4)$$

где $q(z) = (1 + iz/z_0)^{1/2}$. Заметим, что обобщенные (2.1) и элегантные (2.4) пучки ЭГ, не являются модами свободного пространства, и при распространении изменяют структуру поперечного распределения интенсивности. Понятно, что двумерные обобщенные пучки ЭГ образуются путем перемножения соответствующих функций (2.1), (2.3) и (2.4). Можно сформировать гибридный пучок ЭГ, который по одной координате будет являться модой ЭГ, а по другой декартовой координате — элегантным пучком ЭГ:

$$E_h(x, y, z = 0) = \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right] H_m\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{a}\right) H_n\left(\frac{y}{c}\right). \qquad (2.5)$$

Пучки ЭГ (2.1) не имеют ОУМ. Линейная комбинация пучков ЭГ с действительными коэффициентами, тоже будет иметь ОУМ, равный нулю. Отличным он нуля ОУМ может быть только для линейной комбинации пучков ЭГ с комплексными коэффициентами. В следующих разделах будет рассчитан ОУМ для суперпозиции из двух обобщенных пучков ЭГ с задержкой по фазе на $\pi/2$.

2.1.2. Орбитальный угловой момент линейной комбинации двух мод Эрмита–Гаусса. Пусть в начальной плоскости задана комплексная амплитуда света:

$$E(x, y, 0) = \exp\left[-\frac{w^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right] \times$$
$$\times \left[H_{2p}(cx)\, H_{2s+1}(cy) + i\gamma H_{2s+1}(cx)\, H_{2p}(cy)\right], \qquad (2.6)$$

где w, c, γ — действительные числа. Найдем ОУМ такого пучка по формуле [109]:

$$J_z = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* \left(x \frac{\partial E}{\partial y} - y \frac{\partial E}{\partial x} \right) dx\, dy. \tag{2.7}$$

Строго говоря, в (2.7) показан не весь ОУМ , а только его проекция, определенная с точностью до константы, на оптическую ось, которая усреднена по поперечной плоскости. ОУМ (2.7) сохраняется по мере распространения пучка [109], и поэтому его можно вычислять в любой плоскости, например, при $z = 0$. Подставив (2.6) в (2.7), получим:

$$\begin{aligned} J_z = 4i\gamma c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-w^2 x^2\right) H_{2p}(cx)\, H_{2s+1}(cx)\, dx \times \\ \times \left[2p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-w^2 y^2\right) H_{2s+1}(cy)\, H_{2p-1}(cy)\, dy - \right. \\ \left. - (2s+1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-w^2 y^2\right) H_{2p}(cy)\, H_{2s}(cy)\, dy \right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Так как в (2.8) под интегралами стоят многочлены, то интегралы можно вычислить и представить их через конечные суммы:

$$\begin{aligned} J_z = \frac{4i\pi\gamma \left[(2p)!\,(2s+1)!\right]^2}{w^{4(p+s+1)}} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\min(p,s+1)} \frac{\left[(s+1)\,c^2 - kw^2\right] \left(c^2 - w^2\right)^{p+s-2k} \left(2c^2\right)^{2k}}{(p-k)!\,(s+1-k)!\,(2k)!} \times \\ \times \left[\sum_{k=0}^{\min(s,p-1)} \frac{\left(2c^2\right)^{2k+1} \left(c^2 - w^2\right)^{p+s-2k-1}}{(p-1-k)!\,(s-k)!\,(2k+1)!} - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{\min(p,s)} \frac{\left(2c^2\right)^{2k} \left(c^2 - w^2\right)^{p+s-2k}}{(p-k)!\,(s-k)!\,(2k)!} \right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Выражение (2.9) громоздко, и из него трудно заключить, когда ОУМ будет целым, когда дробным и когда равен нулю. Можно только сделать определенные выводы при некоторых условиях. Например, если $p > s$, $c = w + \delta$, $\delta \ll w$, то при условии $(p - c)(2s+1)^{-1} w > \delta$ в (2.9) $\mathrm{Im}\,(J_z) > 0$. Если в (2.9) $c = w$, все суммы пропадают и остаются только слагаемые с максимальным номером k. Из (2.6) видно, что при $c = w$ складываются две моды ЭГ с переставленными номерами. Из ортогональности мод ЭГ следует, что отличный от нуля ОУМ будет только для линейной комбинации мод с двумя последовательными

номерами, т. е. когда $p = s$. В этом случае вместо (2.9) получим:

$$J_z = -\frac{2^{4p+2} i\pi\gamma\,[(2p+1)!]^2}{w^2}. \tag{2.10}$$

Для того, чтобы ОУМ не зависел от мощности лазерного излучения, рассмотрим нормированный на интенсивность ОУМ. Мощность пучка (2.6) описывается выражением ($c = w$, $p = s$):

$$I = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* E\, dx\, dy = \frac{\pi\left(1+\gamma^2\right)}{w^2} 2^{1+4p}\,(2p)!\,(2p+1)!. \tag{2.11}$$

Поэтому нормированный ОУМ (ОУМ, деленный на мощность пучка) для линейной комбинации двух мод ЭГ с переставленными соседними номерами равен:

$$\frac{J_z}{I} = -\left(\frac{2i\gamma}{1+\gamma^2}\right)(2p+1). \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что при $\gamma = 1$ ОУМ линейной комбинации двух мод ЭГ

$$E_{n,n+1}(x,y) = \exp\left[-\frac{w^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right] \times \\ \times\left[H_{2p}(wx)\,H_{2p+1}(wy) + i\,H_{2p+1}(wx)\,H_{2p}(wy)\right] \tag{2.13}$$

равен по модулю целому числу:

$$\frac{J_z}{I} = -i\,(2p+1). \tag{2.14}$$

Заметим, что при некоторых значениях p ОУМ будет равен целому числу и при значениях $\gamma \neq 1$. Например, при $\gamma = 1/2$ ОУМ (2.12) будет целым числом при $p = 2$: $J_z/I = -4i$, при $p = 7$: $J_z/I = -12i$ и т. д.

Для линейной комбинации мод ЭГ вида

$$E(x,y,0) = \exp\left[-\frac{w^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right] \times \\ \times\left[H_n(wx)\,H_{n+1}(wy) + i\gamma H_{n+1}(wx)\,H_n(wy)\right] \tag{2.15}$$

аналогично (2.14) можно получить нормированный ОУМ для любого целого n:

$$\frac{J_z}{I} = -\frac{2i\gamma\,(n+1)}{1+\gamma^2}. \tag{2.16}$$

Заметим, что из-за того, что сумма номеров обеих мод в (2.15) одинакова, то линейная комбинация (2.15) также будет являться модой (фазы Гоу $(m+n+1)\,\mathrm{arctg}\,(z/z_0)$ у обоих мод тоже одинаковые) и при распространении будет сохранять свой вид, меняясь только масштабно. Получается интересный результат: мода (2.15) обладает ОУМ, т. е. вектор Умова–Пойнтинга локально описывает спираль в пространстве

вдоль оптической оси, но пучок при этом не вращается, а распространяется без изменения своей структуры.

На практике пучок (2.6) или (2.15) при $c = w$ можно сформировать с помощью интерферометра Маха–Цендера. Мода ЭГ $E_{nm}(x, y)$, сформированная на выходе из лазера, разделяется 50%-зеркалом на два одинаковых пучка, которые попадают в разные плечи интерферометра. В одном из плеч интерферометра с помощью призмы Дове мода ЭГ поворачивается на 90 градусов $E_{mn}(x, y)$. На выходе из интерферометра обе моды совмещаются в один пучок с относительной задержкой по фазе на $\pi/2$.

2.1.3. Орбитальный угловой момент линейной комбинации двух элегантных пучков Эрмита–Гаусса. Рассчитаем ОУМ для линейной комбинации двух элегантных пучков ЭГ. Для этого в (1.168) положим $c = w/\sqrt{2}$ и $p = s$, получим:

$$E_e(x, y) = \exp\left[-\frac{w^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right] \times$$
$$\times \left[H_{2p}\left(\frac{wx}{\sqrt{2}}\right) H_{2p+1}\left(\frac{wy}{\sqrt{2}}\right) + i\gamma H_{2p+1}\left(\frac{wx}{\sqrt{2}}\right) H_{2p}\left(\frac{wy}{\sqrt{2}}\right)\right]. \quad (2.17)$$

Тогда нормированный ОУМ, аналогичный (2.12), будет иметь вид:

$$\frac{J_z}{I} = -\left(\frac{2i\gamma}{1+\gamma^2}\right). \quad (2.18)$$

Из (2.18) видно, что линейная комбинация двух элегантных пучков ЭГ (2.17) будет всегда обладать ОУМ, равным по модулю 1 (при $\gamma = 1$) при всех возможных значениях номеров p.

Это очень неожиданный результат. Получается так, что ОУМ (2.14) для двух мод ЭГ определяется максимальным номером моды, участвующей в линейной комбинации. И поэтому, чем выше номер моды ЭГ, тем больше ОУМ лазерного пучка (2.13). Для элегантных пучков (2.17) из (2.18) следует, что ОУМ определяется разностью двух номеров пучка, участвующих в линейной комбинации. А так как, разность номеров пучков в (2.17) равна единице, то и ОУМ равен по модулю 1 (при $\gamma = 1$).

Для линейной комбинации элегантных мод с другими номерами (пусть $k = 2l+1$ — нечетное)

$$E_e(x, y) = \exp\left[-\frac{w^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right] \times$$
$$\times \left[H_{2p}\left(\frac{wx}{\sqrt{2}}\right) H_{2p+k}\left(\frac{wy}{\sqrt{2}}\right) + i\gamma H_{2p+k}\left(\frac{wx}{\sqrt{2}}\right) H_{2p}\left(\frac{wy}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad (2.19)$$

получим ОУМ в виде

$$\frac{J_z}{I} = -\left(\frac{i\gamma}{1+\gamma^2}\right)\frac{k(4p+k)\Gamma^2(2p+k/2)}{\Gamma(2p+1/2)\Gamma(2p+k+1/2)}, \tag{2.20}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Выражение (2.20) совпадает с (2.18) при $k = 1$. При следующем номере $k = 3$ из (2.20) следует:

$$\frac{J_z}{I} = -\left(\frac{2i\gamma}{1+\gamma^2}\right)\frac{3(4p+1)}{(4p+5)}. \tag{2.21}$$

При $\gamma = 1$ и при больших p модуль ОУМ (2.21) близок к 3, т. е. близок к разности номеров элегантного пучка ЭГ (2.19).

2.1.4. Орбитальный угловой момент линейной комбинации двух гибридных пучков Эрмита–Гаусса. Под гибридными пучками ЭГ здесь понимается пучок, который по одной оси является модой ЭГ, а по другой координатной оси — элегантным пучком ЭГ. При этом возможны два варианта линейной комбинации гибридных пучков.

Рассмотрим сумму двух гибридных пучков ЭГ, у которой мода ЭГ имеет больший номер, чем элегантный пучок ЭГ:

$$E_{h1}(x,y) = \exp\left[-\frac{w^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right]\times$$
$$\times\left[H_{2p}\left(\frac{wx}{\sqrt{2}}\right)H_{2p+1}(wy) + i\gamma H_{2p+1}(wx)\,H_{2p}\left(\frac{wy}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{2.22}$$

Тогда нормированный ОУМ для пучка (2.22) будет иметь вид:

$$\frac{J_z}{I} = \left(\frac{2i\gamma}{1+\gamma^2}\right)\frac{(2p+1)!}{(4p-1)!!}. \tag{2.23}$$

Так как в (2.23) в числителе из-за $(2p+1)!$ всегда будут четные и нечетные сомножители, а в знаменателе из-за $(4p-1)!!$ всегда будут только нечетные сомножители, то ОУМ (2.23) при $\gamma = 1$ никогда не будет целым числом, кроме тривиального случая: $\gamma = 1$ и $p = 0$. Например, при $p = 2$ и $\gamma = 1$ из (2.23) получим $J_z/I = i8/7$. Этот ОУМ по модулю немного больше единицы. Заметим также, что ОУМ из (2.23) имеет противоположный знак, по отношению ко всем предыдущим рассчитанным ОУМ.

В другом случае, когда в сумме двух гибридных пучков ЭГ мода ЭГ имеет меньший номер, чем элегантный пучок ЭГ:

$$E_{h2}(x,y) = \exp\left[-\frac{w^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right]\times$$
$$\times\left[H_{2p}(wx)\,H_{2p+1}\left(\frac{wy}{\sqrt{2}}\right) + i\gamma H_{2p+1}\left(\frac{wx}{\sqrt{2}}\right)H_{2p}(wy)\right], \tag{2.24}$$

вместо (2.23) получим другое выражение для ОУМ:

$$\frac{J_z}{I} = -\left(\frac{2i\gamma}{1+\gamma^2}\right)\frac{(2p+1)!(2p+1)(p^2-1)}{(4p+1)!!}. \qquad (2.25)$$

Из (2.25) также следует, что ОУМ для пучка (2.24) всегда будет дробным числом, кроме тривиального случая: $\gamma = 1$ и $p = 0$. Например, при $p = 2$ и $\gamma = 1$ из (2.25) получим $J_z/I = -i40/21$. Этот ОУМ по модулю немного меньше двойки. Заметим, что во всех рассмотренных случаях смена знака у параметра γ приводит к смене знака ОУМ. Заметим также, что общий сомножитель в (2.12), (2.18), (2.21), (2.23) и (2.25) $2\gamma/(1+\gamma^2)$ всегда меньше или равен единице.

2.1.5. Численное моделирование. Для моделирования рассмотрим линейную комбинацию двух обобщенных пучков ЭГ [61]. Пусть в начальной плоскости ($z = 0$) световое поле имеет комплексную амплитуду

$$E(x,y,0) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right)\times$$
$$\times\left[H_{2p}(bx)\,H_{2s+1}(cy) + i\gamma H_{2s+1}(cx)\,H_{2p}(by)\right]. \qquad (2.26)$$

Интенсивность такого светового пучка при длине волны λ и значениях параметров $p = s = 2$ (т. е. используются полиномы Эрмита 4-й и 5-й степени) в начальной плоскости (в области $-10\lambda \leqslant x \leqslant 10\lambda$, $-10\lambda \leqslant x \leqslant 10\lambda$) для некоторых значений масштабирующих множителей b и c показана на рис. 2.1–2.4.

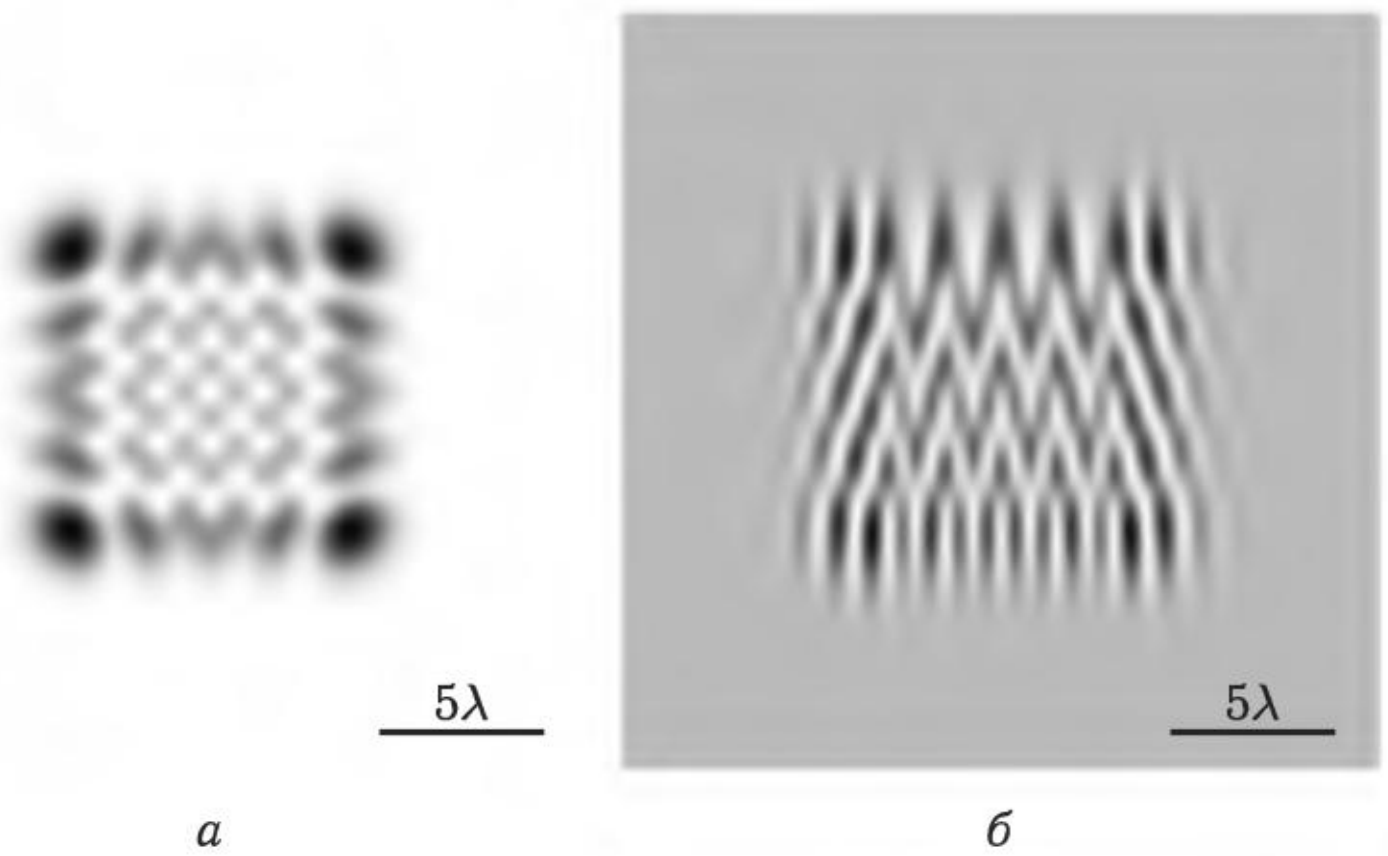


Рис. 2.1. Интенсивность пучка (2.26) без несущей частоты (*а*) и с несущей частотой (*б*) для значений параметров: $w = 2\lambda$, $b = c = \sqrt{2}/w$ (две моды ЭГ)

На рис. 2.1 *б*–2.4 *б* показана интенсивность пучков (2.21), когерентно сложенных с наклонной плоской волной:

$$I(x,y,z=0) = \left|E(x,y,0) + C\exp(i\alpha x)\right|^2, \qquad (2.27)$$

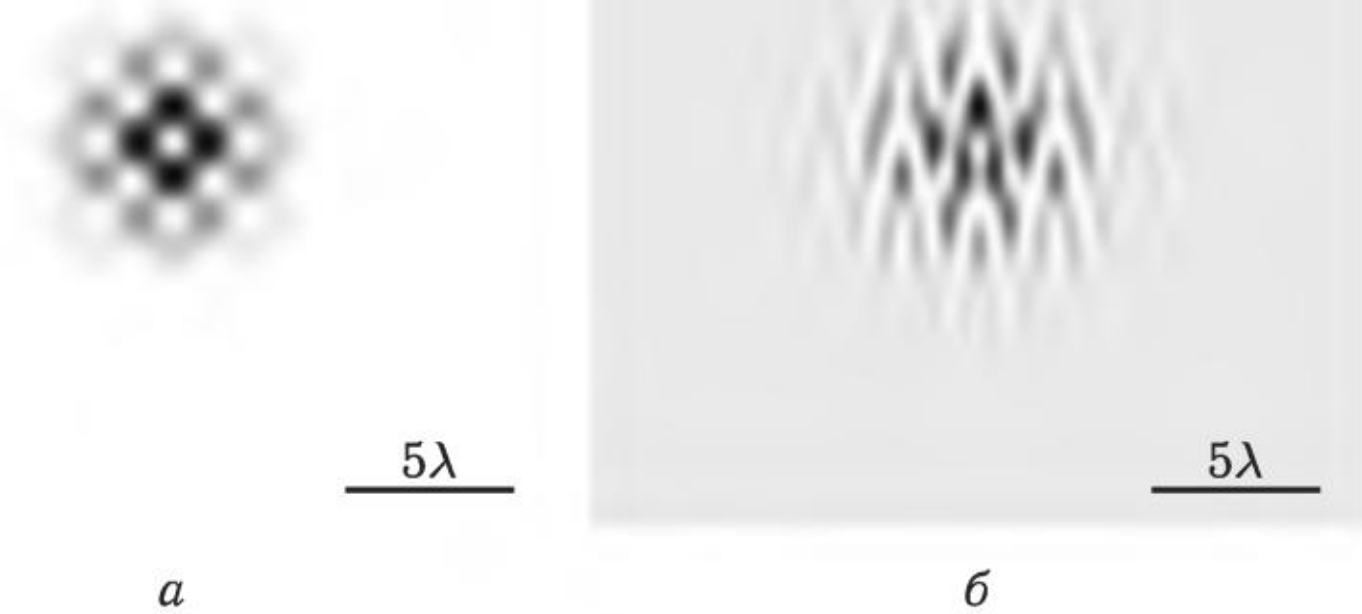


Рис. 2.2. Интенсивность пучка (2.26) без несущей частоты (*а*) и с несущей частотой (*б*) для значений параметров: $w = 2\lambda$, $b = c = 1/w$ (два элегантных пучка ЭГ)

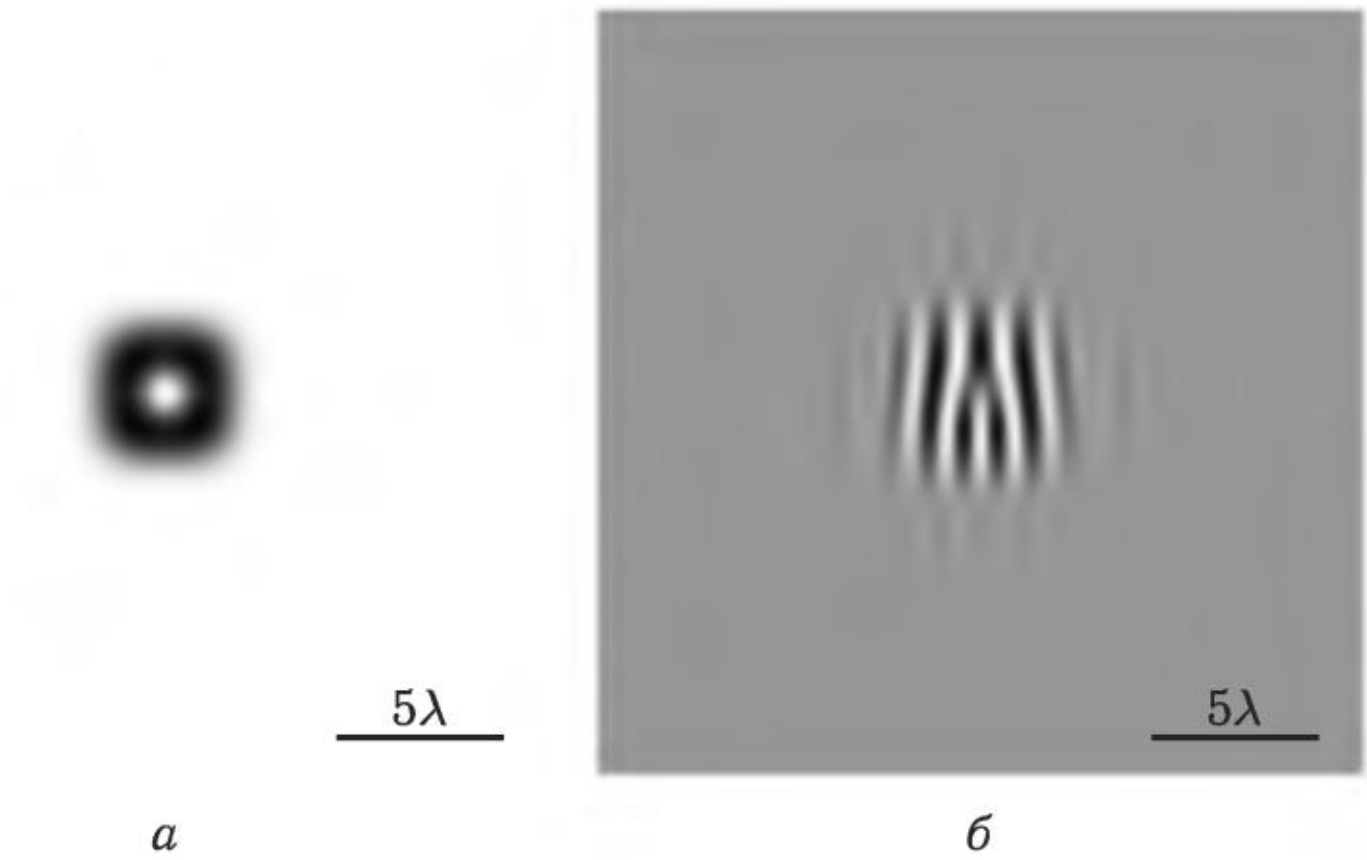


Рис. 2.3. Интенсивность пучка (2.26) без несущей частоты (*а*) и с несущей частотой (*б*) для значений параметров: $w = 2\lambda$, $b = 1/(7\lambda)$, $c = 1/(3\lambda)$ (два обобщенных пучка ЭГ с разной шириной по осям)

где амплитуда C и пространственная частота α подбирались для лучшей наглядности картин на рис. 2.1–2.4. На рис. 2.1 *б*–2.4 *б* видны, характерные «вилочки» среди интерференционных полос, в точке разветвления которых находятся изолированные нули интенсивности и фазовые сингулярности. Модули ОУМ для пучков равны: 5 (рис. 2.1 *а*), 1 (рис. 2.2 *а*), 0,95 (рис. 2.3 *а*) и 0,92 (рис. 2.4 *а*).

В разделе получены следующие результаты [110]. Получено выражение для комплексной амплитуды обобщенных параксиальных пучков Эрмита–Гаусса (2.1). При определенных параметрах эти пучки переходят в известные моды ЭГ и элегантные пучки ЭГ. Рассчитан орбиталь-

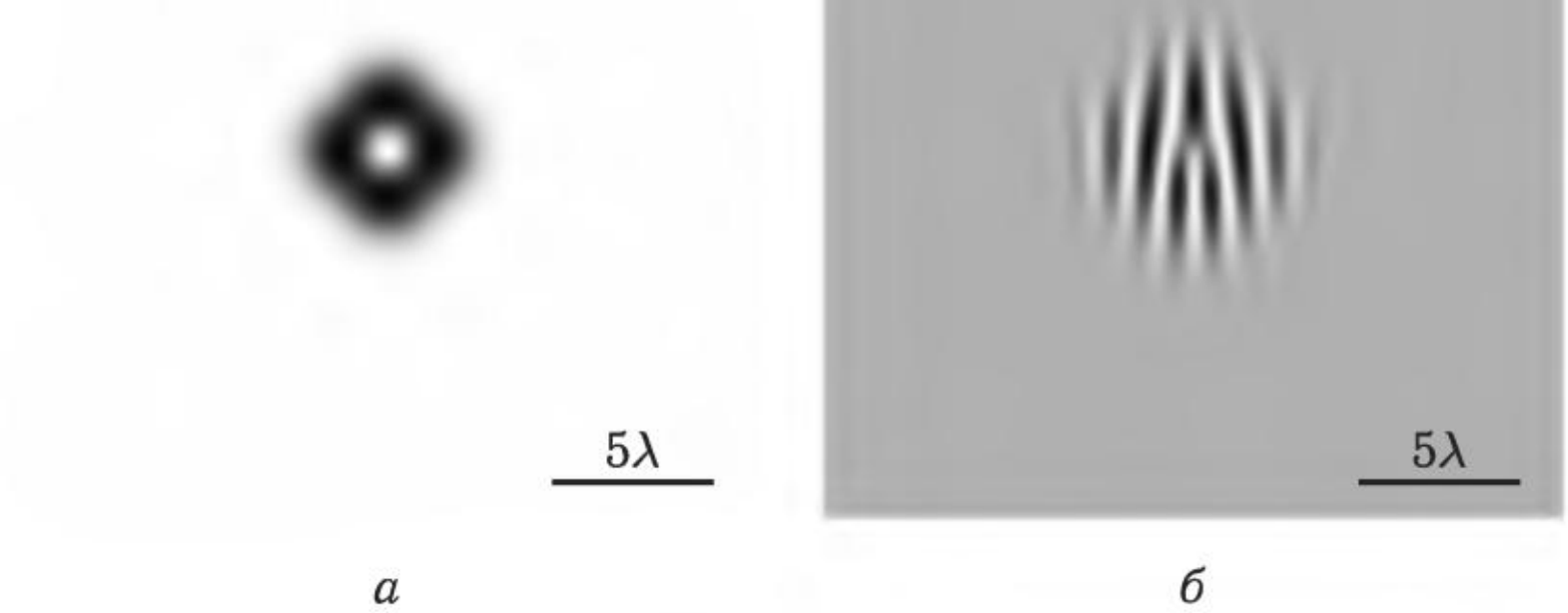


Рис. 2.4. Интенсивность пучка (2.26) без несущей частоты (*а*) и с несущей частотой (*б*) для значений параметров: $w = 2\lambda$, $b = 1/(5\lambda)$, $c = 1/(5\lambda)$ (два обобщенных пучка ЭГ с одинаковой шириной по осям)

ный угловой момент (ОУМ) линейной комбинации двух обобщенных пучков ЭГ с двойными номерами (в прямом и обратном порядке) из двух соседних целых чисел и с задержкой по фазе на $\pi/2$. Показано, что модуль ОУМ для суммы таких двух мод ЭГ — целое число, пропорциональное максимальному номеру моды ЭГ, для суммы двух элегантных пучков ЭГ — всегда единица, для суммы двух гибридных пучков ЭГ — дробное число.

2.2. Вихревые моды Эрмита–Гаусса

Моды Эрмита–Гаусса (ЭГ) известны в оптике с 1966 года [66]. Элегантные пучки ЭГ описываются функциями с комплексным аргументом. Эти пучки впервые рассмотрел в 1973 году Siegman A. E. [108]. В [111, 61] рассмотрены обобщенные пучки ЭГ, которые также являются решением параксиального уравнения распространения и имеют явный аналитический вид. Эти пучки при определенных параметрах переходят в моды ЭГ [66] и элегантные пучки ЭГ [108]. В [99] с помощью астигматического модового конвертора мода ЭГ высокого порядка преобразовывалась в моду Лагерра–Гаусса (ЛГ), обладающую фазовой сингулярностью. В [100] был рассмотрен интерференционный модовый $\pi/2$-конвертор. В [99] также получена формула, позволяющая получить моду ЛГ как конечную сумму мод ЭГ. Например, для того, чтобы получить моду ЛГ с топологическим зарядом 2, требуется сложить минимум три моды ЭГ с определенными комплексными коэффициентами. В [61, 110] показано, что можно получить световое поле с любым целым ОУМ, сложив только две моды ЭГ с определенными номерами. В [3] с помощью астигматического модового конвертора формировались пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса, обладающие дробным ОУМ.

В данном разделе рассмотрены вихревые моды Эрмита–Гаусса (ВЭГ-моды). Эти пучки являются суперпозицией $(n+1)$-ой моды ЭГ. Комплексная амплитуда ВЭГ-мод пропорциональна многочлену Эрмита n-й степени, аргумент которого зависит от действительного параметра a. При $|a| < 1$ на горизонтальной оси в поперечном сечении пучка имеются n изолированных нулей, которые порождают оптические вихри с топологическим зарядом $+1$ $(a < 0)$ или -1 $(a > 0)$. При $|a| > 1$ у ВЭГ-моды аналогичные изолированные нули лежат на вертикальной оси. При $|a| = 1$ все n изолированных нулей собираются на оптической оси в центре пучка и порождают оптический вихрь n-го порядка и ВЭГ-мода совпадает с модой Лагерра–Гаусса порядка $(0, n)$, а при $a = 0$ ВЭГ-мода совпадает с модой Эрмита–Гаусса порядка $(0, n)$. Рассчитан орбитальный угловой момент (ОУМ) ВЭГ-мод, который зависит от параметра a и меняется от 0 (при $a = 0$ и $a \to \infty$) до n $(a = 1)$. Показано, что две моды с разными номерами n и m — ортогональны, а две моды с одинаковым номером, но разными значениями параметра a не ортогональны.

2.2.1. Комплексная амплитуда ВЭГ-моды. Комплексная амплитуда ЭГ моды имеет вид [61, 110]:

$$E_{nm}(x, y, z) = i^{n+m} \left[\frac{w}{w(z)}\right]^2 H_n\left[\frac{\sqrt{2}\,x}{w(z)}\right] H_m\left[\frac{\sqrt{2}\,y}{w(z)}\right] \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} + \frac{ik\left(x^2+y^2\right)}{2R(z)}\right] \exp\left[-i(n+m+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right], \tag{2.28}$$

где

$$z_0 = \frac{kw^2}{2}, \quad w(z) = w\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}, \quad R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right], \tag{2.29}$$

w — это радиус перетяжки гауссова пучка, $R(z)$ — радиус кривизны волнового фронта гауссова пучка, z_0 — длина Рэлея, k — волновое число света, $H_n(x)$ — многочлен Эрмита. Пучки ЭГ (2.28) не имеют ОУМ. Линейная комбинация пучков ЭГ с действительными коэффициентами, тоже будет иметь ОУМ, равный нулю. Отличным он нуля ОУМ может быть только для линейной комбинации пучков ЭГ с комплексными коэффициентами [61, 99]. Рассмотрим линейную комбинацию мод ЭГ (2.28) при $z = 0$ с определенными коэффициентами:

$$U_n(x, y, z) = i^n \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\,(ia)^k}{k!\,(n-k)!} H_k(x)\, H_{n-k}(y), \tag{2.30}$$

где a — действительный параметр. В (2.30) ввели безразмерные координаты $\sqrt{2}\,xw \to x$, $\sqrt{2}\,yw \to y$.

Используя справочное выражение из [65]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!\, t^k}{k!\,(n-k)!} H_k(x)\, H_{n-k}(y) = \left(1+t^2\right)^{n/2} H_n\left(\frac{tx+y}{\sqrt{1+t^2}}\right), \quad (2.31)$$

вместо (2.30) получим выражение для комплексной амплитуды ВЭГ-моды:

$$U_n(x,y,z) = i^n \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\left(1-a^2\right)^{n/2} H_n\left(\frac{iax+y}{\sqrt{1-a^2}}\right). \quad (2.32)$$

Так как в сумме (2.30) сумма номеров ЭГ-мод постоянная $k + (n-k) = n = \mathrm{const}$, то все ЭГ-моды в линейной комбинации (2.30) имеют одинаковую фазовую скорость (одинаковые фазы Гоу $(n+m+1)\,\mathrm{arctg}\,(z/z_0)$), и поэтому весь пучок (2.30) тоже является параксиальной модой и распространяется без изменения поперечной структуры интенсивности (с точностью до масштаба и вращения). Но если исходные ЭГ-моды (2.28), из которых составлен пучок (2.32), имеют нулевой ОУМ, то пучок (2.32) имеет ОУМ, отличный от нуля (если $n \neq 0$).

Из (2.32) следует, что при $a = 0$ ВЭГ-мода совпадает с обычной ЭГ-модой с номерами $(0,\, n)$, а при $a \to \infty$ ВЭГ-мода совпадает с обычной ЭГ-модой с номерами $(n,\, 0)$. При $n = 0$ ВЭГ-мода (2.32) совпадает с обычным гауссовым пучком. Найдем предел амплитуды (2.32) при $a \to 1$. Член многочлена Эрмита $H_n(x)$ имеет максимальную степень, равную $(2x)^n$, поэтому при $a = 1$ из (2.32) получим:

$$U_n(x,y,z) = i^n 2^n \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)(ix+y)^n =$$

$$= (-2)^n \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^n \exp(-in\varphi). \quad (2.33)$$

где $r = (x^2+y^2)^{1/2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$.

Из (2.33) следует, что ВЭГ-мода при $a = 1$ совпадает обычной модой Лагерра–Гаусса с номером $(0, n)$.

2.2.2. Орбитальный угловой момент ВЭГ-моды. Получим выражение для ОУМ светового поля (2.32). Найдем ОУМ такого пучка по формуле [109]:

$$J_z = \mathrm{Im} \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* \left(x\frac{\partial E}{\partial y} - y\frac{\partial E}{\partial x}\right) dx\, dy. \quad (2.34)$$

Строго говоря, в (2.34) показан не весь ОУМ, а только его проекция, определенная с точностью до константы, на оптическую ось, которая усреднена по поперечной плоскости. ОУМ (2.34) сохраняется по мере распространения пучка [109], и поэтому его можно вычислять в любой плоскости, например, при $z = 0$. Подставив (2.30) в (2.34), получим:

$$J_z = -\pi\, 2^n n! \left[2na\left(1+a^2\right)^{n-1}\right]. \quad (2.35)$$

При выводе (2.35) воспользовались свойством ортогональности функций Эрмита–Гаусса [65]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) H_n\left(x\right) H_m\left(x\right) dx = \sqrt{\pi}\, 2^n n! \delta_{nm}, \tag{2.36}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Для того, чтобы ОУМ не зависел от мощности лазерного излучения, рассмотрим нормированный на интенсивность ОУМ. Мощность пучка (2.30) описывается выражением:

$$I = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* E\, dx\, dy = \pi 2^n n! \left(1 + a^2\right)^n. \tag{2.37}$$

Поэтому нормированный ОУМ (ОУМ, деленный на мощность пучка) для ВЭГ-моды равен:

$$\frac{J_z}{I} = -\frac{2an}{1 + a^2}. \tag{2.38}$$

Интересно, что ОУМ (2.38) совпадает с ОУМ пучков, состоящих из линейной комбинации всего двух мод ЭГ, которые были рассмотрены авторами ранее в [61]. Из (2.38) следует, что при $a = 1$ ОУМ ВЭГ-мод равен целому числу

$$\frac{J_z}{I} = -n. \tag{2.39}$$

Из (2.39) следует, что, так как при $a = 1$ ВЭГ-мода совпадает с обычной модой Лагерра–Гаусса с номером $(0, n)$ (2.33), то и ОУМ будет равен по модулю топологическому заряду оптического вихря $\exp(in\varphi)$.

Заметим, что при некоторых значениях n ОУМ будет равен целому числу и при значениях $a \neq 1$. Например, при $a = 1/2$ ОУМ (2.39) будет целым числом при $n = 5$: $J_z/I = -4$, при $n = 15$: $J_z/I = -12$ и т. д. Из (2.38) следует, что при $a = 0$ и $a \to \infty$ ОУМ равен нулю.

2.2.3. Численное моделирование. Перепишем (2.32) в размерных переменных:

$$E_n\left(x, y, z = 0\right) = i^n \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right)\left(1 - a^2\right)^{n/2} H_n\left[\frac{\sqrt{2}\left(iax + y\right)}{w\sqrt{1 - a^2}}\right]. \tag{2.40}$$

По формуле (2.40) была рассчитана интенсивность и фаза в начальной плоскости ($z = 0$) для ВЭГ-мод с разными значениями параметра a. На рис. 2.5 показаны результаты расчета. Параметры расчета следующие: длина волны монохроматического света $\lambda = 532$ нм, топологический заряд (или номер многочлена Эрмита) n =3, радиус перетяжки гауссова пучка с начальной плоскости $w = 10\lambda$, размер области расчета $-50\lambda \leqslant x,\ y \leqslant +50\lambda$

На рис. 2.5 показаны интенсивность (*а*, *б*, *в*) и фаза (*г*, *д*, *е*) ВЭГ-моды в начальной плоскости ($z = 0$) при разных значениях

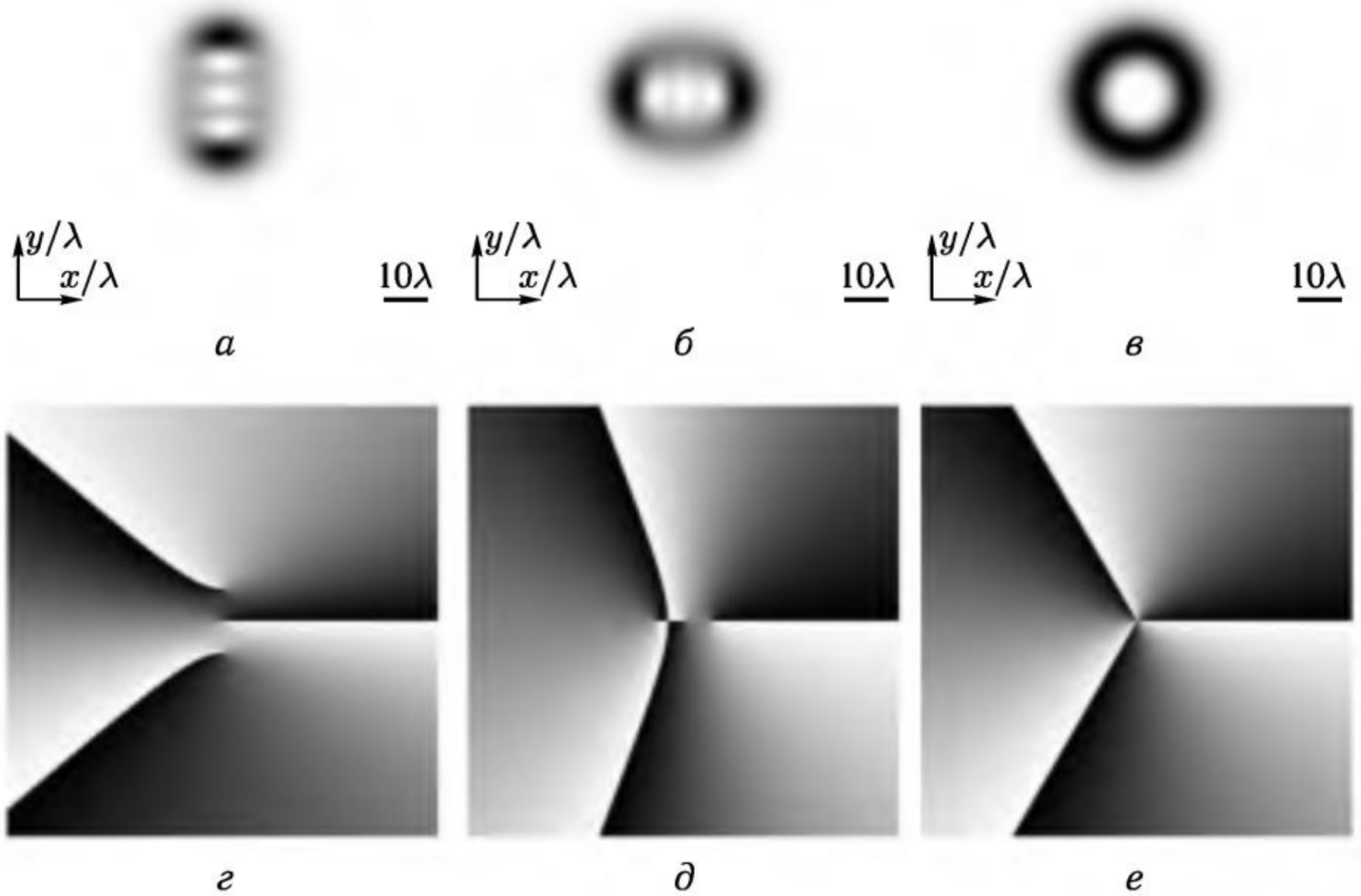


Рис. 2.5. Интенсивность (*а*, *б*, *в*) и фаза (*г*, *д*, *е*) ВЭГ-мод в начальной плоскости ($z = 0$) при разных значениях параметра a: $a = 0{,}5$ (*а*, *г*); $a = 1{,}5$ (*б*, *д*); $a = 1{,}001$ (*в*, *е*)

параметра a: $a = 0{,}5$ (*а*, *г*); $a = 1{,}5$ (*б*, *д*); $a = 1$ (*в*, *е*). На рис. 2.6 *а* показано сечение интенсивности из рис. 2.5 *а* при $x = 0$. Из этого рисунка видно наличие трех нулей интенсивности. На рис. 2.6 *б* показано сечение интенсивности при $a = 1{,}05$ и $y = 0$, а на рис. 2.6 *в* — увеличенный фрагмент сечения в центре картины (рис. 2.6 *б*) при этих же параметрах. На рис. 2.6 *в* также видно наличие трех нулей, не видимых на рис. 2.6 *б*. ОУМ, рассчитанный по формуле (2.38) для показанных мод был равен: $J_z/I = -2{,}4$ (рис. 2.5 *а*, *г*); $J_z/I = -2{,}77$ (рис. 2.5 б, *д*); $J_z/I = -3$ (рис. 2.5 *в*, *е*). Зависимость ОУМ от параметра a показана на рис. 2.7.

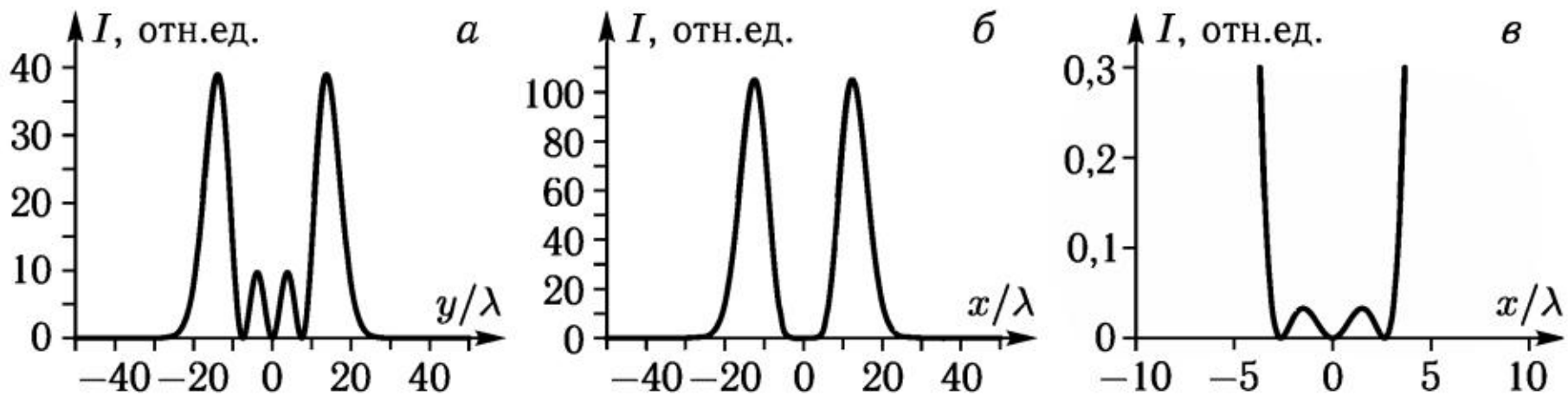


Рис. 2.6. Сечение интенсивности ВЭГ-моды при $a = 0{,}5$ и $x = 0$ (*а*), при $a = 1{,}05$ и $y = 0$: целиком (*б*) и увеличенный фрагмент (*в*)

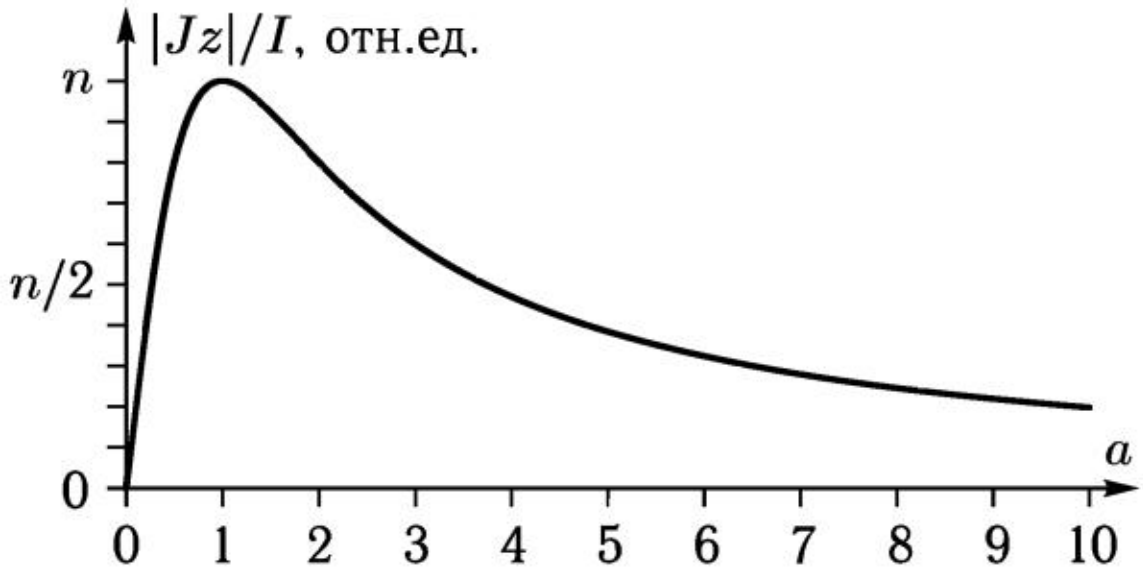


Рис. 2.7. Зависимость ОУМ от параметра a

Из рис. 2.7 видно, что для заданного n ОУМ имеет максимальное значение при $a = 1$.

2.2.4. Изолированные нули интенсивности ВЭГ-моды. Найдем из (2.40) координаты изолированных нулей интенсивности ВЭГ-моды в начальной плоскости. Приравняем аргумент многочлена Эрмита значению корня этого многочлена γ_{nk}, т. е. $H_n(\gamma_{nk}) = 0$. Тогда получим координаты изолированных нулей интенсивности:

$$\begin{cases} x_{nk} = 0\,, \\ y_{nk} = \gamma_{nk}\left(\dfrac{w}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1-a^2}\,, \quad |a| < 1, \end{cases} \tag{2.41}$$

и

$$\begin{cases} x_{nk} = \gamma_{nk}\left(\dfrac{w}{a\sqrt{2}}\right)\sqrt{a^2-1}\,, \quad |a| > 1, \\ y_{nk} = 0. \end{cases} \tag{2.42}$$

Из (2.41) видно, что при $|a| < 1$ у ВЭГ-моды n-го порядка (2.40) есть n изолированных нулей интенсивности, которые лежат на оси y и имеют координаты, пропорциональные корням многочлена Эрмита γ_{nk}, но уменьшенным в $(1-a^2)^{-1/2}$ раз. При этом при $a = 0$, когда ВЭГ-мода совпадает с обычной ЭГ-модой с номером $(0, n)$, нули интенсивности имеют координаты, равные корням γ_{nk}, и уже не являются изолированными нулями интенсивности, а принадлежат линиям нулевой интенсивности, параллельным оси x. С ростом параметра a от 0 до 1, изолированные нули (2.41) смещаются вдоль оси y к центру ($x = y = 0$), и при $a = 1$ все нули «сливаются» в один изолированный ноль (n-кратно вырожденный) интенсивности в центре координат. Из (2.42) следует, что аналогичная динамика, только вдоль оси x, наблюдается у изолированных нулей ВЭГ-моды при $|a| > 1$. С ростом a нули интенсивности «удаляются» от центра координат и, в пределе при $a \to \infty$, координаты всех нулей совпадают с корнями γ_{nk}, а сами нули интенсивности принадлежат линиям нулей, параллельным оси y.

С каждым изолированным нулем интенсивности ВЭГ-моды связан оптический вихрь с топологическим зарядом -1 при $a > 0$ или $+1$ при $a < 0$. Это следует из (2.33).

При распространении ВЭГ-моды (2.31) или (2.40) в аргументе многочлена Эрмита радиус перетяжки гауссова пучка w нужно заменить на выражение из (2.29):

$$w(z) = w\left(1 + z^2/z_0^2\right)^{1/2}. \tag{2.43}$$

Подставим (2.43), например, в (2.41), получим для координат изолированных нулей:

$$\begin{cases} x_{nk} = 0, \\ y_{nk} = \gamma_{nk}\left(\dfrac{w\sqrt{1 + z^2/z_0^2}}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1 - a^2}, \quad |a| < 1. \end{cases} \tag{2.44}$$

Из (2.44) следует, что изолированные нули интенсивности (и сама картина интенсивности) ВЭГ-моды меняется при распространении только масштабно: нули интенсивности, оставаясь на оси y, удаляются от начала координат с ростом расстояния z.

Из (2.41) и (2.42) следует замечательное свойство изолированных нулей интенсивности: минимальное расстояние между ними не ограничивается дифракционным пределом и длиной волны, а может быть любым. При значении параметра a, отличающегося от единицы на бесконечно малую величину $\delta \ll 1$, расстояние между крайними изолированными нулями интенсивности для ВЭГ-моды (2.40) будет меньше величины $\sqrt{2n(n-1)}\,w\delta$. Правда при распространении в пространстве с ростом z расстояние между нулями будет расти: $\sqrt{2n(n-1)}\,w\delta\sqrt{1 + z^2/z_0^2}$.

2.2.5. Ортогональность ВЭГ-мод. Рассмотрим скалярное произведение двух ВЭГ-мод с разными параметрами n, a и m, b. Можно показать, что имеет место равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_n\left(x, y, z = 0; a\right) E_m^*\left(x, y, z = 0; b\right) dx\, dy = \\ = \pi 2^n \left(n!\right)^2 \left[\frac{1 - (ab)^{n+1}}{1 - (ab)}\right] \delta_{nm}, \tag{2.45}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Из (2.45) следует, что ВЭГ-моды ортогональны по номеру n, и не ортогональны по параметру a. При $ab \to 1$ неопределенность в (2.45) раскрывается. Интересно заметить, что две ВЭГ-моды с разными номерами n и m будут ортогональны и будут иметь одинаковый ОУМ (но не максимальный) при условии, что параметры a и b удовлетворяют условию:

$$\frac{n}{m} = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{1 + a^2}{1 + b^2}\right). \tag{2.46}$$

Физически это объясняется тем, что ОУМ лазерного пучка зависит не только от числа изолированных нулей, например, с топологическим зарядом +1, но и от того, какие они имеют координаты [61]. Чем дальше нули интенсивности находятся от центра гауссова пучка, тем меньше их вклад в ОУМ. Максимальный вклад в ОУМ нули интенсивности дают, когда они все «собираются» в один вырожденный ноль в центре гауссова пучка.

2.2.6. Эксперимент. Для формирования вихревых ВЭГ-пучков использована оптическая схема, представленная на рис. 2.8. Для вывода изображений фаз был использован пространственный модулятор света SLM PLUTO-VIS (разрешение 1920×1080 пикселов, размер пикселя 8 мкм). Выходной пучок твердотельного лазера Laser ($\lambda = 532$ нм) ослаблялся с помощью фильтров нейтральной плотности F. Система из микрообъектива MO (40x, $NA = 0{,}6$), линзы L_1 ($f = 350$ мм) и пинхола PH (размер отверстия 40 мкм) была использована для получения однородного гауссового профиля интенсивности освещающего SLM лазерного пучка. Кроме того, это позволяло произвести расширение пучка, для того чтобы он полностью покрывал диплей модулятора. Диафрагма D_1 позволяла менять радиус пучка, падающего на дисплей модулятора света. Отраженный от модулятора пучок с помощью делителя пучка BS и прямоугольной призмы RP направлялся на линзу $L_2(f_3 = 350$ мм). Данная линза в сочетании с диафрагмой D_2 была использована для высокочастотной оптической фильтрации. Далее с помощью линзы L_3 ($f_2 = 150$ мм) строилось изображение на матрице CMOS-камеры MDCE-5A (1/2″, разрешение 1280×1024 пикселов). Расстояние между диафрагмой D_2 и линзой L_3 было больше фокусного расстояния линзы, равного 150 мм, это позволяло получить сходящий световой пучок, при этом фокус системы

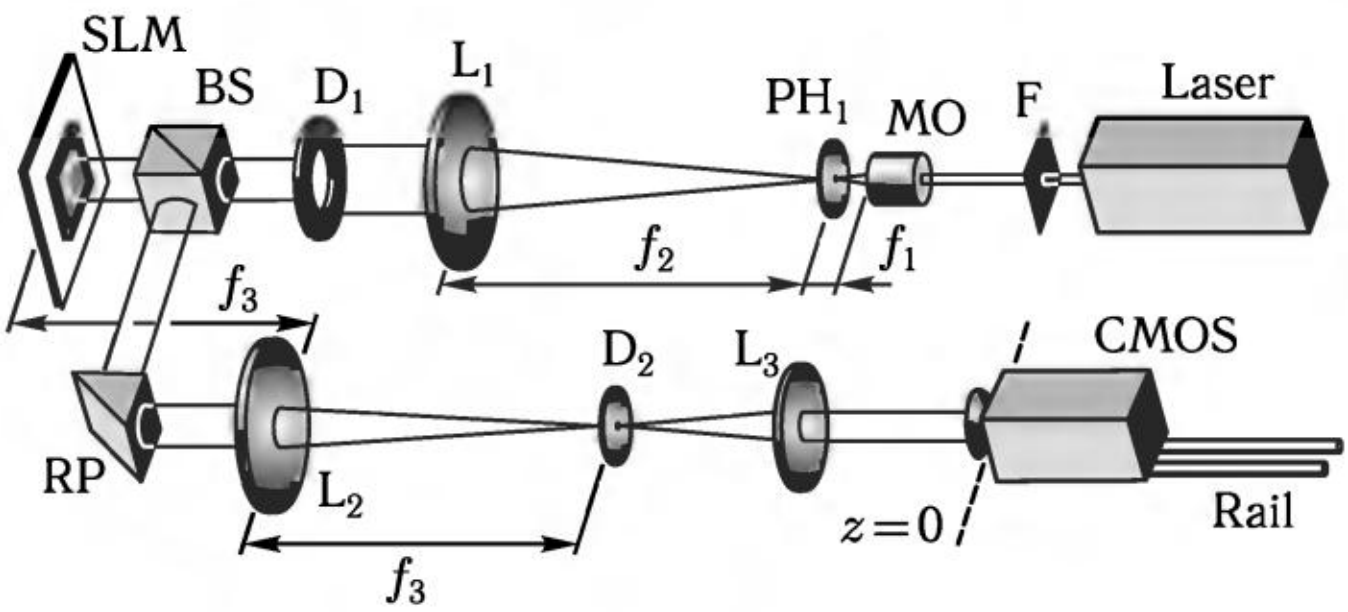


Рис. 2.8. Оптическая схема для формирования световых ВЭГ-пучков: Laser — твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), F — фильтр нейтральной плотности, MO — микрообъектив (40x, $NA = 0{,}6$), PH — пинхол (40 мкм), L_1, L_2 — линзы с фокусным расстоянием $f_2 = f_3 = 350$ мм, L_3 — линза с фокусным расстоянием $f_4 = 150$ мм, BS — делитель пучка, SLM — пространственный модулятор света PLUTO_VIS, RP — прямоугольная призма, D — диафрагма, CMOS — CMOS-камера MDCE-5A (1280×1024), Rail — оптические рельсы

получался на расстоянии около 550 мм от плоскости $z = 0$, сопряженной плоскости дисплея модулятора. Для разделения в пространстве нулевого и первого порядков дифракции было использовано сложение исходной фазовой функции с линейной фазовой маской.

Изображение фазы, использованной в эксперименте, имело размер 1024×1024 пикселов, таким образом, размер выведенного на дисплей модулятора фазового элемента составил примерно $8{,}2 \times 8{,}2$ мм. Диаметр освещающего пучка в ходе экспериментов составил около 3 мм. Данные параметры эксперимента позволили сформировать ВЭГ-пучок, изображение которого на различных расстояниях от SLM показаны на рис. 2.9. Данные изображения были сформированы с помощью фазового распределения, представленного на рис. 2.9 *а* (линейная фаза не показана). Из представленных изображений видно, что сформированный лазерный пучок похож рассчитанный (рис. 2.5 *а*) и сохраняют свою структуру при распространении в пространстве с точностью до масштаба.

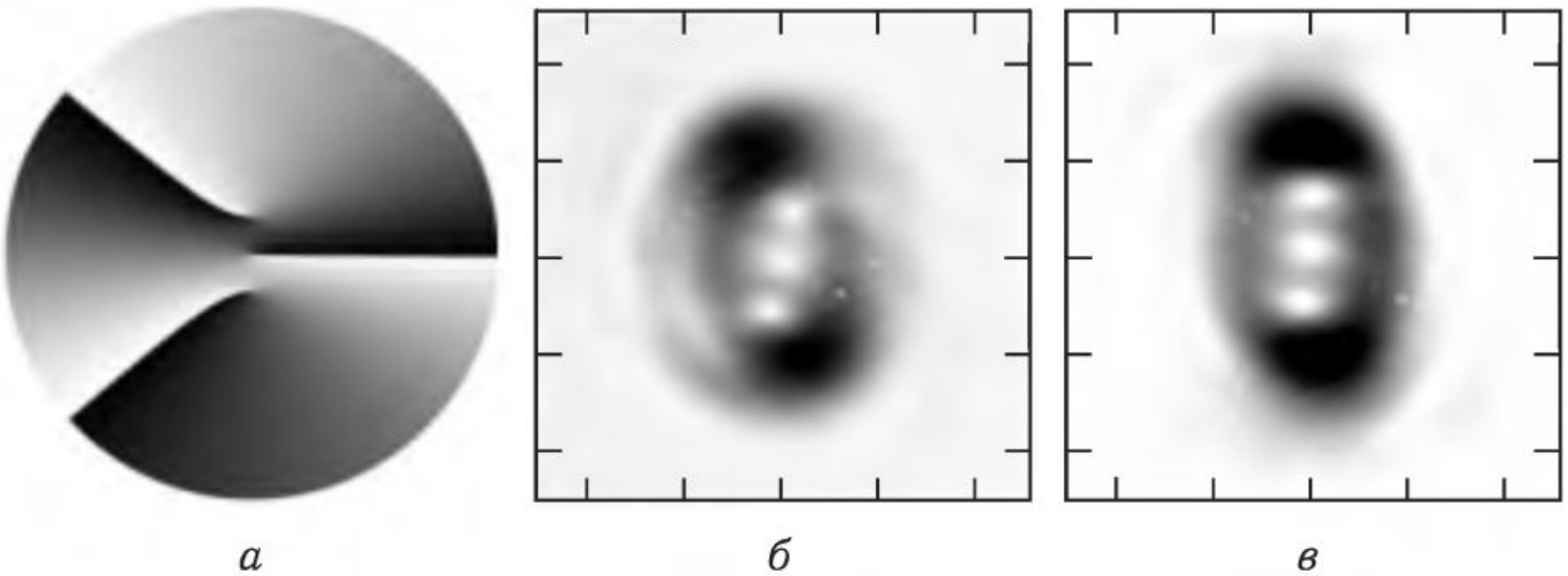
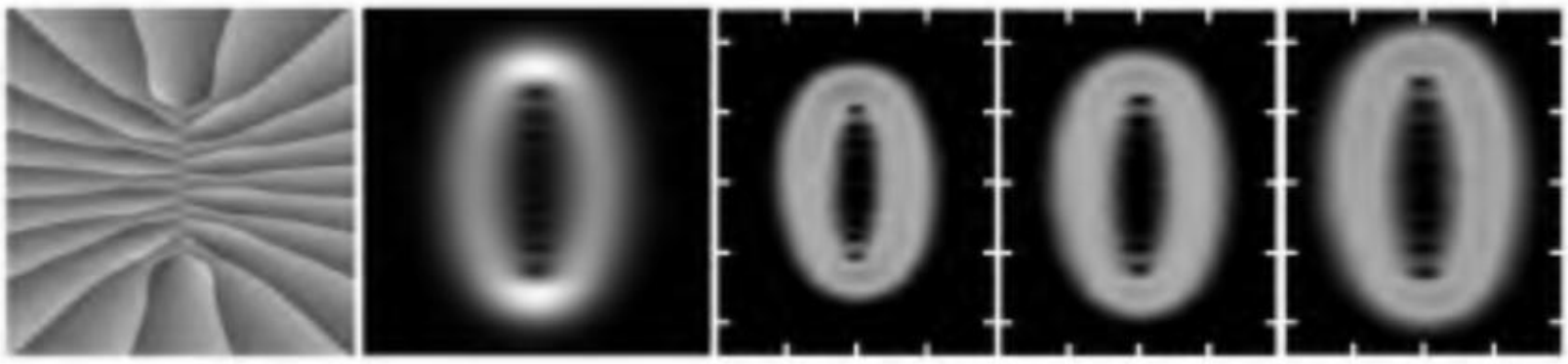


Рис. 2.9. Не кодированная фаза для формирования ВЭГ-пучка ($n = 3$) (*а*) и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях: *б* — 400 мм; *в* — 550 мм. Шаг сетки на изображениях равен 0,3 мм, топологический заряд оптического вихря $n = 3$

На рис. 2.10 показана кодированная фаза ($n = 10$), которая учитывает амплитуду ВЭГ-пучка при $z = 0$. Поэтому картины интенсивности, зарегистрированные на разных расстояниях от модулятора (рис. 2.10 *в*, *г*, *д*), во-первых, также сохраняют свой вид при распространении, а, во-вторых, более точно воспроизводят распределение интенсивности идеального ВЭГ-пучка (рис. 2.10 *б*).

Итак, в этом разделе показано, что двухпараметрическое (n, a) семейство ВЭГ-мод (2.40) можно обобщить на трехпараметрическое семейство (n, a, b), используя формулу сложения многочленов Эрмита [112, 8.958], [113, с. 254]:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(ia)^k (b)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} H_k(x)\, H_{n-k}(y) = (n!)^{-1} \left(b^2 - a^2\right)^{n/2} H_n\left(\frac{iax + by}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right). \tag{2.47}$$



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 2.10. Кодированная фаза для формирования ВЭГ-пучка ($n = 10$) (*а*) и расчетная амплитуда (*б*), и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях: *в* — 100 мм; *г* — 150 мм; *д* — 200 мм. Шаг сетки на изображениях равен 0,5 мм

С учетом (2.47), вместо (2.40) будем иметь:

$$E_{nab}\left(x, y, z = 0\right) = i^n \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right)\left(b^2 - a^2\right)^{n/2} H_n\left[\frac{\sqrt{2}\,(iax + by)}{w\sqrt{b^2 - a^2}}\right], \tag{2.48}$$

где a, b — действительные числа. Уравнение (2.48) описывает комплексную амплитуду обобщенных ВЭГ-пучков, ОУМ которых достигает максимума при $a = b$. Заметим, что замена $a' = a/b$ сводит пучки (2.48) к пучкам (2.40).

В этом разделе получены следующие результаты. Рассмотрены вихревые моды Эрмита–Гаусса (ВЭГ-моды), комплексная амплитуда которых пропорциональна многочлену Эрмита n-ой степени, аргумент которого зависит от действительного параметра a. При $|a| < 1$ на горизонтальной оси в поперечном сечении пучка имеются n изолированных нулей, которые порождают оптические вихри с топологическим зарядом $+1$ ($a < 0$) или -1 ($a > 0$). При $|a| > 1$ у ВЭГ-моды аналогичные изолированные нули лежат на вертикальной оси. При $|a| = 1$ все n изолированных нулей собираются на оптической оси в центре пучка и порождают оптический вихрь n-го порядка и ВЭГ-мода совпадает с модой Лагерра–Гаусса порядка $(0, n)$, а при $a = 0$ ВЭГ-мода совпадает с модой Эрмита–Гаусса порядка $(0, n)$. Рассчитан орбитальный угловой момент (ОУМ) ВЭГ-мод, который зависит от параметра a и меняется от 0 (при $a = 0$ и $a \to \infty$) до n ($a = 1$). Показано, что две ВЭГ-моды ортогональны, если имеют разные значения номера n, и не ортогональны, если имеют разные значения параметра a и одинаковый номер n. Экспериментально с помощью жидкокристаллического пространственного фазового модулятора света сформированы ВЭК-пучки с топологическим зарядом $n = 3, 10$, которые согласуется с расчетным и сохраняет свою структуру при распространении.

Глава 3

АСИММЕТРИЧНЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ПУЧКИ

3.1. Асимметричные бездифракционные моды Бесселя

Известно [114], что уравнение Гельмгольца

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) E\left(x, y, z\right) = 0, \tag{3.1}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число монохроматического света с длиной волны λ, в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеет решение в виде мод Бесселя

$$E_n(r, \varphi, z) = \exp\left(ikz\cos\theta_0 + in\varphi\right) J_n(kr\sin\theta_0), \tag{3.2}$$

где θ_0 — угол конической волны, формирующей пучок Бесселя, $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n-го порядка. Угол θ_0 определяет амплитуду спектра плоских волн моды Бесселя (3.2) на единичной сфере $F_n\left(\theta, \varphi\right) = \left(-i\right)^n \exp\left(in\varphi\right)\delta\left(\theta - \theta_0\right)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Моды Бесселя (3.2) имеют бесконечную энергию и при распространении в однородном пространстве сохраняют свою интенсивность (квадрат модуля амплитуды (3.2)), и поэтому называются бездифракционными пучками Бесселя [1]. Линейная комбинация решений (3.2) уравнения (1) с произвольными коэффициентами также является решением уравнения (1). В [115] предложен алгоритм расчета фазового оптического элемента, который формирует бездифракционные пучки Бесселя с заданным модовым составом:

$$E(r, \varphi, z = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(in\varphi) J_n(kr\sin\theta). \tag{3.3}$$

В [116] предложено рассматривать пучок Матье, как альтернативу пучку Бесселя:

$$E_n(\xi, \eta, z) = \mathrm{Ce}_n(\xi, q)\,\mathrm{ce}_n(\eta, q)\exp(ikz\cos\theta_0), \tag{3.4}$$

где $\mathrm{Ce}_n(\xi, q)$, $\mathrm{ce}_n(\eta, q)$ — непериодическая и периодическая функции Матье. Решение (4) является решением [114] уравнения (3.1) в эллиптической системе координат:

$$\begin{aligned} x &= d\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta, \\ y &= d\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta, \\ z &= z, \\ q &= (kd\sin\theta_0)^2/4. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В [117] показано, что линейная комбинация четного и нечетного пучков Матье

$$E_n(\xi,\eta,z) = \mathrm{Ce}_n(\xi,q)\,\mathrm{ce}_n(\eta,q) + i\,\mathrm{Se}_n(\xi,q)\,\mathrm{se}_n(\eta,q), \quad n \geqslant 2 \qquad (3.6)$$

имеет n изолированных нулей с единичным топологическим зарядом одного знака, лежащих на горизонтальной оси x внутри первого светлого эллиптического кольца. То есть линейная комбинация (3.6) пучков Матье (3.4), которые не обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ), обладает ОУМ. Интересно [110], что линейная комбинация, аналогичная (3.6), двух мод Эрмита–Гаусса, которые не обладают ОУМ, обладает ОУМ.

Периодические функции Матье можно разложить в ряд Фурье [114], например, четные функции:

$$\mathrm{ce}_{2n}(\varphi,q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{2n(q)} \cos(2m\varphi), \qquad (3.7)$$

коэффициенты ряда (3.7) вычисляются рекуррентно. Используя (3.7), бездифракционный пучок Матье (3.4) можно представить как линейную комбинацию мод Бесселя:

$$E_{2n}(\xi,\eta,z) = \exp(ikz\cos\theta_0) \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m}^{2n} \cos(2m\varphi)\, J_{2m}(kr\sin\theta_0), \qquad (3.8)$$

где (ξ,η,z) и (r,φ,z) — эллиптические и цилиндрические координаты. В [118] рассмотрены бездифракционные пучки, описываемые в виде линейной комбинации мод Бесселя (8). Фактически, пучки (3.8) это пучки Матье (3.4) в цилиндрических координатах.

Интересно найти линейные комбинации мод Бесселя (3.3) или (3.8), которые бы описывались простыми аналитическими функциями, с помощью которых можно было бы аналитически рассчитать некоторые свойства таких бездифракицонных пучков. Например, в данной работе рассматривается линейная комбинация мод Бесселя (3.2) с такими коэффициентами, что ряд (3.3) вычисляется и равен функции Бесселя с комплексным аргументом.

Далее показано, что такой бездифракционный элегантный пучок Бесселя (ЭБ-пучок) имеет счетное число изолированных нулей интенсивности, расположенных на оси x вблизи нулей моды Бесселя наименьшего порядка в линейной комбинации. Все эти нули (кроме осевого) порождают оптические вихри с единичными топологическим зарядом и противоположными знаками с разных сторон от начала координат. Нуль интенсивности на оптической оси порождает оптический вихрь с топологическим зарядом n. Точно рассчитан ОУМ таких пучков, который оказался дробным.

3.1.1. Нули асимметричных бесселевых пучков. Рассмотрим следующую суперпозицию мод Бесселя:

$$E_n\left(r,\varphi,z=0\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\exp\left(in\varphi+ip\varphi\right)}{p!}J_{n+p}\left(\alpha r\right). \tag{3.9}$$

Поле (3.9) формирует бездифракционную моду Бесселя при любых целых n. Интересно, что амплитуда (3.9) явно не зависит от длины волны λ, а только через параметр $\alpha=k\sin\theta_0=(2\pi/\lambda)\sin\theta_0$. То есть для любой длины волны можно подобрать угол θ_0, чтобы параметр α не изменился и пучок Бесселя (3.9) остался тем же. В произвольной плоскости, поперечной оптической оси z, такие пучки будут иметь следующую комплексную амплитуду:

$$E_n\left(r,\varphi,z\right)=\exp\left(i\sqrt{k^2-\alpha^2}\,z\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\exp\left(in\varphi+ip\varphi\right)}{p!}J_{n+p}\left(\alpha r\right). \tag{3.10}$$

Мы рассматриваем линейную комбинацию мод Бесселя в виде (9), потому что этот ряд равен функции Бесселя с комплексным аргументом. Действительно, в [65] есть справочный ряд (выражение 5.7.6.1):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}J_{k+v}\left(x\right)=x^{v/2}\left(x-2t\right)^{-v/2}J_v\left(\sqrt{x^2-2tx}\right). \tag{3.11}$$

С помощью (3.11) преобразуем (3.9):

$$E_n\left(r,\varphi,z=0\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\exp\left(in\varphi+ip\varphi\right)}{p!}J_{n+p}\left(\alpha r\right)=$$

$$=\left[\frac{\alpha r}{\alpha r-2\exp\left(i\varphi\right)}\right]^{n/2}J_n\left\{\sqrt{\alpha r\left[\alpha r-2\exp\left(i\varphi\right)\right]}\right\}\exp\left(in\varphi\right). \tag{3.12}$$

Функция Бесселя в правой части (3.12) не будет расходиться на бесконечности, так как все экспоненты и функции Бесселя в левой части (3.12) по модулю не превышают единицы, а значит, весь ряд не превышает числа e. Когда знаменатель в (3.12) равен нулю, тогда и аргумент функции Бесселя равен нулю. Неопределенность ноль на ноль раскрывается, и все выражение (3.12) при этом равно нулю (при $n>0$). Нули ЭБ-пучка (3.12) лежат на оси x (при $\varphi=\pi m$, где $m=0,1,2,\ldots$) в точках с координатами:

$$\begin{aligned} x_{+p}&=\frac{1+\sqrt{1+\gamma_p^2}}{\alpha}, \quad x>0\,;\\ x_{-p}&=\frac{1-\sqrt{1+\gamma_p^2}}{\alpha}, \quad x<0, \quad p=1,2,3,\ldots, \end{aligned} \tag{3.13}$$

В (3.13) γ_p — это корни функции Бесселя: $J_n(\gamma_p)=0$. Из (3.13) следует, что интенсивность в сечении ЭБ-пучка несимметрична отно-

сительно начала координат, так как $x_{+p} > -x_{-p}$. Все нули ЭБ-пучка (кроме осевого при $r = 0$) порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом и противоположными знаками с разных сторон от начала координат. При $x < 0$ топологический заряд оптических вихрей $+1$, при $x > 0$ — топологический заряд -1. Действительно, рассмотрим выражение под корнем в аргументе функции Бесселя в (3.12). Если корень $x = \gamma_p > 2/\alpha$, то при начале обхода вокруг этого нуля полярный угол меняется в диапазоне $0 < \varphi < \pi/2$ и под корнем в аргументе функции Бесселя в (3.12) получим: $(\alpha r)^2 - 2(\alpha r)\cos\varphi - i2(\alpha r)\sin\varphi = x - iy$ (оптический вихрь с топологическим зарядом -1). Если корень $x = \gamma_p < 0$, то при начале обхода вокруг этого нуля полярный угол запишем в виде $\varphi = \pi + \psi$, где ψ меняется в диапазоне $0 < \psi < \pi/2$ и под корнем в аргументе функции Бесселя в (3.12) получим: $(\alpha r)^2 + 2(\alpha r)\cos\psi + i2(\alpha r)\sin\psi = x + iy$ (оптический вихрь с топологическим зарядом $+1$).

Чтобы сменить знаки этих оптических вихрей на противоположенные, надо вместо (3.12) взять комплексно сопряженное выражение. Ноль интенсивности в (3.12) на оптической оси порождает оптический вихрь с топологическим зарядом n.

Эти выводы можно проверить, рассматривая фазы на рис. 3.1 и 3.2. На рис. 3.1 и 3.2 для различных значений параметров показаны интенсивности световых пучков (3.12) в начальной плоскости, а также сечения интенсивности при $z = y = 0$ и $z = x = 0$. При моделировании были использованы следующие значения параметров: длина волны света $\lambda = 532$ нм, масштабирующий множитель $\alpha = 0{,}2\,(\text{мкм})^{-1}$, границы расчетной области $-150\lambda \leqslant x,\ y \leqslant 150\lambda$, число отсчетов по каждой оси: $N = 200$. На рис. 3.1 и 3.2 порядок пучка равен $n = 0, 3$.

ЭБ-пучок нулевого порядка (рис. 3.1) обладает интересным свойством: имеет максимум интенсивности и ОУМ, отличный от нуля (он будет вычислен ниже). Это свойство можно использовать при манипулировании диэлектрическими микрочастицами. Частица, которая по размерам в несколько раз больше основного максимума интенсивности пучка на рис. 3.1, может удерживаться этим максимумом интенсивности и, одновременно, вращаться вокруг своей оси.

Из рис. 3.1 *в* видно, что максимальное значение ЭБ-пучка нулевого порядка

$$E_0\,(r, \varphi) = J_0\left\{\sqrt{\alpha r[\alpha r - 2\exp\,(i\varphi)]}\,\right\} \tag{3.14}$$

больше единицы: $I_{max} = 1{,}6$. Этому есть объяснение. Так как при $\alpha r < 2$ и $\varphi = 0$ аргумент (3.14) чисто мнимый, то на этом участке оси x ЭБ-пучок нулевого порядка можно представить, как

$$E_0(r, \varphi) = I_0\left\{\sqrt{\alpha x(2 - \alpha x)}\,\right\}, \tag{3.15}$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. На концах отрезка $[0,\ 2/\alpha]$ аргумент функции (3.15) принимает зна-

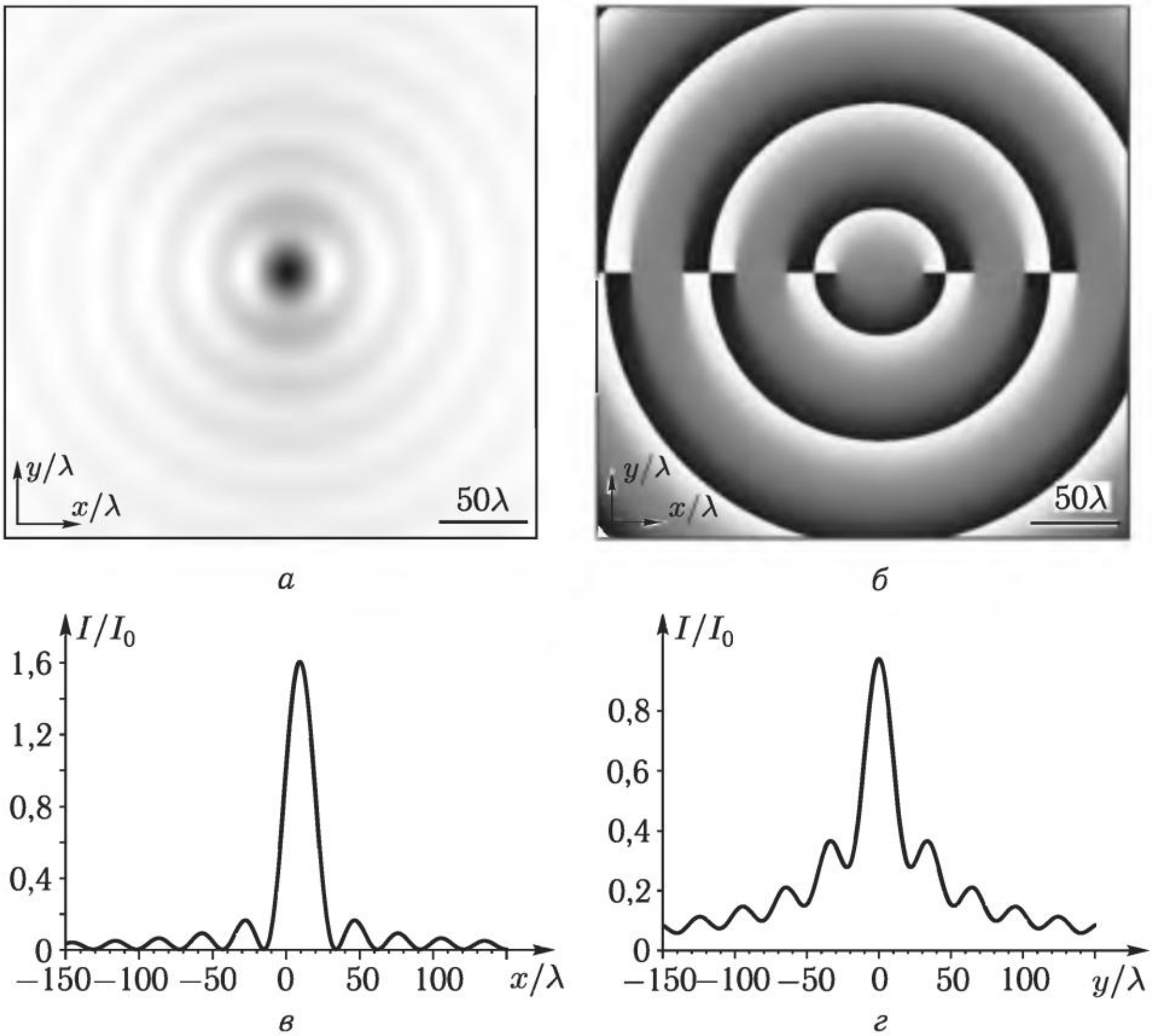


Рис. 3.1. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) светового пучка (3.12) нулевого порядка ($n = 0$) в начальной плоскости, а также сечения интенсивности при $z = y = 0$ (*в*) и $z = x = 0$ (*г*). Черный цвет (*б*) соответствует фазе, равной нулю, белый цвет — фазе, равной 2π

чение ноль, а сама функция Бесселя равна $J_0(0) = I_0(0) = 1$. На этом отрезке $[0, 2/\alpha]$ функция (3.15) достигает максимума в точке, в которой аргумент достигает максимума. А аргумент достигает максимума в середине отрезка, т. е. при $x = 1/\alpha$. В этой точке функция (15) равна $E_0(r = 1/\alpha, \varphi = 0) = I_0(1) \cong 1,266$. Поэтому максимальное значение интенсивности ЭБ-пучка равно $I_{\max} = |E_0(r = 1/\alpha, \varphi = 0)|^2 = I_0^2(1) \cong 1,60$. Из этого, в частности, следует, что максимальная интенсивность боковых лепестков ЭБ-пучка нулевого порядка (3.14) (рис.3.1), которая совпадает с максимальной интенсивностью боковых лепестков для обычного пучка Бесселя $J_0(x)$, составляет меньшую часть от максимальной интенсивности в основном лепестке для ЭБ-пучка (10 %), чем для обычного пучка Бесселя (16 %).

На рис. 3.2 видно, что основной лепесток ЭБ-пучка высокого порядка имеет вид «полумесяца», выпуклого в правую сторону. Можно

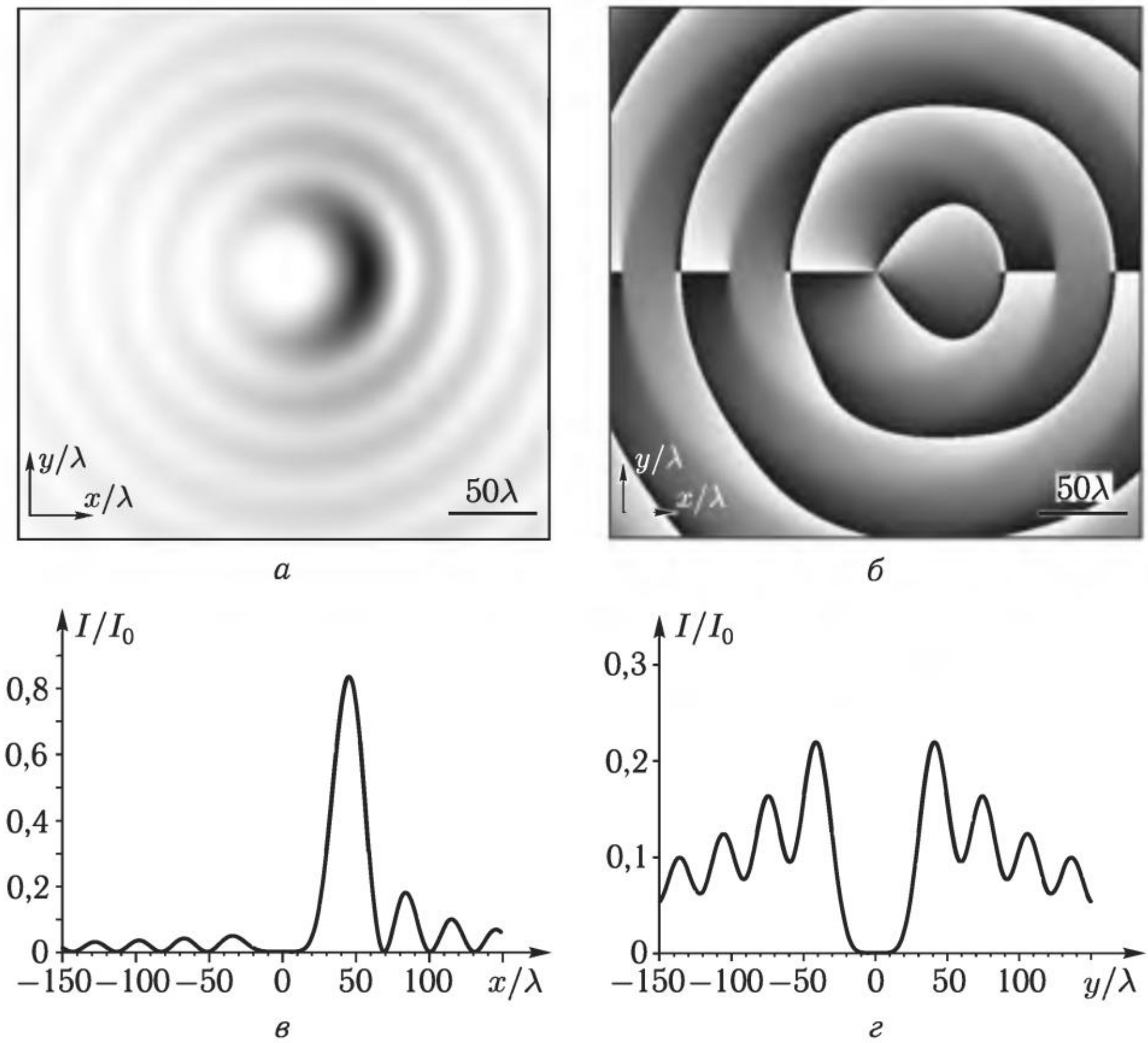


Рис. 3.2. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) светового пучка (3.12) третьего порядка ($n = 3$) в начальной плоскости, а также сечения интенсивности при $z = y = 0$ (*в*) и $z = x = 0$ (*г*). Черный цвет (*б*) соответствует фазе, равной нулю, белый цвет — фазе, равной 2π

записать выражение для ЭБ-пучка, имеющего вид «полумесяца», выпуклого в левую сторону. ЭБ-пучок, имеющий распределение интенсивности, зеркально-симметричное относительно оси $x = 0$ по сравнению с пучком (3.12), имеет амплитуду вида:

$$E_n(r,\varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \exp\left[i(n+p)\varphi\right]}{p!} J_{n+p}(\alpha r) =$$

$$= \left[\frac{\alpha r}{\alpha r + 2\exp(i\varphi)}\right]^{n/2} J_n\left\{\sqrt{\alpha r\left[\alpha r + 2\exp(i\varphi)\right]}\right\}\exp(in\varphi). \quad (3.16)$$

На рис. 3.3 для тех же значений параметров, что и на рис. 3.1 и 3.2, показаны интенсивность и фаза светового пучка (3.16) в начальной плоскости, а также сечения интенсивности при $z = y = 0$ и $z = x = 0$. На рис. 3.3 порядок пучка равен $n = 4$.

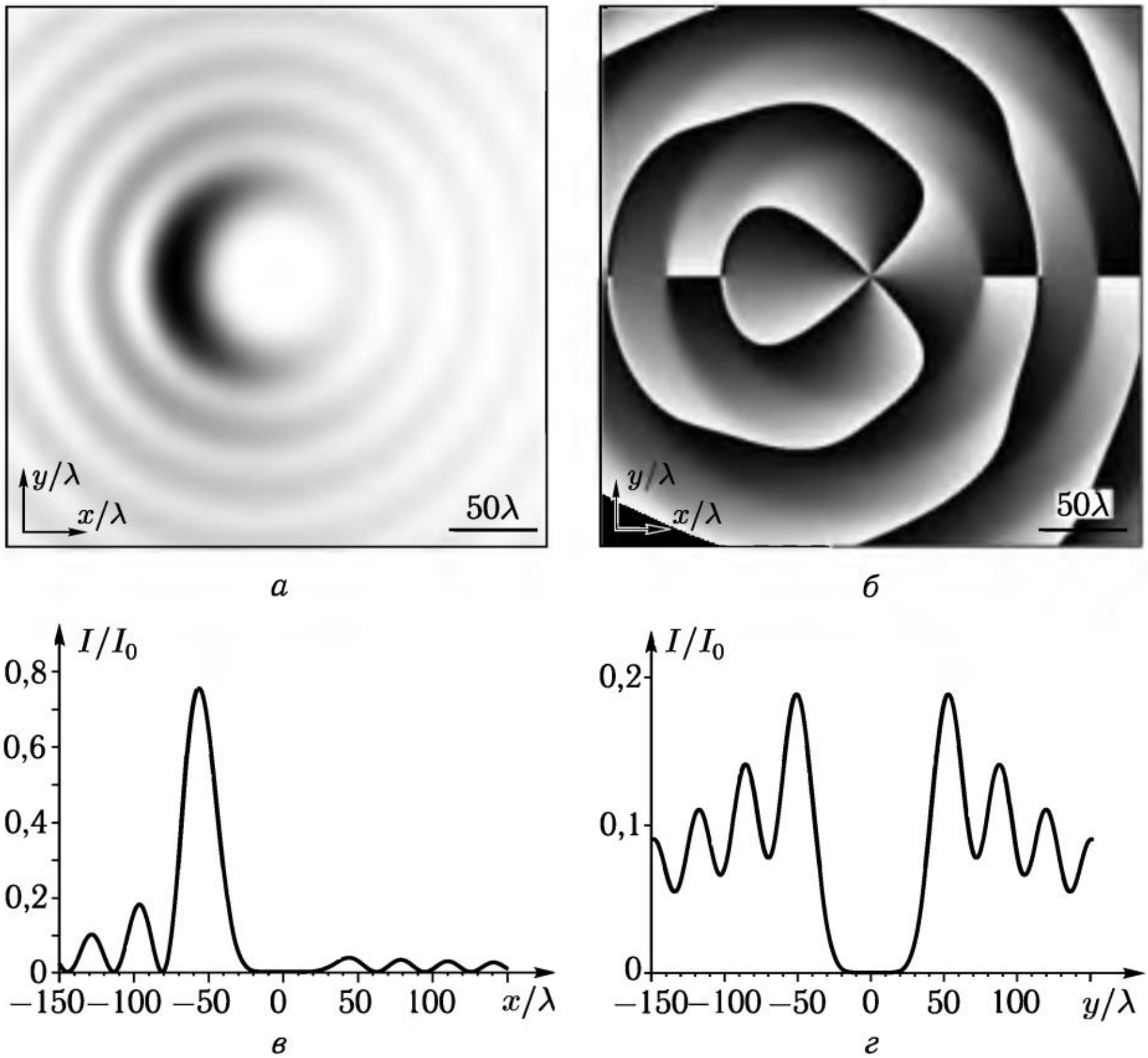


Рис. 3.3. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) светового пучка (3.16) четвертого порядка ($n = 4$) в начальной плоскости, а также сечения интенсивности при $z = y = 0$ (*в*) и $z = x = 0$ (*г*). Черный цвет (*б*) соответствует фазе, равной нулю, белый цвет — фазе, равной 2π

3.1.2. Угловой спектр плоских волн ЭБ-пучка. Подставим угловой спектр пучка Бесселя $F_n(\theta, \varphi) = (-i)^n \exp(in\varphi)\,\delta(\theta - \theta_0)$ в каждое слагаемое ряда в левой части (3.12), получим:

$$A(\theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p \exp[i(n+p)\varphi]}{p!} \delta(\theta - \theta_0) = \\ = \frac{(-i)^n}{2\pi \sin\theta_0} \exp[in\varphi - i\exp(i\varphi)]\,\delta(\theta - \theta_0). \quad (3.17)$$

Действительно, при подстановке (3.17) в разложение по плоским волнам в цилиндрических координатах (r, ξ, z)

$$E_n(r, \xi, z) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\theta, \varphi) \exp[ikr\cos(\varphi - \xi)\sin\theta + ikz\cos\theta] \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (3.18)$$

получается (3.12).

3.1.3. Орбитальный угловой момент ЭБ-пучка. Орбитальный угловой момент J_z (проекция ОУМ на оптическую ось) и суммарная интенсивность I светового пучка в плоскости, поперечной оптической оси, определяются по формулам [110]:

$$J_z = \mathrm{Im}\left\{\iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi}\, r\, dr\, d\varphi\right\} = \mathrm{Im}\left\{\lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi}\, r\, dr\, d\varphi\right\}, \quad (3.19)$$

$$I = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* E r dr d\varphi = \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} E^* E r dr d\varphi. \quad (3.20)$$

Подставив в (3.19), (3.20) комплексную амплитуду из левой части (3.12), получим орбитальный угловой момент и суммарную интенсивность ЭБ-пучка:

$$J_z = 2\pi \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n+p}{(p!)^2} \int\limits_0^R J_{n+p}^2(\alpha r)\, r dr, \quad (3.21)$$

$$I = 2\pi \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p!)^2} \int\limits_0^R J_{n+p}^2(\alpha r)\, r dr. \quad (3.22)$$

Интегралы в этих выражениях описаны в [112] (выражение 5.54.2):

$$\int J_p^2(\alpha r)\, r dr = \frac{r^2}{2}\left[J_p^2(\alpha r) - J_{p-1}(\alpha r)\, J_{p+1}(\alpha r)\right]. \quad (3.23)$$

Используя асимптотику функции Бесселя при больших значениях аргумента (выражение 9.2.1 в [53]), получим, что все интегралы в (3.21) и (3.22) не зависят от порядка функции Бесселя и равны $R/(\pi\alpha)$. Тогда, используя числовые ряды 0.246.1 и 0.246.2 из [112] и разделив (3.21) на (3.22), получим выражение для орбитального углового момента, нормированного на интенсивность:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{I_1(2)}{I_0(2)} \approx n + 0{,}69777, \quad (3.24)$$

где $I_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Из (3.24) следует, что ОУМ ЭБ-пучков дробный и линейно возрастает с порядком n. Из (3.24) также следует, что ЭБ-пучок нулевого порядка тоже имеет ОУМ, равный $J_z/I = I_1(2)/I_0(2) = 0{,}69777$. При численном расчете (по формулам (3.19) и (3.20)) получилось для параметров $n = 8$, $\lambda = 532$ нм, $\alpha = 0{,}2\,(\text{мкм})^{-1}$, $-150\lambda \leqslant x,\ y \leqslant 150\lambda$, $N = 400$, что ОУМ равен $J_z/I = 8{,}667$, и отличается от ОУМ, рассчитанного по формуле (3.24) $J_z/I = 8{,}6977$, всего на 0,3 %. Заметим, что подход для расчета ОУМ, использованный в этом разделе, применим для расчета ОУМ любого светового поля, представленного суперпозицией мод Бесселя.

3.1.4. Ортогональность ЭБ-пучков. Подобно тому, как в предыдущем разделе был вычислен орбитальный угловой момент, можно вычислить скалярное произведение двух ЭБ-пучков — пучка n-го порядка с параметром α и пучка m-го порядка с параметром β:

$$(E_{n\alpha}, E_{m\beta}) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} E_{n\alpha} E^*_{m\beta}\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi \frac{\delta(\alpha-\beta)}{\alpha} I_{n-m}(2). \quad (3.25)$$

где $I_{n-m}(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

Из выражения (3.25) видно, что в отличие от мод Бесселя ЭБ-пучки ортогональны только по масштабирующему множителю, и не ортогональны по порядку функции Бесселя.

В этом разделе получены следующие результаты [88]. Предложено двухпараметрическое семейство бездифракционных непараксиальных асимметричных элегантных пучков Бесселя, описывающееся функциями Бесселя первого рода целого порядка с комплексным аргументом (уравнения (3.12), (3.16)). Асимметричные пучки Бесселя имеют счетное число изолированных нулей интенсивности, лежащих на горизонтальной оси x и имеющих единичный топологический заряд (за исключением осевого нуля интенсивности) и разные знаки с разных сторон от оптической оси (уравнение (3.13)); осевой ноль интенсивности имеет топологический заряд, равный порядку функции Бесселя. Асимметричные пучки Бесселя имеют кольцевой спектр по углу, задающему направление волнового вектора, и только распределение фазы по полярному углу (уравнение (3.17)). Асимметричные пучки Бесселя имеют дробный ОУМ, который растет линейно с ростом номера моды (уравнение (3.24)); пучок нулевого порядка имеет максимум интенсивности на оптической оси и изолированные нули интенсивности вблизи корней функции Бесселя и обладает ОУМ, равным $0{,}69777\hbar$ на один фотон. Эти пучки ортогональны по непрерывному параметру и не ортогональны по целому параметру (уравнение (3.25)).

3.1.5. 3.2. Асимметричные пучки Бесселя–Гаусса. В 1987 г. Гори [119] рассмотрел пучки Бесселя–Гаусса (БГ-пучки). Комплексная амплитуда таких пучков описываются произведением гауссовой функции на функцию Бесселя первого рода n-го порядка и на фазовую функцию, описывающую угловую гармонику. Комплексная амплитуда БГ-пучка удовлетворяет параксиальному уравнению распространения. Эти пучки имеют радиально-симметричное распределение интенсивности и обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ). Радиальная симметрия сохраняется при распространении пучка. Но БГ-пучки не являются модами свободного пространства, так как при распространении не только масштабно изменяются, но также перераспределяется световая энергия между различными кольцами в распределении интенсивности в поперечном сечении пучка. БГ-пучки обобщались в ряде работ [120–122].

Например, в [122] рассмотрены пучки Гельмгольца–Гаусса, частным случаем, которых являются пучки Бесселя–Гаусса [119]. БГ-пучки имеют конечную энергию, но известны также моды Бесселя, не обладающие конечной энергией [1]. Моды Бесселя являются решением уравнения Гельмгольца [114] и при распространении в однородном пространстве сохраняют свою интенсивность, и поэтому также называются бездифракционными пучками Бесселя [1]. Линейная комбинация мод Бесселя с произвольными коэффициентами, также является решением уравнения Гельмгольца. В [115] предложен алгоритм расчета фазового оптического элемента, который формирует бездифракционные пучки Бесселя с заданным модовым составом. В [116] предложено рассматривать пучок Матье, как альтернативу пучку Бесселя. В [117] показано, что линейная комбинация четного и нечетного пучков Матье с комплексными коэффициентами обладает ОУМ. Но сами пучки Матье не обладают ОУМ. Интересно [110], что линейная комбинация, двух мод Эрмита–Гаусса с комплексными коэффициентами, которые не обладают ОУМ, обладает ОУМ. Периодические функции Матье можно разложить в ряд Фурье [114]. Например, четные функции Матье раскладываются по косинусам от полярного угла в цилиндрической системе координат, а нечетные — по синусам. Поэтому бездифракционный пучок Матье можно представить как линейную комбинацию мод Бесселя. Такие пучки рассматривались в [118].

Интересно найти линейные комбинации БГ-пучков, которые бы описывались простыми аналитическими функциями, с помощью которых можно было бы аналитически рассчитать некоторые свойства таких пучков. В данном разделе рассматривается линейная комбинация БГ-пучков, которая описывается функцией Бесселя с комплексным аргументом. Показано, что такой асимметричный пучок Бесселя–Гаусса (аБГ-пучок) имеет в начальной плоскости счетное число изолированных нулей интенсивности, расположенных на горизонтальной оси. Все эти нули (кроме осевого) порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом и противоположными знаками с разных сторон от начала координат. Нуль интенсивности на оптической оси порождает оптический вихрь с топологическим зарядом n. При распространении в свободном пространстве аБГ-пучки вращаются вокруг оптической оси. Показано, что такие пучки имеют ОУМ, который растет с номером n, а также увеличивается с ростом параметра c асимметрии пучка. Причем ОУМ аБГ-пучков может быть как целым, так и дробным.

3.1.6. Линейная комбинация БГ-пучков. Запишем комплексную амплитуду пучка Бесселя-Гаусса (БГ-пучки) [119] в начальной плоскости $z = 0$:

$$E_n\left(r, \varphi, z = 0\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2} + in\varphi\right) J_n\left(\alpha r\right), \tag{3.26}$$

где $\alpha = k \sin\theta_0 = (2\pi/\lambda)\sin\theta_0$ — масштабирующий множитель, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ, θ_0 — угол конической волны, формирующей пучок Бесселя. В любой другой плоскости z комплексная амплитуда (3.26) будет иметь вид:

$$E_n(r,\varphi,z) = q^{-1}(z)\exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2 q(z)} + in\varphi\right) J_n\left[\frac{\alpha r}{q(z)}\right], \quad (3.27)$$

где $q(z) = 1 + iz/z_0$, $z_0 = k\omega_0^2/2$ — длина Рэлея, ω_0 — радиус перетяжки гауссова пучка, $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n-го порядка. Пучки (3.27) не являются параксиальными модами свободного пространства, так как аргумент функции Бесселя комплексный. Рассмотрим следующую суперпозицию БГ-пучков $q = q(z)$:

$$E_n(r,\varphi,z;c) = q^{-1}\exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{q\omega_0^2}\right) \times \\ \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p \exp(in\varphi + ip\varphi)}{p!} J_{n+p}\left(\frac{\alpha r}{q}\right). \quad (3.28)$$

Поле (3.28) формирует параксиальный асимметричный пучок Бесселя–Гаусса (аБГ-пучок) при любых целых n и любой комплексной постоянной c. Но для простоты в дальнейшем будем считать постоянную c вещественной положительной величиной: $c \geqslant 0$. Хотя, если рассмотреть c как комплексную величину $c = |c|\arg c$ или учесть, что она может быть отрицательной $c < 0$, то распределение интенсивности поля (3.28) повернется на угол $\arg c$ вокруг оптической оси. При $c = 0$ в (3.28) отличным от нуля остается только одно слагаемое при $p = 0$, и аБГ-пучок становится обычным БГ-пучком (3.26), (3.27).

Здесь рассматривается линейная комбинация БГ-пучков в виде (3.28) потому, что этот ряд равен функции Бесселя с комплексным аргументом. Действительно, в [65] есть справочный ряд (выражение 5.7.6.1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J_{k+v}(x) = x^{v/2}(x-2t)^{-v/2} J_v\left(\sqrt{x^2 - 2tx}\right). \quad (3.29)$$

С помощью (3.29) преобразуем (3.28) и получим:

$$E_n(r,\varphi,z;c) = \frac{1}{q}\exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{q\omega_0^2} + in\varphi\right) \times \\ \times \left[\frac{\alpha r}{\alpha r - 2cq\exp(i\varphi)}\right]^{n/2} J_n\left\{q^{-1}\sqrt{\alpha r\left[\alpha r - 2cq\exp(i\varphi)\right]}\right\}. \quad (3.30)$$

Выражение (3.30) является замкнутой формой для комплексной амплитуды трехпараметрического семейства параксиальных скалярных

аБГ-пучков. Два непрерывных вещественных параметра аБГ-пучков управляют масштабом (α) и степенью асимметрии (c). Радиус гауссова пучка ω_0 считается одинаковым для всего семейства аБГ-пучков. Целый параметр n вместе с непрерывным c определяют величину ОУМ. Когда знаменатель в (3.30) равен нулю, тогда и аргумент функции Бесселя равен нулю. Неопределенность ноль на ноль раскрывается.

Пучок (3.30) имеет счетное число изолированных нулей интенсивности, которые порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом, кроме осевого нуля, который порождает оптический вихрь с n-ым топологическим зарядом. Для получения полярных координат нулей аБГ-пучка приравняем аргумент функции Бесселя в (3.30) корню функции Бесселя γ_{np} ($J_n(\gamma_{np}) = 0$):

$$\alpha^2 r^2 - 2\alpha c q r \exp(i\varphi) = \gamma_{np}^2 q^2. \tag{3.31}$$

Выделим вещественную и мнимую части этого уравнения:

$$\begin{cases} \alpha^2 r^2 - 2\alpha c\,|q|\, r \cos(\varphi + \Psi) = \gamma_{np}^2\,|q|^2 \cos(2\Psi), \\ -2\alpha c\,|q|\, r \sin(\varphi + \Psi) = \gamma_{np}^2\,|q|^2 \sin(2\Psi), \end{cases} \tag{3.32}$$

где $\Psi = \mathrm{arctg}(z/z_0)$ — фаза Гоу. Из (3.32) находятся координаты точек с нулевой интенсивностью:

$$\begin{cases} \varphi_{np} = \dfrac{1}{2} \arccos\left[\cos(2\Psi) - \dfrac{\gamma_{np}^2}{2c^2} \sin^2(2\Psi)\right], \\ r_{np} = \dfrac{|q|}{\alpha} \sqrt{\gamma_{np}^2 \cos(2\Psi) + 2c^2 \pm 2\sqrt{D}}\,, \end{cases} \tag{3.33}$$

где $D = \left(c^2 - \gamma_{np}^2 \sin^2\Psi\right)\left(c^2 + \gamma_{np}^2 \cos^2\Psi\right)$. Из обоих уравнений (3.33) следует, что для того, чтобы координаты нулей были вещественными, необходимо выполнение следующего условия:

$$\gamma_{np} \sin\Psi \leqslant c. \tag{3.34}$$

Из (3.34) следует, что если $c > \gamma_{np}$, то все нули интенсивности с номерами от $q = 0$ до $q = p$ при распространении не исчезают (так как для этих нулей $\gamma_{nq} < c$ и неравенство (3.34) выполняется для любых расстояний z), однако остальные нули с номерами $q = p + 1$, $p + 2, \ldots$ (для которых $c \leqslant \gamma_{nq}$) пропадают на некотором расстоянии $z = c z_0/(y_{nq}^2 - c^2)^{1/2}$.

При $z = 0$ вместо (3.33) запишем:

$$\begin{cases} r_{p+} = \alpha^{-1} \sqrt{c + \sqrt{c^2 + \gamma_{np}^2}}\,, \quad \varphi_{np} = 2p\pi, \\ r_{p-} = \alpha^{-1} \sqrt{\sqrt{c^2 + \gamma_{np}^2} - c}\,, \quad \varphi_{np} = (2p+1)\pi. \end{cases} \tag{3.35}$$

Из (3.35) следует, что интенсивность в сечении аБГ-пучка несимметрична относительно начала координат, так как $r_{p+} > r_{p-}$. Причем,

когда $c > 0$ растет, асимметрия аБГ-пучка увеличивается, а при $c = 0$ изолированные нули аБГ-пучка пропадают, а появляются кольца нулевой интенсивности радиально-симметричного пучка Бесселя–Гаусса. Все нули аБГ-пучка (кроме осевого при $r = 0$) порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом и противоположными знаками с разных сторон от начала координат. Для нулей интенсивности с радиальными координатами r_{p+} топологический заряд оптических вихрей $+1$, для r_{p-} — топологический заряд -1. Чтобы сменить знаки этих оптических вихрей на противоположные, надо вместо (3.30) взять комплексно сопряженное выражение. Из (3.33) видно, что нули интенсивности, а значит и само распределение интенсивности в поперечной плоскости аБГ-пучка, вращаются при распространении. Но вращение это достаточно сложное. Только когда $c \gg 1$, в первом уравнении в (3.33) можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках, и тогда картина интенсивности в поперечном сечении пучка вращается как единое целое. При этом полярный угол меняется с расстоянием z:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.36}$$

Из (3.36) следует, что аБГ-пучок от начальной плоскости $z = 0$ до расстояния Рэлея $z = z_0$ повернется против часовой стрелке на $\pi/4$, а на остальном участке пути от $z = z_0$ до $z = \infty$ еще на $\pi/4$, и, таким образом, на всем протяжении пути пучок повернется на $\pi/2$. Вращение аБГ-пучка не зависит от номера n, т. е. вращаться будет и нулевой пучок при $n = 0$.

На рис. 3.4 показаны распределение интенсивности и фазы аБГ-пучка (3.30) при разных значениях параметра асимметрии c. При моделировании были использованы следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $\omega_0 = 10\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, границы расчетной области $-40\lambda \leqslant x,\ y \leqslant 40\lambda$. На рис. 3.4 видно, что с ростом $c > 0$ интенсивность из кольцевой становится похожей на полумесяц, выпуклый в правую сторону. Можно записать выражение для аБГ-пучка, имеющего вид полумесяца, выпуклого в левую сторону. аБГ-пучок, имеющий распределение интенсивности, зеркально-симметричное относительно оси $x = 0$ по сравнению с пучком (3.30), имеет амплитуду вида:

$$E_n(r, \varphi, z = 0; c) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-c)^p \exp\left[i(n+p)\varphi\right]}{p!} J_{n+p}(\alpha r) =$$
$$= \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \left[\frac{\alpha r}{\alpha r + 2c\exp(i\varphi)}\right]^{n/2} \times$$
$$\times J_n\left\{\sqrt{\alpha r\left[\alpha r + 2c\exp(i\varphi)\right]}\right\} \exp(in\varphi). \tag{3.37}$$

Также на рис. 3.4 видно, что нули интенсивности, лежащие на оси $x < 0$ с ростом c приближаются к центру координат: на рис. 3.4 *б*, *г*

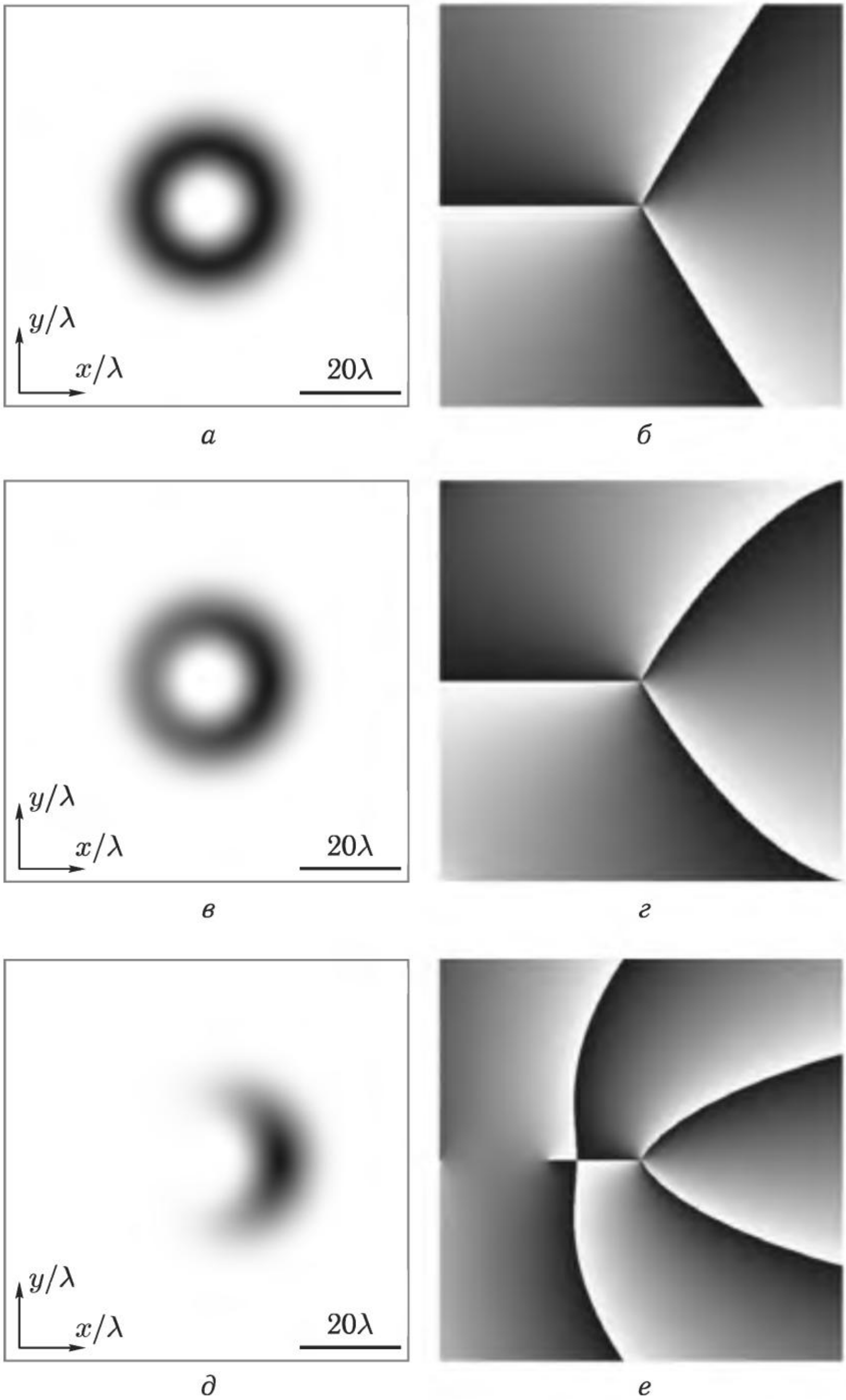


Рис. 3.4. Распределение интенсивности (негатив) (*а*, *в*, *д*) и фазы (*б*, *г*, *е*) светового пучка (3.30) третьего порядка ($n = 3$) в начальной плоскости при $z = 0$ для разных значений параметра асимметрии c: 0,1 (*а*, *б*); 1 (*в*, *г*); 10 (*д*, *е*)

их еще не видно, а на рис. 3.4 *е* появился один ноль. Такое поведение нулей следует из второго уравнения (3.35) при больших $c \ll 1$. В центре рис. 3.4 *б, г, е* расположен нуль интенсивности третьего порядка ($n = 3$).

На рис. 3.5 показаны распределения интенсивности и фазы аБГ-пучка третьего порядка ($n = 3$) при относительно большом значении параметра $\mathbf{c} = 10$ на разных расстояниях вдоль оптической оси в плоскостях $z = 0$ (*а, б*), $z = z_0$ (*в, г*), $z = 10z_0$ (*д, е*). На рис. 3.5 видно, что пучок вращается вокруг оптической оси. На расстоянии Рэлея z_0 картина интенсивности повернулась против часовой стрелки на 45 градусов (рис. 3.5 *в*), а на расстоянии $10z_0$ картина интенсивности повернулась почти на 90 градусов (рис. 3.5 *д*).

Размер картинок на рис. 3.5 разный: $-80\lambda \leqslant x,\ y \leqslant 80\lambda$ (*а, б*); $-100\lambda \leqslant x,\ y \leqslant 100\lambda$ (*в, г*) и $-500\lambda \leqslant x,\ y \leqslant 500\lambda$ (*д, е*). Остальные параметры те же, что и для рис. 1. На рис. 3.5 также видно, что нули интенсивности, лежащие на оси x при $z = 0$, тоже начинают вращаться против часовой стрелке с увеличением z. На рис. 3.5 *б* видны три изолированных нуля интенсивности на оси x слева от центрального нуля 3-го порядка. На рис. 3.5 *г* видно, что при $z = z_0$ осталось только два нуля, которые повернулись на 45 градусов, а на рис. 3.5 *е* $z = 10z_0$ эти два нуля объединились в один ноль 2-го порядка и повернулись почти на 90 градусов.

Из неравенства (3.34) следует, что, так как $\gamma_{n1} > 1$ для всех целых n, при $c \leqslant 1$ все изолированные нули интенсивности, лежащие на оси x (кроме центрального нуля), будут «пропадать» по мере распространения пучка, начиная с самыхдальних нулей ($\gamma_p \gg 1$). Последним «пропадет» первый ноль интенсивности γ_1 при z, равном:

$$z = z_0 \operatorname{tg}\left[\arcsin\left(\frac{c}{\gamma_1}\right)\right]. \tag{3.38}$$

Нули интенсивности «пропадают» в том смысле, что значения их координат, согласно (3.33) и при условии (3.34), становятся комплексными, а не действительными.

На рис. 3.6 показаны распределения интенсивности и фазы аБГ-пучка при небольшом параметре асимметрии $c = 1$. Остальные параметры расчета: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $\omega_0 = 100\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, границы расчетной области $-300\lambda \leqslant x,\ y \leqslant 300\lambda$ (рис. 3.6 *а, б*) и $-1000\lambda \leqslant x$, $y \leqslant 1000\lambda$ (рис. 3.6 *в, г*). При этих параметрах вращение аБГ-пучка уже не описывается простой формулой (3.36), так как параметр асимметрии c небольшой. На рис. 3.6 видно, что картина интенсивности поворачивается на расстоянии $z = z_0$ почти на 90 градусов против часовой стрелки. А изолированные нули интенсивности, которые лежат на оси x и видны на рис. 3.6 *б*, при распространении пучка «пропадают»: на рис. 3.6 *г* при $z = z_0$ не видно нулей интенсивности, кроме центрального.

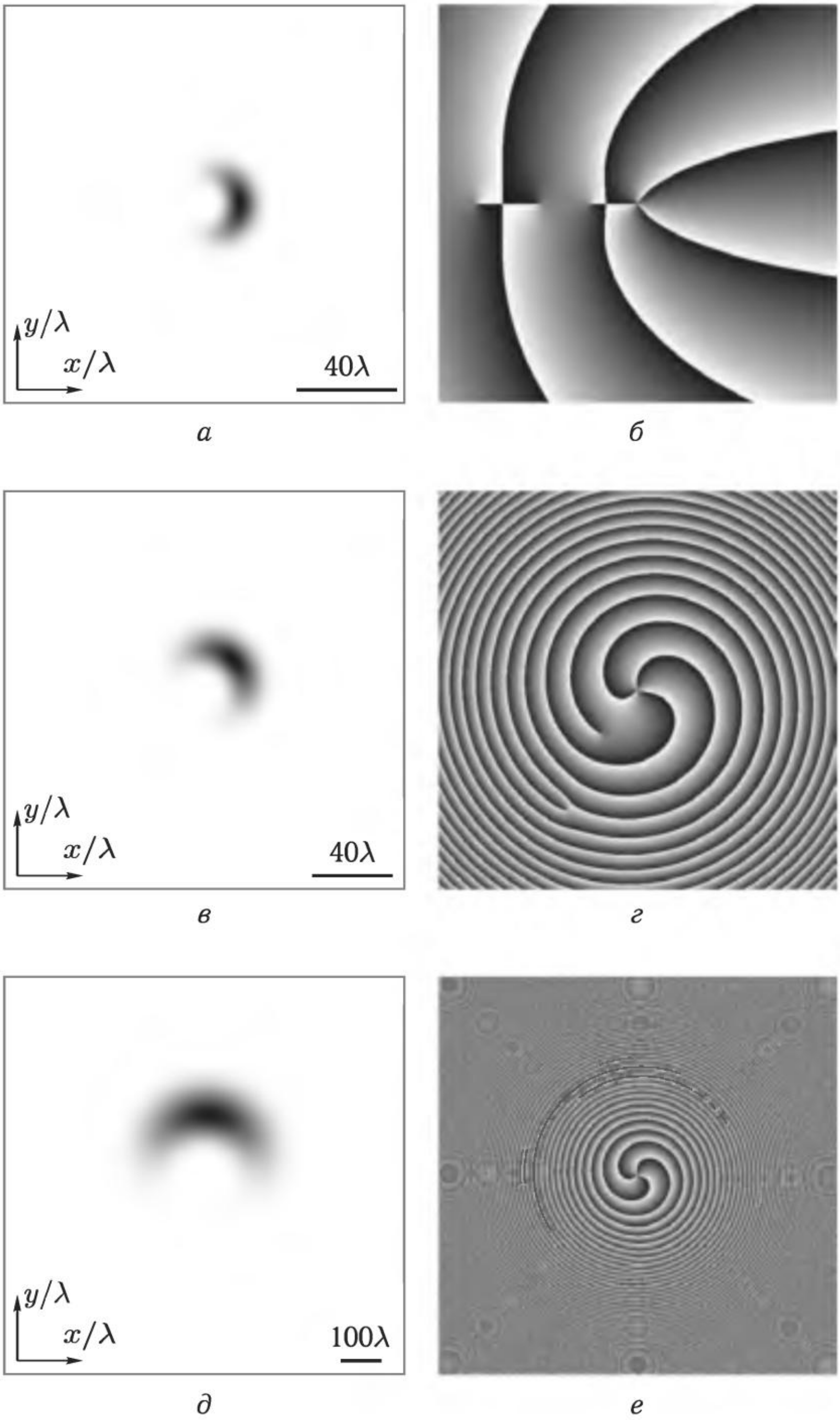


Рис. 3.5. Распределение интенсивности (негатив) (*а*, *в*, *д*) и фазы (*б*, *г*, *е*) светового пучка (3.30) третьего порядка ($n = 3$) на разных расстояниях: $z = 0$ (*а*, *б*), $z = z_0$ (*в*, *г*), $z = 10z_0$ (*д*, *е*)

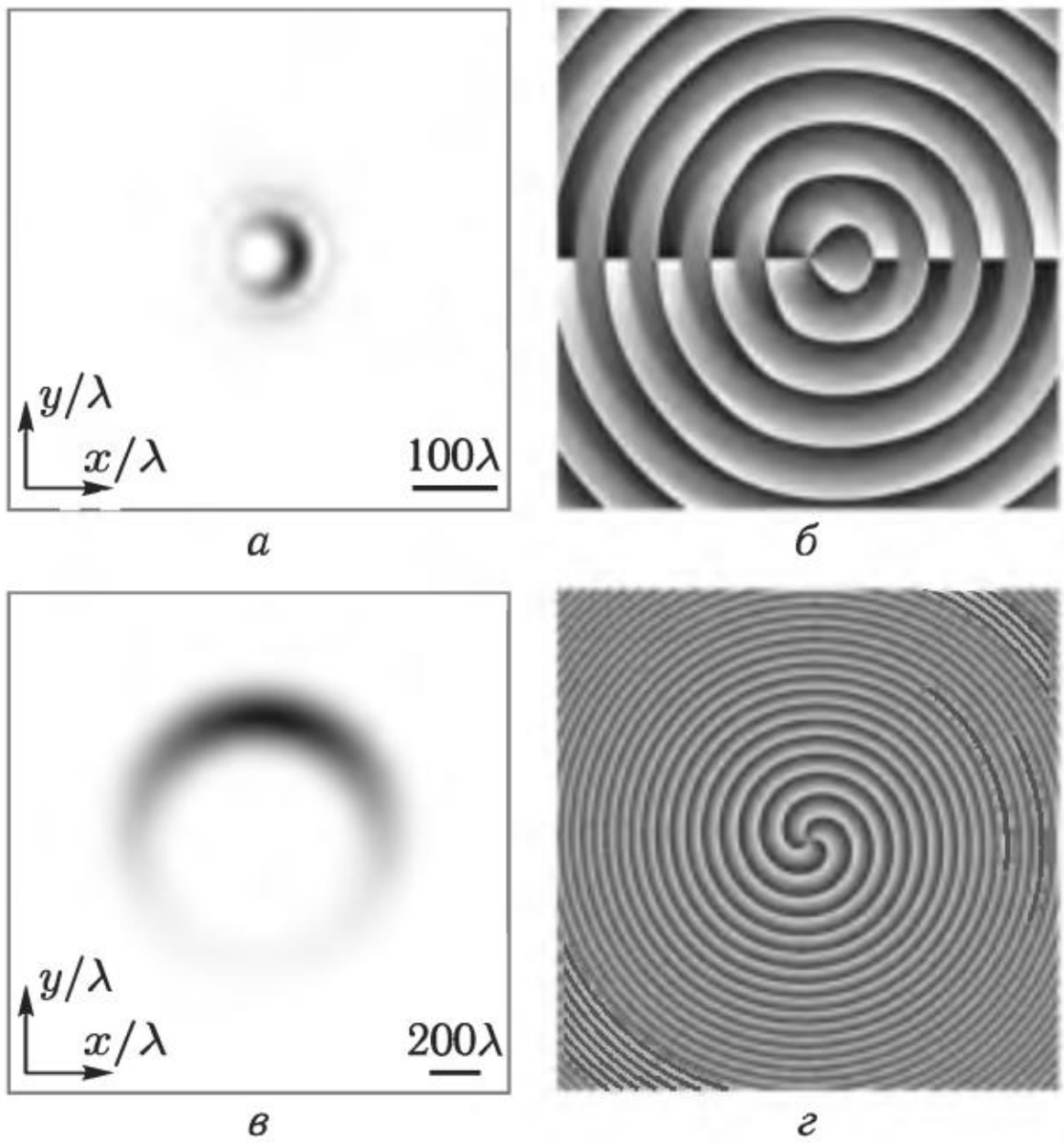


Рис. 3.6. Распределение интенсивности (негатив) (*а*, *в*) и фазы (*б*, *г*) аБГ-пучка третьего порядка ($n = 3$) при $\mathbf{c} = 1$ на разных расстояниях z: 0 (*а*, *б*) и z_0 (*в*, *г*)

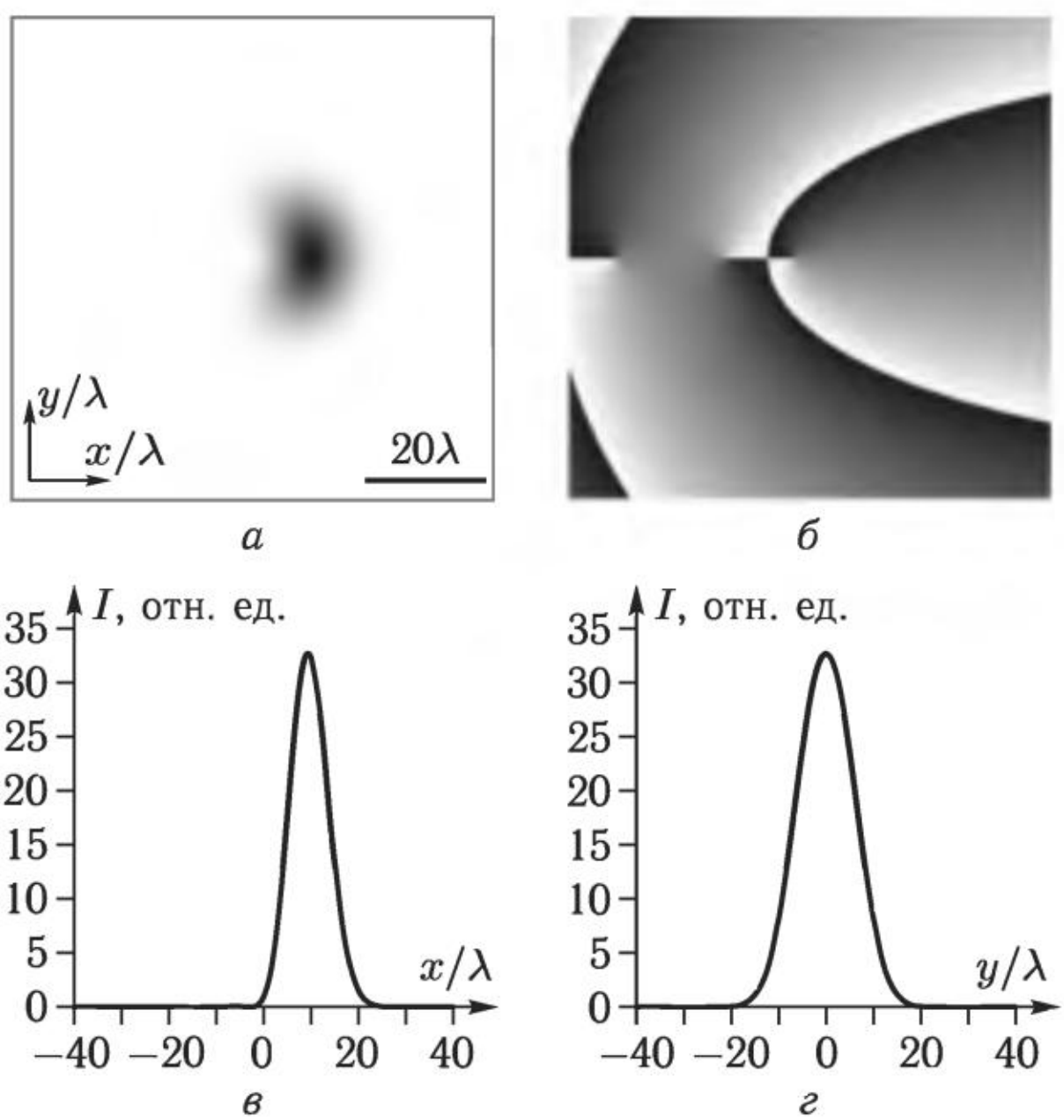


Рис. 3.7. Интенсивность (негатив) (*а*) и фаз (*б*) светового пучка (3.30) нулевого порядка ($n = 0$) в начальной плоскости, а также сечения интенсивности при $z = y = 0$ (*в*) и $z = x = 0$ (*г*)

На рис. 3.7 показаны интенсивность и фаза аБГ-пучка нулевого порядка при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $\omega_0 = 10\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, параметр асимметрии $c = 10$, границы расчетной области $-40\lambda \leqslant x,\, y \leqslant 40\lambda$. В случае нулевого порядка аБГ-пучок (рис. 3.7) обладает интересным свойством: имеет максимум интенсивности вблизи оптической оси и ОУМ, отличный от нуля. Это свойство можно использовать при манипулировании диэлектрическими микрочастицами. Частица, которая по размерам в несколько раз больше основного максимума интенсивности пучка на рис. 4, может удерживаться этим максимумом интенсивности и, одновременно, вращаться вокруг своей оси.

3.1.7. Фурье-спектр аБГ-пучка. Исходя из [122] угловой спектр обычного БГ-пучка выражается следующим образом:

$$A_n(\rho,\varphi) = (-i)^n \exp\left[-\left(\frac{k\rho\omega_0}{2f}\right)^2\right] I_n\left(\frac{k\alpha\rho\omega_0^2}{2f}\right)\exp(in\varphi), \qquad (3.39)$$

где $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя n-го порядка, ρ — радиальная координата в фурье-плоскости, f — фокусное расстояние сферической линзы, формирующей пространственный спектр БГ-пучка. Рассмотрим линейную комбинацию, аналогичную (3.28), но состоящую из функций (3.39), получим угловой спектр аБГ-пучка:

$$A_n(\rho,\varphi) = \exp\left[-\left(\frac{k\rho\omega_0}{2f}\right)^2\right]\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-ic)^p\exp\left[i(n+p)\varphi\right]}{p!} I_p\left(\frac{k\alpha\rho\omega_0^2}{2f}\right). \qquad (3.40)$$

Используя справочное соотношение [65]:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} I_{k+v}(x) = x^{v/2}(x+2t)^{-v/2} I_v\left(\sqrt{x^2+2tx}\right), \qquad (3.41)$$

получим окончательное выражение для фурье-спектра аБГ-пучка:

$$A_n(\rho,\varphi) = \exp\left[-\left(\frac{k\rho\omega_0}{2f}\right)^2 + in\varphi\right]\left(\frac{\xi}{\xi+2ce^{i(\varphi-\pi/2)}}\right)^{n/2} \times$$
$$\times I_p\left\{\sqrt{\xi\left[\xi+2ce^{i(\varphi-\pi/2)}\right]}\right\}, \qquad (3.42)$$

где $\xi = \alpha k\rho\omega_0^2/(2f)$. Угловой спектр (3.42) асимметричный: при $\varphi = \pi/2$ и на кольце фиксированного радиуса $\rho = \rho_0$ модуль амплитуды (3.42) имеет максимум, а при $\varphi = -\pi/2$ — минимум. Вид углового спектра (3.42) похож на вид амплитуды аБГ-пучка (3.30) (с точностью до замены функции Бесселя модифицированной функцией Бесселя), но повернут на 90 градусов. Поэтому асимметрия спектра (3.42) будет похожа на асимметрию аБГ-пучка (3.30).

3.1.8. Орбитальный угловой момент аБГ-пучка. Орбитальный угловой момент J_z (проекция ОУМ на оптическую ось) и суммарная интенсивность I светового пучка в плоскости, поперечной оптической оси, определяются по формулам [114]:

$$J_z = \mathrm{Im}\left\{\iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi}\, r\, dr\, d\varphi\right\}, \tag{3.43}$$

$$I = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* E\, r\, dr\, d\varphi \tag{3.44}$$

Подставив в (3.43), (3.44) комплексную амплитуду (3.28) при $z = 0$, получим орбитальный угловой момент и суммарную интенсивность аБГ-пучка:

$$J_z = 2\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p}(n+p)}{(p!)^2} \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) J_{n+p}^2(\alpha r)\, r dr, \tag{3.45}$$

$$I = 2\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p}}{(p!)^2} \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) J_{n+p}^2(\alpha r)\, r dr. \tag{3.46}$$

Интегралы в этих выражениях описаны в [65]:

$$\int\limits_0^{\infty} x \exp\left(-px^2\right) J_\nu(bx)\, J_\nu(cx)\, dx = (2p)^{-1} \exp\left(-\frac{b^2+c^2}{4p}\right) I_\nu\left(\frac{bc}{2p}\right). \tag{3.47}$$

Используя интеграл (3.47) и разделив (3.45) на (3.46), получим выражение для орбитального углового момента, нормированного на интенсивность:

$$\frac{J_z}{I} = n + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} p I_{n+p}(y)}{(p!)^2} \times \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} I_{n+p}(y)}{(p!)^2}\right]^{-1}, \tag{3.48}$$

где $y = \alpha^2\omega_0^2/4$. Выражение (3.48) дальше упростить не удается. Из него следует, что ОУМ аБГ-пучков больше n, так как все слагаемые рядов в (3.48) положительные. То есть с ростом параметра c, растет асимметрия аБГ-пучка и почти линейно растет его ОУМ, как видно из рис. 3.8. Так как параметры α и c являются действительными положительными числами, то второе слагаемое в (3.48) может быть как целым, так и дробным положительным числом. Поэтому из (3.48)

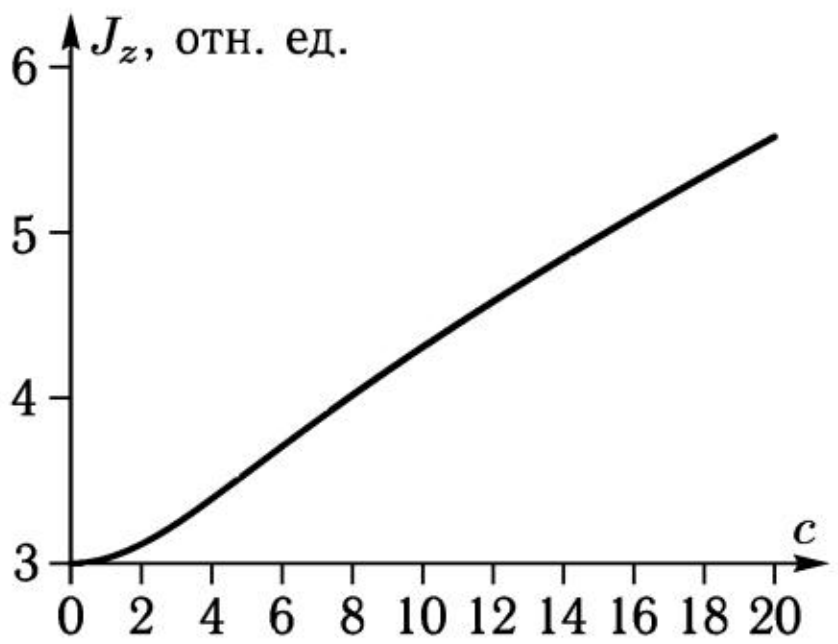


Рис. 3.8. Зависимость ОУМ от параметра асимметрии c при $n = 3$, $\omega_0 = 10\lambda$, $\alpha = 1/(10\lambda)$

также следует, что аБГ-пучок нулевого порядка ($n = 0$) может иметь любой ОУМ. Заметим также, что в (3.48) масштабные параметры пучка Бесселя α и гауссова пучка ω_0 входят в виде произведения, поэтому у разных аБГ-пучков, у которых $\alpha\omega_0 = \mathrm{const}$, ОУМ будет одинаковым (при равных n и c).

3.1.9. Ортогональность семейства аБГ-пучков. Подобно тому, как был вычислен орбитальный угловой момент, можно вычислить скалярное произведение комплексных амплитуд двух ЭБ-пучков — пучка n-го порядка с параметрами α и c и пучка m-го порядка с параметрами β и d:

$$(E_{n\alpha c}, E_{m\beta d}) = \frac{\pi\omega_0^2}{2}\left(\frac{d^*}{c}\right)^{\frac{n-m}{2}} \exp\left[-\frac{\omega_0^2}{8}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right] \times \\ \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(cd^*)^{p+\frac{|n-m|}{2}}}{p!\,(p+|n-m|)!} I_{p+\max(m,n)}\left(\frac{\omega_0^2\alpha\beta}{4}\right), \quad (3.49)$$

где $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя. Из выражения (3.49) видно, что в отличие от мод Бесселя [1] аБГ-пучки не ортогональны ни по масштабирующему множителю, ни по порядку функции Бесселя, ни по параметру асимметрии. В (3.49) параметры асимметрии c и d считались комплексными, a^* — комплексное сопряжение.

Заметим, что аБГ-пучки при стремлении радиуса гауссова пучка к бесконечности $\omega_0 \to \infty$ переходят в бездифракционные асимметричные элегантные моды Бесселя [123].

3.1.10. Эксперимент. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 3.9. В эксперименте был использован фазовый пространственный модулятор PLUTO VIS. Свет твердотельного лазера с длиной волны 532 нм расширяется коллиматором, ограничивается диафрагмой диаметром 8 мм. В результате получалось равномерное распределение интенсивности, которое можно считать плоской волной. Далее свет проходит через светоделительный кубик и попадает на

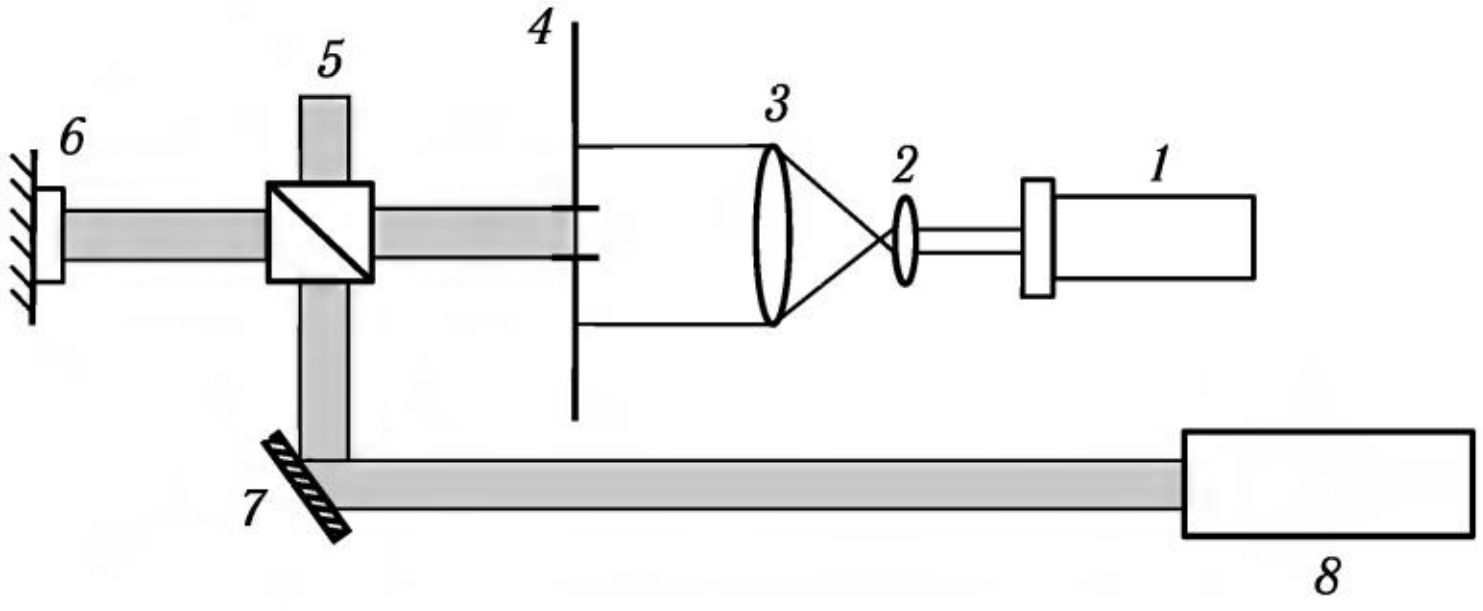


Рис. 3.9. Схема экспериментальной установки. *1* — твердотельный лазер с длиной волны 532 нм, *2*, *3* — коллиматор, *4* — диафрагма, *5* — светоделительный кубик, *6* — модулятор PLUTO VIS, *7* — зеркало, *9* — ПЗС камера

пространственный модулятор света, отражается от него и отклоняется светоделительным кубиком на ПЗС-камеру. На полутоновой модулятор с компьютера передавалась фаза для формирования аБГ-пучка в комбинации с фазой параболической линзы с фокусным расстоянием 960 мм.

ПЗС камера перемещалась на небольшом отрезке в непосредственной близости от фокуса. На рис. 3.10 показаны фазовое распределение (а), сформированные на модуляторе (без добавленной линзы) и распределения интенсивности зарегистрированные ПЗС-матрицей на расстоянии 850 мм (*б*), 900 мм (*в*) и 950 мм (*г*) от модулятора. Размерность модулятора составляет 1920 × 1080 пикселов, размер одного чувствительного элемента 8 мкм. Фаза, представленная на рис. 3.10, имела размерность 1024 × 1024 пикселов и формировалась в центре модулятора. Таким образом, точный размер сформированного фазового распределения составлял 8,2 мм.

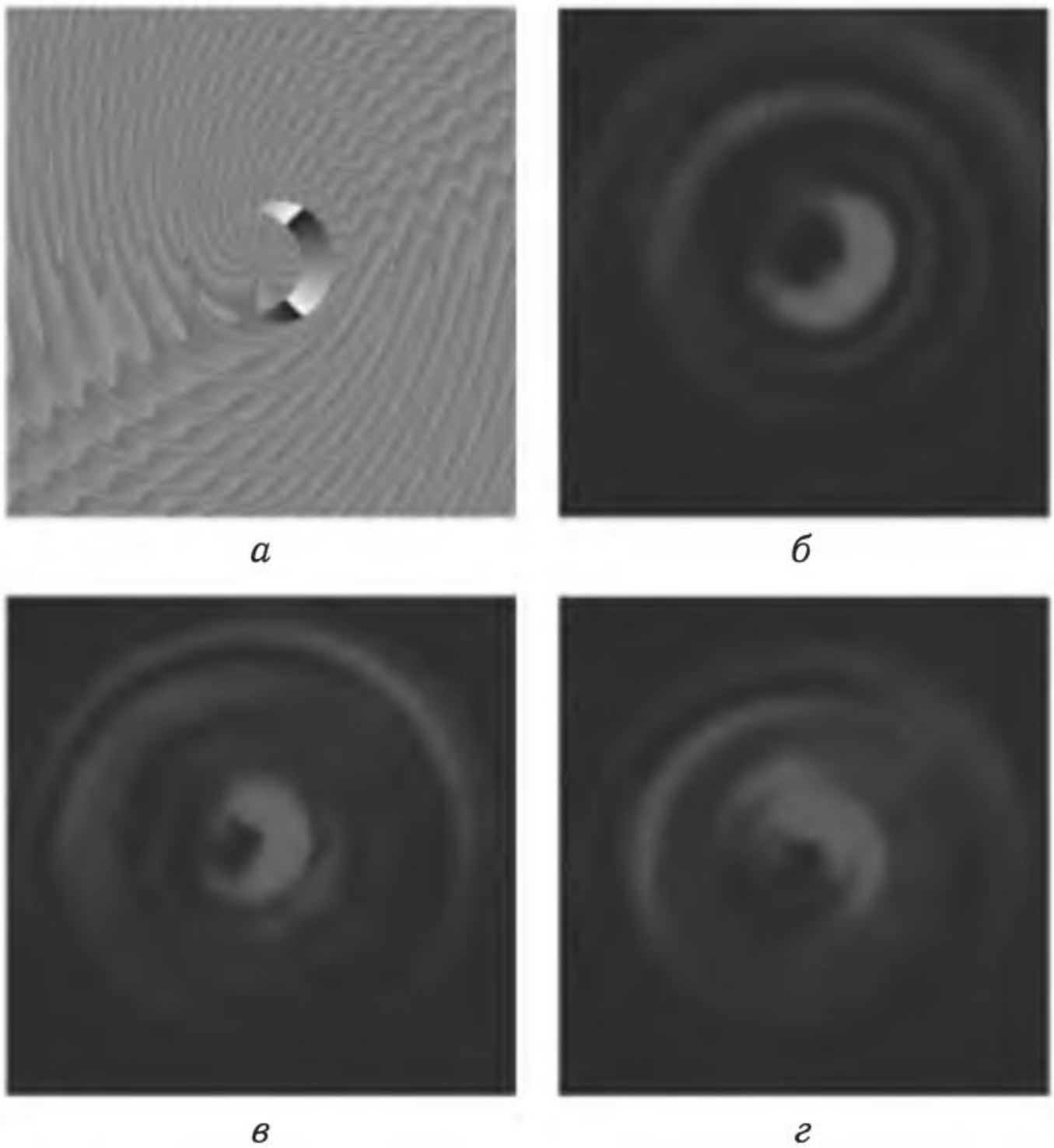


Рис. 3.10. Распределение фазы сформированной на модуляторе PLUTO VIS (*а*), и распределения интенсивности зарегистрированные на расстояниях от модулятора: 850 мм (*б*), 900 мм (*в*) и 950 мм (*г*)

На рис. 3.10 видно, что сформированный модулятором распределение интенсивности в форме полумесяца не только вращается в сходящемся лазерном пучке (за 100 мм пути пучок повернулся почти на 90° против часовой стрелки), но и искажается. Это искажением связано

с тем, фазовое распределение (рис. 3.10 a) только частично учитывает амплитудное распределение аБГ-пучка (3.30).

Таким образом, в этом разделе получены следующие результаты [124]. Получено новое решение параксиального уравнения Гельмгольца, описывающее трехпараметрическое семейство асимметричных пучков Бесселя–Гаусса (аБГ-пучков), обладающих конечной энергией и описывающихся функциями Бесселя первого рода целого порядка с комплексным аргументом; при $c = 0$ аБГ-пучки совпадают с обычными пучками Бесселя–Гаусса [119]. Распределение интенсивности аБГ-пучков имеет счетное число изолированных нулей, лежащих на горизонтальной прямой в начальной плоскости ($z = y = 0$). В местах этих нулей расположены оптические вихри, имеющие единичные топологические заряды и разные знаки с разных сторон от оптической оси (от центра координат); осевой ноль интенсивности имеет топологический заряд, равный порядку функции Бесселя. Асимметричные пучки Бесселя–Гаусса при больших параметрах асимметрии $c \gg 1$ вращаются как единое целое при своем распространении в свободном пространстве: на расстоянии длины Рэлея они поворачиваются на 45°, и еще на 45° за весь остальной путь; при небольших c пучки вращаются более сложным образом: на определенном расстоянии от начальной плоскости оптические вихри (изолированные нули интенсивности), которые присутствовали в сечении пучка, пропадают (кроме центрального нуля интенсивности) и на расстоянии длины Рэлея пучок может повернуться почти на 90°. аБГ-пучки имеют асимметричный угловой спектр, выражающийся через произведение гауссовой функции на модифицированную функцию Бесселя с комплексным аргументом; вид этого спектра имеет асимметрию, аналогичную асимметрии аБГ-пучка, но повернутую на 90°. аБГ-пучки могут иметь целый и дробный ОУМ, который растет с ростом номера n и почти линейно с ростом параметра c; пучок нулевого порядка имеет максимум интенсивности, смещенный с оптической оси на величину c/α и изолированные нули интенсивности, и может обладать любым ОУМ, в зависимости от выбора параметра асимметрии c. аБГ-пучки не ортогональны ни по одному их параметров n, α, c;

Экспериментально с помощью жидко-кристаллического модулятора света сформирован сходящийся лазерный пучок, похожий на аБГ-пучок с распределением интенсивности в виде полумесяца, который повернулся почти на 90 градусов против часовой стрелки.

3.2. Суперпозиция мод Бесселя с комплексным смещением

Пучки Бесселя, открытые в 1987 году [1, 125] обладают многими замечательными свойствами. Они распространяются без дифракции на конечном расстоянии в свободном пространстве [1], формируют световые

трубки или световые полости (бутыли) на оптической оси [126, 127], обладают свойством самовосстановления после искажения малым препятствием [128, 129].

Пучки Бесселя имеют орбитальный угловой момент [130, 131]. Суперпозиция пучков Бесселя может обладать продольной периодичностью (аналог эффекта Тальбота) [115, 132] или вращаться вокруг оптической оси при распространении [133, 134].

Пучки Бесселя можно генерировать с помощью цифровых голограмм [126, 127, 135], конического рефракционного аксикона [136, 137], дифракционного вихревого аксикона [138], дифракционных оптических элементов [133, 134] и пространственных модуляторов света [139]. Интересно, что простым наклоном дифракционного элемента (или при наклонном падении освещающего пучка на дифракционный вихревой аксикон) можно формировать астигматические пучки Бесселя [140].

Пучки Бесселя нашли широкое применение. Они применяются для манипуляции микрочастицами: для одновременного захвата нескольких микрочастиц вдоль оптической оси [141, 142], для вращения одной или нескольких частиц вокруг оптической оси [143]. С помощью пучков Бесселя можно захватывать и ускорять отдельные охлажденные атомы [144, 145]. Недавно открытые пучки Ханкеля–Бесселя [146] могут применяться для зондирования атмосферы, так как обладают устойчивостью к турбулентности атмосферы [147]. В [148, 149] теоретически были рассмотрены векторные пучки Бесселя, для которых были получены аналитические выражения для плотности ОУМ [130, 131, 150]. Заметим здесь, что, так как энергия всего пучка Бесселя не ограничена, полный ОУМ тоже не ограничен. Поэтому работ по анализу ОУМ полного пучка Бесселя до наших работ не было. Моды Бесселя являются также собственными функциями для кругового бильярда (circular billiards) и соответствуют резонансным геометрическим модам, также обладающим ОУМ [151].

Недавно были рассмотрены непараксиальные асимметричные моды Бесселя [88] и параксиальные ассиметричные пучки Бесселя–Гаусса [124]. В их поперечном сечении распределение интенсивности имеет вид полумесяца. В [152] асимметричные моды Бесселя исследовались экспериментально с помощью цифровой матрицы микрозеркал (digital micromirror device). В [153] по аналогии с [88] рассмотрены ассиметричные пучки Чебышева–Бесселя.

Суперпозиция пучков Бесселя рассматривалась только для одних осевых пуков Бесселя [132–134, 141, 150]. Суперпозиция смещенных с оптической оси лазерных пучков рассматривалась в [151], но эти пучки не являются пучками Бесселя.

В этом разделе рассматривается суперпозиция смещенных с оптической оси пучков Бесселя одинакового порядка (с одинаковым топологическим зарядом). Получено общее аналитическое выражение для ОУМ такой суперпозиции. Показано, что если весовые коэффициенты суперпозиции действительные числа, то ОУМ всей суперпозиции пучков

Бесселя равен ОУМ одного несмещенного пучка Бесселя. Это позволяет формировать бездифракционные пучки с разным распределением интенсивности, но с одинаковым ОУМ. Показано, что суперпозиция множества одинаковых пучков Бесселя, центры которых расположены на окружности любого радиуса, эквивалентна одному пучку Бесселя из этой суперпозиции, расположенному в центре окружности. Показано также, что комплексное смещение пучка Бесселя приводит к изменению распределения интенсивности в сечении пучка и изменению его ОУМ. Суперпозиция двух пучков Бесселя с комплексным смещением может не менять ОУМ, хотя распределение интенсивности будет меняться. Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными.

3.2.1. Фурье-спектр смещенного пучка Бесселя. Известно, что комплексная амплитуда непараксиального стационарного светового поля, $E(x,\ y,\ z)$ удовлетворяющего уравнению Гельмгольца, может быть представлена в виде углового спектра плоских волн

$$E\left(x,y,z\right)=\iint\limits_{\mathrm{R}^2} A\left(\xi,\eta\right)\exp\left[ik\left(\xi x+\eta y\right)+ikz\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\right]d\xi\,d\eta, \tag{3.50}$$

где k — волновое число монохроматического света, $A(\xi,\eta)$ — комплексная амплитуда углового спектра плоских волн. В полярных координатах (r,φ) выражение (1) примет вид:

$$E\left(r,\varphi,z\right)=\iint\limits_{\mathrm{R}^2} A\left(\rho,\theta\right)\exp\left[ikr\rho\cos\left(\theta-\varphi\right)+ikz\sqrt{1-\rho^2}\right]\rho\,d\rho\,d\theta, \tag{3.51}$$

где (ρ,θ) — полярные координаты в фурье-плоскости. Амплитуда углового спектра плоских волн для пучка, смещенного на вектор с декартовыми координатами (x_0,y_0), имеет вид:

$$A'\left(\rho,\theta\right)=A\left(\rho,\theta\right)\exp\left[-ik\rho\left(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta\right)\right], \tag{3.52}$$

где $A(\rho,\theta)$ — амплитуда углового спектра плоских волн исходного несмещенного пучка. Координаты смещения (x_0,y_0) могут быть комплексными числами.

Известен [88] вид углового спектра несмещенного пучка Бесселя n-го порядка:

$$A_n\left(\rho,\theta\right)=\frac{\left(-i\right)^n}{\alpha\lambda}\exp\left(in\theta\right)\delta\left(\rho-\frac{\alpha}{k}\right), \tag{3.53}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, α — масштабный параметр несмещенной моды Бесселя:

$$E_n(r,\varphi,z)=\exp\left(in\varphi+iz\sqrt{k^2-\alpha^2}\right)J_n(\alpha r), \tag{3.54}$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка первого рода. С учетом (3.52) амплитуда углового спектра смещенного пучка Бесселя n-го порядка равна:

$$A'_n(\rho,\theta) = \frac{(-i)^n}{\alpha\lambda}\exp(in\theta)\,\delta\left(\rho-\frac{\alpha}{k}\right)\exp(-ikx_0\rho\cos\theta - iky_0\rho\sin\theta). \tag{3.55}$$

3.2.2. Связь амплитуд спектра смещенного и несмещенного пучков Бесселя. Найдем коэффициенты A_{mn} ряда, который описывает разложение амплитуды спектра смещенного пучка Бесселя n-го порядка (3.55) по амплитудам спектра несмещенных пучков Бесселя разных порядков:

$$A'_n(\rho,\theta) = \delta\left(\rho-\frac{\alpha}{k}\right)\sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{pn}\frac{(-i)^p}{\alpha\lambda}\exp(ip\theta). \tag{3.56}$$

Умножая обе части равенства (3.56) на $(\alpha\lambda/\delta(\rho-\alpha/k))\exp(-im\theta)$ и интегрируя по θ от 0 до 2π получим:

$$\int_0^{2\pi}\exp[i(n-m)\theta]\exp(-i\alpha x_0\cos\theta - i\alpha y_0\sin\theta)\,d\theta = \\ = i^n\sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{pn}(-i)^p\,2\pi\delta_{pm}. \tag{3.57}$$

Интеграл в левой части (3.57) равен

$$\int_0^{2\pi}\exp(in\theta + ia\cos\theta + ib\sin\theta)\,d\theta = 2\pi\left(\frac{ia-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^n J_n\left(\sqrt{a^2+b^2}\right). \tag{3.58}$$

С учетом (3.58) коэффициенты ряда в правой части (3.57) равны:

$$A_{mn} = \left(\frac{x_0+iy_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right)^{n-m} J_{m-n}\left(\alpha\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right). \tag{3.59}$$

В частном случае, когда по одной координате смещение действительное, а по другой — чисто мнимое, и по модулю оба смещения равны ($x_0 = c/\alpha$, $y_0 = ic/\alpha$), то коэффициенты (3.59) упрощаются:

$$A_{mn} = \begin{cases} \dfrac{c^{m-n}}{(m-n)!}, & m \geqslant n, \\ 0, & m < n. \end{cases} \tag{3.60}$$

Выражение (3.60) было получено из (3.59) с помощью предельного перехода (при малых значениях аргумента функции Бесселя). В этом частном случае амплитуда углового спектра плоских волн смещенного

пучка Бесселя представляется в виде линейной комбинации мод Бесселя в виде:

$$A'_n(\rho,\theta) = \delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p}{p!} \frac{(-i)^{n+p}}{\alpha\lambda} \exp\left[i\,(n+p)\,\theta\right], \tag{3.61}$$

где параметр c задает степень асимметрии смещенной моды Бесселя n-го порядка. Угловой спектр смещенного пучка Бесселя вида (3.61) совпадает с выражением для спектра асимметричной моды Бесселя [88]. Используя (3.55) и (3.58) из (3.50) получим очевидное выражение для амплитуды смещенного пучка Бесселя:

$$E'_n(x,y,z) = \exp\left(iz\sqrt{k^2-\alpha^2}\right) \left[\frac{(x+x_0)+i\,(y+y_0)}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}}\right]^n \times$$
$$\times\, J_n\left(\alpha\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}\right). \tag{3.62}$$

3.2.3. Орбитальный угловой момент смещенного пучка Бесселя. Проекцию на оптическую ось z орбитального углового момента (ОУМ) и полную мощность лазерного пучка можно рассчитать с помощью выражений:

$$iJ_z = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* \frac{\partial E}{\partial\varphi}\, r\,dr\,d\varphi = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \iint\limits_{\mathrm{R}^2} A^* \frac{\partial A}{\partial\theta}\,\rho\,d\rho\,d\theta, \tag{3.63}$$

$$I = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* E\, r\,dr\,d\varphi = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \iint\limits_{\mathrm{R}^2} A^* A\,\rho\,d\rho\,d\theta. \tag{3.64}$$

При вычислении (3.63) и (3.64) для смещенного пучка Бесселя воспользуемся (3.55). Тогда получим проекцию ОУМ на оптическую ось:

$$J_z = \frac{\lambda}{\alpha}\,\delta(0)\left[nI_0(2\alpha r_{0i}) + \frac{\alpha}{r_{0i}}\,\mathrm{Im}\,(y_0 x_0^*)\,I_1(2\alpha r_{0i})\right], \tag{3.65}$$

где $r_{0i} = [(\mathrm{Im}\,x_0)^2 + (\mathrm{Im}\,y_0)^2]^{1/2}$, $I_0(x)$, $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя, а также мощность всего пучка:

$$I = \frac{\delta(0)}{k\alpha} \int\limits_0^{2\pi} \exp\left[2\alpha\,(\mathrm{Im}\,x_0\cos\theta + \mathrm{Im}\,y_0\sin\theta)\right] d\theta = \frac{\lambda}{\alpha}\,\delta(0)\,I_0(2\alpha r_{0i}), \tag{3.66}$$

где $\delta(0)$ — дельта-функция Дирака в нуле. Из (3.65) и (3.66) следует, что проекция ОУМ на оптическую ось и мощность смещенного пучка Бесселя неограниченны, но их отношение имеет вполне определенную величину:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{\alpha}{r_{0i}}\,\mathrm{Im}\,(x_0^* y_0)\,\frac{I_1(2\alpha r_{0i})}{I_0(2\alpha r_{0i})}. \tag{3.67}$$

Из (3.67) следует, что, если обе координаты вектора смещения (x_0, y_0) действительные или обе чисто мнимые, то нормированный ОУМ (3.67) не отличается от ОУМ для несмещенного пучка Бесселя:

$$\frac{J_z}{I} = n. \tag{3.68}$$

Нормированный ОУМ смещенного пучка Бесселя (3.67) будет отличаться от ОУМ несмещенного пучка Бесселя (3.68) только, если смещение по одной координате действительное, а по другой чисто мнимое. Например, пусть $x_0 = b/\alpha$, $y_0 = ic/\alpha$, тогда ОУМ (3.67) примет вид:

$$\frac{J_z}{I} = n + b\frac{I_1(2|c|)}{I_0(2|c|)}. \tag{3.69}$$

Из (3.69) следует, что ОУМ будет увеличиваться по сравнению с (3.68), если $b > 0$, и уменьшаться, если $b < 0$. Причем величина мнимого смещения c определяет изменение формы пучка: при небольших значения $c < 1$ амплитуда смещенного пучка (3.62) будет иметь вид эллипса, при $c > 1$ амплитуда пучка (3.62) будет иметь вид полумесяца, и при $c \gg 1$ пучок (3.62) будет иметь вид астигматического гауссова пучка [88]. При этом центр пучка Бесселя (3.54) смещается по оси x на величину $\Delta x = (b - c)/\alpha$.

3.2.4. Орбитальный угловой момент суперпозиции смещенных пучков Бесселя. Рассмотрим суперпозицию P смещенных пучков Бесселя n-го порядка (3.62). Амплитуда углового спектра плоских волн для такой суперпозиции будет иметь вид:

$$A(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{P-1} C_p A_{pn}(\rho, \theta), \tag{3.70}$$

где

$$A_{pn}(\rho, \theta) = \frac{(-i)^n}{\alpha\lambda} \exp(in\theta)\, \delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right) \exp(-ikx_p\rho\cos\theta - iky_p\rho\sin\theta) \tag{3.71}$$

— амплитуда углового спектра p-го пучка в суперпозиции, смещенного на комплексный вектор с координатами (x_p, y_p). С помощью (3.63) и (3.64) получим нормированный ОУМ суперпозиции (3.70) ОАМ

$$\frac{J_z}{I} = n - i\alpha \frac{\sum\limits_{p=0}^{P-1}\sum\limits_{q=0}^{P-1} C_p^* C_q \dfrac{x_p^* y_q - x_q y_p^*}{R_{pq}} J_1(\alpha R_{pq})}{\sum\limits_{p=0}^{P-1}\sum\limits_{q=0}^{P-1} C_p^* C_q J_0(\alpha R_{pq})}, \tag{3.72}$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядков,

$$\begin{aligned} R_{pq} &= \sqrt{(x_p^* - x_q)^2 + (y_p^* - y_q)^2}, \\ R_{pp} &= 2i\sqrt{(\operatorname{Im} x_p)^2 + (\operatorname{Im} y_p)^2}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Хотя перед дробью в (3.72) есть множитель $i\alpha$, все выражение является вещественным. Это следует из того, что 1) при $p = q$ в числителе величина $|C_p|^2$ вещественна, величины R_{pq} и $J_1(\alpha R_{pq})$ чисто мнимые, а разность $x_p^* y_p - x_p y_p^*$ тоже чисто мнимая, так как представляет собой разность двух комплексно-сопряженных чисел; 2) для любых неравных друг другу p и $q R_{pq} = R_{qp}^*$, а слагаемые с номерами (p, q) и (q, p) также представляют собой разность двух комплексно-сопряженных чисел.

Можно показать, что если все пучки Бесселя в суперпозиции (3.70) смещаются на действительный вектор (x_p, y_p) и все коэффициенты C_p также действительны, то числитель дроби в (3.72) будет равен нулю, и ОУМ всей суперпозиции будет равен ОУМ одного несмещенного пучка Бесселя n-го порядка (3.68). Это основной результат данного раздела. Он позволяет формировать самые различные непараксиальные лазерные пучки, которые будут иметь разные распределения интенсивности в сечении пучка, но будут иметь один, и тот же ОУМ (3.68), и будут распространяться без дифракции. Ниже в разделе моделирования будут приведены примеры таких пучков.

Из (3.72) следуют интересные частные случаи. Если $P = 2$, $x_0 = c/\alpha$, $y_0 = ic/\alpha$, $x_1 = -c/\alpha$, $y_1 = ic/\alpha$, то $R_{00} = R_{11} = 2ic/\alpha$, $R_{01} = R_{10} = 0$, и получим для нормированного ОУМ простую формулу (коэффициенты в (3.70) произвольные комплексные числа C_0, C_1):

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{c\left(|C_0|^2 - |C_1|^2\right) I_1\left(2|c|\right)}{\left(|C_0|^2 + |C_1|^2\right) I_0\left(2|c|\right) + 2\,\mathrm{Re}\left\{C_0^* C_1\right\}}. \tag{3.74}$$

Из (3.74) следует, что при сложении двух пучков Бесселя n-го порядка, смещение которых хоть и комплексное (чисто мнимое по одной координате), но согласованное между собой, то при одинаковых по модулю коэффициентах $|C_0| = |C_1|$ нормированный ОУМ (3.74) будет равен ОУМ одного не смещенного пучка Бесселя n-го порядка (3.68). То есть при равных коэффициентах $|C_0| = |C_1|$ можно менять распределение интенсивности в поперечном сечении суперпозиции двух смещенных пучков Бесселя (так как при изменении величины cизменяется форма пучка Бесселя), хотя их общий ОУМ не будет меняться.

3.2.5. Суперпозиция трех смещенных пучков Бесселя. Рассмотрим 3 пучка Бесселя n-го порядка, смещенные так, что центры их находятся в углах равностороннего треугольника. То есть $P = 3$, $R_{01} = R_{02} = R_{12}$, весовые коэффициенты суперпозиции (3.70) C_0, C_1, C_2 — произвольные комплексные числа, и пусть координаты комплексного вектора смещения заданы выражением:

$$\begin{cases} x_p = R_0 \cos\left(\dfrac{2\pi p}{3}\right) + \dfrac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\dfrac{2\pi p}{3}\right), \\ y_p = R_0 \sin\left(\dfrac{2\pi p}{3}\right) + i\dfrac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\dfrac{2\pi p}{3}\right), \end{cases} \tag{3.75}$$

где R_0 — радиус окружности, на которой расположены центры сингулярности смещенных пучков Бесселя, c задает асимметрию смещенного пучка Бесселя, γ — угол поворота асимметричного смещенного пучка Бесселя. Тогда ОУМ будет равен выражению:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{\pm D_1 \xi I_1(2c) + \operatorname{Im}\left\{D_2\left(\xi \mp ic\sqrt{3}\right) J_1\left(\sqrt{3}\,\xi \pm ic\right)\right\}}{D_1 I_0(2c) + 2\operatorname{Re}\left\{D_2 J_0\left(\sqrt{3}\,\xi \pm ic\right)\right\}}, \qquad (3.76)$$

где верхний знак берется для $\gamma = 0$ и нижний знак берется для $\gamma = \pi$ (для других значений γ выражение для нормированного ОУМ будет более громоздким),

$$\begin{cases} D_1 = |C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2, \\ D_2 = C_0^* C_1 + C_1^* C_2 + C_2^* C_0, \end{cases} \qquad (3.77)$$

где $\xi = \alpha R_0 \pm c$.

В частном случае, когда $\gamma = \pi$, $c = \alpha R_0$, параметр ξ равен нулю, и вместо (3.76) получим:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{c\sqrt{3}\, I_1(c) \operatorname{Im}\{D_2\}}{D_1 I_0(2c) + 2 I_0(c) \operatorname{Re}\{D_2\}}. \qquad (3.78)$$

Из (3.78) следует, что если коэффициенты C_0, C_1, C_2 действительные, то сомножитель $\operatorname{Im}\{D_2\}$ в (3.78) равен нулю и ОУМ суперпозиции из трех пучков Бесселя n-го порядка будет равен ОУМ одного несмещенного пучка Бесселя (3.68). На рис. 3.11 для примера показана интенсивность и фаза суперпозиции из трех смещенных пучков Бесселя с топологическим зарядом $n = 3$. ОУМ суперпозиции равен $J_z/I = 3$.

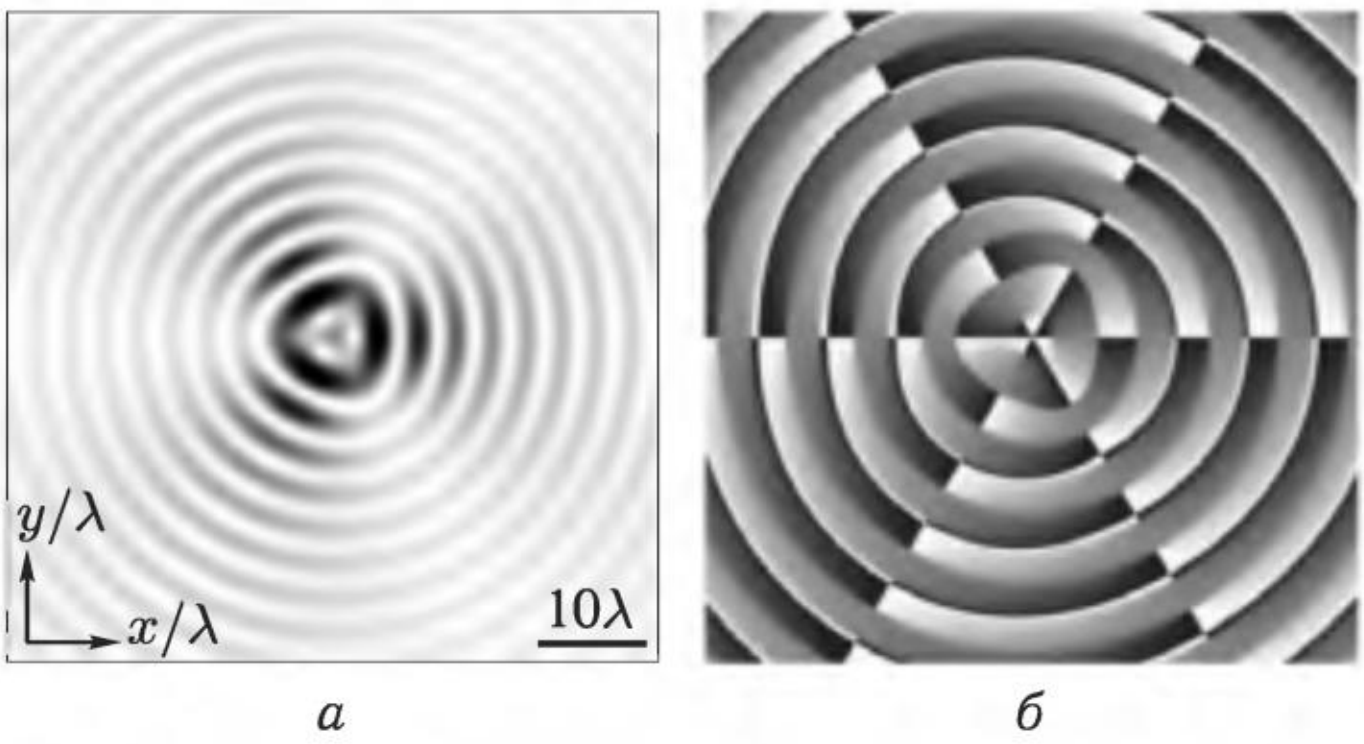


Рис. 3.11. Интенсивность (*а*) (черный цвет — максимум, белый цвет — ноль) и фаза (*б*) (черный цвет — π, белый цвет — $-\pi$) суперпозиции из трех смещенных мод Бесселя с параметрами: $n = 3$, $R_0 = 4\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 4$, $\gamma = \pi$, вектор весовых коэффициентов $\mathbf{C} = [1, 1, 1]$. Размер кадра $2R = 60\lambda$

На рис. 3.12 показаны кодированная фаза (рис. 3.12 *а*) суперпозиции из трех смещенных пучков Бесселя с топологическим зарядом $n = 3$ (рис. 3.11 *б*). Эта фаза подавалась на пространственный модулятор света SLM PLUTO-VIS (разрешение 1920×1080 пикселов, размер пикселя 8 мкм).

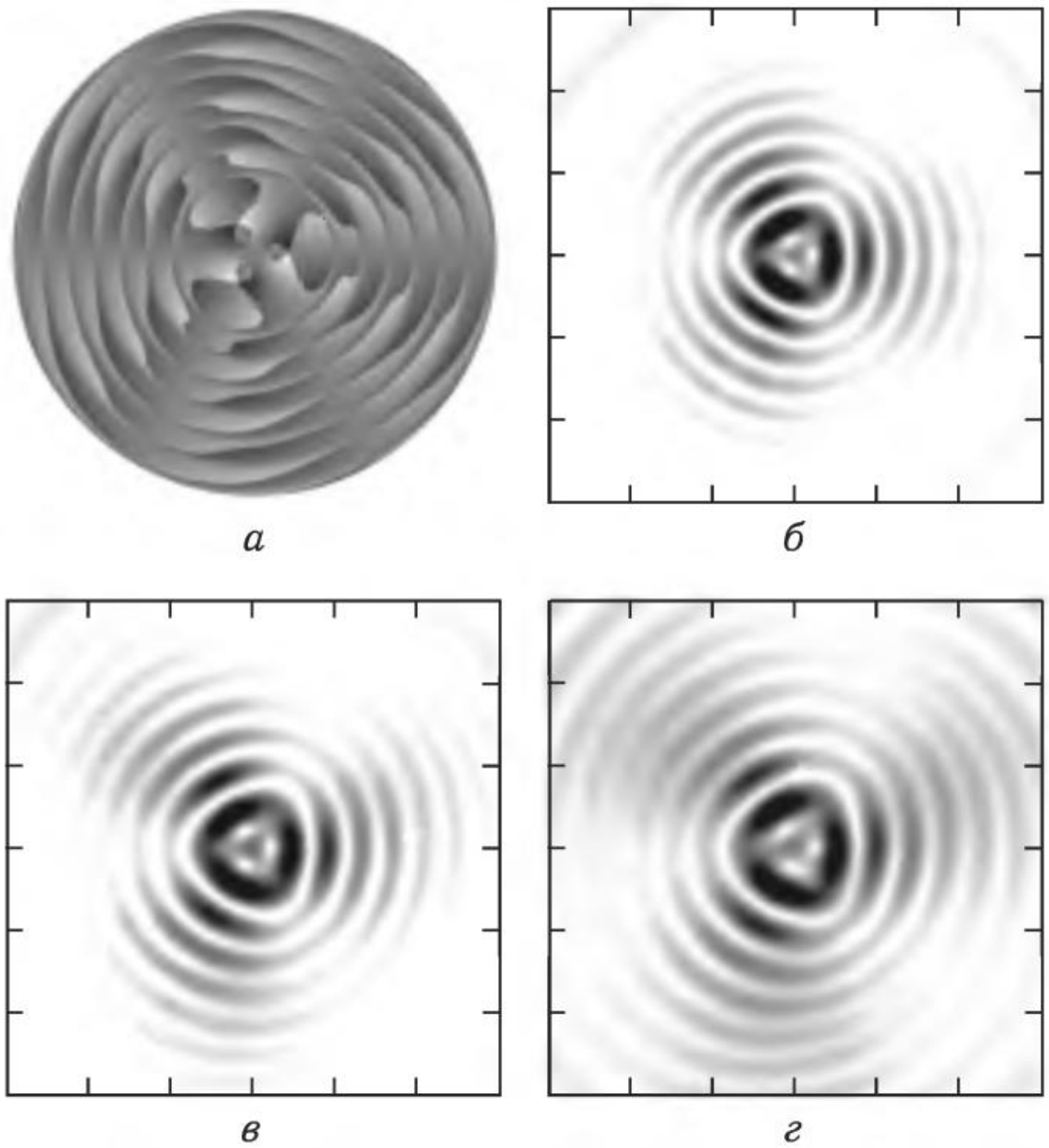


Рис. 3.12. Кодированная фаза (рис. 3.11 *б*, негатив) для формирования пучка Бесселя в виде контура равностороннего треугольника (*а*) и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях от плоскости $z = 0$: 0 мм (*б*); 200 мм (*в*); 400 мм (*г*). Шаг сетки равен 0,5 мм

На рис. 3.12 *б–г* показаны распределения интенсивности, сформированные SLM, при отражении линейно-поляризованной плоской волны с длиной волны 633 нм на разных расстояниях. Из рис. 3.12 видно, что пучок сохраняет свою структуру при распространении, и распределение интенсивности согласуется с расчетным (рис. 3.11 *а*). Интенсивность регистрировалась с помощью CMOS-камеры MDCE-5A (1/2″, разрешение 1280×1024 пикселов).

На рис. 3.13 показано распределение интенсивности и фазы суперпозиции из трех смещенных пучков Бесселя с одинаковыми единичными весовыми коэффициентами $\mathbf{C} = [1, 1, 1]$, но для других значений параметров: $n = 5$, $R_0 = 8\lambda$, $c = 3$. Картина дифракции такого пучка

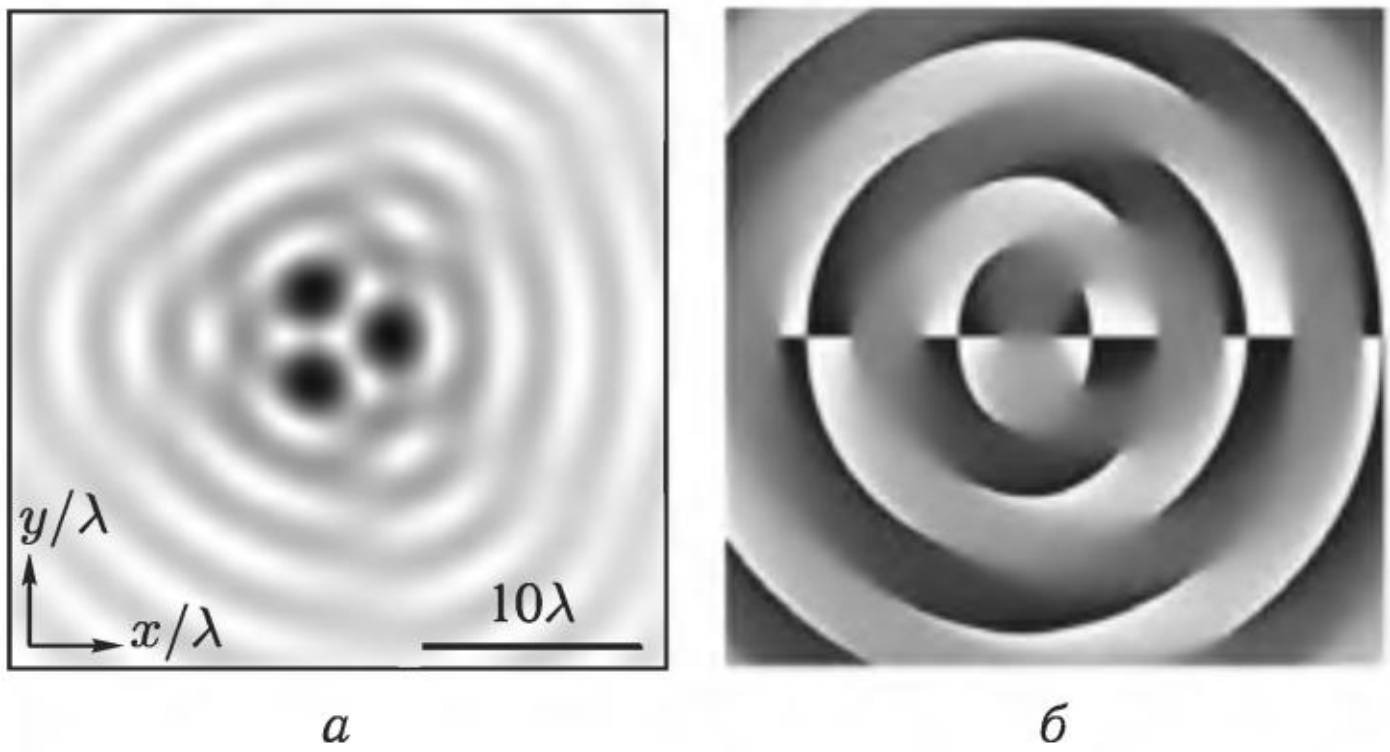


Рис. 3.13. Интенсивность (*а*) (черный цвет — максимум, белый цвет — ноль) и фаза (*б*) (черный цвет — π, белый цвет — $-\pi$) суперпозиции из трех пучков Бесселя с параметрами $n = 5$, $R_0 = 8\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 3$, $\gamma = \pi$, вектор весовых коэффициентов $\mathbf{C} = [1, 1, 1]$. Размер кадра $2R = 30\lambda$

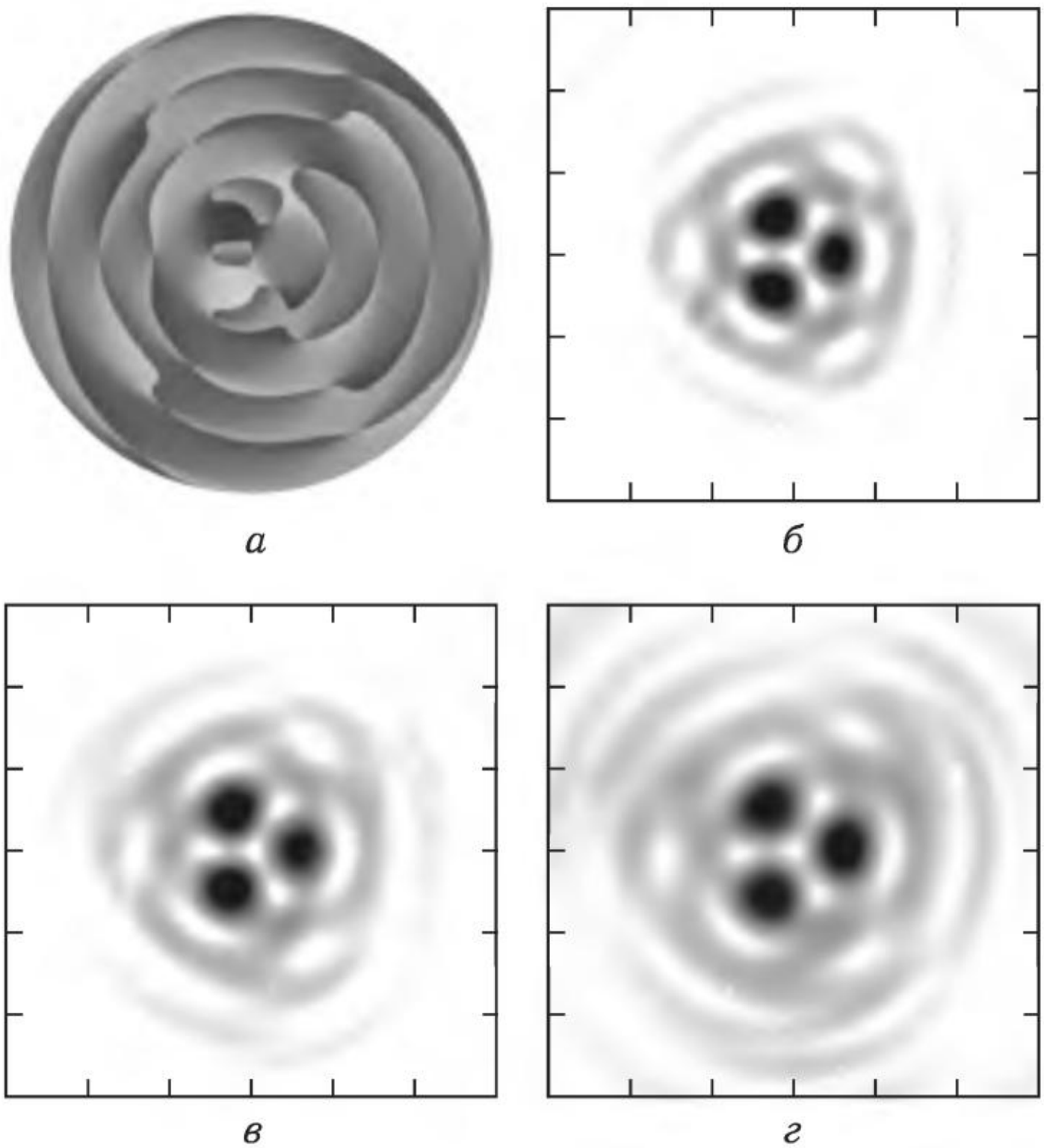


Рис. 3.14. Кодированная фаза для формирования пучка Бесселя в виде трех световых пятен (рис. 3.13 *б*, негатив) (*а*) и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях от плоскости $z = 0$: 0 мм (*б*); 200 мм (*в*); 400 мм (*г*). Шаг сетки равен 0,5 мм

совсем иная — вместо светового треугольника формируются три световых пятна. Для такого пучка $c \neq \alpha R_0$, поэтому ОУМ не может быть определен с помощью формулы (3.78). Согласно формуле (27), ОУМ этого пучка дробный и равен

$$\frac{J_z}{I} = 5 + \frac{\operatorname{Im}\left\{\left(5 + i3\sqrt{3}\right) J_1\left(5\sqrt{3} - 3i\right)\right\} - 5I_1(6)}{I_0(6) + 2\operatorname{Re}\left\{J_0\left(5\sqrt{3} - 3i\right)\right\}} \approx 0.62. \qquad (3.79)$$

На рис. 3.14 показана фаза (а) и распределения интенсивности (*б–г*), сформированные SLM, для суперпозиции из 3 пучков Бесселя с параметрами $n = 5$, $R_0 = 8\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 3$, $\gamma = \pi$. Из рис. 3.14 видно, что картины дифракции согласуются с расчетной интенсивностью на рис. 3.13 *а*.

3.2.6. Суперпозиция пучков Бесселя, расположенных в углах правильного многоугольника. Как и в предыдущем случае рассмотрим суперпозицию из P смещенных пучков Бесселя n-го порядка, центры сингулярности которых расположены в вершинах правильного многоугольника (аналогично (3.75)):

$$\begin{cases} x_p = R_0 \cos\left(\dfrac{2\pi p}{P}\right) + \dfrac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\dfrac{2\pi p}{P}\right), \\ y_p = R_0 \sin\left(\dfrac{2\pi p}{P}\right) + i\dfrac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\dfrac{2\pi p}{P}\right), \end{cases} \qquad (3.80)$$

где $p = 0, \ldots, P - 1$.

Пусть для определенности $\gamma = \pi$ и $c = \alpha R_0$. В этом случае вместо (3.80) будет:

$$\begin{cases} x_p = iR_0 \sin\left(\dfrac{2\pi p}{P}\right), \\ y_p = -iR_0 \cos\left(\dfrac{2\pi p}{P}\right). \end{cases} \qquad (3.81)$$

Общая формула для ОУМ (3.72) примет вид:

$$\frac{J_z}{I} = n + \alpha \frac{2R_0 \sum\limits_{p=1}^{P-1} \sum\limits_{q=0}^{p-1} \operatorname{Im}\left\{C_p^* C_q\right\} \sin\left[\dfrac{\pi(p-q)}{P}\right] I_1\left\{2\alpha R_0 \cos\left[\dfrac{\pi(p-q)}{P}\right]\right\}}{\sum\limits_{p=0}^{P-1} |C_p|^2 I_0(2\alpha r_{pi}) + 2\sum\limits_{p=1}^{P-1} \sum\limits_{q=0}^{p-1} \operatorname{Re}\left\{C_p^* C_q J_0(\alpha R_{pq})\right\}}. \qquad (3.82)$$

Если все коэффициенты C_p действительные, то числитель в (3.82) равен нулю и ОУМ такой суперпозиции смещенных пучков Бесселя равен ОУМ одного несмещенного пучка Бесселя (3.68). В качестве примера на рис. 3.15 показана интенсивность и фаза суперпозиции из четырех смещенных пучков Бесселя с топологическими зарядами $n = 7$. Нормированный ОУМ этой суперпозиции равен $J_z/I = 7$. Из рис. 3.15 *б* видно, что внутри основного светлого кольца, похожего на квадрат, имеются 7 оптических вихрей с топологическим зарядом $+1$.

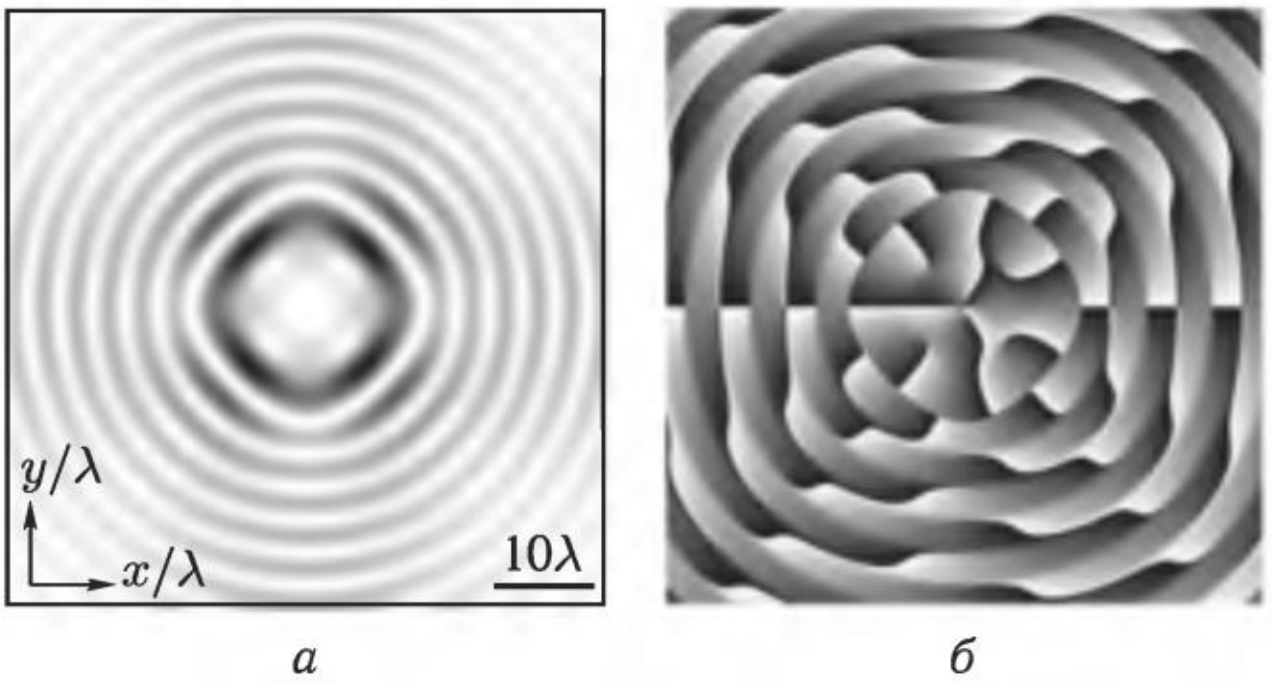


Рис. 3.15. Интенсивность (*а*) (черный цвет — максимум, белый цвет — ноль) и фаза (*б*) (черный цвет — π, белый цвет — $-\pi$) суперпозиции из четырех ($P = 4$) смещенных пучков Бесселя с параметрами $n = 7$, $R_0 = 6\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 6$, $\gamma = \pi$, $\mathbf{C} = [1, 1, 1, 1]$. Размер кадра $2R = 60\lambda$

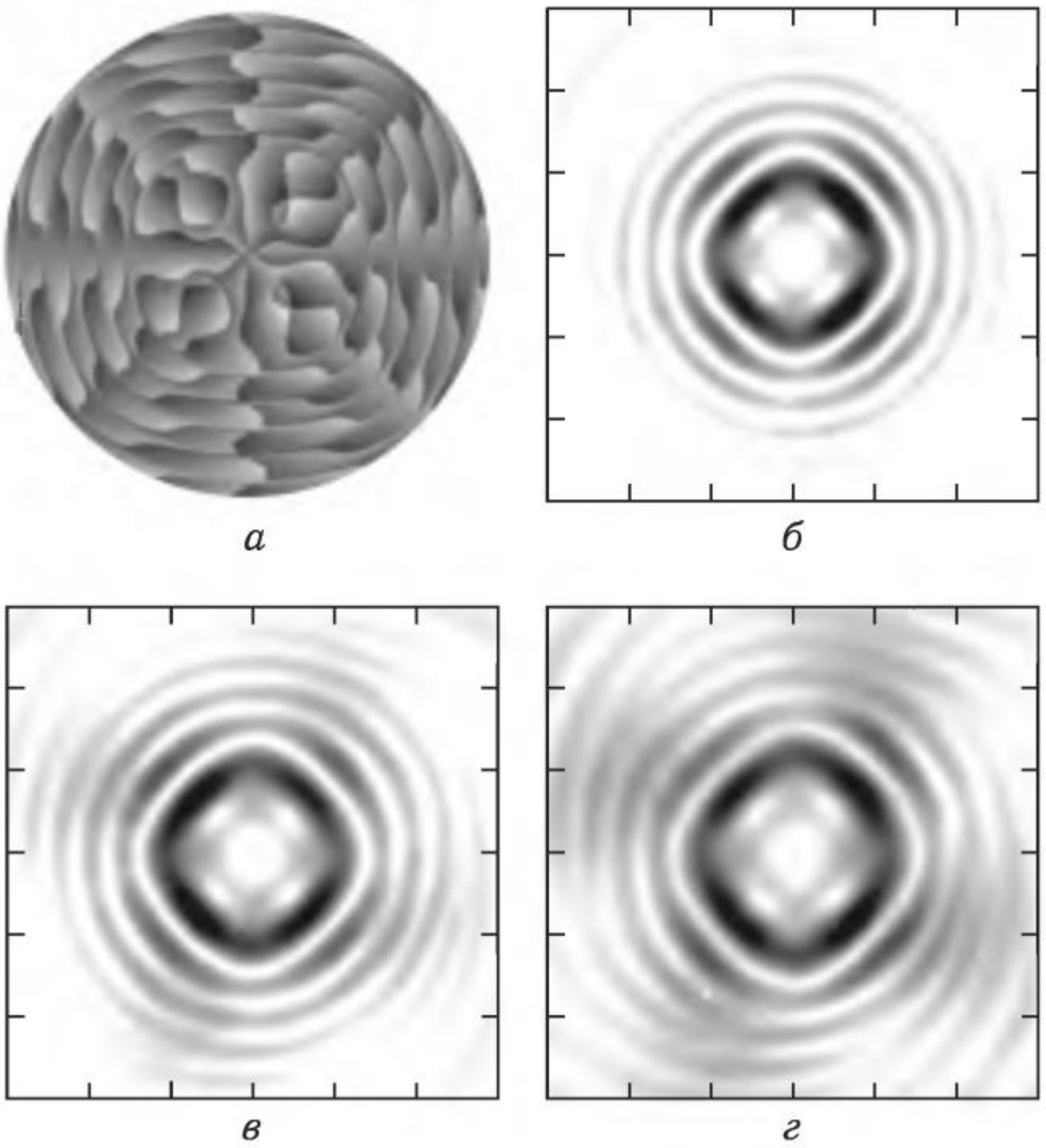


Рис. 3.16. Кодированная фаза (рис. 3.15 *б*, негатив) для формирования пучка Бесселя в виде контура квадрата (*а*) и экспериментально сформированные распределения интенсивности на различных расстояниях от плоскости $z = 0$: 0 мм (*б*); 200 мм (*в*); 400 мм (*г*). Шаг сетки равен 0,5 мм

На рис. 3.16 показана кодированная фаза (*а*) и распределения интенсивности (*б–г*), сформированные SLM, для суперпозиции из четырех смещенных пучков Бесселя (рис. 3.15) с топологическими

зарядами $n = 7$, $R_0 = 6\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 6$, $\gamma = \pi$, $\mathbf{C} = [1, 1, 1, 1]$. Из рис. 3.16 видно, что картины дифракции согласуются с расчетной интенсивностью на рис. 3.15 *а*.

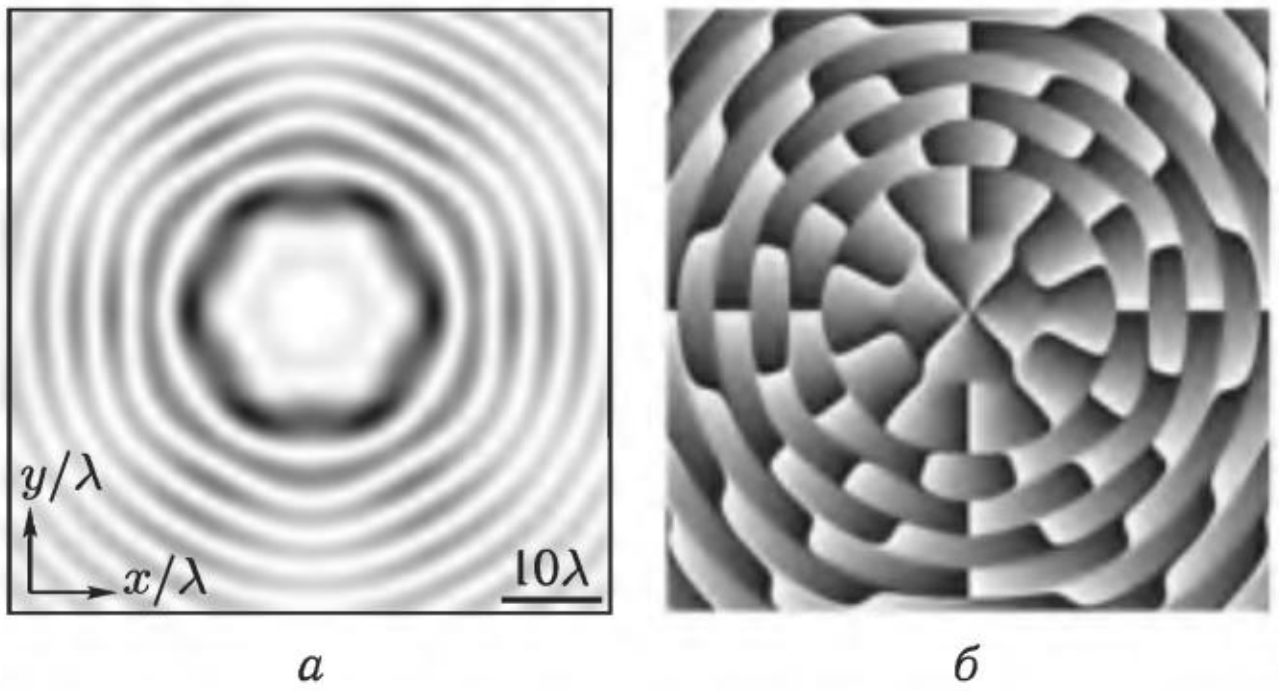


Рис. 3.17. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) (черный цвет — π, белый цвет — $-\pi$) суперпозиции из 6 смещенных пучков Бесселя с параметрами: $P = 6$, $n = 10$, $R_0 = 12\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 12$, $\gamma = \pi$, $\mathbf{C} = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$. Размер кадра $2R = 60\lambda$

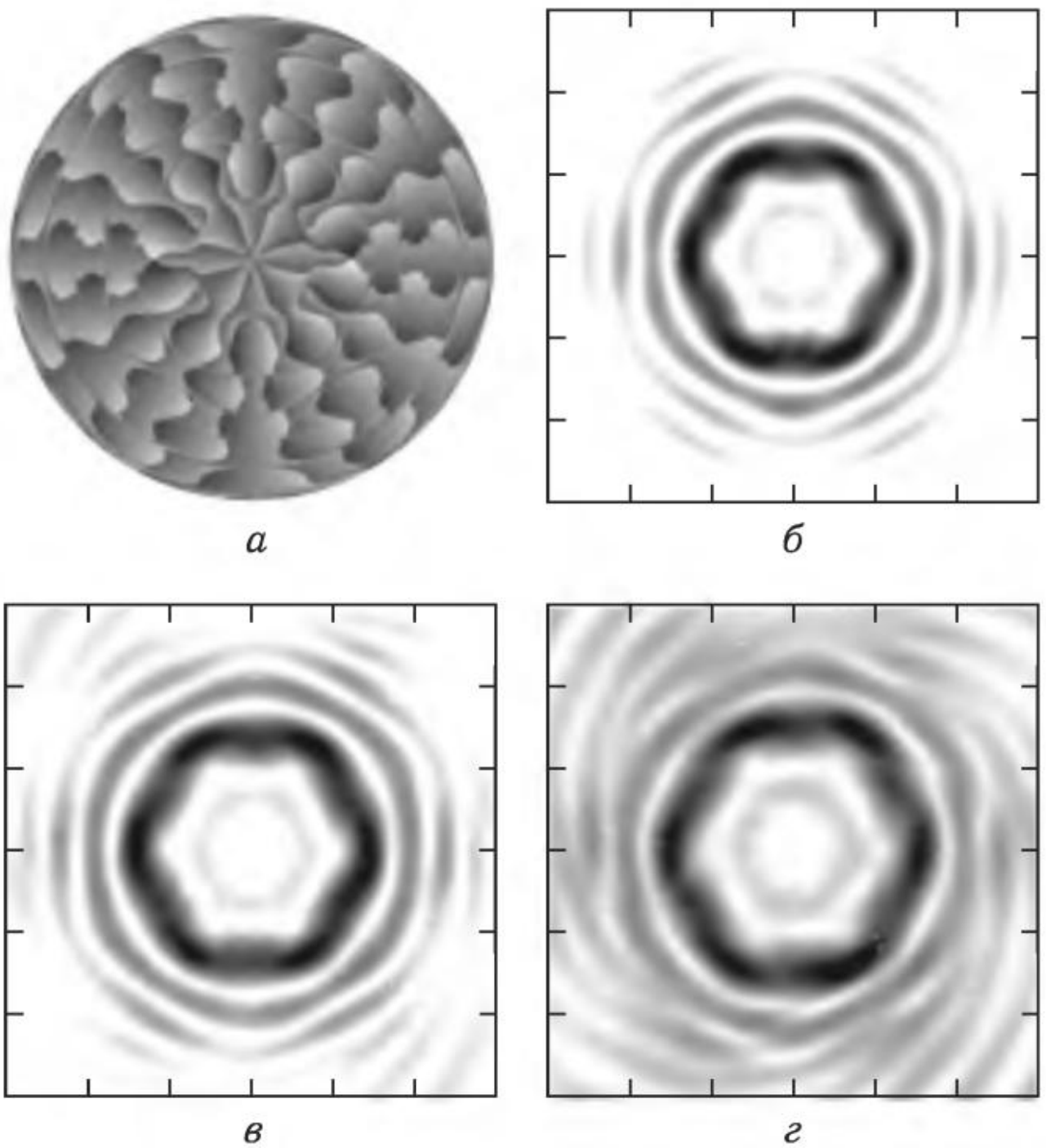


Рис. 3.18. Кодированная фаза (рис. 3.17 *а*, негатив) для формирования пучка Бесселя в виде контура шестиугольника (*а*) и экспериментально сформированные распределения интенсивности на разных расстояниях от плоскости $z = 0$: 0 мм (*б*); 200 мм (*в*); 400 мм (*г*). Шаг сетки равен 0,5 мм

На рис. 3.17 показан другой пример: интенсивность (*а*) и фаза (*б*) суперпозиции из шести ($P = 6$) смещенных пучков Бесселя с одинаковым топологическим зарядом $n = 10$, центры сингулярности которых расположены в вершинах правильного шестиугольника. Нормированный ОУМ такой суперпозиции равен $J_z/I = 10$.

На рис. 3.18 показана кодированная фаза (а) и распределение интенсивности (*б–г*), сформированные SLM на разных расстояниях, для суперпозиции из шести ($P = 6$) смещенных пучков Бесселя (рис. 3.17) с одинаковым топологическим зарядом $n = 10$, $R_0 = 12\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 12$, $\gamma = \pi$, $\mathbf{C} = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$. Из рис. 3.18 видно, что картины дифракции согласуются с расчетной интенсивностью на рис. 3.17 *а*.

3.2.7. Суперпозиция большого числа пучков Бесселя, центры которых лежат на окружности. В этом разделе показано, что если в каждой точке окружности радиуса R_0 расположить центр смещенного пучка Бесселя n-го порядка, и рассмотреть суперпозицию бесконечного числа таких пучков с одинаковыми весовыми коэффициентами, то вся суперпозиция сформирует обычный несмещенный пучок Бесселя n-го порядка.

Используя представление функции Бесселя в виде ряда, несмещенный пучок Бесселя (3.54) в начальной плоскости ($z = 0$) можно также представить в виде ряда:

$$E(x, y, z = 0) = \exp(in\varphi) J_n(\alpha r) = \\ = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} (x - iy)^p (x + iy)^{n+p}. \quad (3.83)$$

Рассмотрим непрерывную суперпозицию смещенных пучков Бесселя (3.83), центры которых расположены на окружности радиуса R_0:

$$E(x, y, z = 0) = \\ = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} \int_0^{2\pi} [(x - R_0\cos\theta) - i(y - R_0\sin\theta)]^p \times \\ \times [(x - R_0\cos\theta) + i(y - R_0\sin\theta)]^{n+p}\, d\theta. \quad (3.84)$$

В полярных координатах (34) будет иметь вид:

$$E(r, \varphi, z = 0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} \times \\ \times \int_0^{2\pi} [r\exp(-i\varphi) - R_0\exp(-i\theta)]^p [r\exp(i\varphi) - R_0\exp(i\theta)]^{n+p}\, d\theta. \\ (3.85)$$

Представим оба сомножителя под интегралом в (3.85) в виде биноминального разложения:

$$E\left(r,\varphi,z=0\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{p}{m}\binom{n+p}{k}\left(-R_0\right)^{m+k}r^{2p-m+n-k}\times$$
$$\times\exp\left[i\left(n+p-k\right)\varphi-i\left(p-m\right)\varphi\right]\int\limits_0^{2\pi}\exp\left[i\left(k-m\right)\theta\right]d\theta. \quad (3.86)$$

Так как интеграл по θ не равен нулю только при $k=m$, сумма по k пропадает, и вместо (3.86) получим:

$$E\left(r,\varphi,z=0\right)=2\pi\exp\left(in\varphi\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\binom{n+p}{m}\left(\frac{R_0}{r}\right)^{2m}. \quad (3.87)$$

Изменим порядок суммирования в (3.87), тогда получим:

$$E\left(r,\varphi,z=0\right)=2\pi\exp\left(in\varphi\right)\times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{R_0}{r}\right)^{2m}\sum_{p=m}^{\infty}\binom{p}{m}\binom{n+p}{m}\frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p}\right]=$$
$$=2\pi\exp\left(in\varphi\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{R_0}{r}\right)^{2m}\sum_{p=m}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(m!)^2\,(p-m)!\,(n+p-m)!}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p}. \quad (3.88)$$

Заменим $p-m$ на p, и перегруппируем сомножители в двух рядах так, что станет видно, что эти ряды равны функциям Бесселя:

$$E\left(r,\varphi,z=0\right)=2\pi\exp\left(in\varphi\right)\times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(R_0/r\right)^{2m}}{(m!)^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+m}}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p+2m}\right]=$$
$$=2\pi\exp\left(in\varphi\right)\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{\alpha R_0}{2}\right)^{2m}\right]\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p}\right]=$$
$$=2\pi J_0\left(\alpha R_0\right)J_n\left(\alpha r\right)\exp\left(in\varphi\right). \quad (3.89)$$

Амплитуда (3.89) отличается от амплитуды обычного пучка Бесселя множителем $2\pi J_0(\alpha R_0)$. На рис. 3.19 показаны интенсивности суперпозиции из 5, 8, 10, 20, 40 и 60 смещенных пучков Бесселя с топологическим зарядом $n=7$, центры которых лежат на окружности

радиуса $R_0 = 100\lambda$. Параметры расчета для всех рис. 3.19 *а–е* одинаковы: $n = 7$, $R_0 = 100\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$. Размер кадров $2R = 240\lambda$.

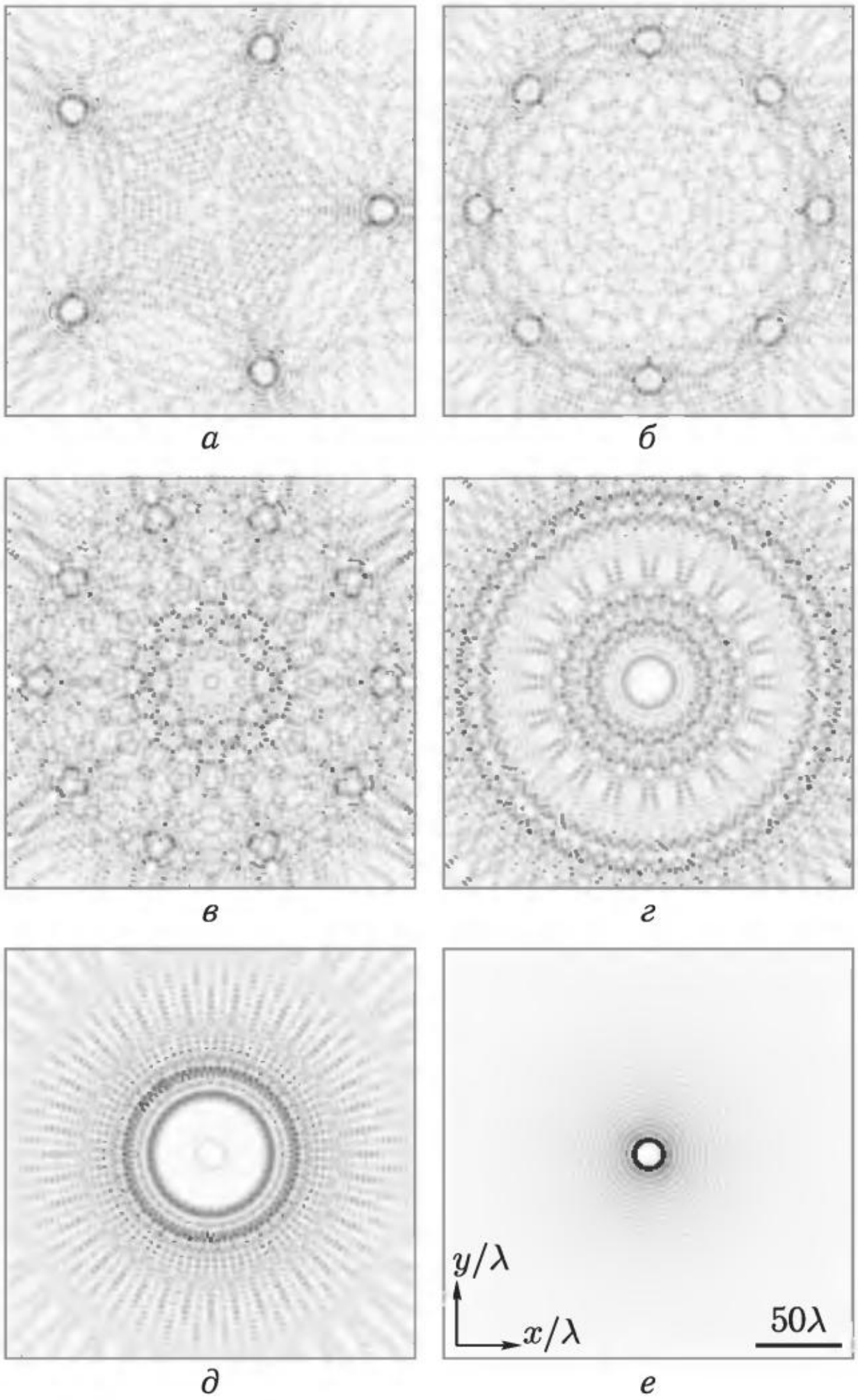


Рис. 3.19. Интенсивность суперпозиции P пучков Бесселя при $P = 5$ (*а*), 8 (*б*), 10 (*в*), 20 (*г*), 40 (*д*), 60 (*е*) (черный цвет — максимум, белый цвет — ноль)

Из рис. 3.19 видно, что уже при $P = 60$ почти формируется несмещенная мода Бесселя с амплитудой (39). Нормированный ОУМ для всех суперпозиций на рис. 3.19 *а–е* одинаковый и равен $J_z/I = 7$. Из (3.89) видно, что при $\alpha R_0 = \gamma_{0,s}$, ($\gamma_{0,s}$ — s-й корень функции Бесселя нулевого порядка) комплексная амплитуда равна нулю (т. е. все пучки Бесселя испытывают деструктивную интерференцию). Численное моделирование это подтверждает: для суперпозиции из $P = 360$ пучков при $R_0 = 100\lambda$ и при $R_0 = \gamma_{0,32}\lambda = 99{,}74682\lambda$ получаются

изображения, аналогичные рис. 3.19*е*, однако интенсивность во втором случае в $3 \cdot 10^{12}$ раз меньше.

В этом разделе получено аналитическое выражение для расчета нормированного ОУМ для суперпозиции смещенных с оптической оси пучков Бесселя с одинаковым топологическим зарядом (выражение (3.72)). Показано, что если весовые коэффициенты суперпозиции действительны, то ОУМ всей суперпозиции пучков Бесселя равен ОУМ одного несмещенного пучка Бесселя. Это позволяет формировать бездифракционные пучки с разным распределением интенсивности, но с одинаковым ОУМ. Показано, что суперпозиция множества одинаковых пучков Бесселя, центры которых расположены на окружности любого радиуса, эквивалентна одному пучку Бесселя из этой суперпозиции, расположенному в центре окружности (выражение (3.89)). Показано также, что комплексное смещение пучка Бесселя приводит к изменению распределения интенсивности в сечении пучка и изменению его ОУМ (выражения (3.67), (3.69)). Суперпозиция двух пучков Бесселя с комплексным смещением может не менять ОУМ, хотя распределение интенсивности будет меняться (выражение (3.74)). Эксперимент хорошо согласуется с теорией (рис. 3.12, 3.14, 3.16, 3.18).

3.3. Асимметричные моды Бесселя других типов

В [87, 88, 155, 124] рассмотрены непараксиальные ассиметричные моды Бесселя (аБ-моды) и параксиальные ассиметричные пучки Бесселя–Гаусса. В поперечном сечении этих лазерных пучков распределение интенсивности имеет вид полумесяца. В [152] аБ-моды исследовались экспериментально с помощью цифровой матрицы микрозеркал (digital micromirror device). В [153] по аналогии с [88] (вводя комплексное смещение моды Бесселя) рассмотрены ассиметричные пучки Чебышева–Бесселя. В [156] предлагается применять аБ-пучки в качестве акустических вихревых пучков. В [157] исследуются векторные бездифракционные пучки с дробным орбитальным угловым моментом (ОУМ), в том числе асимметричные (Матье и Вебера), аналогичные [88].

В этом разделе показано, что аБ-пучки [88] порождаются обычными симметричными модами Бесселя и Бесселя–Гаусса путем смещения аргумента функции Бесселя в комплексную плоскость. Рассмотрены также асимметричные пучки Бесселя второго типа, отличающиеся от [88] типом комплексного смещения. Рассмотрены также суперпозиции аБ-пучков первого (I) и второго (II) типа, и показано, что, хотя у аБ-пучков обоих типов ОУМ дробный и зависит от параметра асимметрии c, у суммы и разности аБ-пучков I и II типа ОУМ целый и равен топологическому заряду моды Бесселя n при любом значении c. Отсюда следует возможность формировать непараксиальные моды с различным распределением поперечной интенсивности (симметричные или несимметричные) при одинаковом целом ОУМ.

3.3.1. Асимметричные моды Бесселя II типа. Рассмотренные ранее аБ-моды имеют вид [88]:

$$E_1(r,\varphi,c) = \left[\frac{\alpha r}{\alpha r - 2c\exp(i\varphi)}\right]^{n/2} \times \\ \times J_n\left\{\sqrt{\alpha r(\alpha r - 2c\exp(i\varphi))}\right\}\exp(in\varphi), \quad (3.90)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n-го порядка, (r,φ) — полярные координаты, α — масштабный множитель, c — безразмерный коэффициент, в общем случае, комплексный. Можно показать, что мода (1) порождается обычной модой Бесселя

$$E_1(r,\varphi,c=0) = J_n(\alpha r)\exp(in\varphi) \quad (3.91)$$

при смещении аргумента в комплексную область. Действительно, поле (3.90) в декартовых координатах имеет вид:

$$E_1(x,y,c) = \left(\frac{x+iy}{x-iy-2c/\alpha}\right)^{n/2} J_n\left\{\alpha\sqrt{(x+iy)(x-iy-2c/\alpha)}\right\}. \quad (3.92)$$

Комплексную амплитуду (3.92) можно свести к (3.91) заменой переменных:

$$\begin{cases} y = y' + ic/\alpha, \\ x = x' + c/\alpha. \end{cases} \quad (3.93)$$

В (3.93) параметр c будем считать для определенности положительным действительным числом. Смещение моды (3.91) по горизонтальной оси (x) сопровождается ее видоизменением, так как по вертикальной оси (y) смещение в (3.93) чисто мнимое. Это изменение поперечной структуры интенсивности пучка приводит к тому, что вместо светового кольца мода имеет вид слабого эллипса $(c < 1)$, растущего полумесяца $(c > 1)$ или астигматического гауссова пучка $(c \gg 1)$. Из (3.93) видно, что по абсолютной величине и по знаку смещения по осям x и y одинаковы. Но, вообще говоря, это не обязательное требование: чтобы мода (3.91) оставалась модой смещения по разным декартовым осям может быть по модулю и по знаку разное. Но для дальнейшего, чтобы получать с помощью суперпозиции двух разных мод новые моды Бесселя, ограничимся двумя модификациями пучка (3.90). Рассмотрим пучок с отрицательным значением параметра $c' = -c$ $(c > 0)$. Тогда вместо (3.90) получим комплексную амплитуду аБ-пучка, который в поперечном сечении интенсивности имеет убывающий полумесяц:

$$E_1(r,\varphi,-c) = \left[\frac{\alpha r}{\alpha r + 2c\exp(i\varphi)}\right]^{n/2} \times \\ \times J_n\left\{\sqrt{\alpha r(\alpha r + 2c\exp(i\varphi))}\right\}\exp(in\varphi). \quad (3.94)$$

Рассмотрим другую модификацию пучка Бесселя (1), когда смещения по разным декартовым осям равны по модулю, но разные по знаку:

$$\begin{cases} y = y' + ic/\alpha, \\ x = x' - c/\alpha, \end{cases} \tag{3.95}$$

тогда получим аБ-пучок II типа, который также в поперечном сечении интенсивности дает растущий полумесяц, но смещенный по отношению к полумесяцу моды (3.90) при одинаковых значениях $c > 0$:

$$E_2\left(x, y, c\right) = \left(\frac{x + iy + 2c/\alpha}{x - iy}\right)^{n/2} J_n\left\{\alpha\sqrt{\left(x - iy\right)\left(x + iy + 2c/\alpha\right)}\right\}. \tag{3.96}$$

В полярных координатах мода Бесселя II типа (3.96) будет иметь вид:

$$E_2\left(r, \varphi, c\right) = \left[\frac{\alpha r + 2c\exp\left(-i\varphi\right)}{\alpha r}\right]^{n/2} \times \\ \times J_n\left\{\sqrt{\alpha r\left(\alpha r + 2c\exp\left(-i\varphi\right)\right)}\right\}\exp\left(in\varphi\right). \tag{3.97}$$

Зеркальная мода II типа для моды (3.97) получается аналогично моде (3.94) с помощью замены параметра c на $-c$:

$$E_2\left(r, \varphi, -c\right) = \left[\frac{\alpha r - 2c\exp\left(-i\varphi\right)}{\alpha r}\right]^{n/2} \times \\ \times J_n\left\{\sqrt{\alpha r\left(\alpha r - 2c\exp\left(-i\varphi\right)\right)}\right\}\exp\left(in\varphi\right). \tag{3.98}$$

Ассиметричная мода Бесселя (3.98) имеет в поперечное сечение интенсивности в виде убывающего полумесяца, такого же как у моды (3.94), но смещенного по сравнению с исходной модой (3.91) на другое расстояние при том же значении c.

Орбитальные угловые моменты у мод первого (3.90), (3.94) и второго типа (3.97), (3.98) разные:

$$\frac{J_z}{I} = n \pm \frac{cI_1\left(2c\right)}{I_0\left(2c\right)}, \tag{3.99}$$

где $I_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя,

$$I = \int\int \left|E(r, \varphi)\right|^2 r\, dr\, d\varphi$$

— мощность пучка. Выражение (3.99) для аБ-моды I получено в [88]. ОУМ для аБ-моды II получается аналогично. В (3.99) верхний знак выбирается для пучков первого типа (3.90), (3.94), а нижний знак — для пучков второго типа (3.97), (3.98).

При распространении в пространстве комплексные амплитуды аБ-пучков (3.90), (3.94) и (3.97), (3.98) умножаются на один и тот же множитель $\exp\left(ikz\sqrt{1 - \alpha^2}\right)$.

Чтобы получить соответствующие асимметричные пучки Бесселя–Гаусса первого и второго типов, надо комплексные амплитуды (3.90), (3.94) и (3.97), (3.98) умножить на гауссову экспоненту $\exp\left(-r^2/w^2\right)$, где w — радиус гауссова пучка.

3.3.2. Суперпозиции асимметричных мод Бесселя. Хотя лазерные пучки $E_{1,2}(r,\varphi,\pm c)$ в поперечном сечении интенсивности дают полумесяц, суперпозиции таких пучков могут формировать разнообразные моды Бесселя, как симметричные, так и асимметричные. Рассмотрим несколько примеров таких суперпозиций мод $E_{1,2}(r,\varphi,\pm c)$.

На рис. 3.20 показана интенсивность (*а*) и фаза (*б*) суммы двух зеркальных асимметричных мод Бесселя 1-го типа:

$$E_+\left(r,\varphi,z;c\right) = E_1\left(r,\varphi,z;c\right) + E_1\left(r,\varphi,z;-c\right). \tag{3.100}$$

Параметры расчета: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд $n = 3$, параметр асимметрии $c = 1$, масштабный множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, размер кадра $R = 200\lambda$. Из рис. 3.20 видно, что результирующая мода имеет симметрию относительно декартовых осей, распределение интенсивности имеет вид эллипса, с небольшой неоднородностью интенсивности.

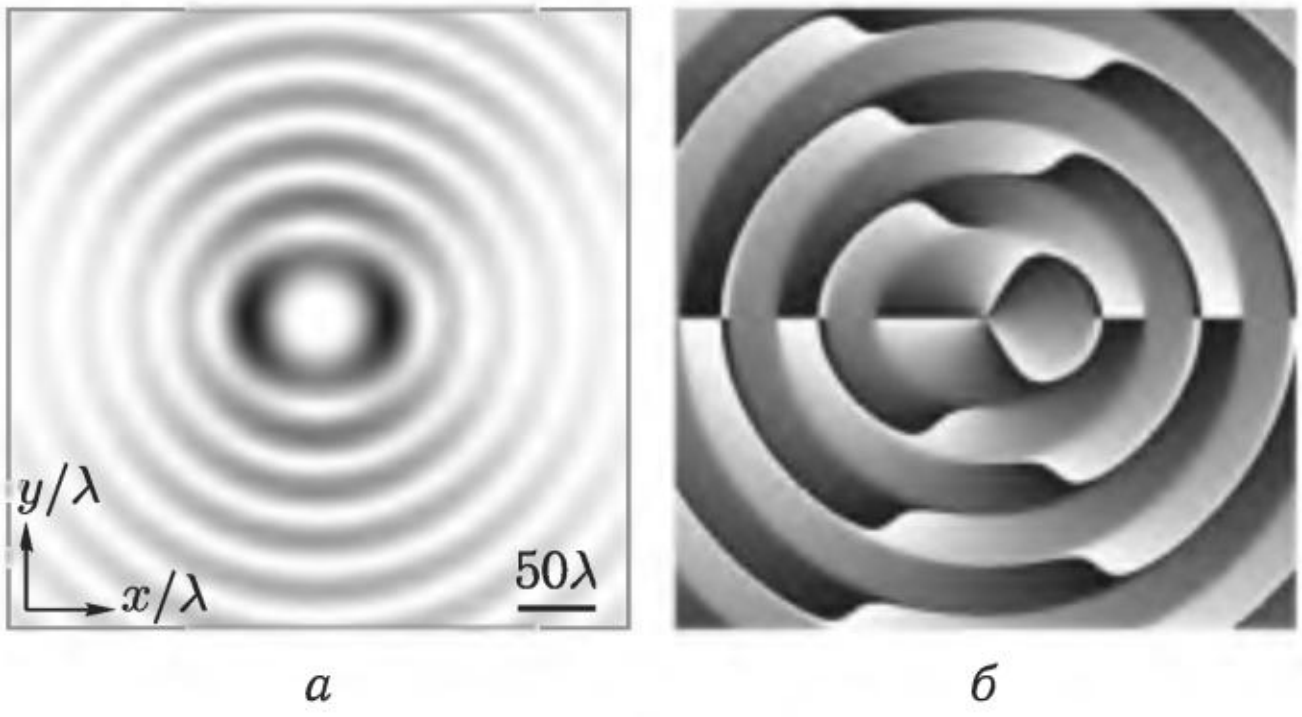


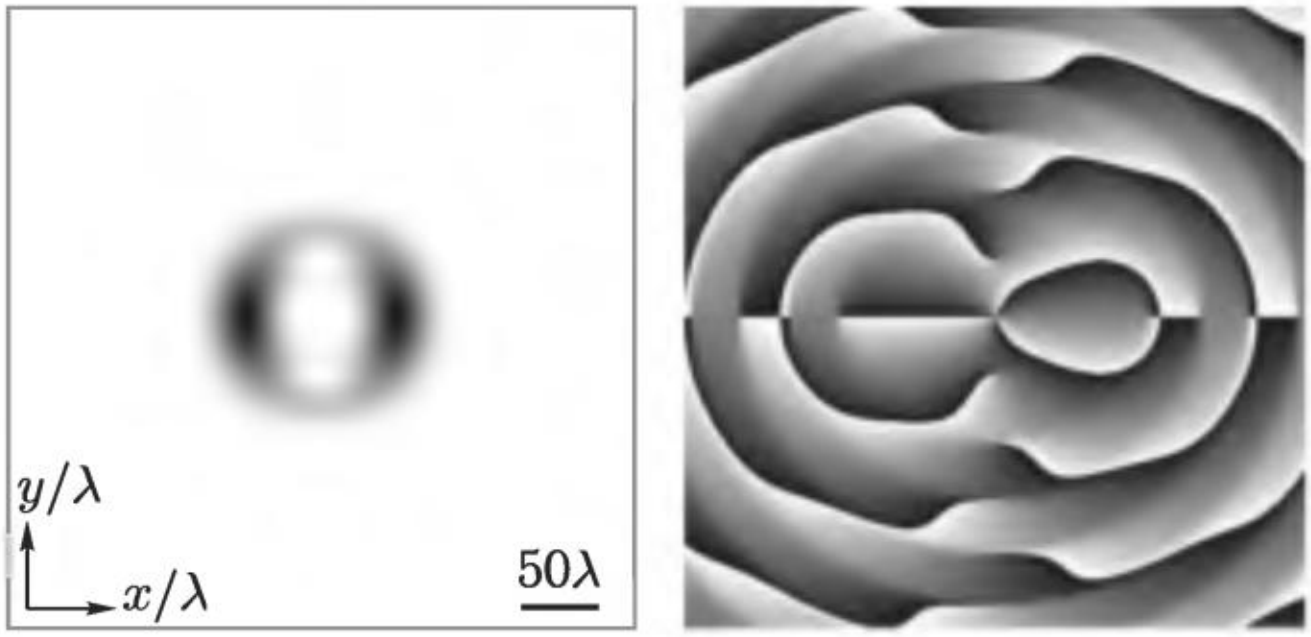
Рис. 3.20. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) суммы двух асимметричных и взаимно зеркальных мод Бесселя (3.100)

На рис. 3.21 показаны интенсивность (*а*) и фаза (*б*) суммы (3.100), умноженной на гауссову функцию. Видно, что два зеркальных асимметричных пучка Бесселя–Гаусса с радиусом перетяжки $w = 50\lambda$ при $c = 3$ формируют симметричный эллиптический пучок, почти без боковых лепестков, похожий на букву О.

Интересно, что разность двух зеркальных асимметричных мод Бесселя 1-го типа

$$E_-\left(r,\varphi,z;c\right) = E_1\left(r,\varphi,z;c\right) - E_1\left(r,\varphi,z;-c\right) \tag{3.101}$$

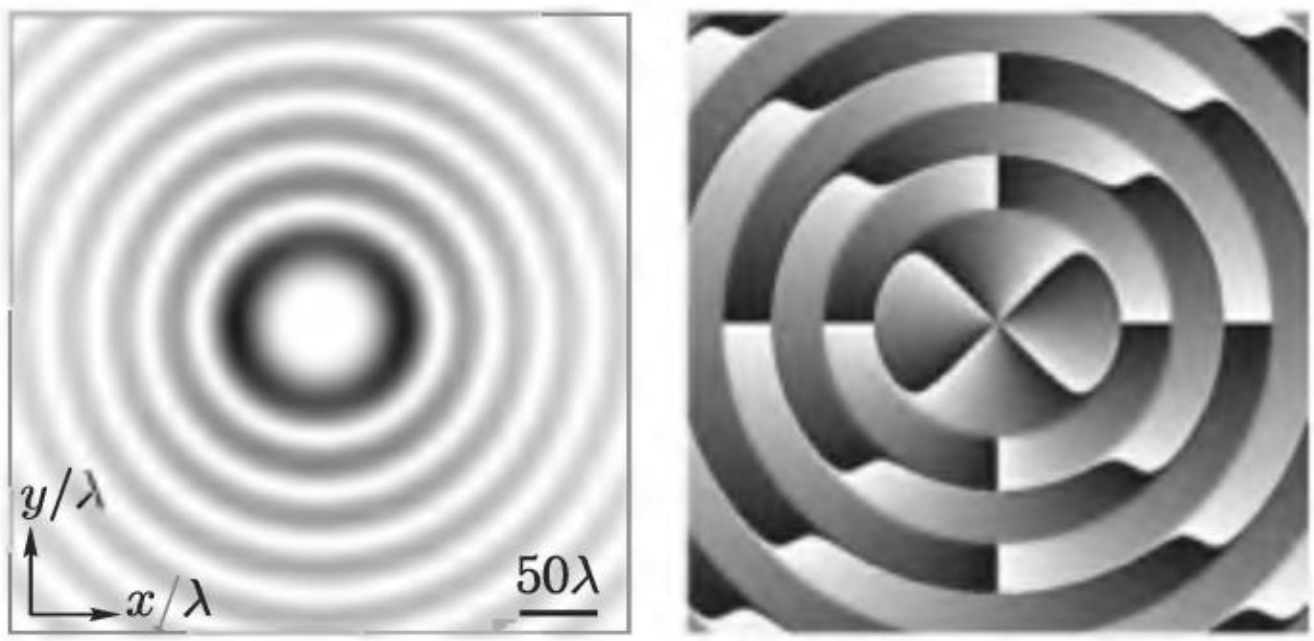
формирует интенсивность (рис. 3.22 *а*) и фазу (рис. 3.22 *б*) почти с осевой симметрией (слабый эллипс), и с увеличением на единицу тополо-



а *б*

Рис. 3.21. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) суммы двух асимметричных и взаимно зеркальных пучков Бесселя–Гаусса, с такими же параметрами, как на рис. 3.20

гического заряда оптического вихря на оси. Параметры те же, что и на рис. 3.20. Из рис. 3.22 *б* видно, что в центре картины на оптической оси формируется вихрь с топологическим зарядом $n = 4$, хотя у обеих мод в (3.101) топологический заряд равен $n = 3$. У суммы мод (11) также на оси формируется оптический вихрь с топологическим зарядом $n = 3$ (рис. 3.20 *б* и рис.3.21 *б*).



а *б*

Рис. 3.22. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) разности двух взаимно зеркальных асимметричных мод Бесселя (3.101). Параметры расчета такие же, как на рис. 3.20

Увеличение топологического заряда на единицу при вычитании двух зеркальных мод (3.90) и (3.94) можно доказать. Действительно, если рассмотреть амплитуду суммы (3.100) и разности (3.101)

$$E_{\pm}(r,\varphi,z) = (\alpha r)^{n/2}\exp(in\varphi)\times$$
$$\times\left(\frac{J_n\left\{\sqrt{\alpha r\left[\alpha r - 2c\exp(i\varphi)\right]}\right\}}{\left[\alpha r - 2c\exp(i\varphi)\right]^{n/2}} \pm \frac{J_n\left\{\sqrt{\alpha r\left[\alpha r + 2c\exp(i\varphi)\right]}\right\}}{\left[\alpha r + 2c\exp(i\varphi)\right]^{n/2}}\right), \tag{3.102}$$

в окрестности начала координат, то, используя приближенное выражение для функции Бесселя,

$$J_n(z) \approx \frac{1}{n!}\left(\frac{z^2}{4}\right)^{n/2}\left[1+\frac{z^2}{4(n+1)}\right], \tag{3.103}$$

получим:

$$E_\pm\left(r << \frac{1}{\alpha}, \varphi, z\right) = \frac{1}{n!}(\alpha r)^{n/2}\left(\frac{\alpha r}{4}\right)^{n/2}\exp(in\varphi)\times$$
$$\times\left\{\left[1+\frac{\alpha r\left[\alpha r - 2c\exp(i\varphi)\right]}{4(n+1)}\right]\left[1+\frac{\alpha r\left[\alpha r + 2c\exp(i\varphi)\right]}{4(n+1)}\right]\right\}, \tag{3.104}$$

т. е.

$$\begin{aligned} E_+ &\approx \frac{2}{n!}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^n\left[1+\frac{(\alpha r)^2}{4(n+1)}\right]\exp(in\varphi), \\ E_- &\approx \frac{-2c}{(n+1)!}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+1}\exp\left[i(n+1)\varphi\right]. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Из (3.105) видно, что при сложении двух мод (3.90) и (3.94) с топологическим зарядом n получается вблизи оптической оси вихрь E_+ с топологическим зарядом n, а при вычитании — оптический вихрь E_- с топологическим зарядом $n+1$.

Рассмотрим теперь сумму и разность двух одинаковых мод, но разных типов: первого (3.90) и второго (3.97):

$$E_{1+2}(r,\varphi,z) = E_1(r,\varphi,z;c) + E_2(r,\varphi,z;c). \tag{3.106}$$

При небольших значениях параметра асимметрии ($c = 1$) сумма (3.106) дает почти такой же растущий полумесяц (рис. 3.23 *а*), как каждая из складываемых мод. На рис. 3.23 показаны интенсивность (*а*) и фаза (*б*) суммы (3.106). Параметры расчета такие же, как для рис. 3.20.

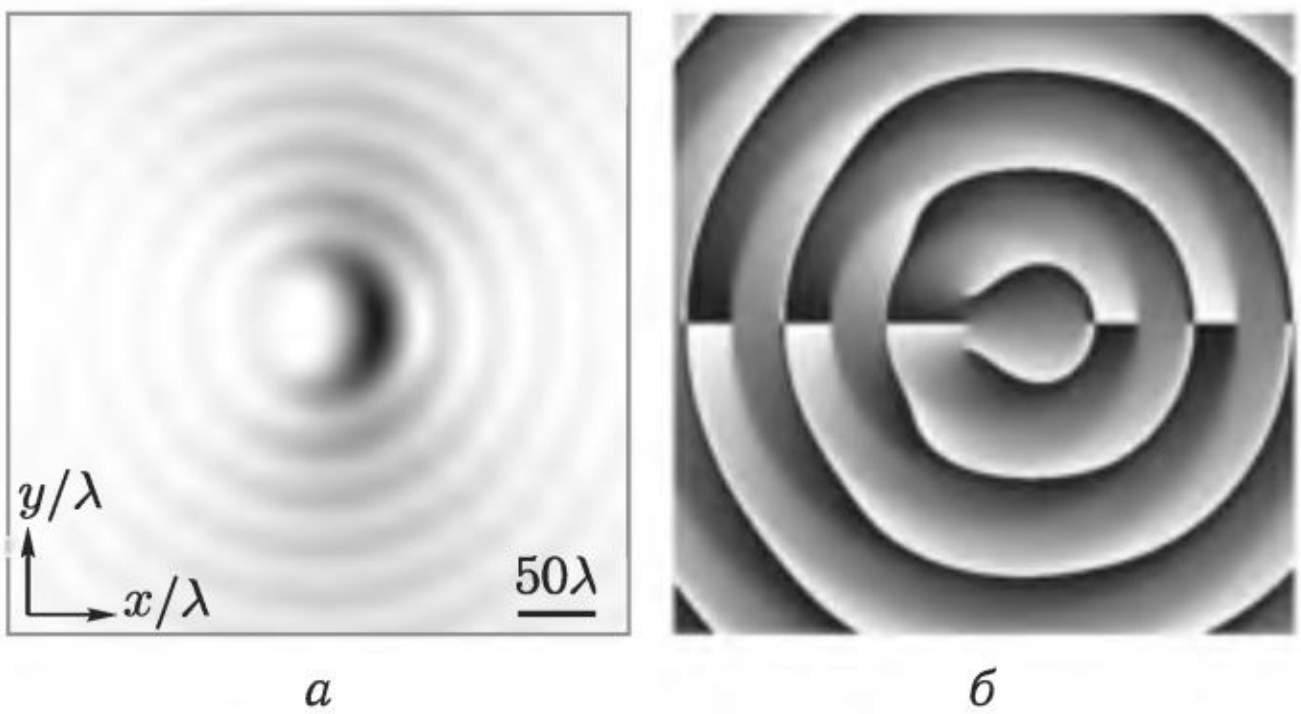


Рис. 3.23. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) суммы двух одинаковых асимметричных мод Бесселя первого и второго типов (3.106). Параметры расчета такие же, как на рис. 3.20

При увеличении параметра асимметрии ($c = 7$) оба полумесяца, которые в своем сечении интенсивности формируют каждый из пучков, описываемых слагаемыми в (3.106), трансформируются в астигматические (вытянутые по вертикальной координате) гауссовы пучки и смещаются дальше друг от друга, формируя симметричное распределение интенсивности, похожее на букву Ж (рис. 3.24 *а*). На рис. 3.24 показаны интенсивность (*а*) и фаза (*б*) суммы двух асимметричных мод Бесселя разных типов (3.106) при $c = 7$ (остальные параметры, как на рис. 3.20).

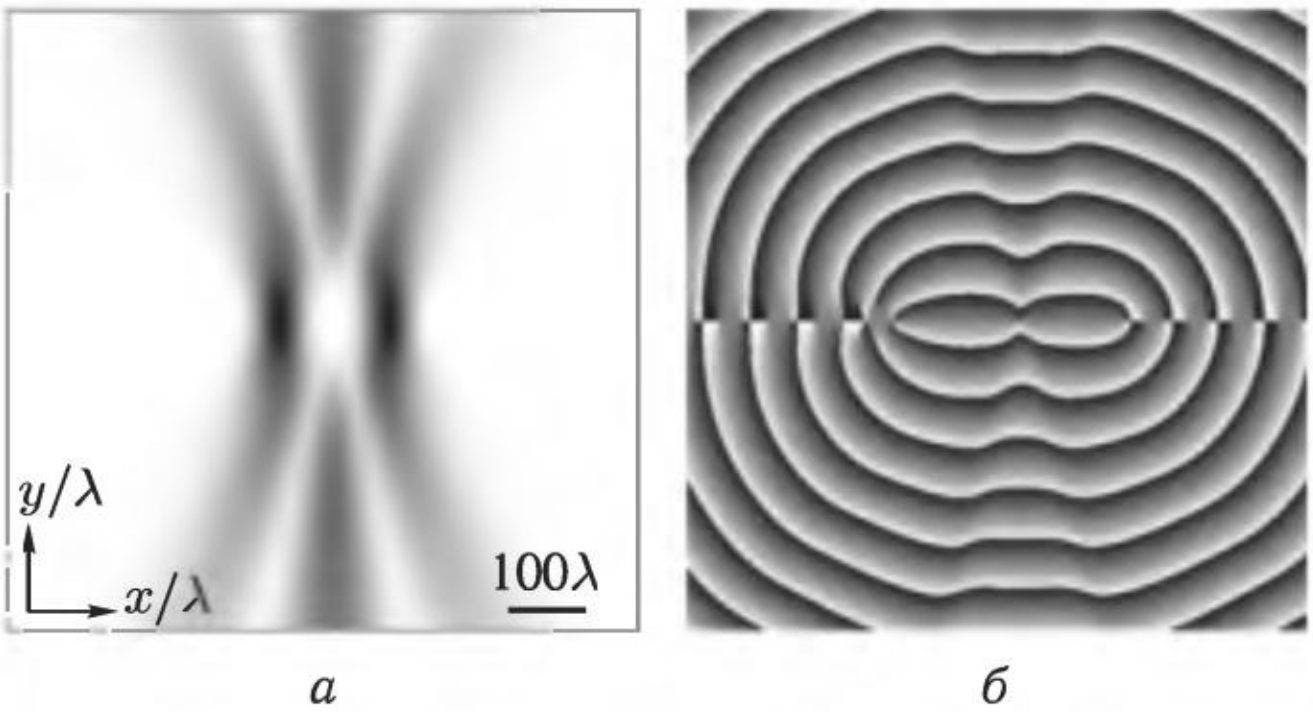


Рис. 3.24. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) суммы двух одинаковых асимметричных мод Бесселя первого и второго типов (3.106). Параметры расчета такие же, как на рис. 3.23, но $c = 7$

Заметим, что размер всех рисунков 1–4 равен 200λ, и только размер картин на рис. 3.24 равен 400λ. Разность двух асимметричных мод Бесселя первого и второго типов

$$E_{1-2}(r, \varphi, z) = E_1(r, \varphi, z; c) - E_2(r, \varphi, z; c) \tag{3.107}$$

при малых значениях параметра асимметрии ($c = 1$) формирует асимметричную картину интенсивности (рис. 3.25 *а*), но более сложную, чем картина интенсивности для суммы таких же пучков (рис. 3.23).

Из рис. 3.25 *б* видно, что вдоль центральной вертикальной линии формируются оптические вихри с чередующимися топологическими зарядами $+1$ и -1.

Если увеличить параметр асимметрии ($c = 3$), то картина интенсивности разности двух пучков (3.107) уже будет более симметричный вид относительно декартовых осей, и будет похожа на букву Х (рис. 3.26). На рис. 3.26 показаны интенсивность (*а*) и фаза (*б*) разности двух одинаковых асимметричных мод Бесселя первого и второго типов (3.107). Параметры расчета такие же, как на рис. 3.25, но $c = 3$. Размер картин на рис. 3.25 и 3.26 равен 200λ. Из рис. 3.26 видно, что вдоль вертикальной оси y интенсивность равна нулю (линейная дислокация).

Из рис. 3.25 *б* и 3.26 *б* видно, что в центре картин интенсивности для разности двух одинаковых асимметричных пучков Бесселя первого

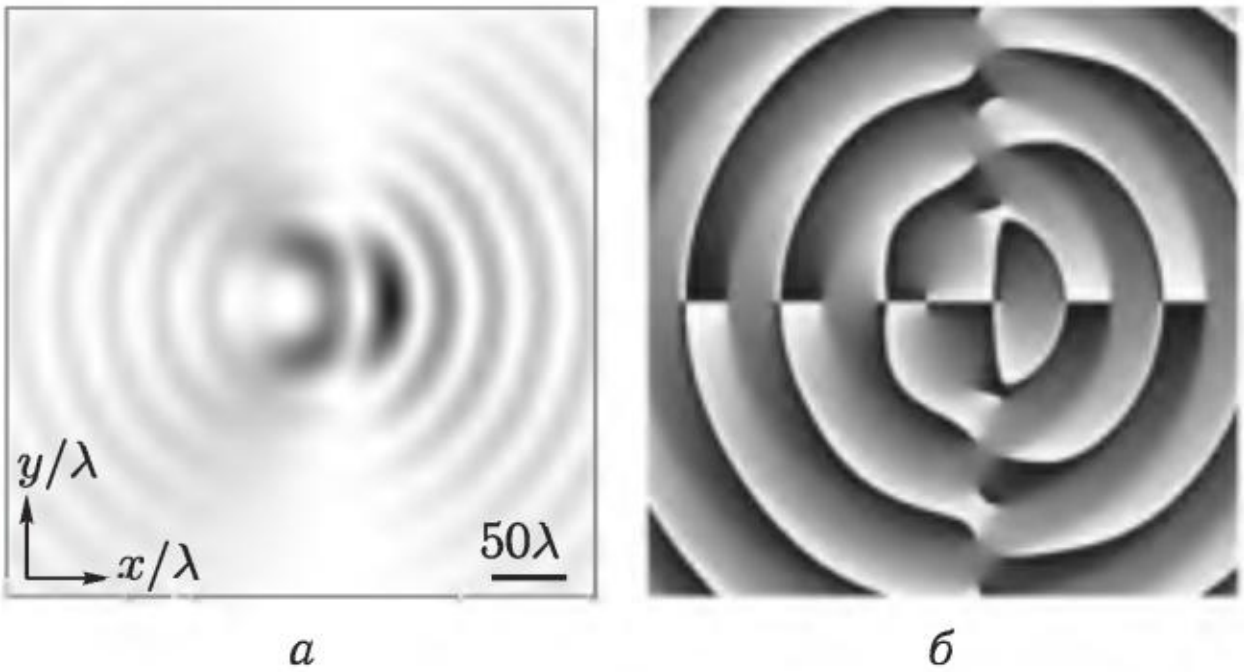


Рис. 3.25. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) разности двух одинаковых асимметричных мод Бесселя первого и второго типов (3.107). Параметры расчета такие же, как на рис. 3.23

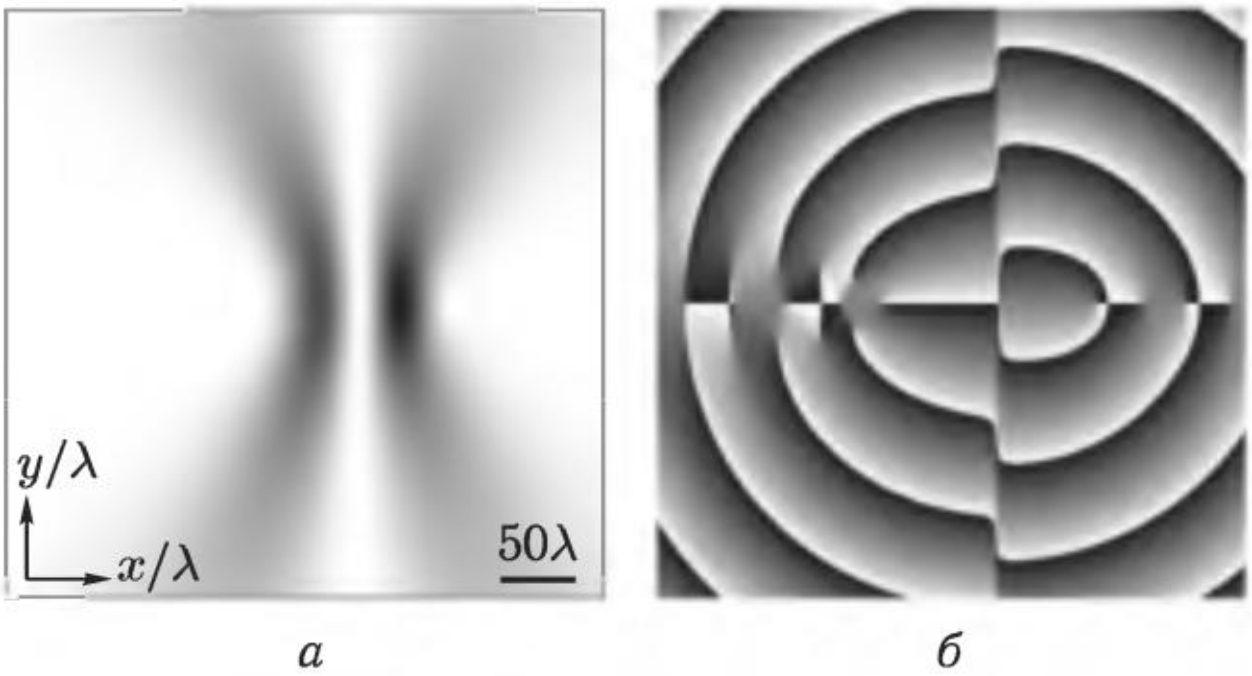


Рис. 3.26. Интенсивность (*а*) и фаза (*б*) разности двух одинаковых асимметричных мод Бесселя первого и второго типов (3.107). Параметры расчета такие же, как на рис. 3.25, но $c = 3$

и второго типа в центре не возникает увеличение на единицу топологического заряда оптического вихря. На рис. 3.25 *б* и 3.26 *б* топологический заряд оптического вихря в центре картины равен $n = 3$, как и у исходных пучков, входящих в разность (3.107).

Рассмотрим комплексное смещение аргумента моды Бесселя (3.91) более общего вида

$$\begin{cases} y = y' + ic/\alpha, \\ x = x' + b/\alpha. \end{cases} \tag{3.108}$$

В этом случае получается двухпараметрическое $(c,\ b)$ семейство асимметричных мод Бесселя, в отличие от однопараметрического семейства мод (3.90):

$$\begin{aligned} E_3(r,\varphi,c,b) = {} & [\alpha r + (c-b)\exp(-i\varphi)]^n \times \\ & \times \left[\alpha^2 r^2 - 2\alpha r\,(b\cos\varphi + ic\sin\varphi) + \left(b^2 - c^2\right)\right]^{-n/2} \times \\ & \times J_n\left\{\sqrt{\alpha^2 r^2 - 2\alpha r\,(b\cos\varphi + ic\sin\varphi) + (b^2 - c^2)}\right\} e^{in\varphi}. \end{aligned} \tag{3.109}$$

При $b = c$ выражение (3.109) совпадает с (3.90). Моды (3.109) удобны тем, что можно непрерывно изменять их форму, меняя параметр c, таким образом, чтобы смещения моды не происходило ($b = 0$). Для мод (3.90) и (3.97) с изменением поперечного сечения интенсивности моды автоматически происходит ее смещение по оси x.

Ассиметричные моды Бесселя первого типа (3.90) можно разложить в ряд по несмещенным модам Бесселя (3.91) [87, 88]:

$$E_1(r, \varphi, c) = \left[\frac{\alpha r - 2c\exp(i\varphi)}{\alpha r}\right]^{-n/2} \times$$
$$\times J_n\left\{\sqrt{\alpha r(\alpha r - 2c\exp(i\varphi))}\right\} e^{in\varphi} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p \exp[i(n+p)\varphi]}{p!} J_{n+p}(\alpha r), \tag{3.110}$$

и асимметричные моды Бесселя второго типа (3.97) также можно разложить в ряд по несмещенным модам Бесселя (3.91):

$$E_2(r, \varphi, c) = \left[\frac{\alpha r + 2c\exp(-i\varphi)}{\alpha r}\right]^{n/2} \times$$
$$\times J_n\left\{\sqrt{\alpha r(\alpha r + 2c\exp(-i\varphi))}\right\} e^{in\varphi} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p \exp[i(n-p)\varphi]}{p!} J_{n-p}(\alpha r). \tag{3.111}$$

Ряды (3.110) и (3.111) применяются для расчета ОУМ (3.99), для расчета пространственного спектра мод (3.90) и (3.97) и скалярного произведения двух мод с разными параметрами [87, 88]. Для двухпараметрических мод (3.109) разложения в ряд по несмещенным модам Бесселя получить не удается, поэтому ОУМ таких мод рассчитать затруднительно.

3.3.3. Орбитальный угловой момент суперпозиций асимметричных мод Бесселя первого и второго типа. Рассмотрим суперпозицию мод первого типа с произвольными комплексными коэффициентами:

$$E_1(r, \varphi, z; c) = C_1 E_1(r, \varphi, z; c) + C_2 E_1(r, \varphi, z; -c). \tag{3.112}$$

Определим орбитальный угловой момент J_z (проекцию ОУМ на оптическую ось) и суммарную интенсивность I светового пучка в плоскости, поперечной оптической оси, тем же способом, что и в [88], т. е. используя выражения для комплексных амплитуд в виде рядов из функций Бесселя (3.110), (3.111). Тогда ОУМ примет вид:

$$J_z = 2\pi D_1 \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+p)|c|^{2p}}{(p!)^2} \int_0^R J_{n+p}^2(\alpha r)\, r\, dr +$$
$$+ 2\pi D_2 \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(n+p)|c|^{2p}}{(p!)^2} \int_0^R J_{n+p}^2(\alpha r)\, r\, dr. \tag{3.113}$$

где $D_1 = |C_1|^2 + |C_2|^2$, $D_2 = C_1^* C_2 + C_1 C_2^*$.

Аналогично, суммарная энергия равна:

$$I = 2\pi D_1 \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|c|^{2p}}{(p!)^2} \int_0^R J_{n+p}^2(\alpha r)\, r\, dr +$$

$$+ 2\pi D_2 \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{|c|^{2p}}{(p!)^2} \int_0^R J_{n+p}^2(\alpha r)\, r\, dr. \quad (3.114)$$

Так как для любого целого числа m интегралы в суммах при больших значениях R равны

$$\int_0^R J_m^2(\alpha r)\, r\, dr = \frac{R}{\pi\alpha},$$

можно получить выражение для нормированного ОУМ светового поля (3.112):

$$\frac{J_z}{I} = n + |c| \frac{D_1 I_1(2|c|) + D_2 J_1(2|c|)}{D_1 I_0(2|c|) + D_2 J_0(2|c|)}. \quad (3.115)$$

Из (3.115) следует, что для суперпозиции двух мод первого типа без разности фаз между ними (т. е. $C_1 = C_2 = 1$, (3.113)) нормированный ОУМ равен:

$$\frac{J_z}{I} = n + |c| \frac{I_1(2|c|) + J_1(2|c|)}{I_0(2|c|) + J_0(2|c|)}. \quad (3.116)$$

Если же в суперпозиции двух мод первого типа разность фаз равна π (т. е. $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, (3.104)) нормированный ОУМ равен:

$$\frac{J_z}{I} = n + |c| \frac{I_1(2|c|) - J_1(2|c|)}{I_0(2|c|) - J_0(2|c|)}. \quad (3.117)$$

Рассмотрим теперь суперпозицию мод разных типов с произвольными комплексными коэффициентами:

$$E_{12}(r, \varphi, z; c) = C_1 E_1(r, \varphi, z; c) + C_2 E_2(r, \varphi, z; c). \quad (3.118)$$

В этом случае ОУМ и суммарная интенсивность имеют вид:

$$J_z = 2\pi |C_1|^2 \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+p)|c|^{2p}}{(p!)^2} \int_0^R J_{n+p}^2(\alpha r)\, r\, dr +$$

$$+ 2\pi |C_2|^2 \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n-p)|c|^{2p}}{(p!)^2} \int_0^R J_{n-p}^2(\alpha r)\, r\, dr$$

$$+ 2\pi n (C_1^* C_2 + C_1 C_2^*) \lim_{R\to\infty} \int_0^R J_n^2(\alpha r)\, r\, dr, \quad (3.119)$$

$$I = 2\pi \left|C_1\right|^2 \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|c|^{2p}}{(p!)^2} \int_0^R J_{n+p}^2(\alpha r)\, r\, dr +$$

$$+ 2\pi \left|C_2\right|^2 \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|c|^{2p}}{(p!)^2} \int_0^R J_{n-p}^2(\alpha r)\, r\, dr$$

$$+ 2\pi \left(C_1^* C_2 + C_1 C_2^*\right) \lim_{R\to\infty} \int_0^R J_n^2(\alpha r)\, r\, dr. \quad (3.120)$$

Из (3.119), (3.120) можно получить выражение для нормированного ОУМ:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{\left(\left|C_1\right|^2 - \left|C_2\right|^2\right) |c|\, I_1(2|c|)}{\left(\left|C_1\right|^2 + \left|C_2\right|^2\right) I_0(2|c|) + \left(C_1^* C_2 + C_1 C_2^*\right)}. \quad (3.121)$$

В частности, из (3.121) видно, что в случае суммы (3.106) и разности (3.107) получается, что ОУМ не зависит от α и c, а равен n.

Выражение (3.121) можно считать главным результатом данной работы, так как из (3.121) следует, что сложением и вычитанием двух аБ-мод I и II типов с одинаковыми n, α и c, можно, меняя параметры α и c, получать моды с разным распределением поперечной интенсивности, но обладающие одинаковым ОУМ, равным n. Поэтому, оказывается, моды на рис. 3.21–3.26 все имеют одинаковый ОУМ, равный $n = 3$.

Таким образом, теоретически и численно показано в этом разделе [158], что ранее рассмотренные асимметричные моды Бесселя [87, 88] и Бесселя–Гаусса [124, 155], получаются путем комплексного смещения обычной моды Бесселя. Также показано, что комплексным смещением моды Бесселя другого типа можно сформировать асимметричную моду Бесселя второго типа (по отношению к модам первого типа [88]).

Асимметричные моды Бесселя первого и второго типов имеют разный орбитальный угловой момент. Комбинируя между собой в виде суммы или разности асимметричные моды Бесселя обоих типов, можно получать также моды Бесселя, но с другими распределениями интенсивности в поперечном сечении. В частности, можно получать симметричные моды Бесселя, похожие на буквы О, Ж, Х. Интересно также, что разность двух одинаковых зеркальных асимметричных мод Бесселя с топологическими зарядами n приводит к формированию в центре оптического вихря с топологическим зарядом $n+1$. А разность или сумма двух асимметричных мод Бесселя первого и второго типа с одинаковыми параметрами обладает ОУМ, равным топологическому заряду n исходной (порождающей) моды Бесселя и не зависящим от других параметров: масштаба моды α и параметра асимметрии c.

3.4. Теоремы об орбитальном угловом моменте

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) нашли применение в манипуляции микрообъектами, квантовых телекоммуникациях, микроскопии, интерферометрии, метрологии. Недавний обзор работ по ОУМ приведен в [101]. В [9] впервые было показано, что моды Лагерра–Гаусса обладают ОУМ. Среди пучков, обладающих ОУМ, известны также пучки Бесселя, способные распространяться без дифракции. В некоторых работах были получены аналитические выражения для плотности ОУМ для пучков Бесселя [130, 131, 150]. Недавно были рассмотрены непараксиальные асимметричные моды Бесселя [88], для которых также было получено аналитическое выражение для ОУМ всего пучка. Суперпозиция несмещенных вихревых лазерных пучков, в частности Бесселевых пучков, рассматривалась ранее в [150, 132–134, 141], в [159] рассматривался ОУМ суперпозиции вихревых лазерных пучков с периодическим смещением. В работе [160] рассматривается формирование параксиальных световых пучков различной формы с заданным значением орбитального углового момента.

В данном разделе рассматривается суперпозиция произвольных одинаковых радиально-симметричных оптических вихрей (в том числе непараксиальных), каждый из которых смещен на произвольный вектор в плоскости, поперечной оптической оси. Доказываются две теоремы. Первая теорема утверждает, что если весовые коэффициенты суперпозиции вещественны (т. е. разность фаз между пучками в суперпозиции равна 0 или π), то нормированный ОУМ (точнее проекция ОУМ на оптическую ось) всей суперпозиции равен нормированному ОУМ каждого входящего в нее пучка. Вторая теорема утверждает, что для сохранения нормированного ОУМ коэффициенты суперпозиции могут и не быть вещественными, но тогда центры всех вихрей должны находиться на одной прямой, проходящей через начало координат (точку, относительно которой рассчитывается ОУМ). Численный расчет ОУМ для суперпозиций трех и пяти оптических вихрей разной формы подтверждает утверждения обеих теорем.

3.4.1. Орбитальный угловой момент суперпозиций одинаковых оптических вихрей с радиальной симметрией. Хорошо известно, что любое решение непараксиального уравнения Гельмгольца может быть представлено как суперпозиция плоских волн:

$$E(r,\varphi,z) = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} A(\rho,\theta)\exp\left[ikr\rho\cos(\theta-\varphi) + ikz\sqrt{1-\rho^2}\right]\rho\,d\rho\,d\theta, \tag{3.122}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ, E — комплексная амплитуда поля в цилиндрических координатах (ρ,φ,z), A — угловой спектр в полярных координатах (ρ,θ). В параксиальном приближении вместо корня $(1-\rho^2)^{1/2}$ в показателе экспоненты будет $(1-\rho^2/2)$.

Если исходный пучок смещен на вектор с декартовыми координатами (x_0, y_0), то его угловой спектр плоских волн имеет вид:

$$A'(\rho,\theta) = A(\rho,\theta)\exp\left[-ik\rho\left(x_0\cos\theta + y_0\sin\theta\right)\right], \tag{3.123}$$

где $A(\rho,\theta)$ — угловой спектр плоских волн исходного (несмещенного) пучка. ОУМ и мощность пучка могут быть рассчитаны как через комплексную амплитуду, так и через угловой спектр плоских волн. Можно показать, проекция ОУМ на оптическую ось J_z и мощность лазерного пучка I вычисляются с помощью соотношений:

$$J_z = -i\iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^*\frac{\partial E}{\partial\varphi}\,r\,dr\,d\varphi = -i\lambda^2\iint\limits_{\mathrm{R}^2} A^*\frac{\partial A}{\partial\theta}\,\rho\,d\rho\,d\theta, \tag{3.124}$$

$$I = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^*E\,r\,dr\,d\varphi = \lambda^2\iint\limits_{\mathrm{R}^2} A^*A\,\rho\,d\rho\,d\theta. \tag{3.125}$$

Нормированный ОУМ (ОУМ на фотон) получается как отношение J_z/I.

Пусть угловой спектр плоских волн вихревого лазерного пучка имеет вид:

$$A(\rho,\theta) = D(\rho)\exp(in\theta). \tag{3.126}$$

где $D(\rho)$ — произвольная, в общем случае комплекснозначная, функция, n — целочисленный топологический заряд. Тогда комплексная амплитуда такого вихревого пучка будет иметь вид:

$$\begin{aligned} E(r,\varphi,z) &= \\ &= \iint\limits_{\mathrm{R}^2} D(\rho)\exp(in\theta)\exp\left[ikr\rho\cos(\theta-\varphi) + ikz\sqrt{1-\rho^2}\right]\rho\,d\rho\,d\theta = \\ &= 2\pi i^n\exp(in\varphi)\int\limits_0^\infty D(\rho)\exp\left(ikz\sqrt{1-\rho^2}\right)J_n(kr\rho)\,\rho d\rho = \\ &= B(r,z)\exp(in\varphi). \end{aligned} \tag{3.127}$$

А в начальной плоскости комплексная амплитуда будет иметь вид, аналогичный (3.126):

$$E(r,\varphi,z=0) = B(r,z=0)\exp(in\varphi) = B(r)\exp(in\varphi). \tag{3.128}$$

Рассмотрим суперпозицию M одинаковых оптических вихрей (3.128) с весовыми коэффициентами C_m, причем каждый пучок смещен в декартовой плоскости на вектор с координатами (x_m, y_m), $m = 0,\ldots,M-1$. Угловой спектр плоских волн всей суперпозиции равен

$$A(\rho,\theta) = D(\rho)\exp(in\theta)\sum_{m=0}^{M-1} C_m\exp\left[-ik\rho\left(x_m\cos\theta + y_m\sin\theta\right)\right]. \tag{3.129}$$

Подставив (3.128) в (3.126), вычислим мощность такого пучка:

$$I = \lambda^2 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} C_p^* C_q \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp\left[ik\rho\left(a_{pq}\cos\theta + b_{pq}\sin\theta\right)\right] d\theta, \tag{3.130}$$

где $a_{pq} = x_p - x_q$, $b_{pq} = y_p - y_q$.

Аналогично, вычислим ОУМ (3.124):

$$J_z = nI + \lambda^2 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} S_{pq}, \tag{3.131}$$

где

$$S_{pq} = kC_p^* C_q \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} \left(x_q \sin\theta - y_q \cos\theta\right) \exp\left[ik\rho\left(a_{pq}\cos\theta + b_{pq}\sin\theta\right)\right] d\theta. \tag{3.132}$$

Поделив ОУМ на мощность пучка, получим выражение для нормированного ОУМ:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{\lambda^2}{I} \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} S_{pq}, \tag{3.133}$$

Сначала в двойной сумме в (3.133) вычислим диагональные слагаемые (т. е. при $p = q$)

$$S_{pp} = k|C_p|^2 \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \left(x_p \sin\theta - y_p \cos\theta\right) d\theta = 0. \tag{3.134}$$

Внедиагональные слагаемые входят в двойную сумму в (3.133) попарно, вычислим сумму двух симметричных слагаемых:

$$S_{pq} + S_{qp} = kC_p^* C_q \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \left(x_q \sin\theta - y_q \cos\theta\right) \times$$
$$\times \exp\left[ik\rho\left(a_{pq}\cos\theta + b_{pq}\sin\theta\right)\right] d\theta +$$
$$+ kC_p C_q^* \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \left(x_p \sin\theta - y_p \cos\theta\right) \times$$
$$\times \exp\left[ik\rho\left(-a_{pq}\cos\theta - b_{pq}\sin\theta\right)\right] d\theta. \tag{3.135}$$

Во втором интеграле сделаем замену $\theta \to \theta + \pi$, но пределы интегрирования оставим прежними, так как производится интегрирование периодической функции по всему периоду. Тогда показатели экспонент

в обоих интегралах станут одинаковыми и выражение (3.135) примет вид:

$$S_{pq}+S_{qp}=k\int\limits_0^\infty |D(\rho)|^2\rho^2 d\rho\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(C_pC_q^*y_p-C_p^*C_qy_q\right)\cos\theta-\right.$$
$$\left.-\left(C_pC_q^*x_p-C_p^*C_qx_q\right)\sin\theta\right]\exp\left[ik\rho\left(a_{pq}\cos\theta+b_{pq}\sin\theta\right)\right]d\theta. \tag{3.136}$$

Если все весовые коэффициенты суперпозиции (3.129) вещественны (т. е. разность фаз между пучками в суперпозиции равна 0 или π), то подынтегральное выражение можно представить в виде полного дифференциала по переменной θ от экспоненты, т. е.

$$S_{pq}+S_{qp}=-iC_pC_q\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty |D(\rho)|^2\rho d\rho\exp\left[ik\rho\left(a_{pq}\cos\theta+b_{pq}\sin\theta\right)\right]\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=0, \tag{3.137}$$

поэтому второе слагаемое в (3.133) равно нулю. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть имеется световой пучок, являющийся суперпозицией смещенных с оптической оси одинаковых оптических вихрей с произвольной радиальной формой и топологическим зарядом n, причем все весовые коэффициенты суперпозиции вещественны, а смещение каждого пучка может быть произвольным. Тогда нормированный ОУМ всей суперпозиции равен ОУМ одного пучка $J_z/I=n$.

Как частный случай, из теоремы следует, что смещение одиночного пучка в поперечной плоскости не приводит к изменению его нормированного ОУМ [159].

Если же коэффициенты в суперпозиции (3.129) комплексны, то для вычисления нормированного ОУМ можно воспользоваться следующим интегралом:

$$\int\limits_0^{2\pi}\exp\left(ia\cos\theta+ib\sin\theta\right)\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix}d\theta=\frac{i2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{Bmatrix}a\\ b\end{Bmatrix}J_1\left(\sqrt{a^2+b^2}\right). \tag{3.138}$$

Тогда, из (3.136) вместо (3.137) получим:

$$S_{pq}+S_{qp}=\frac{2\pi ik}{R_{pq}}\left[\left(C_pC_q^*y_p-C_p^*C_qy_q\right)(x_p-x_q)-\right.$$
$$\left.-\left(C_pC_q^*x_p-C_p^*C_qx_q\right)(y_p-y_q)\right]\int\limits_0^\infty |D(\rho)|^2 J_1\left(kR_{pq}\rho\right)\rho^2 d\rho, \tag{3.139}$$

где $R_{pq}=[(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2]^{1/2}$ — расстояние между центрами p-го и q-го вихрей. Для того, чтобы сумма (3.139) была равна нулю,

необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$C_p C_q^* \left[y_p \left(x_p - x_q\right) - x_p \left(y_p - y_q\right)\right] = C_p^* C_q \left[y_q \left(x_p - x_q\right) - x_q \left(y_p - y_q\right)\right], \tag{3.140}$$

которое после сокращений в квадратных скобках приводится к виду:

$$C_p C_q^* \left(x_p y_q - x_q y_p\right) = C_p^* C_q \left(x_p y_q - x_q y_p\right). \tag{3.141}$$

Если коэффициенты C_p и C_q не вещественные, то условие (3.141) выполняется только при равенстве нулю выражений в скобках. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть имеется световой пучок, являющийся суперпозицией M смещенных с оптической оси одинаковых оптических вихрей с произвольной радиальной формой и топологическим зарядом n, причем центры всех оптических вихрей (x_p, y_p) $(p = 0, \ldots, M-1)$ в суперпозиции находятся на одной прямой, проходящей через начало координат (т. е. $x_p y_q = x_q y_p$ для любых p и q). Тогда нормированный ОУМ всей суперпозиции равен ОУМ одного пучка $J_z/I = n$.

3.4.2. Численное моделирование. Проверка утверждений обеих теорем осуществлялась путем численного моделирования. Были рассмотрены четыре различных вида оптических вихрей с топологическим зарядом n: бездифракционные моды Бесселя [125], непараксиальные пучки Ханкеля–Бесселя [146], параксиальные пучки Бесселя–Гаусса [119] и параксиальные моды Лагерра–Гаусса [9]. Комплексная амплитуда пучка Бесселя в начальной плоскости имеет вид [125]:

$$E_1(r, \varphi, z = 0) = J_n\left(\alpha r\right) \exp\left(in\varphi\right), \tag{3.142}$$

где α — масштабирующий множитель. Комплексная амплитуда пучка Ханкеля–Бесселя в начальной плоскости равна [146]:

$$E_2(r, \varphi, z = 0) = H_{n/2}^{(1)}\left(\frac{kr}{2}\right) J_{n/2}\left(\frac{kr}{2}\right) \exp\left(in\varphi\right), \tag{3.143}$$

где k — волновое число света. Комплексная амплитуда пучка Бесселя–Гаусса в начальной плоскости имеет вид [119]:

$$E_3(r, \varphi, z = 0) = J_n\left(\alpha r\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi\right), \tag{3.144}$$

где α — масштабирующий множитель, w — радиус перетяжки Гауссова пучка. Комплексная амплитуда пучка Лагерра–Гаусса в начальной плоскости равна [9]:

$$E_4(r, \varphi, z = 0) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{w}\right)^n L_m^n\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi\right), \tag{3.145}$$

где m — порядок моды, w — радиус перетяжки Гауссова пучка, $L_m^n\left(x\right)$ — полином Лагерра.

На рис. 3.27 показаны интенсивности и фазы суперпозиций из трех пучков, центры которых находятся в вершинах правильного треугольника. Все пучки в суперпозициях имеют топологический заряд $n = 7$. Рисунок 3.27 был рассчитан по формулам (3.142)–(3.145) с числом отсчетов 1000×1000. Параметры пучков были подобраны таким образом, чтобы световой треугольник на всех дифракционных картинах имел примерно одинаковые размеры. Нормированный ОУМ всех четырех пучков был рассчитан по формулам (3.124), (3.125) и оказался равен $J_z/I \cong 7$, несмотря на различие дифракционных картин. Аналогично, на рис. 3.28 показаны интенсивности и фазы суперпозиций из пяти таких же пучков, но расположенных в вершинах правильного пятиугольника (большего размера). Нормированный ОУМ всех пучков на рис. 3.28 также был рассчитан по формулам (3.124), (3.125) и также оказался равен $J_z/I \cong 7$.

На рис. 3.29 *а, б* показаны интенсивность и фаза суперпозиции из пяти мод Лагерра–Гаусса порядка $(n, m) = (7, 2)$, расположенных на прямой $y = 0{,}4x$ в точках с координатами $x_m = [-12, -6, 0, 6, 12]\lambda$, $y_m = 0{,}4x_m$, $m = 0, \ldots, 4$, с параметрами $\lambda = 532$ нм, $w = \lambda$, вектор весовых коэффициентов $C_m = \exp(2\pi i m/5)$, размер расчетной области $2R = 40\lambda$ (т. е. — $R \leqslant x,\ y \leqslant R$).

На рис. 3.29 *в, г* показаны интенсивность и фаза суперпозиции из пяти пучков Бесселя–Гаусса 7-го порядка, расположенных в тих же точках, что и на рис. 3.29 *а, б* (т. е. на прямой $y = 0{,}4x$ в точках с координатами $x_m = [-12, -6, 0, 6, 12]\lambda$, $y_m = 0{,}4x_m$, $m = 0, \ldots, 4$), с параметрами $\lambda = 532$ нм, $w = 2\lambda$, $\alpha = 2/\lambda$, вектор весовых коэффициентов $C_m = \exp(2\pi i m/5)$, размер расчетной области $2R = 40\lambda$ (т. е. — $R \leqslant x,\ y \leqslant R$).

Нормированный ОУМ обоих пучков на рис. 3 также был рассчитан по формулам (3.124), (3.125) и также оказался равен $J_z/I \cong 7$.

Таким образом, в данном разделе рассмотрен ОУМ суперпозиции одинаковых радиально-симметричных оптических вихрей, каждый из которых смещен в плоскости, поперечной оптической оси [161]. Доказано две теоремы о сохранении нормированного ОУМ такой суперпозиции. Если весовые коэффициенты суперпозиции вещественны (т. е. разность фаз между пучками равна 0 или π), то, независимо от смещения пучков, нормированный ОУМ всей суперпозиции равен нормированному ОУМ каждого входящего в нее пучка, т. е. его топологическому заряду. Если центры пучков расположены на одной прямой, проходящей через начало координат (точку, относительно которой рассчитывается ОУМ), то, даже при комплексных весовых коэффициентах, нормированный ОУМ всей суперпозиции также равен нормированному ОУМ каждого входящего в нее пучка. Проведено численное моделирование, подтвердившее сохранение нормированного ОУМ для суперпозиций трех и пяти оптических вихрей разной формы. Доказанные теоремы позволяют с помощью любого числа одинаковых радиально-симметричных вихревых пучков, путем подбора весовых

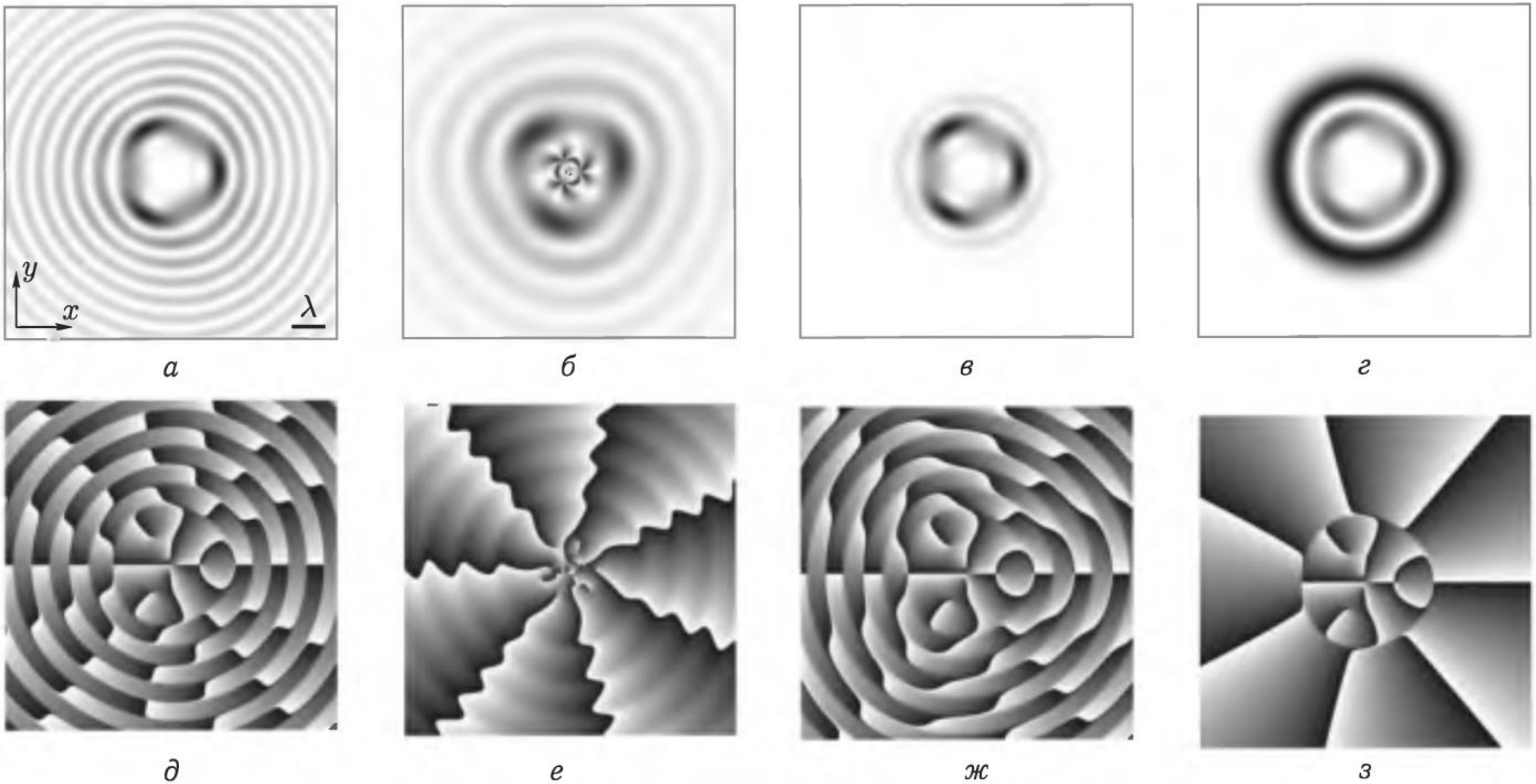


Рис. 3.27. Интенсивность (негатив) (*а*, *в*, *д*, *ж*) и фаза (черный цвет — π, белый цвет — $-\pi$) (*б*, *г*, *е*, *з*) суперпозиций трех вихревых пучков (длина волны $\lambda = 532$ нм), расположенных в вершинах правильного треугольника в точках с координатами $x_p = R_0 \cos\varphi_p$, $y_p = R_0 \sin\varphi_p$ ($R_0 = 0{,}3\lambda$, $\varphi_p = 2\pi p/3$, $p = 0, 1, 2$), и имеющих топологический заряд, равный 7: мод Бесселя (*а*, *б*), пучков Ханкеля–Бесселя (*в*, *г*), пучков Бесселя–Гаусса (*д*, *е*) и пучков Лагерра–Гаусса (*ж*, *з*). Вектор весовых коэффициентов в каждой суперпозиции равен $\mathbf{C} = (1, 1, 1)$, размер расчетной области $2R = 10\lambda$. Масштабирующий множитель пучков Бесселя и Бесселя–Гаусса (*а*, *б*, *д*, *е*) $\alpha = 6/\lambda$. Радиус перетяжки Гауссова пучка равен $w = 2\lambda$ (*д*, *е*) и $w = \lambda$ (*ж*, *з*). Индекс моды Лагерра–Гаусса (*ж*, *з*): $(n, m) = (7, 1)$

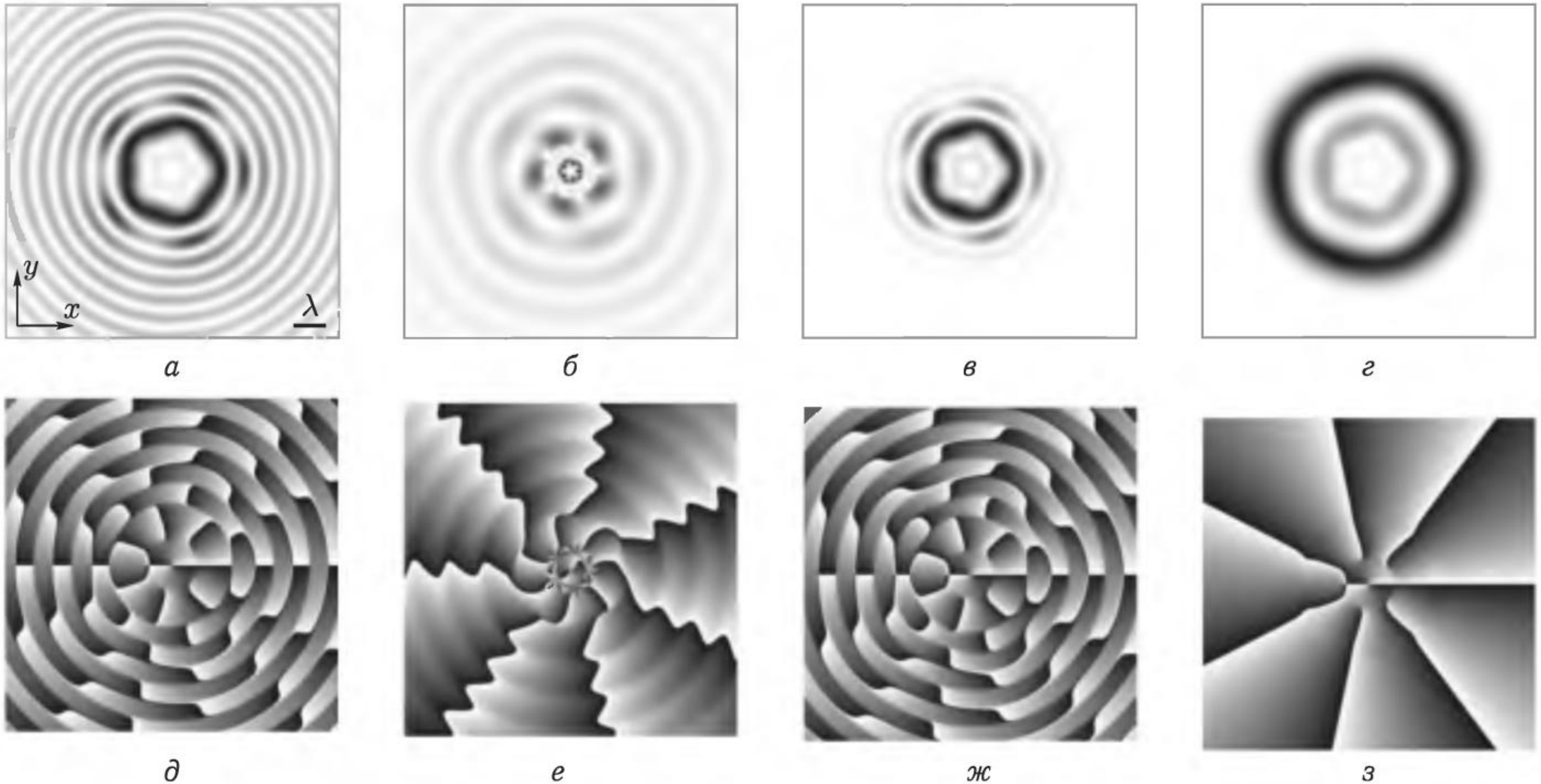


Рис. 3.28. Интенсивность (негатив) (*а*, *в*, *д*, *ж*) и фаза (черный цвет — π, белый цвет — $-\pi$) (*б*, *г*, *е*, *з*) суперпозиций пяти вихревых пучков (длина волны $\lambda = 532$ нм), расположенных в вершинах правильного пятиугольника в точках с координатами $x_p = R_0 \cos\varphi_p$, $y_p = R_0 \sin\varphi_p$ ($R_0 = 0{,}5\lambda$, $\varphi_p = 2\pi p/5$, $p = 0, \ldots, 4$), и имеющих топологический заряд, равный 7: мод Бесселя (*а*, *б*), пучков Ханкеля–Бесселя (*в*, *г*), пучков Бесселя–Гаусса (*д*, *е*) и пучков Лагерра–Гаусса (*ж*, *з*). Вектор весовых коэффициентов в каждой суперпозиции равен $\mathbf{C} = (1, 1, 1, 1, 1)$, размер расчетной области $2R = 10\lambda$. Масштабирующий множитель пучков Бесселя и Бесселя–Гаусса (*а*, *б*, *д*, *е*) $\alpha = 6/\lambda$. Радиус перетяжки Гауссова пучка равен $w = 2\lambda$ (*д*, *е*) и $w = \lambda$ (*ж*, *з*). Индекс моды Лагерра–Гаусса (*ж*, *з*): $(n, m) = (7, 1)$

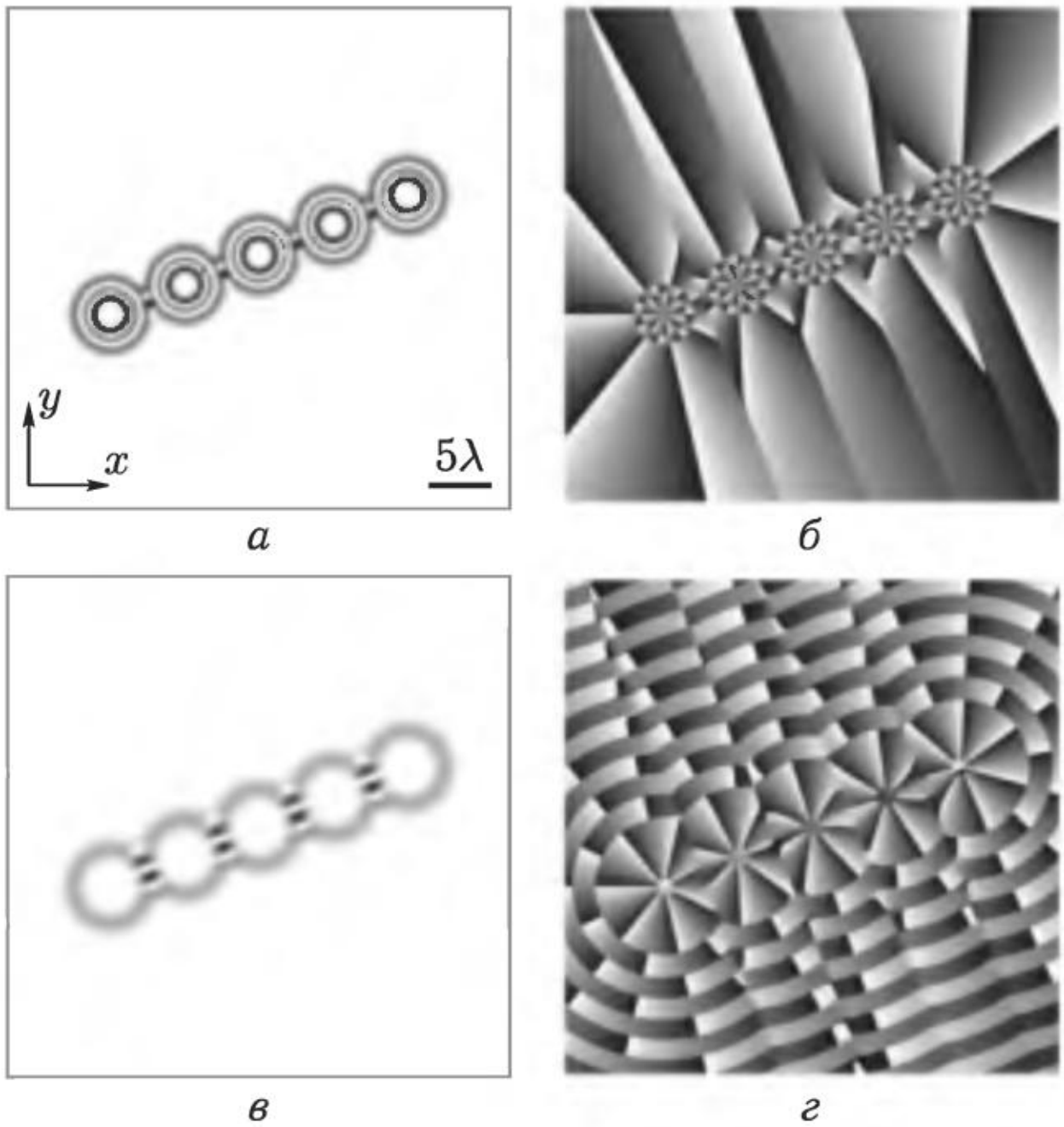


Рис. 3.29. Интенсивность (негатив) (*а*, *в*) и фаза (черный цвет — π, белый цвет — $-\pi$) (*б*, *д*) суперпозиции пяти мод Лагерра–Гаусса (*а*, *б*) и пучков Бесселя–Гаусса (*в*, *г*). Параметры мод Лагерра–Гаусса: порядок $(n, m) = (7, 2)$, радиус перетяжки $w = \lambda$. Параметры пучков Бесселя–Гаусса: порядок $n = 7$, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 2/\lambda$. Всех пучки имеют длину волны $\lambda = 532$ нм, центры расположены на прямой $y = 0{,}4x$ в точках с координатами $x_m = [-12, -6, 0, 6, 12]\lambda$, $y_m = 0{,}4x_m$, $m = 0, \ldots, 4$, вектор весовых коэффициентов в суперпозиции $C_m = \exp(2\pi i m/5)$, размер расчетной области $2R = 40\lambda$

коэффициентов и величины смещения каждого пучка с оптической оси, формировать новые пучки с разным распределением интенсивности (в том числе и не радиально-симметричным), но обладающие одинаковым нормированным ОУМ.

3.4.3. Моды Ломмеля. Среди известных лазерных пучков особое место занимают бездифракционные пучки. Структура распределения их комплексной амплитуды в поперечном сечении такова, что, несмотря на дифракцию, она сохраняется при прохождении произвольного расстояния вдоль оптической оси. Известно, что в трехмерном пространстве свободны от дифракции моды Бесселя [1], а в двумерном — пучки Эйри [18]. Также бездифракционные пучки обобщались на случай более высокой размерности пространства [162]. Известно также, что в трехмерном пространстве бездифракционным является световой пучок, для которого угловой спектр плоских волн является бесконечно тонкой окружностью. Так, в [118] рассмотрены бездифракционные

пучки, описываемые в виде линейной комбинации мод Бесселя. Комплексная амплитуда таких пучков описывается функцией Матье. В [87] рассмотрены асимметричные моды Бесселя, распределение интенсивности которых в поперечном сечении имеет вид полумесяца, а в [88] рассмотрено обобщение этого семейства путем введения дополнительного параметра, позволяющего управлять асимметрией поперечного распределения интенсивности. Бездифракционные пучки устойчивы при распространении в турбулентной атмосфере [163] и фемтосекундные бесселевы импульсы сохраняют форму при распространении [164].

В данном разделе рассматривается линейная комбинация мод Бесселя с такими коэффициентами, что комплексная амплитуда пучка описывается функцией Ломмеля двух переменных, одна из которых комплексная. Функции Ломмеля двух переменных встречаются в оптике не впервые. Так, в [59] (§ 8.8) рассмотрено трехмерное распределение света вблизи фокуса для сферической монохроматической волны, выходящей из круглого отверстия и сходящейся в осевой фокальной точке. Для получения этого распределения в [59] используется интеграл Френеля, выраженный через функции Ломмеля двух переменных [165]. В недавней работе [166] с помощью этих функций описана фокусировка с помощью линзы вихревого лазерного пучка Лагерра–Гаусса с нулевым радиальным индексом, ограниченного круглой диафрагмой. В отличие от традиционных мод Бесселя [1] распределение интенсивности моды Ломмеля (Л-моды) не обладает радиально-симметричной формой в виде набора световых колец, а в отличие от асимметричных мод из [87, 88] оно обладает симметрией относительно не одной, а обеих декартовых осей. Ниже точно рассчитан орбитальный угловой момент Л-пучков. Он превышает момент Бесселевой моды, входящей в линейную комбинацию с наименьшим топологическим зарядом. Л-моды, как и все бездифракционные пучки, обладают бесконечной энергией, и поэтому на практике могут быть реализованы только приближенно. Мы называем пучки Ломмеля по аналогии с пучками Бесселя. Но так как пучки Бесселя являются модами, то мы и пучки Ломмеля иногда называем модами Ломмеля.

3.4.4. Комплексная амплитуда пучков Ломмеля. Рассмотрим световой пучок, угловой спектр плоских волн которого имеет следующий вид:

$$A(\rho,\theta) = \frac{(-i)^n}{\lambda\alpha}\delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right)\sum_{p=0}^{\infty} c^{2p}\exp\left[i\left(n+2p\right)\theta\right] = \\ = \frac{(-i)^n\exp\left(in\theta\right)}{\lambda\alpha\left[1 - c^2\exp\left(2i\theta\right)\right]}\delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right), \quad (3.146)$$

где (ρ,θ) — полярные координаты в спектральной плоскости, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ, а параметры α, c и n, как будет показано ниже, характеризуют

соответственно масштаб пучка, асимметрию его формы и орбитальный угловой момент. Заметим, что в отличие от асимметричных мод Бесселя из [87, 88], параметр асимметрии c у Л-пучков не может быть произвольным, а должен быть по модулю меньше единицы, иначе ряд в (3.147) будет расходящимся. Из (3.146) видно, что модуль амплитуды спектра меняется вдоль кольца с радиусом $\rho = \alpha/k$: при вещественных значениях c максимальное значение имеет место при $\theta = 0, \pi$, а минимальное — при $\theta = \pm\pi/2$. Комплексная амплитуда Л-пучка находится как преобразование Фурье от углового спектра (3.146) и равна

$$E_n(r,\varphi,z) = \\ = \exp\left(iz\sqrt{k^2-\alpha^2}\right)\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p c^{2p}\exp\left[i(n+2p)\varphi\right]J_{n+2p}(\alpha r) = \\ = c^{-n}\exp\left(iz\sqrt{k^2-\alpha^2}\right)U_n\left[car\exp(i\varphi),\alpha r\right]. \quad (3.147)$$

где $U_n(w,z)$ — функция Ломмеля двух переменных [165]:

$$U_n(w,z) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{w}{z}\right)^{n+2p}J_{n+2p}(z). \quad (3.148)$$

В (3.146) параметр α входит в аргумент функций Бесселя, поэтому он характеризует масштаб (ширину светового кольца) пучка Ломмеля.

С помощью (3.146) нетрудно показать, что

$$|E_n(r,\varphi,z)| = |E_n(r,-\varphi,z)| = |E_n(r,\pi-\varphi,z)| = \\ = \left|\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p c^{2p}\exp\left[i(n+2p)\varphi\right]J_{n+2p}(\alpha r)\right|. \quad (3.149)$$

Из (3.149) следует, что, в отличие от асимметричных пучков Бесселя из [87, 88], распределение интенсивности в поперечном сечении Л-пучков (3.147) симметрично не только относительно горизонтальной плоскости Oxz, но и относительно вертикальной плоскости Oyz.

При $c = 0$ в (3.147) остается только одно слагаемое и Л-пучок преобразуется в традиционный пучок Бесселя:

$$E_n(r,\varphi,z) = \exp\left(iz\sqrt{k^2-\alpha^2}+in\varphi\right)J_n(\alpha r).$$

На рис. 3.30 показаны распределения интенсивности и фазы (при $z = 0$) в поперечной плоскости для Л-пучков со следующими параметрами: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд $n = 4$, масштабирующий множитель $\alpha = k/3$, параметр асимметрии $c = 0{,}5i$ (*а*, *б*) и $c = 0{,}9i$ (*в*, *г*). На рис. 3.30 интенсивность показана в области $-20\lambda \leqslant x,\ y \leqslant 20\lambda$. Рисунок 3.30 был получен путем расчета по формуле (3.147).

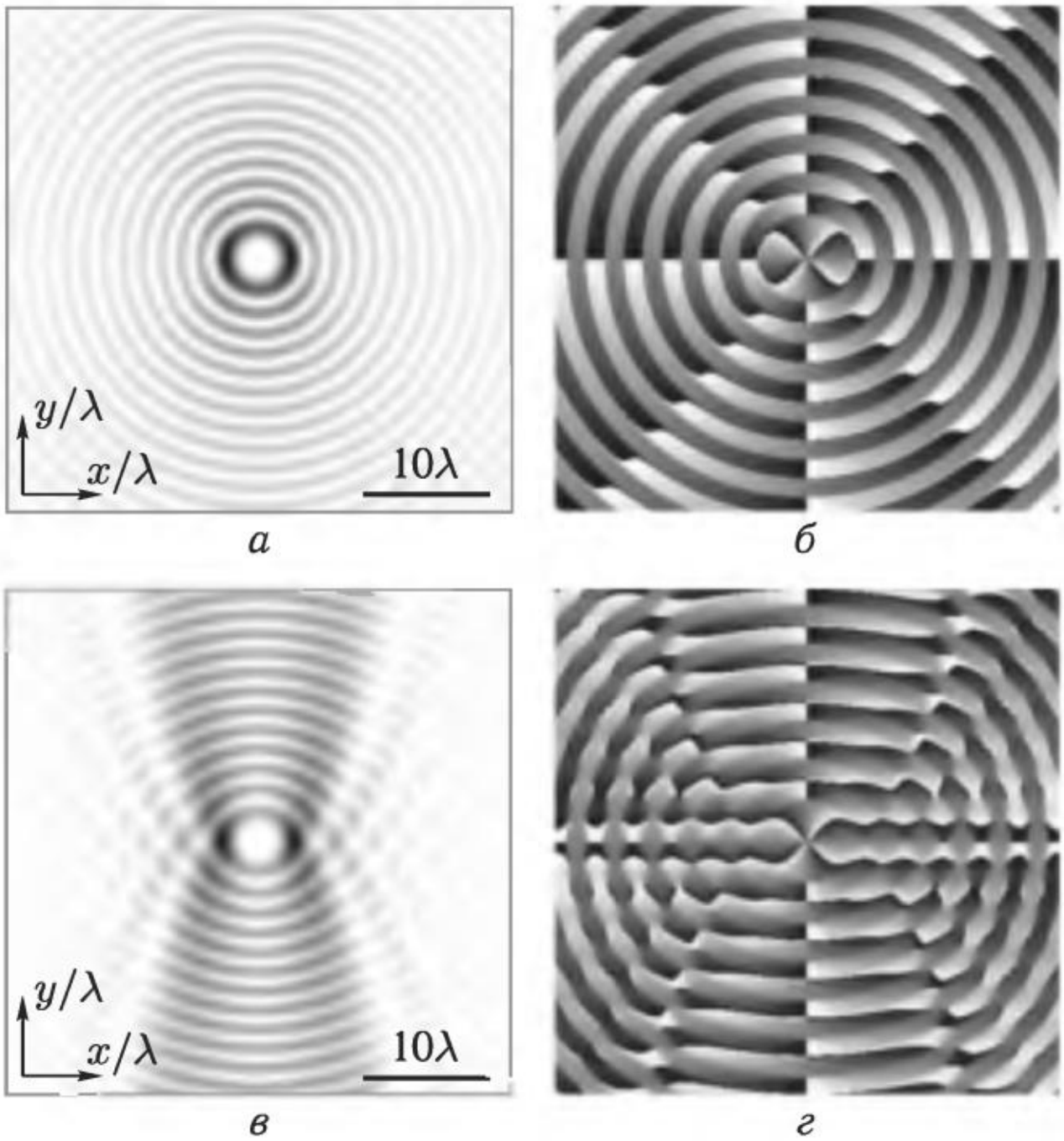


Рис. 3.30. Распределения интенсивности (негатив) (*а*, *в*) и фазы (*б*, *д*) в поперечной плоскости для пучков Ломмеля: $c = 0{,}5i$ (*а*, *б*) и $c = 0{,}9i$ (*б*, *в*)

Как видно из рис. 3.30, при небольших по модулю значениях параметра c дифракционная картина похожа на картину моды Бесселя, но вытянутую вдоль одной декартовой координаты (оси x). При двумерной реализации таких пучков (т. е. распространяющихся в плоскости Oxz) их форма будет похожа на форму ускоряющихся эллиптических мод, рассмотренных в [149].

Далее с ростом параметра c возрастает асимметрия Л-пучка, и он в поперечном сечении имеет вид двух полумесяцев с нулевой интенсивностью в центре. В оптическом микроманипулировании такое распределение удобно для задачи удерживания на месте микрообъекта по одной координате [167].

Без ограничения общности, параметр c можно считать вещественным положительным. В противном случае дифракционная картина поворачивается на угол, соответствующий аргументу параметра c. Так, для рис. 3.30 параметр c чисто мнимый, поэтому полумесяцы разнесены по оси x.

С ростом параметра c не только возрастает асимметрия поперечного распределения интенсивности, но и контраст интенсивности вдоль декартовых координатных осей x и y. Это хорошо заметно из рис. 3.31, рассчитанного также по формуле (3.147) для тех же параметров, что и рис. 3.30.

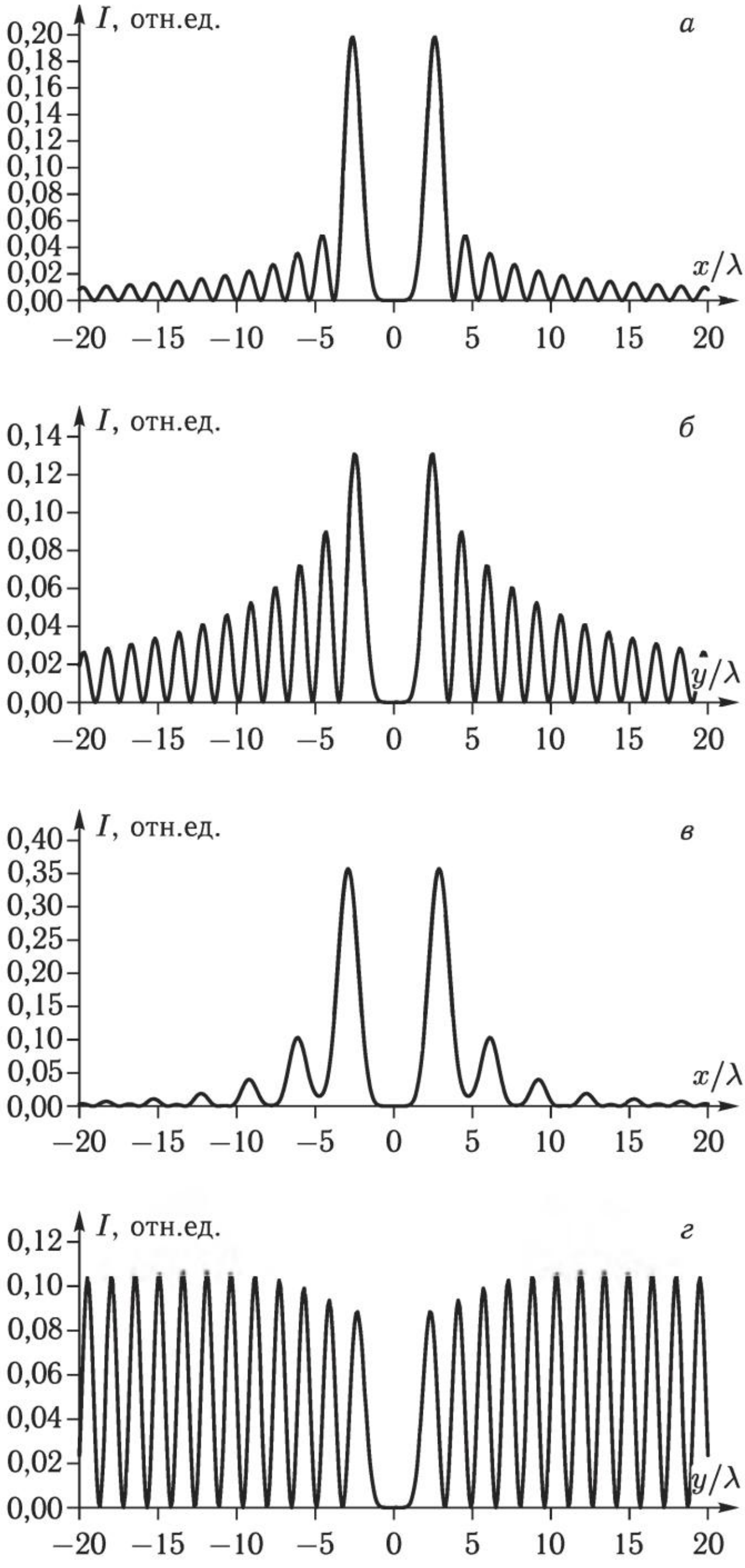


Рис. 3.31. Сечения интенсивности при $y = 0$ (*а*, *в*) и $x = 0$ (*б*, *д*) для пучков Ломмеля: $c = 0{,}5i$ (*а*, *б*) и $c = 0{,}9i$ (*б*, *в*). По горизонтальной оси отложены длины волн, а по вертикальной интенсивность в произвольных единицах

Из рис. 3.31 видно, что если при $c = 0{,}5i$ максимальная интенсивность в горизонтальной плоскости превышает максимальную интенсивность в вертикальной плоскости примерно в полтора раза, то при $c = 0{,}9i$ это соотношение уже составляет 3,5. Причем в вертикальной плоскости боковые лепестки превышают главные центральные максимумы.

3.4.5. Орбитальный угловой момент пучков Ломмеля. Орбитальный угловой момент (ОУМ) J_z (проекция ОУМ на оптическую ось) и суммарная интенсивность I светового пучка в плоскости, поперечной оптической оси, определяются по следующим формулам [110]:

$$J_z = \operatorname{Im}\left\{\iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} r\, dr\, d\varphi\right\} = \operatorname{Im}\left\{\lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} r\, dr\, d\varphi\right\}, \tag{3.150}$$

$$I = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* E\, r\, dr\, d\varphi = \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} E^* E\, r\, dr\, d\varphi. \tag{3.151}$$

Подставив в (3.150), (3.151) комплексную амплитуду (3.146), получим ОУМ и суммарную интенсивность пучка Ломмеля:

$$J_z = 2\pi \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (n+2p)\,(cc^*)^{2p} \int\limits_0^R J_{n+2p}^2(\alpha r)\, r\, dr. \tag{3.152}$$

$$I = 2\pi \lim_{R\to\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (cc^*)^{2p} \int\limits_0^R J_{n+2p}^2(\alpha r)\, r\, dr. \tag{3.153}$$

Интегралы в этих выражениях описаны в [112] (выражение 5.54.2):

$$\int J_p^2(\alpha r)\, r\, dr = \frac{r^2}{2}\left[J_p^2(\alpha r) - J_{p-1}(\alpha r)\, J_{p+1}(\alpha r)\right]. \tag{3.154}$$

Используя асимптотику функции Бесселя при больших значениях аргумента (выражение 9.2.1 в [53]), получим, что все интегралы в (3.152) и (3.153) не зависят от порядка функции Бесселя и равны $R/(\pi\alpha)$. Тогда, используя числовые ряды 0.246.1 и 0.246.2 из [112] и разделив (3.152) на (3.153), получим выражение для ОУМ, нормированного на интенсивность:

$$\frac{J_z}{I} = \frac{\sum\limits_{p=0}^{\infty} (cc^*)^{2p}\,(n+2p)}{\sum\limits_{p=0}^{\infty} (cc^*)^{2p}} = n + \frac{2\,|c|^4}{1-|c|^4}. \tag{3.155}$$

Из (3.155) следует, что при возрастании параметра асимметрии $c < 1$ ОУМ возрастает. На рис. 3.30 *а* для $c = 0{,}5i$ нормированный ОУМ равен $J_z/I \approx 4{,}1$, а на рис. 3.30 *в* для $c = 0{,}9i$ он равен $J_z/I \approx 7{,}8$.

3.4.6. Ортогональность комплексных амплитуд пучков Ломмеля. Подобно тому, как в предыдущем разделе был вычислен орбитальный угловой момент, можно вычислить скалярное произведение двух пучков Ломмеля — имеющих соответственно топологические заряды n и m, масштабирующие множители α и β, параметры асимметрии c и d:

$$(E_{n\alpha c},\ E_{m\beta d}) = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E_{n\alpha c} E^*_{m\beta d}\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \begin{cases} 2\pi\,(-1)^{(n-m)/2}\,\dfrac{\delta\,(\alpha-\beta)}{\alpha}\,\dfrac{(d^*)^{n-m}}{1-(cd^*)^2}, & \text{если } (m+n) \text{ четно и } n \geqslant m, \\ 2\pi\,(-1)^{(n-m)/2}\,\dfrac{\delta\,(\alpha-\beta)}{\alpha}\,\dfrac{c^{m-n}}{1-(cd^*)^2}, & \text{если } (m+n) \text{ четно и } n \leqslant m, \\ 0, & \text{если } (m+n) \text{ нечетно.} \end{cases} \tag{3.156}$$

Из (3.156) видно, что комплексные амплитуды Л-пучков, подобно традиционным и асимметричным пучкам Бесселя, ортогональны по масштабирующему множителю. Из (3.156) также видно, что в отличие от асимметричных пучков Бесселя из [87, 88] Л-пучки распадаются на два класса с четным и нечетным топологическим зарядом. Комплексные амплитуды пучков из двух разных классов ортогональны между собой.

В разделе получены следующие результаты [168]. Получено новое решение уравнения Гельмгольца, описывающее трехпараметрическое семейство бездифракционных непараксиальных пучков Ломмеля; комплексная амплитуда этих пучков описывается функциями Ломмеля двух переменных, первая из которых комплексная (уравнение (3.147)). С ростом параметра асимметрии у пучков Ломмеля интенсивность боковых лепестков возрастает вдоль одной декартовой координаты и спадает вдоль другой координаты. Пучки Ломмеля, как и любые другие бездифракционные трехмерные пучки, имеют кольцевой угловой спектр плоских волн, зависящий только от угловой полярной координаты (уравнение (3.146)). Пучки Ломмеля имеют ОУМ, который растет линейно с ростом номера моды n и нелинейно с ростом параметра асимметрии c (уравнение (3.155)). Функции, описывающие комплексные амплитуды пучков Ломмеля, ортогональны по масштабирующему множителю α и не ортогональны по параметру асимметрии c; по номеру моды n пучки ортогональны в случае разной четности.

3.5. Асимметричные пучки Лагерра–Гаусса

Моды Лагерра–Гаусса (ЛГ) составляют класс хорошо изученных параксиальных световых полей. Форма поперечного сечения интенсивности этих полей инвариантна к распространению в однородной

среде и обладает радиальной симметрией. Моды ЛГ нашли применение в таких областях, как оптическое манипулирование микрообъектами, квантовая оптика, оптические коммуникации. Каждая мода из этого класса характеризуется двумя индексами — радиальным и азимутальным, задающим орбитальный угловой момент.

Несмотря на давнюю историю и большой объем проведенных исследований в отношении мод ЛГ, до сих пор появляются публикации по изучению их свойств [169–173], формированию [174–176], и применению [177–181].

Так, в [169] рассматривается распространение композитных вихревых пучков, представляющих собой соосную суперпозицию мод ЛГ с совпадающими положением и размером перетяжки. Были сформированы поля, состоящие из эквидистантных массивов одиночных или парных теневых пятен, расположенных на световых кольцах. В [170] исследуется физический смысл радиального индекса мод ЛГ, а в [171] исследуется пространственное распределение интенсивности остросфокусированного пучка ЛГ в зависимости от вида однородной (линейной и круговой) поляризации и топологического заряда. Показано, что наибольшее влияние тип поляризации оказывает на продольную компоненту электрического вектора светового поля, а наибольшее визуальное различие в картине общей интенсивности в зависимости от поляризации наблюдается при использовании вихревой фазы первого порядка.

В [172] исследуется непараксиальное распространение мод ЛГ в присутствии апертуры. Установлено, что дифракция на апертуре вызывает существенное искажение поля в ближней зоне, однако она незначительно влияет на распределение интенсивности в дальней зоне (если только апертура не закрывает существенную часть пучка). В [173] рассматриваются свойства световых полей, обладающих орбитальным угловым моментом и не имеющих радиальной симметрии, в присутствии гармонического потенциала. В [174] предлагается метод формирования мод ЛГ в резонаторе твердотельного лазера. В [175] также рассматривается формирование мод ЛГ низших порядков в твердотельном лазере с контролируемым знаком топологического заряда.

В [176] моды ЛГ с ненулевым радиальным индексом формируются с помощью зонных спиральных фазовых пластинок. В [177] показано, что при использовании моды ЛГ вместо обычного Гауссова пучка уменьшается доплеровская ширина линии в спектре поглощения атомов рубидия-85 и рубидия-87, а в [178] рассматривается применение мод ЛГ для уменьшения влияния теплового шума в детекторах гравитационных волн. В [179] исследуется использование мод ЛГ для организации спин-орбитального взаимодействия в ультра-холодных атомах.

В [180] изучается взаимодействие пучка ЛГ с атомом или двухатомной молекулой. Численно показано, что если атом или молекула достаточно охлаждена, то происходит передача орбитального углового момента между движением ее центра масс и внутренним движением. В [181] описывается трехмерная внеосевая оптическая ловушка

диэлектрических субмикронных микросфер, созданная с помощью одиночного пучка ЛГ. Работа [182] посвящена применению мод Лагерра–Гаусса для квантовых коммуникаций на расстояние около 3 км в турбулентной атмосфере.

Из приведенного выше обзора новейшей литературы о модах ЛГ видно, что они не только находят новые применения, но и являются основой для построения новых видов световых полей, которые пока только изучаются теоретически. Наряду с исследованием различных суперпозиций известных лазерных пучков новые их виды можно получать простым смещением комплексной амплитуды в декартовых координатах на комплексные расстояния. Так, например, выражение для поля точечного источника с мнимой координатой сводится к параксиальному Гауссову пучку в том случае, когда мнимое расстояние от источника до вещественного пространства во много раз превосходит длину волны света [183]. Аналогичным образом были получены асимметричные бездифракционные моды Бесселя, распределение интенсивности которых в поперечной плоскости имеет вид полумесяца [88].

В данном разделе, также пользуясь приемом комплексного смещения в декартовых координатах, теоретически и экспериментально исследуются асимметричные пучки Лагерра–Гаусса (аЛГ-пучки). Подобно стандартным модам ЛГ, их распределение интенсивности в поперечной плоскости также состоит из конечного (в отличие от мод Бесселя) числа световых колец, но распределение интенсивности на кольцах неравномерное. При распространении в однородной среде возрастает яркость на периферийном кольце. Аналитически рассчитан орбитальный угловой момент (ОУМ) и мощность аЛГ-пучка. В качестве частного случая рассмотрены аЛГ-пучки с нулевым радиальным индексом, обладающие поперечным сечением интенсивности в форме полумесяца. Для таких пучков аналитически получено выражение для координат максимума интенсивности и показано вращение дифракционной картины при распространении в однородной среде. Пучок аЛГ с нулевым радиальным индексом был сформирован с помощью пространственного модулятора света и его вращение в пространстве подтверждено экспериментально. Показана возможность формирования несоосных суперпозиций пучков с распределением интенсивности, близким к Гауссову, вращающихся при распространении в пространстве как единое целое.

3.5.1. Пучки Лагерра–Гаусса с комплексным смещением. Комплексная амплитуда стандартного пучка ЛГ в начальной плоскости в полярных координатах имеет вид [184]:

$$E_{mn}\left(r,\varphi,z=0\right)=\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{w_0}\right)^n L_m^n\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}+in\varphi\right), \quad (3.157)$$

где (r,φ,z) — цилиндрические координаты, w_0 — радиус перетяжки Гауссова пучка, n — топологический заряд оптического вихря, $L_m^n(x)$ — присоединенный многочлен Лагерра.

Если сместить пучок на расстояние x_0 вдоль координаты x и на расстояние y_0 вдоль координаты y (смещения x_0 и y_0 могут быть комплексными величинами), то в декартовых координатах амплитуда пучка равна:

$$E_{mn}(x, y, z=0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^n [(x - x_0) + i(y - y_0)]^n \times \\ \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) L_m^n\left(\frac{2\rho^2}{w_0^2}\right), \quad (3.158)$$

где $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

При распространении в свободном пространстве на произвольном расстоянии z комплексная амплитуда такого светового пучка примет вид:

$$E_{mn}(x, y, z) = \frac{w(0)}{w(z)}\left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)}\right]^n [(x - x_0) + i(y - y_0)]^n L_m^n\left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} - i(n + 2m + 1)\zeta(z)\right], \quad (3.159)$$

где

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \\ R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right], \quad (3.160) \\ \zeta(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_R}\right),$$

$z_R = kw_0^2/2$ — расстояние Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ.

Если смещения x_0 и y_0 не являются действительными величинами, то величины ρ^2, $w(z)R(z)$ уже не имеют того физического смысла, что при вещественных смещениях x_0 и y_0, т. е. это не расстояние до оптической оси, не ширина пучка и не радиус кривизны волнового фронта. Кроме того, в отличие от стандартных мод ЛГ, в поперечном сечении интенсивность такого пучка не имеет радиальной симметрии. На рис. 3.32 приведены результаты расчета поперечной интенсивности пучка (3.159) на разных расстояниях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (8, 7)$, поперечные смещения $x_0 = 0$, $y_0 = 0{,}2\lambda i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0\lambda$ (рис. 3.32 *а*), 12λ (рис. 3.32 *б*), 20λ (рис. 3.32 *в*), 40λ (рис. 3.32 *г*), 60λ (рис. 3.32 *д*), 80λ (рис. 3.32 *е*). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 15\lambda$ (рис. 3.32 *а*), 20λ (рис. 3.32 *б*), 25λ (рис. 3.32 *в*), 35λ (рис. 3.32 *г*), 50λ (рис. 3.32 *д*), 75λ (рис. 3.32 *е*). Расстояние Рэлея при заданных параметрах равно $z_R = 4\pi\lambda$.

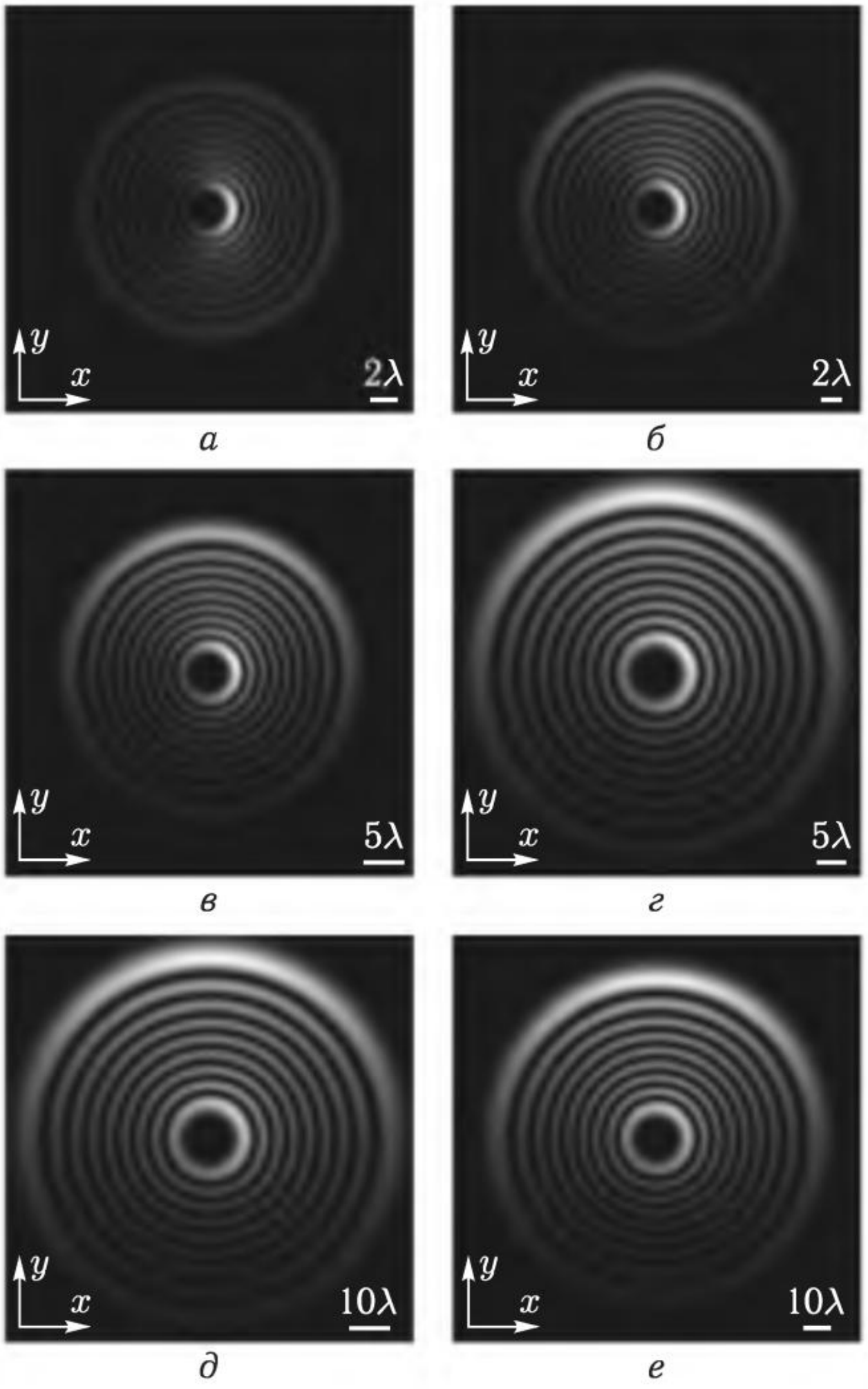


Рис. 3.32. Поперечное распределение интенсивности аЛГ-пучка в разных плоскостях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (8, 7)$, поперечные смещения $x_0 = 0$, $y_0 = 0{,}2\lambda i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0\lambda$ (*а*), 12λ (*б*), 20λ (*в*), 40λ (*г*), 60λ (*д*), 80λ (*е*)

Из рис. 3.32 видно, что при распространении пучка первое кольцо в виде полумесяца становится почти кольцом, хотя периферийные кольца полностью не восстанавливаются. Также видно, что при распространении аЛГ-пучка энергия перераспределяется из полумесяца в периферийные кольца.

3.5.2. Мощность смещенного пучка Лагерра–Гаусса. Мощность произвольного параксиального светового пучка, протекающая через произвольную плоскость, перпендикулярную оптической оси,

может быть вычислена как через комплексную амплитуду E, так и через угловой спектр плоских волн A:

$$W = \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E^* E dx dy = \lambda^2 \iint\limits_{\mathrm{R}^2} A^* A \, d\alpha \, d\beta, \tag{3.161}$$

где

$$A(\alpha, \beta) = \lambda^{-2} \iint\limits_{\mathrm{R}^2} E(x, y, 0) \exp\left[-ik(\alpha x + \beta y)\right] dx \, dy. \tag{3.162}$$

Для аЛГ-пучка удобнее рассчитывать мощность в спектральной плоскости. Сначала получим выражение для углового спектра плоских волн несмещенного пучка:

$$A(\rho, \theta) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^n \int\limits_0^\infty r^n \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) L_m^n \left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \exp\left[in\varphi - ik\rho r \cos(\varphi - \theta)\right] d\varphi \right\} r \, dr = (-i)^n \frac{k^2}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^n \times$$

$$\times \exp(in\theta) \int\limits_0^\infty r^{n+1} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) L_m^n \left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) J_n(k\rho r) \, dr, \tag{3.163}$$

где (r, φ) и (ρ, θ) — полярные координаты в начальной плоскости и в фурье-плоскости соответственно (ρ — безразмерная координата).

Известен справочный интеграл ([112], выражение 7.421.4):

$$\int\limits_0^\infty x^{\nu+1} \exp\left(-\beta x^2\right) L_n^\nu \left(\alpha x^2\right) J_\nu(xy) \, dx =$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)^n y^\nu}{2^{\nu+1} \beta^{\nu+n+1}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\beta}\right) L_n^\nu \left[\frac{\alpha y^2}{4\beta(\alpha - \beta)}\right]. \tag{3.164}$$

Используя его, получим выражение для углового спектра плоских волн пучка ЛГ:

$$A(\rho, \theta) = C_0 \rho^n L_m^n \left[\frac{(kw_0\rho)^2}{2}\right] \exp\left[-\frac{(kw_0\rho)^2}{4} + in\theta\right], \tag{3.165}$$

где

$$C_0 = (-i)^n (-1)^m \frac{(kw_0)^{n+2}}{2^{2+n/2}\pi}. \tag{3.166}$$

Для смещенного пучка (3.158) выражение для углового спектра плоских волн имеет вид:

$$A(\rho, \theta) = C_0 \rho^n \exp\left[-\frac{(kw_0\rho)^2}{4} + in\theta\right] L_m^n \left[\frac{(kw_0\rho)^2}{2}\right] \times$$

$$\times \exp\left[-ik\rho(x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right]. \tag{3.167}$$

Используя выражение (3.167), найдем мощность аЛГ-пучка:

$$W = 2\pi\lambda^2 |C_0|^2 \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \rho^{2n+1} \exp\left[-\frac{(kw_0\rho)^2}{2}\right] \left\{L_m^n\left[\frac{(kw_0\rho)^2}{2}\right]\right\}^2 J_0\left(2ikD_0\rho\right) d\rho, \quad (3.168)$$

где

$$D_0 = [(\operatorname{Im} x_0)^2 + (\operatorname{Im} y_0)^2]^{1/2}.$$

Интеграл (3.168) можно вычислить с помощью справочного интеграла (выражение 2.9.12.14 в [65], исправленное после численной проверки):

$$\int\limits_0^\infty x^{(\gamma+\delta)/2} e^{-cx} J_{\gamma+\delta}\left(b\sqrt{x}\right) L_\mu^\gamma(cx)\, L_\nu^\delta(cx)\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{c^{\gamma+\delta+1}} \left(\frac{b}{2}\right)^{\gamma+\delta} \exp\left(-\frac{b^2}{4c}\right) L_\nu^{\gamma+\mu-\nu}\left(\frac{b^2}{4c}\right) L_\mu^{\delta-\mu+\nu}\left(\frac{b^2}{4c}\right), \quad (3.169)$$

где

$$\operatorname{Re} > 0, \quad \operatorname{Re}(\gamma+\lambda) > -1, \quad |\arg b| < \pi.$$

Заменим в (3.169) переменную интегрирования $x \to x^2$ и положим

$$\mu = m, \quad \gamma = n, \quad \delta = -n, \quad \nu = m+n, \quad c = \frac{(kw_0)^2}{2}, \quad b = 2ikD_0.$$

Тогда, с учетом тождества

$$L_\mu^{-\sigma}(x) \equiv \frac{(\mu-\sigma)!}{\mu!} (-x)^\sigma L_{\mu-\sigma}^\sigma(x)$$

и заменяя переменную интегрирования $x \to x^2$, получим выражение для мощности пучка:

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2} \frac{(m+n)!}{m!} \exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) L_{m+n}\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) L_m\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right). \quad (3.170)$$

Несмотря на пропорциональность мощности пучка многочленам Лагерра, мощность не может оказаться отрицательной или равной нулю. Это следует из того, что $2(D_0/w_0)^2 \geqslant 0$, а многочлены Лагерра в области не положительных значений всегда положительны:

$$L_m(-\xi) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} C_m^k (-\xi)^k = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\xi^k}{k!} = 1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k \frac{\xi^k}{k!}}_{\geqslant 0} \geqslant 1. \quad (3.171)$$

Из (3.171) и из наличия множителя $\exp[2(D_0/w_0)^2]$ в (3.170) следует, что смещение на комплексную величину всегда приводит к увеличению мощности пучка.

В частном случае, при смещении пучка на вещественные расстояния параметр D_0 становится равным нулю и мощность принимает значение $[\pi w_0^2/2][(m+n)!/m!]$, совпадающее с выражением для мощности пучков ЛГ из [184] с точностью до константы.

Физического смысла в увеличении мощности с ростом асимметрии аЛГ-пучков нет. Но для расчета нормированного ОУМ в следующем разделе выражение (3.170) будет использовано.

3.5.3. Орбитальный угловой момент смещенного пучка Лагерра–Гаусса. Получим теперь выражение для проекции ОУМ аЛГ-пучка на оптическую ось (остальные проекции для параксиальных пучков равны нулю). Это также удобно сделать через угловой спектр плоских волн:

$$J_z = -i\lambda^2 \iint\limits_{\mathrm{R}^2} A^* \frac{\partial A}{\partial \theta}\, \rho\, d\rho\, d\theta. \tag{3.172}$$

Подставив (3.167) в (3.172), получим:

$$\begin{aligned} J_z = -i\lambda^2 \left|C_0\right|^2 \iint\limits_{\mathrm{R}^2} \rho^{2n} \exp\left[-\frac{(kw\rho)^2}{2}\right] \left\{L_m^n\left[\frac{(kw\rho)^2}{2}\right]\right\}^2 \times \\ \times \exp\left[-in\theta + ik\rho\left(x_0^* \cos\theta + y_0^* \sin\theta\right)\right] \times \\ \times \left[in + ik\rho\left(x_0 \sin\theta - y_0 \cos\theta\right)\right] \times \\ \times \exp\left[in\theta - ik\rho\left(x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta\right)\right] \rho\, d\rho\, d\theta. \end{aligned} \tag{3.173}$$

Выделим отдельно слагаемое, пропорциональное мощности:

$$\begin{aligned} J_z = nW + k\lambda^2 \left|C_0\right|^2 \int\limits_0^\infty \rho^{2n+2} \exp\left[-\frac{(kw\rho)^2}{2}\right] \left\{L_m^n\left[\frac{(kw\rho)^2}{2}\right]\right\}^2 d\rho \times \\ \times \int\limits_0^{2\pi} \left(x_0 \sin\theta - y_0 \cos\theta\right) \exp\left\{2k\rho\left[(\operatorname{Im} x_0)\cos\theta + (\operatorname{Im} y_0)\sin\theta\right]\right\} d\theta. \end{aligned} \tag{3.174}$$

Внутренний интеграл выражается через функции Бесселя [154]. Тогда (3.174) примет вид:

$$\begin{aligned} J_z = nW - 2\pi k\lambda^2 \left|C_0\right|^2 \int\limits_0^\infty \rho^{2n+2} \exp\left[-\frac{(kw\rho)^2}{2}\right] \left\{L_m^n\left[\frac{(kw\rho)^2}{2}\right]\right\}^2 \times \\ \times \left\{(ix_0 + y_0)\left[\frac{(\operatorname{Im} x_0) - (\operatorname{Im} y_0)}{2iD_0}\right] + (ix_0 - y_0)\left[\frac{(\operatorname{Im} x_0) - (\operatorname{Im} y_0)}{2iD_0}\right]^{-1}\right\} \times \\ \times iI_1\left(2kD_0\rho\right) d\rho = nW + 4\pi^2\lambda \left|C_0\right|^2 \frac{\operatorname{Im}\left(x_0^* y_0\right)}{D_0} \times \\ \times \int\limits_0^\infty \rho^{2n+2} \exp\left[-\frac{(kw\rho)^2}{2}\right] \left\{L_m^n\left[\frac{(kw\rho)^2}{2}\right]\right\}^2 I_1\left(2kD_0\rho\right) d\rho. \end{aligned} \tag{3.175}$$

Этот интеграл можно вычислить, как и интеграл для мощности пучка, если представить его как производную по D_0:

$$J_z = nW - 4\pi^2\lambda\,|C_0|^2\,\frac{\operatorname{Im}(x_0^* y_0)}{2kD_0}\frac{\partial}{\partial D_0}\left(\int\limits_0^\infty \rho^{2n+1}\exp\left[-\frac{(kw\rho)^2}{2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left\{L_m^n\left[\frac{(kw\rho)^2}{2}\right]\right\}^2 I_0(2kD_0\rho)\,d\rho\right). \quad (3.176)$$

Интеграл в (3.176) является берущимся и совпадает с интегралом для расчета мощности:

$$J_z = nW - 4\pi^2\lambda\,|C_0|^2\,\frac{\operatorname{Im}(x_0^* y_0)}{2kD_0}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial D_0}\left\{\frac{2^n}{(kw_0)^{2n+2}}\frac{(m+n)!}{m!}\exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)L_{m+n}\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)L_m\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)\right\} =$$
$$= nW - \frac{\pi w_0^2}{4}\frac{(m+n)!}{m!}\frac{\operatorname{Im}(x_0^* y_0)}{D_0}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial D_0}\left\{\exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)L_{m+n}\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)L_m\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)\right\}. \quad (3.177)$$

Вычисляя производную, получим выражение для нормированного ОУМ:

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{2\operatorname{Im}(x_0^* y_0)}{w_0^2}\left[\frac{L_m^1\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)}{L_m\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)} + \frac{L_{m+n}^1\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)}{L_{m+n}\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)} - 1\right]. \quad (3.178)$$

Из (3.178) видно, что нормированный ОУМ (ОУМ на один фотон) не зависит от длины волны, а полностью определяется отношением смещений к радиусу перетяжки, т. е. величинами x_0/w_0 и y_0/w_0.

Можно показать, что увеличение или уменьшение нормированного ОУМ полностью определяется знаком величины $\operatorname{Im}(x_0^* y_0)$, так как выражение в квадратных скобках всегда больше или равно 1.

Нормированный ОУМ зависит сразу от нескольких параметров — от обоих индексов полиномов Лагерра и от вещественных и мнимых смещений вдоль обеих декартовых координат. Рассмотрим частный случай, когда величина $x_0^* y_0$ чисто мнимая, причем комплексные смещения равны по модулю. Пусть $x_0 = aw_0\exp(iv)$, $y_0 = ix_0$, где a — модуль нормированного комплексного смещения (т. е. $a = |x_0/w_0|$). Тогда выражение для ОУМ примет вид:

$$\frac{J_z}{W} = n - \xi\left[\frac{L_m^1(\xi)}{L_m(\xi)} + \frac{L_{m+n}^1(\xi)}{L_{m+n}(\xi)} - 1\right], \quad (3.179)$$

где $\xi = -2a^2$. Параметр a можно назвать параметром асимметрии аЛГ-пучка. Из (3.179) видно, что при $|\xi| \gg 1$ нормированный ОУМ

равен примерно $J_z/W \approx n - \xi$, т. е. зависит квадратично от параметра асимметрии a, что подтверждается графиком на рис. 3.33, рассчитанным по формуле (3.179) для $m = 3$ и $n = 5$.

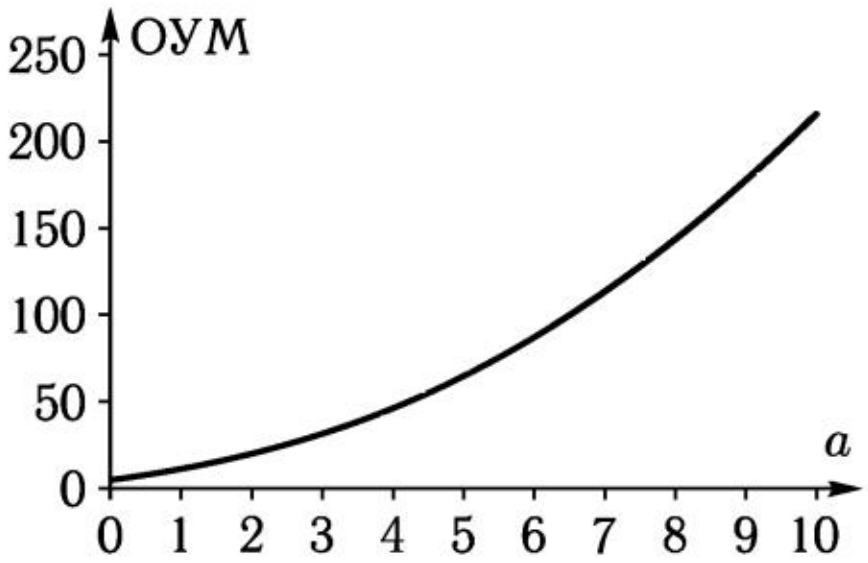


Рис. 3.33. Зависимость нормированного ОУМ от нормированного параметра асимметрии a

Из рис. 3.33 видно, что в отличие от обычных мод ЛГ, у аЛГ-пучков ОУМ меняется непрерывно, пробегая целые и дробные значения.

Из (3.178) также следует, что при $x_0^* y_0 \in \mathrm{R}$ нормированный ОУМ совпадает с топологическим зарядом n, как в случае радиально-симметричных оптических вихрей, хотя форма пучка не обладает радиальной симметрией (если x_0 и y_0 чисто мнимые). Так, на рис. 3.34 показаны распределения интенсивности в плоскости $z = 0$ для аЛГ-пучков

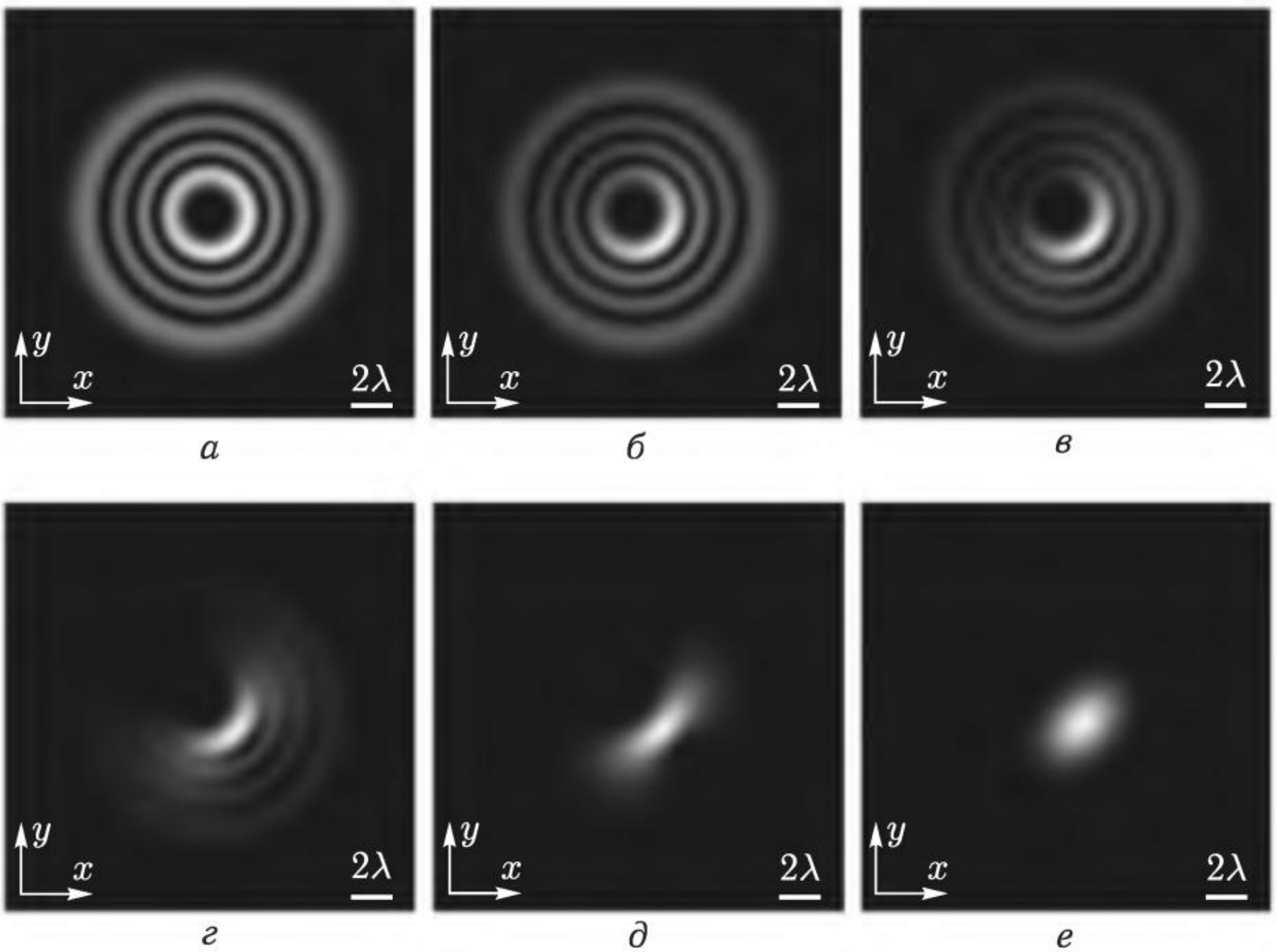


Рис. 3.34. Распределения интенсивности в плоскости $z = 0$ для аЛГ-пучков при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (3, 5)$, поперечные смещения $x_0 = 0{,}01wi$ и $y_0 = 0{,}01wi$ (*а*), $x_0 = 0{,}05wi$ и $y_0 = 0{,}05wi$ (*б*), $x_0 = 0{,}1wi$ и $y_0 = 0{,}1wi$ (*в*), $x_0 = 0{,}2wi$ и $y_0 = 0{,}2wi$ (*г*), $x_0 = 0{,}5wi$ и $y_0 = 0{,}5wi$ (*д*), $x_0 = 2wi$ и $y_0 = 2wi$ (*е*)

при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (3, 5)$, поперечные смещения $x_0 = 0{,}01wi$ и $y_0 = 0{,}01wi$ (рис. 3.34 *а*), $x_0 = 0{,}05wi$ и $y_0 = 0{,}05wi$ (рис. 3.34 *б*), $x_0 = 0{,}1wi$ и $y_0 = 0{,}1wi$ (рис. 3.34 *в*), $x_0 = 0{,}2wi$ и $y_0 = 0{,}2wi$ (рис. 3.34 *г*), $x_0 = 0{,}5wi$ и $y_0 = 0{,}5wi$ (рис. 3.34 *д*), $x_0 = 2wi$ и $y_0 = 2wi$ (рис. 3.34 *е*). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 10\lambda$. Согласно (22), ОУМ на всех рис. 3.34 должен быть равен 5. При расчете он оказался равен 4,999 (рис. 3.34 *а–г*) и 4,998 (рис. 3.34 *д, е*).

Из рис. 3.34 видно, что все эти пучки имеют разный вид — почти радиально симметричные световые кольца на рис. 3.34 *а*, световая дуга (полумесяц), окруженная периферийными кольцами, на рис. 3.34 *б* и 3.34 *в*, полумесяц с разорванными периферийными кольцами (рис. 3.34 *г*), полумесяц без периферийных колец (рис. 3.34 *д*), эллиптическое световое пятно (рис. 3.34 *е*). Однако, несмотря на разный вид, нормированный ОУМ всех этих пучков одинаков.

3.5.4. Параксиальные пучки Лагерра–Гаусса в форме вращающегося полумесяца. Выражение (3.159) существенно упрощается в случае, когда $m = 0$, т. е. на дифракционной картине всего одно световое кольцо. Интенсивность в этом случае имеет следующий вид:

$$I_{0n}(x, y, z) = |E|^2 = \frac{w^2(0)}{w^2(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w^2(z)}\right]^n \times$$
$$\times \exp\left[2\frac{(\operatorname{Im} x_0)^2 + (\operatorname{Im} y_0)^2}{w^2(z)}\right] \left[(u + \operatorname{Im} y_0)^2 + (v - \operatorname{Im} x_0)^2\right]^n \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{2(u^2 + v^2)}{w^2(z)} + \frac{2k\left[(\operatorname{Im} x_0)\, u + (\operatorname{Im} y_0)\, v\right]}{R(z)}\right\}. \quad (3.180)$$

где $u = x - \operatorname{Re} x_0$, $v = y - \operatorname{Re} y_0$. Далее для краткости введем обозначение $D_0 = [(\operatorname{Im} x_0)^2 + (\operatorname{Im} y_0)^2]^{1/2}$.

Интенсивность не может быть отрицательной, поэтому нули интенсивности являются ее минимумами. Из (3.180) видно, что при распространении аЛГ-пучка в однородном пространстве при $n > 0$ имеется минимум интенсивности в центре пучка (точка фазовой сингулярности) с координатами $(x_{\min}, y_{\min}) = (\operatorname{Re} x_0 - \operatorname{Im} y_0, \operatorname{Re} y_0 + \operatorname{Im} x_0)$. Приравнивая нулю частные производные интенсивности (3.180) по декартовым координатам, можно показать, что при $n > 0$ положение максимума интенсивности зависит от пройденного расстояния z и вращается относительно минимума:

$$\frac{y_{\max} - \operatorname{Re} y_0 - \operatorname{Im} x_0}{x_{\max} - \operatorname{Re} x_0 + \operatorname{Im} y_0} = \frac{(\operatorname{Im} y_0)\, z - (\operatorname{Im} x_0)\, z_R}{(\operatorname{Im} x_0)\, z + (\operatorname{Im} y_0)\, z_R}, \quad (3.181)$$

где $(x_{\max}, y_{\max})$ — координаты точки с максимальной интенсивностью.

Введем новую систему координат, сдвинутую и повернутую относительно исходной системы на угол, зависящий от пройденного расстояния z:

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-\operatorname{Re}x_0+\operatorname{Im}y_0\\ y-\operatorname{Re}y_0-\operatorname{Im}x_0\end{pmatrix}, \tag{3.182}$$

где

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left[\frac{(\operatorname{Im}y_0)\,z-(\operatorname{Im}x_0)\,z_R}{(\operatorname{Im}x_0)\,z+(\operatorname{Im}y_0)\,z_R}\right],$$
$$\cos\varphi=\frac{(\operatorname{Im}x_0)\,z+(\operatorname{Im}y_0)\,z_R}{D_0\sqrt{z^2+z_R^2}},\quad \sin\varphi=\frac{(\operatorname{Im}y_0)\,z-(\operatorname{Im}x_0)\,z_R}{D_0\sqrt{z^2+z_R^2}}. \tag{3.183}$$

В новой системе координат $(\xi,\,\eta)$ интенсивность (3.180) примет вид:

$$I_{0n}(\xi,\eta,z)=|E|^2=\frac{w^2(0)}{w^2(z)}\left[\frac{\sqrt{2}}{w^2(z)}\right]^n\left(\xi^2+\eta^2\right)^n\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{2(\xi^2+\eta^2)}{w^2(z)}+\frac{2kD_0}{\sqrt{z^2+z_R^2}}\,\xi\right]. \tag{3.184}$$

Можно показать, что такая функция имеет три стационарные точки. Первая из них — точка минимума $\xi=0$, $\eta=0$, соответствующая упомянутой выше точке $(x_{\min},\,y_{\min})$. Вторая — точка максимума с координатами

$$\begin{cases}\xi_{\max}=\dfrac{1}{2}\dfrac{w(z)}{w(0)}\left(D_0+\sqrt{D_0^2+2nw_0^2}\right),\\ \eta_{\max}=0,\end{cases} \tag{3.185}$$

а третья — седловая точка с координатами

$$\begin{cases}\xi_{\text{saddle}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{w(z)}{w(0)}\left(D_0-\sqrt{D_0^2+2nw_0^2}\right),\\ \eta_{\text{saddle}}=0,\end{cases} \tag{3.186}$$

которая является точкой максимума по переменной ξ и точкой минимума по переменной η. Максимум интенсивности по переменной ξ означает, что точка лежит на световом кольце, а минимум по переменной η — что это точка с минимальной на кольце интенсивностью.

В исходной системе координат точка максимума интенсивности имеет следующие координаты:

$$\begin{cases}x_{\max}=\operatorname{Re}x_0-\operatorname{Im}y_0+\\ \quad+\dfrac{(\operatorname{Im}x_0)\,z+(\operatorname{Im}y_0)\,z_R}{2z_R}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2nw_0^2}{D_0^2}}\right),\\ y_{\max}=\operatorname{Re}y_0+\operatorname{Im}x_0+\\ \quad+\dfrac{(\operatorname{Im}y_0)\,z-(\operatorname{Im}x_0)\,z_R}{2z_R}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2nw_0^2}{D_0^2}}\right).\end{cases} \tag{3.187}$$

Из (3.187) следует, что точка с максимальной интенсивностью $(x_{\max}, y_{\max})$ вращается вокруг точки $(x_{\min}, y_{\min})$, поворачиваясь на угол α_0 на расстоянии

$$z = z_R \operatorname{tg}(\alpha_0). \tag{3.188}$$

На рис. 3.35 приведены результаты расчета поперечной интенсивности пучка (3.159) с нулевым радиальным индексом $m = 0$ в разных плоскостях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$ (т. е. расстояние Рэлея равно $z_R = 25\pi\lambda$), топологический заряд $n = 8$, поперечные смещения $x_0 = 0{,}25\lambda = w_0/20$ и $y_0 = 0{,}25\lambda i = iw_0/20$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (рис. 3.35 *а*), $z_R \operatorname{tg}(\pi/12)$ (рис. 3.35 *б*), $z_R \operatorname{tg}(\pi/4) = z_R$ (рис. 3.35 *в*), $z_R \operatorname{tg}(5\pi/12)$ (рис. 3.35 *г*). Центр пучка находится в начале координат: $(x_{\min}, y_{\min}) = (0, 0)$. Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 20\lambda$ (рис. 3.35 *а*), 20λ (рис. 3.35 *б*), 20λ (рис. 3.35 *в*), 75λ (рис. 3.35 *г*). Черной точкой отмечено положение максимума интенсивности, вычисленное по формуле (3.187). Белой

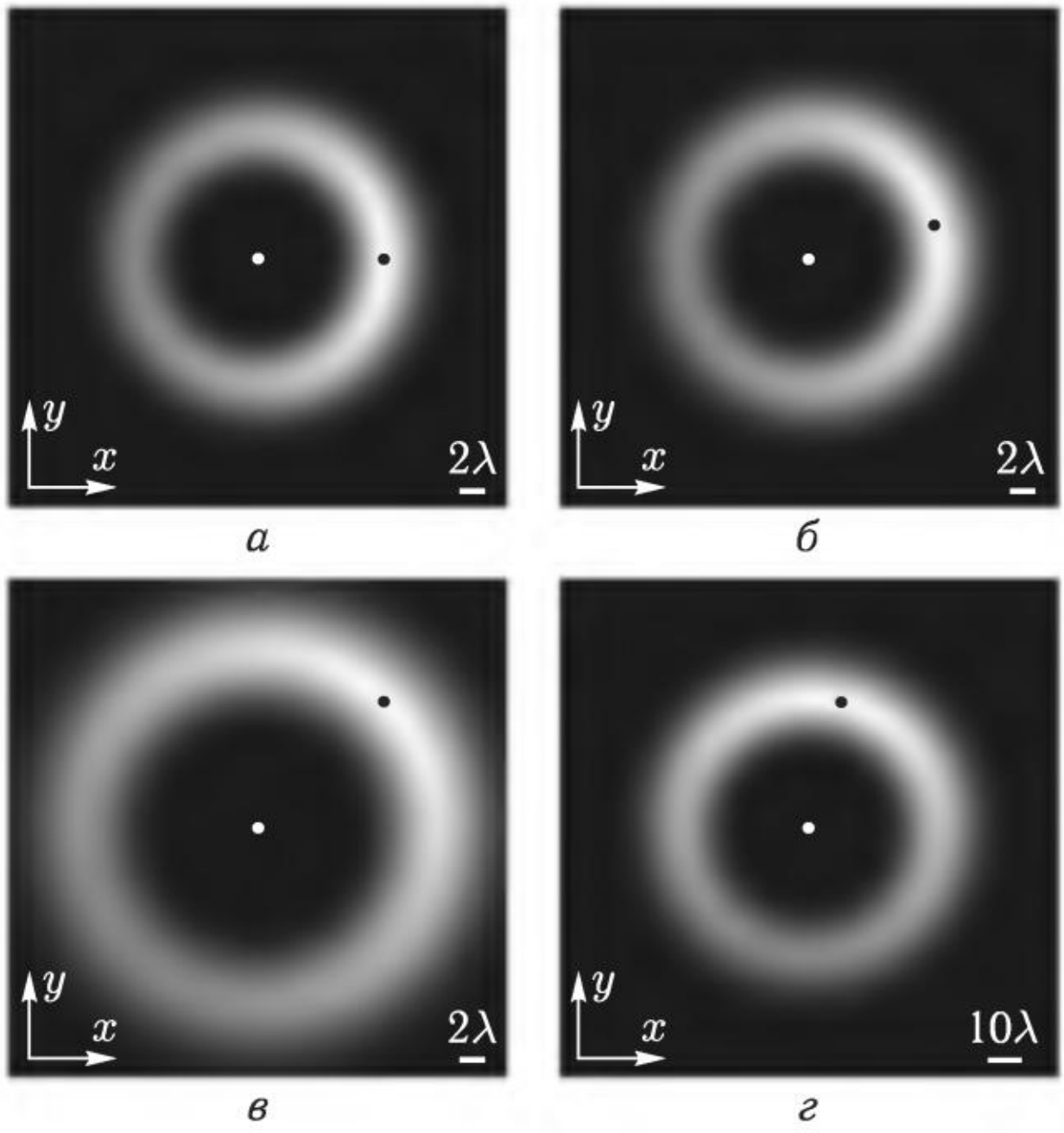


Рис. 3.35. Поперечное распределение интенсивности пучка (3.159) с нулевым радиальным индексом $m = 0$ на разных расстояниях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$, топологический заряд $n = 8$, поперечные смещения $x_0 = 0{,}25\lambda = w_0/20$ и $y_0 = 0{,}25\lambda i = iw_0/20$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (*а*), $z_R \operatorname{tg}(\pi/12)$ (*б*), $z_R \operatorname{tg}(\pi/4) = z_R$ (*в*), $z_R \operatorname{tg}(5\pi/12)$ (*г*). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 20\lambda$ (*а*), 20λ (*б*), 20λ (*в*), 75λ (*г*). Черной точкой отмечено положение максимума интенсивности, вычисленное по формуле (3.187)

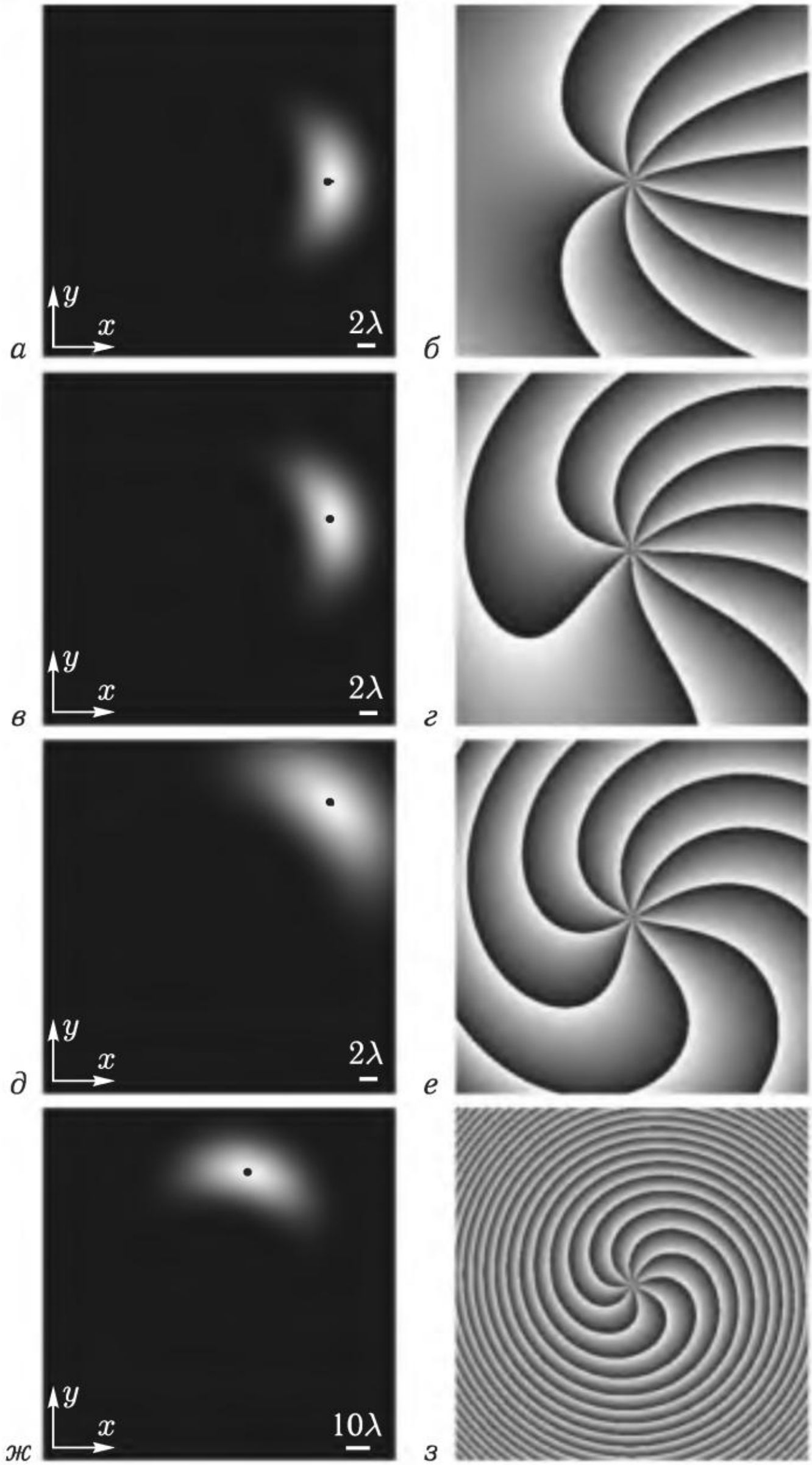


Рис. 3.36. Поперечное распределение интенсивности пучка (3.159) с нулевым радиальным индексом $m = 0$ на разных расстояниях z при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$, топологический заряд $n = 8$, поперечные смещения $x_0 = 5\lambda = w_0$ и $y_0 = 5\lambda i = iw_0$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (а), $z_R \operatorname{tg}(\pi/12)$ (б), $z_R \operatorname{tg}(\pi/4) = z_R$ (в), $z_R \operatorname{tg}(5\pi/12)$ (г). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 20\lambda$ (а), 20λ (б), 20λ (в), 75λ (г). Черной точкой отмечено положение максимума интенсивности, вычисленное по формуле (3.187)

точкой отмечены точки минимума интенсивности или точки фазовой сингулярности.

Из (3.184)–(3.186) следует, что отношение максимальной интенсивности на световом кольце к минимальной (т. е. в седловой точке) определяется следующим выражением:

$$\frac{I_{0n,\max}}{I_{0n,\text{saddle}}} = \left(\frac{\sqrt{D_0^2 + 2nw_0^2} + D_0}{\sqrt{D_0^2 + 2nw_0^2} - D_0}\right)^{2n} \exp\left(\frac{2D_0}{w_0^2}\sqrt{D_0^2 + 2nw_0^2}\right). \quad (3.189)$$

Из (3.189) следует, что асимметрия пучка растет экспоненциально с ростом смещения D_0. Это означает, что при увеличении мнимых смещений $\mathrm{Im}(x_0)$ и $\mathrm{Im}(y_0)$ происходит «разрыв» светового кольца, и распределение интенсивности имеет вид светового пятна, смещенного от центра, вращающегося при распространении относительно точки фазовой сингулярности $(x_{\min}, y_{\min})$. Слово «разрыв» взято в кавычки, так как нулевой интенсивности на световом кольце быть не может (знаменатель в (3.189) никогда не обращается в нуль при $n > 0$).

На рис. 3.36 приведены результаты расчета поперечной интенсивности и фазы того же пучка, что и на рис. 3.35, но с большими смещениями $x_0 = 5\lambda = w_0$ и $y_0 = 5\lambda i = iw_0$. Все остальные параметры те же, что и на рис. 3.35. Черной точкой отмечено положение максимума интенсивности, вычисленное по формуле (3.187).

Из рис. 3.36 видно, что вытянутое световое пятно поворачивается соответственно на углы $\pi/12$, $\pi/4$, $5\pi/12$, в то время как центр фазовой сингулярности остается в начале координат.

Асимметричный пучок ЛГ при $m = 0$ похож на асимметричный пучок Бесселя–Гаусса (аБГ-пучок) [124]. У обоих пучков одинаковая скорость вращения, определяемая формулой (3.188). Однако аБГ-пучок труднее поддается аналитическому описанию — для него в [124] получены формулы для координат нулей интенсивности, но нет формул для определения координат максимумов интенсивности, подобных (3.187). ОУМ аБГ-пучка описывается через ряды модифицированных функций Бесселя, в отличие от замкнутого выражения для ОУМ аЛГ-пучков (3.178). Кроме того, ОУМ аЛГ-пучка находится в квадратичной зависимости от параметра асимметрии, а ОУМ аБГ-пучка — в зависимости, близкой к линейной [124].

3.5.5. Экспериментальное формирование асимметричного пучка Лагерра–Гаусса. Оптическая схема эксперимента показана на рис. 3.37. Выходной пучок твердотельного лазера L ($\lambda = 532$ нм) расширялся с помощью системы, состоящей из линз L_1 ($f_1 = 250$ мм) и L_2 ($f_2 = 500$ мм). После расширения радиус лазерного пучка составил около 1,1 мм. Расширенный лазерный пучок направлялся на дисплей пространственного модулятора света SLM (PLUTO VIS, разрешение 1920×1080 пикселов, размер пикселя 8 мкм). На дисплей модулятора выводилась фазовая функция, которая представляет собой суперпозицию

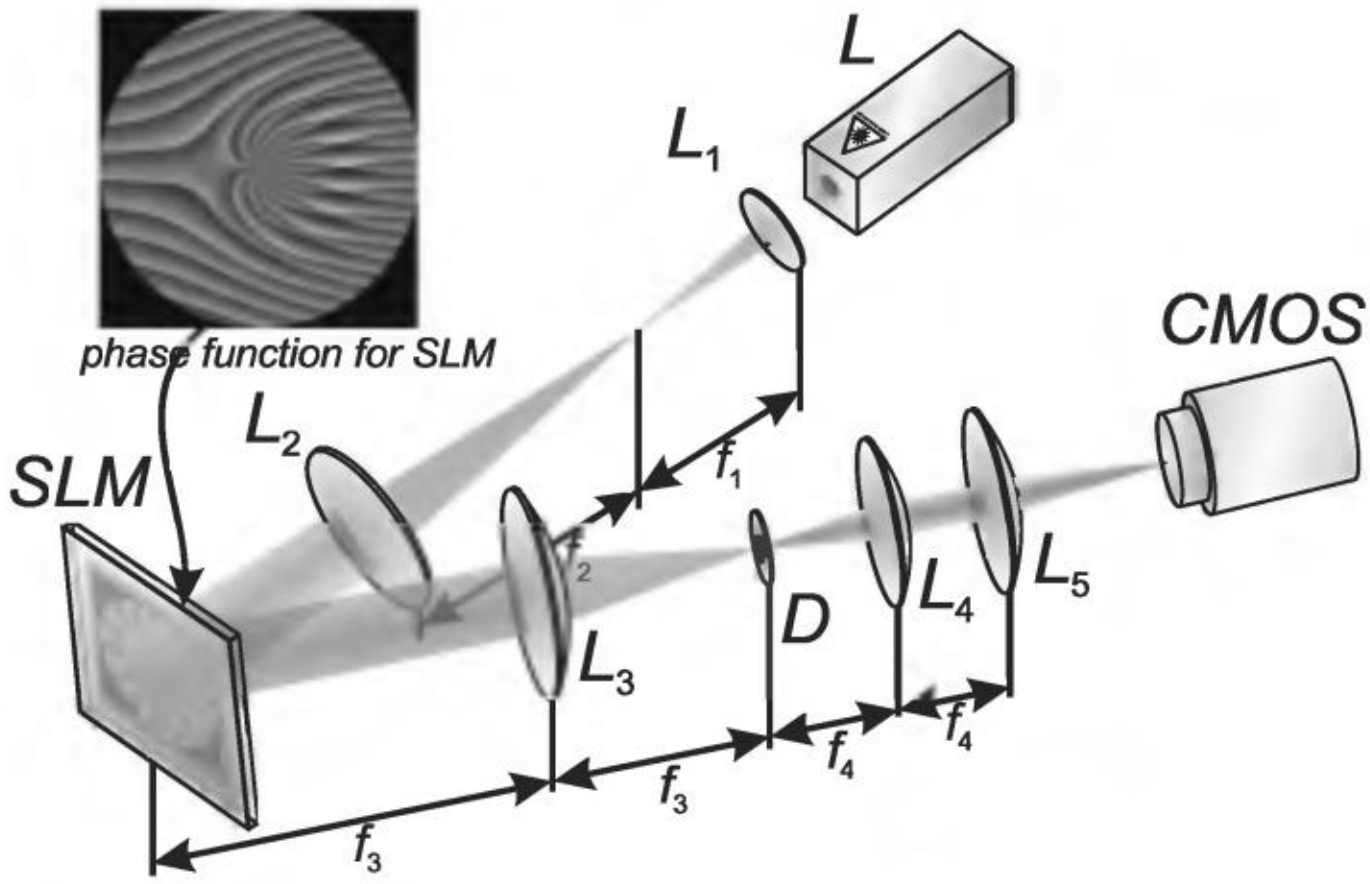


Рис. 3.37. Экспериментальная схема установки для формирования аЛГ-пучков: L — твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), L_1, L_2, L_3, L_4 и L_5 — линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 500$ мм, $f_3 = 350$ мм, $f_4 = 150$ мм, $f_5 = 280$ мм), SLM — пространственный модулятор света PLUTO VIS (разрешение 1920×1080 пикселов, размер пикселя 8 мкм), D — диафрагма, выполняющая роль пространственного фильтра, CMOS — видеокамера LOMO TC-1000 (разрешение 3664×2740 пикселов, размер пикселя 1,67 мкм)

кодированной фазовой функции исходного элемента, формирующего аЛГ-пучок, и линейной фазовой маски (показано на вставке на рис. 3.37). Это было сделано для того, чтобы разнести в пространстве первый порядок дифракции и нулевой порядок дифракции, в который отражается немодулированное излучение. Отраженный в первый порядок лазерный пучок с помощью системы линз L_3 ($f_3 = 350$ мм) и L_4 ($f_4 = 150$ мм) направлялся на линзу L_5 ($f_5 = 280$ мм), которая выполняла фокусировку аЛГ-пучка на матрицу CMOS камеры LOMO TC-1000 (разрешение 3664×2740 пикселов, размер пикселя 1,67 мкм). CMOS-камера установлена на оптическом рельсе и перемещается вдоль него, чтобы снимать распределения интенсивности на различном удалении от линзы L_5. Диафрагма D выполняет роль пространственного фильтра и блокирует нулевой порядок дифракции.

На рис. 3.38 представлены распределения интенсивности, полученные на различном удалении от поверхности линзы L_5. Чтобы выполнить съемку изображения на расстоянии 0 мм, линза L_5 временно удалялась из схемы. Из представленных изображений видно, что при удалении от плоскости линзы сформированный пучок в форме полумесяца поворачивается вокруг оси. Пучок, сформированный в фокусе линзы L_5, повернут на 90 градусов относительно исходного пучка, сформированного в плоскости линзы L_5. При этом из-за фокусировки также происходит уменьшение поперечных размеров сформированных пучков.

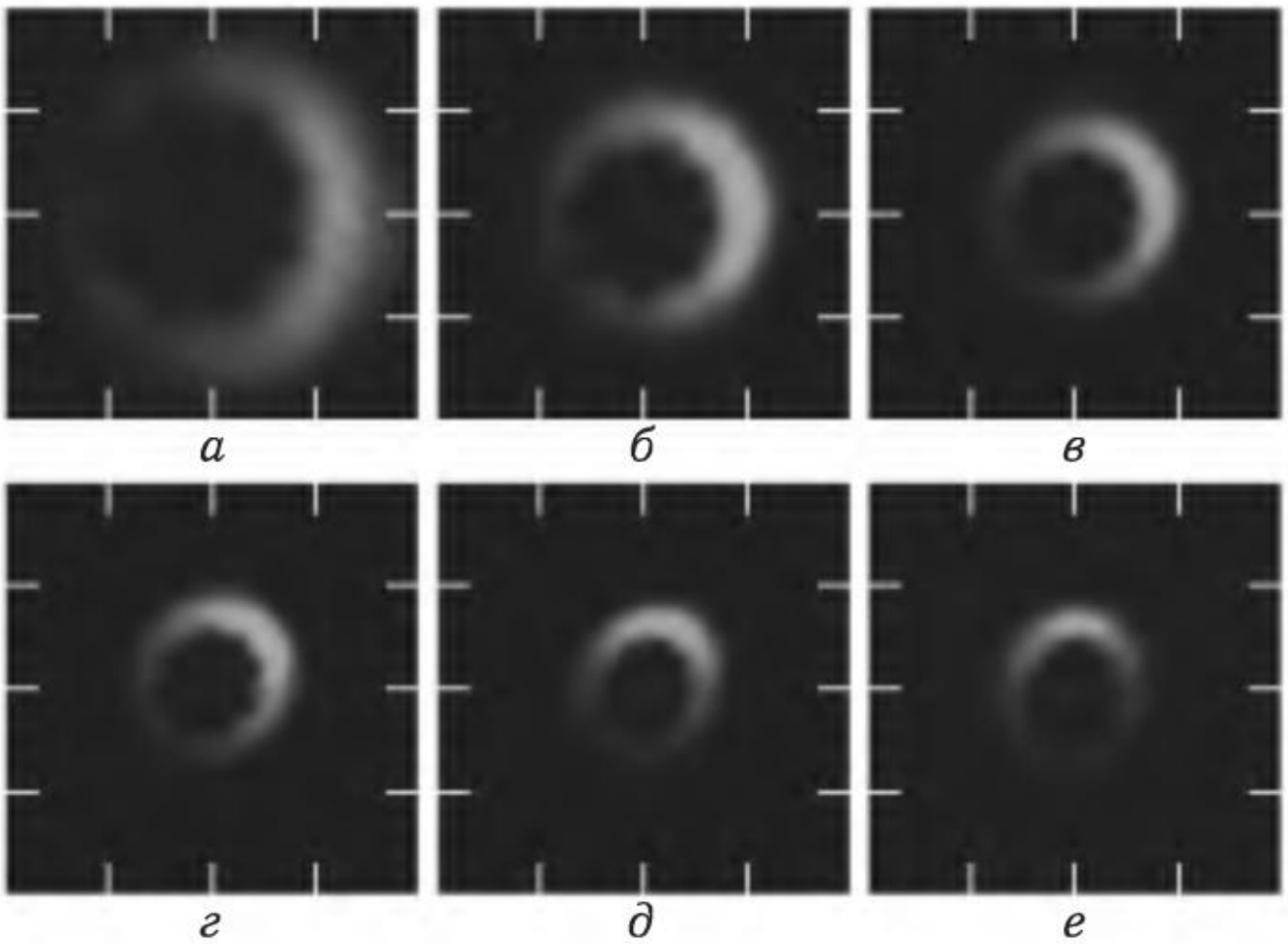


Рис. 3.38. Распределения интенсивности аЛГ-пучка, полученные на различных расстояниях от плоскости линзы L_5: 0 мм (*а*), 100 мм (*б*), 150 мм (*в*), 200 мм (*г*), 250 мм (*д*), 280 мм (*е*). Размер деления — 500 мкм. Параметры: $w_0 = 1$ мм, $n = 8$, $x_0 = 0{,}2w_0$, $y_0 = 0{,}2w_0 i$

На рис. 3.39 показаны распределения интенсивности, рассчитанные по формуле (3.159) (но с учетом линз) при тех же параметрах, что и параметры эксперимента. Из рис. 3.39 видно, что расчетные и экспериментальные распределения качественно совпадают.

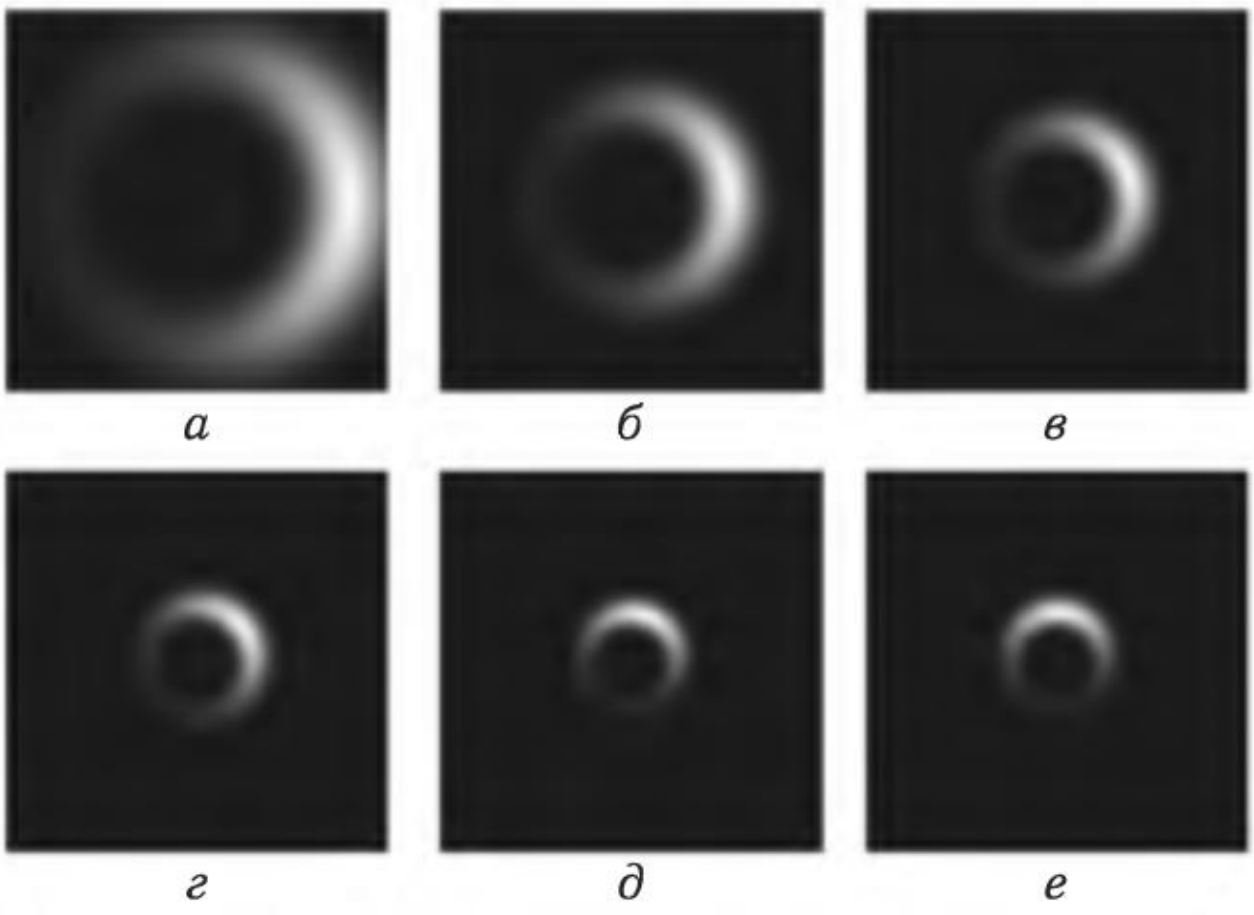


Рис. 3.39. Распределения интенсивности аЛГ-пучка, рассчитанные по формуле (3.159) (с учетом линз) при тех же параметрах, что и на рис. 3.38

3.5.6. Вращающиеся суперпозиции асимметричных пучков Лагерра–Гаусса. При дальнейшем увеличении мнимых смещений x_0 и y_0 асимметрия пучка возрастает настолько, что интенсивность

на кольце сосредоточена вблизи точки максимума, определяемой выражением (3.187). Вместо полумесяца поле больше похоже на Гауссов пучок, но смещенный от начала координат и поворачивающийся относительно него при распространении в пространстве на угол $\pi/2$.

Это следует из того, что, согласно (3.184), в начальной плоскости в повернутой системе координат (3.182) интенсивность распределена по следующему закону:

$$I_{0n}(\xi,\eta,z=0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0^2}\right)^n\exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)\left(\xi^2+\eta^2\right)^n\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{2}{w_0^2}\left[(\xi-D_0)^2+\eta^2\right]\right\}. \quad (3.190)$$

В других плоскостях на расстоянии z интенсивность (3.190) имеет вид:

$$I_{0n}(\xi,\eta,z)=\frac{w^2(0)}{w^2(z)}\left[\frac{\sqrt{2}}{w^2(z)}\right]^n\exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)\left(\xi^2+\eta^2\right)^n\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{2}{w^2(z)}\left\{[\xi-D(z)]^2+\eta^2\right\}\right). \quad (3.191)$$

где $D(z)=D_0[1+(z/z_R)^2]^{1/2}=w(z)/w(0)$.

Т.е. при $D_0\gg w_0$ степенная составляющая $(\xi^2+\eta^2)^n$ мало влияет на вид распределения интенсивности, а оставшаяся экспонента в (3.191) соответствует интенсивности Гауссова пучка с радиусом перетяжки $w(z)$, смещенным на расстояние $D(z)\approx\xi_{\max}$ от начала координат (от точки с фазовой сингулярностью). Это означает, что если рассмотреть суперпозицию пучков (3.190) с разными смещениями D_0, то они будут выглядеть как несоосные Гауссовы пучки, которые при распространении поворачиваются на один и тот же угол, определяемый (3.188). Причем, согласно (3.191), при удалении от начальной плоскости на расстояние z смещения максимумов интенсивности от оптической оси увеличатся в $[1+(z/z_R)^2]^{1/2}$ раз, т. е. пропорционально расширению Гауссова пучка. Это означает, что пучки в суперпозиции почти не интерферируют между собой и при распространении дифракционная картина не меняет своего вида.

Так, на рис. 3.40 показано распространение двух аЛГ-пучков, комплексная амплитуда которых имеет вид:

$$E(x,y,z)=\frac{w(0)}{w(z)}\left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)}\right]^n\sum_{j=1}^{N}C_j\left[(x-x_{0j})+i(y-y_{0j})\right]^n\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{\rho_j^2}{w^2(z)}+\frac{ik\rho_j^2}{2R(z)}-i(n+1)\zeta(z)\right], \quad (3.192)$$

где $N=2$ для двух пучков и $N=3$ для трех пучков, (x_{0j},y_{0j}) — смещения j-го пучка, а $\rho_j=[(x-x_{0j})^2+(y-y_{0j})^2]^{1/2}$. Коэффициенты C_j подбирались так, чтобы максимальная интенсивность всех

пучков была одинакова. Другие параметры расчета были выбраны следующими: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$ (расстояние Рэлея $z_R = 25\pi\lambda$), индекс пучка $(m, n) = (0, 8)$, поперечные смещения первого пучка $x_0 = 5w_0$, $y_0 = 5w_0 i$, поперечные смещения второго пучка $x_0 = 8w_0$, $y_0 = 8w_0 i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (рис. 3.40 *а, г*), $z = z_R \operatorname{tg}(\pi/4)$ (рис. 3.40 *б, д*), $z = z_R \operatorname{tg}(5\pi/12)$ (рис. 3.40 *в, е*). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 50\lambda$ (рис. 3.40 *а, г*), 60λ (рис. 3.40 *б, д*), 200λ (рис. 3.40 *в, е*).

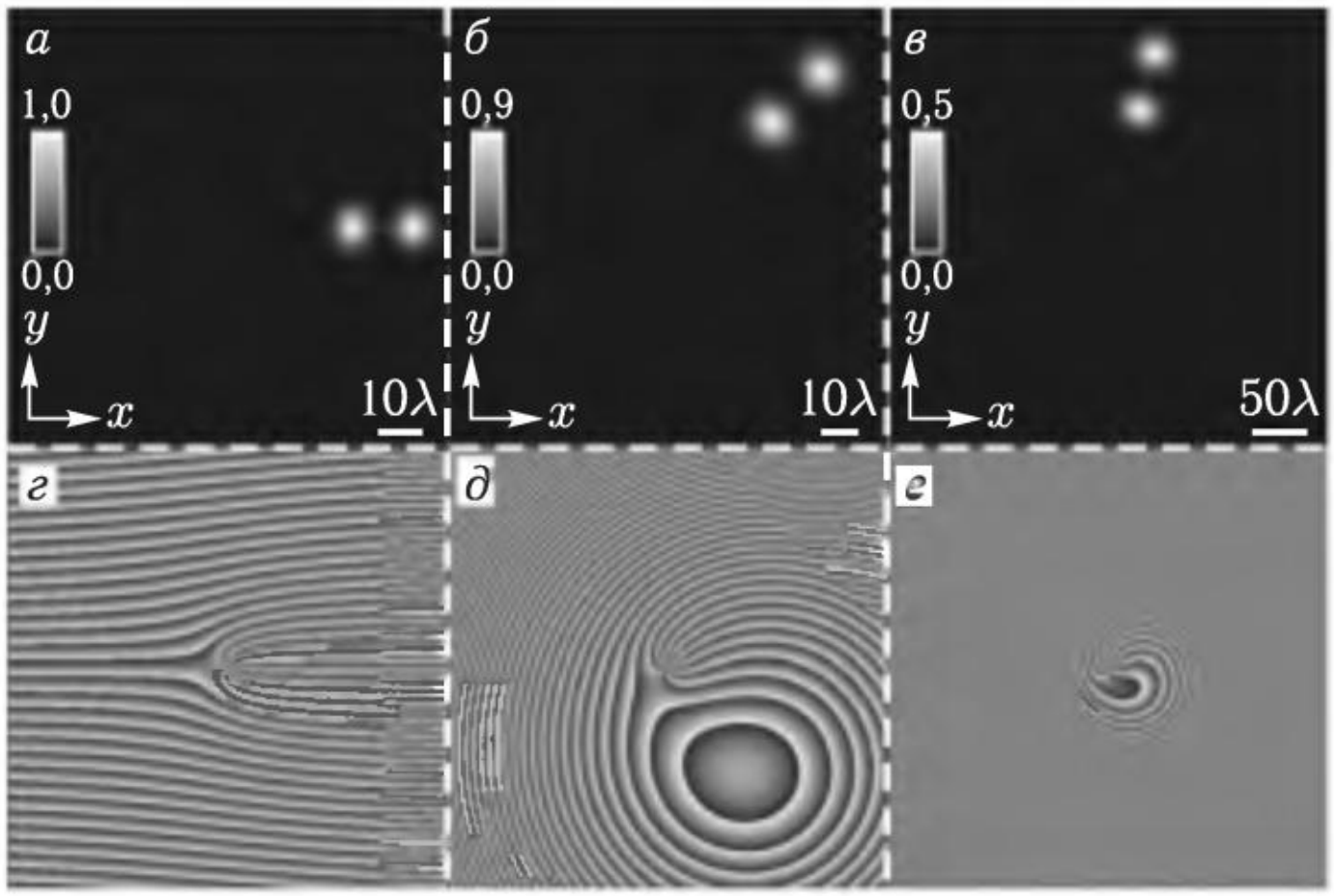


Рис. 3.40. Распределение интенсивности (*а–в*) и фазы (*г–е*) аЛГ-пучков при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (0, 8)$, поперечные смещения первого пучка $x_0 = 5w_0$, $y_0 = 5w_0 i$, поперечные смещения второго пучка $x_0 = 8w_0$, $y_0 = 8w_0 i$, расстояния вдоль оптической оси $z = 0$ (*а, г*), $z = z_R \operatorname{tg}(\pi/4)$ (*б, д*), $z = z_R \operatorname{tg}(5\pi/12)$ (*в, е*). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 50\lambda$ (*а, г*), 60λ (*б, д*), 200λ (*в, е*)

Из рис. 3.40 видно, что световой пучок, похожий на суперпозицию двух Гауссовых пучков, при распространении мало меняет свой вид (изменяясь только масштабно) и поворачивается на угол $\pi/4$ (рис. 3.40 *б, д*) и $5\pi/12$ (рис. 3.40 *в, е*).

3.5.7. Захват и вращение микрочастиц в асимметричных пучках Лагерра–Гаусса. Далее приводятся эксперименты, которые доказывают, что ОУМ, который аЛГ-пучок передает микрочастице, и который пропорционален скорости движения микрочастицы, также почти линейно зависит от параметра асимметрии a. Схема эксперимента по манипуляции микрочастицами с помощью асимметричных пучков ЛГ с линейной поляризацией показана на рис. 3.41. Выходной пучок твердотельного лазера L ($\lambda = 532$ нм, максимальная выходная мощность 1500 мВт) расширялся с помощью системы, состоящей из микрообъектива MO_1 ($8''$, NA = 0,3) и линзы L_1 ($f_1 = 250$ мм). Расширенный

лазерный пучок направлялся на дисплей пространственного модулятора света SLM (PLUTO VIS, разрешение 1920×1080 пикселов, размер пикселя 8 мкм). Отраженный от модулятора модулированный лазерный пучок с помощью системы линз L_2 ($f_2 = 350$ мм) и L_3 ($f_3 = 150$ мм) направлялся во входное отверстие микрообъектива MO_2 (40″, NA = 0,65). Изображение плоскости манипулирования проецировалось на матрице CMOS камеры LOMO TC-1000 (разрешение 1280×960 пикселов, размер пикселя 1,67 мкм) с помощью микрообъектива MO_3 (16″, NA = 0,4). Для подсветки области захвата использовалась система, состоящая из конденсора C и освещающей лампы I, свет от которой вводился с использованием делителя пучка BS. Для манипулирования в эксперименте были использованы микросферы полистирола диаметром 5 мкм, которые находились на стеклянной пластинке P, радиус гауссова пучка $w = 1$ мм.

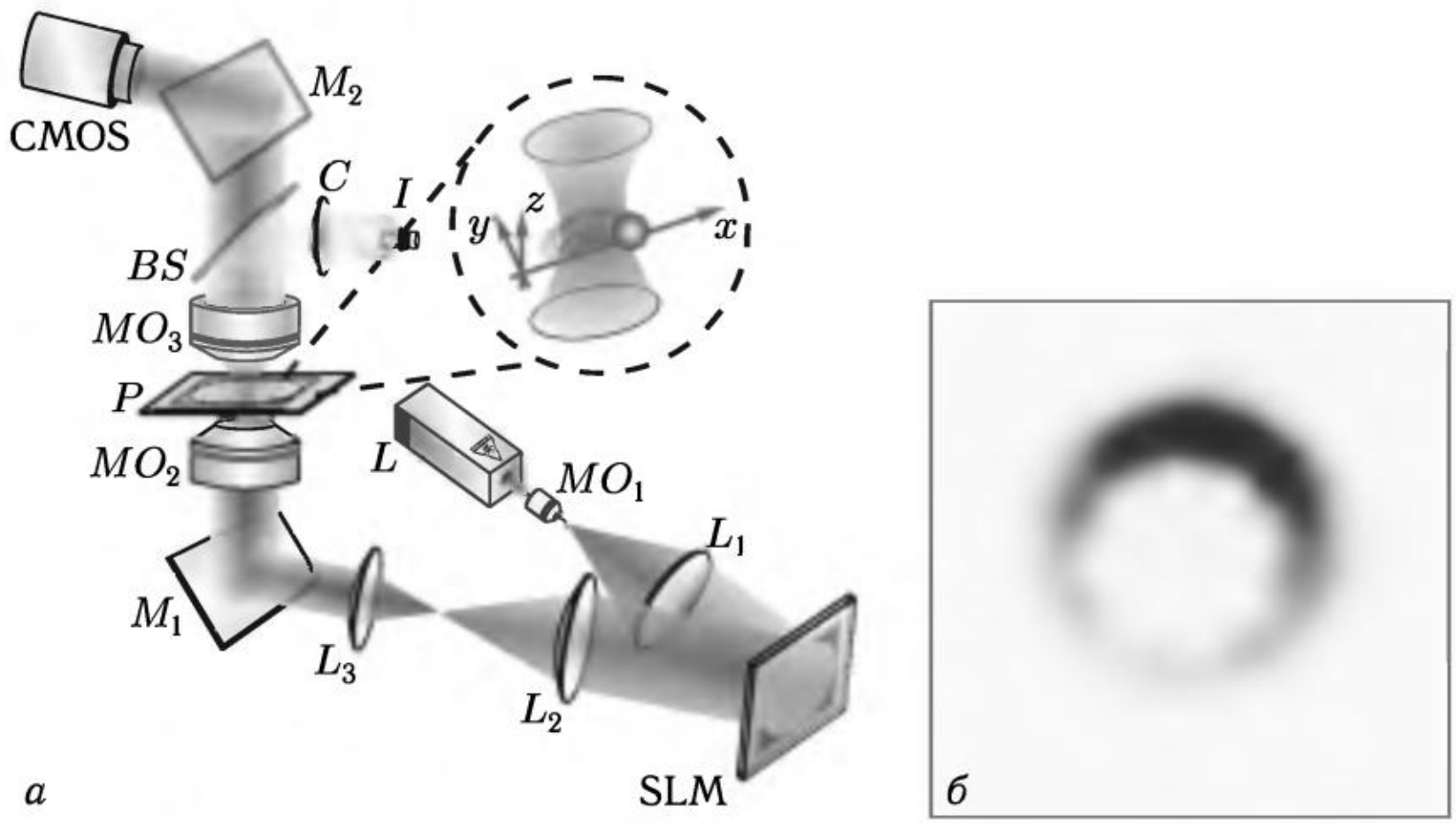


Рис. 3.41. Схема эксперимента для исследования передачи ОУМ микросферам полистирола с использованием асимметричных пучков ЛГ: L — твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм, мощность 1500 мВт), MO_1 — микрообъектив (8″, NA = 0,3), L_1, L_2 и L_3 — линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 350$ мм, $f_3 = 150$ мм), SLM — пространственный модулятор света PLUTO VIS (разрешение 1920×1080 пикселов, размер пикселя 8 мкм), MO_2 — микрообъектив (40″, NA = 0,65), P — стеклянная пластинка со взвесью микросфер полистирола, MO_3 — микрообъектив (16″, NA = 0,4), CMOS — видеокамера LOMO TC-1000 (разрешение 1280×960 пикселов, размер пикселя 1,67 мкм), C — конденсор, I — освещающая лампа, BS — делитель пучка. Показан асимметричный пучок ЛГ (негатив) (*б*), сформированный SLM при следующих параметрах: $w_0 = 1$ мм, $n = 8$, $x_0 = 0{,}2w_0$, $y_0 = 0{,}2w_0 i$, размер кадра 2×2 мм

В зависимости от параметра комплексного смещения x_0 сформированного асимметричного SLM пучка ЛГ в ходе экспериментов наблюдалось либо вращение микросфер полистирола вдоль сформированного светового кольца с асимметричным распределением интенсивности

(при значениях $x_0 < 0{,}3w$), либо перемещение захваченных микросфер вдоль сформированной световой кривой в форме полумесяца (при значениях $x_0 \geqslant 0{,}3w$). Когда частица движется по длинной траектории (при $x_0 < 0{,}3w$), на нее действует сила, пропорциональная плотности ОУМ (3,165). А когда частица движется по короткой траектории (при $x_0 \geqslant 0{,}3w$), на нее действует сила, которая пропорциональна усредненному по траектории (полному) ОУМ.

Попав в область аЛГ-пучка, микросфера начинает испытывать действие силы, которая прямо пропорциональна ОУМ пучка. Под действием этой силы, а также силы, возникающей из-за градиента интенсивности, микросфера начинает двигаться равноускоренно вдоль сформированной световой кривой. Чем больше плотность ОУМ, тем большее ускорение получает микросфера при движении в аЛГ-пучке. При достижении равновесия сил, приводящих частицу в движение, и сил трения и сопротивления жидкости, действующих на микросферу, она перестает двигаться равноускоренно, и начинает двигаться равномерно.

На рис. 3.42 показаны кадры вращения трех микрочастиц в фокусе асимметричного пучка ЛГ параметрами асимметрии $x_0 = 0{,}1w = -iy_0$ ($n = 3$). Средняя линейная скорость вращения частиц в пучке после установления равновесия всех сил равнялась $0{,}45 \pm 0{,}02$ мкм/с (рис. 3.42).

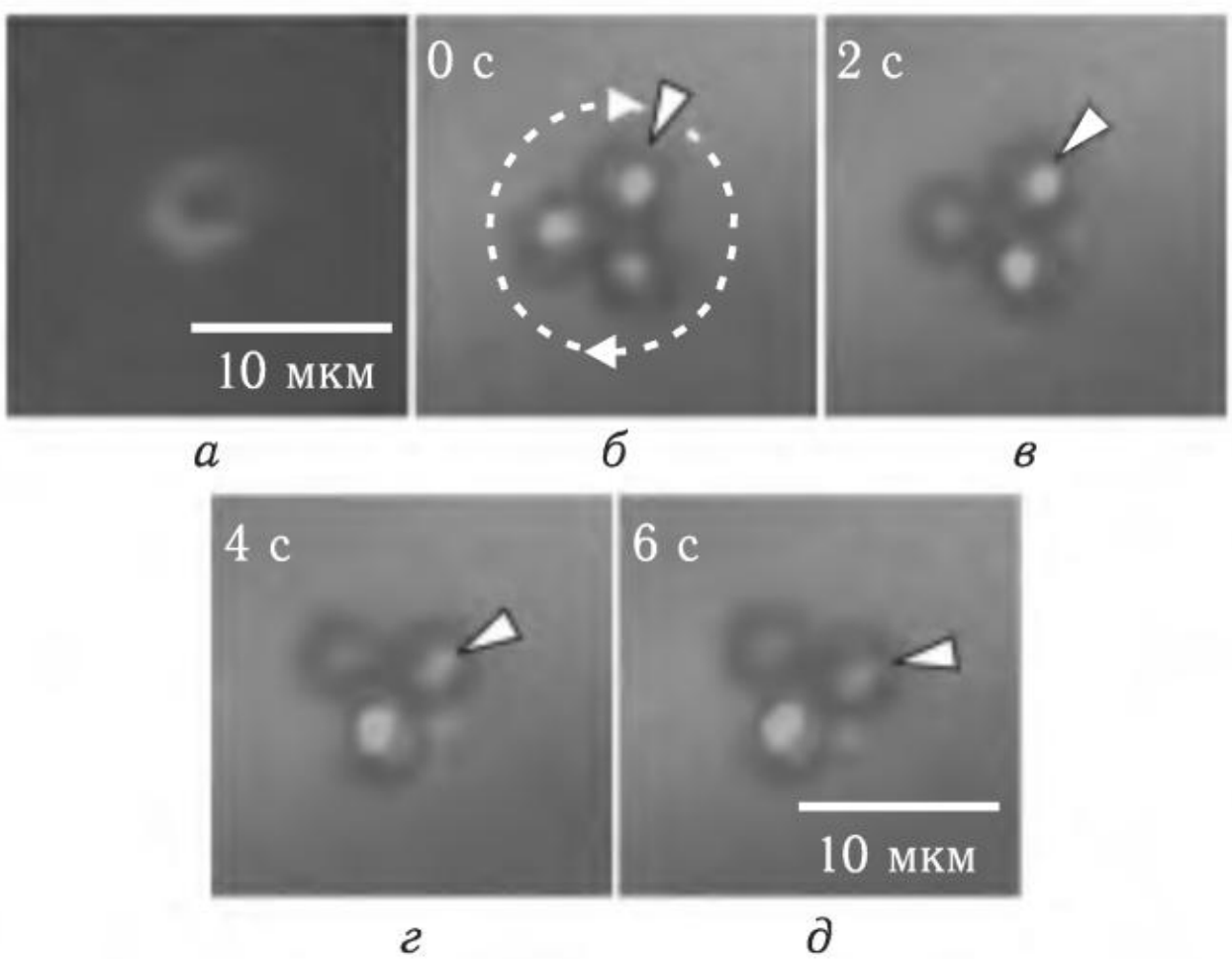


Рис. 3.42. Распределение интенсивности в области манипулирования (крайний левый кадр) и стадии движения трех микросфер полистирола, захваченных с помощью асимметричного пучка Бесселя с параметрами $n = 3$, $x_0 = 0{,}1w = -iy_0$

Типичные результаты экспериментов с использованием асимметричных пучков ЛГ с параметром $x_0 = 0{,}4w = -iy_0$ показаны на рис. 3.43. Как видно, неподвижная микросфера полистирола, попав в область

пучка, ускоряется и перемещается вдоль световой кривой, сформированной в плоскости захвата (средняя скорость перемещения равна $0{,}84 \pm 0{,}04$ мкм/с).

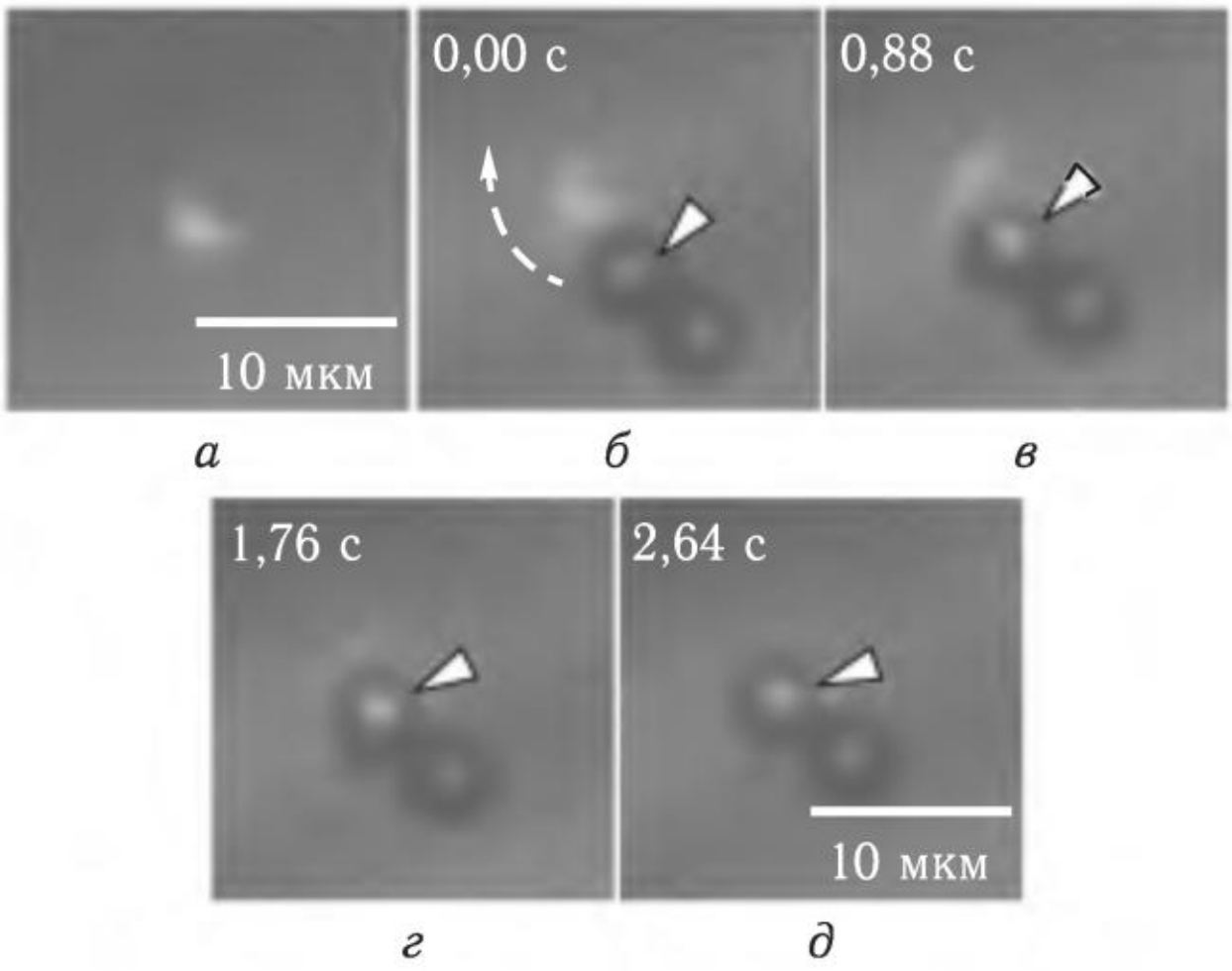


Рис. 3.43. Распределение интенсивности в области манипулирования (крайний левый кадр) и стадии движения микросферы полистирола, захваченной с помощью асимметричного пучка Бесселя с параметрами $n = 3$, $x_0 = 0{,}4w = -iy_0$

Следует отметить, что аЛГ-пучки формировались с помощью фазового модулятора SLM, от которого отражалась одинаковая часть энергии для пучков с разным параметром асимметрии a. Но только часть всей отраженной энергии попадала в область фокуса, где захватываются микросферы. Причем, чем больше асимметрия аЛГ-пучка, тем меньше энергии после модулятора попадает в область фокуса. Так, эффективность формирования аЛГ-пучка, представленного на рис. 3.43, в 1,8 раза меньше эффективности формирования пучка на рис. 3.42. И, тем не менее, скорость движения микросферы по более короткой траектории (рис. 3.43) почти в 2 раза больше, чем по длинной траектории (рис. 3.42).

В табл. 3.1 приведены рассчитанные значения отношения ОУМ пучков с различными параметрами $x_0/w = -iy_0/w$ к ОУМ пучка с параметром $x_0 = 0$ ($n = 3$).

Для экспериментального подтверждения наличия данной зависимости были проведены эксперименты с асимметричными пучками ЛГ с теми же параметрами. Мы вычисляли скорость и ускорение микросферы, которое она приобретала спустя некоторое время t после начала движения до того момента, пока движение частицы еще можно было рассматривать как равноускоренное. Во всех экспериментах время t было одинаковым. Таблица 3.2 показывает рост скорости, а табл. 3.3 — ускорения микросфер с ростом параметра асимметрии $a = x_0/w$.

Таблица 3.1

Рассчитанные по формулам отношения нормированных ОУМ асимметричных пучков ЛГ с параметрами $x_0/w = 0$, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 и 0,5 к ОУМ асимметричного пучка ЛГ с параметром $x_0 = 0{,}0$ ($n = 3$)

$x_0/w = -iy_0/w$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\dfrac{J_z/W\|_{x_0}}{J_z/W\|_{x_0=0}}$	1,00	1,03	1,10	1,19	1,31	1,43

Таблица 3.2

Экспериментально измеренные значения отношений величин скоростей движения полистироловых микросфер, захваченных с помощью асимметричных пучков ЛГ с одним и тем же топологическим зарядом $n = 3$, но с разными значениями параметра комплексного смешения $x_0/w = -iy_0/w$

$x_0/w = -iy_0/w$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\dfrac{v\|_{x_0}}{v\|_{x_0=0}}$	1,0	$1{,}2 \pm 0{,}2$	$1{,}3 \pm 0{,}2$	$1{,}4 \pm 0{,}2$	$1{,}8 \pm 0{,}3$	$1{,}9 \pm 0{,}3$

Таблица 3.3

Экспериментально измеренные значения отношений величин ускорения полистироловых микросфер, захваченных с помощью асимметричных пучков ЛГ с одним и тем же топологическим зарядом $n = 3$, но с разными значениями параметра комплексного смешения $x_0/w = -iy_0/w$

$x_0/w = -iy_0/w$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\dfrac{a\|_{x_0}}{a\|_{x_0=0}}$	1,0	$1{,}2 \pm 0{,}3$	$1{,}3 \pm 0{,}3$	$1{,}3 \pm 0{,}3$	$1{,}4 \pm 0{,}3$	$1{,}6 \pm 0{,}3$

Заметим, что интенсивность на световом полумесяце не постоянна (рис.3.41 *б*), поэтому на частицу действует градиентная сила, которая приводит сначала к ускорению при движении до точки с максимальной интенсивностью и к замедлению после ее прохождения. В силу симметрии интенсивности относительно центра полумесяца ускорение и замедление компенсируют друг друга, поэтому градиентная сила не учитывалась при анализе экспериментальных результатов.

Таким образом, экспериментально показано, что скорости движения микрочастиц, захваченных в асимметричных пучках ЛГ возрастают с ростом параметра симметрии при сохранении топологического заряда. Результаты расчета (табл. 3.1) и эксперимента (табл. 3.2 и 3.3) согласуются.

В этом разделе рассмотрено обобщение [187, 188] хорошо известных лазерных мод Лагерра–Гаусса. Ассиметричные пучки Лагерра–Гаусса не обладают модовыми свойствами и имеют асимметричное распределение интенсивности в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. При распространении асимметричного пучка ЛГ в однородном пространстве уменьшается асимметрия первого светового кольца и световая энергия перераспределяется в периферийные кольца. Число световых колец совпадает с числом колец стандартной (симметричной) моды ЛГ. Аналитически рассчитана мощность асимметричных пучков ЛГ и проекция их ОУМ на оптическую ось. Установлено, что нормированный ОУМ (ОУМ на фотон) квадратично возрастает с ростом параметра асимметрии, который равен отношению величины смещения по декартовой координате к радиусу перетяжки Гауссова пучка. Получены условия, при которых нормированный ОУМ совпадает с топологическим зарядом (как у обычных мод Лагерра–Гаусса).

В качестве частного случая рассмотрены аЛГ-пучки с нулевым радиальным индексом, обладающие поперечным сечением интенсивности в форме полумесяца. Получено выражение для координат максимума интенсивности и показано вращение полумесяца при распространении в пространстве. Пучок аЛГ с нулевым радиальным индексом был сформирован с помощью жидкокристаллического пространственного модулятора света. Экспериментально продемонстрировано вращение дифракционной картины интенсивности в сечении пучка (полумесяца) при его распространении. Показана возможность формирования несоосных суперпозиций аЛГ-пучков с распределением интенсивности, близком к Гауссову, вращающихся при распространении в пространстве как единое целое. Асимметричные пучки ЛГ в виде полумесяца можно использовать для оптического захвата и перемещения биологических объектов (клеток) [185], так как клетка меньше подвергается тепловому воздействию, чем при захвате в симметричном Гауссовом пучке. Также аЛГ-пучки будут полезны в системах квантовой коммуникации для формирования перепутанных по орбитальному моменту фотонов, так как ОУМ аЛГ-пучков может быть не только целым, но и дробным, а дробный ОУМ соответствует фотону в перепутанном состоянии [186].

3.6. Асимметричный гауссов оптический вихрь

В [186] А. Зейлингер преложил формировать перепутанные по орбитальному угловому моменту фотоны с помощью смещения центра перетяжки гауссова пучка, падающего на голограмму «с вилочкой» [97], которая формирует оптический вихрь, от центра этой голограммы. Он предположил, что в этом случае после голограммы распространяется суперпозиция гауссова пучка и пучка Лагерра–Гаусса первого порядка. У такой суперпозиции ОУМ будет дробный, т. е. фотоны будут находиться в перепутанном состоянии.

При смещении центров падающего гауссова пучка и спиральной фазовой пластинки (или голограммы с «вилокой») формируется пучок с распределением интенсивности в виде полумесяца. Такого же вида пучки формируются, если у обычных пучков Бесселя и Лагерра–Гаусса осуществить комплекснозначный сдвиг по обеим декартовым координатам. Такие пучки называются асимметричные пучки Бесселя [87, 88, 123, 124] и асимметричные пучки Лагерра–Гаусса [187, 188].

В этом разделе мы получим аналитические выражения для комплексно амплитуды лазерного пучка, прошедшего СФП, если падающий на нее гауссов пучок смещен с оптическо оси. Получим также ОУМ такого асимметричного гауссова оптического вихря (АГВ).

3.6.1. Амплитуда асимметричного гауссова оптического вихря. Рассмотрим гауссов пучок с амплитудой в перетяжке в виде

$$E_0(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right), \tag{3.193}$$

где w — радиус перетяжки. Пусть в пучок (3.193) внедрен оптический вихрь с топологическим зарядом n, смещенный на расстояние x_0 по оси x от центра гауссова пучка. Амплитуда такого оптического вихря описывается выражением:

$$A_n(x,y) = \left[\frac{(x-x_0)+iy}{w}\right]^n. \tag{3.194}$$

Тогда с помощью преобразования Френеля можно получить амплитуду такого асимметричного гауссова вихря на расстоянии z от начальной плоскости (плоскости перетяжки гауссова пучка) в цилиндрических координатах:

$$E_n(r,\varphi,z) = w^{-n}\left[q(z)\right]^{-(n+1)}\left(re^{i\varphi}-q(z)x_0\right)^n \times \\ \times \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}+\frac{ikr^2}{2R(z)}\right], \tag{3.195}$$

где $z_0 = kw^2/2$ — длина Френеля, k — волновое число света,

$$w^2(z) = w^2\left(1+\frac{z^2}{z_0^2}\right), \quad R(z) = z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right), \quad q(z) = 1+\frac{iz}{z_0}. \tag{3.196}$$

Из (3.195) видно, что амплитуда АГВ описывается двумя сомножителями, последний из сомножителей в (3.195) представляет собой радиально-симметричный гауссов пучок на расстоянии z от перетяжки с радиусом пучка $w(z)$ и радиусом кривизны волнового фронта $R(z)$. А сомножитель в (3.195), отвечающий за асимметрию пучка, выпишем отдельно:

$$F = \left(re^{i\varphi}-q(z)x_0\right)^n = \left[(r\cos\varphi - x_0) + i\left(r\sin\varphi - \frac{zx_0}{z_0}\right)\right]^n. \tag{3.197}$$

Распределение интенсивности поля (3.195) будет пропорционально модулю квадрату величины (3.197) и будет иметь вид:

$$I = |E_n(r,\varphi,z)|^2 = w^{-2n}\,|q(z)|^{-2(n+1)} \times$$
$$\times \left[r^2 + |q(z)|^2 x_0^2 - 2rx_0\left(\cos\varphi + \frac{z}{z_0}\sin\varphi\right)\right]^n \exp\left[-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right]. \quad (3.198)$$

Из (3.198) видно, что при $z = 0$ сомножитель (3.197) имеет вид

$$|F|^2 = \left[r^2 + x_0^2 - 2rx_0\cos\varphi\right]^n. \quad (3.199)$$

Выражение (3.199) вместе с гауссовой экспонентой из (3.198) описывает неоднородное кольцо в виде полумесяца в центре которого в точке $x = x_0$ имеется изолированный ноль интенсивности n-го порядка. Полумесяц расположен так, что максимальная интенсивность на нем (при фиксированном радиусе r) достигается при $\varphi = \pi$, а минимальная — при $\varphi = 0$. На расстоянии от перетяжки, равном длине Френеля $z = z_0$ вместо (3.199) получим для сомножителя (3.197), отвечающего за асимметрию пучка:

$$|F|^2 = \left[r^2 + 2x_0^2 - 2\sqrt{2}\,rx_0\cos(\varphi - \pi/4)\right]^n. \quad (3.200)$$

Из (3.200) следует, что на расстоянии $z = z_0$ полумесяц повернулся на 45 градусов против часовой стрелки. Максимум интенсивности на полумесяце лежит на луче под углом $\varphi = 5\pi/4$, а минимум на луче под углом $\varphi = \pi/4$. При удалении на большое расстояние $z \gg z_0$ от перетяжки вместо (3.200) получим:

$$|F|^2 = \left[r^2 + \left(\frac{zx_0}{z_0}\right)^2 - 2\frac{zx_0}{z_0}r\sin\varphi\right]^n. \quad (3.201)$$

Из (3.201) видно, что в дальней зоне дифракции полумесяц поворачивается на 90 градусов против часовой стрелки, и максимум интенсивности лежит на луче при $\varphi = -\pi/4$, а минимум интенсивности - на луче при $\varphi = \pi/4$.

Из (3.197) прямо следует, что изолированный ноль интенсивности АГВ имеет координаты:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = x_0\dfrac{z}{z_0}. \end{cases} \quad (3.202)$$

То есть, изолированный ноль, лежащий в начальной плоскости на горизонтальной оси в точке $x = x_0$ при увеличении расстояния z движется перпендикулярно горизонтальной оси на бесконечность.

3.6.2. Дробный орбитальный угловой момент АГВ. В [186] экспериментально было показано, что смещение центра гауссова пучка относительно центра оптического вихря, приводило к формированию перепутанных по орбитальному угловому моменту фотонов. То есть было показано, что у АГВ должен быть дробный ОУМ. Покажем, что

это действительно так. Так как ОУМ сохраняется при распространении лазерного пучка, то можно рассчитывать его в любой плоскости, например, в плоскости перетяжки. Можно показать, что энергия W АГВ (3.195) и проекция ОУМ J_z на ось z будут равны:

$$W = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} |E_n(r, \varphi, z = 0)|^2 \, r \, dr \, d\varphi = \\ = \left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \left(\frac{x_0}{w}\right)^{2n} \sum_{l=0}^{n} \left(C_n^l\right)^2 l! \left(\frac{w}{\sqrt{2}\, x_0}\right)^l, \quad (3.203)$$

$$J_z = -i \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \overline{E}_n \frac{\partial E_n}{\partial \varphi} r \, dr \, d\varphi = \\ = n \left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \left(\frac{x_0}{w}\right)^{2n} \sum_{l=0}^{n} C_n^{n-l} C_{n-1}^{n-l} l! \left(\frac{w}{\sqrt{2}\, x_0}\right)^{2l}, \quad (3.204)$$

где $C_n^l = n!/[l!\,(n-l)!]$ — биномиальные коэффициенты. Из (3.203), (3.204) следует, что нормированный ОУМ асимметричного гауссова вихря (3.195) будет равен:

$$\frac{J_z}{W} = n \, \frac{\sum\limits_{l=0}^{n} C_n^{n-l} C_{n-1}^{n-l} l! \xi^{2l}}{\sum\limits_{l=0}^{n} \left(C_n^l\right)^2 l! \xi^{2l}}, \quad \xi = \frac{w}{\sqrt{2}\, x_0}. \quad (3.205)$$

Из (3.205) видно, что нормированный ОУМ АГВ в общем случае дробный. При $x_0 = 0$ из (3.205) следует хорошо известный результат, что ОУМ моды Лагерра–Гаусса [9] равен топологическому заряду n:

$$\frac{J_z}{W} = n. \quad (3.206)$$

Из (3.205) найдем более простые выражения для $n = 1$ и $n = 2$, из которых можно сделать конкретные выводы о поведении ОУМ АГВ. Например, при $n = 1$ из (3.205) получим:

$$\frac{J_{1z}}{W} = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{2}\, x_0/w\right)^2}. \quad (3.207)$$

Это выражение совпадает с ранее полученным в [110]. Из (3.207) следует, что при отсутствии смещения $x_0 = 0$ ОУМ равен 1, при смещении центра оптического вихря от центра гауссова пучка на расстояние $x_0 = w/\sqrt{2}$ ОУМ пучка будет равен 1/2, а при большом смещении

$x_0 \to \infty$ ОУМ стремится к нулю. Физически это понятно, так как оптический вихрь при достаточном удалении уже не принадлежит

гауссовому пучку, а находится в области пространства, где нет световой энергии. При $n = 2$ из (3.205) получим:

$$\frac{J_{2z}}{W} = 2\frac{\xi^2 + \xi^4}{1/2 + 2\xi^2 + \xi^4}. \tag{3.208}$$

Из (16) следует, что при отсутствии смещения $x_0 = 0$ ($\xi \to \infty$) ОУМ равен 2, при $x_0 = w/\sqrt{2}$ ОУМ равен 8/7, а при а при большом смещении $x_0 \to \infty$ ($\xi = 0$) ОУМ равен нулю.

Выше мы рассмотрели асимметричные гауссовы оптические вихри, которые экспериментально можно реализовать при дифракции гауссова пучка на амплитудной голограмме с характерной «вилочкой» в точке сингулярности [97]. Такая ситуация будет описываться уравнениями (3.193)–(3.195). Однако амплитудная голограмма с «вилочками» имеет невысокую эффективность (несколько процентов). Для увеличения эффективности при формировании АГВ ниже будет использована другая оптическая схема, когда гауссов пучок падает на спиральную фазовую пластинку, реализованную с помощью жидкокристаллического микродисплея. Такую экспериментальную схему также можно описать аналитически, хотя формулы получаются более громоздкие.

3.6.3. Дифракция гауссова пучка на смещенной спиральной фазовой пластинке. Рассмотрим падение гауссова пучка (3.193) на СФП с номером n, центр которой смещен от центра гауссова пучка на величину x_0 и пропускание которой описывается выражением:

$$B_n(x, y) = \exp(in \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x - x_0}\right)) = \frac{[(x - x_0) + iy]^n}{\left[(x - x_0)^2 + y^2\right]^{n/2}}. \tag{3.209}$$

На расстоянии z от СФП амплитуду светового поля АГВ можно записать с помощью преобразования Френеля:

$$E_n(x', y', z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left(ik\frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y) B_n(x, y) \times$$
$$\times \exp\left(ik\frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \exp\left(-ik\frac{xx' + yy'}{z}\right) dx\, dy\,. \tag{3.210}$$

Интегралы в (3.210) можно вычислить с помощью справочного интеграла [65]

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pr^2} J_n(cr)\, r\, dr = \frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{2}\, p} \exp(-t) \left[I_{(n-1)/2}(t) - I_{(n+1)/2}(t)\right], \tag{3.211}$$

где $t = c^2/(8p)$, а $J_n(x)$ и $I_n(x)$ — функция Бесселя и модернизированная функция Бесселя n-го порядка.

Тогда вместо (П2) получим:

$$E_n(x', y', z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\, q(z)} \exp\left(-\left(\frac{x_0}{w}\right)^2 + ik\frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right)\left(\frac{iA - B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^n \times$$
$$\times \sqrt{t}\, e^{-t}\left[I_{(n-1)/2}(t) - I_{(n+1)/2}(t)\right], \quad (3.212)$$

где

$$A = -\frac{kx'}{z} + \frac{2ix_0}{w^2}, \quad B = -\frac{ky'}{z}, \quad q(z) = 1 + \frac{iz}{z_0},$$
$$t = \frac{\mathrm{Re} + i\,\mathrm{Im}}{2\,|q(z)|^2}, \quad \mathrm{Re} = \frac{x'^2 + y'^2}{w^2} - \left(\frac{x_0 z}{w z_0}\right)^2 - 2\left(\frac{x_0 x'}{w^2}\right), \quad (3.213)$$
$$\mathrm{Im} = \left(\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right)\left(\frac{z_0}{z}\right) - \left(\frac{x_0}{w}\right)^2\left(\frac{z}{z_0}\right) + \left(\frac{x_0 x}{w^2}\right)\left(\frac{z}{z_0}\right).$$

Сомножитель в степени n в (3.212) фазовый, и на интенсивность не влияет (его модуль равен 1). Аргумент t в функции Бесселя в (3.212) комплексный, и поэтому трудно сделать определенные выводы об амплитуде АГВ. Из (3.212) только видно, что аргумент t зависит от переменной x' и от величины смещения x_0. Это означает, что вид амплитуды (3.212) будет асимметричный, и степень асимметрии будет пропорциональна смещению x_0. Также видно, что при отсутствии смещения $x_0 = 0$ вид амплитуды совпадает с точностью до постоянной с радиально симметричным гауссовым оптическим вихрем [189]:

$$E_n(r, \varphi, z) = \frac{\sqrt{\pi}\,(-i)^n}{\sqrt{2}\, q(z)} \exp\left(in\varphi + \frac{ikr^2}{2z}\right)\sqrt{t'}\, e^{-t'} \times$$
$$\times \left[I_{(n-1)/2}(t') - I_{(n+1)/2}(t')\right], \quad (3.214)$$

где

$$t' = \frac{(r/w)^2\,(1 + iz_0/z)}{2\,|q(z)|^2}.$$

Так как в эксперименте (следующий параграф) измерение распределения интенсивности АГВ происходит в фокальной плоскости линзы, то для сравнения с экспериментом получим вместо (3.212) выражение для амплитуды АГВ в дальней зоне дифракции ($z \gg z_0$). Из (3.213) получим вначале выражение для аргумента t при $z \gg z_0$:

$$t' = \left(\frac{krw}{2\sqrt{2}\, f}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{\sqrt{2}\, w}\right)^2, \quad (3.215)$$

где f — фокусное расстояние сферической линзы. Из (3.215) видно, что аргумент функций Бесселя и гауссовой экспоненты в (3.213) не зависит от полярного угла φ. Поэтому за асимметрию распределения интенсивности в фокусе сферической линзы отвечает только сомножитель (3.213), аналогичный сомножителю F в (3.197) и равный

$$F' = \left[\frac{iA - B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right]^n = \left[\frac{ky/f - 2x_0/w^2 - i(kx/f)}{\sqrt{(kx/f - i2x_0/w^2)^2 + (ky/f)^2}}\right]^n. \quad (3.216)$$

Из (3.216) видно, что сомножитель зависит от переменных x и y не симметрично, и поэтому в интенсивности должна появиться зависимость от полярного угла. Действительно, интенсивность поля (3.213) будет пропорциональна модулю квадрата сомножителя F'

$$I_F = |F'|^2 = \left[\frac{\left(\frac{4x_0^2}{w^4} + \frac{k^2 r^2}{f^2} \right) - \frac{4kx_0 r \sin\varphi}{fw^2}}{\sqrt{\left(\frac{k^2 r^2}{f^2} - \frac{4x_0^2}{w^4} \right)^2 + \left(\frac{4kx_0 r}{fw^2} \right)^2 \cos^2\varphi}} \right]^n . \qquad (3.217)$$

Из (3.217) видно, минимум числителя (при постоянном r) достигается при $\varphi = \pi/2$, а максимум при $\varphi = -\pi/2$. Это означает, что картина дифракции в виде полумесяца повернулась на 90 градусов против часовой стрелки при распространении АГВ от плоскости СФП до фокальной плоскости (так как в перетяжке ноль интенсивности находился на горизонтальной оси в точке $x = x_0$). При этом координаты изолированного нуля интенсивности в фокальной плоскости равны:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = x_0 \dfrac{f}{z_0} . \end{cases} \qquad (3.218)$$

Координаты на оси y нуля интенсивности в (3.202) и (3.218) совпадают, если заменить z на f. Также совпадают выражения (3.201) и числитель в (3.217), если опять заменить z на f и умножить числитель (3.217) на $(f/k)^2$. Таким образом, мы показали, что качественно поведение АГВ совпадает при дифракции гауссова пучка на смещенной СФП (3.209) и амплитудной голограмме с «вилочкой» (3.194).

3.6.4. Экспериментальное формирование АГВ. На рис. 3.44 показана экспериментальная схема. Излучение из твердотельного лазера с длиной волны 532 нм направлялось через пинхол PH и линзу L_1 на дисплей пространственного модулятора света SLM, на котором была выведена фазовая функция СФП заданного порядка. Отраженный от модулятора пучок подвергался пространственной фильтрации с помощью системы линз L_2 и L_3, а также диафрагмы D. Далее отфильтрованный лазерный пучок направлялся на линзу L_4, которая фокусировала его на матрицу CMOS-камеры. Для получения интерферограмм в схему были добавлены светоделительные кубики BS_1 и BS_2. Первый из них делил исходный пучок на два, один из которых направлялся на модулятор света, а второй оставался неизменным. Далее эти два пучка сводились в один с помощью второго светоделительного кубика, чтобы на камере можно было наблюдать картину их интерференции. Линза L_5 была использована для внесения в Гауссов пучок сферического волнового фронта. Диаметр перетяжки Гауссова пучка $\omega = 1400$ мкм, длина волны $\lambda = 532$ нм.

В экспериментах исследовалось влияние смещения центра освещающего Гауссова пучка относительно центра спиральной фазовой

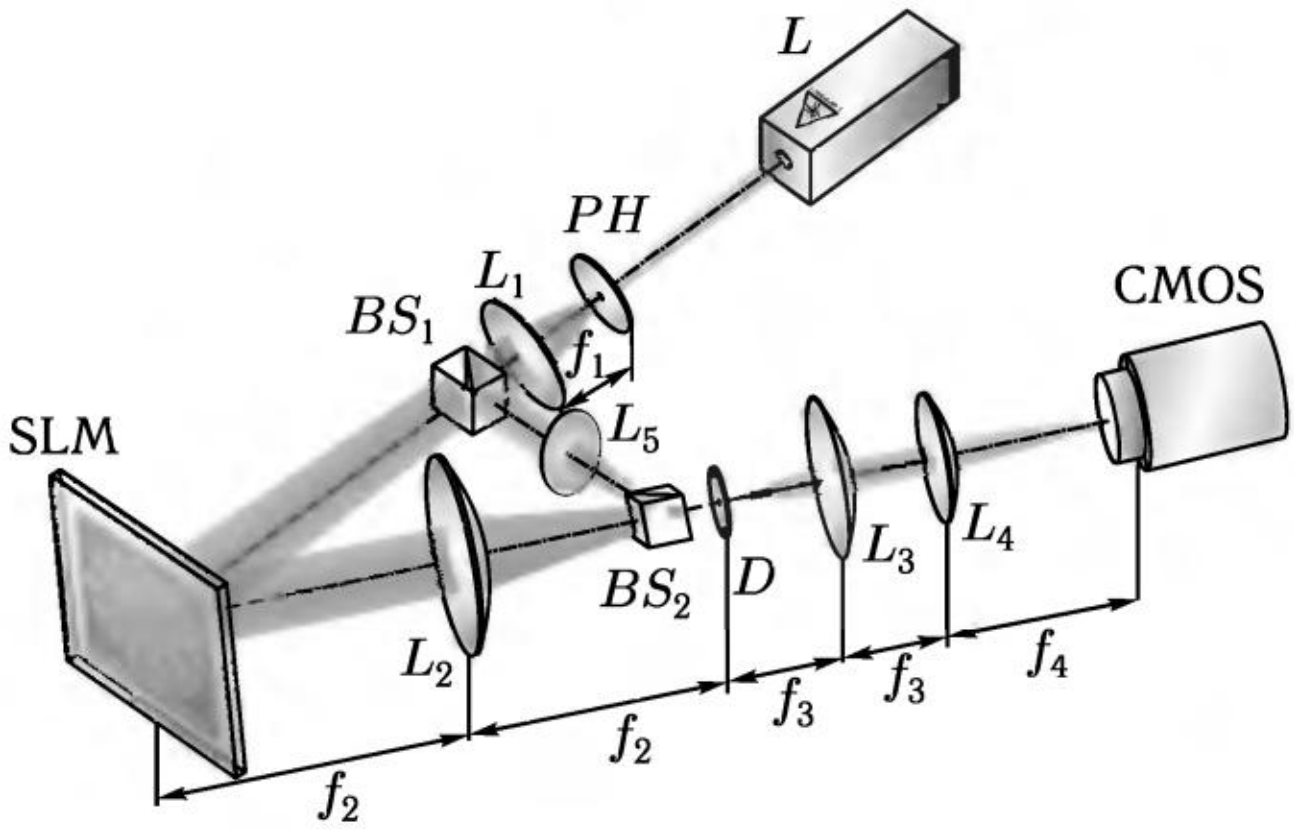


Рис. 3.44. Экспериментальная схема: L — твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH — пинхолл (40 мкм), L_1, L_2, L_3, L_4 и L_5 — линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 150$ мм, $f_2 = 350$ мм, $f_3 = 150$ мм, $f_4 = 250$ мм, $f_5 = 150$ мм), BS_1, BS_2 — светоделительные кубики, SLM — пространственный модулятор света PLUTO VIS (разрешение 1920×1080 пикселов, размер пикселя 8 мкм), D — диафрагма, выполняющая роль пространственного фильтра, CMOS — видеокамера ToupTek U3CMOS08500KPA (размер пикселя 1,67 мкм)

пластинки (СФП), выведенной на дисплей модулятора света. На рис. 3.45, 3.46 показаны сформированные в этих случаях распределения интенсивности в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $f = 250$ мм. Также показаны соответствующие им интерферограммы, полученные в результате интерференции исследуемых пучков и гауссова пучка со сферическим волновым фронтом.

На рис. 3.45 показаны распределения интенсивности (*а–г*) и соответственные им интерферограммы (*д–з*) для оптических гауссовых вихрей с топологическими зарядами n от 1 до 4 при отсутствии смещения между центрами СПФ и Гауссова пучка. Из рис. 3.45 видно, что картины оптических вихрей обладают радиальной симметрией, т. е. сформированы хорошо известные картины типа «пончиков» с нулем интенсивности в центре.

На рис. 3.46 показаны распределения интенсивности гауссовых оптических вихрей с топологическими зарядами n от 1 до 4 при большом смещении центра СФП от центра Гауссова пучка ($x_0 = 0{,}25w$). Из рис. 3.46 видно, что вместо «пончиков» появились «полумесяцы».

В этом разделе теоретически и экспериментально изучены асимметричные гауссовы оптические вихри, которые формируются при дифракции гауссова пучка на смещенной с оптической оси спиральной фазовой пластинки или амплитудной голограммы «с вилочкой». Показано, что в зависимости от величины смещения лазерный пучок имеет вид полумесяца, который при распространении вращается. Получено аналитическое выражение для орбитального углового момента такого пучка, который оказывается дробным. Причем при увеличении смещения

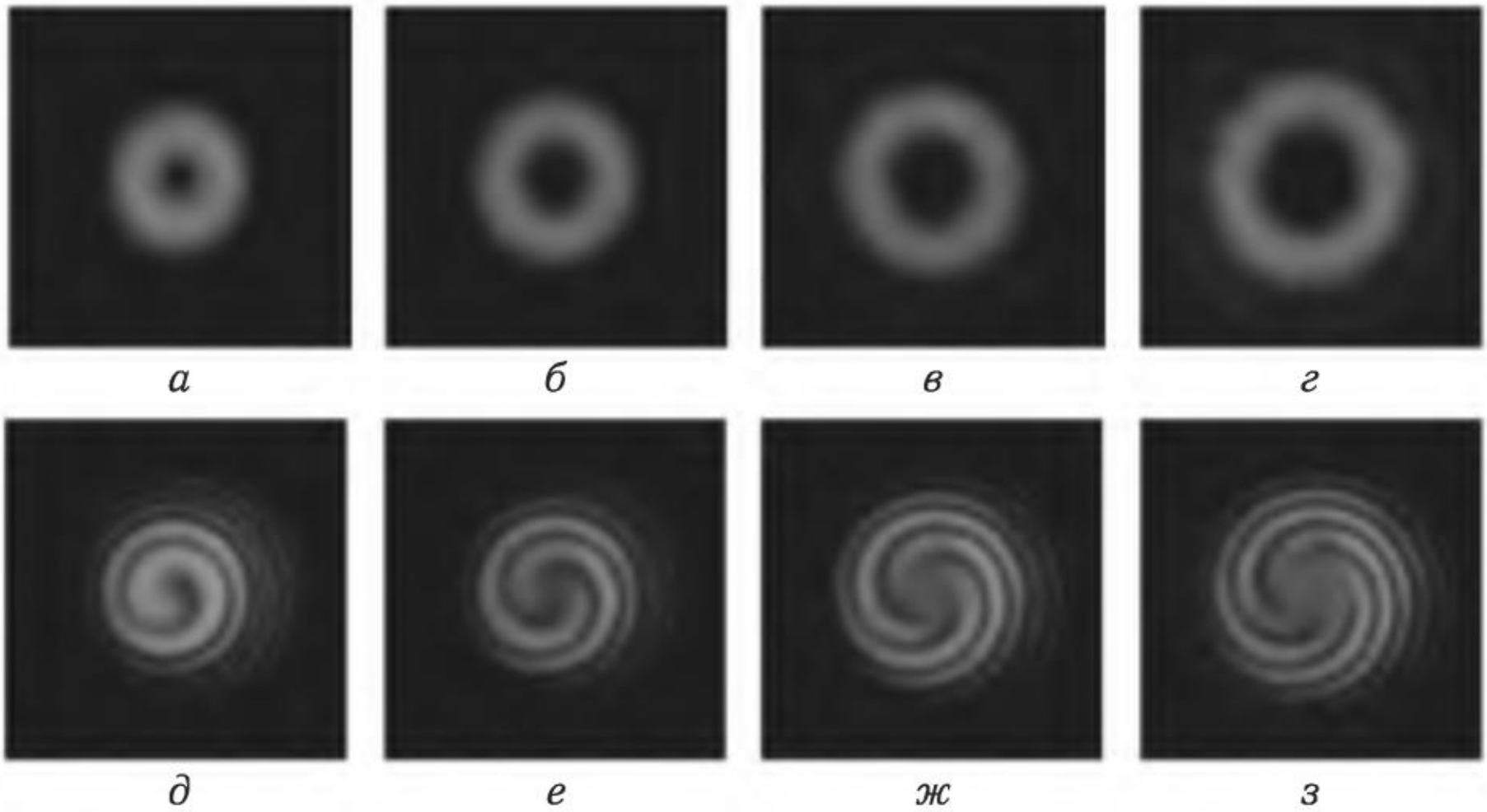


Рис. 3.45. Центр падающего пучка и центр СФП совпадают ($x_0 = 0$). Верхний ряд — полученные распределения интенсивности для СФП с топологическим зарядом: $n = 1$ (*а*), $n = 2$ (*б*), $n = 3$ (*в*), $n = 4$ (*г*). Нижний ряд — полученные интерферограммы для СФП с топологическим зарядом: $n = 1$ (*д*), $n = 2$ (*е*), $n = 3$ (*ж*), $n = 4$ (*з*). Размеры картинок 1200×1200 мкм

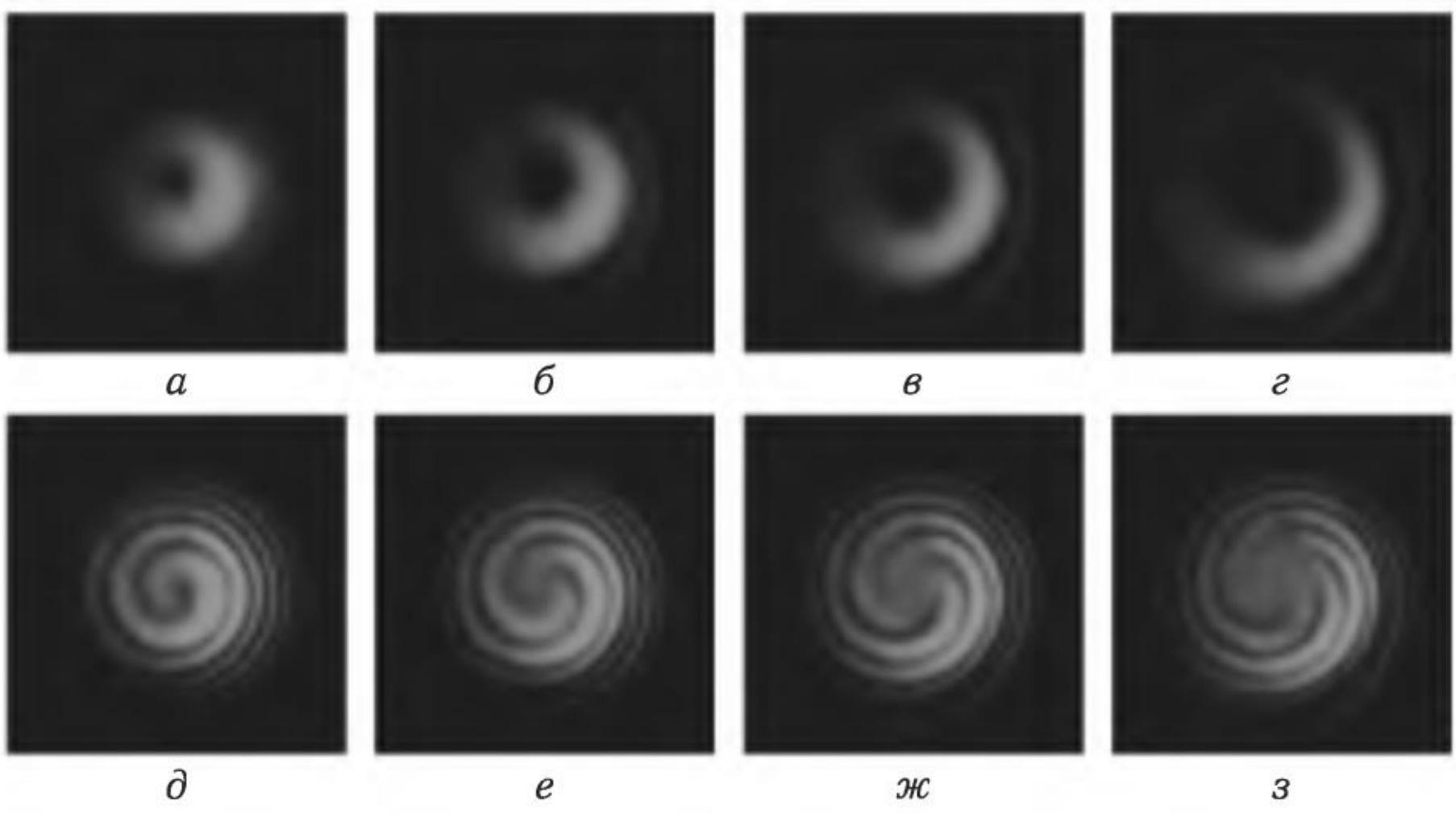


Рис. 3.46. Смещение центра падающего пучка от центра СФП составляет $x_0 = 0{,}250w$. Верхний ряд — полученные распределения интенсивности для СФП с топологическим зарядом: $n = 1$ (*а*), $n = 2$ (*б*), $n = 3$ (*в*), $n = 4$ (*г*). Нижний ряд — полученные интерферограммы для СФП с топологическим зарядом: $n = 1$ (*д*), $n = 2$ (*е*), $n = 3$ (*ж*), $n = 4$ (*з*). Размеры картинок 1200 на 1200 мкм

момент убывает тем быстрее, чем больше номер спиральности фазовой пластинки или голограммы «с вилочкой». Результаты эксперимента качественно согласуются с теорией и численным моделированием.

Глава 4

ФОКУСИРОВКА ВИХРЕВЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ

4.1. Пучки Пирси с автофокусировкой

Явление дифракции является одним из проявлений волновой природы света. Когда световой пучок распространяется вдоль оптической оси от начальной плоскости к плоскости наблюдения (обе плоскости параллельны друг другу и перпендикулярны оптической оси), световые поля, исходящие от разных участков начальной плоскости, интерферируют друг с другом, и в плоскости наблюдения возникает дифракционная картина, распределение интенсивности в которой в общем случае отличается от распределения в начальной плоскости. Распространение светового пучка в однородной среде описывается уравнением Гельмгольца и его параксиальным приближением — уравнением типа Шредингера. Несмотря на дифракцию, у этих уравнений существуют решения, описывающие световые поля, которые свободны от этого явления. В первую очередь это давно известные традиционные и недавно открытые асимметричные пучки Бесселя [1, 78, 88], Матье [4] и Эйри [18]. Пучки Бесселя распространяются без дифракции в трехмерном пространстве, а пучки Эйри — в двумерном. Также не обладают дифракцией плоские волны, так как распределение интенсивности у них не меняется при распространении от одной плоскости к другой. В трехмерном случае не обладает дифракцией любое световое поле, угловой спектр плоских волн которого отличен от нуля на бесконечно тонком кольце [1]. Наряду с пучками Бесселя и Эйри, интерес представляют параксиальные структурно-устойчивые пучки, инвариантные к распространению. Такие пучки не являются бездифракционными, но при распространении структура их распределения интенсивности в поперечной плоскости не меняется, меняется только масштаб. Наиболее известными такими пучками являются пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса [2],, гипергеометрические моды [6]. В недавней работе [8] рассмотрены пучки Пирси, как трехмерные аналоги пучков Эйри. Распределение комплексных амплитуд таких пучков описывается функцией Пирси [190, 191], определяемой как интеграл от комплексной экспоненты, аргумент которой является полиномом (подобно функции Эйри). Угловой спектр таких пучков представляет собой параболу с фазовой модуляцией. Эти пучки обладают свойством автофокусировки и восстанавливаются после искажения препятствиями. В недавней работе [192] предложен виртуальный источник, формирующий пучок Пирси.

В данном разделее проводится обобщение функции Пирси и рассматриваются структурно-устойчивые половинные пучки Пирси (ПП-пучки). Обычные пучки Пирси [8] являются суммой двух ПП-пучков первого порядка. Угловой спектр ПП-пучков представляет собой не параболу (как у пучков Пирси из [8]), а только одну ее половину. Также рассматриваются двумерные аналоги пучков Пирси, обладающие ускоряющейся (искривленной) траекторией.

4.1.1. Трехмерные половинные пучки Пирси. Комплексная амплитуда параксиальных световых пучков Пирси [8] в начальной плоскости имеет вид:

$$E\left(x, y, z=0\right) = \mathrm{Pe}\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[is^4 + is^2\left(\frac{y}{y_0}\right) + is\left(\frac{x}{x_0}\right)\right] ds. \tag{4.1}$$

В [8] показано, что при распространении структура пучка не меняется, происходит лишь сдвиг центра пучка вдоль одной декартовой координаты и масштабирование по обеим декартовым координатам, причем масштаб по осям x и yразный:

$$E\left(x, y, z\right) = \frac{1}{\left(1 - z/z_e\right)^{1/4}} \mathrm{Pe}\left(\frac{x}{x_0\left(1 - z/z_e\right)^{1/4}}, \frac{y - y_0 z/(2kx_0^2)}{y_0\left(1 - z/z_e\right)^{1/2}}\right), \tag{4.2}$$

где $z_e = 2ky_0^2$.

При $z = z_e$ комплексная амплитуда имеет вид:

$$E\left(x, y, z_e\right) = \sqrt{\frac{i\pi}{y/y_0 - \left(y_0/x_0\right)^2}} \exp\left[\frac{-iy_0x^2}{4\left(x_0^2y_0 - y_0^3\right)}\right]. \tag{4.3}$$

В конце работы [8] приводится обобщение пучков (4.1) в виде пучков с комплексной амплитудой в начальной плоскости, описываемой функцией

$$U\left(x, y\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\left(s^{2n} + ys^n + xs^m\right)\right] ds, \tag{4.4}$$

причем при $n = 2m$ такие пучки являются структурно-устойчивыми. Числа n и m должны быть целыми. Требование целочисленности следует из того, что интеграл в (3) берется по всей числовой оси, поэтому при дробных значениях n и m в интервале $s < 0$ экспонента может стать вещественной и устремиться к бесконечности при $s \to -\infty$.

Вывод выражения (4.2) из (4.1) осуществляется с помощью преобразования Френеля, при вычислении которого используется замена переменной интегрирования, причем пределы интегрирования не меняются, так как они бесконечны. Однако заменив один из пределов на ноль, при замене переменных пределы также не поменяются, поэтому наряду с (4.1) и (4.4) можно рассмотреть половинный пучок Пирси v-го порядка, который также не меняет свою структуру при распро-

странении и который в начальной плоскости имеет комплексную амплитуду:

$$E\left(x, y, z=0\right) = \mathrm{HPe}_v\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left[is^{4v} + is^{2v}\,\frac{y}{y_0} + is^{v}\,\frac{x}{x_0}\right] ds. \tag{4.5}$$

В произвольной плоскости комплексная амплитуда такого пучка примет вид:

$$E\left(x, y, z\right) = \frac{1}{\left(1 - z/z_e\right)^{1/(4v)}}\,\mathrm{HPe}_v\left(\frac{x}{x_0\left(1 - z/z_e\right)^{1/4}}, \frac{y - y_0 z/(2kx_0^2)}{y_0\left(1 - z/z_e\right)^{1/2}}\right). \tag{4.6}$$

Заметим, что в отличие от (4.4) в (4.5) уже не требуется целочисленности параметра v, так как интеграл берется только по положительным значениям переменной интегрирования s.

Дифракционная картина пучков (4.6) в поперечной плоскости имеет вид наклонных световых линий, дифракционной толщины (рис. 4.1 *а*). Функция $\mathrm{HPe}_v(x/x_0, y/y_0)$ была рассчитана тем же способом, что и в работе [8], т. е. использовался поворот контура интегрирования

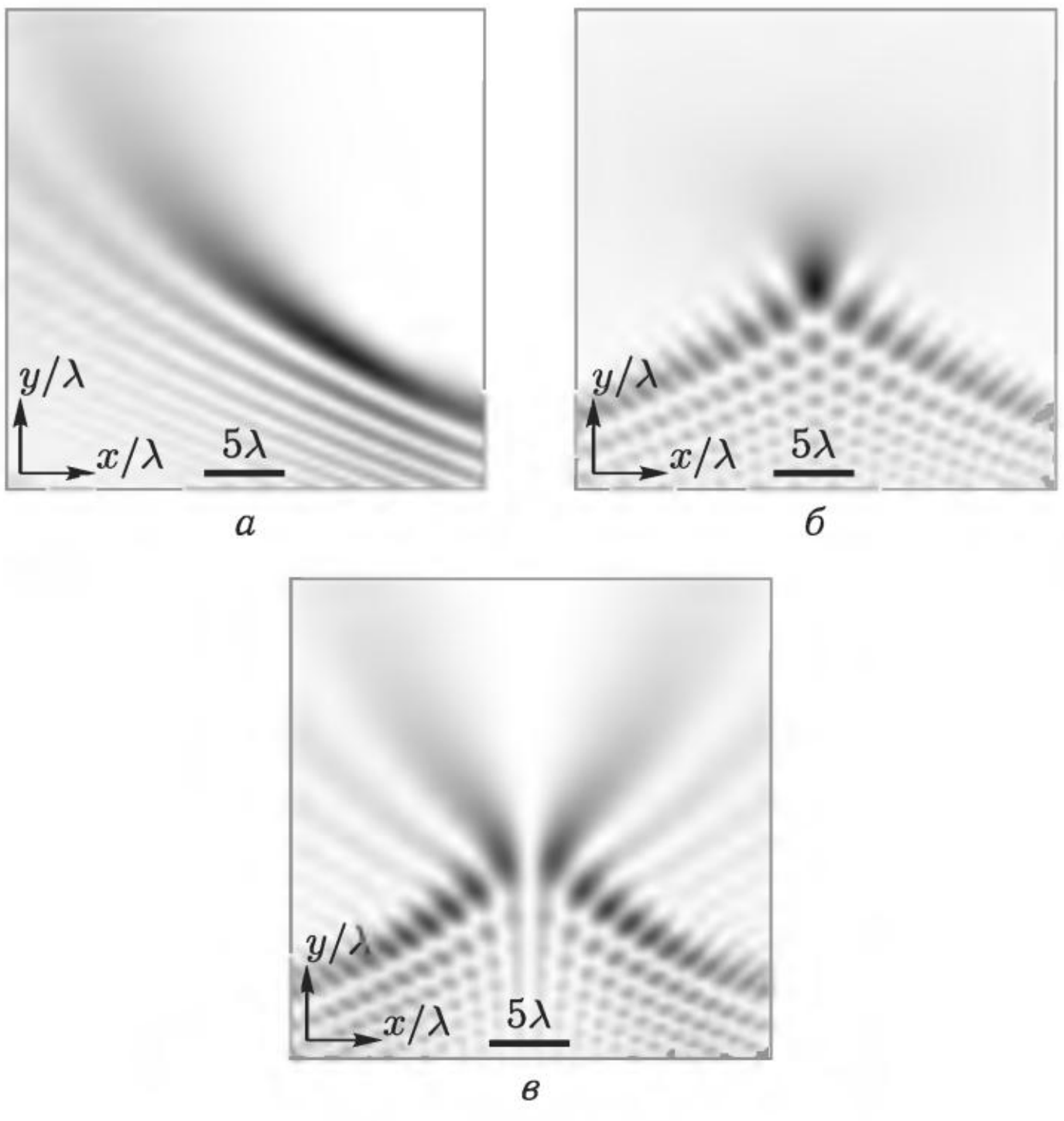


Рис. 4.1. Распределение интенсивности (негатив) ПП-пучка при $v = 1$ (*а*), полного пучка Пирси из [8] (*б*) и разности симметричных ПП-пучков с нулевой интенсивностью в плоскости $x = 0$ (*в*)

в комплексной плоскости, только вместо замены переменных $s \to \to s' \exp(i\pi/8)$ была применена замена $s \to s' \exp(i\pi/(8v))$. При вычислении были использованы следующие параметры: длина волны $\lambda = 532$ нм, $x_0 = y_0 = \lambda$, $v = 1$.

Угловой спектр ПП-пучка v-го порядка имеет вид:

$$\widetilde{E}\,(k_x, k_y) = \begin{cases} \dfrac{x_0 y_0}{p}\,(-k_x x_0)^{\frac{1-v}{v}}\,\exp\left(i k_x^4 x_0^4\right)\delta\left(k_x^2 x_0^2 + k_y y_0\right), & k_x x_0 < 0, \\ 0, & k_x x_0 \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Подобно работе [8], угловой спектр (4.7) отличен от нуля на параболе $k_x^2 x_0^2 + k_y y_0$, однако не на всей параболе, а только на ее половине (при $k_x x_0 < 0$).

Пучок Пирси с начальным полем (4.1) является линейной комбинацией ПП-пучков (4.5) первого порядка:

$$\mathrm{Pe}\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) = \mathrm{HPe}_1\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) + \mathrm{HPe}_1\left(-\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right). \tag{4.8}$$

Это также видно и из рис. 4.1 *а*, *б*: пучок Пирси из [8] является результатом интерференции ПП-пучка из рис. 4.1 *а* и его зеркального отражения относительно плоскости $x = 0$. Заметим, что слагаемые в (4.8) описывают два пучка, при распространении которых их амплитуды приобретают лишь множитель, зависящий от y_0^2, т. е. одинаковый для обоих пучков. Поэтому коэффициенты в линейной комбинации могут быть произвольными и, тем не менее, пучок будет сохранять свою структуру. В частности, можно рассмотреть в (4.8) вместо суммы разность, и тогда получится пучок, аналогичный пучку Пирси в [8], но в центре вместо максимума интенсивности будет минимум. Интенсивность разницы двух симметричных относительно плоскости $x = 0$ ПП-пучков показана на рис. 4.1 *в*.

На рис. 4.2 показаны те же дифракционные картины, что и на рис. 4.1, но для случая дробного порядка $v = 1{,}5$.

Из рис. 4.2 видно, что с ростом порядка функции Пирси v дифракционная картина принципиально не изменилась, хотя при $v = 1{,}5$ к краю картины пики интенсивности спадают быстрее.

Заметим, что при получении (4.6) из (4.5) замену переменной интегрирования можно делать только для $z < z_e$, в противном случае пределы становятся мнимыми. Однако, можно показать, что

$$E\left(x, \frac{y_0^3}{x_0^2} + \eta, z_e + \zeta\right) = E^*\left(-x, \frac{y_0^3}{x_0^2} - \eta, z_e - \zeta\right), \tag{4.9}$$

т. е. подобно пучку Пирси [8] после прохождения пучка через плоскость $z = z_e$ распределение интенсивности является зеркальным отражением распределения интенсивности до плоскости $z = z_e$ относительно плоскостей $x = 0$ и $y = y_0^3/x_0^2$.

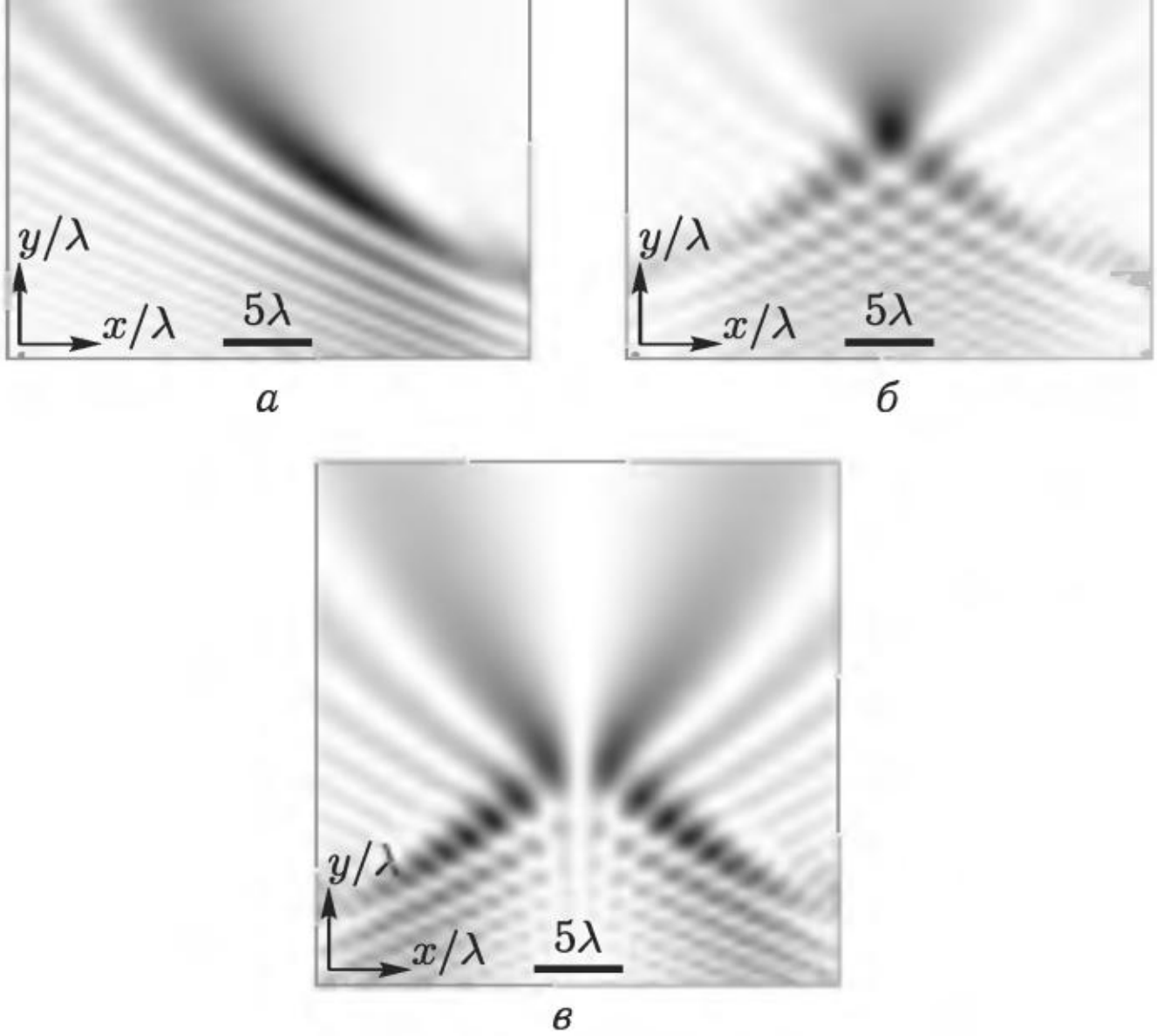


Рис. 4.2. Распределение интенсивности (негатив) ПП-пучка при $v = 1{,}5$ (*а*), полного пучка Пирси из [8] (*б*) и разности половинных ПП-пучков с нулевой интенсивностью в плоскости $x = 0$ (*в*)

В заключение данного раздела заметим, что комплексные амплитуды двух трехмерных ПП-пучков с параметрами (x_{01}, y_{01}) и (x_{02}, y_{02}) ортогональны при условии, что $y_{02}/y_{01} \neq x_{02}^2/x_{01}^2$. Это условие может быть получено как непосредственно с помощью скалярного произведения функций $\mathrm{HPe}_v(x/x_{01}, y/y_{01})$ и $\mathrm{HPe}_v(x/x_{02}, y/y_{02})$, так и из того, что при данном условии угловые спектры плоских волн (6) отличны от нуля на разных непересекающихся параболах.

4.1.2. Двумерные половинные пучки Пирси. Аналогично (4.5) можно рассмотреть 2D ПП-пучки, комплексная амплитуда которых в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, 0) = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left[is^p\left(\frac{x}{x_0}\right) + is^{2p}\right] ds = \mathrm{HPe}_p^{2D}\left(\frac{x}{x_0}\right). \qquad (4.10)$$

С помощью преобразования Френеля можно показать, что на некотором расстоянии z комплексная амплитуда станет равна

$$E(x, z) = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left[is^p\left(\frac{x}{x_0}\right) + i\left(1 - \frac{z}{2kx_0^2}\right)s^{2p}\right] ds. \qquad (4.11)$$

Сделаем замену переменной интегрирования $s = (1 - z/z_e)^{-1/(2p)} t$, где $z_e = 2kx_0^2$. Тогда вместо (4.11) получим для комплексной амплитуды 2D ПП-пучка:

$$E(x, z) = \frac{1}{(1 - z/z_e)^{1/(2p)}} \mathrm{HPe}_p^{2D} \left(\frac{x}{x_0 (1 - z/z_e)^{1/2}} \right). \tag{4.12}$$

Как и в трехмерном случае, здесь замену переменной интегрирования можно делать только для $z < z_e$. В противном случае пределы становятся мнимыми. Но из (4.11) следует, что

$$E(x, z_e + \zeta) = E^*(-x, z_e - \zeta), \tag{4.13}$$

т. е. после прохождения 2D ПП-пучка через плоскость $z = z_e$ распределение его интенсивности является зеркальным отражением распределения интенсивности до плоскости $z = z_e$ относительно оптической оси.

Из (4.12) видно, что в начале распространения (до фокальной плоскости $z = z_e$) в любой поперечной плоскости $z < z_e$ координаты максимумов интенсивности 2D ПП-пучка определяются по формуле:

$$x_{\max} = y_m x_0 \sqrt{1 - \frac{z}{z_e}}, \tag{4.14}$$

где y_m — координата m-го максимума функции $\left|\mathrm{HPe}_p^{2D}(x)\right|^2$. Дважды продифференцировав (4.14) по z, получим, что при $z < z_e$ будет выполняться неравенство $(dx_{\max}/dz)(d^2x_{\max}/dz^2) > 0$, что свидетельствует о наличии ускорения траектории пучка перед фокусировкой. Из свойства симметрии (4.13) следует, что после прохождения через плоскость $z = z_e$ 2D ПП-пучок начнет распространяться с замедлением.

Рассмотрим распространение 2D ПП-пучка при $p = 2$. Пусть $\lambda = 532$ нм, $x_0 = \lambda$. Тогда $z_e = 4\pi\lambda$. На расстоянии $z = 3z_e/4$ пучок сужается в два раза, в нашем случае это расстояние равно $z = 3\pi\lambda$. Максимальная интенсивность при этом увеличивается в два раза. В плоскости $z_e = 4\pi\lambda$ поле (11) «бесконечно» сужается, и возникает фокус. Для выбранных параметров интенсивность в начальной плоскости имеет вид, показанный на рис. 4.3 *а*. Моделирование проводилось конечно-разностным методом распространения пучка (BPM-методом) в области $-80\lambda \leqslant x \leqslant 80\lambda$, $0 \leqslant z \leqslant 30\lambda$. На рис. 4.3 *б* показано рассчитанное распределение интенсивности в плоскости Oxz. На рис. 4.3 *в*, *г* показаны сечения интенсивности (рис. 4.3 *б*) при $z = 0$ (рис. 4.3 *в*) и $z = 75\lambda/8 (\approx 3\pi\lambda)$ (рис. 4.3 *г*). Из рис. 4.3 видно, что действительно пучок сузился в два раза: при $z = 0$ координата четвертого нуля равна примерно -10λ, а при $z = 75\lambda/8$ она равна примерно -5λ. Максимальная интенсивность на рис. 4.3 *г* в два раза выше максимальной интенсивности на рис. 4.3 *в*. Кроме того, видно, что и на рис. 4.3 *в*, и на рис. 4.3 *г* интенсивность второго максимума примерно в два раза меньше интенсивности главного максимума, что также демонстрирует

изменение светового пучка при распространении только в масштабе, но не в структуре.

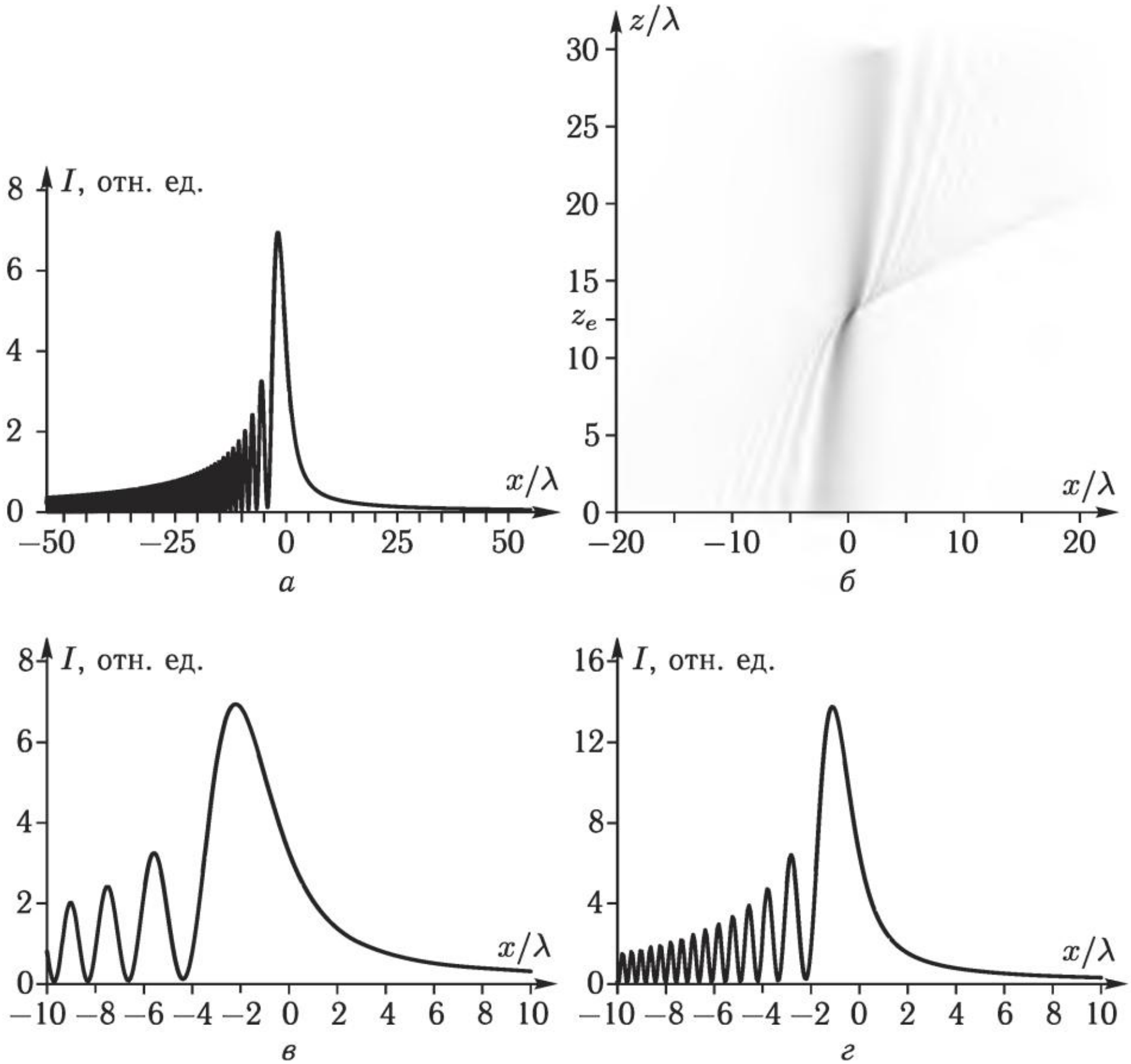


Рис. 4.3. Распределение интенсивности 2D ПП-пучка, рассчитанное BPM-методом: сечение интенсивности вдоль оси x при $z = 0$ (*а*), интенсивность в плоскости Oxz (негатив) (*б*), сечения интенсивности вдоль оси x при $z = 0$ (*в*) (увеличенная картинка (*а*)) и при при $z = 75\lambda/8$ (*г*)

В заключение данного раздела заметим, что в отличие от трехмерных пучков комплексные амплитуды двух 2D ПП-пучков с параметрами x_{01} и x_{02} не ортогональны.

4.1.3. Наблюдение разности двух ПП-пучков первого порядка. Для формирования пучков Пирси была использована оптическая схема, представленная на рис. 4.4. Использовался пространственный модулятор света SLM PLUTO-VIS (разрешение 1920×1080 пикселов, размер пикселя 8 мкм). Выходной пучок твердотельного лазера Laser ($\lambda = 532$ нм) ослаблялся с помощью фильтров нейтральной плотности F. Система из микрообъектива MO (40x, NA = 0,6), линзы L_1

($f = 350$ мм) и пинхола PH (размер отверстия 40 мкм) была использована для получения однородного гауссового профиля интенсивности начального лазерного пучка. Кроме того, это позволяло произвести расширение пучка, для того чтобы он полностью покрывал диплей модулятора. Отраженный от модулятора пучок с помощью делителя пучка BS и прямоугольной призмы RP направлялся на систему линз L_2 ($f_3 = 350$ мм) и L_3 ($f_2 = 150$ мм). Данная система линз в сочетании с диафрагмой D была использована для высокочастотной оптической фильтрации. Запись поперечных профилей интенсивности сформированных пучков Пирси производилась с помощью CMOS-камеры MDCE-5A (1/2″, разрешение 1280×1024 пикселов). Стартовая позиция камеры, закрепленной на оптических рельсах Rail, совпадала с плоскостью, сопряженной плоскости дисплея модулятора.

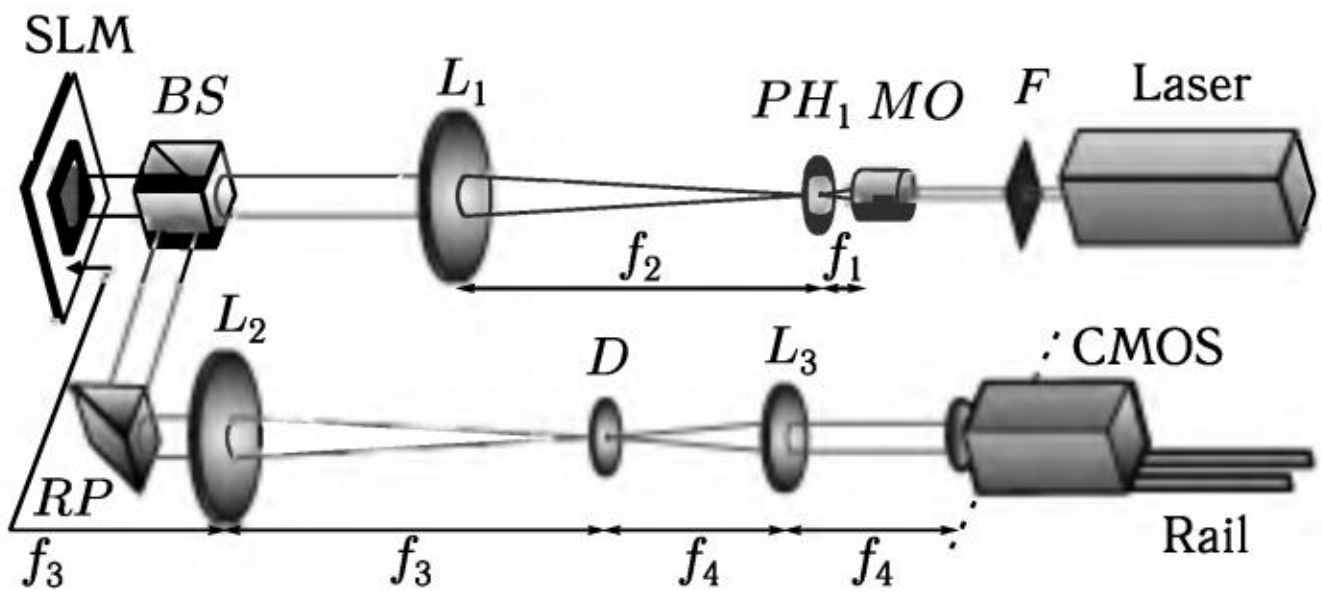


Рис. 4.4. Оптическая схема для формирования световых пучков Пирси: Laser — твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), F — фильтры нейтральной плотности, MO — микрообъектив (40×, NA = 0,6), PH — пинхол (40 мкм), L_1, L_2 — линзы с фокусным расстоянием $f_2 = f_3 = 350$ мм, L_3 — линза с фокусным расстоянием $f_4 = 150$ мм, BS — делитель пучка, SLM — пространственный модулятор света PLUTO_VIS, RP — прямоугольная призма, D — диафрагма, CMOS — CMOS-камера MDCE-5A (1280×1024), Rail — оптические рельсы

Как известно, из-за несовершенства антибликового покрытия и пиксельной структуры модуляторов света, в нулевом порядке всегда формируется световое пятно, которое вносит искажения в формируемое световое поле [193]. Для решения этой проблемы было использовано сложение исходной фазовой функции с линейной фазовой маской, что позволяло развести в пространстве формируемый ПП-пучок и световое пятно в нулевом порядке.

На рис. 4.5, 4.6 показаны экспериментально полученные изображения для случаев формирования разности двух ПП-пучков первого порядка на разных расстояниях от модулятора. Изображения на рис. 4.5 были получены в случае использования закодированного фазового распределения по формуле (4.8), которое показано в полутонах на рис. 4.5 *а*. А на рис. 4.6 показаны распределения интенсивности, полученные в случае использования некодированного фазового распределения, представленного на рис. 4.5 *а*. Отметим, что при выводе фаз,

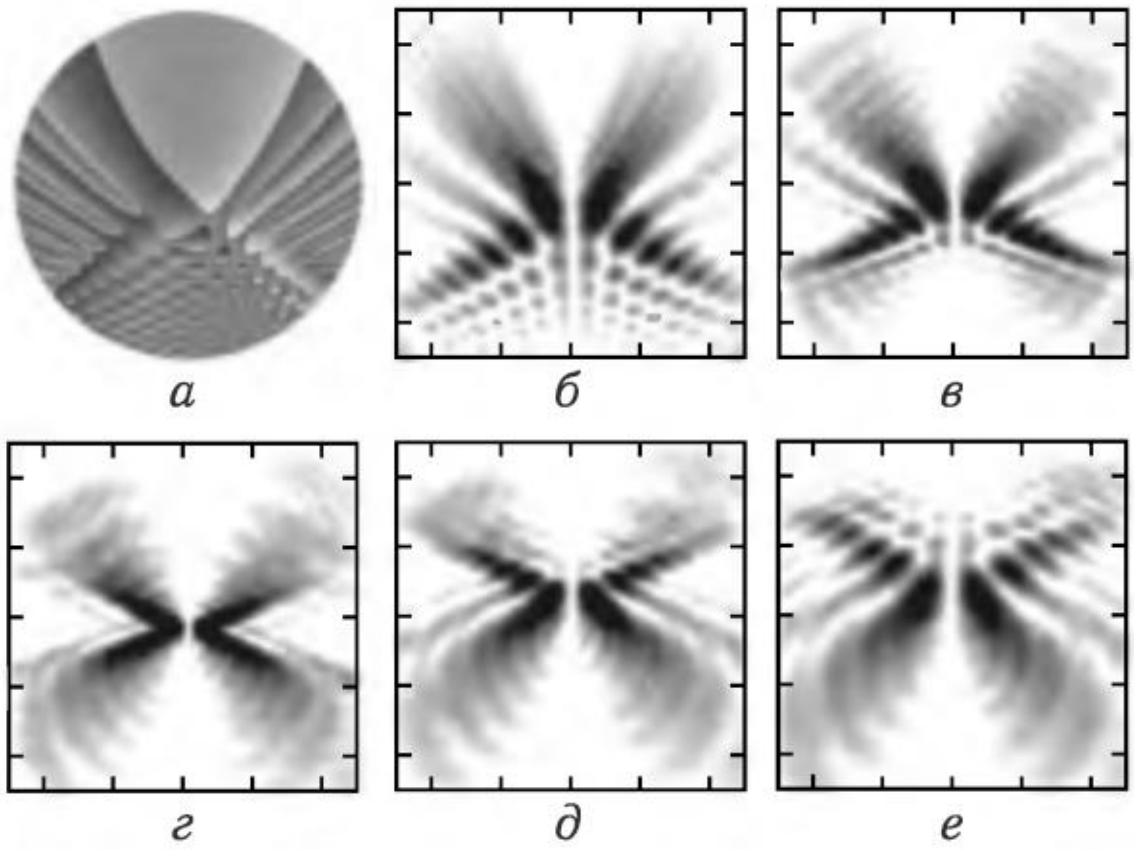


Рис. 4.5. Кодированная по формуле (4.8) фаза для формирования разности двух ПП-пучков первого порядка (*а*) и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на разных расстояниях от модулятора: 50 мм (*б*), 250 мм (*в*); 400 мм (*г*); 550 мм (*д*); 650 мм (*е*). Шаг сетки на изображениях равен 0,5 мм

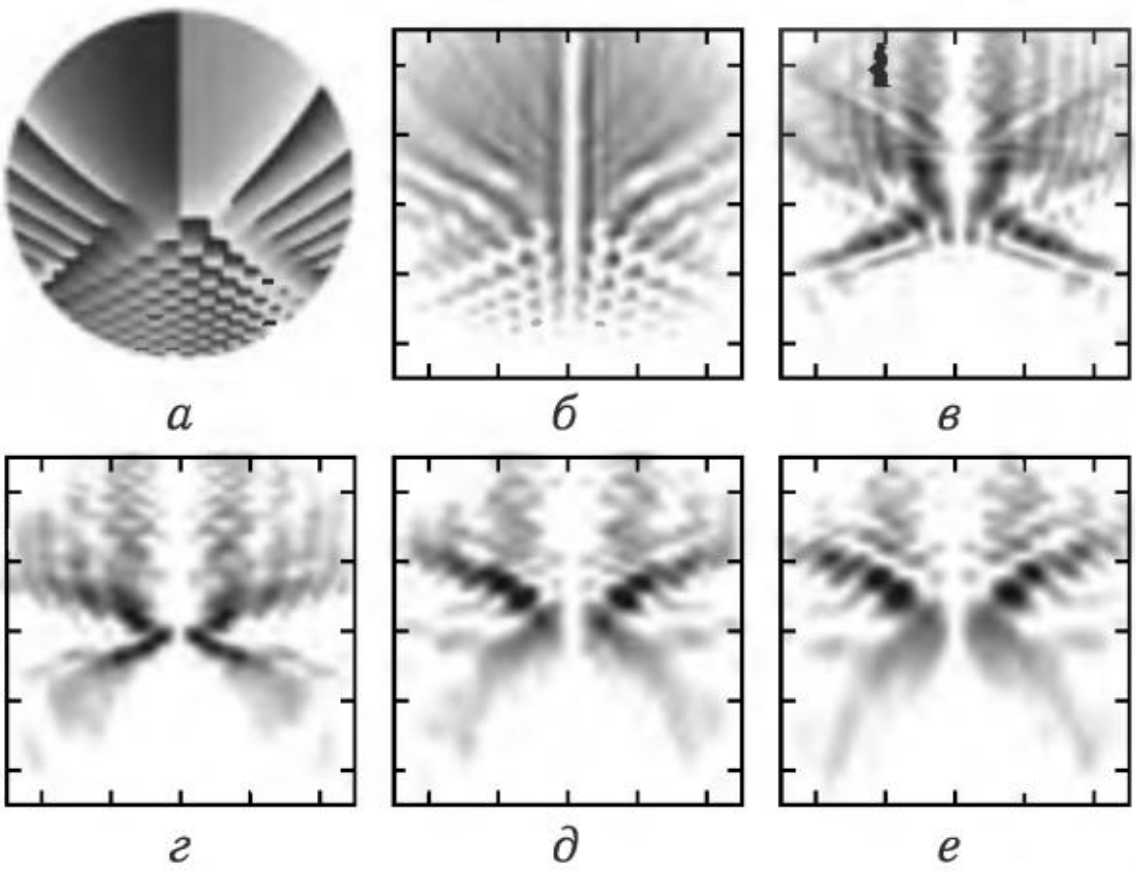


Рис. 4.6. Не кодированная фаза для формирования разности двух ПП-пучков первого порядка (4.5) (*а*) и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях: 50 мм (*б*), 250 мм (*в*); 400 мм (*г*); 550 мм (*д*); 650 мм (*е*). Шаг сетки на изображениях равен 0,5 мм

представленных на рис. 4.5 *а* и 4.6 *а*, на дисплей модулятора к ним добавлялась линейная фаза, как было сказано выше (на рисунках 4.5 *а* и 4.6 *а* линейная фаза не показана).

Из представленных изображений видно, что сформированные ПП-пучки в обоих случаях сохраняют свою структуру при распространении в пространстве. Из анализа полученных изображений следует, что сформированные пучки обладают свойством автофокусировки. Фокус пучков находится на расстоянии около 400 мм.

Из сравнения рисунков видно, что распределения интенсивности на рис. 4.5 более близки к расчетному распределению, показному на рис. 4.2в, чем картины интенсивности на рис. 4.6. Видно также, что в обоих случаях фокус находится на расстоянии 400 мм, и после фокуса картина интенсивности повернута на 180 градусов по отношению к картине интенсивности до фокуса.

В экспериментах также было продемонстрировано свойство самовосстановления сформированных ПП-пучков. Для этого на пути пучка в плоскости $z = 0$ (начальная позиция матрицы камеры) было установлено покровное стекло с непрозрачной областью размером 0,5 мм, нанесенной с помощью черного маркера (рис. 4.7 *а*). Таким образом, в данной области происходило поглощение светового излучения, что вносило искажение в сформированный пучок. На рис. 4.7 представлены результаты данного эксперимента. Из рис. 4.7 *а* видно, что левый верхний максимум интенсивности сформированного пучка закрыт препятствием. На последующих изображениях можно наблюдать, как происходит восстановление структуры пучка, особенно хорошо это видно на изображениях, полученных после прохождения фокуса пучка.

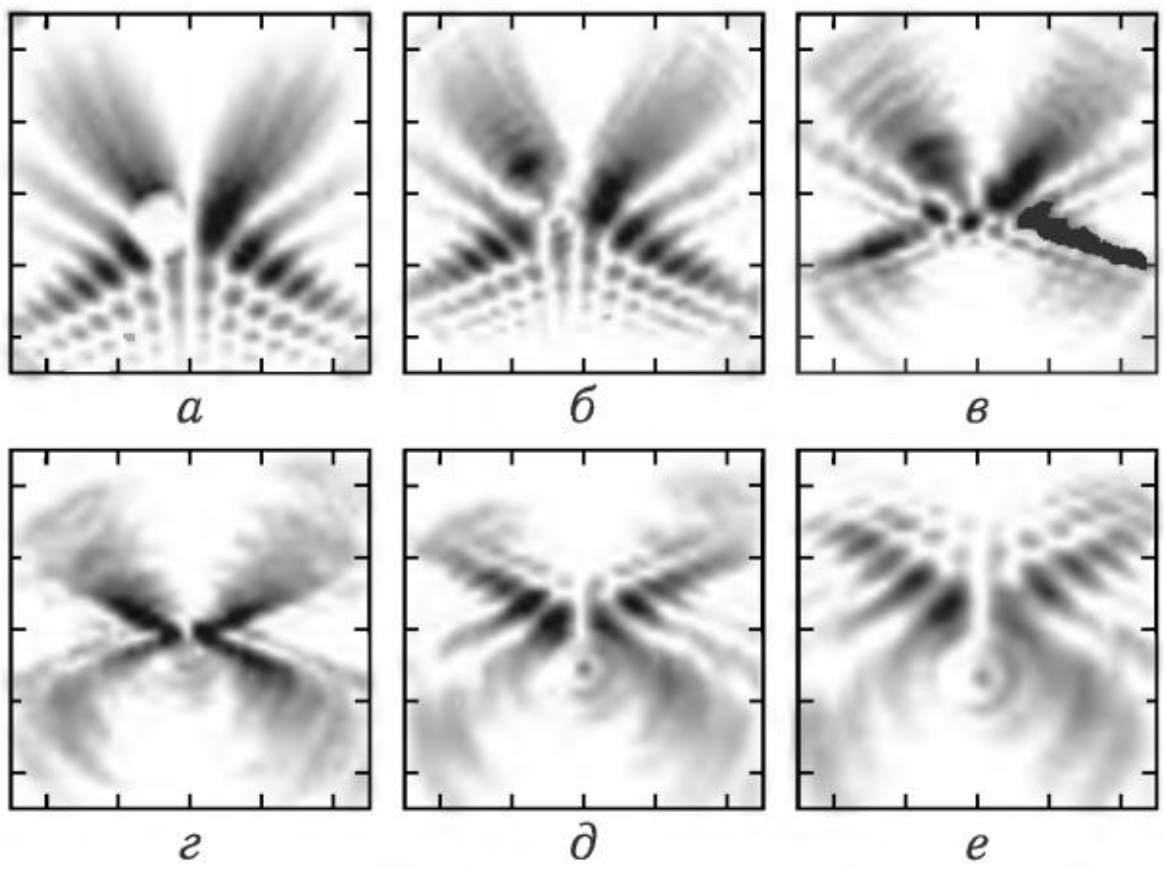


Рис. 4.7. Самовосстановление сформированной разности двух ПП-пучков первого порядка. Экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях: 0 мм (*а*), 100 мм (*б*); 250 мм (*в*); 400 мм (*г*); 550 мм (*д*); 700 мм (*е*). Шаг сетки на изображениях равен 0,5 мм

В разделе получены следующие результаты [194, 195]. Получено новое решение параксиального уравнения Гельмгольца (уравнения типа Шредингера), описывающее трехпараметрическое семейство структурно-устойчивых трехмерных половинных пучков Пирси (уравнения (4.5), (4.6)). Показано, что полный пучок Пирси из [8] является суммой двух симметричных половинных пучков Пирси первого порядка (уравнение (4.8)). С помощью линейной комбинации из двух симметричных половинных пучков Пирси с разными амплитудами можно

формировать новые структурно-устойчивые пучки, которые не будут ни полными пучками Пирси [8], ни половинными пучками Пирси. Получена формула для амплитуды углового спектра плоских волн трехмерных половинных пучков Пирси (уравнение (4.7)); амплитуда спектра отлична от нуля на половине параболы. Получено условие ортогональности комплексных амплитуд трехмерных половинных пучков Пирси: ортогональны половинные пучки Пирси, фурье-спектр которых лежит на непересекающихся параболах; установлено, что двумерные пучки Пирси не ортогональны. Получено решение двумерного параксиального уравнения Гельмгольца, описывающее двумерный аналог структурно-устойчивых половинных пучков Пирси (уравнения (4.10), (4.12)). Показано, что двумерный половинный пучок Пирси, как и трехмерный, обладает свойством автофокусировки, а также ускоряющейся траекторией до фокальной плоскости (рис. 4.3 *б*).

4.2. Гипергеометрические пучки с автофокусировкой

Вихревые лазерные пучки, обладающие орбитальным угловым моментом, являются объектом пристального внимания в оптике. Они находят применения для уплотнения каналов передачи информации в системах беспроводной связи со скоростью несколько терабит в секунду [196], для оптического захвата и вращения микрочастиц [197], для зондирования атмосферы в присутствии турбулентности [198]. Примерами вихревых пучков являются хорошо известные лазерные пучки Бесселя [1], Лагерра–Гаусса [2], гипергеометрические моды [6]. Эти пучки при распространении в пространстве либо сохраняют свою структуру [1], либо масштабно увеличиваются [2, 6]. Для применения в задачах микроманипуляции их требуется сфокусировать с помощью микрообъектива. Такая фокусировка неизбежно приводит к искажению формы пучка из-за аберраций фокусирующего объектива. Однако известны лазерные пучки, обладающие свойством автофокусировки. У таких пучков распределение интенсивности в фокусе строго определено. Примерами лазерных пуков с автофокусировкой являются пучки Пирси [8]. В [8] рассмотрены пучки Пирси, как трехмерные аналоги пучков Эйри [18]. Распределение комплексных амплитуд таких пучков описывается функцией Пирси [190, 191], определяемой как интеграл от комплексной экспоненты, аргумент которой является полиномом (подобно функции Эйри). Угловой спектр таких пучков представляет собой параболу с фазовой модуляцией. Эти пучки обладают свойством автофокусировки и восстанавливаются после искажения препятствиями. В [192] предложен виртуальный источник, формирующий пучок Пирси. В [195, 199] приведено обобщение функции Пирси и рассматриваются структурно-устойчивые половинные пучки Пирси.

Обычные пучки Пирси [8] являются суммой двух половинных пучков Пирси первого порядка. Угловой спектр половинных пучков Пирси представляет собой не параболу (как у пучков Пирси из [8]), а только

одну ее половину. Заметим, что пучки Пирси не обладают орбитальным угловым моментом. Также в [195, 199] рассмотрены двумерные аналоги пучков Пирси, обладающие искривленной траекторией, т. е. обладающие ускорением при распространении.

В данном разделе на основе двумерных половинных пучков Пирси получены параксиальные вихревые пучки Пирси, обладающие орбитальным угловым моментом. Комплексная амплитуда таких пучков пропорциональна вырожденной гипергеометрической функции, и по форме они совпадают с гипергеометрическими модами [6]. Но так как пучки Пирси обладают свойством автофокусировки, то и полученные здесь вихревые пучки Пирси обладают также свойством автофокусировки.

4.2.1. Вихревые пучки Пирси или гипергеометрические пучки с автофокусировкой. Рассмотрим комплексную амплитуду параксиального трехмерного монохроматического лазерного пучка, представляющую собой непрерывную суперпозицию двумерных половинных пучков Пирси, каждый из которых повернут на полярный угол θ, и у каждого пучка, входящего в суперпозицию, фаза пропорциональна углу поворота $n\theta$:

$$E_{np}\left(x, y, z=0\right) = \\ = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta \int\limits_0^{\infty} \exp\left[is^{2p} + is^p\left(\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{x_0}\right)\right] ds, \quad (4.15)$$

где n — целое число, которое называется топологическим зарядом оптического вихря, p — действительное число, задающее порядок половинного пучка Пирси. Заметим, что у обычных пучков Пирси [8] $p = 2$, и интеграл в (4.15) по переменной s берется от минус до плюс бесконечности. Пучки (4.15) с разным топологическим зарядом n ортогональны, а с разным порядком p не ортогональны.

Оба интеграла в (4.15) можно вычислить, тогда вместо (4.15) получим:

$$E_{np}(r, \varphi, z=0) = \exp\left[\frac{i\pi}{2}\left(\frac{pn+1}{2p}\right) + in\varphi\right](2pn!)^{-1} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{pn+1}{2p}\right)\left(\frac{r}{2x_0}\right)^n {}_1F_1\left(\frac{pn+1}{2p}, n+1, -i\frac{r^2}{4x_0^2}\right), \quad (4.16)$$

где (r, φ) — полярные координаты, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, ${}_1F_1(a, b, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [65].

С помощью преобразования Френеля можно получить комплексную амплитуду оптического вихря Пирси (4.15) на произвольном расстоянии z в виде:

$$E_{np}(r, \varphi, z) = \exp\left[\frac{i\pi}{2}\left(\frac{pn+1}{2p}\right) + in\varphi\right]\left[2pn!\left(1 - \frac{z}{z_e}\right)^{1/2p}\right]^{-1} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{pn+1}{2p}\right)\xi^n {}_1F_1\left(\frac{pn+1}{2p}, n+1, -i\xi^2\right), \quad (4.17)$$

где

$$\xi = \frac{r}{2x_0\sqrt{1-\dfrac{z}{z_e}}}, \quad z_e = 2kx_0^2.$$

Можно проверить, что из (4.17) при $z = 0$ получается (4.16). Из (4.17) следует, что при $n \neq 0$ на оптической оси ($r = 0$) при любом z будет нулевая интенсивность, а распределение интенсивности будет иметь вид набора концентрических колец с центром на оптической оси. Но при $n = 0$ пучок (4.17) не будет вихревым и кольцевым, т. е. на оптической оси будет отличная от нуля интенсивность, и комплексная амплитуда будет иметь вид:

$$E_{0p}(r,z) = \frac{\exp\left(\dfrac{i\pi}{4p}\right)}{2p\left(1-\dfrac{z}{z_e}\right)^{1/2p}}\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right){}_1F_1\left(\frac{1}{2p},\ 1, -i\xi^2\right). \tag{4.18}$$

Комплексная амплитуда (4.18) описывает параксиальную волну с бесконечной энергией, сходящуюся в точку на оптической оси, аналогично сферической или параболической волнам. Из (4.17) видно, что при $z = z_e$ аргумент ξ стремится к бесконечности. Используя асимптотику при $x \to \infty$

$$x^n\left|{}_1F_1\left(\frac{pn+1}{2p}, n+1, -ix^2\right)\right| \approx \frac{1}{x}, \tag{4.19}$$

получим, что в плоскости автофокусировки ($z = z_e$) комплексная амплитуда (4.17) пропорциональна

$$E_{np}(r,\varphi,z=z_e) \approx \frac{\exp(in\varphi)}{r}. \tag{4.20}$$

Из (4.20) следует, что в плоскости автофокусировки ($z = z_e$) формируется острый фокус, но в центре фокуса в одной только точке интенсивность равна нулю (если $n \neq 0$). Докажем кратко наличие осевого нуля интенсивности в фокальной плоскости. Комплексная амплитуда двумерного пучка Пирси в фокальной плоскости равна

$$E(x, z=z_e) = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left[is^p\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]ds, \tag{4.21}$$

а суперпозиция (4.15) в этой плоскости имеет вид (в полярных координатах):

$$E_{np}(r,\varphi,z=z_e) = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{in\theta}d\theta\int\limits_0^{\infty}\exp\left[is^p\frac{r\cos(\theta-\varphi)}{x_0}\right]ds, \tag{4.22}$$

Внутренний интеграл на оптической оси ($r = 0$) равен бесконечности, однако при смене порядка интегрирования получим:

$$E_{np}(r, \varphi, z = z_e) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int\limits_0^\infty ds \int\limits_0^{2\pi} \exp\left[in\theta + i\frac{rs^p}{x_0}\cos(\theta - \varphi)\right] d\theta =$$

$$= \exp(in\varphi) \int\limits_0^\infty J_n\left(\frac{rs^p}{x_0}\right) ds. \quad (4.23)$$

При $r = 0$ подынтегральное выражение строго равно нулю, а значит и осевая интенсивность в фокальной плоскости также равна нулю.

Замечательным свойством вихревых пучков Пирси является то, что расстояние автофокусировки $z_e = 2kx_0^2$ не зависит от параметров пучка p и n. Это означает, что любая суперпозиция таких пучков с разными номерами p и n будет фокусироваться на том же расстоянии z_e. Это свойство вихревых пучков можно использовать для формирования заданного распределения интенсивности и орбитального углового момента в плоскости автофокусировки.

На рис. 4.8 показаны распределения интенсивности радиального ($n = 0$) и вихревого ($n = 5$) пучков Пирси на разных расстояниях от начальной плоскости: $z = 0$ (*а*, *г*), $z = 0{,}75z_e$ (*б*, *д*), $z = 0{,}999z_e$ (*в*, *е*).

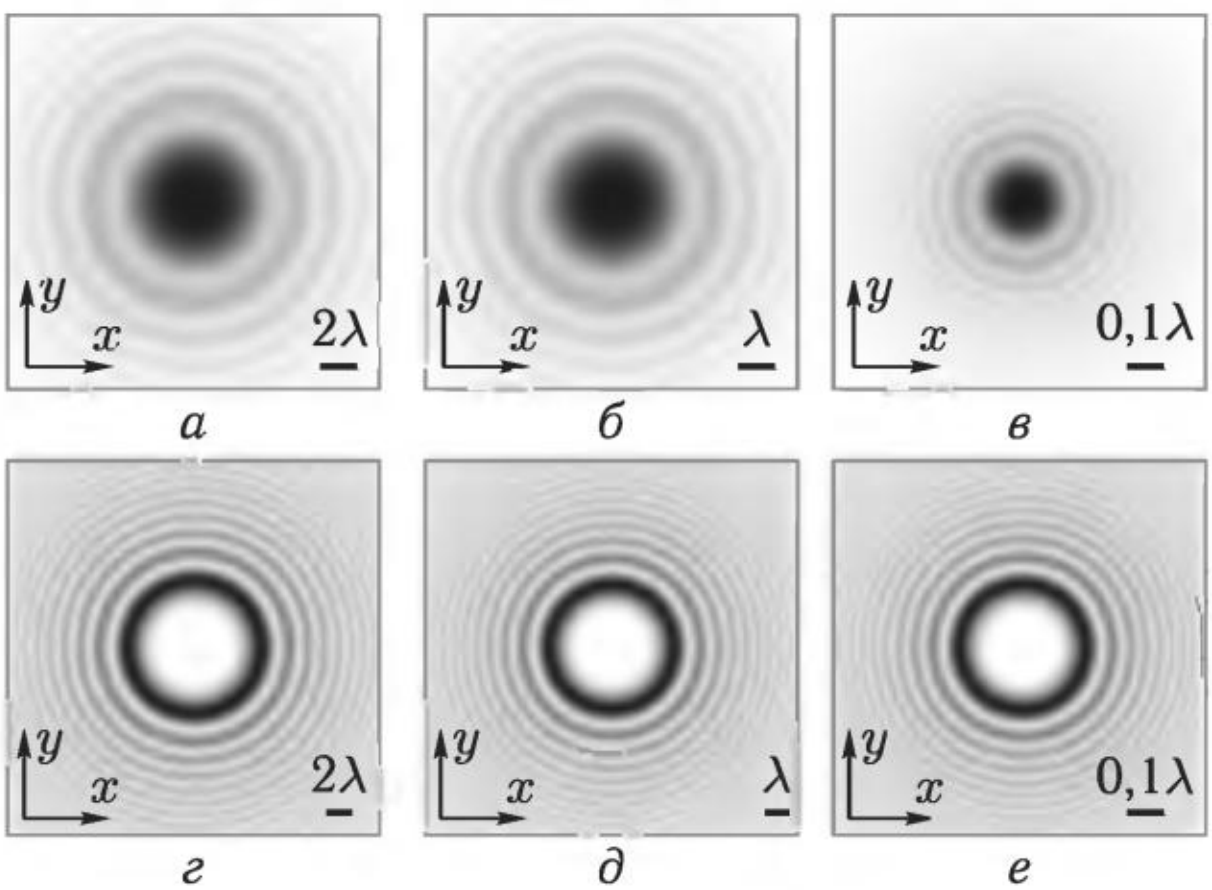


Рис. 4.8. Распределения интенсивности (негатив) вихревого пучка Пирси при $n = 0$ (*а*, *б*, *в*) и при $n = 5$ (*г*, *д*, *е*) в плоскостях $z = 0$ (*а*, *г*), $z = 3z_e/4$ (*б*, *д*), $z = 0{,}999z_e$ (*в*, *е*)

На расстоянии $z = 3z_e/4$ картина дифракции сжимается в два раза по сравнению с картиной в плоскости $z = 0$, а на расстоянии $z = 0{,}999z_e$ — в $10\sqrt{3}$ раз. Сечение интенсивности, изображенной на рис. 4.8 *в*, показано на рис. 4.9, ширина светового пятна по полуспаду интенсивности на рис. 4.9 составила $0{,}21\lambda$.

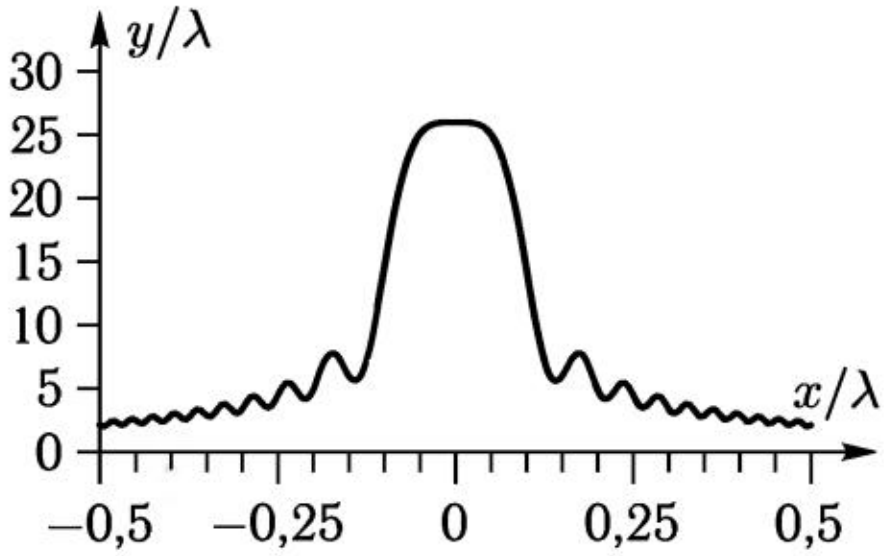


Рис. 4.9. Сечение интенсивности вблизи фокуса ($z = 0{,}999 z_e$) при $n = 0$

Рисунок 4.8 рассчитан по формуле, аналогичной (4.15):

$$E_{np}(x, y, z) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \frac{1}{(1 - z/z_e)^{1/(2p)}} \int\limits_0^{2\pi} e^{in\theta}\, \mathrm{HPe}_2^{2D}\left(\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{x_0\sqrt{1 - z/z_e}}\right) d\theta, \tag{4.24}$$

при этом использовалось тождество, связывающее функцию Пирси при $p = 2$ с функцией Бесселя первого рода:

$$\mathrm{HPe}_2^{2D}(\xi) = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{|\xi|}{2}} \exp\left[-i\left(\frac{\xi^2}{8} - \frac{\pi}{8}\right)\right] J_{-1/4}\left(\frac{\xi^2}{8}\right) + \\ + i\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}\, sgn(\xi) \exp\left[-i\left(\frac{\xi^2}{8} - \frac{3\pi}{8}\right)\right] J_{1/4}\left(\frac{\xi^2}{8}\right). \tag{4.25}$$

Это тождество получается из нескольких справочных интегралов (выражения 3.696 в [112]). Заметим, что вихревые пучки Пирси (4.17) при $p = 1$ по структуре совпадают с известными гипергеометрическими модами [6] при $\gamma = 0$:

$$E_{n\gamma}(r, \varphi, z) = \frac{\exp\left[-\frac{i\pi}{4}(n - i\gamma + 1) + in\varphi\right]}{2\pi n!} \times \\ \times \exp\left[\frac{i\gamma}{2}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\right] \Gamma\left(\frac{n + i\gamma + 1}{2}\right)\left(\frac{z_0}{z}\right)^{1/2} \xi^{n/2} \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{n - i\gamma + 1}{2}, n + 1, i\xi\right), \tag{4.26}$$

где $\xi = kr^2/(2z)$, $z_0 = kw^2/2$.

В (4.26) w — масштабный фактор, аналогичный x_0, γ — действительный параметр, аналогичный p. Хотя при $p = 1$ в (4.15) имеет место суперпозиция параболических волн, а не обычных пучков Пирси [8] при $p = 2$. Отличие между (4.17) и (4.26) еще в том, что вихревые пучки Пирси (4.17) в начальной плоскости имеют аналогичный вид (4.16), а гипергеометрические моды (4.26) порождаются комплексной амплитудой вида [6]:

$$E_{n\gamma}(r, \varphi, z = 0) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{w}{r}\right) \exp\left[i\gamma\ln\left(\frac{r}{w}\right) + in\varphi\right]. \tag{4.27}$$

Сравнивая (4.20) и (4.27), видно, что вихревые пучки Пирси (4.17) в плоскости автофокуса (фурье-плоскость) имеют вид (4.20), аналогичный гипергеометрическим модам (4.27) в начальной плоскости (при $\gamma = 0$). Заметим, что функция (4.20) фурье-инварианта, и ее фурье-образ равен

$$E_n(\rho, \theta) = (-i)^{n+1} \frac{\exp(in\theta)}{\rho}, \ \rho > 0. \tag{4.28}$$

Но при $n \neq 0$ и $\rho = 0$ амплитуда (4.28) равна нулю. Можно предположить, что гипергеометрические моды (4.26) и вихревые пучки Пирси (4.17) отличаются сдвигом по оптической оси на расстояние автофокусировки. Это косвенно подтверждается методологией получения ускоряющихся пучков из замедляющихся путем смещения вдоль оптической оси [66].

Приравнивая аргумент ξ в (4.17) к значению, при котором модуль амплитуды достигает максимума ξ_0, получим зависимость изменения радиуса кольца с максимальной интенсивностью от расстояния вдоль оптической оси:

$$r_0 = 2x_0\xi_0\sqrt{1 - \frac{z}{z_e}}. \tag{4.29}$$

Из (4.29) видно, что при $z = z_e$ радиус кольца равен нулю. Если вычислить первую и вторую производные по z от радиуса кольца (14.29), то они будут одного знака. Это означает, что вихревой пучок Пирси распространяется до фокуса по ускоряющейся траектории и «круто» сходится в фокус, аналогично кольцевым пучкам Эйри [64].

4.2.2. Вихревые пучки Пирси–Гаусса. Пучки (4.17), как и пучки (4.26), обладают бесконечной энергией, аналогично пучкам Бесселя [1]. Понятно, что если преобразование Френеля от функции (4.15) вычисляется явным образом с помощью специальных функций (4.17), то аналогично может быть вычислено преобразование Френеля от функции (4.15), умноженной на гауссову экспоненту. Поэтому рассмотрим вихревые пучки Пирси–Гаусса в начальной плоскости, умножив комплексную амплитуду (4.15) на гауссову экспоненту:

$$F_{np}(x, y, z = 0) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right) \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta \int_0^{\infty} \exp\left[is^{2p} + is^p\left(\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{x_0}\right)\right] ds, \tag{4.30}$$

где σ — радиус перетяжки гауссова пучка.

Комплексная амплитуда вихревых пучков Пирси–Гаусса на произвольном расстоянии от начальной плоскости получается с помощью

преобразования Френеля и равна:

$$F_{np}(r,\varphi,z) = \frac{\exp\left[-\frac{i\pi}{2}(n+1)+in\varphi\right]}{2pn!} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{r^2}{\sigma^2(z)} + \frac{ikr^2}{2R(z)}\right] g^{(1-2p)/p}(z) q^{-1/p}(z) \times$$
$$\times \Gamma\left(\frac{pn+1}{2p}\right) \xi^n {}_1F_1\left(\frac{pn+1}{2p}, n+1, -i\xi^2\right). \quad (4.31)$$

где

$$\xi = \frac{r}{2x_0 g(z) q(z)}, \quad g(z) = \sqrt{\frac{z}{z_0} - i},$$
$$q(z) = \sqrt{\frac{z}{z_e} - i\left(\frac{z}{z_0} - i\right)}, \quad z_0 = \frac{k\sigma^2}{2},$$
$$\sigma(z) = \sigma\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \quad R(z) = z\left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right).$$

При $\sigma \to \infty$ амплитуда (4.31) переходит в (4.17). Заметим, что произведение $g(z)q(z)$ в знаменателе аргумента ξ является комплексным числом и не равно нулю ни при каком z. При $z = z_e$ модуль произведения $g(z)q(z)$ достигает минимума. То есть, в отличие от вихревых пучков Пирси (4.17), у вихревых пучков Пирси–Гаусса (4.31) в плоскости автофокусировки радиус пучка минимальный, но отличен от нуля. Но при этом вихревые пучки Пирси–Гаусса обладают конечной энергией и могут быть сформированы с помощью жидкокристаллического модулятора света.

Заметим также, что пучки (4.31) при $p = 1$ и при $z_e \to \infty$ по своей структуре совпадают с гипергеометрическими пучками [63] при $m = -1$, $\gamma = 0$. Но пучки в [63] не обладают свойством автофокусировки.

В разделе получены следующие результаты [200, 201]. Получено новое решение параксиального уравнения Гельмгольца (уравнения типа Шредингера), описывающее двухпараметрическое семейство структурно-устойчивых трехмерных вихревых пучков Пирси (уравнение (4.17)). Показано, что комплексная амплитуда вихревого пучка Пирси по структуре совпадает с комплексной амплитудой гипергеометрических мод [6], но в отличие от них обладает свойством автофокусировки. Вихревой пучок Пирси распространяется до фокуса по ускоряющейся траектории и «круто» сходится в фокус, аналогично кольцевым пучкам Эйри [66].

Получено также явное выражение для комплексной амплитуды вихревых пучков Пирси–Гаусса (уравнение (4.31)) с конечной энергией, которые обладают свойством автофокусироки, но радиус пучка в фокусе конечен, в отличие от вихревых пучков Пирси с бесконечной энергией, у которых радиус пучка в фокусе равен нулю.

4.3. Гипергеометрические пучки в параболическом волноводе

В 2007 году были рассмотрены параксиальные гипергеометрические моды (ГГ-моды) [6]. Немного позже на основе ГГ-мод были получены гипергеометрические-гауссовые лазерные пучки [202]. В [63] рассмотрено более общее семейство ГГ-пучков, которые включают в себя как частные случаи ГГ-моды [6] и гипергеометрические-гауссовые пучки [202]. Лазерные ГГ-пучки были экспериментально сформированы с помощью дифракционных оптических элементов [203] и голограмм, синтезированных на компьютере [204]. Недавно получены аналитические выражения, описывающее распространение ГГ-пучков в градиентной гиперболической среде [205] и одноосном кристалле [206].

В этом разделе получено выражение, описывающее распространение ГГ-пучков в 3D градиентном параболическом волноводе. Показано, что световое поле ГГ-пучков периодически повторяется, а через каждые полпериода формируется фурье-спектр.

Также было получено новое семейство модовых решений для уравнения Гельмгольца в параболической среде. Эти решения пропорциональны функциям Куммера и расходятся на бесконечности. Однако при некоторых значениях параметров функции Куммера эти решения становятся конечными и переходят в известные моды Лагерра–Гаусса (ЛГ-моды).

В последнее время возрос интерес к градиентным элементам микрооптики. Так в [207–209] рассматривалась градиентная микролинза Лунеберга. В [207, 208] были проведены эксперименты с планарной линзой Лунеберга, а в [209] моделирование планарной фотонно-кристаллической линзы Лунеберга показало, что сформированный ею фокус имеет ширину по полуспаду интенсивности $\mathrm{FWHM} = 0{,}44\lambda$ при $n_0 = 1{,}41$. В [210, 211] рассмотрена планарная, а в [212] трехмерная линзы Микаэляна с градиентным показателем преломления в виде гиперболического секанса. В [212] показано, что 3D градиентная линза Микаэляна формирует фокальное пятно с диаметром по полуспаду интенсивности $\mathrm{FWHM} = 0{,}40\lambda$. В [213] рассмотрена планарная субволновая бинарная линза Микаэляна, формирующая фокус шириной

$$\mathrm{FWHM} = 159\,\text{нм} = 0{,}102\lambda = \frac{0{,}35\lambda}{n},$$

$n = 3{,}47$ — показатель преломления линзы.

В этом разделе рассмотрено распространение гауссова пучка в градиентном параболическом волокне. Участок этого волокна определенной длины можно рассматривать как градиентную параболическую (ГП) линзу. Моделирование показало, что фокусное пятно в такой линзе имеет диаметр $\mathrm{FWHM} = 0{,}42\lambda$, при $n_0 = 1{,}5$ — показатель преломления на оси линзы. Получено также аналитическое выражение

для радиусов скачков показателя преломления для бинарной линзы, аппроксимирующей 3D ГП-линзу. Рассчитанный FDTD-методом меньший диаметр эллиптического фокусного пятна такой бинарной параболической линзы равен $\mathrm{FWHM} = 0{,}45\lambda$.

4.3.1. Параксиальные гипергеометрические пучки в параболической градиентной среде. Рассмотрим параболическую градиентную среду с показателем преломления вида:

$$n^2(r) = n_0^2 \left[1 - \frac{(n_0^2 - n_1^2)}{n_0^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right], \tag{4.32}$$

где r — радиальная поперечная координата, n_0 и n_1 — показатели преломления на оптической оси ($r = 0$) и при $r = r_0$. На рис. 4.10 показан профиль показателя преломления (4.32).

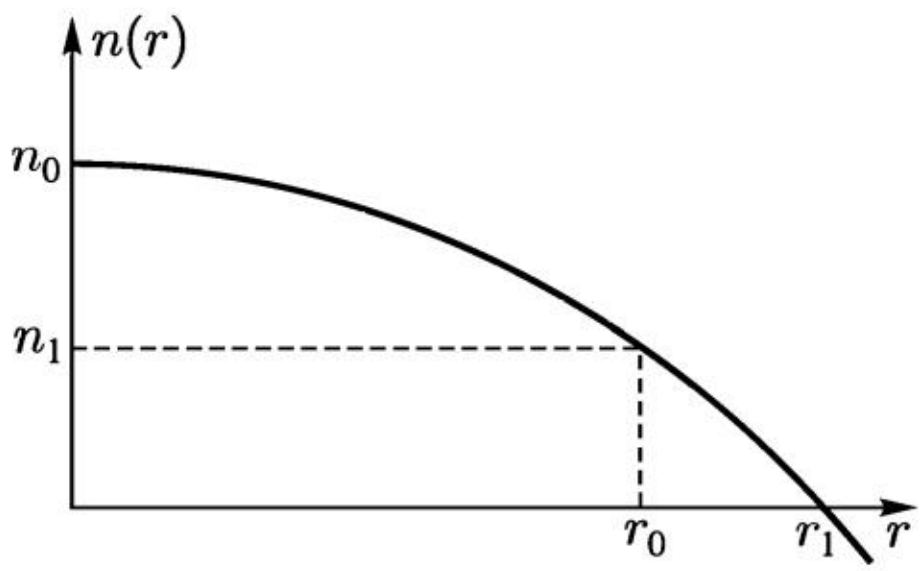


Рис. 4.10. График зависимости параболического показателя преломления от радиальной координаты

Параксиальное уравнение распространения света в параболической среде (4.31) имеет вид:

$$\left[2ik\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (\alpha k)^2 \frac{\left(x^2 + y^2\right)}{4}\right] E(x, y, z) = 0, \tag{4.33}$$

где

$$\alpha = \frac{2\sqrt{n_0^2 - n_1^2}}{r_0 n_0}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} n_0,$$

λ — длина волны.

В [214] показано, что общее решение (4.32) имеет вид:

$$E(x, y, z) = \frac{\alpha k}{2\pi i \sin(\tau z)} \exp\left[\frac{i\alpha k}{4\,\mathrm{tg}(\tau z)} \left(x^2 + y^2\right)\right] \times$$
$$\times \iint\limits_{-\infty}^{\infty} E_0(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{i\alpha k}{4\sin(\tau z)} \left[\left(\xi^2 + \eta^2\right) \cos(\tau z) - 2(x\xi + y\eta)\right]\right\} d\xi\, d\eta, \tag{4.34}$$

где $\tau=\alpha/2$. Заметим, что интегральное преобразование (4.34) с точностью до обозначений совпадает с частичным преобразованием Фурье [215, 216]. В цилиндрических координатах уравнение (4.34) для начального поля $E_0(r,\varphi) = E_0(r)\exp(in\varphi)$ имеет вид:

$$E(\rho,\theta,z) = (-i)^{n+1}\frac{2k}{f_2}\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f_1}+in\theta\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty E_0(r)\exp\left(\frac{ikr^2}{2f_1}\right)J_n\left(\frac{kr\rho}{f_2}\right)r\,dr, \quad (4.35)$$

где n — целое число, $J_n(x)$ — функция Бесселя,

$$f_1 = f_0\,\mathrm{tg}(z/f_0), \quad f_2 = f_0\sin(z/f_0), \quad f_0 = \frac{2}{\alpha} = \frac{r_0 n_0}{\sqrt{n_0^2-n_1^2}}. \quad (4.36)$$

В [217] получены выражения, описывающие преобразования пучков ЛГ в параболическом волокне. Далее мы рассмотрим распространение в параболическом волокне (4.31) ГГ-пучков, которые в начальной плоскости описываются комплексной амплитудой [63]:

$$E_0(r) = \left(\frac{r}{\delta}\right)^{m+i\gamma}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.37)$$

где m, γ — действительные числа, δ и σ — масштаб степенной амплитудной составляющей и радиус гауссова пучка. Подставим выражение (4.37) в (4.35) и воспользуемся справочным интегралом [65]:

$$\int\limits_0^\infty y^{\mu-1}\exp\left(-\beta y^2\right)J_n(cy)dy =$$
$$= \frac{c^n\beta^{-(n+\mu)/2}\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}\right)}{2^{n+1}n!}\,{}_1F_1\left(\frac{n+\mu}{2},\,n+1,\,-\frac{c^2}{4\beta}\right), \quad (4.38)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, ${}_1F_1(a,b,x)$ — функция Куммера [65], тогда получим вместо (4.35):

$$E_{m\gamma n}(\rho,\theta,z) = (-i)^{n+1}\left(\frac{2k\sigma^2}{f_2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\delta}\right)^{m+i\gamma}\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f_1}+in\theta\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{ik\sigma^2}{f_1}\right)^{-(m+i\gamma+2)/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+m+i\gamma+2}{2}\right)x^{n/2}}{n!}\times$$
$$\times\,{}_1F_1\left(\frac{n+m+i\gamma+2}{2},n+1,-x\right), \quad (4.39)$$

где

$$x = \frac{\rho^2}{2\omega^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)},$$

$$\omega(z) = \sigma\left[\cos^2\left(\frac{z}{f_0}\right) + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{z}{f_0}\right)\right]^{1/2}, \qquad (4.40)$$

$$R(z) = \frac{1}{2} f_0 \sin\left(\frac{2z}{f_0}\right)\left[1 + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{z}{f_0}\right)\right].$$

Световое поле (4.39) по модулю будет повторяться с периодом $L = \pi f_0$. Амплитуды в плоскостях, разделенных между собой расстоянием в половину периода $L_1 = (\pi f_0)/2$, связаны преобразованием Фурье:

$$E_{m\gamma n}(\rho, \theta, z = L_1) = (-i)^{n+1}\left(\frac{k\sigma^2}{f_2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\delta}\right)^{m+i\gamma} \exp(in\theta) \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{n+m+i\gamma+2}{2}\right)\left(\frac{\rho^2}{2\omega_1^2}\right)^{n/2}}{n!}\,{}_1F_1\left(\frac{n+m+i\gamma+2}{2}, n+1, -\frac{\rho^2}{2\omega_1^2}\right), \qquad (4.41)$$

где $\omega_1 = \dfrac{f_0}{k\sigma}$ — эффективный радиус светового поля в плоскости Фурье. Световые поля (4.39) ортогональны между собой при разных значениях топологического заряда n. Заметим, что при $f_0 = k\sigma^2$ реальная часть аргумента функции Куммера перестает зависеть от расстояния z: $\omega(z) = \sigma = \mathrm{const}$, а мнимая часть аргумента продолжает оставаться зависимой от переменной z: $R(z) = \dfrac{1}{2} f_0 \operatorname{tg}\left(\dfrac{z}{f_0}\right)$. Поэтому и амплитуда всего поля (4.39) будет зависеть от z. Поэтому ГГ-пучки (4.39) не являются модами параболической градиентной среды ни при каких параметрах и значениях номеров m, n, γ, за исключением гауссова пучка ($m = n = \gamma = 0$).

4.3.2. Моды параболической градиентной среды. Рассмотрим параболическую градиентную среду вида (4.31)

$$n^2(r) = n_0^2\left(1 - \tau^2 r^2\right),$$

где $\tau = \alpha/2$. Будем искать решение уравнения Гельмгольца для параболической среды

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(r)\right) E(r, \varphi, z) = 0 \qquad (4.42)$$

с показателем (4.31) в модовом виде:

$$E(r, \varphi, z) = r^p z^q \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_2^2}\right) \exp(in\varphi) \exp(i\beta z)\, F\left(r^t z^l\right), \qquad (4.43)$$

где F — некоторая функция, а β — константа распространения моды.

Можно показать, что решением уравнения (4.42) будет семейство функций:

$$E(r,\varphi,z) = r^n \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_2^2}\right) \exp(\pm in\varphi) \exp(i\beta z) \times$$
$$\times {}_1F_1\left[\frac{n+1}{2} + \frac{\omega_2^2}{8}\left(\beta^2 - k^2 n_0^2\right), n+1, \frac{2r^2}{\omega_2^2}\right], \quad (4.44)$$

где ${}_1F_1(a,b,x)$ — по-прежнему функция Куммера, $\omega_2 = \sqrt{2/(kn_0\tau)}$. Так как функция Куммера имеет следующую асимптотику при $\xi \to \to \infty$ [53]:

$${}_1F_1(a,b,\xi) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \exp(\xi)\xi^{a-b}\left(1 + O(1/\xi)\right), \quad (4.45)$$

где $O(x)$ — стремится к нулю быстрее, чем x, то функция (4.44) будет расходиться при $r \to \infty$. В множестве решений (4.44) есть и не расходящиеся решения. Если у функции Куммера первый параметр равен целому отрицательному числу, то функция Куммера становится равной многочлену, а решение (4.44) сходится к нулю при $r \to \infty$. То есть при условии:

$$\frac{n+1}{2} + \frac{\omega_2^2}{8}\left(\beta^2 - k^2 n_0^2\right) = -s, \quad (4.46)$$

вместо (4.44) получим известные моды Лагерра–Гаусса:

$$E(r,\varphi,z) =$$
$$= r^n \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_2^2}\right) \exp(\pm in\varphi) \exp(i\beta z)\, {}_1F_1\left[-s, n+1, \frac{2r^2}{\omega_2^2}\right] =$$
$$= \frac{s!}{(n+1)_s} r^n \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_2^2}\right) \exp(\pm in\varphi) \exp(i\beta z)\, L_s^n\left(\frac{2r^2}{\omega_2^2}\right), \quad (4.47)$$

где

$$\beta = kn_0\sqrt{1 - \frac{2\tau}{kn_0}(2s+n+1)}. \quad (4.48)$$

Если радиус гауссова пучка моды ЛГ (4.47) не удовлетворяет условию $\omega^2 = [2/(kn_0\tau)]^{1/2}$, то пучок ЛГ уже не будет модой. Распространение немодового пучка Лагерра–Гаусса в параболической среде рассмотрено в [217].

Таким образом, в данном разделе показано, что существует широкий класс модовых решений уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат для параболической среды, но только те решения из этого класса будут обладать конечной энергией (т. е. будут физически реализуемы), которые совпадают с модами Лагерра–Гаусса.

4.3.3. Параболическая градиентная микролинза. В семейство решений (4.39) входит как фундаментальный пучок — гауссов пучок, амплитуда которого также периодически повторяется при распростра-

нении в параболическом градиентном волокне (4.31). Из (4.39) при $n = m = \gamma = 0$ можно получить:

$$E_0(\rho, \theta, z) = (-i)\left(\frac{2k\sigma^2}{f_2}\right)\left(1 - \frac{ik\sigma^2}{f_1}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\omega^2(z)} - \frac{ik\rho^2}{2R_1(z)}\right), \tag{4.49}$$

где

$$R_1^{-1}(z) = \left[\cos^2\frac{z}{f_0} + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2}\right)^2 \sin^2\frac{z}{f_0} - 1\right] \times$$
$$\times \left\{f_0 \operatorname{tg}\frac{z}{f_0}\left[\cos^2\frac{z}{f_0} + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2}\right)^2 \sin^2\frac{z}{f_0}\right]\right\}^{-1}. \tag{4.50}$$

Из (4.49) и (4.50) следует, что при $f_0 = k\sigma^2$ гауссов пучок распространяется в параболическом волокне без изменения, сохраняя свой диаметр. Если $f_0 \neq k\sigma^2$, то радиус гауссова пучка меняется по формуле:

$$\omega(z) = \sigma\left[\cos^2\left(\frac{z}{f_0}\right) + \left(\frac{f_0}{k\sigma^2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{z}{f_0}\right)\right]^{1/2}, \tag{4.51}$$

из которой следует, что минимальный радиус, равный $\omega_1 = f_0/(k\sigma)$ (если $f_0 < k\sigma^2$) достигается на расстоянии $L_1 = \pi f_0/2$ от начала ($z = 0$). При этом диаметр гауссова пучка по полуспаду интенсивности будет равен:

$$\mathrm{FWHM} = \left(\frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi}\right)\frac{\lambda r_0 n_0}{\sigma\sqrt{n_0^2 - n_1^2}}. \tag{4.52}$$

Таким образом, можно рассмотреть градиентную параболическую линзу как отрезок параболического волокна с радиусом r_0 и длиной вдоль оптической оси $L_1 = (\pi f_0)/2$. Такая ГП-линза будет фокусировать падающий на ее входную поверхность плоский гауссов пучок с радиусом σ в фокусное пятно с диаметром (4.52), которое сформируется вблизи выходной плоскости линзы (рис. 4.11).

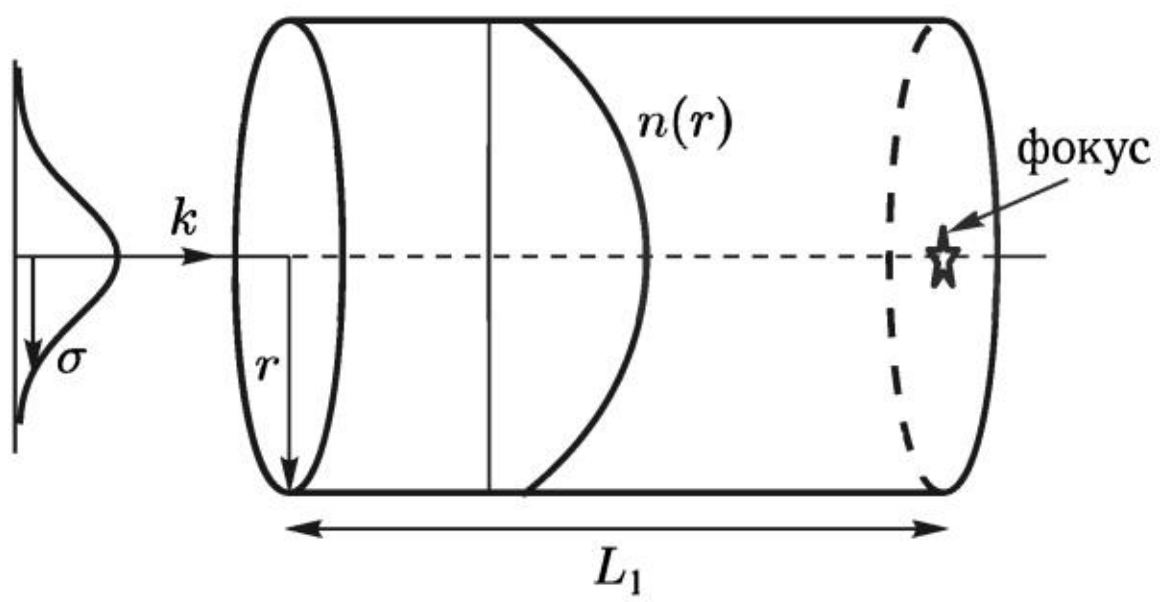


Рис. 4.11. Схема фокусировки гауссова пучка с помощью ГП-линзы

Из (4.52) следует выражение для числовой апертуры ГП-линзы ($n_1 = 1$):

$$\mathrm{NA} = \frac{\sigma}{r_0}\sqrt{n_0^2 - 1}\,. \tag{4.53}$$

При $\sigma = r_0$ числовая апертура (4.53) совпадает с NA для планарной линзы Микаэляна [211]. Например, при $n_0 = 1{,}5$, $n_1 = 1$, $\sigma = r_0$ получим следующие значения длины ГП-линзы $L_1 = 2{,}1r_0$ и диаметра фокусного пятна $\mathrm{FWHM} = 0{,}36\lambda$. Это немного больше, чем дифракционный предел в среде с показателем преломления $n_0 = 1{,}5$: $\mathrm{FWHM} = 0{,}34\lambda$.

Однако так как при выводе (4.52) предполагается, что линза имеет по радиусу неограниченные размеры и показатель преломления (4.31) спадает на бесконечности до нуля, то такое значение ширины фокуса ($\mathrm{FWHM} = 0{,}36\lambda$) нельзя реализовать на практике, когда реальная линза ограничена радиусом r_0, при котором $n(r_0) = 1$.

4.3.4. Бинарная параболическая линза. Градиентную параболическую линзу можно приближенно заменить на бинарную параболическую линзу по правилу, схематично изображенному на рис. 4.12.

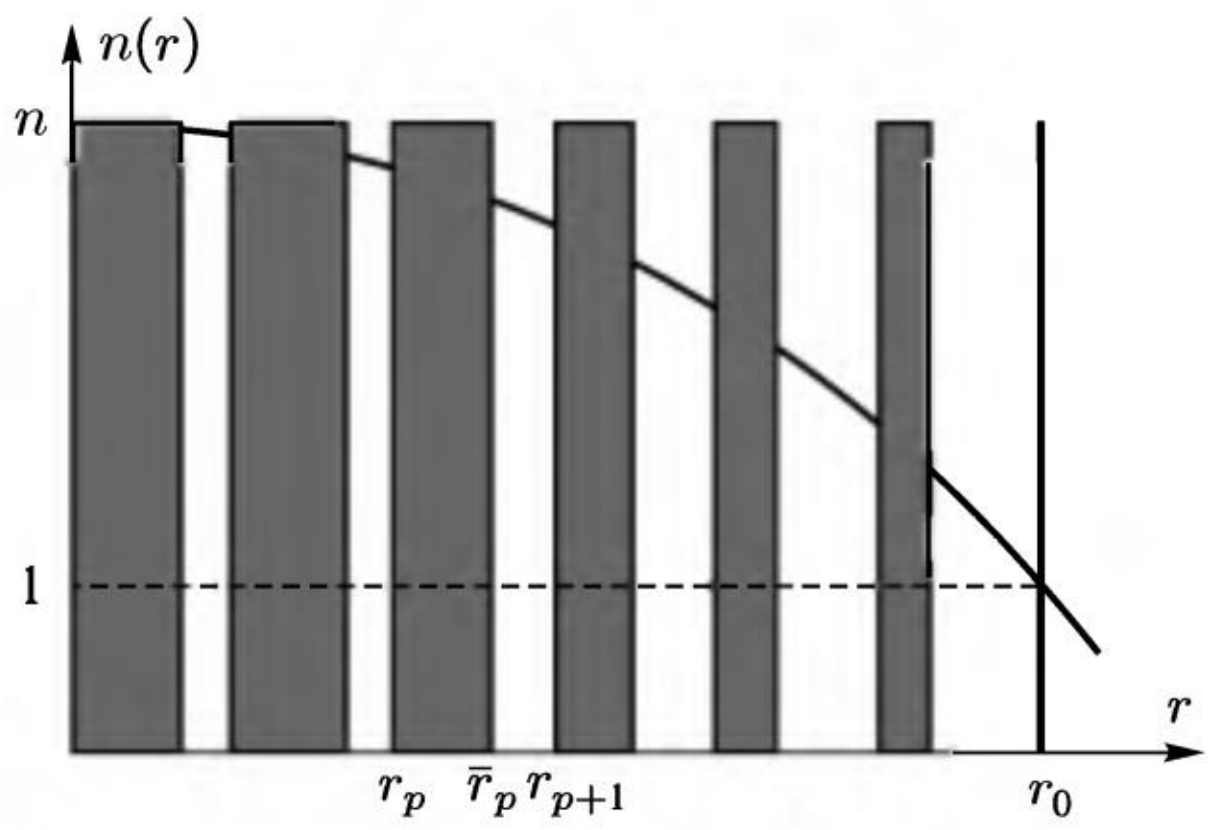


Рис. 4.12. Схема замены непрерывной параболической зависимости показателя преломления на кусочно-постоянную (бинарную) зависимость

Согласно рис. 4.12 радиус ГП-линзы r_0 разбивается на N равных отрезков длиной Δ: $r_0 = N\Delta$, тогда радиусы начала и концов этих отрезков равны: $r_p = p\Delta$, $p = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Начало p-го бинарного кольца совпадает радиусом r_p, а конец p-го бинарного кольца $\overline{r}_p$ находится из уравнения:

$$\left(r_{p+1}^2 - \overline{r}_p^2\right) + n_0\left(\overline{r}_p^2 - r_p^2\right) = 2n_0 \int\limits_{r_p}^{r_{p+1}} \sqrt{1 - \tau^2 r^2}\; r\,dr. \tag{4.54}$$

Из уравнения (4.54) можно получить явное выражение для радиуса конца p-го бинарного кольца:

$$\overline{r}_p^2 = \frac{\left(n_0 r_p^2 - r_{p+1}^2\right)}{(n_0 - 1)} + \frac{8}{3(n_0 - 1)\tau^2}\left[\left(1 - (\tau r_p)^2\right)^{1/3} - \left(1 - (\tau r_{p+1})^2\right)^{1/3}\right], \tag{4.55}$$

где $p = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$.

Заметим, что в (4.55) радиусы скачков показателя преломления r_p можно выбирать не эквидистантными и учитывать минимальный технологически возможный размер зоны.

4.3.5. Результаты моделирования.

Планарная градиентная параболическая линза. Для начала рассмотрим двумерный случай линзы. Моделировалась фокусировка TE-поляризованной падающей волны методом FDTD в коммерческой программе FullWave (Rsoft Design Group). Сетка разбиения отсчетов по оптической оси Z и поперечной оси X была $\lambda/130$ (4,1 нм), шаг по времени $\Delta(cT) = 2{,}8$ нм.

На рис. 4.13 представлен показатель преломления в линзе в градациях серого. Радиус линзы $r_0 = 1$ мкм, $n_0 = 1{,}5$, $\alpha = 1{,}49$ мкм$^{-1}$, $\lambda = 0{,}532$ мкм. Так как $\alpha = 2/f_0$, то $f_0 = 2/\alpha = 1{,}342$ мкм, длина линзы $L_1 = \pi f_0/2 = \pi/\alpha = 2{,}1$ мкм.

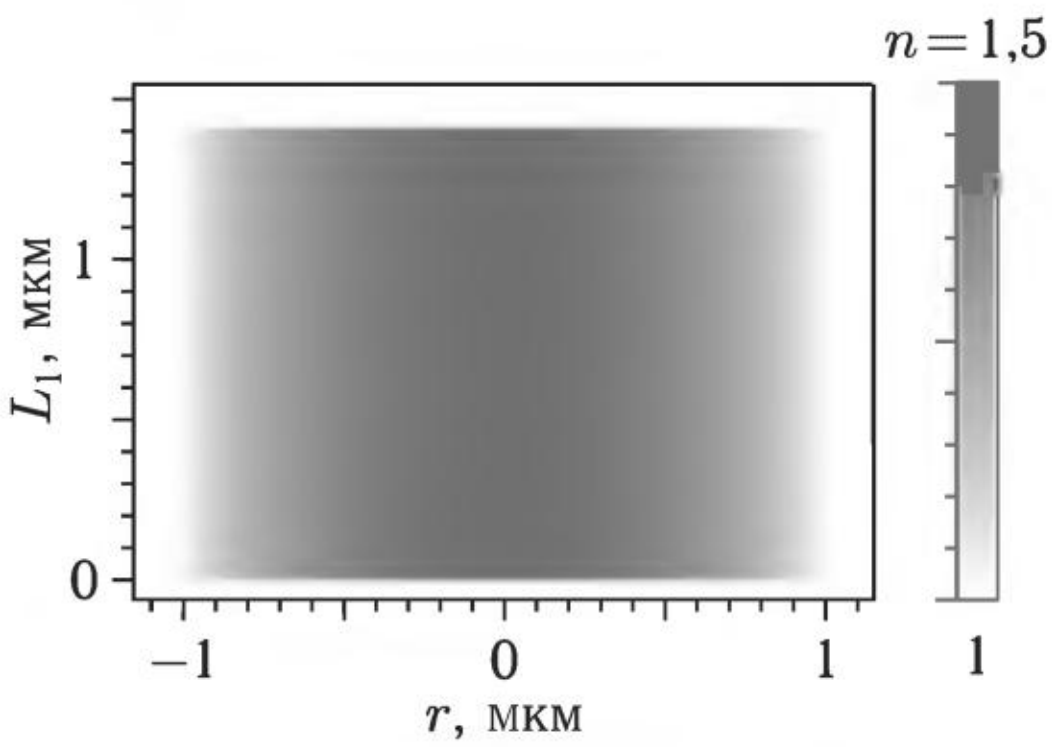


Рис. 4.13. Показатель преломления в градиентной бинарной линзе в градациях серого

На рис. 4.14 представлено распределение интенсивности электрической компоненты на расстоянии 10 нм за линзой при плоской падающей волне и гауссовом пучке с радиусом $\sigma = 1$ мкм.

Ширина фокусного пятна по полуспаду интенсивности равна FWHM $= 0{,}388\lambda = 0{,}2$ мкм в случае плоской падающей волны и FWHM $= 0{,}5\lambda = 0{,}27$ мкм в случае гауссова пучка. Как видно из рис. 4.14, максимумы интенсивности рядом с основным фокусным пятном около 30 %, что свидетельствует о неоптимальной длине линзы.

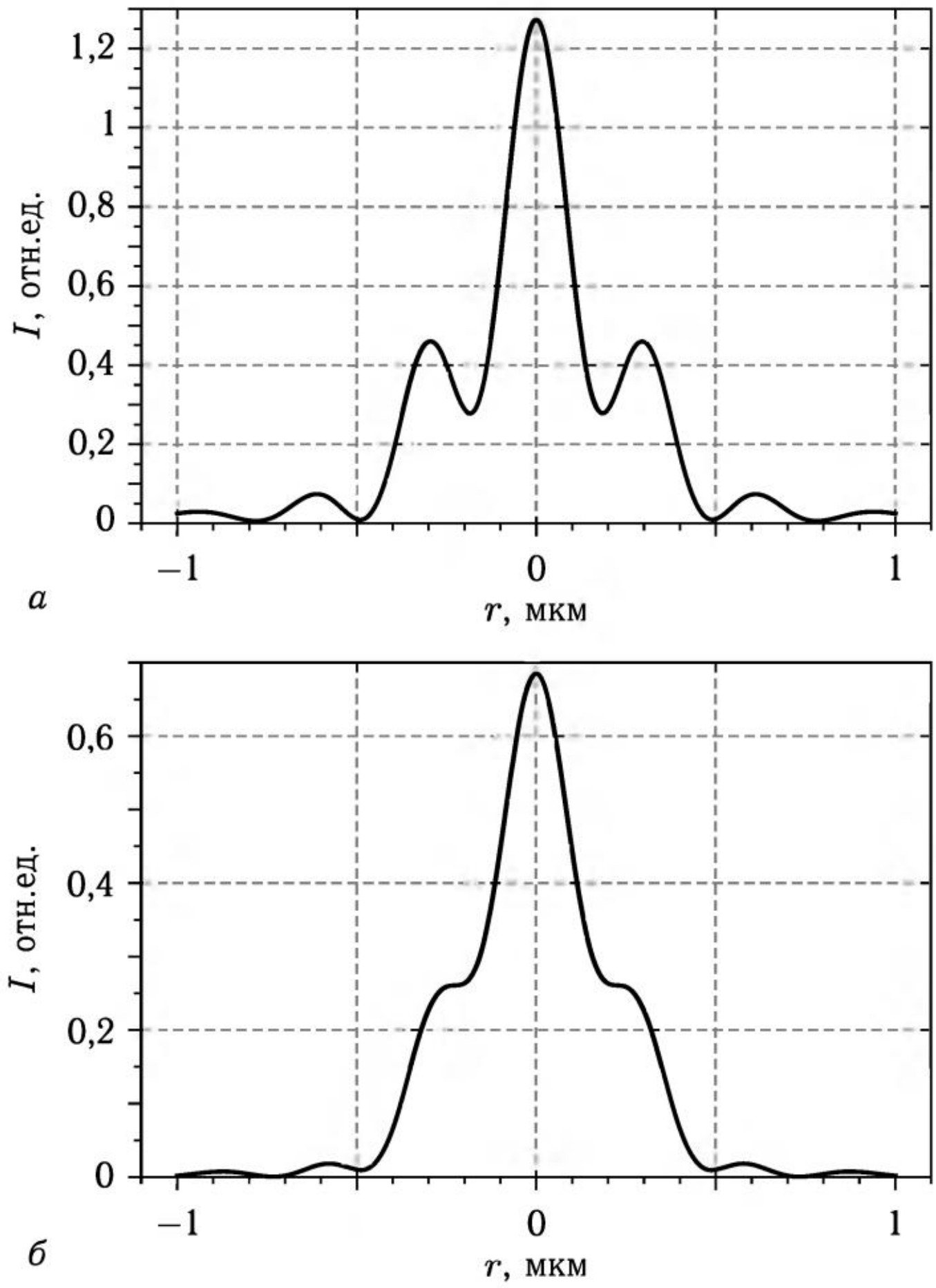


Рис. 4.14. Распределение интенсивности ($|E^2|$) в фокусной плоскости в 10 нм за линзой в случае плоской падающей волны (*а*) и гауссова пучка (*б*)

Можно достичь более острой фокусировки, изменив длину линзы. На рис. 4.15 показана зависимость ширины фокусировки света линзой FWHM в длинах волн от длины линзы L_1.

Как видно из рис. 4.15, минимальная ширина фокусного пятна для гауссова пучка и плоской волны достигаются при различной длине линзы L_1. Наилучшая фокусировка плоской волны достигается при значении $L_1 = 1{,}56$ мкм, при этом $\mathrm{FWHM} = 0{,}375\lambda$, а минимальное фокусное пятно при гауссовом падающем пучке составляет $\mathrm{FWHM} = 0{,}394\lambda$ при длине линзы $L_1 = 1{,}73$ мкм. В этом результате проявляется общая закономерность при фокусировке лазерного света: при прочих равных условиях увеличение боковых лепестков (рис. 4.14 *а*) сопровождается уменьшением ширины фокусного пятна (и увеличением глубины фокуса).

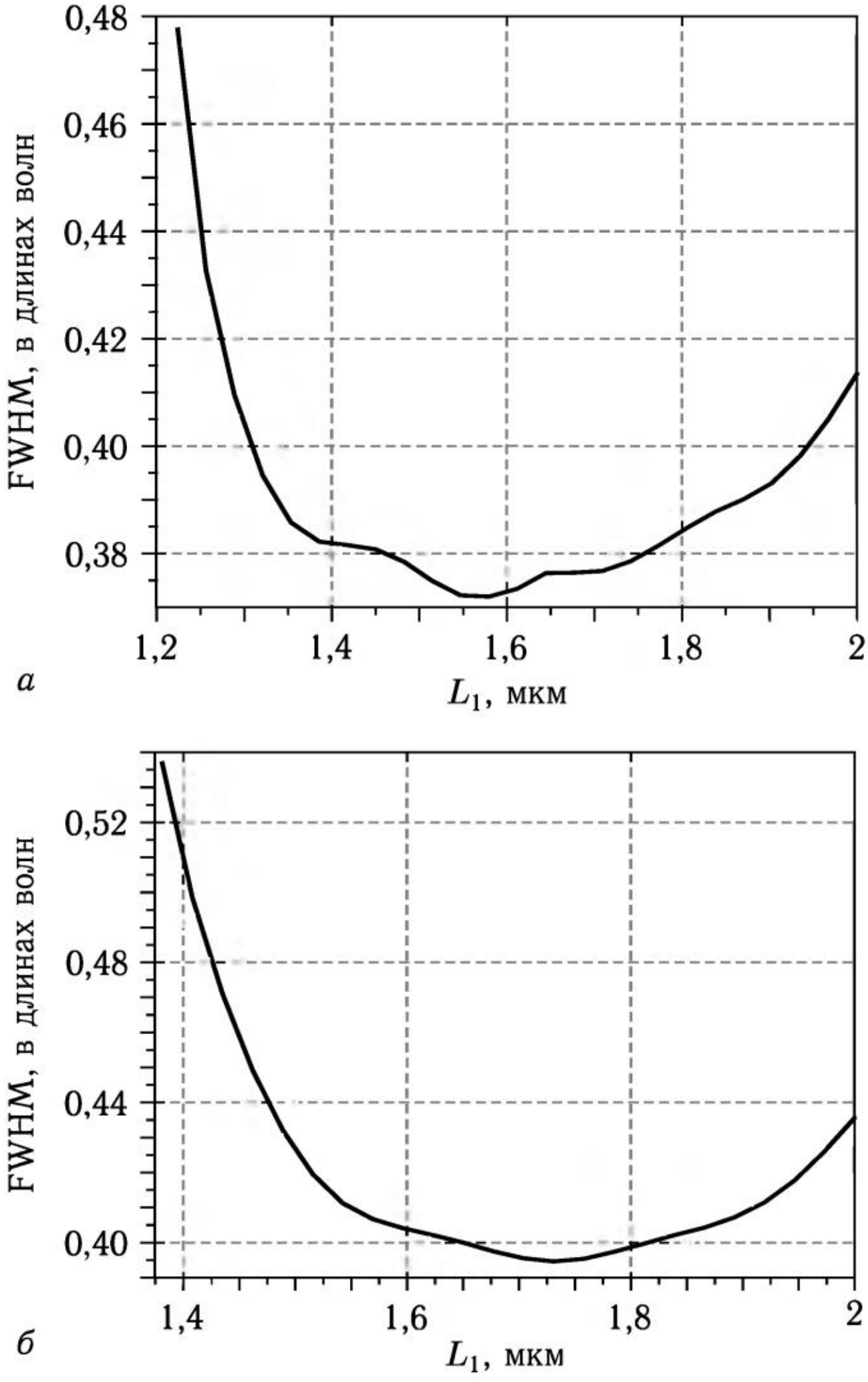


Рис. 4.15. Зависимость ширины фокусного пятна в 10 нм от выходной плоскости линзы от длины линзы L для плоской волны (*а*) и гауссова пучка (*б*) на входе линзы

В трехмерном случае моделировалась линза с градиентным показателем преломления в плоскости XY, зависящим от радиуса r. Градиентное распределение показателя преломления трехмерной линзы в плоскости XY представлен на рис. 4.16.

При моделировании трехмерного случая использовалась сетка отсчетов $\lambda/40$ (13,3 нм) по всем трем осям. Моделировалось распространение линейно поляризованного света через линзу (основная компонента падающего поля E_y), падающая волна — плоский гауссов пучок с радиусом $\sigma = 1$ мкм. На рис. 4.17а представлена зависимость ширины

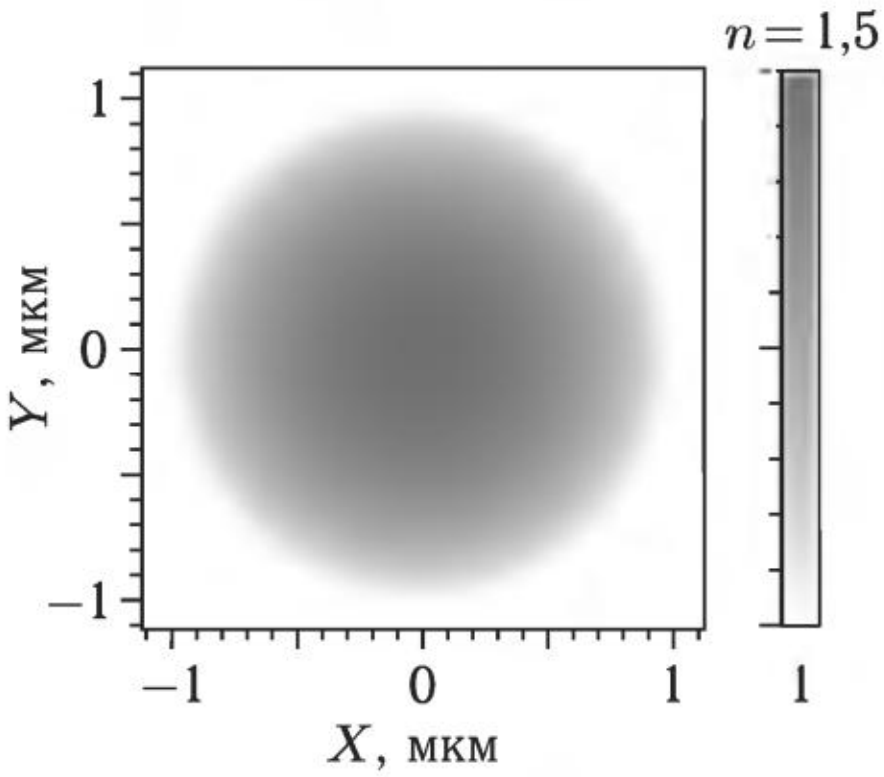


Рис. 4.16. Градиентное распределение показателя преломления линзы в плоскости XY в градациях серого

фокусного пятна FWHM от длины линзы L_1, измеренная через центр фокусного пятна вдоль оси X.

Видно, что минимум достигается при длине линзы $L_1 = 1{,}6$ мкм, при этом ширина фокуса вдоль оси X равна FWHM$=0{,}42\lambda$. Распределение интенсивности ($|E^2|$) в фокусном пятне линзы при этих параметрах представлено на рис. 4.17*б*. За счет линейной поляризации фокусное пятно уширяется вдоль оси Y и составляет FWHM $= 0{,}70\lambda$.

На практике сложно изготовить линзу с градиентным непрерывным профилем показателя преломления. Бинарную же микролинзу можно изготовить по технологии изготовления 3D фотонно-кристаллических волноводов или волноводов Брегга [218]. На рис. 4.18 представлено бинарное распределение показателя преломления в плоскости XY бинарной линзы (4.55), аппроксимирующей градиентную параболическую линзу.

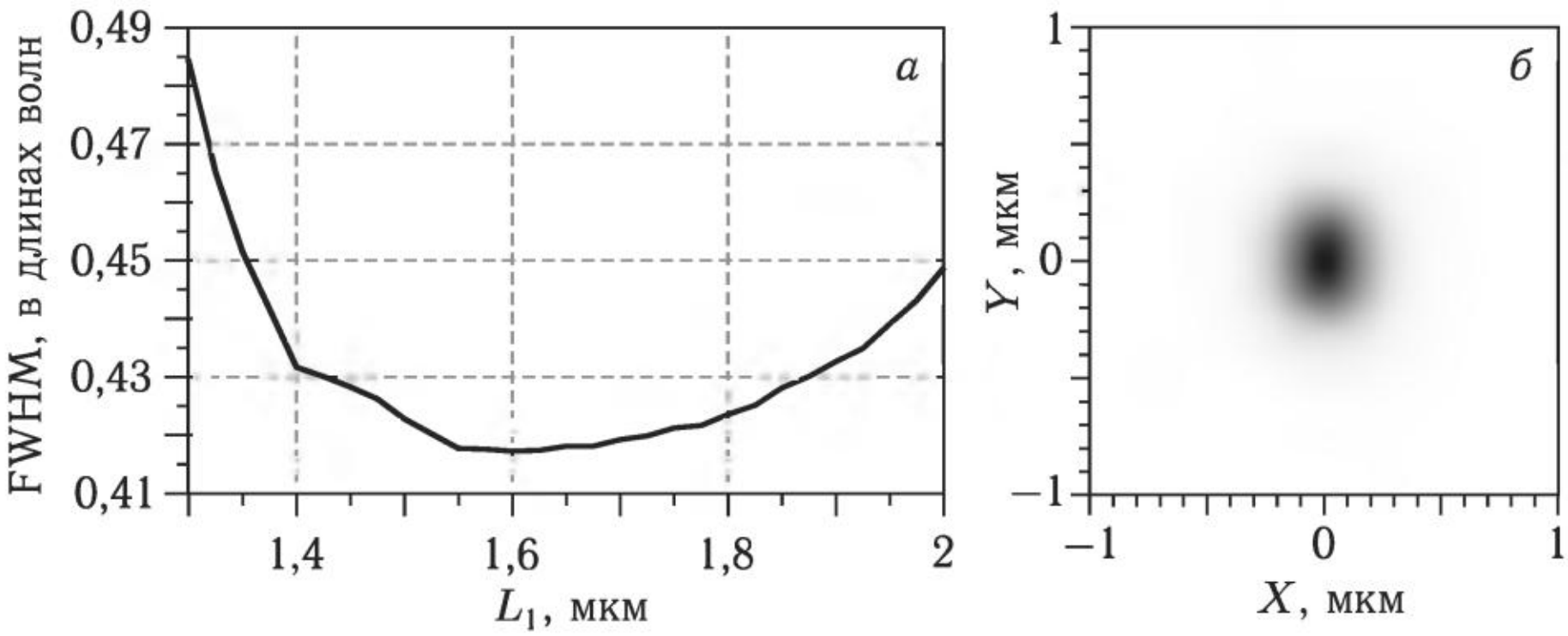


Рис. 4.17. Зависимость диаметра фокусного пятна вдоль оси X в 10 нм от выходной плоскости линзы от длины линзы L_1 для линейно-поляризованного гауссова пучка на входе линзы с радиусом $\sigma = 1$ мкм (*а*) и распределение интенсивности (негатив) в фокусном пятне линзы при оптимальной длине $L_1 = 1{,}6$ мкм (*б*)

Такая линза будет фокусировать свет немного хуже варианта с непрерывным изменением показателя преломления (4.31). На рис. 4.19 показано распределение интенсивности в фокусной плоскости бинарной параболической линзы и сечения этого распределения

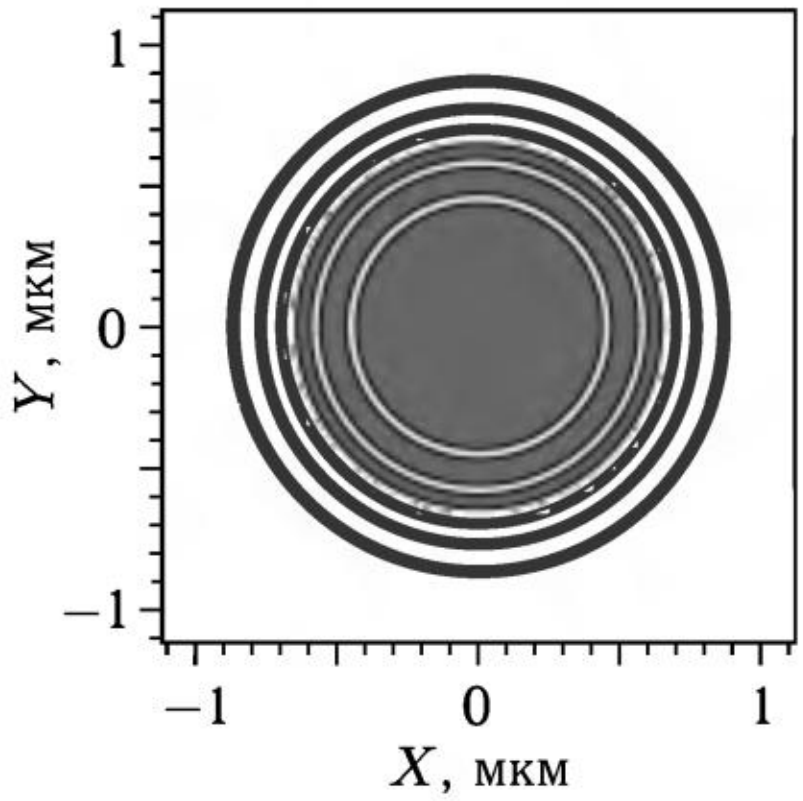


Рис. 4.18. Бинарное распределение показателя преломления линзы в плоскости XY. Темный цвет соответствует показателю преломления $n = 1{,}5$, белый — $n = 1$

через центр вдоль осей X и Y. Длина линзы выбрана оптимальной и равна $L_1 \approx 1{,}9$ мкм (параксиальная теория дает немного большее значение $L_1 = 2{,}1$ мкм). Падающее линейно-поляризованное поле с плоским волновым фронтом имеет гауссово распределение интенсивности с радиус $\sigma = 1$ мкм. Минимальный размер зоны (разница между соседними радиусами скачков показателя преломления) бинарной линзы равен 35 нм. При моделировании использовалась сетка отсчетов $\lambda/70$ (7,6 нм) по всем трем осям. Начальная плоскость поляризации параллельна плоскости ZY.

Диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности (для рис. 4.19) вдоль оси X равен $\mathrm{FWHM} = 0{,}45\lambda$, вдоль оси Y — $\mathrm{FWHM} = 0{,}78\lambda$. Фокусное пятно вытянуто вдоль оси Y и почти не имеет боковых лепестков. Напомним, что параксиальная теория дает диаметр фокусного пятна равный $\mathrm{FWHM} = 0{,}36\lambda$.

В разделе получены следующие результаты [62]. Получено выражение для комплексной амплитуды семейства параксиальных гипергеометрических лазерных пучков, распространяющихся в градиентном параболическом волокне (уравнение (4.39)). Найден широкий класс модовых решений уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат для градиентной параболической среды; эти решения пропорциональны функциям Куммера (уравнение (4.44)). Показано, что только те решения из этого класса, будут обладать конечной энергией (т. е. будут физически реализуемы), которые совпадают с модами Лагерра–Гаусса (уравнение (4.47)). Отрезок определенной длины градиентного параболического волокна рассмотрен как параболическая линза, для которой получены выражения для числовой апертуры и для диаметра фокуса по полуспаду интенсивности (уравнения (4.52), (4.53)). Моделирование FDTD-методом фокусировки линейно-поляризованного гауссова пучка с помощью 3D градиентной параболической линзы показало,

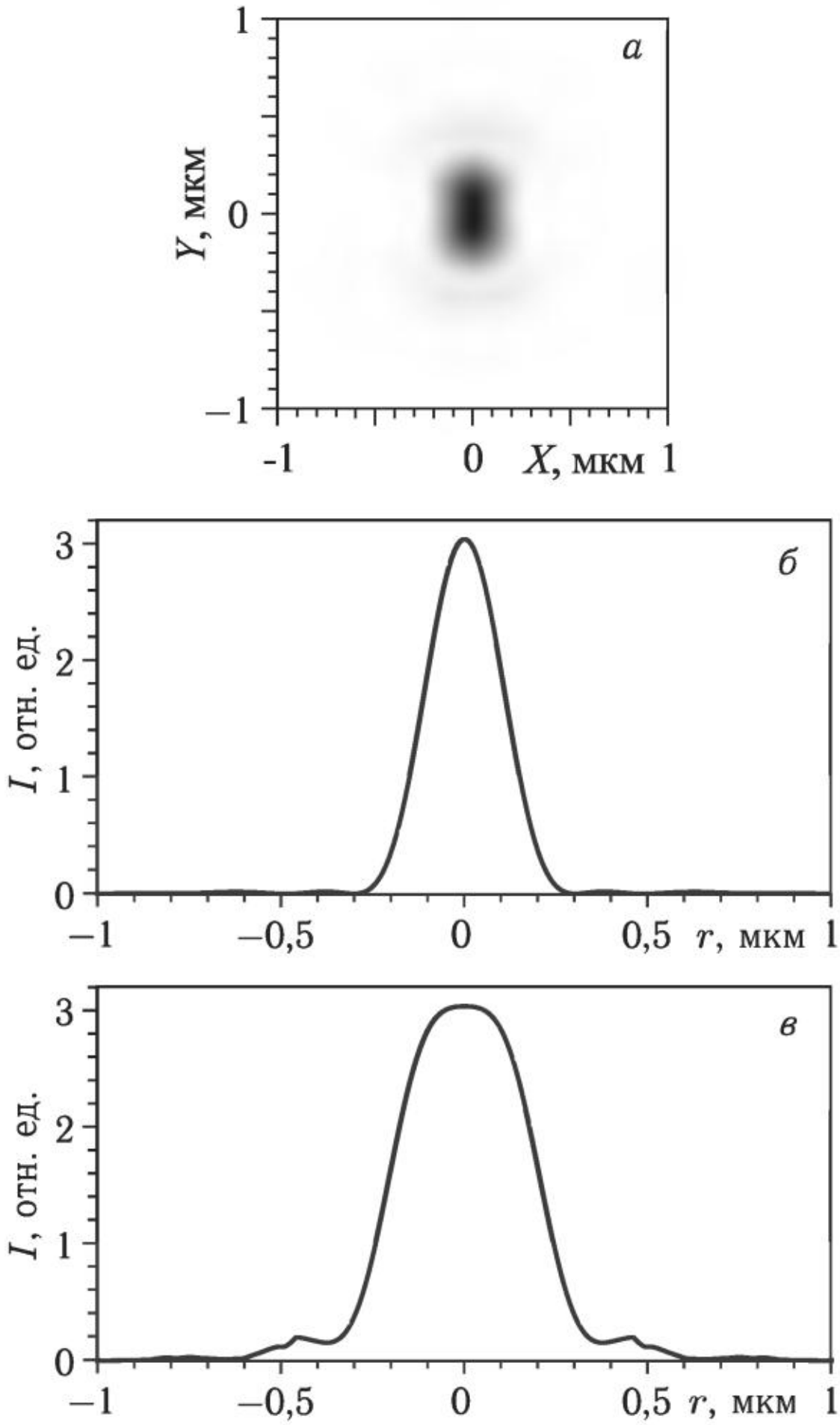


Рис. 4.19. Распределение интенсивности (негатив) в фокусной плоскости бинарной параболической линзы на рис. 9 (*а*) и сечения интенсивности через центр фокусного пятна вдоль оси X (*б*) и Y (*в*)

что оптимальная длина линзы меньше, чем предсказывает скалярная теория, и при этом меньший диаметр эллиптического фокусного пятна равен $\mathrm{FWHM} = 0{,}42\lambda$ (рис. 4.17 *б*).

4.4. Оптические элементы для формирования идеального вихря

В [219] впервые рассмотрен «идеальный» оптический вихрь (ИОВ) (perfect vortex), который не изменяет своего радиуса при изменении величины топологического заряда. Теоретически такой вихрь описывается в виде ряда из функций Бесселя одного порядка, но разных

масштабов. На практике такой ряд заменяют конечной суммой, что приводит к ошибкам при формировании «идеального» оптического вихря. В эксперименте в [219] ИОВ формируют с помощью фазового оптического элемента, состоящего из конечного набора концентрических колец, толщина каждого из которых должна быть как можно меньше, а фазы в каждом кольце линейно зависят от азимутального угла и пропорциональны топологическому заряду. Но, так как амплитуда поля в каждом кольце должна быть разной, то ширина каждого кольца, пропорционально амплитуде, тоже должна быть разной. Это приводит к противоречивым требованиям, с одной стороны, ширина кольца должна быть минимальной, чтобы соответствовать ширине дельта-функции, а, с другой стороны, ширина каждого кольца должна быть пропорциональна заранее заданной амплитуде. Все это привело к низкому качеству результатов моделирования (рис. 3 в [219]) и эксперимента (рис. 6 в [219]). В [220] по-другому формируют ИОВ: с помощью конического аксикона и спиральной фазовой пластинки.

Однако формула, которая, по мнению авторов, описывает амплитуду сформированного таким образом ИОВ (уравнение (1) в [220]), описывает ИОВ очень приближенно. В [221] используется пространственный модулятор света, на который подается фазовая маска в виде комбинации аксикона и спиральной фазовой пластинки. С помощью этой маски формируется пучок Бесселя–Гаусса, который проходит через линзу, выполняющую преобразование Фурье. Этот подход основан также на неточной формуле, описывающей дифракцию на винтовом аксиконе. В работе [222] исследуется формирование ИОВ с помощью аксикона, но показано, что можно менять радиус ИОВ с помощью простого перемещения аксикона, что устраняет необходимость использования линз с другим фокусным расстоянием. В работе [223] вместо аксикона предлагается формировать ИОВ с помощью амплитудно-фазового оптического элемента, функция пропускания которого аппроксимирует функцию, описывающую амплитуду моды Бесселя n-го порядка. В [223] наиболее близко подошли к оптимальному фазовому элементу, который предлагается в данной работе.

В данном разделе будут получены формулы, описывающие распределение интенсивности ИОВ, сформированного разными способами, и будет показано, что интенсивность на кольце ИОВ слабо, но зависит от величины топологического заряда. Мы сравним формирование ИОВ с помощью фокусировки: 1) амплитудно-фазового светового поля, формирующего моду Бесселя, ограниченную по радиусу, 2) фазового светового поля (амплитуда постоянная), описанного в [6] и 3) фазового поля (амплитуда постоянная), сформированного с помощью конического аксикона и спиральной фазовой пластинки [220]. Все эти три способа отличаются от предложенного в [219].

Мы покажем, что оптимальный фазовый оптический элемент, предложенный в [224], является наилучшим кандидатом для формирования ИОВ.

4.4.1. Формирование идеального оптического вихря с помощью амплитудно-фазового оптического элемента. «Идеальный» оптический вихрь [219] имеет комплексную амплитуду вида:

$$E_0(\rho,\theta) = \delta(\rho-\rho_0)\exp(in\theta), \tag{4.56}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, (ρ,θ) — полярные координаты в фурье-плоскости сферической линзы, n — целое число, равное топологическому заряду оптического вихря. Из (4.56) видно, что радиус бесконечно тонкого кольца ρ_0 не зависит от величины топологического заряда n. Сформировать ИОВ (4.56) можно с помощью идеальной моды Бесселя, амплитуда которой в начальной плоскости, расположенной на фокусном расстоянии от сферической линзы, имеет вид:

$$F_0(r,\varphi) = J_n(\alpha r)\exp(in\varphi), \tag{4.57}$$

где размерный параметр α задает масштаб функции Бесселя первого рода n-го порядка $J_n(x)$.

Это следует из условия ортогональности функций Бесселя на всей действительной оси [225]:

$$\alpha\int\limits_0^\infty J_m(\alpha r)\,J_m\left(\frac{k\rho r}{f}\right)r\,dr = \delta\left(\alpha-\frac{k\rho}{f}\right), \tag{4.58}$$

где k — волновое число монохроматического когерентного света, f — фокусное расстояние линзы.

Из (4.58) получим радиус кольца с максимальной интенсивностью ИОВ, который определен в (4.56):

$$\rho_0 = \frac{\alpha f}{k}. \tag{4.59}$$

При формировании поля (2) возникают две проблемы. Во-первых, функция Бесселя знакопеременная, и поэтому для ее оптического формирования нужно совмещать амплитудную маску, имеющую пропускание пропорциональное функции $|J_n(\alpha r)|$ и фазовую маску, имеющую пропускание, равное:

$$\operatorname{sign} J_n(\alpha r) = \begin{cases} 1, & J_n(\alpha r) > 0, \\ -1, & J_n(\alpha r) < 0. \end{cases} \tag{4.60}$$

Во-вторых, мода Бесселя в (4.57) должна быть на практике ограничена круглой апертурой радиуса R. Обе эти причины приводят к искажению ИОВ.

В этом разделе далее рассматривается формирование ИОВ с помощью светового поля (4.57), но ограниченного круглой апертурой радиуса R:

$$F_1(r,\varphi) = \operatorname{circ}\left(\frac{r}{R}\right)J_n(\alpha r)\exp(in\varphi), \tag{4.61}$$

где

$$\operatorname{circ}\left(\frac{r}{R}\right)=\begin{cases}1, & r\leqslant R,\\ 0, & r>R.\end{cases} \tag{4.62}$$

Комплексную амплитуду светового поля (4.61) в фурье-плоскости идеальной сферической линзы с фокусным расстоянием f можно найти с помощью преобразования Фурье в цилиндрических координатах:

$$E_1(\rho,\theta)=(-i)^{n+1}\left(\frac{k}{f}\right)e^{in\theta}\int\limits_0^R J_n(\alpha r)J_n\left(\frac{kr\rho}{f}\right)r\,dr=$$

$$=(-i)^{n+1}\left(\frac{kR}{f}\right)e^{in\theta}\left[\frac{\alpha J_{n+1}(\alpha R)\,J_n(xR)-xJ_n(\alpha R)\,J_{n+1}(xR)}{\alpha^2-x^2}\right], \tag{4.63}$$

где $x=k\rho/f$. Заметим, что по форме поле (4.63) существенно отличается от заданного ИОВ (4.56). Но, несмотря на это, радиус кольца с максимальной интенсивностью будет такой же, как (4.59), и не будет зависеть от топологического заряда. Действительно, из (4.59) следует, что кольцо с максимальной интенсивностью ИОВ должно иметь радиус, при котором знаменатель в (4.63) обращается в ноль. Но при $x=\alpha$ обращается в ноль и числитель. Неопределенность ноль на ноль в (4.63) при $x=\alpha$ (в светлом кольце ИОВ с максимальной интенсивностью) можно раскрыть с помощью справочного интеграла [65]:

$$\int\limits_0^R J_n^2(\alpha r)\,r\,dr=\frac{R^2}{2}\left[J_n^2(\alpha R)-J_{n-1}(\alpha R)\,J_{n+1}(\alpha R)\right]. \tag{4.64}$$

Тогда вместо (4.63) с учетом (4.64) и при $x=\alpha$ получим

$$E_1\left(\rho=\alpha f k^{-1},\theta\right)=(-i)^{n+1}\left(\frac{kR^2}{2f}\right)e^{in\theta}\times$$
$$\times\left[J_n^2(\alpha R)-J_{n-1}(\alpha R)\,J_{n+1}(\alpha R)\right]. \tag{4.65}$$

Из (4.65) видно, что максимальная интенсивность на кольце ИОВ при постоянных значениях α и R будет зависеть от величины топологического заряда n. Хотя при больших значениях αRинтенсивность почти не будет зависеть от n, так как, пользуясь асимптотикой функции Бесселя, получим, что

$$J_n^2(\alpha R)-J_{n-1}(\alpha R)\,J_{n+1}(\alpha R)\approx\left(\frac{2}{\pi\alpha R}\right)\left[\cos^2\left(\alpha R-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$
$$\left.-\cos\left(\alpha R-\frac{(n+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha R-\frac{(n-1)\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi\alpha R}\right)\left[\cos^2\left(\alpha R-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\alpha R-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi\alpha R}\right). \tag{4.66}$$

Из (4.66) следует, что интенсивность на кольце с максимальной интенсивностью ИОВ будет асимптотически стремиться при больших значениях αR к значению, которое не зависит от величины топологического заряда:

$$I_1\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_1|^2 = \left(\frac{kR}{\pi\alpha f}\right)^2. \tag{4.67}$$

Чтобы в дальнейшем получить точные характеристики ИОВ, выберем специальный масштаб функции Бесселя (4.61), а именно положим, что $\alpha R = \gamma_{n,\nu}$, где $\gamma_{n,\nu}$ — ν-й корень функции Бесселя: $J_n(\gamma_{n,\nu}) = 0$. Тогда вместо (4.63), получим:

$$E_1(\rho,\theta) = (-i)^{n+1}\left(\frac{kR^2}{f}\right)e^{in\theta}\left[\frac{\gamma_{n,\nu}J_{n+1}(\gamma_{n,\nu})\,J_n(xR)}{\gamma_{n,\nu}^2 - (xR)^2}\right]. \tag{4.68}$$

Из (4.68) видно, что нули функции амплитуды (темные кольца интенсивности ИОВ) будут совпадать с нулями функции Бесселя n-го порядка, и их радиусы будут равны:

$$\rho_{n,\mu} = \frac{\gamma_{n,\mu} f}{kR},\ \mu \neq \nu, \tag{4.69}$$

а при $\mu = \nu$ будет максимум интенсивности (светлое кольцо ИОВ), равный:

$$I_1\left(\rho = \frac{\gamma_{n,\nu} f}{kR}\right) = |E_1|^2 = I_0 J_{n+1}^4(\gamma_{n,\nu}), \tag{4.70}$$

где $I_0 = [kR^2/(2f)]^2$ — интенсивность в центре диска Эйри, т. е. в центре картины дифракции Фраунгофера плоской волны единичной амплитуды на круглой апертуре с радиусом R. Уравнение (4.70) следует из (4.65) при $\alpha R = \gamma_{n,\nu}$. Действительно, с учетом (4.65) с помощью рекуррентных соотношений для функции Бесселя при $\alpha R = \gamma_{n,\nu}$ вместо (4.68) получим:

$$E_1\left(\rho = \frac{\gamma_{n,\nu} f}{kR}\right) = (-i)^{n+1} e^{in\theta}\left(\frac{kR^2}{2f}\right)\left[-J_{n-1}(\gamma_{n,\nu})\,J_{n+1}(\gamma_{n,\nu})\right] =$$
$$= (-i)^{n+1} e^{in\theta}\left(\frac{kR^2}{2f}\right) J_{n+1}^2(\gamma_{n,\nu}). \tag{4.71}$$

Из (4.71) сразу следует (4.70). Из (4.70) видно, что максимальная интенсивность ИОВ зависит от n и от значения корня $\gamma_{n,\nu}$. Но корни следует выбирать не произвольно, а чтобы выполнялось условие сохранения масштаба функции Бесселя α и радиуса апертуры R, т. е. чтобы выполнялось условие:

$$\alpha R = \gamma_{n,\nu} = \gamma_{m,\mu}. \tag{4.72}$$

Это означает, что для разных топологических зарядов n и m нужно выбирать такие корни функции Бесселя в (4.57), чтобы выполнялось условие (4.72). В этом случае кольцо с максимальной интенсивностью будет сохранять свой радиус при изменении величины топологического

заряда. Заметим, что у функций Бесселя с разными номерами нет точно совпадающих корней, но найти два близких корня всегда можно.

Из (4.68) можно оценить ширину кольца с максимальной интенсивностью. Она равна расстоянию между двумя нулями функции Бесселя n-го порядка с номерами $\nu-1$ и $\nu+1$:

$$\Delta\rho_0 = \frac{(\gamma_{n,\nu+1} - \gamma_{n,\nu-1})\, f}{kR} \approx \frac{2\pi f}{kR}. \tag{4.73}$$

А ширина кольца ИОВ по полуспаду интенсивности в примерно два раза меньше: $\mathrm{FWHM} = \pi f/(kR)$.

Оценим эффективность формирования ИОВ с помощью светового поля (4.61). Если осветить круглую апертуру радиуса R плоской волной с единичной интенсивностью, то мощность падающего света на оптический элемент с пропусканием (4.61) будет пропорциональна площади круга: $W_0 = \pi R^2$. А мощность света, прошедшего оптический элемент с пропусканием (4.61), пропорциональна правой части (4.64), умноженной на 2π, и с учетом (4.66) для больших αR равна $W_1 = 2R/\alpha$. Поэтому эффективность формирования ИОВ с помощью (4.61) будет не больше, чем $\eta = W_1/W_0 = 2/(\pi\alpha R)$. Из этой формулы следует, что с увеличением радиуса апертуры эффективность уменьшается.

4.4.2. Формирование идеального оптического вихря с помощью оптимального фазового оптического элемента. Под оптимальным мы понимаем такой оптический элемент, который направляет наибольшую часть энергии света в кольцо заданного радиуса. В [224] описан такой оптический элемент, пропускание которого равно:

$$F_2(r,\varphi) = \mathrm{circ}\left(\frac{r}{R}\right) \mathrm{sign}\, J_n(\alpha r) \exp(in\varphi). \tag{4.74}$$

В (4.74) знаковая и апертурная функции определены в (4.60) и (4.61). Амплитуда поля в фокусе сферической линзы, сформированная оптическим элементом с пропусканием (4.74), но при $n = 0$, получена в [224]. Ниже мы получим выражение для амплитуды при любом целом n. Будем исходить из того, что круг радиусом R можно разделить на N колец с радиусами r_m, в которых происходит смена знака функции (4.60):

$$r_m = \frac{\gamma_{n,m}}{\alpha},\ m = 1, 2, \ldots, N, \quad r_N = R. \tag{4.75}$$

Комплексная амплитуда поля в фокусе линзы, сформированного оптическим элементом с функцией пропускания (4.74), можно выразить как сумму от вкладов каждого такого кольца ($r_0 = 0$):

$$E_2(\rho,\theta) = (-i)^{n+1} \left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \int\limits_{r_m}^{r_{m+1}} J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r\, dr. \tag{4.76}$$

Если положить в (4.76) $\rho = \alpha f/k$, то аргумент функции Бесселя в (4.76) не будет зависеть от физических параметров f и k и будет равен αr. Положим (без ограничения общности) параметр масштаба α таким, чтобы функция Бесселя на краю апертуры имела ноль, т. е. $\alpha R = \gamma_{n,\ N}$.

Величина интегралов в (4.76) для колец, у которых m — четное, будет положительным и сомножитель $(-1)^m$ тоже будет положительный, а для колец, у которых m — нечетное, величина интегралов в (4.76) будет отрицательна, и сомножитель $(-1)^m$ тоже будет отрицательным. То есть, при $\rho_0 = \gamma_{n,N} f/(kR)$ все слагаемые суммы будут положительны, и вклад в поле на кольце радиуса ИОВ будет максимальный. То есть фазовый оптический элемент (4.74) действительно является оптимальным с точки зрения формирования максимальной интенсивности на кольце заданного радиуса $\rho_0 = \gamma_{n,N} f/(kR)$. Чтобы радиус кольца ИОВ не зависел от топологического заряда надо выбирать близкие корни функции Бесселя, аналогично (4.72): $\gamma_{n,N} = \gamma_{m,M}$. Сделанные выше замечания по поводу (4.76) означают, что интенсивность на кольце ИОВ равна следующему выражению ($\alpha R = \gamma_{n,N}$):

$$I_2\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_2|^2 = \left(\frac{k}{f}\right)^2 \left(\int\limits_0^R |J_n(\alpha r)|\, r\, dr\right)^2. \tag{4.77}$$

Далее получим явный вид интенсивности в фокусе сферической линзы для начального поля (4.74). В каждом кольце, ограниченном радиусами $(r_m,\ r_{m+1})$ из (4.75), радиальное пропускание функции (4.74) будет постоянным и менять знак от кольца к кольцу. Поэтому дифракцию Фраунгофера плоской волны на каждом кольце поля (4.74) можно описать следующей комплексной амплитудой [226]:

$$E_m(\rho,\theta) = (-i)^{n+1}\left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \int\limits_{r_m}^{r_{m+1}} J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r\, dr = (-i)^{n+1}\ \frac{1}{n!(n+2)} \times$$
$$\times\, e^{in\theta}\left[\left(\frac{kr_{m+1}^2}{f}\right) x_{m+1}^n\ {}_1F_2\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -x_{m+1}^2\right) -\right.$$
$$\left. -\left(\frac{kr_m^2}{f}\right) x_m^n\ {}_1F_2\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -x_m^2\right)\right], \tag{4.78}$$

где

$$m = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$x_m = \frac{k\rho r_m}{2f} = \frac{k\rho\gamma_{n,m}}{2\alpha f},$$

${}_1F_2(a,b,c,x)$ — гипергеометрическая функция [65]. Полное световое поле в фокусе сферической линзы от всех кольцевых апертур

с радиусами (4.75) для исходного поля (4.74) получается суммированием всех вкладов (4.78) аналогично (4.76):

$$E_2(\rho,\theta) = -\left(-i\right)^{n+1}\left[\frac{k}{n!\,(n+2)\,\alpha^2 f}\right]e^{in\theta}\times$$
$$\times\left[2\sum_{m=1}^{N-1}\left(-1\right)^m\gamma_{n,m}^2 x_{m1}^n F_2\left(\frac{n+2}{2},\frac{n+4}{2},n+1,-x_m^2\right)-\right.$$
$$\left.-\left(-1\right)^N\gamma_{n,N}^2 x_{N1}^n F_2\left(\frac{n+2}{2},\frac{n+4}{2},n+1,-x_N^2\right)\right], \quad (4.79)$$

где $x_N = k\rho R/(2f)$. Подстановка в (4.79) величины радиуса ИОВ $r_0 = \gamma_{n,N} f/(\mathrm{kR})$ приводит к независимости выражения во вторых квадратных скобках от физических параметров задачи (α, k, f), так как все аргументы будут пропорциональны корням функции Бесселя:

$$x_m = \frac{k\rho r_m}{2f} = \frac{k\rho\gamma_{n,m}}{2\alpha f} = \frac{\gamma_{n,m}}{2}. \quad (4.80)$$

Поэтому из (4.79) можно получить зависимость максимальной интенсивности на кольце ИОВ от этих параметров:

$$I_2\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_2|^2 \sim \left(\frac{k}{\alpha^2 f}\right)^2. \quad (4.81)$$

Зависимость (4.81) совпадает с (4.77), если учесть, что $\alpha R = \gamma_{n,N}$. Заметим, что значения аргументов гипергеометрических функций в каждом слагаемом (4.79) на кольце с максимальной интенсивностью ИОВ зависят от корней функции Бесселя n-го порядка ($x_m = \gamma_{n,m}/2$). Поэтому, если изменить топологический заряд ИОВ, то изменятся корни функции Бесселя и значения аргументов. Это приведет к изменению модуля амплитуды (4.79), а значит и к изменению интенсивности на кольце ИОВ. Величину этого изменения можно оценить только с помощью моделирования. Так как оптический элемент (4.74) фазовый и при изменении топологического заряда n радиус апертуры R не изменяется, и не изменяется радиус ИОВ, то изменение интенсивности (4.77) поля (4.79) на кольце этого радиуса $r_0 = \gamma_{n,\,N} f/(kR)$ означает перераспределение энергии между кольцом ИОВ и боковыми лепестками. Заметим, что зависимость интенсивности на кольце ИОВ от номера n следует также прямо из (4.77), так как для функций Бесселя разного порядка интеграл будет иметь разное значение.

4.4.3. Формирование идеального оптического вихря с помощью конического аксикона. В [220] ИОВ формируется с помощью конического аксикона и спиральной фазовой пластинки. В [220] представлена только экспериментальная часть и нет теории. Поэтому мы восполним этот пробел. Вместо (4.61) и (4.74) в данном разделе

рассмотрим оптический элемент с комплексной функцией пропускания в виде:

$$F_3(r,\varphi) = \mathrm{circ}\left(\frac{r}{R}\right)\exp(i\alpha r + in\varphi). \tag{4.82}$$

Оптический элемент (4.82) впервые был рассмотрен в [227], как элемент, формирующий световые трубки. Здесь α уже не масштабный параметр функции Бесселя, а параметр аксикона, связанный с половиной угла ψ при вершине конической волны, которая формируется этим аксиконом, выражением: $\alpha = k\sin\psi$. Хотя аксикон $\exp(i\alpha r)$ приближенно формирует функцию Бесселя нулевого порядка с масштабом как раз равным α. Это следует, например, из следующего известного равенства [225]:

$$\exp(i\alpha r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\alpha r). \tag{4.83}$$

В [220] предполагают, что световое поле (4.82) будет формировать в фокусе сферической линзы ИОВ, распределение амплитуды которого описывается функцией:

$$E_3(\rho,\theta) \sim \exp\left[-\frac{(\rho-\rho_0)^2}{\Delta\rho^2}\right]\exp(in\theta). \tag{4.84}$$

Это сильное упрощение, и на самом деле комплексная амплитуда ИОВ в фокусе сферической линзы описывается как фурье-преобразование от функции (4.82) и имеет вид гораздо более сложный, чем функция (4.84). Покажем это. Дифракция Фраунгофера светового поля (4.82) описывается следующим выражением [227]:

$$E_3(\rho,\theta) = (-i)^{n+1}\left(\frac{k}{f}\right)e^{in\theta}\int_0^R \exp(i\alpha r)\,J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right)r\,dr. \tag{4.85}$$

Из (4.85) можно видеть, что при значении радиуса (4.59) (радиус кольца с максимальной интенсивностью ИОВ) в интеграле масштабы двух функций сомножителей выравниваются. Тогда получим

$$E_3\left(\rho=\frac{\alpha f}{k},\theta\right) = (-i)^{n+1}\left(\frac{k}{f}\right)e^{in\theta}\int_0^R \exp(i\alpha r)\,J_n(\alpha r)\,r\,dr =$$

$$= (-i)^{n+1}\left(\frac{k}{f}\right)e^{in\theta}\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m\int_0^R J_m(\alpha r)\,J_n(\alpha r)\,r\,dr. \tag{4.86}$$

Второе равенство в (4.86) получено с учетом (4.83). Из (4.86) можно заключить, что для ИОВ, сформированного в фокусе линзы с помощью оптического элемента (4.82), интенсивность на кольце радиуса (4.59) будет максимальная, так как функции-сомножители под первым интегралом в (4.86) максимально согласованы между собой

по масштабу. Поэтому больше будет площадь пересечений отдельно между положительными и отдельно между отрицательными составляющими этих функций. Интенсивность поля (4.86) будет много больше, чем интенсивность на кольце ИОВ (4.67), сформированного амплитудно-фазовым элементом (4.62), так как интенсивность (4.67) является вкладом только одного слагаемого из ряда в (4.86) при $m = n$. Приведенные выше рассуждения носят качественный характер. Ниже с помощью численного моделирования показано, что радиус кольца с максимальной интенсивностью и ее величина немного меняются при изменении топологического заряда.

С другой стороны, интенсивность на кольце ИОВ (4.86) будет меньше, чем интенсивность на кольце ИОВ (4.77), сформированного оптимальным фазовым элементом (4.74), так как:

$$I_3\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_3|^2 = \left(\frac{k}{f}\right)^2 \left|\int\limits_0^R \exp\left(i\alpha r\right) J_n\left(\alpha r\right) r\, dr\right|^2 <$$

$$< \left(\frac{k}{f}\right)^2 \left|\int\limits_0^R \left|J_n\left(\alpha r\right)\right| r\, dr\right|^2 = I_2\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right). \quad (4.87)$$

Из (4.87) видно, что интенсивность I_3 зависит от порядка n функции Бесселя при постоянных α, f, R. Так как оба оптических элемента (4.74) и (4.82) фазовые и с одинаковым радиусом R, а интенсивность на кольцах с одинаковым радиусом (4.59) разная, как следует из (4.87), то это означает, что ширина кольца ИОВ (4.86) больше, чем ширина кольца ИОВ (4.76).

Физически это можно объяснить так. Световое кольцо (4.76) формируется оптическим элементом (4.74), который частично представляет собой бинарную фазовую кольцевую решетку, формирующую в основном $+1$ и -1 порядки дифракции, которые оба дают вклад в каждую точку кольца ИОВ (4.76). То есть вся круглая апертура радиуса R дает вклад в формирование кольца, и поэтому его ширина примерно равна, как и ширина кольца (4.63), выражению (4.73) или дифракционному пределу $\mathrm{FWHM} = \pi f/(kR)$. А световое кольцо ИОВ (4.86) формируется аксиконом (4.82), и в каждую точку кольца дает вклад только половина апертуры от 0 до R. Поэтому ширина кольца (4.86) примерно в 2 раза шире, чем кольца (4.76) и (4.63). Моделирование это подтверждает.

Чтобы получить явное выражение для амплитуды поля (4.85), экспоненту под интегралом в (4.90) разложим в ряд Тейлора и получим:

$$E_3\left(\rho, \theta\right) = \left(-i\right)^{n+1} \left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(i\alpha\right)^m}{m!} \int\limits_0^R r^m J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r\, dr. \quad (4.88)$$

Интегралы под знаком суммы в (4.88) можно найти в справочнике [65], поэтому вместо (4.86) можно записать [227]:

$$E_3(\rho,\theta) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!}\left(\frac{kR^2}{f}\right)e^{in\theta}x^n \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i\alpha R)^m}{(m+n+2)\,m!}\,{}_1F_2\left(\frac{m+n+2}{2},\frac{m+n+4}{2},n+1,-x^2\right), \quad (4.89)$$

где $x = k\rho R/(2f)$, ${}_1F_2(a,b,c,x)$ — гипергеометрическая функция [65]. Если ИОВ, сформированный оптимальным элементом (4.74), описывался конечной суммой гипергеометрических функций (4.79), то ИОВ, сформированный аксиконом (4.82), описывается рядом из таких функций (4.89), и ничего общего не имеет с выражением (4.84) из [220]. Световое кольцо с максимальной интенсивностью ИОВ имеет радиус (4.59). Для сохранения радиуса кольца ИОВ при изменении топологического заряда n по-прежнему следует выбирать близкие корни $\alpha R = \gamma_{n,N} \approx \gamma_{m,M}$. Аргумент x в (4.89) на кольце с максимальной интенсивностью будет равен $x = \alpha R/2 = \gamma_{n,N}/2$. Поэтому и аргумент x, и все выражение под знаком суммы в (4.89) не будут зависеть от физических параметров k, f, R. Следовательно, аналогично (4.81), можно написать выражение для зависимости максимальной интенсивности на кольце ИОВ (4.87) от физических параметров:

$$I_3\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_3|^2 \sim \left(\frac{kR^2}{f}\right)^2. \quad (4.90)$$

Зависимость (4.90) одинаковая для всех трех рассматриваемых элементов (4.61), (4.74) и (4.82).

4.4.4. Результаты моделирования. В данном разделе приведены результаты моделирования формирования ИОВ с помощью трех рассмотренных в предыдущих разделах оптических элементов. Эти результаты согласуются с предсказаниями теории, описанной в предыдущих трех разделах. Моделирование проводилось при следующих параметрах: длина волны излучения $\lambda = 532$ нм, радиус круглой апертуры $R = 20\lambda$, фокусное расстояние идеальной сферической линзы $f = 100\lambda$, масштабный параметр функции Бесселя α был выбран таким образом, что выполнялось равенство: $\alpha R = \gamma_{1,20} = 63{,}6114$, где $\gamma_{1,20}$ — 20-й корень функции Бесселя ($\nu = 20$) первого порядка ($n = 1$). Проводилось сравнение формирования ИОВ для двух разных топологических зарядов $n = 1$ и $n = 14$. Остальные параметры моделирования сохранялись. При этом, для функции Бесселя 14-го порядка ($n = 14$) выбирался 14-й корень ($\nu = 14$), так как $\gamma_{14,14} \approx \gamma_{1,20} = 63{,}6114$. На рис. 4.20 показаны модули двух функций Бесселя $|J_1(\gamma_{1,20}x/R)|$ и $|J_{14}(\gamma_{14,14}x/R)|$, ограниченные радиусом R. Из рис. 4.20 видно, что при $x = R$ обе функции Бесселя имеют ноль.

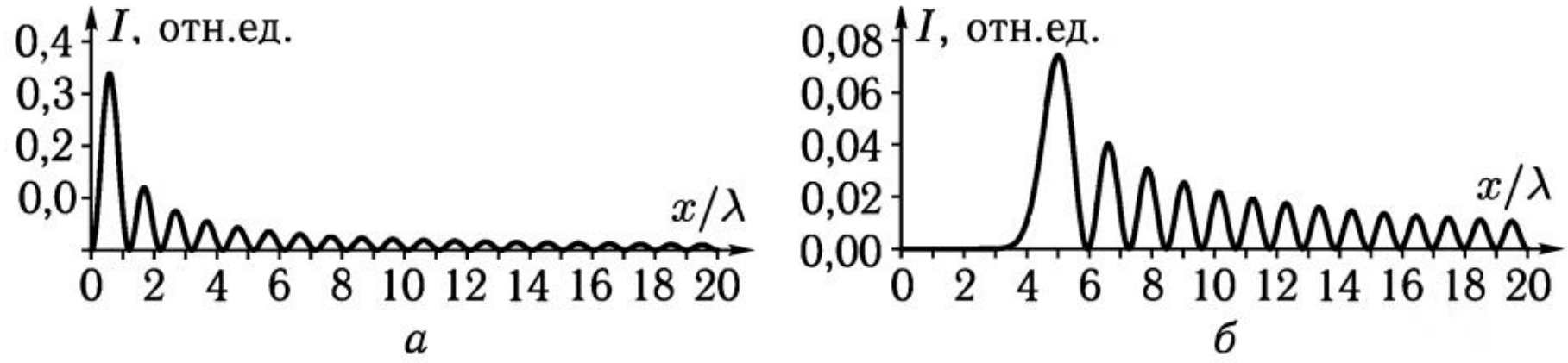


Рис. 4.20. Модули функций Бесселя $|J_1(\gamma_{1,20}x/R)|$ (*а*) и $|J_{14}(\gamma_{14,14}x/R)|$ (*б*), ограниченные радиусом R

На рис. 4.21 показаны распределения интенсивности ИОВ в фурье-плоскости сферической линзы, полученные при начальном световом поле с комплексной амплитудой (4.61) при разных топологических зарядах $n = 1$ и $n = 14$. Характеристики рассчитанных ИОВ для начального поля (4.61) приведены в табл. 4.1. Из табл. 4.1 видно, что радиус ИОВ при изменении топологического заряда не изменился. Радиус кольца ИОВ, рассчитанный по формуле (4.59) при выбранных параметрах моделирования равен $\rho_0 = \alpha f/k \approx 50{,}62\lambda$. Это значение радиуса кольца отличается от значения радиуса в табл. 4.1 всего на 3%. Максимальная интенсивность ИОВ уменьшилась всего на 5% при увеличении топологического заряда вихря почти на порядок.

Таблица 4.1

Сравнение параметров ИОВ, сформированного начальным световым полем (4.61) при разных топологических зарядах n

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, ρ_0, λ	50,781563	50,781563
Максимальная интенсивность в относительных единицах, $I_{\max}$	0,0157968	0,0150522
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, FWHM, λ	2,244489	2,244489

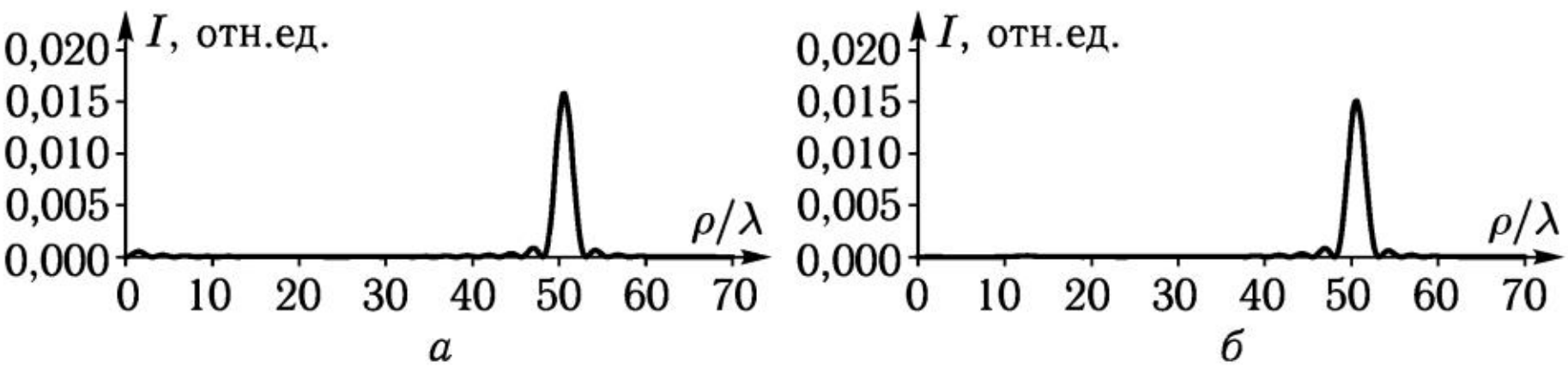


Рис. 4.21. Распределения интенсивности ИОВ при $n = 1$ (*а*) и $n = 14$ (*б*) для начального светового поля (4.61). По оси ординат произвольные единицы, а по оси абсцисс радиус в длинах волн

Заметим, что согласно формуле (4.67) при выбранных параметрах моделирования максимальная интенсивность на рис. 4.21 должна быть равна $I_1(\rho_0) = [kR/(\pi\alpha f)]^2 \approx 0{,}015816$. Это число согласуется со значением интенсивности из табл. 4.1 (разница 0,1%). И так как радиус кольца не изменился и радиус апертуры R оптического элемента тоже не изменился, то не должна измениться и ширина кольца. Из табл. 4.1 видно, что действительно, ширина кольца не меняется при изменении топологического заряда оптического вихря. Согласно (4.74) ширина кольца при выбранных параметрах моделирования должна быть равна $\mathrm{FWHM} = 5/2\lambda$. Это значение на 11% отличается от значения ширины кольца из табл. 4.1.

Таблица 4.2

Сравнение параметров ИОВ, сформированного оптимальным фазовым элементом (4.74) при разных топологических зарядах n

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
радиус кольца с максимальной интенсивностью, ρ_0, λ	50,641283	50,641283
Максимальная интенсивность в относительных единицах, $I_{\max}$	1,140685	1,1181689
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, FWHM, λ	1,9639279	1,9639279

Рассмотрим теперь формирование ИОВ с помощью оптимального фазового элемента (4.74). На рис. 4.22 показаны распределения интенсивности ИОВ при $n = 1$ (*а*) и $n = 14$ (*б*) для начального светового поля (4.74). В табл. 4.2 приведены рассчитанные параметры ИОВ на рис. 4.22. Из табл. 4.2 видно, что радиус кольца ИОВ стал немного меньше, чем на рис. 4.22 (меньше всего на 0,3%). Радиус не изменился при увеличении топологического заряда в 14 раз. Интенсивность на кольце почти в 100 раз больше, чем интенсивность для ИОВ на рис. 4.21. Эту интенсивность можно рассчитать по формуле (4.64). Заметим, что с увеличением топологического заряда в 14 раз интенсивность на кольце уменьшилась всего на 2%. Толщина кольца

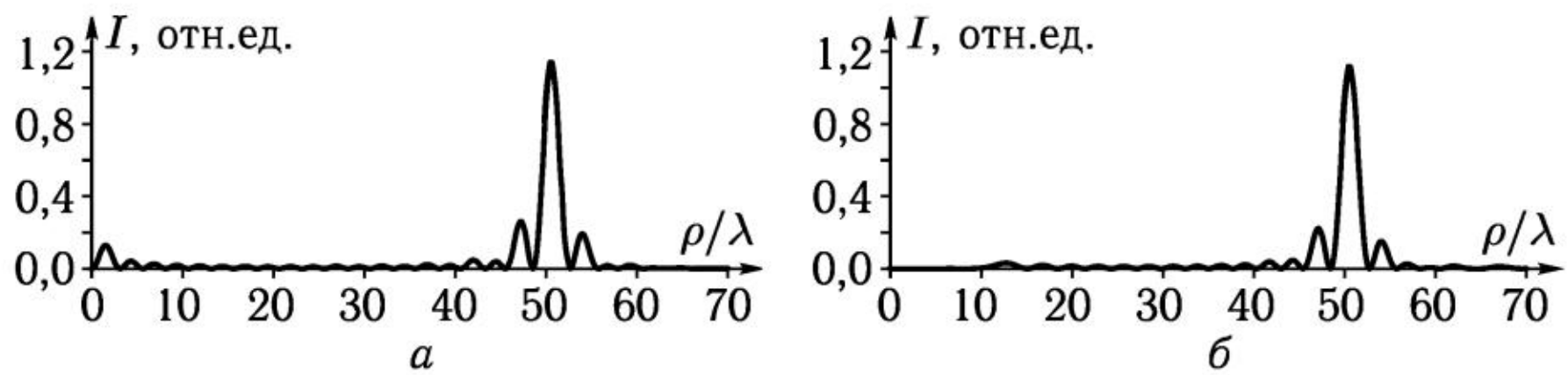


Рис. 4.22. Распределения интенсивности ИОВ при $n = 1$ (*а*) и $n = 14$ (*б*) для начального светового поля (4.74). По оси ординат произвольные единицы, а по оси абсцисс радиус в длинах волн

стала меньше примерно на 14 %, по сравнению с шириной кольца на рис. 4.21. Толщина кольца сохраняется при изменении топологического заряда оптического вихря. Из рис. 4.22 видно, что увеличились боковые лепестки.

Далее рассмотрим формирование ИОВ с помощью вихревого аксикона (4.82). На рис. 4.23 показаны распределения интенсивности ИОВ при $n = 1$ (*а*) и $n = 14$ (*б*) для начального светового поля (4.82), а в табл. 4.3 внесены рассчитанные параметры этого ИОВ.

Из рис. 4.23 и табл. 4.3 видно, что ширина кольца ИОВ, сформированного вихревым аксиконом (4.82) в фокусе сферической линзы, примерно в 2,5 раза больше, чем ширина кольца на рис. 4.21.

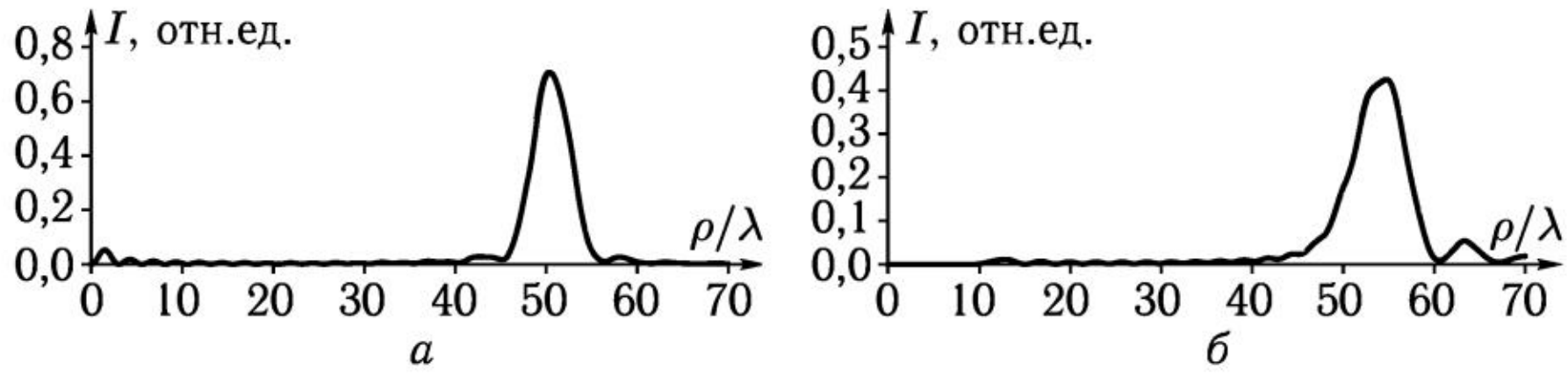


Рис. 4.23. Распределения интенсивности ИОВ при $n = 1$ (*а*) и $n = 14$ (*б*) для начального светового поля (4.82). По оси ординат произвольные единицы, а по оси абсцисс радиус в длинах волн

Таблица 4.3

Сравнение параметров ИОВ, сформированного вихревым аксиконом (4.82) при разных топологических зарядах n

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
радиус кольца с максимальной интенсивностью, ρ_0, λ	50,501002	54,849699
Максимальная интенсивность в относительных единицах, $I_{\max}$	0,7070332	0,4249419
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, FWHM, λ	4,9098196	6,5931864

И, кроме того, с увеличением топологического заряда вихря в 14 раз ширина кольца увеличивается в 1,3 раза.

Увеличение ширины кольца (рис. 4.23) с ростом номера n приводит к уменьшению интенсивности на этом кольце. Из табл. 4.3 видно, что максимальная интенсивность на кольце ИОВ (рис. 4.22) уменьшается в 1,7 раза с ростом номера n в 14 раз. И даже сам радиус кольца с максимальной интенсивностью увеличивается при этом на 8 %.

Таким образом, моделирование показало, что из трех рассмотренных вариантов формирования ИОВ оптимальный фазовый элемент (4.74) является лучшим вариантом, так как в этом случае формируется наиболее узкое световое кольцо (FWHM $= 1{,}96\lambda = 0{,}39\lambda f/R$)

с максимальной интенсивностью на кольце, в 1,6 раз большей, чем интенсивность на кольце ИОВ, сформированного вихревым аксиконом (4.82).

4.4.5. Эксперимент. Для экспериментального исследования элементов, формирующих ИОВ, мы использовали оптическую схему, показанную на рис. 4.24. В качестве источника излучения был выбран твердотельный лазер Laser ($\lambda = 532$ нм), формирующий фундаментальный гауссов пучок. Пучок лазера, расширенный и коллимированный с помощью системы, состоящей из пинхола PH (размер отверстия 40 мкм) и линзы L_1 ($f_1 = 250$ мм), падал на дисплей модулятора SLM (PLUTO VIS, разрешение 1920×1080 пикселов, размер пикселя 8 мкм). Диафрагма D_1 была использована для того, чтобы отделить центральное светлое пятно от окружающих его светлых и темных колец, возникающих при дифракции на пинхоле.

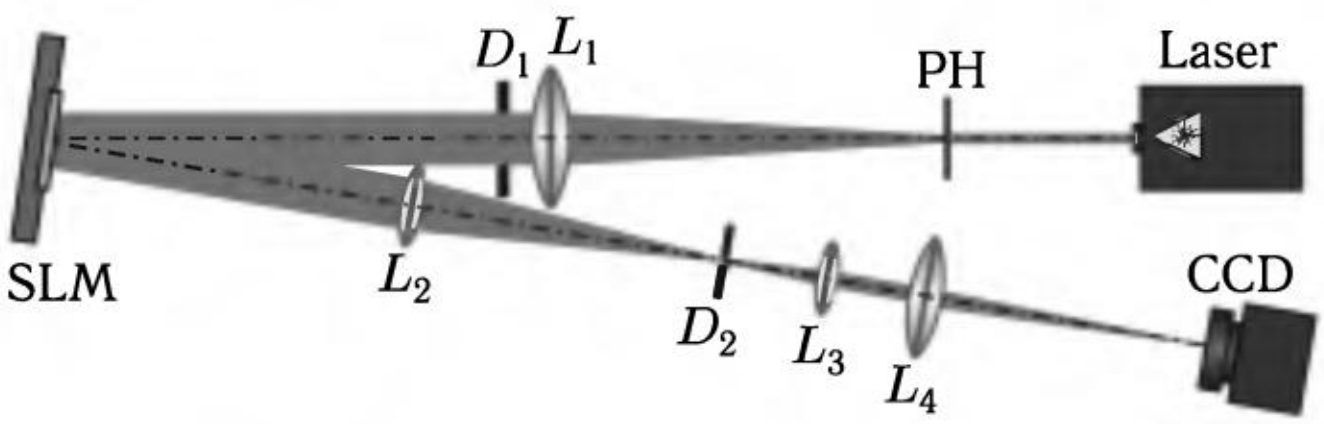


Рис. 4.24. Экспериментальная схема установки: L — твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH — пинхол (размер отверстия 40 мкм), L_1, L_2, L_3 и L_4 — линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 350$ мм, $f_3 = 150$ мм, $f_4 = 500$ мм), D_1 и D_2 — диафрагма, SLM — пространственный модулятор света PLUTO VIS, CCD — видеокамера LOMO TC-1000

Далее с помощью системы линз L_2 ($f_2 = 350$ мм) и L_3 ($f_3 = 150$ мм) и диафрагмы D_2 мы осуществляли пространственную фильтрацию промодулированного по фазе лазерного пучка, отраженного от дисплея модулятора. С помощью линзы L_4 ($f_4 = 500$ мм) лазерный пучок фокусировался на матрице видеокамеры CCD LOMO TC 1000 (размер пикселя $1{,}67 \times 1{,}67$ мкм). Для формирования ИОВ мы использовали фазовые шаблоны, показанные на рис. 4.25, которые выводились на дисплей модулятора света. Для того чтобы разнести в пространстве непромодулированный пучок, отраженный от модулятора, и промодулированный по фазе пучок, на исходный фазовый шаблон элемента дополнительно накладывали линейную фазовую маску.

На рис. 4.26 показаны распределения интенсивности, сформированные в фокусе линзы L_4 с помощью фазовых масок, соответствующих оптимальным фазовым элементам с топологическими зарядами 1 и 14. Значения параметров сформированных ИОВ представлены в табл. 4.4.

На рис. 4.27 показаны распределения интенсивности, сформированные в фокусе линзы L_4 с помощью фазовых масок, соответствующих

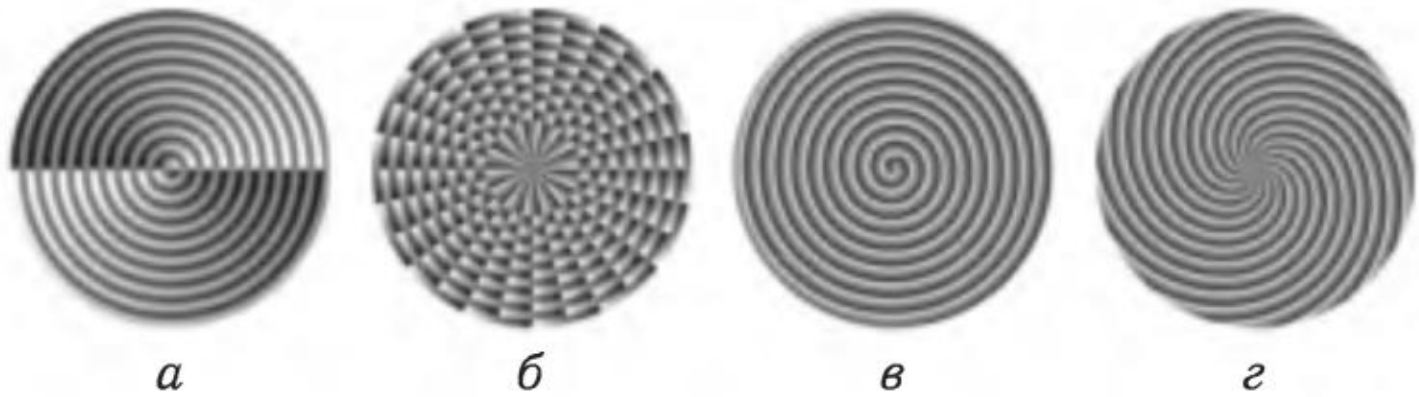


Рис. 4.25. Фазовые шаблоны оптических элементов для формирования ИОВ с топологическим зарядом $n = 1$ (*а*, *в*) и $n = 14$ (*б*, *г*). На рисунках (*а*, *б*) представлены оптимальные фазовые элементы, на рисунках (*в*, *г*) — вихревые аксиконы

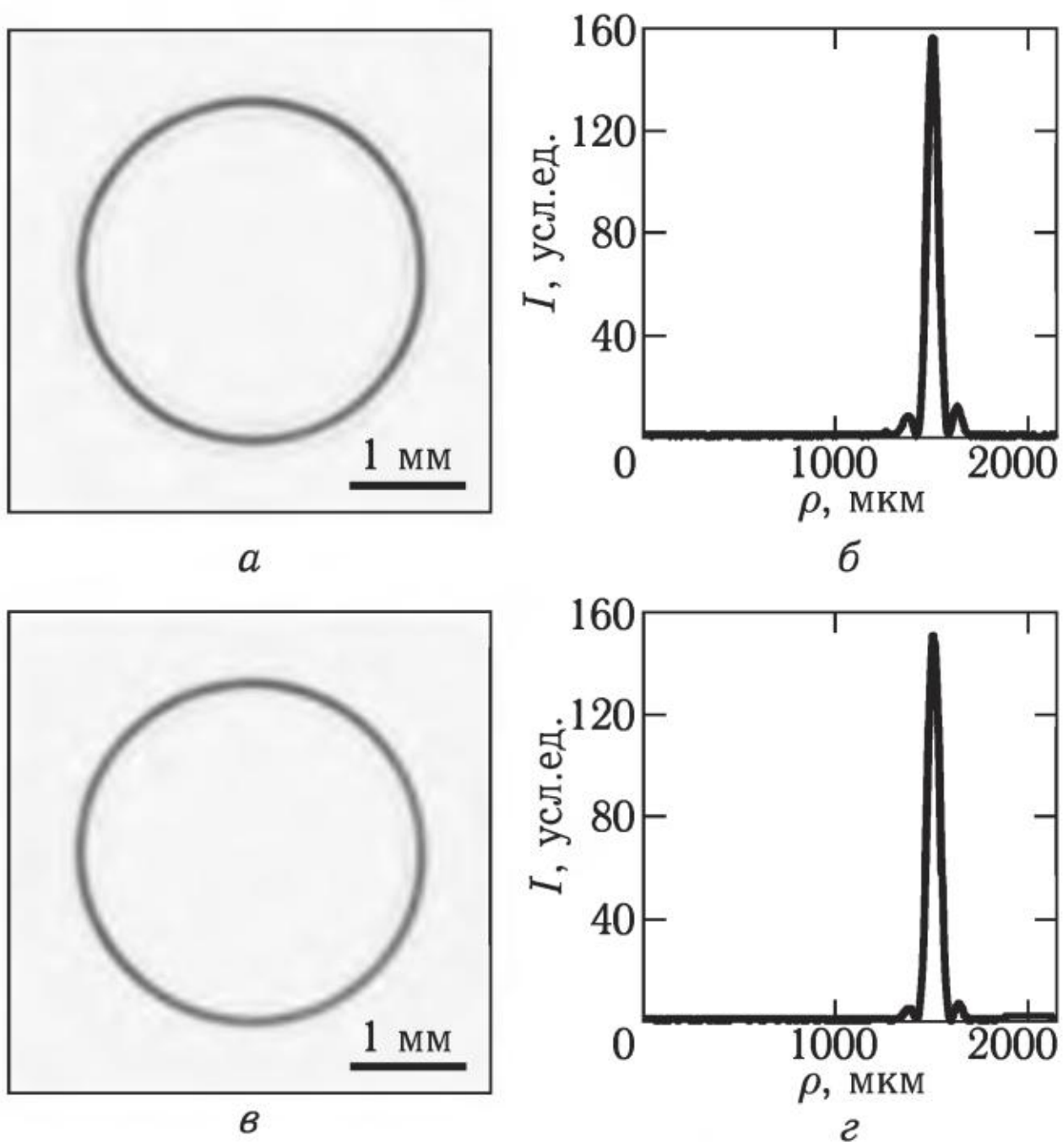


Рис. 4.26. Распределения интенсивности ИОВ (негатив, левая колонка) и соответствующие им сечения от центра картинки до края (правая колонка) в случае использования оптимального фазового элемента с топологическим зарядом $n = 1$ (*а*, *б*) и $n = 14$ (*в*, *г*)

вихревым аксиконам с топологическими зарядами 1 и 14. Значения параметров сформированных ИОВ представлены в табл. 4.5.

Таким образом, из анализа экспериментальных измерений параметров ИОВ следует, что относительные значения параметров сформированных пучков находятся в хорошем соответствии с представленными результатами моделирования.

В разделе получены точные аналитические выражения [228], описывающие комплексную амплитуду светового поля идеального

Таблица 4.4

Сравнение параметров ИОВ, сформированного оптимальным фазовым элементом с топологическим зарядом $n = 1$ и $n = 14$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, мкм	1491,0 ± 2,0	1496,5 ± 2,0
Максимальная интенсивность, усл. ед.	$156{,}0 \pm 0{,}5$	$151{,}0 \pm 0{,}5$
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, мкм	$70{,}0 \pm 2{,}0$	$73{,}0 \pm 2{,}0$

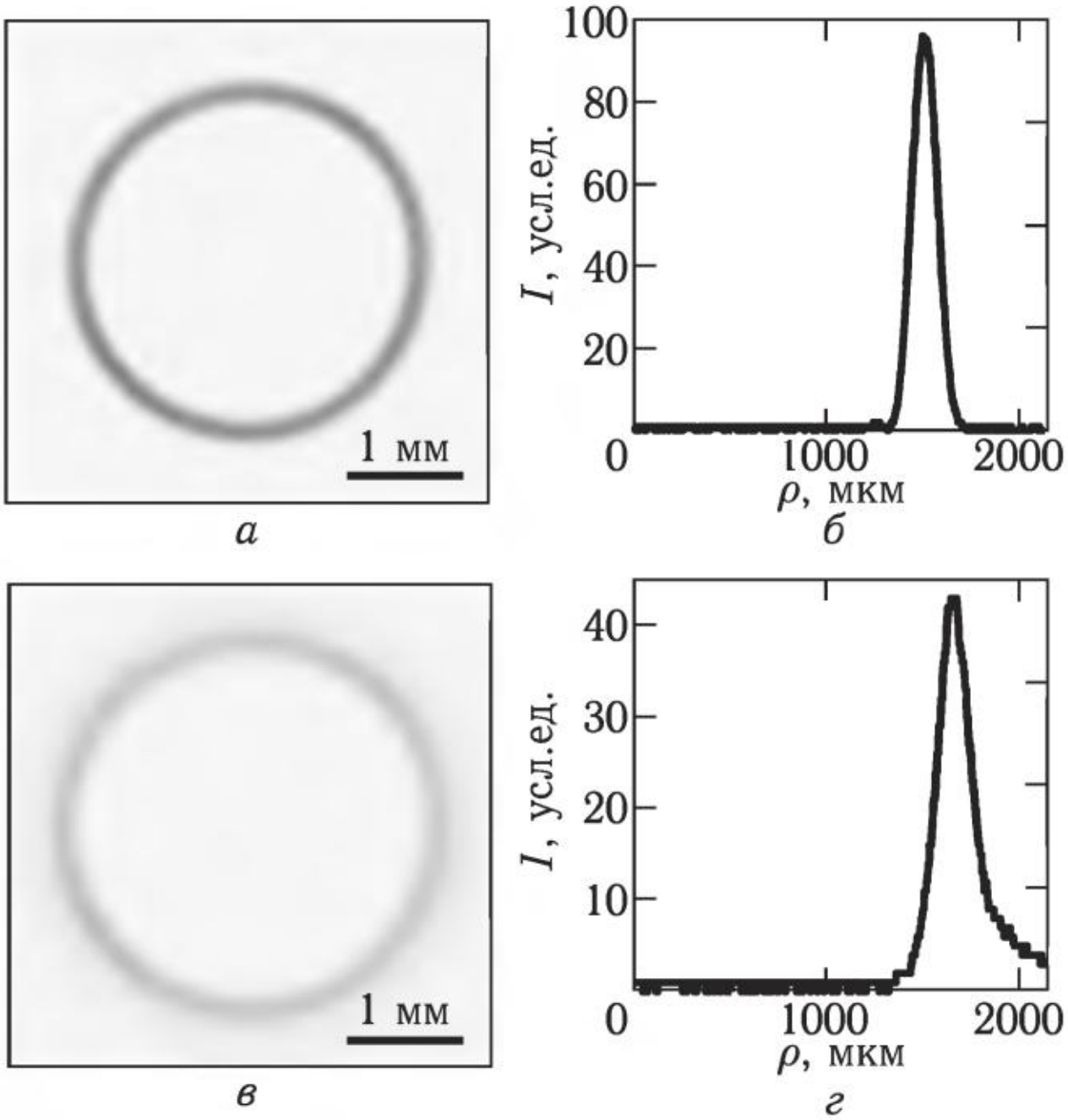


Рис. 4.27. Распределения интенсивности ИОВ (негатив, левая колонка) и соответствующие им сечения от центра картинки до края (правая колонка) в случае использования вихревого аксикона с топологическим зарядом $n = 1$ (*а*, *б*) и $n = 14$ (*в*, *г*)

оптического вихря, сформированного тремя разными оптическими элементами: амплитудно-фазовым с пропусканием, пропорциональным комплексной функции, описывающей моду Бесселя, оптимальным фазовым элементом и вихревым аксиконом. Показано, что применение любого из этих трех оптических элементов приводит к формированию светлых колец с одним и тем же радиусом, который слабо зависит от топологического заряда оптического вихря. Интенсивность света

Таблица 4.5

Сравнение параметров ИОВ, сформированного вихревым аксиконом с топологическим зарядом $n = 1$ и $n = 14$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, мкм	$1498{,}0 \pm 2{,}0$	$1655{,}0 \pm 2{,}0$
Максимальная интенсивность, усл. ед.	$96{,}0 \pm 0{,}5$	$43{,}0 \pm 0{,}5$
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, мкм	$158{,}0 \pm 2{,}0$	$206{,}0 \pm 2{,}0$

на кольце больше (при прочих равных условиях) для оптимального фазового элемента. Для оптимального фазового элемента интенсивность света на кольце слабо зависит от величины топологического заряда (табл. 4.4), а для вихревого аксикона и при моделировании (табл. 4.3), и в эксперименте (табл. 4.5) интенсивность на кольце уменьшается почти в два раза при увеличении топологического заряда с 1 до 14. Ширина светового кольца, сформированного вихревым аксиконом примерно в 2 раза больше, чем ширина двух других колец. Таким образом, оптимальный элемент (4.74), рассмотренный впервые в [6], является наилучшим кандидатом для формирования идеального оптического вихря. Результаты моделирования подтверждают теоретические выводы, а результаты эксперимента согласуются с теорией и результатами моделирования.

Глава 5

ВЕКТОРНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ПУЧКИ

5.1. Скалярные непараксиальные пучки Ханкеля

В оптике известны лазерные пучки, которые описываются скалярными комплексными амплитудами, являющимися точными решениями непараксиального уравнения Гельмгольца. Это хорошо известные плоские и сферические волны [59], а также полученные недавно моды Бесселя [1, 125], пучки Матье [4, 116], параболические лазерные пучки [229], пучки Ханкеля–Бесселя [146] и асимметричные моды Бесселя [88, 124].

В [230] получены выражения для проекций векторов напряженности электрического (E-вектор) и магнитного (H-вектор) полей электромагнитной волны. Все проекции E- и H-векторов выражены через три интеграла, представляющие собой разложения по угловому спектру плоских волн. На основе проекций электромагнитного поля получены выражения для вектора Пойнтинга и плотности орбитального момента (ОМ). Заметим, что замкнутые аналитические выражения для ОМ до сих пор получены только для параксиальных пучков Лагерра–Гаусса [9] и для векторных пучков Бесселя [131].

В этом разделе рассмотрены новые непараксиальные вихревые пучки, комплексная амплитуда которых описывается функцией Ханкеля полуцелого порядка, поэтому эти пучки названы пучками Ханкеля. Пучок Ханкеля низшего порядка (нулевого) совпадает со сферической волной. Рассмотрены 3 типа таких пучков, которые получаются друг из друга с помощью взятия производных. Рассмотренные лазерные пучки можно сформировать с помощью жидкокристаллического микродисплея и применять для оптического захвата и вращения диэлектрических микрообъектов.

Известно, что комплексная амплитуда непараксиального стационарного светового поля $E(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца, может быть представлена в виде углового спектра плоских волн

$$E\left(x,y,z\right)=\iint\limits_{\mathrm{R}^2} A\left(\xi,\eta\right)\exp\left[ik\left(\xi x+\eta y\right)+ikz\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\right]d\xi d\eta, \tag{5.1}$$

где k — волновое число монохроматического света, $A(\xi,\eta)$ — комплексная амплитуда углового спектра плоских волн. В полярных координатах (r,φ) выражение (5.1) примет вид:

$$E\left(r,\varphi,z\right)=\iint\limits_{\mathrm{R}^2} A\left(\rho,\theta\right)\exp\left[ikr\rho\cos\left(\theta-\varphi\right)+ikz\sqrt{1-\rho^2}\right]\rho\, d\rho\, d\theta, \tag{5.2}$$

где (ρ, θ) — полярные координаты в фурье-плоскости. Если амплитуду спектра плоских волн выбрать в виде

$$A(\rho, \theta) = \frac{\rho^n}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp(in\theta), \tag{5.3}$$

то вместо (2) можно записать:

$$E_{1,n}(r, \varphi, z) = 2\pi i^n \exp(in\varphi) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp\left(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right) J_n(kr\rho)\, d\rho, \tag{5.4}$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка первого рода. Интеграл в (5.4) является справочным интегралом [65], и вместо (5.4) можно записать

$$E_{1,n}(r, \varphi, z) = i^{n-1}\pi\sqrt{\lambda}\, \frac{r^n}{\left(r^2 + z^2\right)^{(2n+1)/4}} \times \\ \times H^{(2)}_{n+1/2}\left(k\sqrt{r^2 + z^2}\right) \exp(in\varphi), \tag{5.5}$$

где $H^{(2)}_\nu(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x)$ — функция Ханкеля, $Y_\nu(x)$ — функция Неймана. Пучки (5.5) назовем пучками Ханкеля 1-го типа (Х1-пучки). Пучок Ханкеля (5.5) представляет собой линейный оптический вихрь $(x + iy)^n$, внедренный в обобщенную сферическую волну

$$\psi_{n+1/2}(R) = H^{(2)}_{n+1/2}(kR)\, R^{-n-1/2},$$

где $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$. Функция $\psi(R)$ зависит только от расстояния до центра системы координат R, поэтому ее можно назвать обобщенной сферической волной. Амплитуда (5.5) имеет особую точку при $r = z = 0$, в которой она равна бесконечности. Можно показать, что амплитуда Х1-пучка при $n = 0{,}1$ связана с амплитудой сферической волны. Фундаментальный Х1-пучок (при $n = 0$) совпадает со сферической волной, исходящей из начала координат:

$$E_{1,0} = -i\pi\sqrt{\lambda}\, \frac{H^{(2)}_{1/2}(kR)}{R^{1/2}} = 2\pi \frac{e^{-ikR}}{kR}, \\ R = \sqrt{r^2 + z^2}. \tag{5.6}$$

При $n = 1$ получим производную сферической волны с «внедренным» на оси линейным оптическим вихрем:

$$E_{1,1} = \pi\sqrt{\lambda}\, \left(re^{i\varphi}\right) \frac{H^{(2)}_{3/2}(kR)}{R^{3/2}} = -2\pi \left(\frac{re^{i\varphi}}{kR}\right) \frac{d}{dR}\left(\frac{e^{-ikR}}{kR}\right). \tag{5.7}$$

Пучки Ханкеля 2-го типа можно получить, дифференцируя комплексную амплитуду (5.5) по координате z:

$$E_{2,n}(r,\varphi,z) = 2\pi i^n k^{-1} \exp(in\varphi) \frac{\partial}{\partial z} \times$$
$$\times \left\{ \int\limits_0^\infty \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{\rho^2-1}} \exp\left(-kz\sqrt{\rho^2-1}\right) J_n(kr\rho)\, d\rho \right\} =$$
$$= -2\pi i^n \exp(in\varphi) \int\limits_0^\infty \rho^{n+1} \exp\left(-kz\sqrt{\rho^2-1}\right) J_n(kr\rho)\, d\rho. \quad (5.8)$$

Интеграл в (5.8) тоже справочный [65], хотя можно напрямую дифференцировать правую часть равенства в (5.5) и воспользоваться рекуррентными соотношениями для цилиндрических функций. Вместо (5.8) получим

$$E_{2,n}(r,\varphi,z) = i^{n+1}\pi\sqrt{\lambda}\, \frac{zr^n}{\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)^{n+3/2}} \times$$
$$\times H^{(2)}_{n+3/2}\left(k\sqrt{r^2+z^2}\right) \exp(in\varphi). \quad (5.9)$$

Пучки (5.9) назовем пучками Ханкеля 2-го типа (Х2-пучки). Эти пучки также, как и Х1-пучки, по структуре являются обобщенными сферическими волнами с внедренными линейными оптическими вихрями. Отличие только в том, что функция $\psi(R)$ имеет несколько другой вид $\psi_{n+3/2}(R) = H^{(2)}_{n+3/2}(kR)\, R^{-n-3/2}$, и в начальной плоскости ($z=0$) амплитуда (5.9) отлична от нуля только в начале координат.

Используя известные приближенные формулы для малых и больших значений аргументов функций Ханкеля

$$\begin{cases} H^{(2)}_\nu(x) \approx \dfrac{i}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\dfrac{2}{x}\right)^\nu, & 0 < x \ll 1, \\ H^{(2)}_\nu(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\, i^{\nu+2} \exp(-ix), & x \gg 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

можно получить асимптотические зависимости для Х1- и Х2-пучков:

$$\begin{cases} |E_1| \sim r^{-1}, & r \gg z, \\ |E_1| \sim \dfrac{r^n}{z^{2n+1}}, & r \ll z, \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} |E_2| \sim r^{-2}, & r \gg z, \\ |E_2| \sim \dfrac{r^n}{z^{2n+2}}, & r \ll z. \end{cases} \quad (5.12)$$

Из (5.12) видно, что интенсивность обоих типов пучков при фиксированном z и с ростом r растет как r^n вблизи оптической оси (это характерное поведение для вихревого пучка), но при больших r интенсивность Х2-пучков спадает быстрее (пропорционально r^{-4}),

чем интенсивность X1-пучков (спадает как для сферической волны пропорционально r^{-2}). Это означает, что у разных типов пучков Ханкеля разная расходимость. Расходимость обоих типов пучков Ханкеля можно оценить при больших z. Она оказывается линейно зависит от z. Действительно, интенсивность X1-пучков (5.5) равна:

$$I_1(r,z) = 2\pi^3 \frac{(kr)^{2n}}{(kD)^{2n+1}} \left[J^2_{n+1/2}(kD) + Y^2_{n+1/2}(kD)\right] \approx$$
$$\approx 2\pi^3 \frac{(kr)^{2n}}{(kD)^{2n+1}} \frac{2}{\pi k D} = \lambda^2 r^{2n} D^{-2n-2}, \quad (5.13)$$

где $D = \sqrt{r^2 + z^2}$. В (5.13) при получении приближенного равенства воспользовались известной асимптотикой функций Бесселя и Неймана. Дифференцируя (5.13) по радиальной переменной r и приравнивая нулю, получим:

$$\frac{\partial I_1}{\partial r} = 0 \Rightarrow r \approx z\sqrt{n}\,. \quad (5.14)$$

Из (5.14) видно, что радиус максимума интенсивности вихревых X1-пучков ($n > 0$) линейно зависит от продольной координаты z и пропорционален корню квадратному из топологического заряда оптического вихря. Поступая аналогично для X2-пучков, найдем интенсивность при больших z:

$$I_2(r,z) = 2\pi^3 (kz)^2 (kr)^{2n} (kD)^{-2n-3} \left[J^2_{n+3/2}(kD) + Y^2_{n+3/2}(kD)\right] \approx$$
$$\approx 2\pi^3 \frac{(kz)^2 (kr)^{2n}}{(kD)^{2n+3}} \frac{2}{\pi k D} = \lambda^2 z^2 r^{2n} D^{-2n-4}, \quad (5.15)$$

и приравняем к нулю ее производную, получим:

$$\frac{\partial I_2}{dr} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{n}{2}}\, z. \quad (5.16)$$

Из сравнения (5.14) и (5.16) видно, что расходимость X2-пучков в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем расходимость X1-пучков. Примерно можно сказать, что X1-пучки при $n = 1$ расходятся в угле 45 градусов, а X2-пучки — в угле 32 градуса. С ростом номера n углы расходимости увеличиваются.

При любом z точно найти зависимость радиуса максимальной интенсивности можно для X1-пучка с $n = 1$. В этом случае интенсивность имеет вид

$$I_1(r,z) = \pi^2 \lambda r^2 D^{-3} \left[J^2_{3/2}(kD) + Y^2_{3/2}(kD)\right] =$$
$$= (2\pi)^2 k^2 r^2 \left[\frac{1}{(kD)^6} + \frac{1}{(kD)^4}\right]. \quad (5.17)$$

Приравнивая к нулю производную интенсивности (5.17) по переменной r, получим:

$$\frac{\partial I_1}{\partial r} = 0 \Rightarrow r = k^{-1}\sqrt{\sqrt{1+(kz)^2+(kz)^4}-1}\,. \qquad (5.18)$$

На рис. 5.1 показаны интенсивность ($a, г$), фаза ($б, д$) и радиальное сечение интенсивности ($в$, е) для X1-пучка с топологическим зарядом $n = 1$ на расстояниях $z = \lambda$ ($a, б, в$) и $z = 5\lambda$ ($г, д, е$). По горизонтальной оси на рис. 1 отложена радиальная координата в длинах волн.

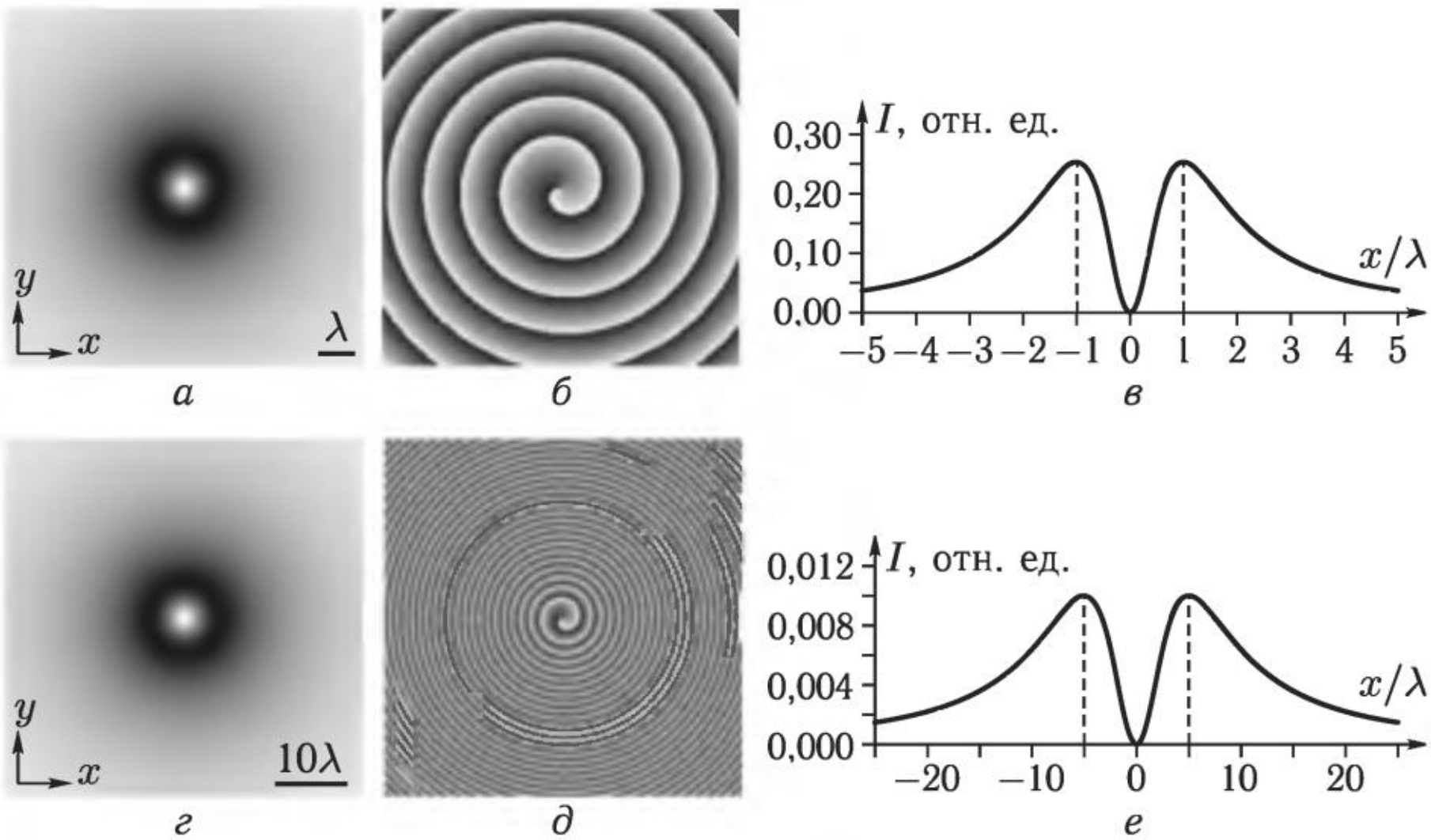


Рис. 5.1. Интенсивность (негатив) ($a, г$), фаза ($б, д$) и радиальное сечение интенсивности ($в, е$) для X1-пучка с топологическим зарядом $n = 1$ на расстояниях $z = \lambda$ ($a, б, в$) и $z = 5\lambda$ ($г, д, е$)

Вертикальными линиями на рис. 5.1 *в* и рис. 5.1 *е* показаны максимумы интенсивности в сечении, радиусы которых можно точно найти по формуле (5.18). Например, для сечения на рис. 5.1 *в* радиус максимальной интенсивности равен $r = 0{,}994\lambda$. То есть, не только в дальней зоне (5.14), но и в ближней зоне расходимость X1-пучка ($n = 1$) равна 45 градусов.

Заметим, что у обоих типов пучков нет боковых лепестков. Известны статьи [84, 231, 232], в которых специальными методами уменьшают контраст боковых лепестков лазерных оптических вихрей, чтобы эффективно использовать их для оптического захвата микрообъектов. В данном случае, в этом нет необходимости, так как пучки Ханкеля распространяются без боковых лепестков.

На рис. 5.2 показаны интенсивность ($a, г$), фаза ($б, д$) и радиальное сечение интенсивности ($в, е$) для X1-пучка ($a, б, в$) и X2-пучка ($г, д, е$) с топологическими зарядами $n = 5$ на расстоянии $z = 5\lambda$. Из рисунков

5.2*в* и 5.2*е* можно видеть, что расходимость у X1-пучка больше, чем у X2-пучка при одинаковых топологических зарядах. Радиус максимальной интенсивности на рис. 5.2*в* равен 11λ, а на рис. 5.2*е* — $7{,}9\lambda$.

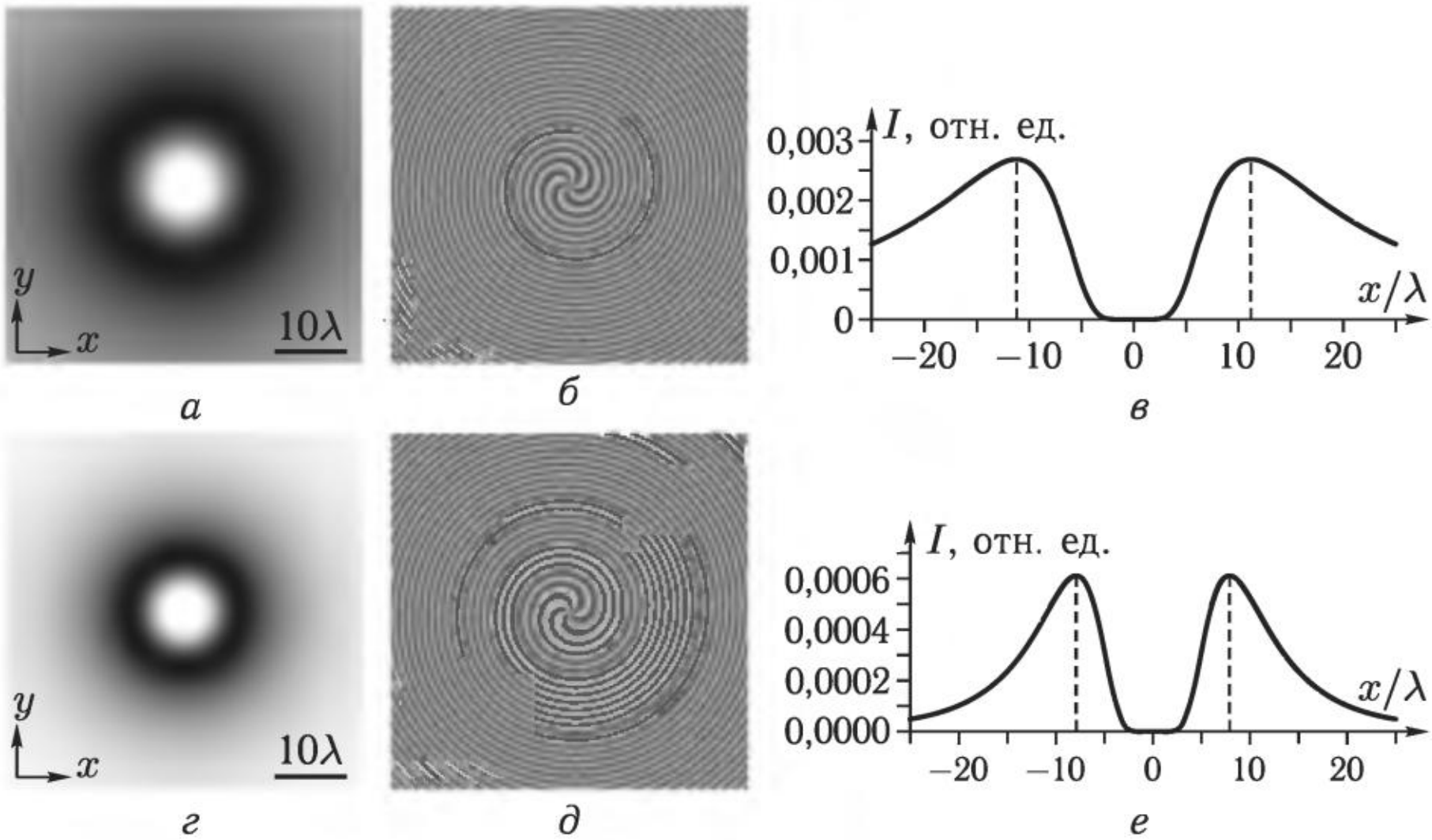


Рис. 5.2. Интенсивность (*а*, *г*), фаза (*б*, *д*) и радиальное сечение интенсивности (*в*, *е*) для X1-пучка (*а*, *б*, *в*) и X2-пучка (*г*, *д*, *е*) с топологическими зарядами $n = 5$ на расстоянии $z = 5\lambda$

Аналогично, как из амплитуды X1-пучка (5.5) с помощью дифференцирования (5.8) был получен X2-пучок (5.9), так же из X2-пучка дифференцированием по z можно получить пучки Ханкеля 3-го типа (X3-пучки):

$$E_{3,n}(r,\varphi,z) = i^{n-1}\pi\sqrt{\lambda}\,k^{-1}r^n\exp(in\varphi)\times \\ \times\left[\frac{kz^2H^{(2)}_{n+5/2}\left(k\sqrt{r^2+z^2}\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{(2n+5)/4}} - \frac{H^{(2)}_{n+3/2}\left(k\sqrt{r^2+z^2}\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{(2n+3)/4}}\right], \quad (5.19)$$

Заметим, что у всех пучков Ханкеля (5.5), (5.9) и (5.19) один и тот же топологический заряд n, хотя радиальная структура пучков, описывается функциями Ханкеля разных порядков. Это означает, что хотя нормированный на единицу мощности (или на один фотон) орбитальный угловой момент (ОУМ) этих пучков одинаковый (он равен топологическому заряду), но не нормированный ОУМ будет больше у пучка Ханкеля с большей плотностью мощности. Например, из сравнения рисунков 5.2*в* и 5.2*е* видно, что максимальная интенсивность для X2-пучка в два с лишним раза больше, чем максимальная интенсивность X1-пучка. Поэтому плотность ОУМ на светлом кольце X2-пучка будет во столько же раз больше, чем плотность ОУМ на светлом кольце X1-пучка.

Процесс взятия производных по z от амплитуды пучков Ханкеля можно продолжить, получая пучки Ханкеля более высоких типов. Но для дальнейшего достаточно было получить только три комплексных амплитуды (5.5), (5.9) и (5.19), через которые выражаются компоненты электромагнитного поля векторного пучка Ханкеля [230].

В разделе получены в явном виде комплексные амплитуды непараксиальных скалярных сильно расходящихся вихревых лазерных пучков Ханкеля 1-го (5.5), 2-го (5.9) и 3-го (5.19) типов. Все три типа пучков имеют одинаковый целый топологический заряд, но разную зависимость амплитуды от радиальной координаты. Все три типа пучков Ханкеля получаются друг из друга дифференцированием их амплитуды по продольной координате. Интенсивность всех трех типов пучков Ханкеля имеет радиальную симметрию (в виде «пончика») и не имеет боковых лепестков. С ростом номера (от 1 до 3) типа пучка Ханкеля его расходимость уменьшается. Эти пучки не являются модами свободного пространства, так как при распространении меняется распределение интенсивности в сечении пучка, но структура интенсивности (кольцевой вид интенсивности без боковых лепестков) сохраняется.

5.2. Пучки Ханкеля с линейной поляризацией

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) интенсивно изучаются в оптике. Они применяются для беспроводной связи с увеличенной плотностью канала передачи информации [234], для оптического захвата и вращения микрочастиц [235]. Такие пучки имеют «иммунитет» к турбулентности и их можно применять для зондирования атмосферы [236]. В задачах микроманипуляции важно, чтобы фокальное пятно не имело боковых лепестков [232]. Такому требованию удовлетворяют, например, недавно открытые лазерные пучки Ханкеля [233]. Это непараксиальные скалярные вихревые лазерные пучки, которые, аналогично обычным гауссовым пучкам, не имеют боковых лепестков. Также в задачах микроманипуляции требуется обеспечить острую фокусировку лазерного пучка. При острой фокусировке света, когда лучи сходятся в фокус под большими углами, в формировании фокуса существенную роль начинает играть поляризация. Для адекватного описания ОУМ в области фокуса требуется рассматривать все шесть проекций векторов напряженности электромагнитного поля. В оптике известно небольшое число векторных световых полей, которые можно описать аналитически явным образом. Замкнутые аналитические выражения для ОУМ до сих пор получены только для параксиальных пучков Лагерра–Гаусса [9] и для векторных пучков Бесселя [131]. В [230] получены выражения для проекций векторов напряженности электрического (E-вектор) и магнитного (H-вектор) полей электромагнитной волны. Все проекции E- и H-векторов выражены через три интеграла, представляющие собой разложения по угловому

спектру плоских волн. На основе проекций электромагнитного поля получены выражения для вектора Пойнтинга и ОУМ.

В данном разделе рассмотрены новые векторные непараксиальные вихревые пучки Ханкеля. Для векторного пучка Ханкеля с линейной поляризацией получены явные аналитические выражения для всех проекций E- и H-векторов напряженности электромагнитной волны. На основе полученных формул можно в аналитическом виде получить выражение для вектора плотности орбитального момента векторных пучков Ханкеля.

В [230] показано, что вектор орбитального момента (ОМ), равный

$$\mathbf{j} = \varepsilon\mu\,[\mathbf{r} \times \mathbf{S}], \tag{5.20}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, μ — магнитная проницаемость среды, $\mathbf{S}$ — вектор Умова–Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left([\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}]\right), \tag{5.21}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного поля электромагнитной волны, может быть рассчитан для волны с линейной поляризацией, направленной вдоль оси x, с помощью следующих выражений для всех проекций векторов напряженности поля:

$$\begin{aligned}
&E_x = I_1, \quad E_y = 0, \quad E_z = -\frac{1}{k}\frac{\partial I_2}{\partial x},\\
&H_x = \frac{i}{\mu k^2}\frac{\partial^2 I_2}{\partial y \partial x},\\
&H_y = \frac{i}{\mu} I_3 + \frac{i}{\mu k^2}\frac{\partial^2 I_2}{\partial x^2},\\
&H_z = \frac{i}{\mu k}\frac{\partial I_1}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

В (5.22) используются следующие интегралы:

$$I_1 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} A(\rho,\theta)\exp\left[ikr\rho\cos(\varphi-\theta) - kz\sqrt{\rho^2-1}\right]\rho\,d\rho\,d\theta, \tag{5.23}$$

$$I_2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{A(\rho,\theta)}{\sqrt{\rho^2-1}}\exp\left[ikr\rho\cos(\varphi-\theta) - kz\sqrt{\rho^2-1}\right]\rho\,d\rho\,d\theta, \tag{5.24}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} A(\rho,\theta)\sqrt{\rho^2-1}\,\exp\left[ikr\rho\cos(\varphi-\theta) - kz\sqrt{\rho^2-1}\right]\rho\,d\rho\,d\theta, \tag{5.25}$$

где $A(\rho,\theta)$ — комплексная амплитуда спектра плоских волн, (x, y, z) — декартовы координаты, z — координата вдоль оптической оси, (r, φ, z) — цилиндрические координаты и (ρ, θ) — безразмерные полярные координаты спектра плоских волн (т. е. ρ — это отношение

проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ на поперечную плоскость к волновому числу k).

Двойные интегралы (5.23)–(5.25) сводятся к одинарным интегралам, если можно явно выделить «вихревую» составляющую амплитуды спектра плоских волн:

$$A(\rho, \theta) = A(\rho) \exp(in\theta), \tag{5.26}$$

где n — целое число. С учетом (5.26) выражения (5.23)–(5.25) будут иметь вид:

$$I_1 = 2\pi i^n e^{in\varphi} \int\limits_0^\infty A(\rho) \exp\left(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right) J_n(kr\rho)\, \rho d\rho, \tag{5.27}$$

$$I_2 = 2\pi i^n e^{in\varphi} \int\limits_0^\infty \frac{A(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp\left(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right) J_n(kr\rho)\, \rho d\rho, \tag{5.28}$$

$$I_3 = 2\pi i^n e^{in\varphi} \int\limits_0^\infty A(\rho)\sqrt{\rho^2 - 1} \exp\left(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right) J_n(kr\rho)\, \rho d\rho, \tag{5.29}$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n-го порядка. Заметим, что выражения (5.27)–(5.29) связаны между собой с помощью производных:

$$I_3 = -\frac{1}{k}\frac{\partial I_1}{\partial z} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 I_2}{\partial z^2} \quad , \quad I_1 = -\frac{1}{k}\frac{\partial I_2}{\partial z}. \tag{5.30}$$

Пусть $A(\rho) = \rho^n$. При этом основной вклад в поле дают неоднородные затухающие волны. Мощность такого спектра плоских волн неограниченная, и также мощность светового поля, имеющего такой спектр, тоже не ограничена. Если спектр плоских волн задается такой степенной функцией, интегралы (5.27)–(5.29) можно вычислить с помощью функций Ханкеля:

$$I_1 = 2\pi i^n e^{in\varphi} \int\limits_0^\infty \rho^n \exp\left(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right) J_n(kr\rho)\rho d\rho = \\ = i^{n-1}\pi\lambda^{1/2} z r^n e^{in\varphi} \Psi_{n+3/2}(R), \tag{5.31}$$

$$I_2 = 2\pi i^n e^{in\varphi} \int\limits_0^\infty \frac{\rho^n}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp\left(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right) J_n(kr\rho)\rho d\rho = \\ = i^{n-1}\pi\lambda^{1/2} r^n e^{in\varphi} \Psi_{n+1/2}(R), \tag{5.32}$$

$$I_3 = 2\pi i^n e^{in\varphi} \int\limits_0^\infty \rho^n \sqrt{\rho^2 - 1} \exp\left(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right) J_n(kr\rho)\, \rho d\rho = \\ = i^{n-1}\pi\lambda^{1/2} r^n e^{in\varphi} \left[z^2 \Psi_{n+5/2}(R) - k^{-1}\Psi_{n+3/2}(R)\right], \tag{5.33}$$

$$\Psi_{n+\nu}(R) = \frac{H^{(2)}_{n+\nu}(kR)}{R^{n+\nu}}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{n+\nu}(R)}{\partial x} &= -\Psi_{n+\nu+1}(R)(kr\cos\varphi), \\ \frac{\partial \Psi_{n+\nu}(R)}{\partial y} &= -\Psi_{n+\nu+1}(R)(kr\sin\varphi), \end{aligned} \tag{5.35}$$

где $H^{(2)}_{\nu}(x) = J_{\nu}(x) - iY_{\nu}(x)$ — функция Ханкеля, $Y_{\nu}(x)$ — функция Неймана.

Из (5.31)–(5.33) видно, что интегралы I_1, I_2, I_3 равны соответственно пучкам Ханкеля 2-го, 1-го и 3-го типов [233]. Вспомогательные уравнения (5.35) используются для получения последующих формул.

С помощью (5.23) и (5.31)–(5.34) найдем все проекции векторного светового поля Ханкеля с линейной поляризацией ($E_y(r,\varphi,z) = 0$):

$$E_x(r,\varphi,z) = i^{n+1}\pi\lambda^{1/2} z r^n e^{in\varphi}\Psi_{n+3/2}(R), \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned} E_z(r,\varphi,z) = \frac{i^{n+1}\lambda^{3/2} r^{n-1} e^{in\varphi}}{2} \times \\ \times \left[ne^{-i\varphi}\Psi_{n+1/2}(R) - kr^2\cos\varphi\,\Psi_{n+3/2}(R)\right], \end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned} H_x(r,\varphi,z) = \frac{i^n\lambda^{5/2} r^{n-2} e^{in\varphi}}{4\pi\mu}\left[in(n-1)e^{-i2\varphi}\Psi_{n+1/2}(R) - \right. \\ \left. - inkr^2 e^{-i2\varphi}\Psi_{n+3/2}(R) + k^2r^4\sin\varphi\cos\varphi\,\Psi_{n+5/2}(R)\right], \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned} H_y(r,\varphi,z) = \frac{i^n\lambda^{5/2} r^{n-2} e^{in\varphi}}{4\pi\mu}\left[n(n-1)e^{-i2\varphi}\Psi_{n+1/2}(R) - \right. \\ \left. - 2kr^2(1 + ne^{-i\varphi}\cos\varphi)\Psi_{n+3/2}(R) + k^2r^2\left(z^2 + r^2\cos^2\varphi\right)\Psi_{n+5/2}(R)\right], \end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned} H_z(r,\varphi,z) = \frac{i^n\lambda^{3/2} z r^{n-1} e^{in\varphi}}{2\mu} \times \\ \times \left[ine^{-i\varphi}\Psi_{n+3/2}(R) - kr^2\sin\varphi\,\Psi_{n+5/2}(R)\right], \end{aligned} \tag{5.40}$$

Из (5.20) проекция на ось z ОУМ будет иметь вид:

$$j_z = \frac{\varepsilon\mu^2}{2}\left[x\,\mathrm{Re}\left(E_z H_x^* - H_z^* E_x\right) + y\,\mathrm{Re}\left(E_z H_y^*\right)\right]. \tag{5.41}$$

Из (5.41) видно, что выражения (5.36)-(5.40) позволяют в замкнутой форме (хотя и громоздкой) получить плотность проекции ОУМ на оптическую ось для непараксиального векторного пучка Ханкеля.

Из (5.36) видно, что поперечная проекция E-поля имеет радиально-симметричное распределение интенсивности с нулевым значением интенсивности на оптической оси (при $r = 0$), кроме начальной плоскости ($z = 0$) и кроме $n = 0$, когда пучок Ханкеля совпадает со сферической волной. Из (5.37) видно, что продольная проекция E-поля не будет обладать радиальной симметрией, а будет обладать симметрией относительно обеих декартовых координат, и будет вытянута вдоль

направления поляризации (вдоль оси x). Также продольная проекция E-поля на оси будет всегда равна нулю, кроме случая $n = 1$. При $n = 1$ в центре распределения интенсивности находится седловая точка: минимум по координате x и максимум по координате y. Значит и полная интенсивность векторного пучка Ханкеля с линейно-поляризацией $I = |E_x|^2 + |E_z|^2$ не будет обладать радиальной симметрией относительно оптической оси.

На рис. 5.3 показаны распределения поперечной и продольной составляющих интенсивности, а также суммарной интенсивности (т. е. величины $I_x = |E_x|^2$, $I_z = |E_z|^2$, $I = I_x + I_y$ соответственно) векторного пучка Ханкеля с линейной поляризацией вдоль оси x, с топологическим зарядом $n = 1$ в плоскостях $z = 5\lambda$ и $z = 10\lambda$.

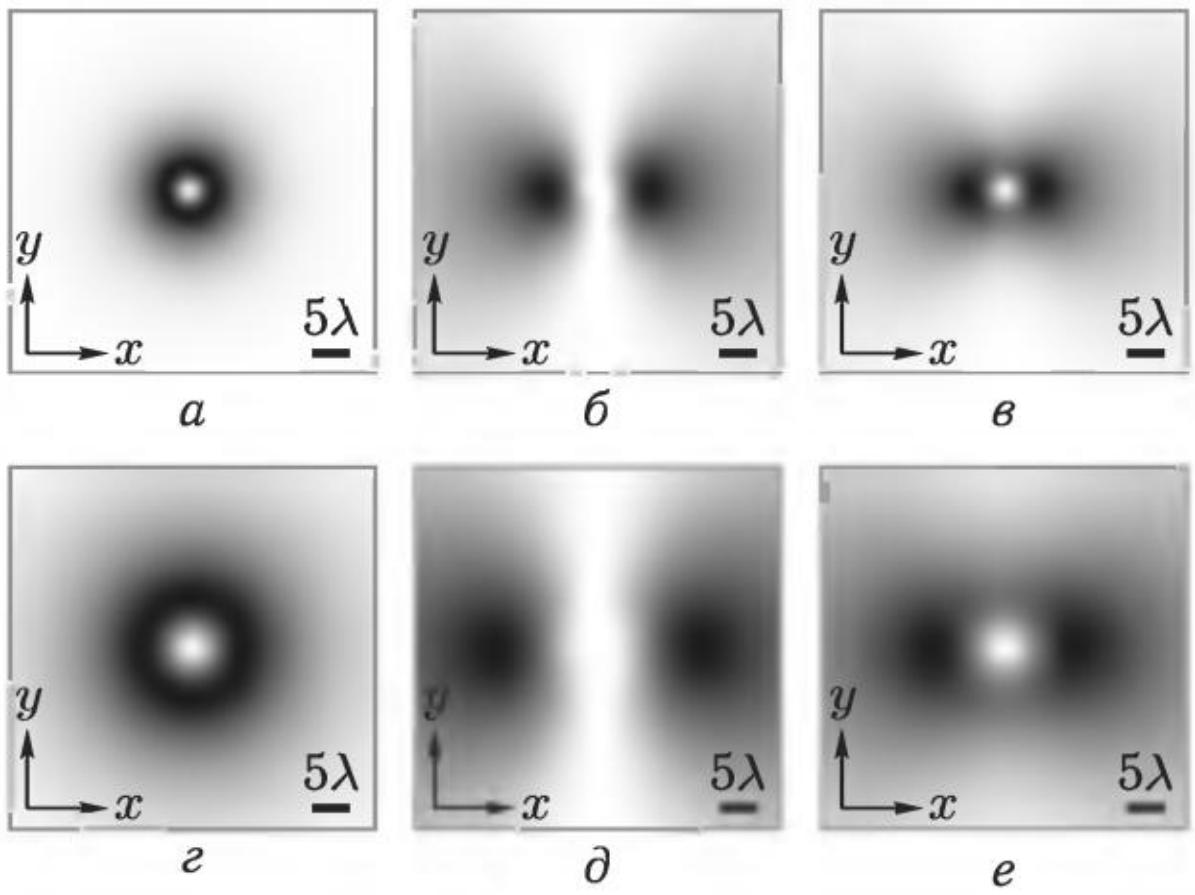


Рис. 5.3. Интенсивность (негатив) поперечной ($а, г$), продольной ($б, д$), и суммарной ($в, е$) интенсивности векторного пучка Ханкеля (длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд $n = 1$) в плоскостях $z = 5\lambda$ ($а, б, в$) и $z = 10\lambda$ ($г, д, е$)

Комплексные амплитуды скалярных пучков Ханкеля, полученных в [233], использованы для получения векторных пучков Ханкеля. Получены в явном виде амплитуды всех проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей (5.36)–(5.40) для векторного непараксиального вихревого пучка Ханкеля с линейной поляризацией. Тем самым получены в замкнутой аналитической форме выражения для проекций вектора Умова–Пойнтинга (УП) (2) и ОУМ (1). До сих пор только для непараксиального векторного пучка Бесселя [131] и параксиальных пучков Лагерра–Гаусса [9] можно было записать аналитически проекции этих векторов УП и ОУМ. Хотя интенсивность поперечной электрической компоненты E_x (5.36) обладает радиальной симметрией, интенсивность других проекций светового поля E_z (5.37), H_x (5.38), H_y (5.39) и H_z (5.40) не имеет радиальной симметрии для линейно-поляризованного пучка Ханкеля.

5.3. Пучки Ханкеля с круговой поляризацией

Векторных лазерных пучков, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, и для которых получены явные аналитические выражения для проекций электрического и магнитного векторов известно не много. Наиболее известные из этих пучков — это пучки Бесселя. В [237] рассмотрен симметричный пучок Бесселя нулевого порядка, для которого получены выражения для всех 6-ти проекций электрического и магнитного векторов в каждой точке пространства. В [238–241] получены проекции электрического и магнитного векторов не для самого пучка Бесселя, а для его TE и TM модовых состояний. Выражения для векторного пучка Бесселя произвольного порядка с линейной и круговой поляризациями получены в [242]. В [242] векторный пучок Бесселя получен методом потенциалов Герца. В [243] рассмотрены векторные сферические квази-гауссовы пучки. К сожалению, выражения для проекций электрического и магнитного векторов для этих пучков очень громоздки и с трудом поддаются теоретическому анализу. Авторы этой книги рассмотрели еще один (наряду с пучком Бесселя и сферическим пучком квази-гаусса) векторный пучок, который поддается полному аналитическому описанию. Были рассмотрены непараксиальные скалярные [233] и векторные [244, 245] пучки Ханкеля с линейной поляризацией. Эти пучки были получены методом разложения по плоским волнам [230]. Известны также векторные цилиндрические пучки с радиальной или азимутальной поляризациями [246]. Однако выражений для проекций электрического и магнитного векторов для таких пучков не получено. Цилиндрические пучки анализируются с помощью формул Ричардса–Вольфа и используются для острой фокусировки света [247].

Явные формулы для проекций электрического и магнитного векторов лазерного пучка позволяют получать аналитические выражения для векторов Пойнтинга и углового момента светового поля [9, 131, 238, 245].

В этом получены явные выражения для проекций электрического и магнитного векторов пучков Ханкеля с правой и левой круговой поляризацией. Из полученных выражений можно сделать вывод, что для пучка Ханкеля с топологическим зарядом n амплитуда продольных составляющих электрического и магнитного поля имеет топологический заряд $n+1$ для правой и $n-1$ для левой круговой поляризации.

5.3.1. Проекции векторов электромагнитного поля для правой и левой круговой поляризации. Аналогично, методу расчета, изложенному в [233, 244], можно найти все проекции электрического $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$ и магнитного $\mathbf{H}=(H_x, H_y, H_z)$ векторов пучка Ханкеля с правой E_x+iE_y и E_x-iE_y левой круговой поляризацией. Будем обозначать амплитуды проекций электрического и магнитного векторов верхними индексами $+$ и $-$ для обозначения правой и левой

круговой поляризации. Тогда для пучка Ханкеля с правой поляризацией получим:

$$E_{ny}^{+}(r,\varphi,z) = iE_{nx}(r,\varphi,z) = i^n \pi \lambda^{1/2} z \left(re^{i\varphi}\right)^n \psi_{n+3/2}(R), \quad (5.42)$$

$$\psi_{n+\nu}(R) = \frac{H_{n+\nu}^{(1)}(kR)}{R^{n+\nu}}, \quad R = \left(z^2 + r^2\right)^{1/2}, \quad (5.43)$$

$$E_{nz}^{+}(r,\varphi,z) = \frac{-i}{k}\left(i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(i^{n-1}\pi\lambda^{1/2}\left(re^{i\varphi}\right)^n \psi_{n+1/2}(R)\right) =$$
$$= i^{n+1}\pi\lambda^{1/2}\left(re^{i\varphi}\right)^{n+1}\psi_{n+3/2}(R), \quad (5.44)$$

$$H_{nx}^{+}(r,\varphi,z) = \frac{i}{k\mu}\left(\frac{\partial E_z^{+}}{\partial y} - i\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = \frac{i^{n-1}\lambda^{3/2}}{2\mu}\left(re^{i\varphi}\right)^n \times$$
$$\times \left\{(n+2)\,\psi_{n+3/2}(R) - k\left[z^2 - ir^2e^{i\varphi}\sin\varphi\right]\psi_{n+5/2}(R)\right\}, \quad (5.45)$$

$$H_{ny}^{+}(r,\varphi,z) = \frac{i}{k\mu}\left(-\frac{\partial E_z^{+}}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = \frac{i^{n}\lambda^{3/2}}{2\mu}\left(re^{i\varphi}\right)^n \times$$
$$\times \left[(n+2)\,\psi_{n+3/2}(R) - k\left(z^2 + r^2e^{i\varphi}\cos\varphi\right)\psi_{n+5/2}(R)\right], \quad (5.46)$$

$$H_{nz}^{+}(r,\varphi,z) = \frac{i}{k\mu}\left(i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(i^{n-1}\pi\lambda^{1/2}z\left(re^{i\varphi}\right)^n \psi_{n+3/2}(R)\right) =$$
$$= \frac{i^{n-1}\pi\lambda^{1/2}z}{\mu}\left(re^{i\varphi}\right)^{n+1}\psi_{n+5/2}(R), \quad (5.47)$$

Для пучка Ханкеля с левой поляризацией получим:

$$E_{ny}^{-}(r,\varphi,z) = -iE_{nx}(r,\varphi,z) = -i^n\pi\lambda^{1/2}z\left(re^{i\varphi}\right)^n\psi_{n+3/2}(R), \quad (5.48)$$

$$E_{nz}^{-}(r,\varphi,z) = \frac{-i}{k}\left(i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(i^{n-1}\pi\lambda^{1/2}\left(re^{i\varphi}\right)^n\psi_{n+1/2}(R)\right) =$$
$$= i^{n-1}\lambda^{3/2}\left(re^{i\varphi}\right)^{n-1}\left[n\psi_{n+1/2}(R) - \frac{kr^2}{2}\psi_{n+3/2}(R)\right], \quad (5.49)$$

$$H_{nx}^{-}(r,\varphi,z) = \frac{i}{k\mu}\left(\frac{\partial E_z^{-}}{\partial y} + i\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = \frac{i^{n+1}\lambda^{3/2}}{2\mu}\left(re^{i\varphi}\right)^n \times$$
$$\times \left\{\frac{2n(n-1)e^{-2i\varphi}}{kr^2}\psi_{n+1/2}(R) - \left(2ne^{-2i\varphi} - n - 2\right)\psi_{n+3/2}(R) -\right.$$
$$\left. - k\left(z^2 + ir^2e^{-i\varphi}\sin\varphi\right)\psi_{n+5/2}(R)\right\}, \quad (5.50)$$

$$H_{ny}^{-}(r,\varphi,z) = \frac{i}{k\mu}\left(-\frac{\partial E_z^{-}}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = \frac{i^{n}\lambda^{3/2}}{2\mu}\left(re^{i\varphi}\right)^n \times$$
$$\times \left\{-\frac{2n(n-1)e^{-2i\varphi}}{kr^2}\psi_{n+1/2}(R) + \left(2ne^{-2i\varphi} + n + 2\right)\psi_{n+3/2}(R) -\right.$$
$$\left. - k\left(z^2 + r^2e^{-i\varphi}\cos\varphi\right)\psi_{n+5/2}(R)\right\}, \quad (5.51)$$

$$H_{nz}^{-}(r,\varphi,z)=\frac{-i}{k\mu}\left(i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[i^{n-1}\pi\lambda^{1/2}z\left(re^{i\varphi}\right)^{n}\psi_{n+3/2}(R)\right]=$$
$$=\frac{i^{n-1}\lambda^{3/2}z}{\mu}\left(re^{i\varphi}\right)^{n-1}\left[n\psi_{n+3/2}(R)-\frac{kr^2}{2}\psi_{n+5/2}(R)\right]. \quad (5.52)$$

Из сравнения (5.42)–(5.47) и (5.48)–(5.52) видно, что правая круговая поляризация при положительном топологическом заряде увеличивает на единицу этот заряд у амплитуд продольных проекций электрического E_{nz}^{+} и магнитного H_{nz}^{+} векторов, и, наоборот, левая круговая поляризация уменьшает на единицу топологический заряд оптического вихря n у амплитуд продольных проекций электрического E_{nz}^{-} и магнитного H_{nz}^{-} векторов. У остальных проекций топологический заряд не изменяется и остается равным n. Это приводит к тому, что при отсутствии оптического вихря ($n=0$) продольные компоненты пучка Ханкеля с левой и правой поляризациями представляют собой оптические вихри с топологическими зарядами $n=\pm1$:

$$E_{0z}^{\pm}(r,\varphi,z)=i\pi\lambda^{1/2}re^{\pm i\varphi}\psi_{3/2}(R), \quad (5.53)$$

$$H_{0z}^{\pm}(r,\varphi,z)=\mp\frac{i\pi\lambda^{1/2}z}{\mu}re^{\pm i\varphi}\psi_{5/2}(R) \quad (5.54)$$

и на оптической оси ($r=0$) отличны от нуля только поперечные составляющие электромагнитного поля

$$E_{0z}^{\pm}(r=0,\varphi,z)=H_{0z}^{\pm}(r=0,\varphi,z)=0;$$

$$E_{0y}^{+}(r=0,\varphi,z)=iE_{0x}(r=0,\varphi,z)=-E_{0y}^{-}(r=0,\varphi,z)=$$
$$=\pi\lambda^{1/2}z\psi_{3/2}(z), \quad (5.55)$$

$$H_{0x}^{+}(r=0,\varphi,z)=-H_{0x}^{-}(r=0,\varphi,z)=$$
$$=\frac{-i\lambda^{3/2}}{2\mu}\left[2\psi_{3/2}(z)-kz^2\psi_{5/2}(z)\right], \quad (5.56)$$

$$H_{0y}^{+}(r=0,\varphi,z)=H_{0y}^{-}(r=0,\varphi,z)=$$
$$=\frac{\lambda^{3/2}}{2\mu}\left[2\psi_{3/2}(z)-kz^2\psi_{5/2}(z)\right], \quad (5.57)$$

Из (5.56), (5.57) видно, что на некоторых расстояниях z поперечные магнитные составляющие могут быть равны нулю. При $n>1$ на оптической оси ($r=0$) все проекции поля пучка Ханкеля равны нулю. При $n=1$ на оптической оси ($r=0$) отличны от нуля только продольные компоненты пучка Ханкеля с левой поляризацией

$$E_{1z}^{-}(r=0,\varphi,z)=\lambda^{3/2}\psi_{3/2}(z), \quad (5.58)$$

$$H_{1z}^{-}(r=0,\varphi,z)=\frac{\lambda^{3/2}z}{\mu}\psi_{5/2}(R). \quad (5.59)$$

а при $n = -1$ на оптической оси ($r = 0$) отличны от нуля только продольные компоненты пучка Ханкеля с правой поляризацией

$$E^{+}_{-1z}\,(r = 0, \varphi, z) = \pi\lambda^{1/2}\psi_{1/2}\,(z), \tag{5.60}$$

$$H^{+}_{-1z}\,(r = 0, \varphi, z) = \frac{-\pi\lambda^{1/2}z}{\mu}\psi_{3/2}\,(z), \tag{5.61}$$

Это приводит к тому, что при $n = 1$ и левой круговой поляризации на малых расстояниях z вместо светового кольца формируется световое пятно, которое затем преобразуется в кольцо. Это видно на рис. 5.4, на котором показаны распределения интенсивности пучка Ханкеля с единичным топологическим зарядом ($n = 1$) с линейной ($E_y = 0$) (рис. 5.4 *а, г*), правой круговой (рис. 5.4 *б, д*) и левой круговой (рис. 5.4 *в, е*) поляризацией на расстояниях $z = \lambda/4$ (рис. 5.4 *а–в*) и $z = \lambda/2$ (рис. 5.4 *г–е*). На рис. 5.4 *а–в* показана область $-\lambda/2 \leqslant x$, $y \leqslant \lambda/2$, а на рис. 5.4 *г–е* показана область $-3\lambda/2 \leqslant x$, $y \leqslant 3\lambda/2$.

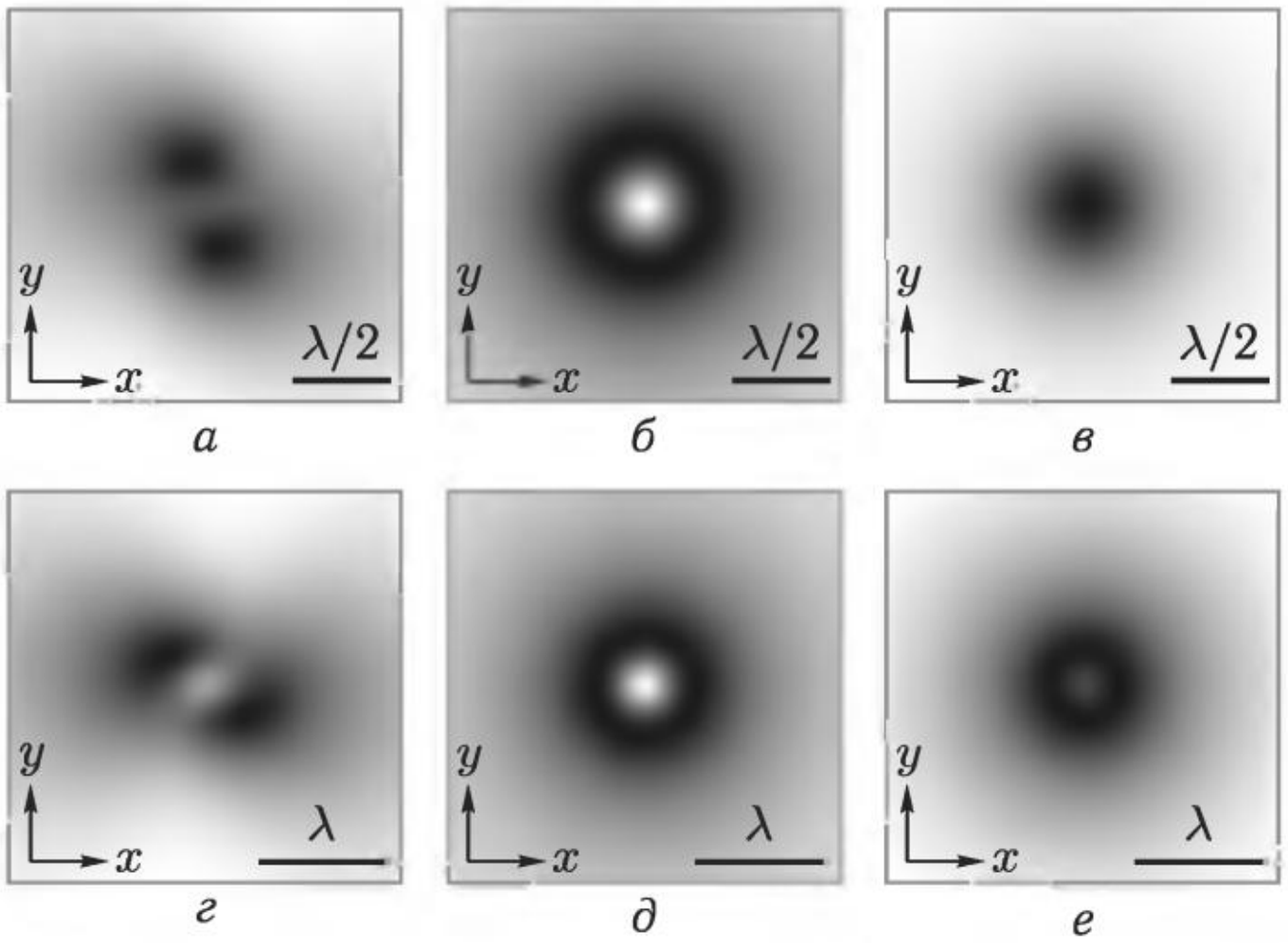


Рис. 5.4. Распределения интенсивности $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ (негатив) пучка Ханкеля ($n = 1$) с линейной ($a, г$), правой круговой ($б, д$) и левой круговой ($в, е$) поляризацией на расстояниях $z = \lambda/4$ ($а$–$в$) и $z = \lambda/2$ ($г$–$е$)

Из рис. 5.4 видно, что если для линейной поляризацией пучок Ханкеля не обладает круговой симметрией (и вращается в ближней зоне), то пучки Ханкеля с круговой поляризацией обладают круговой симметрией и имеют вид светового круга или кольца. Последнее видно и из выражения для интенсивности для правой круговой поляризации, которое не зависит от азимутального угла:

$$I^{+}_{n}(r, z) = \pi^2\lambda r^{2n}\left(2z^2 + r^2\right)\left|\psi_{n+3/2}(R)\right|^2. \tag{5.62}$$

Выражение для интенсивности пучка Ханкеля с левой круговой поляризацией более громоздкое, но тоже не зависит от азимутального угла:

$$I_n^-(r,z) = 2\pi^2\lambda z^2 r^{2n}\left|\psi_{n+3/2}(R)\right|^2 + \lambda^3 r^{2n-2}\Bigg[n^2\left|\psi_{n+1/2}(R)\right|^2 + \\ + \frac{k^2r^4}{2}\left|\psi_{n+3/2}(R)\right|^2 - 2nkr^2\,\mathrm{Re}\left(\psi_{n+1/2}(R)\psi*_{n+3/2}(R)\right)\Bigg], \quad (5.63)$$

где $\mathrm{Re}(\ldots)$ — реальная часть числа. Из (5.63) видно, что при $n=1$ на оптической оси ($r=0$) интенсивность будет убывать с ростом z:

$$I_1^-(r=0,z) = \lambda^3\left|\psi_{3/2}(z)\right|^2 = \frac{\lambda^4}{\pi^2 z^4}\left(1+\frac{1}{(kz)^2}\right). \quad (5.64)$$

5.3.2. Вихревые векторные пучки Ханкеля с круговой поляризацией в дальней зоне. При $z \gg \lambda$ формулы упрощаются. Пользуясь асимптотикой функции Ханкеля ($x \gg 1$)

$$H_v^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(-i)^{\nu+1/2}e^{ix}, \quad (5.65)$$

вместо (5.43) получим

$$\psi_{n+\nu}(R) = \frac{H_{n+\nu}^{(1)}(kR)}{R^{n+\nu}} \approx \frac{\lambda^{1/2}(-i)^{n+\nu+1/2}e^{ikR}}{\pi R^{n+\nu+1/2}}. \quad (5.66)$$

Подставляя (5.66) в (5.42)–(5.47), для пучка Ханкеля с правой поляризацией получим:

$$E_{ny}^+(r,\varphi,z) = iE_{nx}(r,\varphi,z) = -\lambda\frac{r^n z}{R^{n+2}}e^{in\varphi+ikR}, \quad (5.67)$$

$$E_{nz}^+(r,\varphi,z) = -i\lambda\frac{r^{n+1}}{R^{n+2}}e^{i(n+1)\varphi+ikR}, \quad (5.68)$$

$$H_{nx}^+(r,\varphi,z) = \frac{\lambda}{\mu}\left(i\frac{n+2}{kR^{n+2}} + \frac{ir^2e^{i\varphi}\sin\varphi - z^2}{R^{n+3}}\right)r^n e^{in\varphi+ikR}, \quad (5.69)$$

$$H_{ny}^+(r,\varphi,z) = i\frac{\lambda}{\mu}\left(i\frac{n+2}{kR^{n+2}} - \frac{r^2e^{i\varphi}\cos\varphi + z^2}{R^{n+3}}\right)r^n e^{in\varphi+ikR}, \quad (5.70)$$

$$H_{nz}^+(r,\varphi,z) = \frac{\lambda}{\mu}\frac{r^{n+1}z}{R^{n+3}}e^{i(n+1)\varphi+ikR}. \quad (5.71)$$

Аналогично вместо (5.48)-(5.52) для пучка Ханкеля с левой поляризацией получим в дальней зоне:

$$E_{ny}^-(r,\varphi,z) = -iE_{nx}(r,\varphi,z) = \lambda\frac{r^n z}{R^{n+2}}e^{in\varphi+ikR}, \quad (5.72)$$

$$E_{nz}^-(r,\varphi,z) = -i\lambda\frac{r^{n+1}}{R^{n+2}}\left(1-\frac{2inR}{kr^2}\right)e^{i(n-1)\varphi+ikR}, \quad (5.73)$$

$$H_{nx}^{-}(r,\varphi,z)=\frac{\lambda^2}{2\pi\mu}\frac{r^n}{R^{n+3}}\left\{\frac{2n\left(n-1\right)e^{-2i\varphi}}{kr^2}R^2+\right.$$

$$\left.+\,i\left(2ne^{-2i\varphi}-n-2\right)R+k\left(z^2+ir^2e^{-i\varphi}\sin\varphi\right)\right\}e^{in\varphi+ikR},\quad(5.74)$$

$$H_{ny}^{-}(r,\varphi,z)=\frac{\lambda^2}{2\pi\mu}\frac{r^n}{R^{n+3}}\left\{i\frac{2n\left(n-1\right)e^{-2i\varphi}}{kr^2}R^2+\right.$$

$$\left.+\left(2ne^{-2i\varphi}+n+2\right)R-ik\left(z^2+r^2e^{-i\varphi}\cos\varphi\right)\right\}e^{in\varphi+ikR},\quad(5.75)$$

$$H_{nz}^{-}\left(r,\varphi,z\right)=\frac{\lambda}{\mu}\frac{r^{n+1}z}{R^{n+3}}\left(\frac{2inR}{kr^2}-1\right)e^{i(n-1)\varphi+ikR}.\quad(5.76)$$

Распределение интенсивности в дальне зоне для правой и левой поляризаций вместо (5.62) и (5.63) будут равны:

$$I_n^{+}\left(r,\varphi,z\right)=\left|E_{nx}\left(r,\varphi,z\right)\right|^2+\left|E_{ny}^{+}\left(r,\varphi,z\right)\right|^2+\left|E_{nz}^{+}\left(r,\varphi,z\right)\right|^2=$$

$$=\lambda^2\frac{r^{2n}}{R^{2n+4}}\left(r^2+2z^2\right),\quad(5.77)$$

$$I_n^{-}\left(r,\varphi,z\right)=\left|E_{nx}\left(r,\varphi,z\right)\right|^2+\left|E_{ny}^{-}\left(r,\varphi,z\right)\right|^2+\left|E_{nz}^{-}\left(r,\varphi,z\right)\right|^2=$$

$$=\lambda^2\frac{r^{2n}}{R^{2n+4}}\left(r^2+2z^2+\frac{4n^2R^2}{k^2r^2}\right).\quad(5.78)$$

Максимум интенсивности для правой круговой поляризации лежит на световом кольце с радиусом, равным:

$$r_{\max}^{+}=z\sqrt{\frac{n-3+\sqrt{n^2+2n+9}}{2}}\,.\quad(5.79)$$

Этот радиус равен нулю (т. е. максимум интенсивности на оптической оси) только при $n=0$. При больших топологических зарядах ($n\gg1$) радиус светового кольца, на котором находится максимум интенсивности, увеличивается с ростом z как $r_{\max}^{+}=z\sqrt{n}$. В случае левой круговой поляризации уравнение для максимума интенсивности сложнее:

$$\left(n-3\right)\frac{r^4}{z^4}+2n\frac{r^2}{z^2}-\frac{r^6}{z^6}+\frac{4n^2\left(n-3\right)}{\left(kz\right)^2}\frac{r^2}{z^2}+\frac{4n^2\left(n-1\right)}{\left(kz\right)^2}-\frac{8n^2}{\left(kz\right)^2}\frac{r^4}{z^4}=0,\quad(5.80)$$

но так как предполагается, что $z\gg\lambda$, знаменатели в последних трех слагаемых являются большими величинами и потому можно оставить только первые три слагаемых. В этом случае из (5.80) получается следующее выражение для максимума интенсивности, совпадающее с выражением для правой круговой поляризации:

$$r_{\max}^{-}=z\sqrt{\frac{n-3+\sqrt{n^2+2n+9}}{2}}\,.\quad(5.81)$$

Вектор Умова–Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}$ может быть рассчитан для пучков Ханкеля с круговой поляризацией, пользуясь выражениями для проекций электрического и магнитного векторов (5.42)–(5.52). Но эти выражения будут громоздкими, и их анализ будет затруднителен. Выражения же для проекций вектора Умова-Пойнтинга для пучка Ханкеля с круговой поляризацией в дальней зоне выглядят менее громоздкими. Приведем выражения только для поперечных проекций вектора $\mathbf{S}$, которые участвуют в определении осевой проекции вектора углового момента. Тогда для правой круговой поляризации:

$$S_{nx}^{+}(r,\varphi,z) = E_{ny}^{+*}(r,\varphi,z)\,H_{nz}^{+}(r,\varphi,z) - E_{nz}^{+*}(r,\varphi,z)\,H_{ny}^{+}(r,\varphi,z) =$$
$$= \left[-\lambda\frac{r^n z}{R^{n+2}}e^{-in\varphi-ikR}\right]\left[\frac{\lambda}{\mu}\frac{r^{n+1}z}{R^{n+3}}e^{i(n+1)\varphi+ikR}\right] -$$
$$-\left[i\lambda\frac{r^{n+1}}{R^{n+2}}e^{-i(n+1)\varphi-ikR}\right]\left[i\frac{\lambda}{\mu}\left(i\frac{n+2}{kR^{n+2}} - \frac{r^2e^{i\varphi}\cos\varphi + z^2}{R^{n+3}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\, r^n e^{in\varphi+ikR}\right] = \frac{\lambda^2}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left[i\frac{n+2}{k}Re^{-i\varphi} - \left(r^2+2z^2\right)\cos\varphi\right], \quad (5.82)$$

$$S_{ny}^{+}(r,\varphi,z) = E_{nz}^{+*}(r,\varphi,z)\,H_{nx}^{+}(r,\varphi,z) - E_{nx}^{*}(r,\varphi,z)\,H_{nz}^{+}(r,\varphi,z) =$$
$$= \left[i\lambda\frac{r^{n+1}}{R^{n+2}}e^{-i(n+1)\varphi-ikR}\right]\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(i\frac{n+2}{kR^{n+2}} + \frac{ir^2e^{i\varphi}\sin\varphi - z^2}{R^{n+3}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\, r^n e^{in\varphi+ikR}\right] + \left[i\lambda\frac{r^n z}{R^{n+2}}e^{-in\varphi-ikR}\right]\left[\frac{\lambda}{\mu}\frac{r^{n+1}z}{R^{n+3}}e^{i(n+1)\varphi+ikR}\right] =$$
$$= \frac{\lambda^2}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left[-\frac{n+2}{k}Re^{-i\varphi} - \left(r^2+2z^2\right)\sin\varphi\right], \quad (5.83)$$

и для левой круговой поляризации:

$$S_{nx}^{-}(r,\varphi,z) = E_{ny}^{-*}(r,\varphi,z)\,H_{nz}^{-}(r,\varphi,z) - E_{nz}^{-*}(r,\varphi,z)\,H_{ny}^{-}(r,\varphi,z) =$$
$$= \frac{\lambda^2}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left\{2z^2\left(\frac{2nR}{kr^2}\sin\varphi - \cos\varphi\right) + \left(1+\frac{2inR}{kr^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{2n(n-1)e^{-i\varphi}}{r^2}\frac{R^2}{k^2} + i\left(2ne^{-2i\varphi}+n+2\right)\frac{R}{k}e^{i\varphi} - r^2\cos\varphi\right]\right\}, \quad (5.84)$$

$$S_{ny}^{-}(r,\varphi,z) = E_{nz}^{-*}(r,\varphi,z)\,H_{nx}^{-}(r,\varphi,z) - E_{nx}^{*}(r,\varphi,z)\,H_{nz}^{-}(r,\varphi,z) =$$
$$= \frac{\lambda^2}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left\{-2z^2\left(\sin\varphi + \frac{2nR}{kr^2}\cos\varphi\right) + \left(1+\frac{2inR}{kr^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[i\frac{2n(n-1)e^{-i\varphi}}{r^2}\frac{R^2}{k^2} - \left(2ne^{-2i\varphi}-n-2\right)\frac{R}{k}e^{i\varphi} - r^2\sin\varphi\right]\right\}. \quad (5.85)$$

Проекции на ось z векторов плотности углового момента $\mathbf{j} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{r}\times\mathbf{S}\right]$ для пучков Ханкеля в дальней зоне с правой и левой

круговой поляризациями имеет вид:

$$j_{nz}^{+}(r,\varphi,z) = \mathrm{Re}\left\{xS_{ny}^{+}(r,\varphi,z) - yS_{nx}^{+}(r,\varphi,z)\right\} = -\frac{\lambda^2}{\mu}\frac{n+2}{k}\frac{r^{2n+2}}{R^{2n+4}}. \tag{5.86}$$

$$j_{nz}^{-}(r,\varphi,z) = \mathrm{Re}\left\{xS_{ny}^{-}(r,\varphi,z) - yS_{nx}^{-}(r,\varphi,z)\right\} = \\ = -\frac{\lambda^2}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left[4n^2(n-1)\frac{R^3}{k^3r^3} + (n-2)\frac{R}{k}r + 4nz^2\frac{R}{kr}\right]. \tag{5.87}$$

Можно показать, что при $r = 0$ плотность ОУМ (5.86), (5.87) не стремится к бесконечности, а равна нулю независимо от поляризации. Из (5.86) следует, что полный угловой момент пучка Ханкеля бесконечный. Но если бесконечный полный угловой момент разделить на бесконечную полную интенсивность или на бесконечную полную осевую проекцию вектора Пойнтинга, то получившийся нормированный угловой момент должен быть конечным. Заметим, что при $n = 0$ у пучка Ханкеля остается спиновый угловой момент:

$$j_{0z}^{+}(r,\varphi,z) = -j_{0z}^{-}(r,\varphi,z) = -\frac{2\lambda^2}{\mu k}\frac{r^2}{R^4}. \tag{5.88}$$

В данном разделе получены явные аналитические выражения для проекций электрического магнитного векторов вихревых пучков Ханкеля с правой и левой круговой поляризациями. Показано, что правая круговая поляризация при положительном топологическом заряде увеличивает на единицу этот заряд у амплитуд продольных проекций электрического и магнитного векторов, и, наоборот, левая круговая поляризация уменьшает на единицу топологический заряд оптического вихря у амплитуд продольных проекций электрического и магнитного векторов. У остальных проекций топологический заряд равен n. Получены явные выражения для распределения интенсивности электрического вектора для пучков Ханкеля с круговой поляризацией, из которого следует, что пучок Ханкеля с круговой поляризацией обладает круговой симметрией (в сечении пучка либо световой круг, либо кольцо). Например, пучок Ханкеля с линейной поляризацией не обладает круговой симметрией [245]. Для пучка Ханкеля с круговой поляризацией в дальней зоне дифракции ($R \gg \lambda$) получены явные аналитические выражения для поперечных проекций вектора Умова-Пойнтинга и для осевой проекции вектора углового момента. У пучка с правой круговой поляризацией угловой момент пропорционален $n + 2$, у пучка с левой круговой поляризацией угловой момент пропорционален $n - 2$, а у пучка с линейной круговой поляризацией угловой момент пропорционален топологическому заряду n [245].

Заключение

В книге рассмотрены новые ускоряющиеся и вихревые лазерные пучки, которые были введены в оптику в последние 10 лет. К ускоряющимся пучкам относятся двумерные пучки Эйри. Главной особенностью пучков Эйри является изогнутость траектории главного максимума (основного лепестка). Он распространяется по параболической траектории. Поэтому пучки Эйри называются ускоряющимися или баллистическими (так как свободно падающее тело двигается по параболе с постоянным ускорением). Рассмотрены также другие ускоряющиеся пучки, которые распространяются не по параболическим траекториям, а, например, по гиперболической, и другие. Предложен метод переобразования замедляющихся пучков в ускоряющиеся. Рассмотрены трехмерные пучки Пирси и половинные пучки Пирси, которые обладают свойством резкой (с ускорением) самофокусировки. Вихревые лазерные пучки рассмотривались ранее авторами в монографии «Вихревые лазерные пучки» (Самара, Новая техника, 248 с. (2012)). В данной книге рассмтариваются новые лазерные пучки, которые не вошли в упомянутую монографию. Это вихревые пучки Эрмита–Гаусса, асимметричные бездифракционные моды Бесселя и Ломмеля, параксиальные асимметричные пучки Бесселя–Гаусса и Лагерра–Гаусса, векторные пучки Ханкеля с линейной и круговой поляризацией. Для всех вихревых пучков найдены аналитические выражения для орбитального углового момента. Все рассмотренные вихревые пучки (кроме пучков Ханкеля) зависят от непрерывного параметра, с изменением которого непрерывно изменяется орбитальный угловой момент пучка. Он может быть целым или дробным. Многие из рассмотренных вихревых лазерных пучков были сформированы экспериментально с помощью жидкокристаллического модулятора света. Вихревые лазерные пучки с орбитальным угловым моментом применяются для уплотнения информационных каналов в беспроводных системах связи (увеличивается число степеней свободы в лазерном пучке), в квантовой информатике для формирования пары перепутанных по орбитальному моменту фотонов (состояние фотона с дробным орбитальным моментом является перепутанным), для зондирования атмосферы в присутствии турбулентности (вижревые пучки более устойчивые к искажениям, чем обычный гауссов пучок), для захвата и вращения микрообъектов, в том числе биологических (вихревые пучки передают свой орбитальный момент захваченной частице, вращая ее). Эта область оптики и фотоники (лазерные пучки, сингулярная оптика) бурно развивается, и данная книга является только введением в нее.

Список литературы

1. *Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H.* Diffraction-free beams // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 1–1501.
2. *Siegman A.E.* Lasers. - University Science,1986.
3. *Abramochkin E.G., Volostnikov V.G.* Generalized Gaussian beams // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2004. Vol. 6. P. 5157–5161.
4. *Gutiérrez-Vega J.C., Iturbe-Castillo M.D., Ramırez G.A., Tepichın E., Rodrıguez-Dagnino R.M., Chávez-Cerda S., New G.H.C.* Experimental demonstration of optical Mathieu beams // Opt. Commun. 2001. Vol. 195, No. 1. P. 35–40.
5. *Bandres M.A., Gutierres-Vega J.C.* Ince-Gaussian beams // Opt. Lett. 2004. Vol. 29, No. 2. P. 144–146.
6. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Skidanov R.V., Soifer V.A.* Hypergeometric modes // Opt. Lett. 2007. Vol. 32, No. 7. P. 742–744.
7. *Siviloglou G.A., Christodoulides D.N.* Accelerating finite energy Airy beams // Opt. Lett. 2007. Vol. 32. P. 979–981.
8. *Ring J., Lindberg J., Mourka A., Mazilu M., Dholakia K., Dennis M.* Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams // Opt. Express. 2012. Vol. 20. P. 18955–18966.
9. *Allen L., Beijersergen M.W., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 8185–8189.
10. *Котляр В.В., Ковалев А.А.* Вихревые лазерные пучки. - Самара: Новая техника, 2012.
11. *Zhu K., Zhou G., Li X., Zhen X., Tang H.* Propagation of Bessel-Gaussian beams with optical vortices in turbulent atmosphere // Opt. Express. 2008. Vol. 16, No. 26. P. 12315–12320.
12. *Krenn M., Fickler R., Fink M., Handsteiner J., Malik M., Scheidl T., Ursin R., Zeilinger A.* Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna // New J. Phys. 2014. Vol. 16. P. 113028.
13. *Hadzievski L., Maluckov A., Rubenchik A.M., Turitsyn S.* Stable optical vortices in nonliner multicore fibers // Light: Science. Appl. 2015. Vol. 4. P. e314.
14. *Foo G., Palacios D.M., Swartzlander Jr. G.A.* Optical vortex coronagraph // Opt. Lett. 2005. Vol 30, No. 24. P. 3308–3310.
15. *Mair A., Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A.* Entanglement of the orbital angular momentum states of photons // Nature. 2001. Vol. 412, No. 6844. P. 313–316.
16. *Otsu T., Ando T., Takiguchi Y., Ohtake Y., Toyoda H., Itoh H.* Direct vidence for three-dimensional off-axis trapping with single Laguerre-Gaussian beam // Sci. Rep. 2014. Vol. 4. P. 4579.

17. *Kalnins E.G., Miller Jr. W.* Lie theory and separation of variables // J. Math. Phys. 1974. Vol. 15. P. 1728–1737.
18. *Berry M.V., Balazs N.L.* Nonspreading wave packets // Am. J. Phys. 1979. Vol. 47. P. 264–267.
19. *Besieris I.M., Shaarawi A.M., Ziolkowski R.W.* Nondispersive accelerating wave packets // Am. J. Phys. 1994. Vol. 62, No. 6. P. 519–521.
20. *Besieris I.M., Shaarawi A.M.* A note on an accelerating finite energy Airy beam // Opt. Lett. 2007. Vol. 32. P. 2447–2449.
21. *Siviloglou G.A., Broky J., Dogariu A., Christodoulides D.N.* Observation of accelerating Airy beams // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99. P. 213901.
22. *Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C.* Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems // Opt. Express. 2007. Vol. 15. P. 16719–16728.
23. *Siviloglou G.A., Broky J., Dogariu A., Christodoulides D.N.* Ballistic dynamics of Airy beams // Opt. Lett. 2008. Vol. 33. P. 207–209.
24. *Sztul H.I., Alfano R.R.* The Poynting vector and angular momentum of Airy beams // Opt. Express. 2008. Vol. 16. P. 9411–9416.
25. *Bandres M.A.* Accelerating parabolic beams // Opt. Lett. 2008. Vol. 33. P. 1678–1680.
26. *Polynkin P., Kolesik M., Moloney J.V., Siviloglou G.A., Christodoulides D.N.* Curved plasma channel generation using ultraintense Airy beams // Science. 2009. Vol. 324. P. 229–232.
27. *Bandres M.A.* Accelerating beams // Opt. Lett. 2009. Vol. 34. P. 3791–3793.
28. *Carretero L., Acebal P., Blaya S., Garcia C., Fimia A., Madrigal R., Murciano A.* Nonparaxial diffraction analysis of Airy and SAiry beams // Opt. Express. 2009. Vol. 17. P. 22432–22441.
29. *Dolev I., Ellenbogen T., Arie A.* Switching the acceleration direction of Airy beams by a nonlinear optical process // Opt. Lett. 2010. Vol. 35. P. 1581–1583.
30. *Khonina S.N.* Specular and vortical Airy beams // Opt. Commun. 2011. Vol. 284. P. 4263–4271.
31. *Hu Y., Zhang P., Lou C., Huang S., Xu J., Chen Z.* Optimal control of the ballistic motion of Airy beams // Opt. Lett. 2010. Vol. 35. P. 2260–2263.
32. *Carvalho M.I., Facao M.* Propagation of Airy-related beams // Opt. Express. 2010. Vol. 18. P. 21938–21949.
33. *Efremidis N.K., Christodoulides D.N.* Abruptly autofocusing waves // Opt. Lett. 2010. Vol. 35. P. 4045–4047.
34. *Longhi S.* Airy beams from a microchip laser // Opt. Lett. 2011. Vol. 36. P. 716–718.
35. *Abdollahpour D., Suntsov S., Parazoglou D.G., Tzortzakis S.* Spatiotemporal Airy light bullets in the linear and nonlinear regimes // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 105. P. 253901.
36. *Greenfield E., Segev M., Walasik W., Raz O.* Accelerating light beams along arbitrary convex trajectories // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 213902.
37. *Efremidis N.K.* Airy trajectory engineering in dynamic linear index potential // Opt. Lett. 2011. Vol. 36. P. 3006–3008.

38. *Froehly L., Courvoisier F., Mathis A., Jacquot M., Furfaro L., Giust R., Lacourt P.A., Dudley J.M.* Arbitrary accelerating micron-scale caustic beams in two and three dimensions // Opt. Express. 2011. Vol. 19. P. 16455–16465.
39. *Ye Z., Liu S., Lou C., Zhang P., Hu Y., Song D., Zhao J., Chen Z.* Acceleration control of Airy beams with optically induced refractive-index gradient // Opt. Lett. 2011. Vol. 36. P. 3230–3232.
40. *Li L., Li T., Wabg S.M., Zhang C., Zhu S.N.* Plasmonic Airy beam generated by in-plane diffraction // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 107. P. 126804.
41. *Cottrell D.M., Devis J.A., Hazard T.M.* Direct generation of accelerating Airy beams using a 3/2 phase-only pattern // Opt. Lett. 2009. Vol. 34. P. 2634–2636.
42. *Abramochkin E.G., Razueva E.* Product of three Airy beams // Opt. Lett. 2011. Vol. 36. P. 3732–3734.
43. *Porat G., Dolev I., Barlev O., Arie A.* Airy beam laser // Opt. Lett. 2011. Vol. 36. P. 4119–4121.
44. *Kaminer I., Bekenstein R., Nemirovsky J., Segev M.* Nondiffracting accelerating wave packets of Maxwell's equations // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 108. P. 163901.
45. *Zhang P., Hu Y., Cannan D., Salandrino A., Li T., Morandotti R., Zhang X., Chen Z.* Generation of linear and nonlinear nonparaxial accelerating beams // Opt. Lett. 2012. Vol. 37. P. 2820–2822.
46. *Courvoisier F., Mathis A., Froehly L., Giust R., Furfaro R., Lacourt P.A., Jacquot M., Dudley J.M.* Sending femtosecond pulses in circles: highly nonparaxial accelerating beams // Opt. Lett. 2012. Vol. 37. P. 1736–1738.
47. *Jiang Y., Huang K., Lu X.* Propagation dynamics of abruptly autofocusing Airy beams with optical vortices // Opt. Express. 2012. Vol. 20. P. 18579–18584.
48. *Yan S., Yao B., Lei M., Dan D., Yang Y., Gao P.* Virtual source for an Airy beam // Opt. Lett. 2012. Vol. 37. P. 4774–4776.
49. *Aleahmad P., Miri M., Mills M.S., Kaminer I.* Fully vectoral accelerating diffraction-free Helmholtz beams // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109. P. 203902.
50. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A.* Airy beam with a hyperbolic trajectory // Opt. Commun. 2014. Vol. 313. P. 290–293.
51. *Хонина С.Н., Волотовский С.Г.* Ограниченные 1D пучки Эйри: лазерный веер // Компьютерная оптика. 2008. Т. 32, № 2. С. 168–174.
52. *Zamboni-Rached M., Nobrega K.N., Dartora C.A.* Analytic description of Airy-type beams when truncated by finite apertures // Opt. Express. 2012. Vol. 20, No. 18. P. 19972–19977.
53. *Abramovitz M., Stegun I.A.* Handbook of mathematical functions. - Dover Publications, 1965.
54. *Kaganovsky Y., Heyman E.* Wave analysis of Airy beams // Opt. Express. 2010. Vol. 18, No. 8. P. 8440–8452.
55. *Bandres M.A., Rodiguez-Lara B.M.* Nondiffracting accelerating waves: Weber waves and parabolic momentum // New J. Phys. 2013. Vol. 15. P. 013054.
56. *Torre A.* A note on the general solution of the paraxial wave equation: a Lie algebra view // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2008. Vol. 10. P. 055006.

57. *Bandres M.A., Alonso M.A., Kaminer I., Segev M.* Three-dimensional accelerating electromagnetic waves // Opt. Express – 2013. – Vol. 21. – No. 12. – P. 13917–13929.
58. *Kotlyar V.V., Stafeev S.S., Kovalev A.A.* Curved laser microjet in near field // Appl. Opt. 2013. Vol. 52, No. 18. P. 4131–4136.
59. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. - М.: Наука, 1973.
60. *Kogelnik H., Li T.* Laser beams and resonators // Proc. IEEE. 1966. Vol. 54. P. 1312–1329.
61. *Котляр В.В., Ковалев А.А.* Орбитальный угловой момент суперпозиции двух обобщенных лазерных пучков Эрмита–Гаусса // Компьютерная оптика. 2013. Т. 37, № 2. С. 179–185.
62. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Nalimov A.G.* Propagation of hypergeometric laser beams in a medium with the parabolic refractive index // J. Opt. 2013. Vol. 313. P. 290–293.
63. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A.* Family of hypergeometric laser beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2008. Vol. 25, No. 1. P. 262–270.
64. *Papazoglou D.G., Efremidis N.K., Christodoulides D.N., Tzortakis S.* Observation of abruptly autofocusing waves // Opt. Lett. 2011. Vol. 32, No. 10. P. 1842–1844.
65. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983.
66. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Soifer V.A.* Transformation of decelerating laser beams into accelerating ones // J. Opt. 2014. Vol. 16, No. 8. P. 085701.
67. Дифракционная нанофотоника / Под ред. В.А. Сойфера. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 680 с.
68. *Luneburg R.K.* Mathematical Theory of Optics. Berkeley: University of California Press, 1966.
69. *Zhang Y., Wang L., Zheng C.* Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. Vol. 22. P. 2542–2546.
70. *Ozaktas H., Koç A., Sari I., Kutay M.* Efficient computation of quadratic-phase integrals in optics // Opt. Lett. 2006. Vol. 31. P. 35–37.
71. *Koç A., Ozaktas H., Hesselink L.* Fast and accurate computation of two-dimensional non-separable quadratic-phase integrals // J. Opt. Soc. Am. A. 2010. Vol. 27. P. 1288–1302.
72. *Котляр В.В., Хонина С.Н., Ванг Я.* Операторное описание параксиальных световых полей // Компьютерная оптика. 2001. Т. 21. С. 45–52.
73. *Khonina S.N., Striletz A.S., Kovalev A.A., Kotlyar V.V.* Propagation of laser vortex beams in a parabolic optical fiber // Proc. SPIE. 2009. Vol. 7523. P. 7523B.
74. *Стрилец А.С., Хонина С.Н.* Согласование и исследование методов, основанных на дифференциальном и интегральном операторах распространения лазерного излучения в среде с малыми неоднородностями // Компьютерная оптика. 2008. Т. 32, № 1. С. 33–38.
75. *Touat T., Yergeau F.* Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide // Appl. Opt. 1993. Vol. 32. P. 309–312.
76. *Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Линейная макроскопическая электординамика. М.: Радио и связь, 2000. 512 с.

77. *Vaveliuk P., Lencina A., Rodrigo J., Matos O.* Symmetric Airy beams // Opt. Lett. 2014. Vol. 39, No. 8. P. 2370–2373.
78. *Chu X., Wen W.* Effect of aberrations on the parameters of an Airy beam // Opt. Commun. 2014. Vol. 324. P. 18–21.
79. *Liang Y., Hu Y., Ye Z., Song D., Lou C., Zhang X., Xu J., Morandotti R., Chen Z.* Dynamical deformed Airy beams with arbitrary angles between two wings // J. Opt. Soc. Am. A. 2014. Vol. 31, No. 7. P. 1468–1472.
80. *Li P., Liu S., Peng T., Xie G., Gan X., Zhao J.* Spiral autofocusing Airy beams carrying power-exponent-phase vortices // Opt. Express. 2014. Vol. 22, No. 7. P. 7598–7606.
81. *Ruelas A., Davis J., Moreno I., Cottrell D., Bandres M.* Accelerating light beams with arbitrarily transverse shapes // Opt. Express 2014. Vol. 22, No. 3. P. 3490–3500.
82. *Zhang P., Hu Y., Li T., Cannan D., Yin X., Morandotti R., Chen Z., Zhang X.* Nonparaxial Mathieu and Weber Accelerating Beams // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109. P. 193901.
83. *Alonso M., Bandres M.* Generation of nonparaxial accelerating fields through mirrors. I: Two dimensions // Opt. Express. 2014. Vol. 22, No. 6. P. 7124–7132.
84. *Kotlyar V., Kovalev A., Soifer V., Tuvey C., Davis J.* Sidelobe contrast reduction for optical vortex beams using a helical axicon // Opt. Lett. 2007. Vol. 32. P. 921–923.
85. *Ohtake Y., Ando T., Inoue T., Matsumoto N., Toyoda H.* Sidelobe reduction of tightly focused radially higher-order Laguerre-Gaussian beams using annular masks // Opt. Lett. 2008. Vol. 33. P. 617–619.
86. *Barwick S.* Reduced side-lobe Airy beams // Opt. Lett. 2011. Vol. 36. P. 2827–2829.
87. *Котляр В.В., Ковалев А.А., Сойфер В.А.* Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38, № 1. С. 4–10.
88. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Soifer V.A.* Asymmetric Bessel modes // Opt. Lett. 2014. Vol. 39, No. 8. P. 2395–2398.
89. *Lombardo K., Alonso M.A.* Orthonormal basis for nonparaxial focused fields in two dimensions, and its application to modeling scattering and optical manipulation of objects // Am. J. Phys. 2012. Vol. 80, No. 1. P. 82–93.
90. *Kravtsov Yu.A.* Complex ray and complex caustics // Radiophys. Quantum. Electron. 1967. Vol. 10. P. 719–730.
91. *Arnaud J.* Degenerate optical cavities. II: Effects of misalignments // Appl. Opt. 1967. Vol. 8. P. 1909–1917.
92. *Keller J.B., Streifer W.* Complex rays with an application to Gaussian beams // J. Opt. Soc. Am. 1971. Vol. 61. P. 40–43.
93. *Deschamps G.A.* Gaussian beams as a bundle of complex rays // Electron. Lett. 1971. Vol. 7. P. 684–685.
94. *Berry M., Nye J., Wright F.* The elliptic umbilic diffraction catastrophe // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1979. Vol. 291. P. 453–484.
95. *Vaughan J.M., Willetts D.* Interference properties of a light-beam having a helical wave surface // Opt. Commun. 1979. Vol. 30. P. 263–267.

96. *Coullet P., Gil G., Rocca F.* Optical vortices // Opt. Commun. 1989. Vol. 73. P. 403–408.
97. *Bazhenov V., Vasnetsov M.V., Soskin M.S.* Laser-beam with screw dislocations in the wavefront // JETP Lett. 1990. Vol. 52. P. 429–431.
98. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkarev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V.* The rotor phase filter // J. Mod. Opt. 1992. Vol. 39. P. 1147–1154.
99. *Abramochkin E.G., Volostnikov V.G.* Beam transformation and nontransformed beams // Opt. Commun. 1991. Vol. 83. P. 123–125.
100. *Beijersbergen M.W., Allen L., Van der Veen H.E., Woerdman J.P.* Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum // Opt. Commun. 1993. Vol. 96. P. 123–132.
101. *Yao A.M., Padgett M.J.* Orbital angular momentum: origins, behavior and applications // Adv. Opt. Photon. 2011. Vol. 3. P. 161–204.
102. *Vyas S., Senthilkumaran P.* Interferometric optical vortex array generator // Appl. Opt. 2007. Vol. 46. P. 2893–2898.
103. *Fraczek E., Budzyn G.* An analysis of an optical vortices interferometer with focused beam // Opt. Applicata. 2009. Vol. XXXIX. P. 91–99.
104. *Singh B.K., Singh G., Senthilkumaran P., Metha D.S.* Generation of optical vortex array using single-element reverset-wavefront folding interferometer // Int. J. Opt. 2012. Vol. 2012. P. 689612.
105. *Shen Y., Campbell G.T., Hage B., Zou H., Buchler B.C., Lam P.K.* Generation and interferometric analysis of high charge optical vortices // J. Opt. 2013. Vol. 15. P. 044005.
106. *Gotte J.B., O'Holleran K., Precce D., Flossman F., Franke-Arnold S., Barnett S.M., Padgett M.J.* Light beams with fractional orbital angular momentum and their vortex structure // Opt. Express. 2008. Vol. 16. P. 993–1006.
107. *O'Dwyer D.P., Phelan C.F., Rakovich Y.P., Eastham P.R., Lunney J.C., Donegan J.F.* Generation of continuously tunable fractional orbital angular momentum using internal conical diffraction // Opt. Express. 2010. Vol. 18. P. 16480–16485.
108. *Siegman A.E.* Hermite-Gaussian functions of complex argument as optical beam eigenfunction // J. Opt. Soc. Am. 1973. Vol. 63. P. 1093–1094.
109. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Paakkonen P., Simonen J., Turunen J.* An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics // J. Mod. Opt. 2001. Vol. 48. P. 1543–1557.
110. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A.* Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum // J. Opt. Soc. Am. A. 2014. Vol. 31, No. 2. P. 274–282.
111. *Pratesi R., Ronchi L.* Generalized Gaussian beams in free space // J. Opt. Soc. Am. A. 1977. Vol. 67. P. 1274–1276.
112. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series, and Products: 5 Edition. New York: Academic, 1996. 1762 p.
113. *Magnus W., Oberhettinger F., Sony R.P.* Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics: Third Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1966. 508 p.
114. *Miller Jr. W.* Symetry and separation of variables. Addison-Wesley Pub. Comp., 1977.

115. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel beams // J. Mod. Opt. 1992. Vol. 42, No. 6. P. 1231–1239.
116. *Gutierrez-Vega J.C., Iturbe-Castillo M.D., Chavez-Cedra S.* Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams // Opt. Lett. 2000. Vol. 25, No. 20. P. 1493–1495.
117. *Chavez-Cedra S., Gutierrez-Vega J.C., New G.H.C.* Elliptic vortices of electromagnetic wave fields // Opt. Lett. 2001. Vol. 26, No. 22. P. 1803–1805.
118. *Dennis M.R., Ring J.D.* Propagation-invariant beams with quantum pendulum spectra: from Bessel beams to Gaussian beam-beams // Opt. Lett. 2013. Vol. 38, No. 17. P. 3325–3328.
119. *Gori F., Guattari G., Padovani C.* Bessel-Gauss beams // Opt. Commun. 1987. Vol. 64. P. 491–495.
120. *Li Y., Lee H., Wolf E.* New generalized Bessel-Gauss beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2004. Vol. 21. P. 640–646.
121. *Kisilev A.P.* New structures in paraxial Gaussian beams // Opt. Spectrosc. 2004. Vol. 96. P. 479–481.
122. *Gutierrez-Vega J.C., Bandres M.A.* Helmholz-Gauss waves // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. Vol. 22. P. 289–298.
123. *Котляр В.В., Ковалев А.А., Сойфер В.А.* Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38, № 1. С. 4–10.
124. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Skidanov R.V., Soifer V.A.* Assymetric Bessel-Gauss beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2014. Vol. 31, No. 9. P. 1977–1983.
125. *Durnin J.* Exact solution for nondiffractive beams. I. The scalar theory // J. Opt. Soc. Am. A. 1987. Vol. 4, No. 4. P. 651–654.
126. *Turunen J., Vasara A., Friberg A.T.* Holographic generation of diffractive-free beams // Appl. Opt. 1988. Vol. 27, No. 19. P. 3959–3962.
127. *Vasara A., Turunen J., Friberg A.T.* Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms // J. Opt. Soc. Am. A. 1989. Vol. 6, No. 11. P. 1748–1754.
128. *MacDonald R.P., Boothroyd S.A., Okamato T., Chrostowski J., Syrett B.A.* Interboard optical data distribution by Bessel beam shadowing // Opt. Commun. 1996. Vol. 122. P. 169–177.
129. *McQueen C.A., Arlt J., Dholakia K.* An experiment to study a «nondiffracting» light beam // Am. J. Phys. 1999. Vol. 67. P. 912–915.
130. *Barnett S.M., Allen L.* Orbital angular momentum and nonparaxial light-beams // Opt. Commun. 1994. Vol. 110. P. 670–678.
131. *Volke-Sepulveda K., Garcés-Chávez V., Chávez-Cedra S. et al.* Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam // J. Opt. B-Quantum S. O. 2002. Vol. 4. P. S82–S89.
132. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* An algorithm for the generation of laser beams with londitudinal periodicity: rotating images // J. Mod. Opt. 1997. Vol. 44, No. 7. P. 1409–1416.
133. *Paakkonen P., Lautanen J., Honkanen M. et al.* Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics // J. Mod. Opt. 1998. Vol. 45, No. 11. P. 2355–2369.

134. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Lautanen J., Honkanen M., Turunen J.* Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE // Optik. 1999. Vol. 110, No. 3. P. 137–144.
135. *Lee H.S., Stewart B.W., Choi K., Fenichel H.* Holographic nondiverging hollow beam // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49, No. 6. P. 4922–4927.
136. *Herman R.M., Wiggins T.A.* Production and uses of diffractionless beams // J. Opt. Soc. Am. A. 1991. Vol. 8, No. 6. P. 932–942.
137. *Arlt J., Dholakia K.* Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon // Opt. Commun. 2000. Vol. 177. P. 297–301.
138. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A., Uspleniev G.V., Shinkarev M.V.* Trochoson // Opt. Commun. 1992. Vol. 91, No. 3-4. P. 158–162.
139. *Devis J.A., Carcole E., Cottrell D.M.* Intensity and phase measurements of nondiffracting beams generated with a magneto-optic spatial light modulator // Appl. Opt. 1996. Vol. 35, No. 4. P. 593–598.
140. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Jefimovs K., Paakkonen P., Turunen J.* Astigmatic Bessel laser beams // J. Mod. Opt. 2004. Vol. 51, No. 5. P. 677–686.
141. *MacDonald M.P., Paterson L., Volke-Sepulveda K., Arlt J., Sibbett W., Dholakia K.* Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures // Science. 2002. Vol. 296. P. 1101–1103.
142. *Garces-Chavez V., McGloin D., Melville H., Sibbett W., Dholakia K.* Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam // Nature. 2002. Vol. 419. P. 145–147.
143. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimovs K., Simonen J., Turunen J.* Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // J. Mod. Opt. 2004. Vol. 51, No. 14. P. 2167–2184.
144. *Arlt J., Hitomi T., Dholakia K.* Atom guiding long Laguerre-Gaussian and Bessel beams // Appl. Phys. B-Lasers O. 2000. Vol. 71, Iss. 4. P. 549–554.
145. *Arlt J., Dholakia K., Soneson J., Wright E.M.* Optical dipole traps and atomic waveguides based on Bessel light beams // Phys. Rev. A. 2001. Vol. 63. P. 063602.
146. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Soifer V.A.* Hankel-Bessel laser beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2012. Vol. 29, No. 5. P. 741–747.
147. *Zhu Y., Liu X., Gao J., Zhang Y., Zhao F.* Probability density of the orbital angular momentum mode of Hankel-Bessel beams in an atmospheric turbulence // Opt. Express. 2014. Vol. 22, No. 7. P. 7765–7772.
148. *Bouchal Z., Olivik M.* Non-diffractive vector Bessel beams // J. Mod. Opt. 1995. Vol. 42, No. 8. P. 1555–1566.
149. *Yu Y.Z., Dou W.B.* Vector analysis of nondiffracting Bessel beams // Prog. in Electr. Res. Lett. 2008. Vol. 5. P. 57–71.
150. *Litvin I.A., Dudley A., Forbes A.* Poynting vector and orbital angular momentum density of superpositions of Bessel beams // Opt. Express. 2011. Vol. 19, No. 18. P. 16760–16771.
151. *Chen Y.F., Lin Y.C., Zhuang W.Z., Liang H.C., Su K.W., Huang K.F.* Generation of large orbital angular momentum from superposed Bessel beams corresponding to resonant geometric modes // Phys. Rev. A. 2012. Vol. 85. P. 043833.

152. *Gong L., Qui X., Ren Y., Zhu H., Liu W., Zhou J.* Observation of the asymmetric Bessel bems with arbitrary orientation using a digital micromirror device // Opt. Express. 2014. Vol. 22, No. 22. P. 26763–26776.

153. *Sheppard C.J.R., Kou S.S., Lin J.* Two-dimensional complex source point solutions: application to propagationally invarint beams, optical fiber modes, planar waveguides, and plasmonic devices // J. Opt. Soc. Am. A. 2014. Vol. 31, No. 12. P. 2674–2679.

154. *Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Porfirev A.P.* Shifted nondiffractive Bessel beams // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 91. P. 053840.

155. *Котляр В.В., Ковалев А.А., Скиданов Р.В., Сойфер В.А.* Вращающиеся элегантные пучки Бесселя–Гаусса // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38, № 2. С. 162–170.

156. *Mitri F.G.* Partial-wave series expansion in spherical coordinates for the acoustic field of vortex beams generated from finite circular aperture // IEEE T. Ultrason. Ferr. 2014. Vol. 61, No. 12. P. 2089–2097.

157. *Mendez G., Fernando-Vazquez A., Lopez R.P.* Orbital angular momentum and highly efficient holographic generation of nondiffractive TE and TM vector beams // Opt. Commun. 2015. Vol. 334. P. 174–183.

158. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Soifer V.A.* Superpositions of asymmetrical Bessel beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2015. Vol. 32, No. 6. P. 1046–1052.

159. *Courtial J., Zambrini R., Dennis M., Vasnetsov M.* Angular momentum of optical vortex arrays // Opt. Express. 2006. Vol. 4. P. 938–949.

160. *Martinez-Castellanos I., Gutierrez-Vega J.* Shaping optical beams with non-integer orbital angular momentum: a generalized differential operator approach // Opt. Lett. 2015. Vol. 40, No. 8. P. 1764–1767.

161. *Kovalev A.A., Kotlyar V.V.* Orbital angular momentum of superposition of identical shifted vortex beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2015. Vol. 32, No. 10. P.1805–1810.

162. *Lu J., Greenleaf J.* Diffraction-limited beams and their applications for ultrasonic imaging and tissue characterization // Am. J. Phys. 1979. Vol. 47, No. 3. P. 264–267.

163. *Nelson W., Palastro J.P., Davis C.C., Sprangle P.* Propagation of Bessel and Airy beams through atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Am. A. 2014. Vol. 31, No. 3. P. 603–609.

164. *Froehly L., Jacquot M., Lacourt P.A., Dudley J.M., Courvoisier F.* Spatiotemporal structure of femtosecond bessel beams from spatial light modulators // J. Opt. Soc. Am. A. 2014. Vol. 31, No. 4. P. 790–793.

165. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions: 2nd ed. - Cambridge, England: Cambridge University Press, 1966. - §16.5-16.59. P. 537-550.

166. *Sheppard C.J.R.* Focusing of vortex beams: Lommel treatment // J. Opt. Soc. Am. A. 2014. Vol. 31, No. 3. P. 644–651.

167. *Скиданов Р.В., Ганчевская С.В.* Дифракционные оптические элементы для формирования комбинаций вихревых пучков в задаче манипулирования микрообъектами // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38, № 1. С. 65–71.

168. *Kovalev A.A., Kotlyar V.V.* Lommel modes // Opt. Commun. 2015. Vol. 338. P.117–122.

169. *Huang S., Miao Z., He C., Pang F., Li Y., Wang T.* Composite vortex beams by coaxial superposition of Laguerre-Gaussian beams // Opt. Las. Eng. 2016. Vol. 78. P. 132–139.
170. *Plick W.N., Krenn M.* Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 92, No. 6. P. 063841.
171. *Savelyev D.A., Khonina S.N.* Characteristics of sharp focusing of vortex Laguerre-Gaussian beams // Computer Optics. 2015. Vol. 39, No. 5. P. 654–662.
172. *Stilgoe A.B., Nieminen T.A., Rubinsztein-Dunlop H.* Energy, momentum and propagation of non-paraxial high-order Gaussian beams in the presence of an aperture // J. Opt. 2015. Vol. 17, No. 12. P. 125601.
173. *Zhang Y., Liu X., Beliж M., Zhong W., Wen F., Zhang Y.* Anharmonic propagation of two-dimensional beams carrying orbital angular momentum in a harmonic potential // Opt. Lett. 2015. Vol. 40. P. 3786–3789.
174. *Kim D.J., Kim J.W.* High-power TEM00 and Laguerre–Gaussian mode generation in double resonator configuration // Appl. Phys. B. 2015. Vol. 121, No. 3. P. 401–405.
175. *Lin D., Daniel J., Clarkson W.* Controlling the handedness of directly excited Laguerre-Gaussian modes in a solid-state laser // Opt. Lett. 2014. Vol. 39. P. 3903–3906.
176. *Ruffato G., Massari M., Romanato F.* Generation of high-order Laguerre-Gaussian modes by means of spiral phase plates // Opt. Lett. 2014. Vol. 39. P. 5094–5097.
177. *Das B.C., Bhattacharyya D., De S.* Narrowing of Doppler and hyperfine line shapes of Rb - D2 transition using a vortex beam // Chem. Phys. Lett. 2016. Vol. 644. P. 212–218.
178. *Allocca A., Gatto A., Tacca M., Day R.A., Barsuglia M., Pillant G., Buy C., Vajente G.* Higher-order Laguerre-Gauss interferometry for gravitational-wave detectors with in situ mirror defects compensation // Phys. Rev. D. 2015. Vol. 92, No. 10. P. 102002.
179. *Sun K., Qu C., Zhang C.* Spin-orbital-angular-momentum coupling in Bose-Einstein condensates // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 91, No. 6. P. 063627.
180. *Mondal P.K., Deb B., Majumder S.* Angular momentum transfer in interaction of Laguerre-Gaussian beams with atoms and molecules // Phys. Rev. A. 2014. Vol. 89, No. 6. P. 063418.
181. *Otsu T., Ando T., Takiguchi Y., Ohtake Y., Toyoda H., Itoh H.* Direct evidence for three-dimensional off-axis trapping with single Laguerre-Gaussian beam // Sci. Rep. 2014. Vol. 4. P. 4579.
182. *Krenn M., Fickler R., Fink M., Handsteiner J., Malik M., Scheidl T., Ursin R., Zeilinger A.* Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna // New J. Phys. 2014. Vol. 16. P. 113028.
183. *Kravtsov Yu.A.* Complex ray and complex caustics // Radiophys. Quantum Electron. 1967. Vol. 10. P. 719–730.
184. *Kim H.C., Lee Y.H.* Hermite–Gaussian and Laguerre–Gaussian beams beyond the paraxial approximation // Opt. Commun. 1999. Vol. 169. P. 9–16.
185. *Rykov M.A., Skidanov R.V.* Modifying the laser beam intensity distribution for obtaining improved strength characteristics of an optical trap // Appl. Opt. 2014. Vol. 53, No. 2. P. 156–164.

186. *Mair A., Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A.* Entanglement of the orbital angular momentum states of photons // Nature. 2001. Vol. 412, No. 6844. P. 313–316.
187. *Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Porfirev A.P.* Asymmetric Laguerre-Gaussian beams // Phys. Rev. A. 2016. Vol. 93. P. 063858.
188. *Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Porfirev A.P.* Optical trapping and moving of microparticles by using asymmetric Laguerre-Gaussian beams // Opt. Lett. 2016. Vol. 41, No. 11. P.2426–2429.
189. *Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J.* Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. Vol. 22, No. 5. P. 849–861.
190. *Pearcey T.* The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic // Phil. Mag. S. 1946. Vol. 7, No. 37. P. 311–317.
191. *Berry M.V., Howls C.J.* Integrals with coalescing saddles // http://dlmf.nist.gov/36.2 (Digital Library of Mathematical Functions, National Institute of Standards and Technology, 2012).
192. *Deng D., Chen C., Zhao X., Chen B., Peng X., Zheng Y.* Virtual Source of a Pearcey beam // Opt. Lett. 2014. Vol. 39, No. 9. P. 2703–2706.
193. *Ronzitti E., Guillon M., de Sars V., Emiliani V.* LCoS nematic SLM characterization and modeling for diffraction efficiency optimization, zero and ghost orders suppression // Opt. Express. 2012. Vol. 20, No. 16. P. 17843–17855.
194. *Котляр В.В., Ковалев А.А., Порфирьев А.П.* Формирование лазерных половинных пучков Пирси с помощью пространственного модулятора света // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38, № 4. С. 658–662.
195. *Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Zaskanov S.G., Profirev A.P.* Half Pearcey laser beams // J. Opt. 2015. Vol. 17. P. 035604.
196. *Wang J., Yang J.-Y., Fazal I.M. et al.* Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing // Nat. Photon. 2012. Vol. 6. P. 488–496.
197. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimov K., Simonen J., Turunen J.* Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // J. Mod. Opt. 2004. Vol. 51, No. 14. P. 2167–2184.
198. *Zhu Y., Liu X., Cao J., Zhang Y., Zhao F.* Probability density of the orbital angular momentum mode of Hankel-Bessel beams in an atmospheric turbulence // Opt. Express. 2014. Vol. 22, No. 7. P. 7765–7772.
199. *Ковалев А.А., Котляр В.В., Засканов С.Г.* Структурно-устойчивые трехмерные и двумерные лазерные половинные пучки Пирси // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38, № 2. С. 193–197.
200. *Ковалев А.А., Котляр В.В.* Пучки Пирси с орбитальным угловым моментом. Компьютерная оптика. 2015. Т.39, № 4. С. 453–458.
201. *Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Porfirev A.P.* Auto-focusing accelerating hyper-geometric laser beams. Journal of Optics, v.18, no.2, p. 025610 (2016).
202. *Karimi E., Zito G., Piccirillo B., Marrucci L., Santameto E.* Hypergeometric-Gaussian modes // Opt. Lett. 2007. Vol. 32. P. 3053–3055.
203. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Skidanov R.V., Khonina S.N., Turunen J.* Generating hypergeometric laser beams with a diffractive optical elements // Appl. Opt. 2008. Vol. 47, No. 32. P. 6124–6133.

204. *Chen J.*, *Wang G.*, *Xu Q.* Production of confluent hypergeometric beam by computer-generated hologram // Opt. Eng. 2011. Vol. 50, No. 2. P. 024201.
205. *Bernardo B.*, *Moraes F.* Data transmission by hypergeometric modes through a hyperbolic-index medium // Opt. Exp. 2011. Vol. 19, No. 2. P. 11264–11270.
206. *Li J.*, *Chen Y.* Propagation of confluent hypergeometric beam through unaxial crystals orthogonal to the optical axis // Opt. Las. Technol. 2012. Vol. 44. P. 1603–1610.
207. *Di Falco A.*, *Kehr S.C.*, *Leonhardt U.* Luneberg lens in silicon photonics // Opt. Express 2011. Vol. 19. P. 5156–5162.
208. *Zentgrat T.*, *Liu Y.*, *Mikkelsen M.N.*, *Valentine J.*, *Zhang X.* Plasmonic Luneberg and Eaton lenses // Nat. Nanotechn. 2011. Vol. 6. P. 151–155.
209. *Dyachenko P.N.*, *Pavelyev V.S.*, *Soifer V.A.* Graded photonic quasicrystals // Opt. Lett. 2012. Vol. 37, No. 12. P. 2178–2180.
210. *Triandaphilov Y.R.*, *Kotlyar V.V.* Photonic Crystal Mikaelian Lens // Opt. Mem. Neur. Netw. (Inform. Opt.). 2008. Vol. 17. P. 1–7.
211. *Kotlyar V.V.*, *Kovalev A.A.*, *Soifer V.A.* Subwavelength Focusing with a Mikaelian Planar Lens // Opt. Mem. Neur. Netw. (Inform. Opt.). 2010. Vol. 19. P. 273–278.
212. *Kotlyar V.V.*, *Stafeev S.S.* Sharply focusing a radially polarized laser beam using a gradient Mikaelian's microlens // Opt. Commun. 2009. Vol. 282, No. 4. P.459–464.
213. *Котляр В.В.*, *Ковалев А.А.*, *Налимов А.Г.*, *Триандафилов Я.Р.* Механизм сверхразрешения в планарной гиперболической секансной линзе // Компьютерная оптика. 2010. Т. 34, № 4. С. 428–435.
214. *Котляр В.В.*, *Хонина С.Н.*, *Ванг Я.* Операторное описание параксиальных световых полей // Компьютерная оптика. 2001. Т. 21. С. 45–52.
215. *Mendlovic D.*, *Ozaktas H.M.* Fractional Fourier transform and their optical implementation: I. // J. Opt. Soc. Am. A. 1993. Vol. 10, No. 9. P. 1875–1881.
216. *Lohmann A.W.* Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform // J. Opt. Soc. Am. A. 1993. Vol. 10, No. 10. P. 2118–2186.
217. *Стрилец А.С.*, *Хонина С.Н.* Исследование распространения лазерных пучков в параболическом оптическом волокне с помощью интегрального параксиального оператора // Компьютерная оптика. 2007. Т. 31, № 4. С. 33–39.
218. *Dupuis A.* Guiding in the visible with "colorful"solid-core Bragg fiber // Opt. Lett. 2007. Vol. 32. P. 2882–2884.
219. *Ostrovsky A.S.*, *Rickenstorff-Parrao C.*, *Arrizon V.* Generation of the «perfect» optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator // Opt. Lett. 2013. Vol. 38, No. 4. P. 534–536.
220. *Chen M.*, *Mazilu M.*, *Arita Y.*, *Wright E.M.*, *Dholakia K.* Dynamics of microparticles trapped in a perfect vortex beam // Opt. Lett. 2013. Vol. 38, No. 22. P. 4919–4922.
221. *Vaity P.*, *Rusch L.* Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam // Opt. Lett. 2015. Vol. 40. P. 597–600.
222. *Jabir M.V.*, *Apurv Chaitanya N.*, *Aadhi A.*, *Samanta G.K.* Generation of «perfect» vortex of variable size and its effect in angular spectrum of the down-converted photons // Sci. Rep. 2016. Vol. 6. P. 21877.

223. *García-García J., Rickenstorff-Parrao C., Ramos-García R., Arrizón V., Ostrovsky A.* Simple technique for generating the perfect optical vortex // Opt. Lett. 2014. Vol. 39, No. 18. P. 5305–5308.
224. *Fedotowsky A., Lehovec K.* Optimal filter design for annular imaging // Appl. Opt. 1974. Vol. 13, No. 12. P. 2919–2923.
225. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров - М.: Наука, 1968. - 720 с.
226. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Kovalev A.A., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J.* Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate // Opt. Lett. 2006. Vol. 31, No. 11. P. 1597–1599.
227. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Skidanov R.V., Moiseev O.Y., Soifer V.A.* Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate // J. Opt. Soc. Am. A. 2007. Vol. 24, No. 7. P. 1955–1964.
228. *Котляр В.В., Ковалев А.А., Порфирьев А.П.* Сравнение разных подходов к формированию «идеального» оптического вихря // Компьютерная оптика. 2016. Т. 40, № 3, С. 312–321.
229. *Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C., Chavez-Cedra S.* Parabolic nondiffracting optical wave fields // Opt. Lett. 2004. Vol. 29, No. 1. P. 44–46.
230. *Cerjan A., Cerjan C.* Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation // J. Opt. Soc. Am. A. 2011. Vol. 28, No. 11. P. 2253–2260.
231. *Guo C.S., Liu X., He J.L., Wang H.T.* Optimal annulus structures of optical vortices // Opt. Express. 2004. Vol. 12. P. 4625–4634.
232. *Guo J., Wei Z., Liu Y., Huang A.* Analysis of optical vortices with suppressed sidelobes using modified Bessel-like function and traepzoid annulus modulation structures // J. Opt. Soc. Am. A. 2015. Vol. 32, No. 2. P. 195–203.
233. *Котляр В.В., Ковалев А.А., Сойфер В.А.* Непараксиальные вихревые лазерные пучки Ханкеля первого и второго типов // Компьютерная оптика. 2015. Т. 39, № 3. С. 299–304 (2015).
234. *Wang J., Yang J.-Y., Fazal I.M. et al.* Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing // Nat. Photon. 2012. Vol. 6. P. 488–496.
235. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimov K., Simonen J., Turunen J.* Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // J. Mod. Opt. 2004. Vol. 51, No. 14. P. 2167–2184.
236. *Zhu Y., Liu X., Cao J., Zhang Y., Zhao F.* Probability density of the orbital angular momentum mode of Hankel-Bessel beams in an atmospheric turbulence // Opt. Express. 2014. Vol. 22, No. 7. P. 7765-7772.
237. *Mishra S.R.* A vector wave analysis of a Bessel beam // Opt. Commun. 1991. T. 85. C. 159–161.
238. *Bouchal Z., Olivík M.* Non-diffractive vector Bessel beams // J. Mod. Opt. 1995. Vol. 42, No. 8. P. 1555–1566.
239. *Horak R., Bouchal Z., Bajer J.* Nondiffracting stationary electromagnetic fields // Opt. Commun. 1997. Vol. 133. P. 314–327.
240. *Jauequi R., Hacyan S.* Quantum-mechanical properties Bessel beams // Phys. Rev. A. 2005. Vol. 71. P. 033411.

241. *Yu Y.Z.*, *Dou W.B.* Vector analyses of nondiffracting Bessel beams // Prog. in Electr. Res. Lett. 2008. Vol. 5. P. 57–71.
242. *Wang Y.*, *Dou W.*, *Meng H.* Vector analyses of linearly and circularly polarized Bessel beams using Herz vector potentials // Opt. Express. 2014. Vol. 22, No. 7. P. 7821–7830.
243. *Mitri F.G.* Vector spherical quasi-Gaussian vortex beams // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89. P. 023205.
244. *Котляр В.В.*, *Ковалев А.А.* Векторные лазерные пучки Ханкеля с орбитальным угловым моментом // Компьютерная оптика. 2015. Т. 39, № 4. С. 449–452.
245. *Kotlyar V.V.*, *Kovalev A.A.*, *Soifer V.A.* Vectorial rotating vortex Hankel laser beams // J. Opt. 2016. Vol. 18, No. 9. P. 095602.
246. *Youngworth K.S.*, *Brown T.G.* Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams // Opt. Express. 2000. Vol. 7, No. 2. P. 77–87.
247. *Zhan Q.*, *Leger J.R.* Focus shaping using cylindrical vector beams // Opt. Express. 2002. Vol. 10, No. 7. P. 324–331.