

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ

**АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ
МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО
НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРАХ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
НОВОСИБИРСК
2016

ВВЕДЕНИЕ

Современное развитие многопроцессорной вычислительной техники, у которой число ядер исчисляется многими сотнями тысяч, выдвигает на первый план методы Монте-Карло (ММК), наиболее адаптированные к параллельным вычислениям как с точки зрения простоты распараллеливания алгоритмов, так и необходимости проведения огромного количества идентичных расчетов. Обычно ММК рекламируют как методы решения детерминированных многомерных краевых задач математической физики, однако наибольшая эффективность использования ММК в параллельных вычислениях достигается при моделировании долговременных случайных процессов, в частности, решений систем стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Необходимость таких расчетов возникает, в частности, в радиофизике, химии, медицине, финансах, аэродинамике, гидродинамике, квантовой механике.

Универсальным способом анализа решений систем СДУ является ММК. Моделируя на компьютере независимые между собой траектории решения СДУ, можно рассчитать любые требуемые функционалы от решения, например, для стохастических колебательных систем исследовать различные режимы движений, переходы из одного режима колебаний в другой, провести анализ поведения решений вблизи точек бифуркации, оценить устойчивость колебаний, синхронизацию колебаний, возникновение турбулентности и т. д.

Математические модели в виде систем СДУ с осциллирующими решениями возникают в самых разных областях науки [1]. Особый интерес представляет анализ возможных переходов от одного типа осцилляций к другому, например, при прогнозировании аварий и катастроф, вызываемых ростом амплитуды колебаний. Нередко возникает ситуация, когда в процессе работы машины или механизма в некоторые случайные моменты времени происходят срывы номинального расчетного режима работы, сопровождающиеся переходом в другой, нерасчетный режим [2]. В связи с этим возникает задача оценки устойчивости заданного режима работы [3]. Поведение решения системы СДУ заданной структуры

полностью определяется конкретными вещественными параметрами векторе сноса и в матрице интенсивности шумов.

При численном решении осциллирующих обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) обычно удовлетворительная точность расчетов методом Эйлера имеет место при 32 шагах интегрирования на одном периоде колебаний. Как показали ранее проведенные эксперименты [4], при численном решении осциллирующих СДУ обобщенным явным методом Эйлера с таким размером шага интегрирования зачастую возникает неустойчивость численного решения, т. е. сильный рост амплитуды колебаний и дисперсии компонент решения, тогда как у точного решения СДУ дисперсия либо не растет, либо растет незначительно при продвижении по временному интервалу интегрирования. В связи с этим возникает необходимость уменьшения размера шага интегрирования по сравнению с ОДУ на несколько порядков. Кроме того, малые объемы ансамблей моделируемых траекторий решений СДУ дают совершенно неверные оценки моментов решений в случае сильной асимметрии их плотностей распределения. Это приводит к тому, что достоверный численный анализ решений СДУ на персональных компьютерах становится многосуточным. Подобные расчеты могут быть осуществлены быстро только на многопроцессорных суперкомпьютерах, особенно это касается параметрического анализа, когда решение одной и той же системы СДУ многократно статистически моделируется для различных наборов вещественных параметров модели.

Для нахождения решений СДУ можно использовать различные численные методы типа метода Мильштейна и обобщенного метода Розенброка [4]. Однако эти методы требуют гораздо больше вычислений на шаге интегрирования, чем обобщенный явный метод Эйлера, и, кроме того, для них необходимо вычислять производные от компонент вектора сноса или матрицы интенсивности шумов, что затруднительно для многомерных систем СДУ со многими шумами, или когда снос или интенсивности шумов – разрывные функции.

Наиболее сложными для любых методов исследования свойств решений систем СДУ являются нелинейные стохастические колебания [5]. При этом случайные шумы в системах могут быть большими и как внешними (аддитивными), так и внутренними, параметрическими (мультипликативными). Наличие последних, как правило, ведет к неустойчивости колебаний и сильной асимметрии распределений решений СДУ. Практика вычислений показала, что моментные функции и даже плотности распреде-

лений решений СДУ не дают полной информации о нелинейных стохастических колебаниях. Более информативны частотные обобщения интегральной кривой и фазовой траектории, в которых учитывается вся статистика из моделируемого ансамбля траекторий. Рассчитываемые характеристики решений СДУ прежде всего должны показать: а) реакцию динамической системы на случайные возмущения, б) наличие общих закономерностей в поведении моделируемых траекторий решений СДУ, в) возможность проведения сравнений при параметрическом анализе решений, г) существование аналогичного поведения реальных колебательных движений, д) максимально возможные уклонения траекторий решений, е) различные режимы колебаний при различных параметрах дискретной схемы, включая шаги дискретизации по времени и пространству.

Если идеальные ламинарные движения вязкой жидкости хорошо описываются детерминированными уравнениями Навье–Стокса (УНС), то этого нельзя сказать о движениях, подверженных случайному возмущению. В действительности наблюдаются только те из УНС, которые являются устойчивыми по отношению к возможным возмущениям. В неустойчивых движениях малые вначале возмущения растут, существенно изменяя характер начального движения и способствуя переходу к некоторому хаотическому движению. Эта форма движений вязкой жидкости носит наименование турбулентность [6].

Если в УНС провести дискретизацию производных по пространственным переменным, то придем к системе ОДУ большой размерности. Если далее в модель добавить аддитивные и/или мультипликативные случайные шумы, то придем к системе СДУ. Моделируя на многопроцессорном суперкомпьютере большой ансамбль траекторий такой системы СДУ, можем оценить любые моментные функции решений, плотности распределений компонент решений, а также получить частотные характеристики ламинарного или турбулентного течения жидкости, обобщающие либо интегральную кривую, либо фазовый портрет, часто используемые при анализе решений осциллирующих ОДУ. Более того, необходимо ввести новые статистические характеристики численных решений больших систем СДУ, которые позволяют видеть общую картину движения жидкости или газа во времени в заданном пространственном объеме. Добавленные в УНС случайные шумы могут быть представлены как в виде процессов с независимыми приращениями (винеровский и пуассоновский), так и процессов с коррелированными приращениями с заданными законами распре-

делений [4], для чего потребуется лишь расширить систему СДУ, добавляя уравнения «фильтра».

В настоящей монографии приводятся основные сведения, касающиеся теории СДУ, численных методов решения СДУ, способов распараллеливания алгоритмов ММК. Проводится аналитический и численный анализ линейного и нелинейного колебательных контуров, странных аттракторов, СДУ со случайной структурой, СДУ с пуассоновской составляющей. Отмечается, что поведение математического ожидания численных решений нелинейных осциллирующих систем СДУ качественно отличается от поведения отдельных траекторий, в частности, фазовые портреты различаются кардинально, тогда как рисунки частотного фазового портрета и фазового портрета соответствующих компонент решений сопутствующих систем ОДУ во многом схожи. Особый интерес для параметрического анализа представляют странные аттракторы, когда в «детерминированный хаос» добавляется «стochasticный хаос», вызывающий изменение фазового портрета колебаний. Приводятся результаты численных экспериментов с УНС со случайными возмущениями, которые описывают турбулентные течения жидкости и газа.

Исследование точности оценок первых моментов решения линейных систем СДУ с винеровской составляющей методом Монте-Карло проводится в разделах 9 и 11. В разделе 17 показано, что наличие в СДУ пуассоновской составляющей существенно затрудняет получение требуемой точности оценок моментов компонент решений, прежде всего из-за значительного увеличения трудоемкости численных алгоритмов. Исследование точности оценок первых моментов решения СДУ подразумевает знание точных аналитических выражений для моментов. При численном решении СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими обобщенным явным методом Эйлера точность оценок моментов зависит от значений вещественных параметров СДУ, расстояний между скачками, величин скачков, размера шага интегрирования и размера ансамбля моделируемых траекторий решения. При малых размерах шага интегрирования несовпадение узлов равномерной временной сетки с моментами скачков существенно не влияет на точность оценок, но значительно упрощает численный статистический алгоритм. На точность оценок сильно влияет рост дисперсии компонент решения системы СДУ, причем наличие пуассоновской составляющей может превращать устойчивое в среднеквадратическом решение в неустойчивое. Кроме того, в отличие от винеровской составляющей, пуассоновская составляющая ме-

няет частоту и амплитуду колебаний математического ожидания решений осциллирующих СДУ.

В монографии приводится большое количество примеров с системами СДУ, в которых не обсуждается физический смысл конкретных значений вещественных параметров исследуемых математических моделей и не дается техническая интерпретация результатов расчетов, так как авторы не считают себя специалистами ни в одной из рассмотренных прикладных областей. Также не обсуждаются тип и интенсивность вводимого в ОДУ случайного шума. Заметим, что при параметрическом анализе решений СДУ при некоторых наборах параметров математических моделей численные решения не соответствуют никаким реалиям, например, появляются отрицательные значения в концентрациях реагентов химических реакций или ракета летит до центра Земли. Тем не менее, подробный параметрический анализ подразумевает и возникновение таких нелепых ситуаций. Также при параметрическом анализе размер шага интегрирования метода Эйлера можно рассматривать как один из параметров дискретной модели, и тогда вопрос об аппроксимации непрерывной модели в виде системы СДУ не стоит. Варьируя размеры шага интегрирования, можно задать устойчивое или неустойчивое поведение решения дискретной модели, т. е. исследовать вопрос существования стационарного численного решения. При таком подходе к параметрическому анализу критерием адекватности будет служить соответствие модельных дискретных решений реальным режимам движений конкретных физических или химических объектов, а не точным решениям систем СДУ.

Главная цель настоящей работы – продемонстрировать удобный инструмент численного анализа стохастических осцилляторов на основе использования методики распределенного статистического моделирования [7]. Библиотека PARMONC [8–10], включающая в себя быстродействующий длиннопериодный генератор псевдослучайных чисел, и комплекс программ AMIKS [11] позволяют вычислителям достаточно просто подготовить задачу к решению и проводить численные эксперименты. Все трудоемкие численные эксперименты, описанные в монографии, проведены на кластере НКС-30Т Центра коллективного пользования «Сибирский суперкомпьютерный центр» СО РАН при Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск.

Монография отражает оригинальные результаты реализации научных проектов, выполненных авторами за счет грантов РФФИ (проекты 11-01-00252, 12-01-00727, 14-01-00340, 14-01-31451, 15-01-08988).

1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В основе определения СДУ лежит понятие стандартного винеровского процесса $w(t)$ со свойствами: гауссовский, с независимыми приращениями, $w(0) = 0$, $Ew(t) = 0$ для всех $t \geq 0$, $Ew(t)w(s) = \min(t, s)$, $t \geq 0, s \geq 0$. Траектории винеровского процесса непрерывны, но не дифференцируемы. Как видим, дисперсия $w(t)$ линейно растет со временем, тогда как математическое ожидание всегда нулевое. В наиболее общем определении СДУ под $w(t)$ понимается любой процесс с независимыми приращениями, например, включающий пуассоновскую составляющую. В монографии такие обобщения рассматриваются в разделе 17. С точки зрения статистического моделирования программная реализация таких обобщений не представляет труда.

Система СДУ с винеровской составляющей в дифференциальной форме записывается в виде

$$dy(t) = f(y, t)dt + \sigma(y, t)dw(t), \quad (1.1)$$

где $w(t)$ – M -мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, $f(y, t)$ – K -мерная функция сноса, $\sigma(y, t)$ – $K \times M$ -мерная матрица интенсивности шумов. Решением системы СДУ (1.1) является вектор-функция $y(t)$ размера K , каждая компонента которого $y_k(t)$, $k = 1, \dots, K$, – случайный процесс. Задача Коши для СДУ (1.1) включает случайные или детерминированные начальные значения $y(t_0) = y_0$ и временной интервал интегрирования $[t_0, t_{\text{end}}]$. Также всегда указывается, в каком смысле понимается стохастический интеграл – в смысле Ито или Стратоновича. Так как существует однозначный переход от СДУ в смысле Стратоновича к СДУ в смысле Ито, то в дальнейшем рассматриваются только СДУ в смысле Ито. Решения СДУ Ито и Стратоновича идентичны, если $\frac{d\sigma}{dy}\sigma(y, t) \equiv 0$. Для задачи Коши для СДУ при некоторых ограничениях на функцию сноса и матрицу интенсивности шумов доказана теорема существования и единственности решения.

Если $\sigma(y, t) = \sigma(t)$ (интенсивности шумов не зависят от решения y), то СДУ называют с аддитивным шумом (внешним), в

противном случае – с мультипликативным (внутренним). В случае мультипликативного шума, если величина интенсивности шума зависит линейно от решения СДУ ($\sigma y dw(t)$), то с ростом траектории решения шум возрастает, а при стремлении ее к 0 – убывает, что обычно ведет к асимметрии плотности распределения решения. Решение СДУ является марковским процессом с непрерывными траекториями.

Простейшее скалярное линейное СДУ с аддитивным шумом имеет вид

$$dy = \alpha y dt + \sigma dw(t) \quad (1.2)$$

с мультипликативным шумом

$$dy = \left(\alpha + \sigma \frac{dw(t)}{dt} \right) y dt = \alpha y dt + \sigma y dw(t). \quad (1.3)$$

Параметр σ принято называть коэффициентом интенсивности шума или просто интенсивностью. Если интенсивность у всех компонент в системе СДУ нулевая, то возникающую систему ОДУ будем называть сопутствующей. Заметим, что эта сопутствующая система ОДУ не совпадает с бесконечной системой ОДУ для вычисления математического ожидания решения нелинейной системы СДУ.

Если y_0 – нормальная случайная величина, то решение (1.2) является гауссовским процессом. Решение (1.3) можно записать в явной форме

$$y(t) = y_0 e^{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right)t + \sigma w(t)}. \quad (1.4)$$

Если начальное значение y_0 – детерминированное, то случайная величина $y(t)$ в (1.4) имеет логарифмически-нормальное распределение. В дальнейшем, без ограничения общности, всегда будем полагать, что y_0 – детерминированная величина. Математическое ожидание и дисперсия решения СДУ (1.2) задаются формулами

$$\begin{aligned} E y(t) &= y_0 e^{\alpha t}, \\ D y(t) &= y_0^2 \left\{ e^{2\alpha t} - \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{2\alpha t}) \right\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

решения (1.4) формулами

$$\begin{aligned} E y(t) &= y_0 e^{\alpha t}, \\ D y(t) &= y_0^2 e^{2\alpha t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1 \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Процесс $w(t)$ в (1.1) может быть отличен от винеровского, но получен из дополнительного СДУ, например, вида

$$dw(t) = \alpha w dt + \sigma dw_0(t),$$

где $w_0(t)$ – винеровский процесс.

Известно, что плотность распределения решения $y(t)$ системы СДУ в смысле Ито удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\partial p(y, t)}{\partial t} = - \sum_{k=1}^K \frac{\partial}{\partial y_k} (f_k(y, t)p(y, t)) + \frac{1}{2} \sum_{k,e=1}^K \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_e} (b_{ke}(y, t)p(y, t)), \quad (1.7)$$

где $b_{ke}(y, t)$ – элементы матрицы диффузии $B = \sigma\sigma^T$. Трехмерный график $p(y_k, t)$ можно назвать вероятностным аналогом интегральной кривой k -й компоненты решения системы СДУ. Численное решение параболического уравнения (1.7) классическими разностными методами представляет большие трудности, особенно в случае неопределенности места и размеров сетки по пространственным координатам.

Основными вероятностными характеристиками решения системы СДУ, как и любого случайного процесса, являются математическое ожидание, ковариационная матрица, плотности распределения компонент $y_j(t)$ решения, плотности распределения пар компонент $(y_j(t), y_i(t))$ решения. В случае стохастических колебаний иногда представляет интерес осцилляция отдельной выборочной траектории решения, тогда как математическое ожидание несет осредненную информацию и его поведение может совершенно отличаться от поведения траекторий, как это будет показано далее на примерах нелинейных СДУ. В связи с этим особое внимание будет уделяться частотным характеристикам численного решения, причем не для фиксированного момента времени t , а в динамике на всем интервале интегрирования $[t_0, t_{\text{end}}]$.

В дальнейшем под осциллирующими системами СДУ (или СДУ с осциллирующими решениями) прежде всего будем понимать те, для которых сопутствующая система ОДУ при некоторых

начальных условиях задачи Коши или значениях параметров в функции сноса может иметь осциллирующие решения.

Рассмотрим несколько примеров осциллирующих систем СДУ.

Пример 1.1. Если в правую часть системы ОДУ, описывающей процесс изменения концентраций продуктов химической реакции:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= 0,1y_1 - y_2 - 0,1y_1(y_1^2 + y_2^2), \quad y_1(0) = 1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 + 0,1y_2 - 0,1y_2(y_1^2 + y_2^2), \quad y_2(0) = -1,\end{aligned}\tag{1.8}$$

добавить аддитивный и мультипликативный случайные шумы с заданными коэффициентами интенсивности, то придем к системе СДУ вида

$$\begin{aligned}dy_1 &= \left(0,1y_1 - y_2 - 0,1y_1(y_1^2 + y_2^2)\right)dt + 0,1dw_1(t), \quad y_1(0) = 1, \\ dy_2 &= \left(y_1 + 0,1y_2 - 0,1y_2(y_1^2 + y_2^2)\right)dt + y_2 dw_2(t), \quad y_2(0) = -1.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Сильное различие на рис. 1.1 графиков одной смоделированной траектории компоненты y_1 решения системы ОДУ (1.8) (пунктирная линия) и системы СДУ (1.9) (сплошная линия) не позволяет надеяться, что отбрасывание случайных возмущений в математической модели, как это часто делается на практике при исследовании динамики движущихся объектов, даст достаточное описание процесса движения.

Такое же сильное различие графиков фазовых траекторий пары компонент (y_1, y_2) решения системы ОДУ (1.8) (пунктирная линия) и системы СДУ (1.9) (сплошная линия) видим на рис. 1.2.

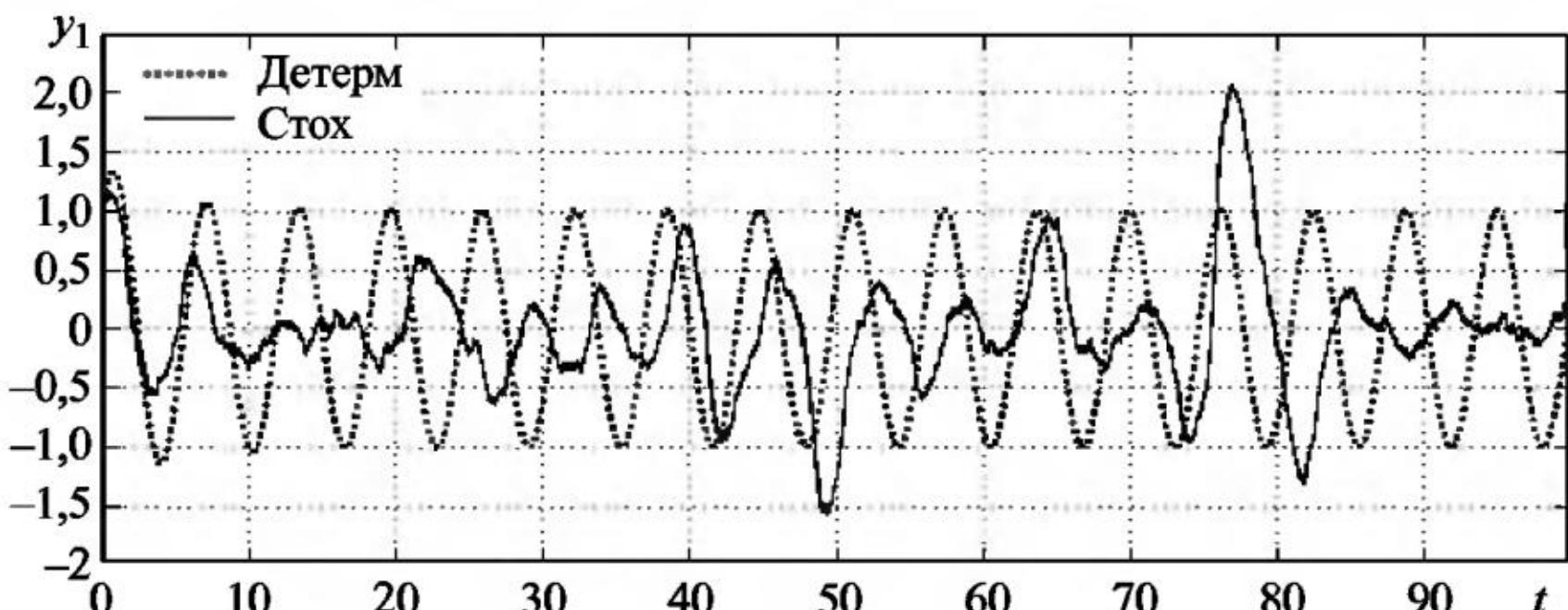


Рис. 1.1

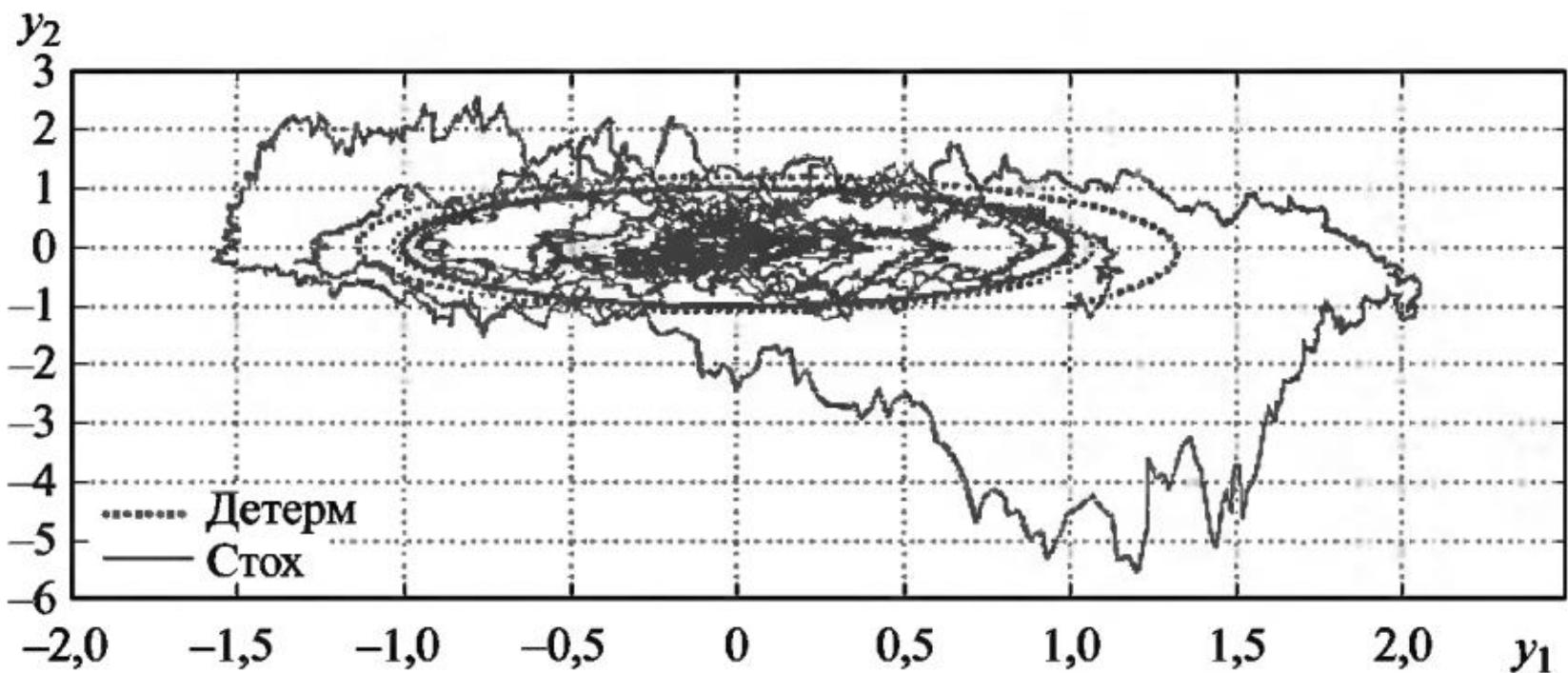


Рис. 1.2

Как видно из графика на рис.1.3 фазовой траектории оценок математических ожиданий (Ey_1, Ey_2) пары компонент решения системы СДУ (1.9), поведение математических ожиданий компонент решения (быстрый выход на 0) совершенно отличается от поведения смоделированных траекторий самих компонент решения (незатухающие колебания), и это характерно для многих нелинейных систем СДУ. Оценки математического ожидания получены на интервале интегрирования [0,100] по 1000 смоделированных траекторий решения системы СДУ (1.9) (см. следующий раздел).

Пример 1.2. Движение конического маятника в вертикальной плоскости с учетом внешних случайных возмущений задается трехмерной системой СДУ

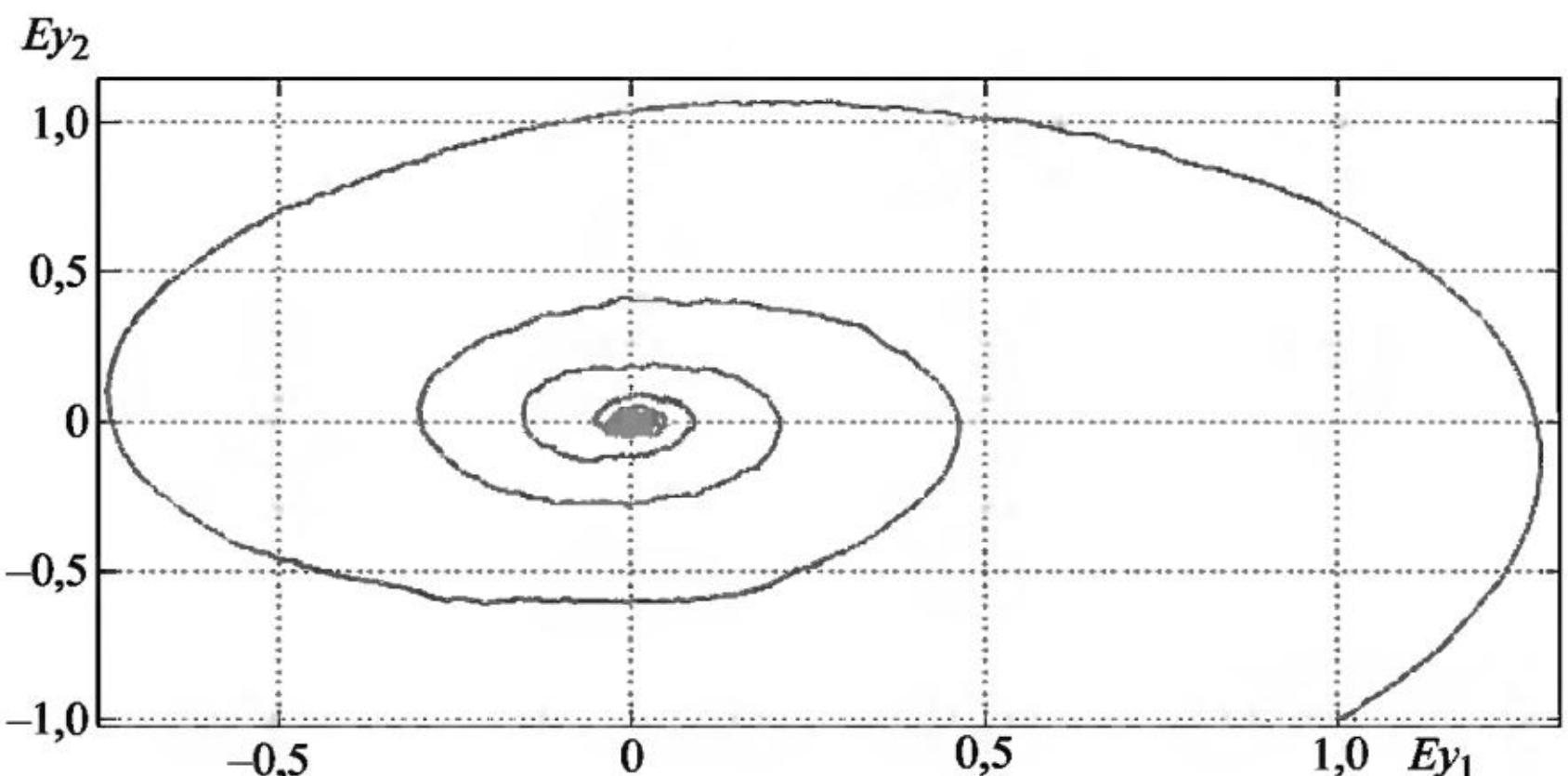


Рис. 1.3

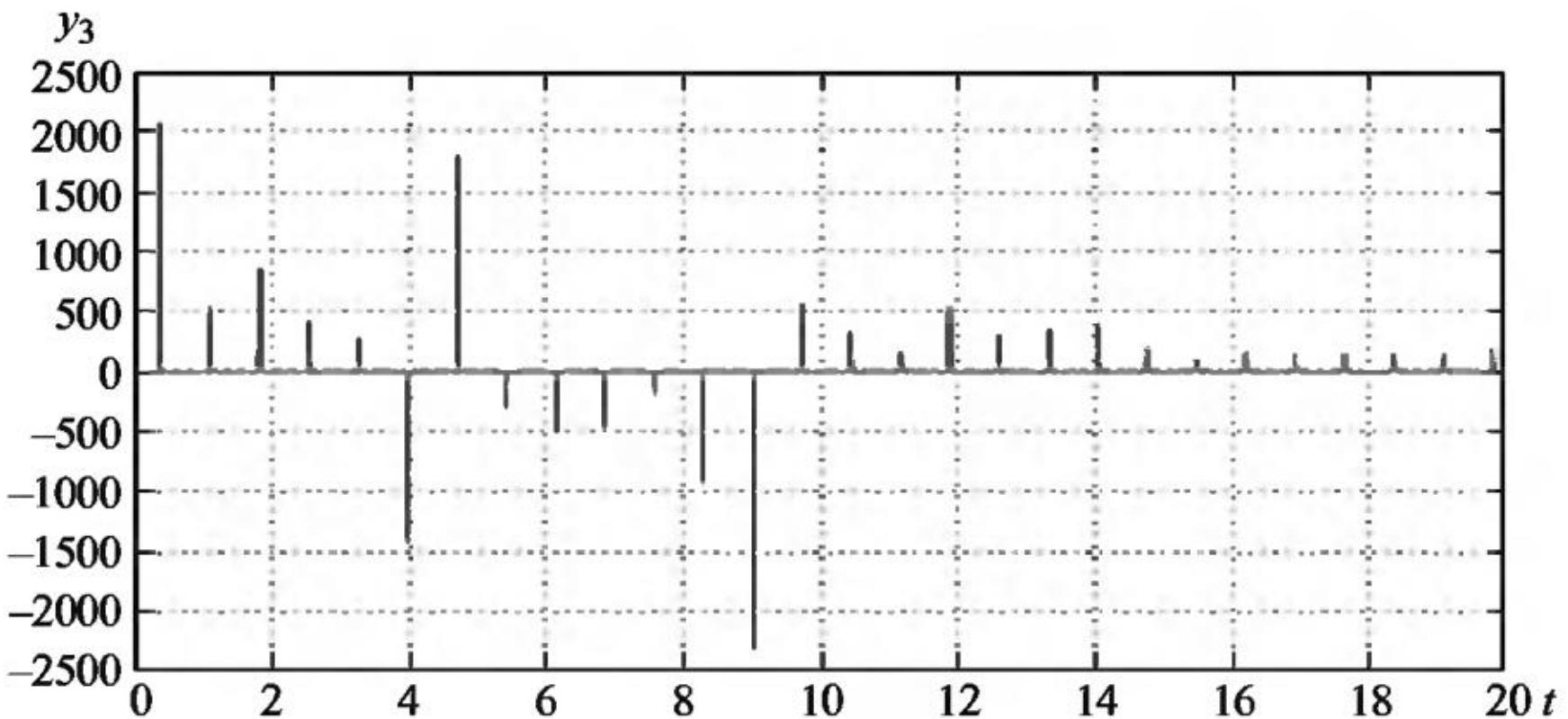


Рис. 1.4

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= 0,5, \\
 dy_2 &= (0,5y_3^2 \sin(2y_1) - 19,62 \sin(y_1)) dt + 0,1 dw_1(t), & y_2(0) &= 0,1, \quad (1.10) \\
 dy_3 &= (-2y_2 y_3 \operatorname{ctg}(y_1)) dt + 0,1 dw_2(t), & y_3(0) &= 0,1,
 \end{aligned}$$

где y_1 – угол отклонения нити от горизонтальной оси, y_2, y_3 – угловые скорости. На рис. 1.4 дан график одной смоделированной траектории компоненты y_3 решения, на рис. 1.5 – фазовый портрет пары компонент (y_1, y_2) решения системы СДУ (1.10). Заметим, что во время счета из-за появления делений на 0 в функции сноса системы СДУ и резких скачков амплитуды колебаний компоненты y_3 численного решения (даже при отсутствии шумов) размер шага интегрирования любого используемого численного метода реше-

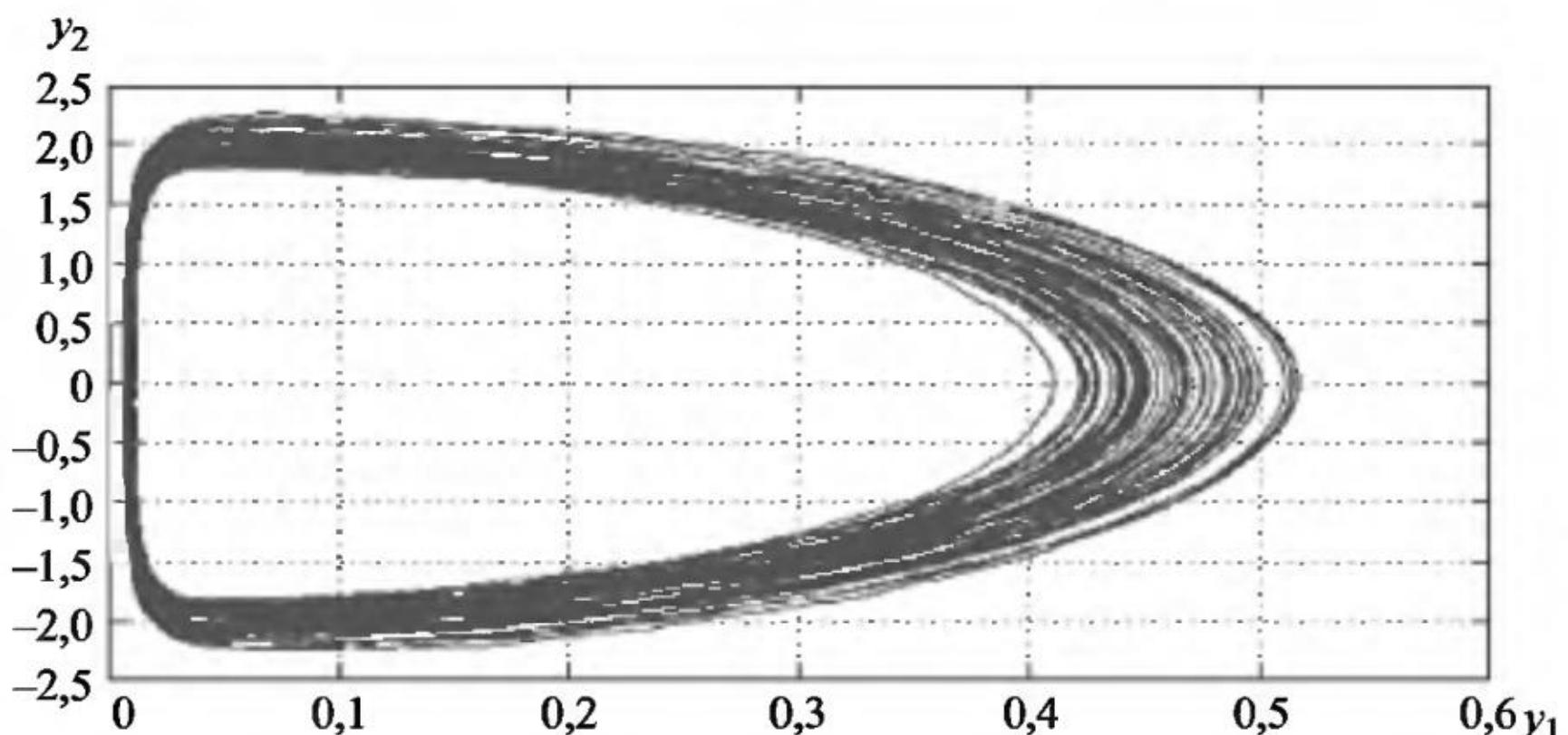


Рис. 1.5

ния СДУ (см. следующий раздел) приходилось задавать не более 10^{-6} на интервале интегрирования [0,20].

Пример 1.3. Модель крутильных колебаний коленчатого вала, где на участке между двумя массами имеется нелинейная муфта, с учетом внешнего шума задается системой СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_3 dt, & y_1(0) &= 0,6, \\ dy_2 &= y_4 dt, & y_2(0) &= -0,6, \\ dy_3 &= \left(0,01y_2 - 1,1y_1 - 0,055y_1^{\frac{1}{3}} + 0,1y_4 + \sin(t) \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_3(0) &= 10, \\ dy_4 &= \left(0,1y_1 - 0,011y_2 + 0,005y_1^{\frac{1}{3}} - 0,11y_4 - \sin(t) \right) dt + \sigma_2 dw_2(t), & y_4(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь $y_1 = r_2 - r_1$, $y_2 = r_3 - r_2$, где r_1 , r_2 , r_3 – углы отклонения от равномерного вращения, y_3 , y_4 – угловые скорости. На рис. 1.6 и 1.7 приведены графики фазовой траектории компонент (y_2, y_4) численного решения системы СДУ (1.11) при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$. Как и в примере 1.1, наличие случайных шумов делает поведение фазовой траектории сильно отличным от ее поведения без шумов. Расчеты показывают, что для СДУ значения параметров в функции сноса иногда не оказывают такого сильного влияния на вид фазового портрета пары компонент, как в ОДУ. Скорее вид и размер фазового портрета зависят от величины коэффициентов интенсивности шумов. Полную картину может дать только параметрический анализ решений системы СДУ.

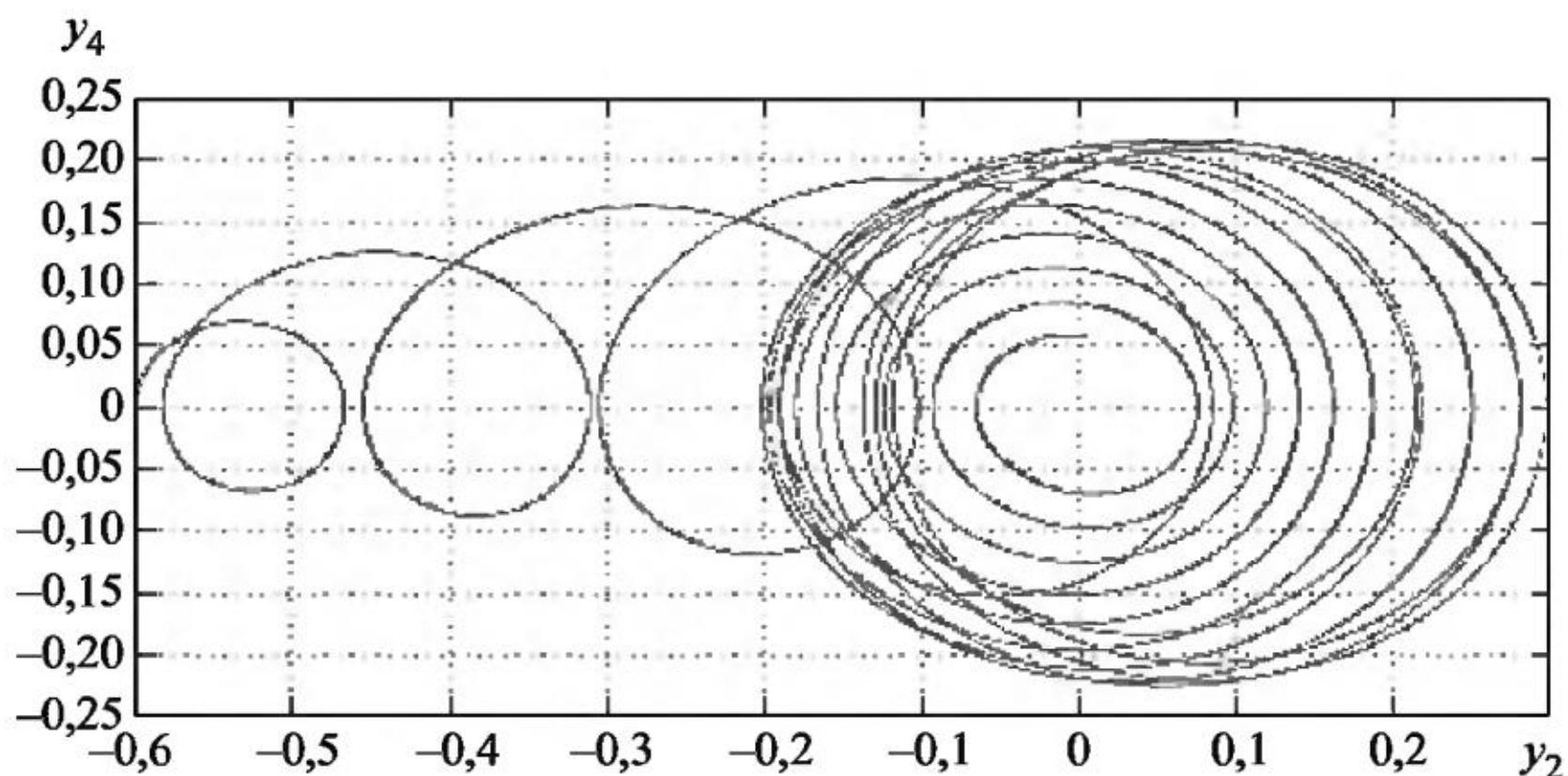


Рис. 1.6

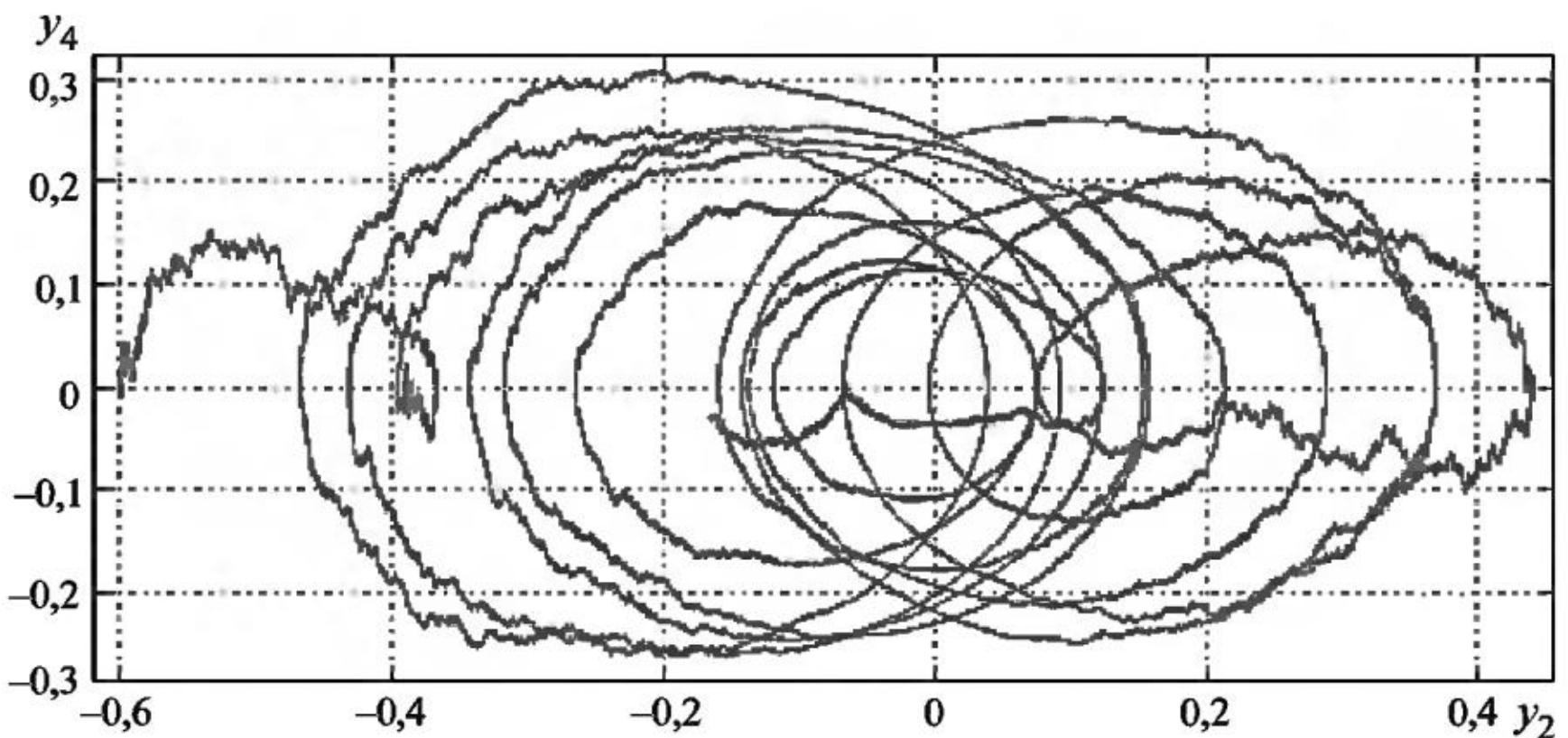


Рис. 1.7

Как и в предыдущем примере, поведение фазовой траектории оценок математических ожиданий (Ey_2, Ey_4) (см. рис. 1.8) сильно отличается от поведения фазовой траектории (y_2, y_4) сопровождающей системы ОДУ (см. рис. 1.6). Оценки математического ожидания получены на интервале интегрирования $[0, 100]$ по 1000 симулированных траекторий решения системы СДУ (1.11).

На рис. 1.8 виден переходный характер поведения оценок математического ожидания от гладкого к случайному, что связано с ростом дисперсии компонент решения системы СДУ с ростом t и соответствующим ухудшением точности оценок математических ожиданий.

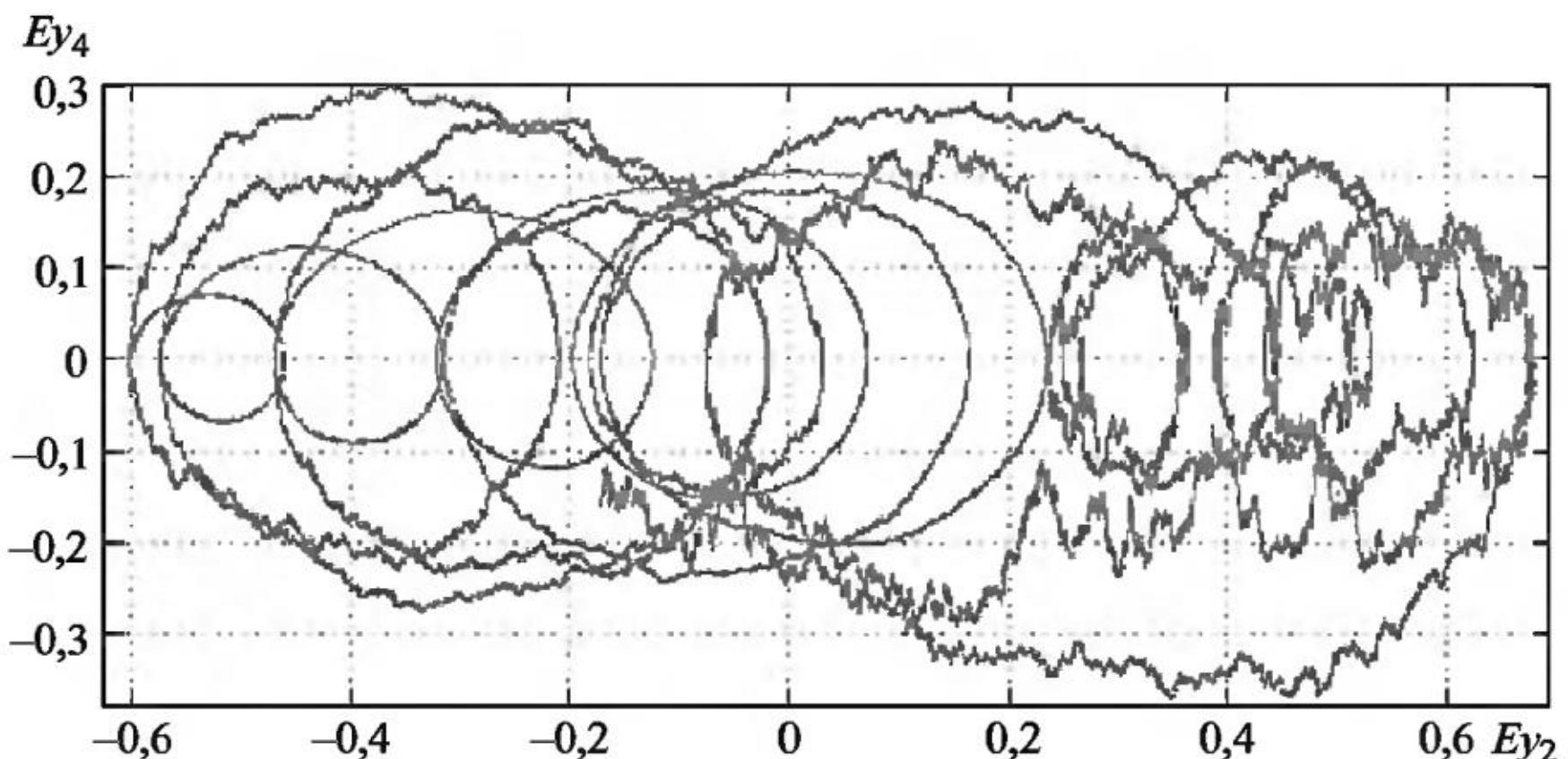


Рис. 1.8

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СДУ. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Простейшим численным методом решения систем СДУ в смысле Ито является обобщенный явный метод Эйлера, который также называют методом Маруямы:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) + \sqrt{h}\sigma(y_n, t_n)\xi_{n+1}. \quad (2.1)$$

Здесь y_n – значение приближенного решения СДУ в узле равномерной сетки t_n с шагом h , $\{\xi_{n+1}\}$ – последовательность независимых между собой нормальных случайных векторов с независимыми компонентами $\{\xi_{n+1}^{(i)}\}$. Компоненты целесообразно моделировать попарно по формулам

$$\xi_{n+1}^{(i)} = \sqrt{-2\ln\alpha_1} \sin(2\pi\alpha_2), \quad \xi_{n+1}^{(i+1)} = \sqrt{-2\ln\alpha_1} \cos(2\pi\alpha_2),$$

где α_1, α_2 – равномерно распределенные случайные величины в интервале $(0,1)$, получаемые с помощью генератора псевдослучайных чисел.

Для СДУ (1.1) с одним шумом ($M = 1$) метод Мильштейна записывается в виде

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) + \sqrt{h}\sigma(y_n, t_n)\xi_{n+1} + \frac{h}{2} \frac{\partial\sigma}{\partial y}(y_n, t_n)\sigma(y_n, t_n)(\xi_{n+1}^2 - 1). \quad (2.2)$$

При $\frac{\partial\sigma}{\partial y} \equiv 0$ методы (2.1) и (2.2) совпадают. Для СДУ с несколькими шумами ($M > 1$) метод (2.2) требует вычисления всех производных $\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial y_k}$ для элементов матрицы $\sigma(y, t)$ размера $K \times M$. Кроме того, интеграл $\int_0^t w_i(\tau)dw_j(\tau)$ при $i \neq j$ не аппроксимируется произведением вида $(\xi_{n+1,i}\xi_{n+1,j} - 1)$.

Обобщенный метод типа Розенброка [4]

$$y_{n+1} = y_n + \left[I - \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(y_n, t_n) \right]^{-1} \left[h f(y_n, t_n) + \sqrt{h} \sigma(y_n, t_n) \xi_{n+1} \right] \quad (2.3)$$

в каждом узле сетки t_n требует вычисления производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ и обращения матрицы $\left[I - \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \right]$, что делает метод чрезвычайно трудоемким, причем обращаемая матрица для нелинейных СДУ может оказаться особенной для некоторых (y_n, t_n) . Эффективное использование метода (2.3) возможно для СДУ с линейной функцией сноса, когда матрица $\left[I - \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \right]$ обращается один раз перед началом статистического моделирования. Использование метода (2.3) также может оказываться эффективным при решении «жестких» систем СДУ с переменным размером шага интегрирования. Однако, при моделировании осциллирующих решений СДУ размер шага интегрирования определяется периодом высокочастотных колебаний, что приводит к необходимости расчетов с постоянным шагом и метод (2.1) в этой ситуации становится наиболее предпочтительным. Для нелинейных осциллирующих систем СДУ выбор размера шага интегрирования из требований достижения нужной точности аппроксимации и устойчивости численных решений производится только экспериментально путем многократных расчетов с различными размерами шага. Несколько облегчает проблему выбора размера шага факт сильных различий фазовых портретов пар компонент численных решений при большом и малом размере шага интегрирования или когда при увеличении размера шага интегрирования возникает неограниченный рост амплитуды колебаний компонент численных решений. Но если рассматривать размер шага интегрирования как параметр дискретной модели, то вопрос об аппроксимации непрерывной модели не стоит.

При необходимости решения СДУ в смысле Стратоновича можно использовать обобщенный явный метод Рунге–Кутты

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h f(y_n, t_n) + \sqrt{h} \sigma(y_n, t_n) \xi_{n+1},$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(y_n, t_n) + f(\hat{y}_{n+1}, t_{n+1}) \right) + \frac{\sqrt{h}}{2} \left(\sigma(y_n, t_n) + \sigma(\hat{y}_{n+1}, t_{n+1}) \right) \xi_{n+1}.$$

Заметим, что если к одной и той же системе СДУ применить методы Эйлера и Рунге–Кутты, то получим численные решения системы СДУ в смысле Ито и в смысле Стратоновича соответственно. А это значит, что получаем решение системы СДУ в том или ином смысле только в зависимости от применяемого численного метода.

При использовании метода Эйлера (2.1) для численного решения систем СДУ с постоянным размером шага интегрирования задаются следующие входные параметры:

1. K – размерность вектора решения системы СДУ $y(t)$.
2. M – размерность вектора шума в СДУ $w(t)$.
3. t_0 – начало интервала интегрирования.
4. t_{end} – конец интервала интегрирования.
5. h – размер шага интегрирования.
6. N_{tr} – число моделируемых траекторий решения СДУ.

По результатам расчетов могут быть получены оценки следующих функционалов от решения:

- 1) математического ожидания,
- 2) ковариационной матрицы либо матрицы вторых моментов,
- 3) корреляционной функции выделенной компоненты решения для заданного узла сетки: $k_{y_i}(t_n, t_n + \delta)$,
- 4) корреляционной функции выделенной компоненты решения $k_{y_i}(t, \tau)$,
- 5) плотности распределения $p(y_i, t_n)$ выделенной компоненты решения $y_i(t)$ для заданного узла сетки t_n ,
- 6) совместной плотности распределения $p(y_i, y_j, t_n)$ выделенных двух компонент решения $y_i(t)$ и $y_j(t)$ для заданного узла сетки t_n ,
- 7) двумерной плотности распределения $p(y_i(t_v), y_i(t_\mu))$ выделенной компоненты решения $y_i(t)$ в двух заданных узлах сетки t_v, t_μ ,
- 8) плотности распределения времени первого выхода решения на границу заданной области.

При численном анализе систем ОДУ с осциллирующими решениями принято наряду с графиком интегральной кривой $y_i(t)$ исследовать фазовый портрет двух компонент решения $(y_i(t), y_j(t))$. Аналогами интегральной кривой и фазового портрета для решений систем СДУ в дальнейшем будем использовать «частотную интегральную кривую (ЧИК)» и «частотный фазовый портрет (ЧФП)». Сразу отметим, что ЧИК в фиксированный момент вре-

мени t_n будет являться аппроксимацией плотности распределения $p(y_i(t_n))$ (после соответствующей нормировки), т. е. будет давать оценку решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (1.7). Однако, ЧИК и ЧФП предназначены не для оценок вероятностей различных событий, а, как в случае с решениями систем ОДУ, дают информацию о динамике решений СДУ в заданной области плоскости. Для единственной моделируемой траектории решения системы СДУ график ЧФП дает аналог фазового портрета $(y_1(t), y_2(t))$. В отличие от гистограмм, в которых статистика собирается по ансамблю моделируемых траекторий СДУ для фиксированного момента времени, в ЧИК и ЧФП собирается статистика по всему ансамблю на каждом шаге на всем интервале интегрирования.

Введем формальное определение ЧИК и ЧФП.

Сетка S_k и ЧИК W_k :

$$S_k = \left\{ (U_i, t_j) \left| \begin{array}{l} h_U = \frac{U_{N_U} - U_0}{N_U}, U_0 = A, U_{N_U} = B, U_i = U_0 + i h_U, i = 1, \dots, (N_U - 1), \\ h_t = \frac{t_{N_t} - t_0}{N_t}, t_0 = C, t_{N_t} = D, t_j = t_0 + j h_t, j = 1, \dots, (N_t - 1). \end{array} \right. \right\}$$

Здесь $[C, D] \subseteq [0, T]$ и $A < B$ – произвольны, h_U и h_t – шаги сетки ЧИК по пространству и времени.

$$W_k = \left\{ (W_{ij}) \left| \begin{array}{l} W_{ij} – \text{количество пар} (y_l(t_k), t_j), \\ \text{попавших в} (i, j) \text{узел сетки } S_k, \\ \text{номер узла сетки} \quad i = \left[\frac{y_l(t_k) - A}{h_U} \right], j = \left[\frac{t_j - C}{h_t} \right], \\ k = 0, \dots, N, j = 0, \dots, N_t. \end{array} \right. \right\}$$

В данном определении квадратные скобки $[]$ обозначают целую часть числа, $y_l(t_k)$ – значение l -й компоненты решения СДУ в узле временной сетки t_k . Для ЧИК шаг интегрирования h и шаг сетки h_t должны быть кратными $h_t = \mu h$, где целое $\mu \geq 1$. Смоделированные значения $i < 0$, $j < 0$ и $i > N_U$, $j > N_t$ в ЧИК не учитываются.

Сетка S_p и ЧФП W_p :

$$S_p = \left\{ (U_t, V_j) \left| \begin{array}{l} h_U = \frac{U_{N_U} - U_0}{N_U}, U_0 = A, U_{N_U} = B, \\ U_i = U_0 + i h_U, i = 1, \dots, (N_U - 1), \\ h_V = \frac{V_{N_V} - V_0}{N_V}, V_0 = C, V_{N_V} = D, \\ V_j = V_0 + j h_V, j = 1, \dots, (N_V - 1). \end{array} \right. \right\}$$

Здесь $A < B$, $C < D$ – произвольны, h_U и h_V – шаги сетки ЧФП по пространству.

$$W_p = \left\{ (W_{ij}) \left| \begin{array}{l} W_{ij} – количество пар $(y_l(t_k), y_m(t_k))$, \\ попавших в (i, j) узел сетки S_p , \\ номер узла сетки $i = \left[\frac{y_l(t_k) - A}{h_U} \right]$, \\ $j = \left[\frac{y_m(t_k) - C}{h_V} \right]$, $k = 0, \dots, N$. \end{array} \right. \right\}$$

$y_l(t_k), y_m(t_k)$ – значения l -й и m -й компонент решения СДУ в узле t_k . Для ЧИК и ЧФП размер и место двумерной сетки выбираются так, чтобы продемонстрировать графически нужный участок поведения решения СДУ. Смоделированные значения $i < 0$, $j < 0$ и $i > N_U$, $j > N_V$ в ЧФП не учитываются. Для ЧФП нет никакой связи размера шага интегрирования метода Эйлера с размерами сетки ЧФП. Отметим, что у графиков ЧИК и ЧФП иногда больше информации о динамике решений СДУ может дать «вид сбоку», иногда – «вид сверху». Если график ЧИК в основном дает информацию о динамике со временем частоты и амплитуды колебаний заданной компоненты решения системы СДУ, то график ЧФП скорее показывает область передвижения на плоскости точки с заданными координатами в виде двух компонент решения системы СДУ.

На графиках ЧИК и ЧФП (вид сверху) более темному цвету соответствует большая частота, т. е. большее количество смоделированных значений компонент численного решения системы СДУ (2.5) попадает в ту или иную ячейку сетки.

В дальнейших разделах во многих примерах будем видеть схожесть графиков ЧФП с фазовыми портретами соответствую-

щих компонент решений сопутствующих систем ОДУ, чего нельзя сказать о графиках как фазовых портретов отдельных смоделированных траекторий, так и фазовых портретов оценок математических ожиданий компонент решений.

В настоящей монографии почти не проводится параметрический анализ зависимости решения СДУ от величины интенсивности шума. Это связано с тем, что существует прямая связь длины интервала интегрирования и величины интенсивности шума. Так, например, чтобы получить тот же результат при уменьшении интенсивности шума, достаточно увеличить длину интервала интегрирования, или наоборот, при увеличении интенсивности шума можно уменьшать длину интервала интегрирования. Кроме того, обычно увеличение интенсивности шума ведет к увеличению размеров графиков ЧИК и ЧФП, но не меняет их формы.

Приведем результаты исследований зависимости точности статистических алгоритмов решений простейших СДУ от размера ансамбля моделируемых траекторий. Численные эксперименты относятся к оценке моментов решений СДУ с растущей дисперсией и оценке среднего времени первого выхода траекторий СДУ с аддитивным и мультипликативным шумом на границу заданной области. Показана зависимость времени счета от числа используемых процессоров и размера ансамбля моделируемых траекторий СДУ.

Тест 1. Решение задачи Коши для скалярного СДУ

$$dy = ydw(t), y(0) = 1, 0 \leq t \leq 10, \quad (2.4)$$

моделируется по точной рекуррентной формуле

$$y_{n+1} = y_n \exp\left(-\frac{1}{2} + \xi_{n+1}\right), y_0 = 1, n = 0, 1, \dots, 9.$$

Оцениваются математическое ожидание и второй момент решения, причем точность оценки зависит только от размера моделируемого ансамбля, так как рекуррентная формула точная. Для двух моментов решения СДУ (2.4) имеем

$$Ey(t) \equiv 1, E y^2(t) = e^t.$$

В таблице 2.1 приведены результаты расчетов для различных размеров ансамбля моделируемых траекторий. Число используемых в расчетах процессоров для первых трех размеров ансамбля равно 20, для последних двух – 50.

Таблица 2.1

N_{tr}	Оценка	n										Время счета, с
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10^3	m_n	0,9131	0,9712	0,9534	1,0057	0,7531	0,8369	0,9347	0,7466	0,5995	0,6702	0,0656
	α_{2n}	2,3929	5,0532	7,5500	17,564	10,907	42,215	148,50	29,936	22,434	70,529	
10^6	m_n	1,0003	0,9979	0,9979	0,9986	1,0013	1,0158	1,0336	1,0050	0,9626	0,9283	0,1481
	α_{2n}	2,7172	7,2991	19,903	40,777	102,45	289,02	1027,7	1892,1	1336,3	2119,5	
10^9	m_n	0,9999	0,9998	1,0001	1,0003	1,0001	1,0004	0,9996	1,0006	0,9990	1,0001	40,72
	α_{2n}	2,7170	7,3869	20,023	53,700	142,81	760,44	859,84	2364,9	4640,6	11964,3	
10^{12}	m_n	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	19147
	α_{2n}	2,7182	7,3886	20,080	54,536	147,798	399,89	1046,3	2666,5	7407,3	16444,3	
10^{13}	m_n	1,0000	0,9999	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,00000	188732
	α_{2n}	2,7182	7,3891	20,087	54,6109	148,729	398,02	1067,4	2826,9	7462,3	22943,8	

Как видно из таблицы 2.1, высокая точность оценки m_n в конце интервала интегрирования достигается только при $N_{\text{tr}} = 10^9 \div 10^{13}$. Требуемая высокая точность оценки α_{2n} достигается только при $N_{\text{tr}} = 10^{13}$. Отметим, что $Ey^2(10) = e^{10} = 22026$. Низкая точность оценок α_{2n} при малых размерах ансамбля выборок связана с тем, что в выборках отсутствуют редкие экспоненциально растущие траектории сильно асимметричного распределения решения СДУ.

Зависимость времени счета от числа используемых процессоров для $N_{\text{tr}} = 10^9$:

K	1	10	20	50	100
Время счета, с	737	74	48	21	10

Замечание. Так как во время процесса статистического моделирования независимых траекторий решений СДУ не требуется межядерного обмена информацией, а оценки моментов или расчет ЧИК и ЧФП суммарно по всем ядрам производятся только по окончании моделирования всего ансамбля траекторий, то эффективность использования в расчетах любого количества ядер близка к 100 %. Это значит, что при монопольном использовании кластера для 100 ядер время счета будет около 7,5 с.

Тест 2. Для решения СДУ (2.4), моделируемого по формуле

$$y_{n+1} = y_n \exp\left(-\frac{h}{2} + \sqrt{h}\xi_{n+1}\right), \quad y_0 = 1,$$

оцениваются первый и второй моменты случайной величины τ – времени первого выхода траектории решения на границу интервала $[0, 2]$. Именно по причине необходимости фиксации точного выхода траектории на границу интервала в отличие от предыдущего теста в рекуррентной формуле используется малый шаг h .

В табл. 2.2 приводятся результаты расчетов оценок первого и второго моментов случайной величины τ на 64 ядрах с $h = 10^{-4}$ для различных размеров ансамбля моделируемых траекторий $N_{tr} = 10^2, 10^4, 10^7$. В данном тесте точные значения $E\tau$ и $E\tau^2$ неизвестны, тем не менее из таблицы видно большое различие в оценках при $N_{tr} = 10^2$ и $N_{tr} = 10^4, 10^7$, что говорит о необходимости моделирования ансамблей максимального размера в задачах о достижении границ. Критерием точности может служить число совпадающих значащих цифр оценок для разных N_{tr} . Малое значение оценки $\hat{\tau}^2$ для $N_{tr} = 10^2$ связано с отсутствием в выборке редких реализаций, долго не выходящих на границу интервала.

Таблица 2.2

N_{tr}	$\hat{\tau}$	$\hat{\tau}^2$	Время счета, с
10^2	171,4	223305,1	1,37
10^4	714,9	1011618,6	104,41
10^7	712,1	1008687,7	110559,60

Тест 3. Для решения СДУ (1.2) с $\alpha = 0$, моделируемого по формуле

$$y_{n+1} = y_n + \sqrt{h} \sigma \xi_{n+1},$$

оцениваются первый и второй моменты величины τ – времени первого выхода траекторий решения на границу интервала $[-1, 1]$. Известно, что

$$E\tau(y_0) = \frac{1 - y_0^2}{\sigma^2}, \quad E\tau^2(y_0) = \frac{1}{3\sigma^4} \left[8(y_0 + 1) - 4(y_0 + 1)^3 + (y_0 + 1)^4 \right].$$

В табл. 2.3 приводятся результаты расчетов оценок на 64 ядрах с $h = 10^{-4}$ для различных размеров ансамбля N_{tr} . В первом случае, при $y_0 = 0$, траектории СДУ стартуют из центра интервала $[-1, 1]$. Во втором случае, при $y_0 = 0,9$, траектории стартуют из точки вблизи правой границы интервала и сильное влияние на точность оценок оказывают редкие реализации, выходящие на левую границу интервала. Таблица 2.3 показывает сильное различие

Таблица 2.3

y_0	σ	$E\tau(y_0)$	$E\tau^2(y_0)$	N_{tr}	$\bar{\tau}$	$\tilde{\tau}^2$	Время счета, с
0	10^{-1}	10^2	$1.667 \cdot 10^4$	10^2	65,4	5652,9	0,17
				10^3	95,5	15132,7	0,87
				10^6	100,1	16726,8	749,88
				10^8	100,1	16709,3	79026,50
	10^{-2}	10^4	$1.667 \cdot 10^8$	10^2	5644,1	41852534,9	6,05
				10^3	9114,6	135506216,4	52,66
				10^6	10004,2	166840038,2	60655,44
				10^8	—	—	—
0,9	10^{-1}	19	$2.654 \cdot 10^3$	10^2	1,4	3,6	0,06
				10^3	10,4	714,6	0,27
				10^6	19,0	2663,6	177,50
				10^8	19,1	2674,1	18126,60
	10^{-2}	1900	$2.654 \cdot 10^7$	10^2	117,9	23078,5	0,34
				10^3	1034,8	6664365,1	11,07
				10^6	1904,5	26630171,4	13887,96
				10^8	—	—	—

в точности оценок для разных N_{tr} как для случая y_0 в центре интервала $[-1, 1]$, так и вблизи границы для различных σ . Во всех тестах видим очень низкую точность оценок вторых моментов для $N_{tr} = 10^2, 10^3$. Большие размеры моделируемого ансамбля для 64 ядер требуют слишком большого времени счета, более двух суток (с этим связано отсутствие некоторых результатов расчетов при $N_{tr} = 10^8$).

Заметим, что величина τ – время выхода траекторий решения СДУ на границу заданной области – входит в формулу вероятностного представления решений краевых задач. Расчеты, проведенные в тестах 2 и 3, показывают сложность точной оценки математического ожидания τ из-за сильной асимметрии его распределения. Эта причина, а также различная длина моделируемых траекторий до их выхода на границу области делают проблему решения краевых задач методом Монте-Карло с помощью вероятностного представления сверхсложной.

Приведем несколько иллюстративных примеров с графиками ЧИК и ЧФП для разных систем СДУ, на которых продемонстрируем влияние случайных возмущений разных интенсивностей на поведение интегральных кривых и фазовых траекторий компонент численных решений и зависимость поведения численных ре-

шений систем СДУ от конкретных значений вещественных параметров в функции сноса.

Пример 2.1. Дифференциальное уравнение обобщенного осциллятора Дуффинга (уравнение «биения») под внешним гармоническим и случайным внутренним возмущениями задается в виде системы СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= -\left(0,01y_2 + 4y_1 + ay_1^3 + 10\sin(2t)\right)dt + \sigma y_1 dw(t), & y_2(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь y_1 – амплитуда колебаний сигнала. Характерной особенностью решения сопутствующей системы ОДУ является гармоническое изменение амплитуды колебаний траектории решения со временем. Эта модель достаточно хорошо описывает многие радиофизические системы, такие как сегнетоэлектрические резонаторы и контуры с ферромагнетиками, взаимодействие связанных зарядов с полем электромагнитной волны, и связана с понятием перемежаемости. Под перемежаемостью в нелинейных динамических системах понимают такой вид колебаний, при которых сигнал, развивающийся во времени почти периодически (ламинарные фазы движения), случайным образом сменяется относительно короткими турбулентными вспышками. Замечено также, что число хаотических всплесков может изменяться за счет внешнего воздействия на систему, а это означает, что перемежаемость представляет непрерывный переход от регулярного движения к хаотическому. Пример, иллюстрирующий эффект перемежаемости, дает решение ОДУ

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0,01 \left(\frac{dy}{dt} + y^3 + y \right) = 10 \sin(0,1t),$$

график которого приведен на рис. 2.1.

Сравнивая графики одной смоделированной траектории компоненты y_1 решения системы СДУ (2.5) при $a = 0,01$ без шума и с шумом интенсивности $\sigma = 2$ (рис. 2.2 и 2.3), видим, что случайные шумы большой интенсивности на данной траектории вызывают неустойчивый рост амплитуды колебаний $y_1(t)$, «биения» пропадают с продвижением по интервалу интегрирования. Расчеты проводились с шагом интегрирования $h = 10^{-6}$, при котором устранен эффект численной неустойчивости схемы Эйлера.

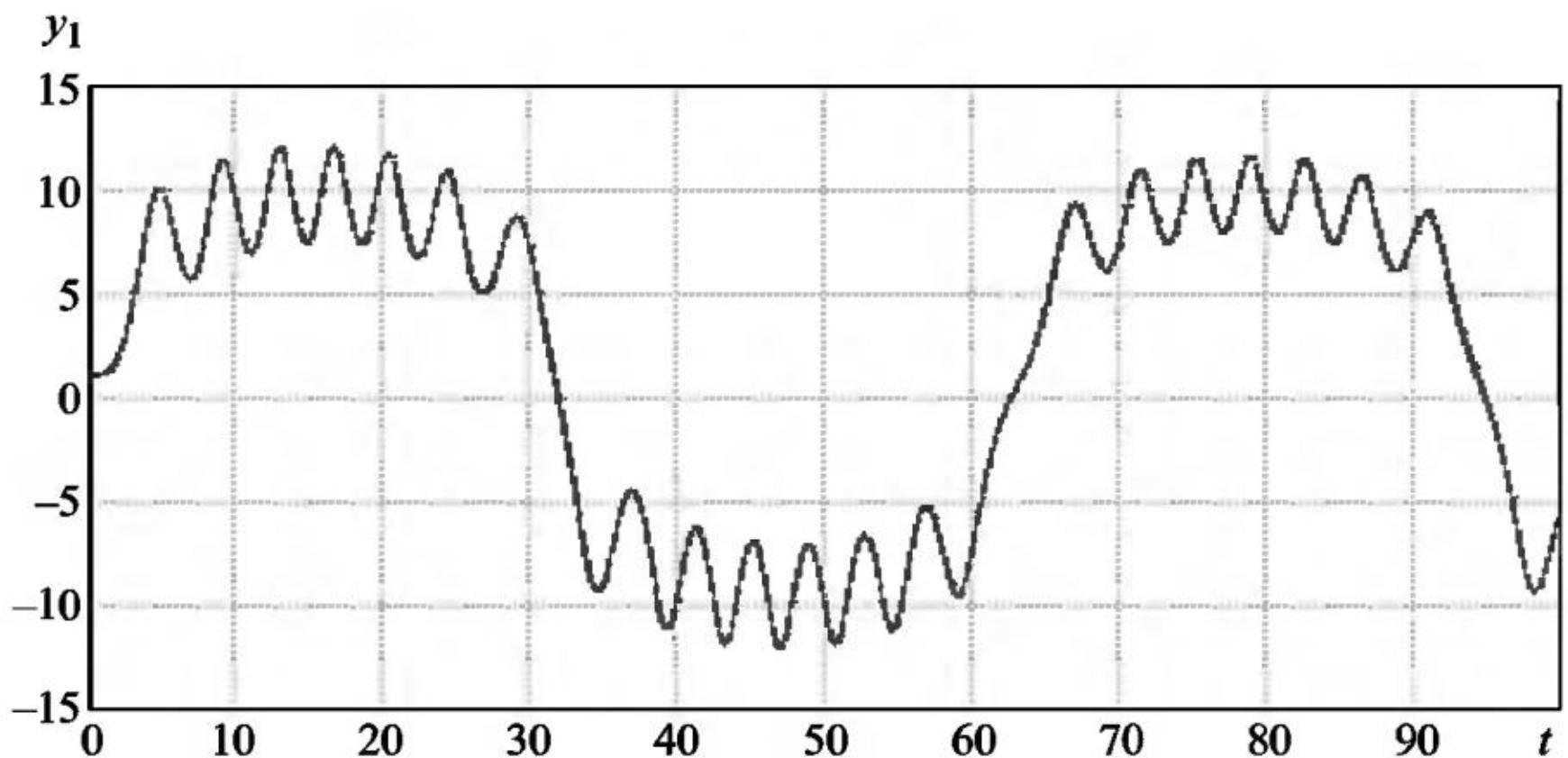


Рис. 2.1

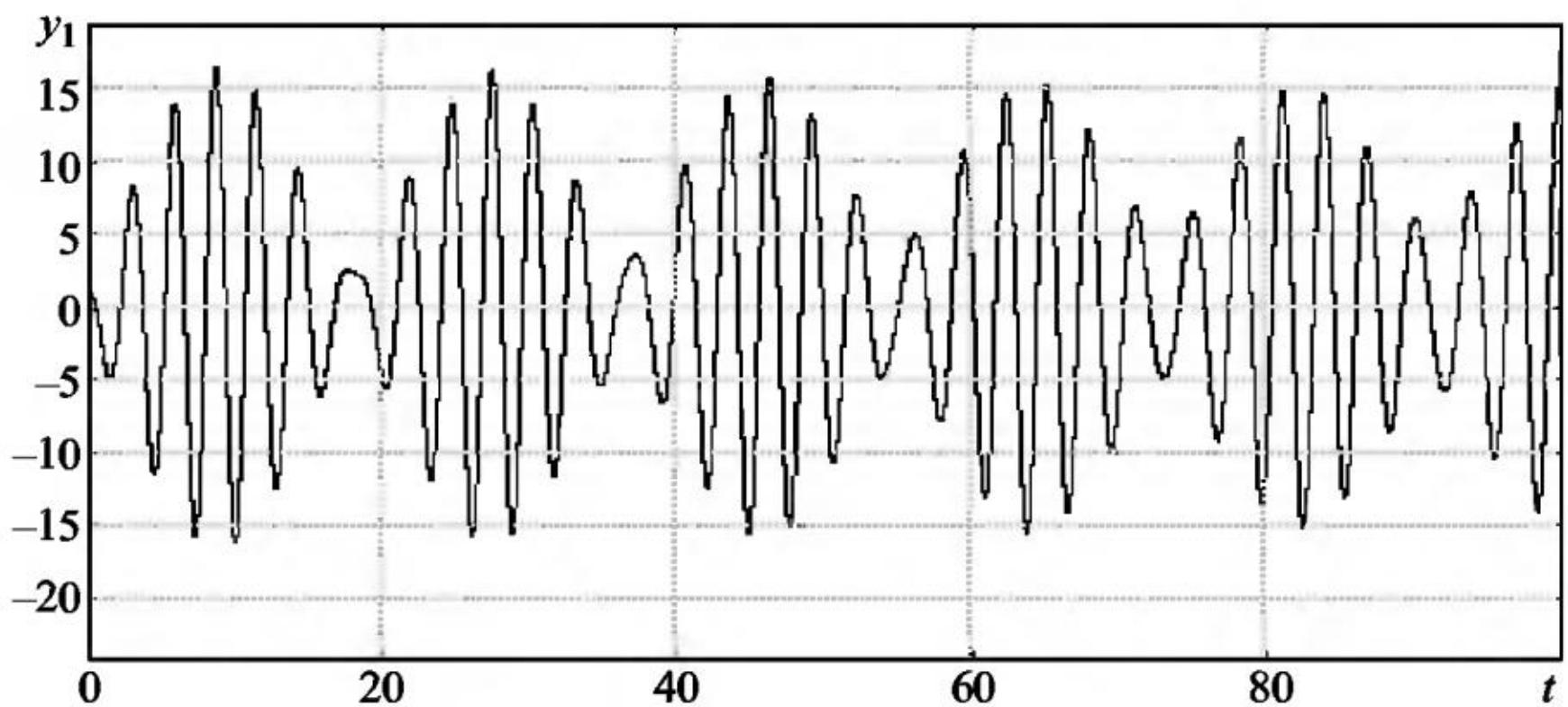


Рис. 2.2

На рис. 2.4 дан фазовый портрет пары компонент (y_1, y_2) одной смоделированной траектории решения системы СДУ (2.5) при $a = 0,01$ и $\sigma = 2$ («спираль раскручивается»).

Так как гистограмма плотности вероятности компоненты решения y_1 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 100$ (рис. 2.5) незначительно несимметрична относительно 0, то можно заключить, что смоделированные значения $y_1(100)$ почти с одинаковой вероятностью лежат выше и ниже 0, т. е. $Ey_1(100) \approx 0$.

Из графика оценки математического ожидания $Ey_1(t)$ решения системы СДУ (2.5) (рис. 2.6) видим, что «биения в среднем» не наблюдается и, действительно, оценка $Ey_1(t)$ стремится к нулю с ростом t .

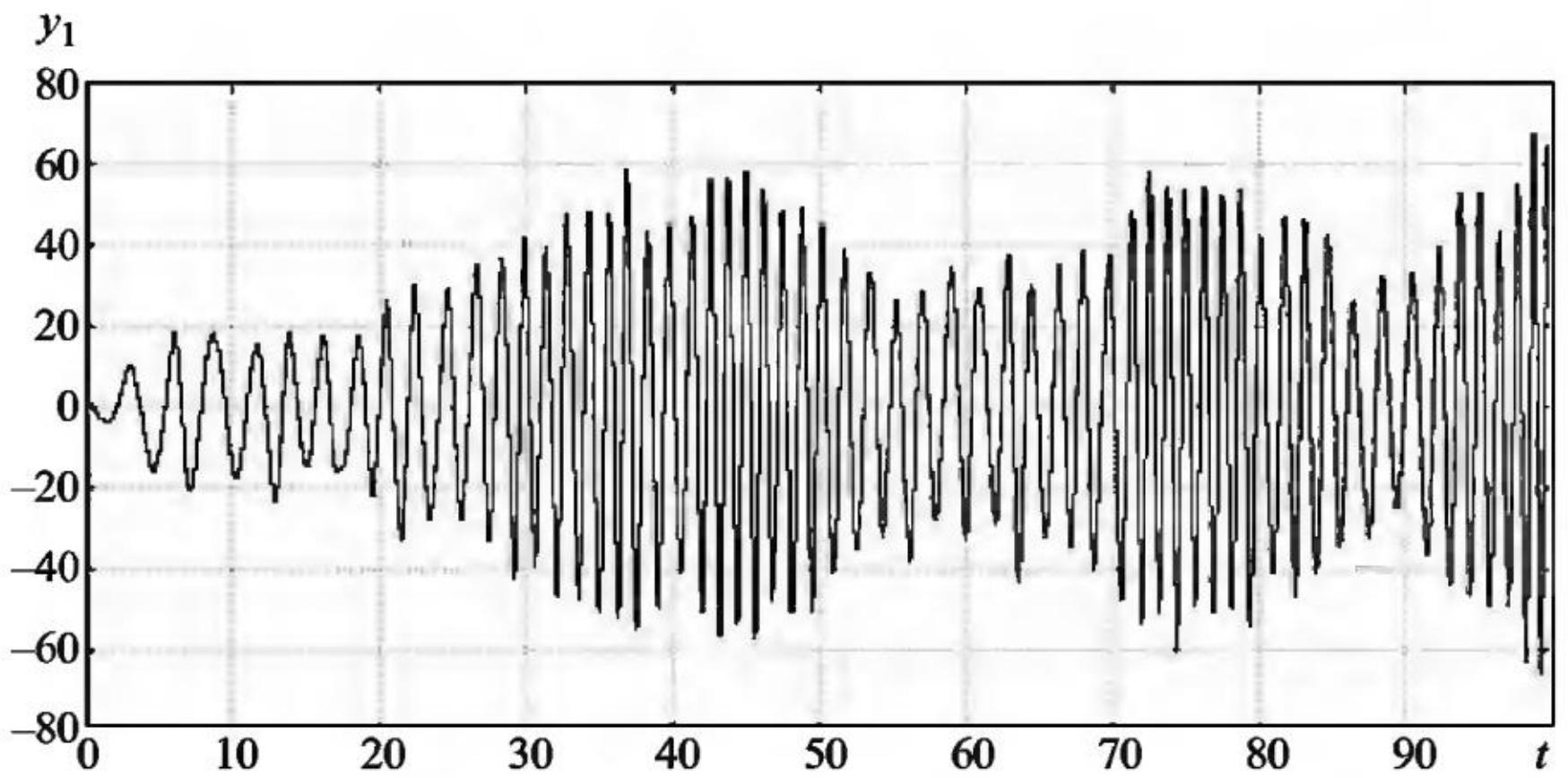


Рис. 2.3

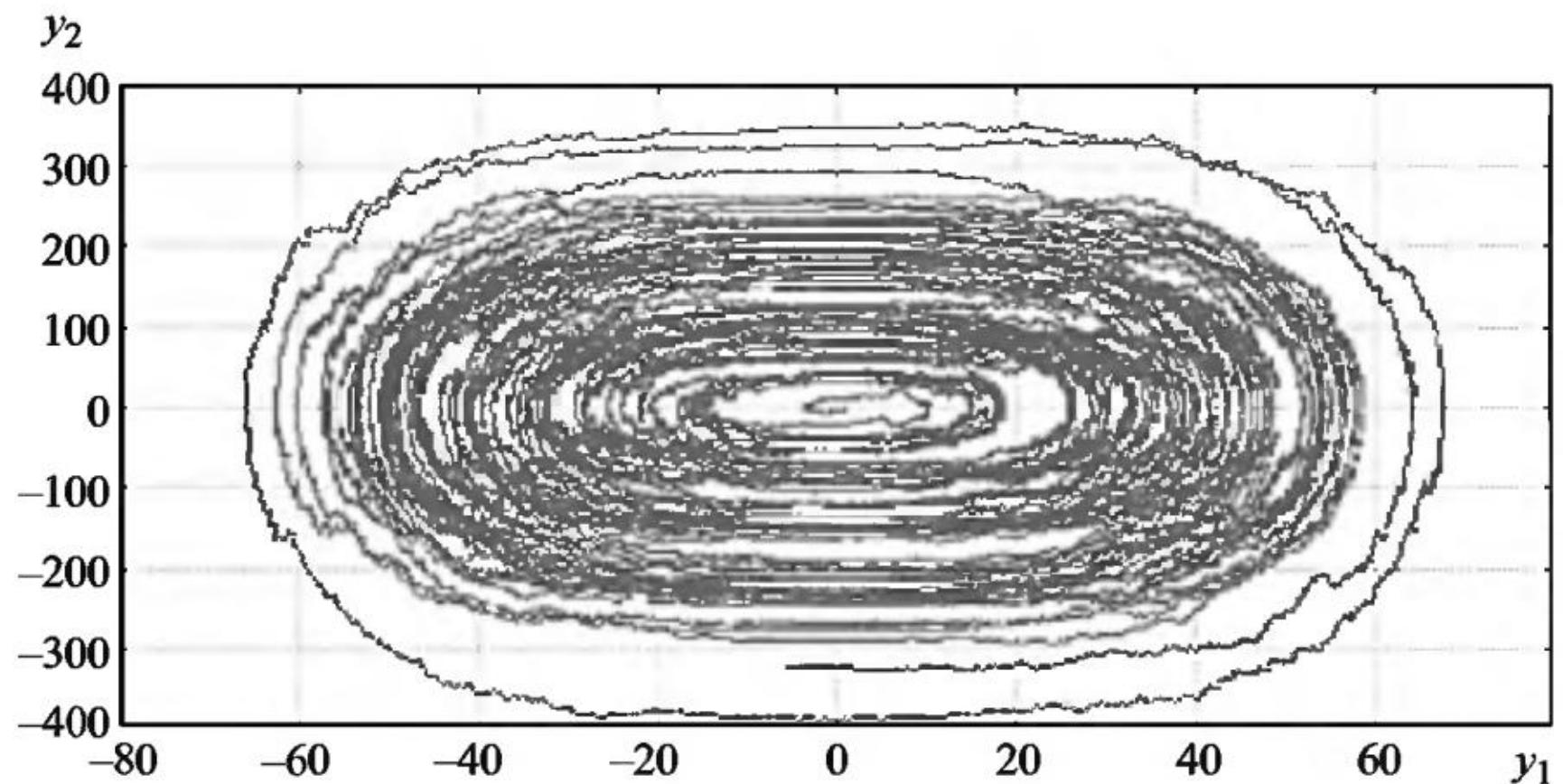


Рис. 2.4

На рис. 2.7 представлен график оценки дисперсии $Dy_1(t)$, рост которой со временем говорит о неустойчивости решения системы СДУ.

На рис. 2.8 приведен график ЧИК (вид сбоку) для компоненты y_1 численного решения системы СДУ (2.5), полученный при $a = 0,01$ и $\sigma = 2$ с шагом интегрирования $h = 10^{-6}$. Из графика можно увидеть следующий характер изменения колебательных характеристик случайного процесса $y_1(t)$: переход со временем от двувершинного распределения значений компоненты в начале интервала интегрирования к одновершинному, расширение диапазона изменения этих значений и симметричность разброса значений относительно 0. Частота колебаний остается постоянной. Как и в

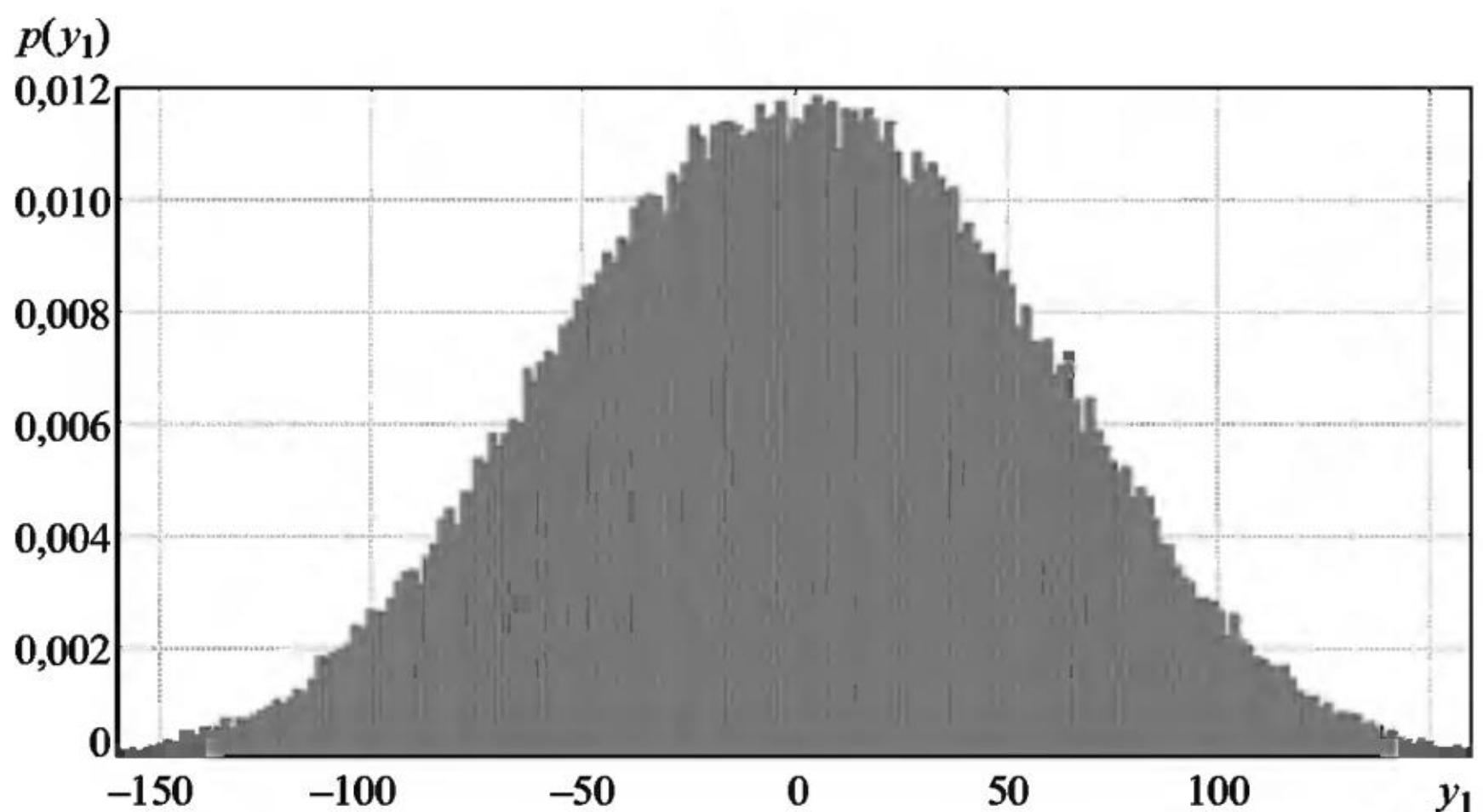


Рис. 2.5

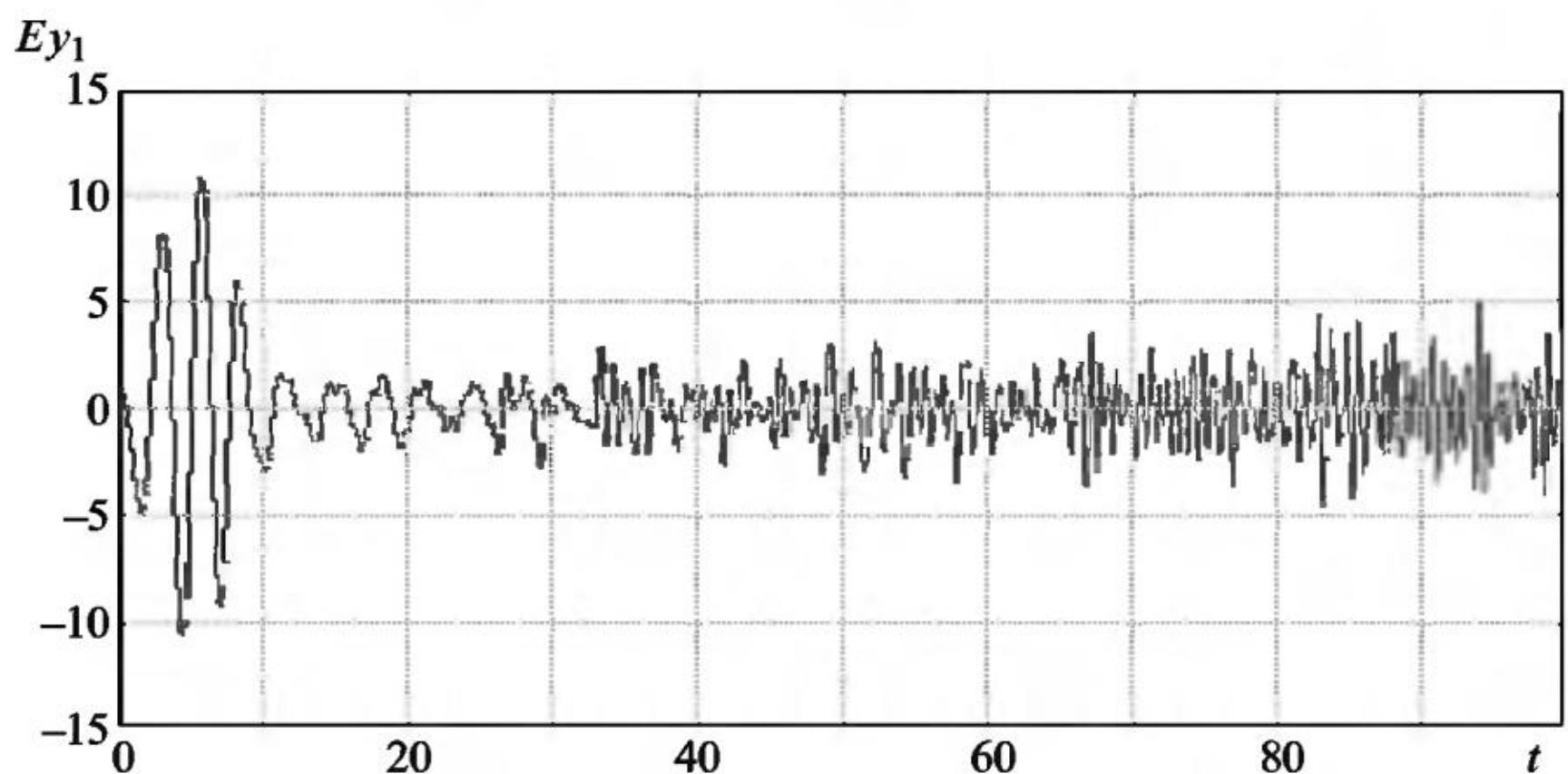


Рис. 2.6

случае с одной смоделированной траекторией (см. рис. 2.3), при такой интенсивности шума на графике не наблюдается эффект «биения».

На рис. 2.9 приведен график ЧФП (вид сбоку) для пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (2.5) при $a = 0,01$ и $\sigma = 2$. Из вида графика ЧФП можно судить о наличии преимущественных амплитуд колебаний значений пары компонент (y_1, y_2) . Высокий «холм» в центре рисунка в основном относится к значениям $(y_1(t), y_2(t))$ в начале интервала интегрирования и обобщает рис. 2.4.

Для сравнения на рис. 2.10 и 2.11 приведены графики ЧИК (вид сбоку и сверху) для компоненты y_1 численного решения си-

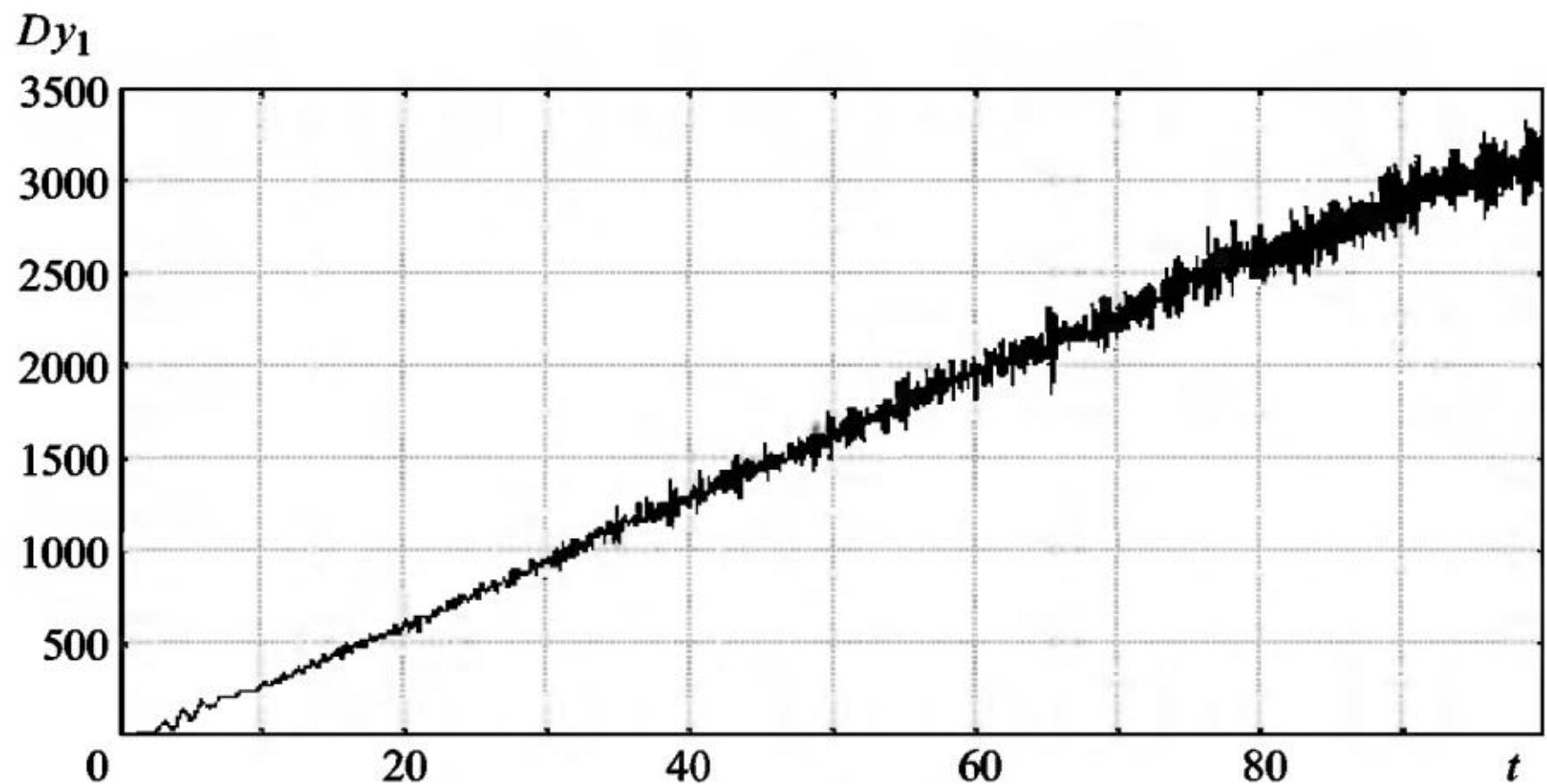


Рис. 2.7

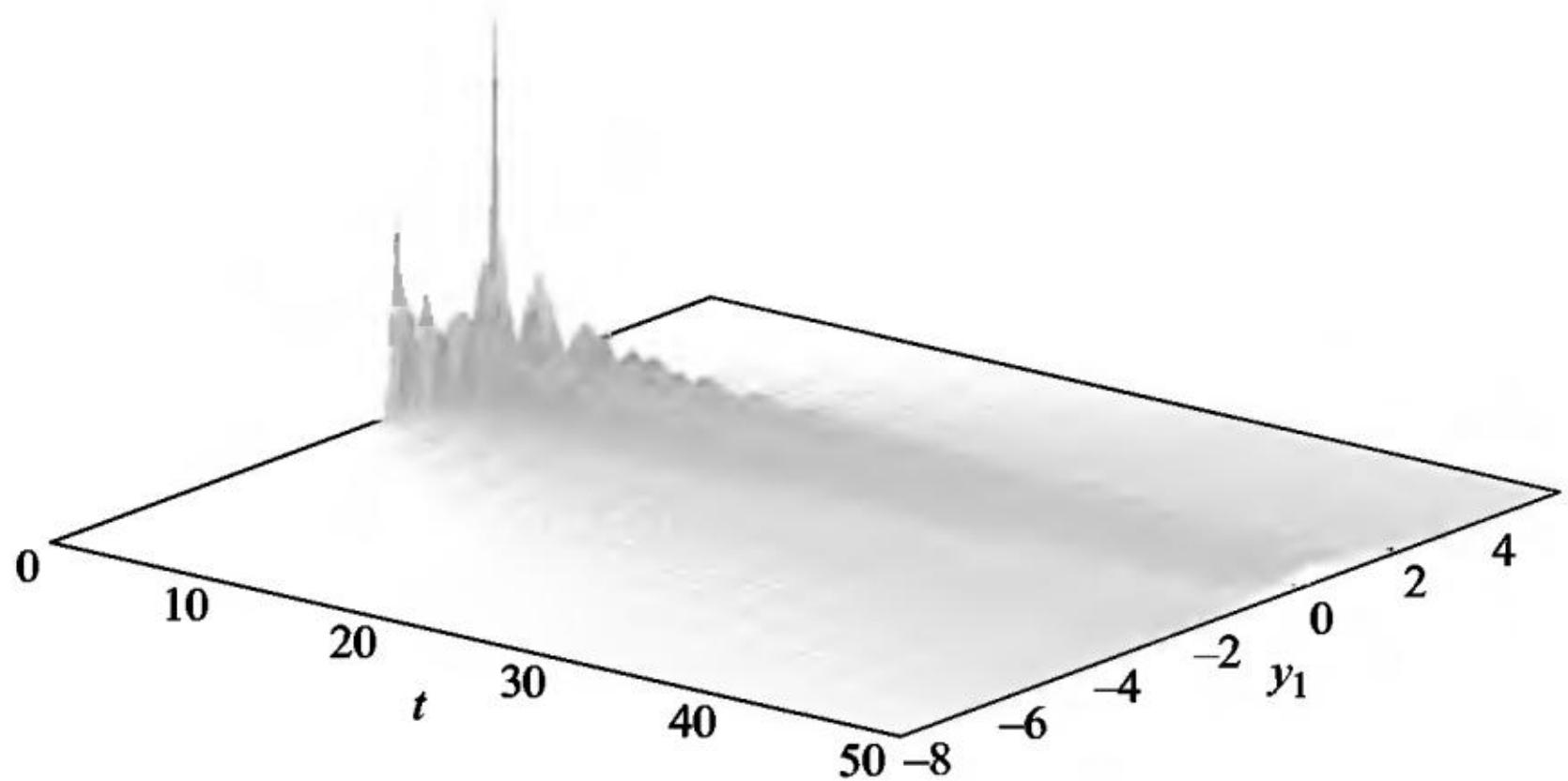


Рис. 2.8

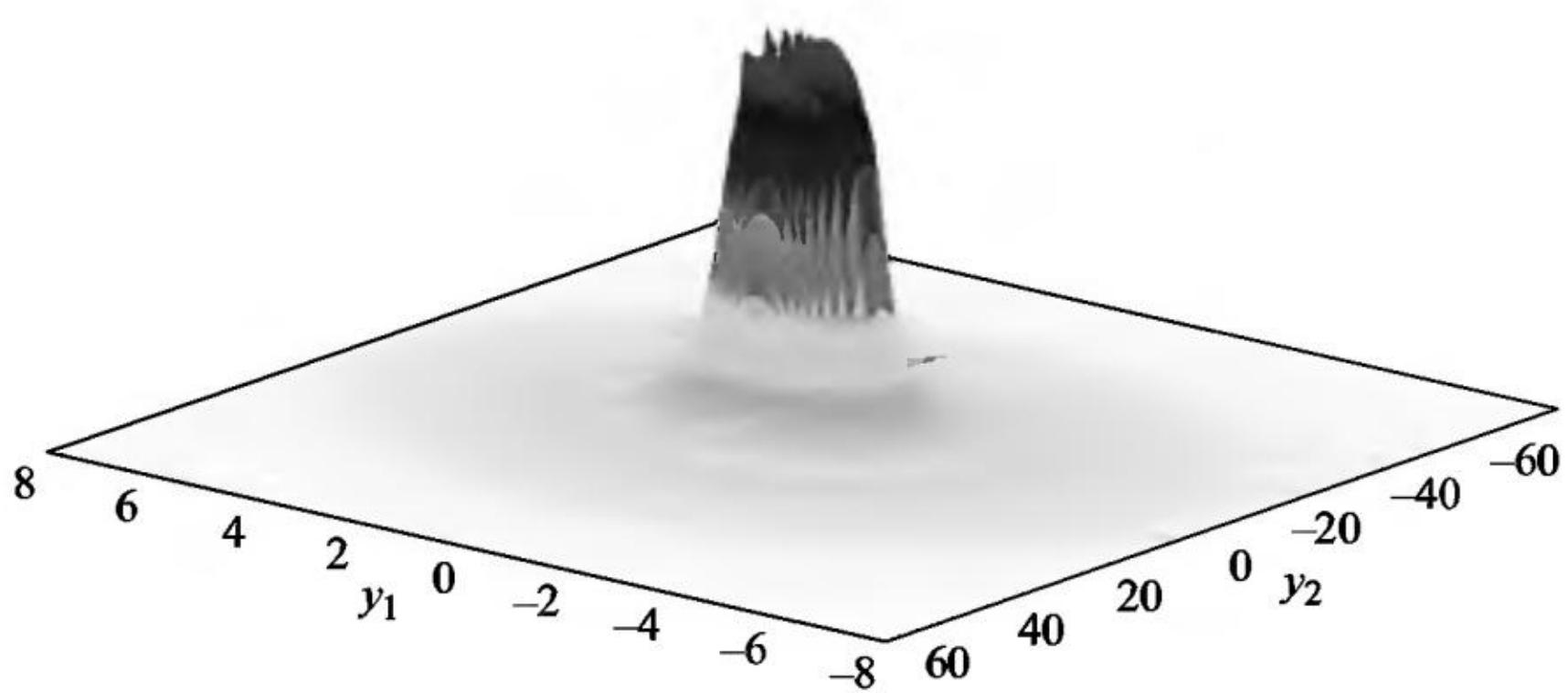


Рис. 2.9

стемы СДУ (2.5), полученные при других значениях параметров $a = 1$ и $\sigma = 1$ с шагом интегрирования $h = 10^{-6}$ и размером ансамбля моделируемых траекторий $N_{\text{tr}} = 10^6$ на интервале $[0, 100]$. Вдоль интервала интегрирования наблюдается аналогичное рис. 2.8 поведение ансамбля траекторий численного решения $y_1(t)$: так как начальное значение задачи Коши детерминированное, то в начале интервала интегрирования наблюдается пик частот, затем по мере продвижения по интервалу интегрирования амплитуда колебаний графика ЧИК незначительно возрастает, что соответствует поведению решения сопутствующего ОДУ на этом интервале. Из графика ЧИК (вид сбоку) также видим, что «холм сплющивается», что соответствует росту со временем дисперсии компоненты решения $y_1(t)$. Оба графика ЧИК (вид сбоку и сверху), в отличие от

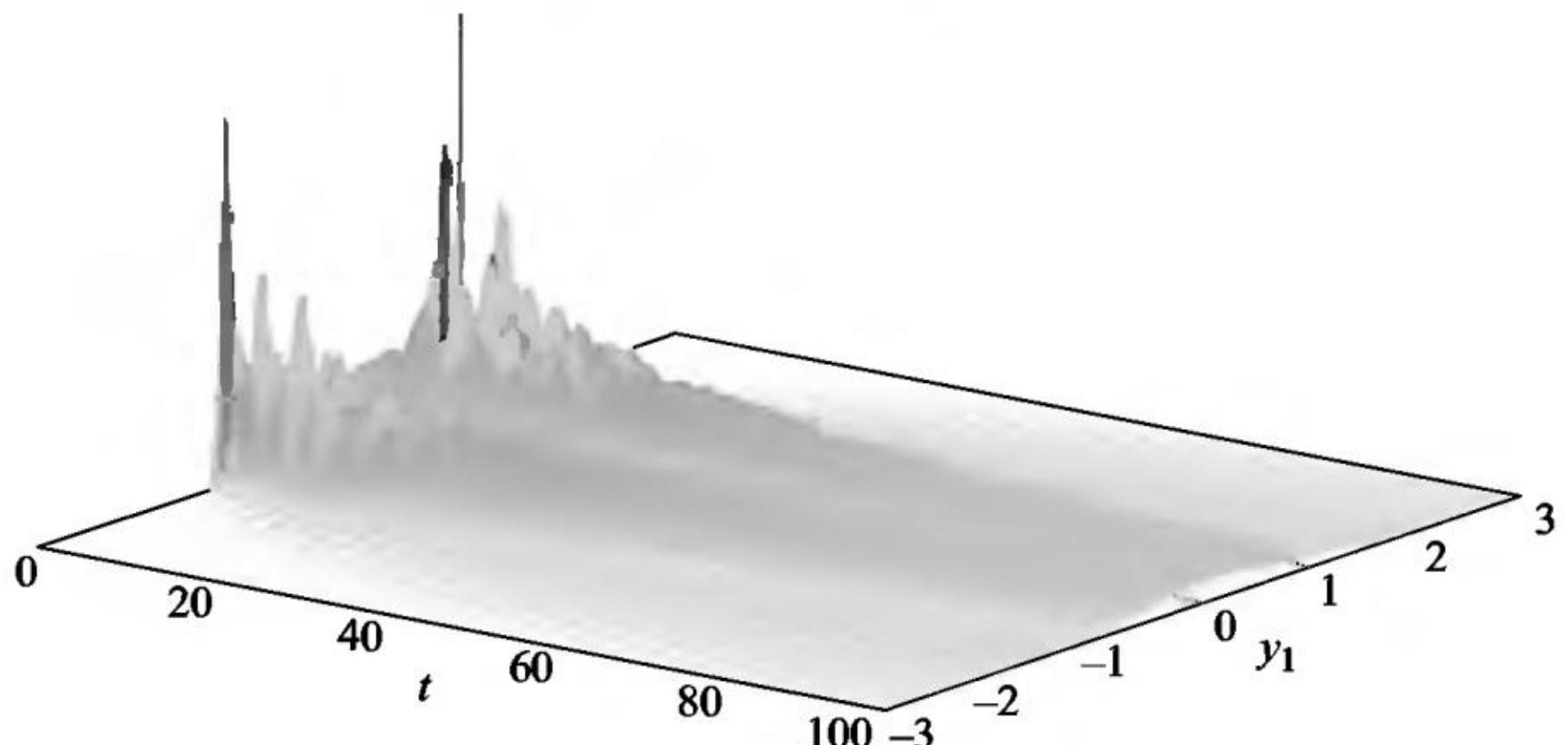


Рис. 2.10

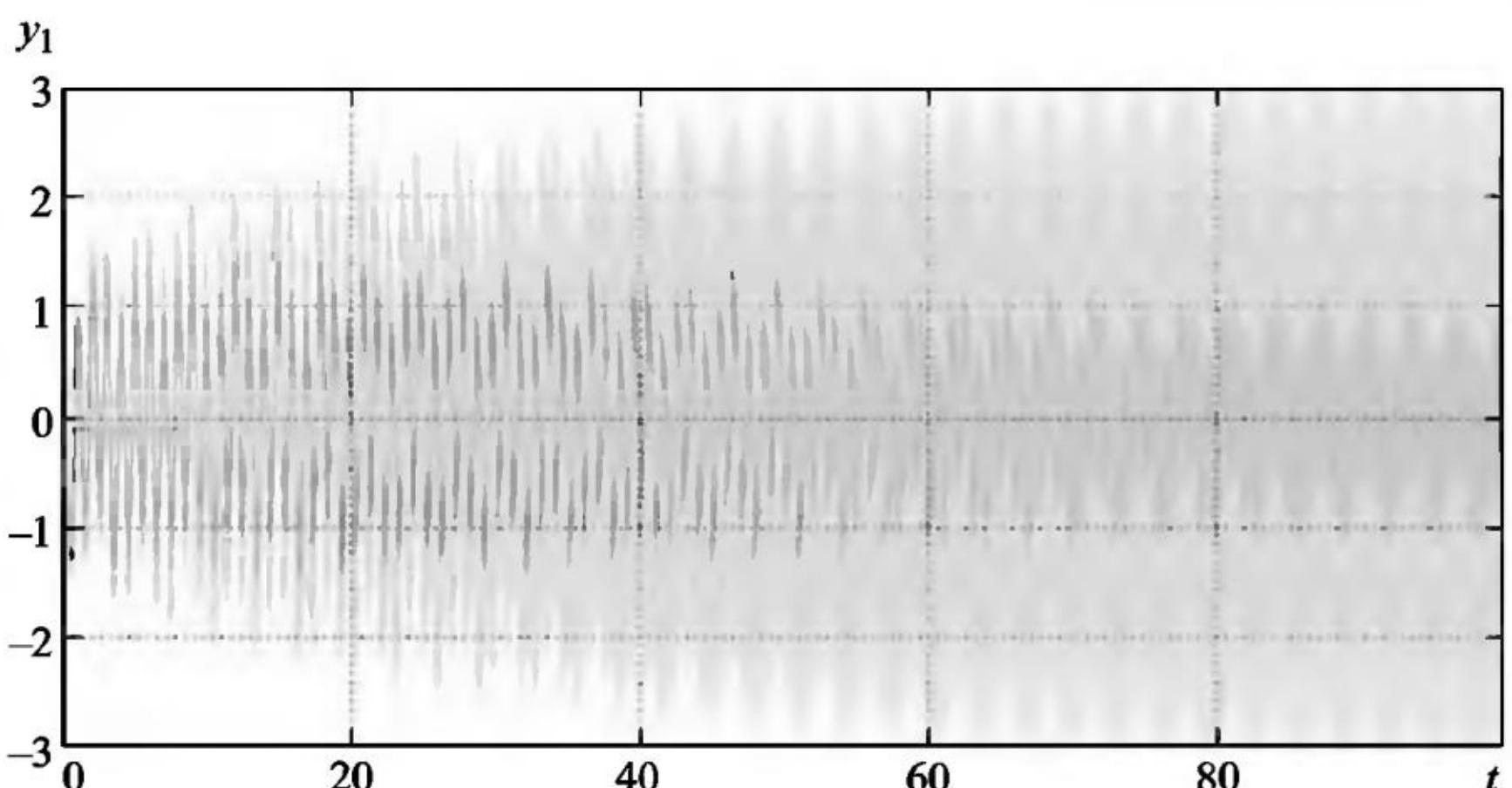


Рис. 2.11

графика одной траектории на рис. 2.3, дают информацию о поведении всего ансамбля смоделированных траекторий компоненты y_1 решения системы СДУ (2.5) и передают их общий колебательный характер. При построении ЧИК использовалась сетка 100×100 .

На рис. 2.12 и 2.13 приведены графики ЧФП (вид сбоку и сверху) для пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (2.5) при $a = 1$ и $\sigma = 1$, из которых видим более равномерный спектр амплитуд, чем в случае линейного осциллятора (9.2) (см. рис. 9.8 и 9.9 в разделе 9). Из графиков ЧФП наглядно виден «эллипс рассеивания» и экстремальные значения пары компонент (y_1, y_2) решения уравнения «биения». При мультимедийном просмотре, если зафиксировать графики ЧФП в некоторых узлах временной сетки на интервале интегрирования, также можно наблюдать динамику расширения со временем области значений пары компонент (y_1, y_2) . Графики ЧФП, в отличие от графика одной фазовой траектории, дают полную информацию о распределении значений

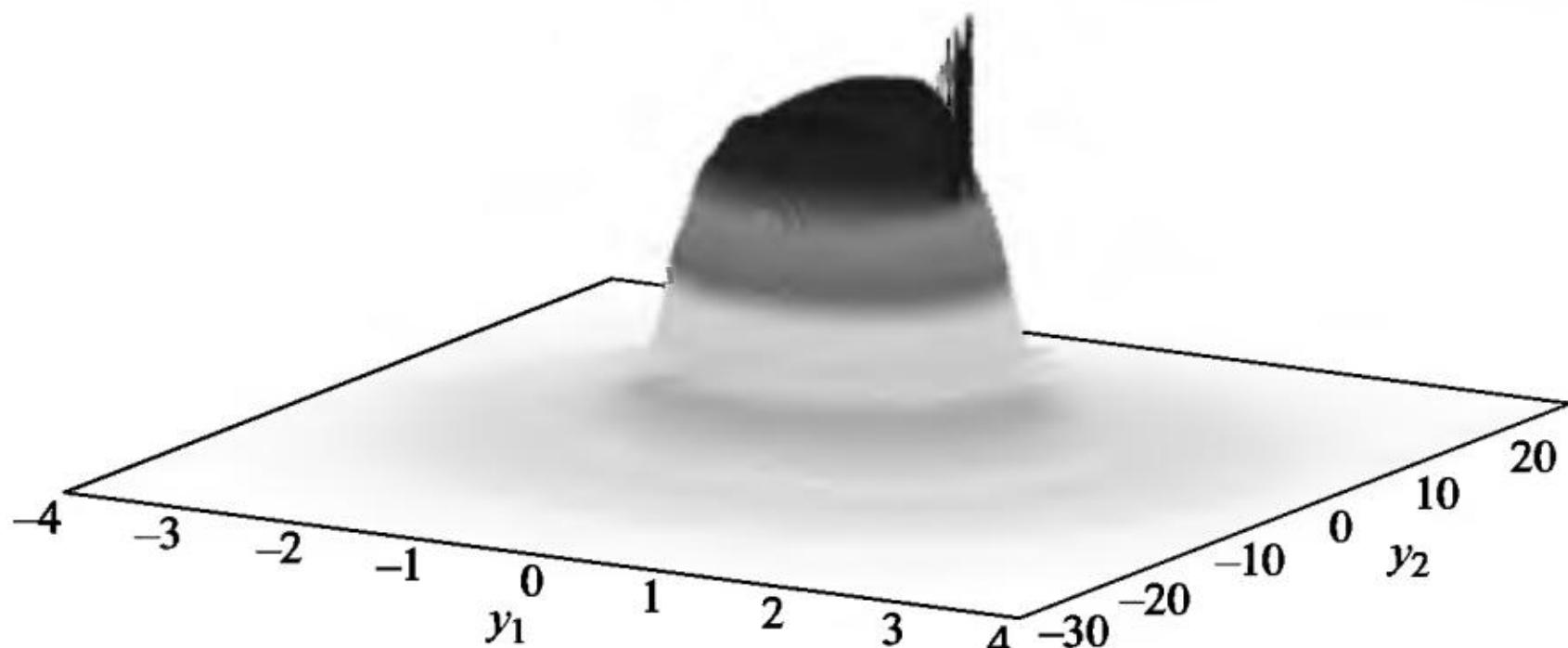


Рис. 2.12

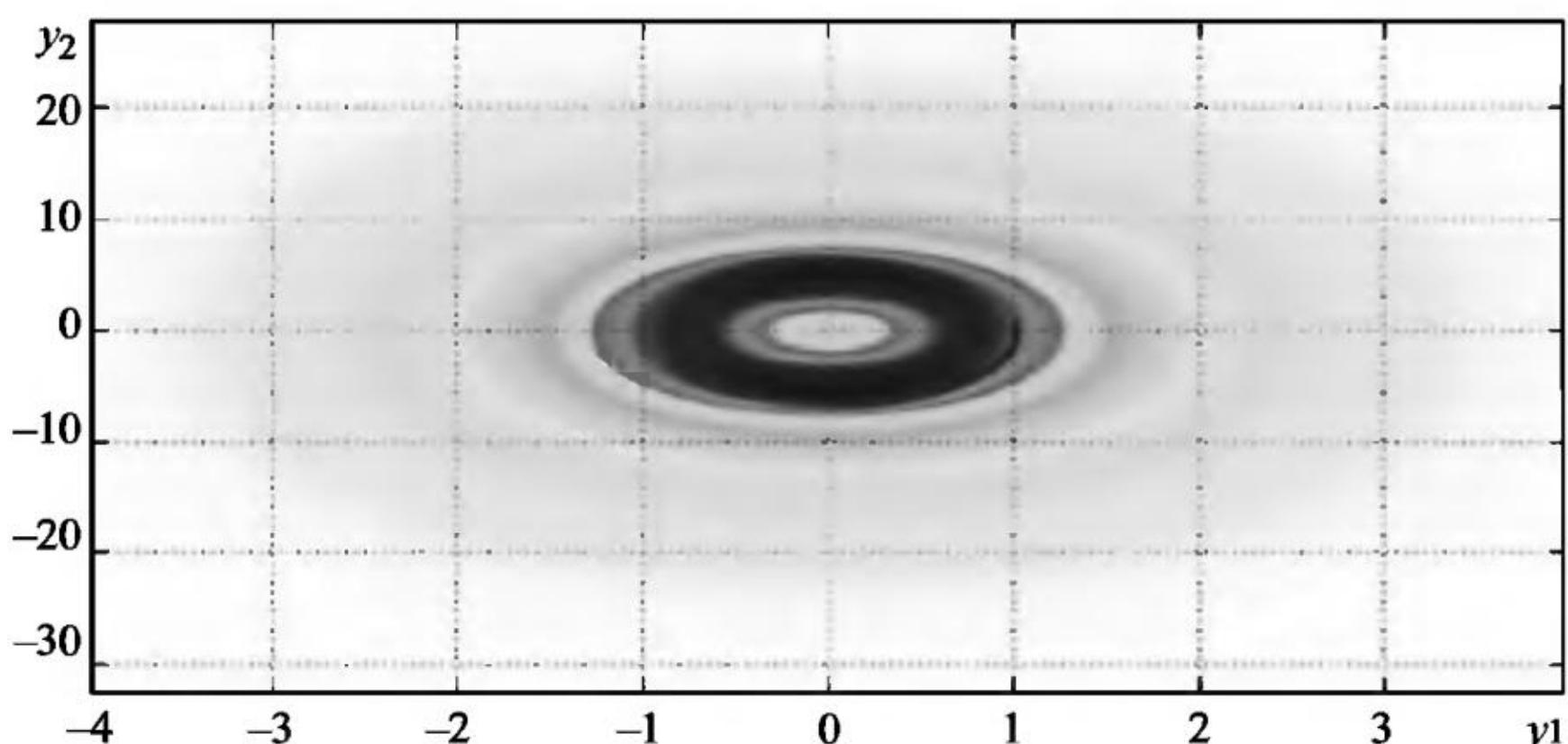


Рис. 2.13

пары компонент численного решения системы СДУ. Совместный анализ графиков ЧИК и ЧФП позволяет увидеть динамику всего смоделированного ансамбля траекторий двух компонент решения системы СДУ на заданном отрезке времени в заданном прямоугольнике плоскости. Основной вывод, который можно сделать после анализа графиков ЧИК и ЧФП в данном примере, что внутренний случайный шум единичной интенсивности нарушает эффект «биений», наблюдаемый в колебаниях решения сопутствующей системы ОДУ.

Пример 2.2. Стабилизация вращений твердого тела. Абсолютно твердым телом называется такая система материальных точек, для которой расстояние между любой парой точек не меняется с течением времени. Например, спутник связи на геостационарной орбите можно в некоторых исследованиях рассматривать как абсолютно твердое тело. Задача определения положения твердого тела сводится к задаче определения взаимного расположения двух систем координат, начала которых в общем случае не совпадают, а скорость любой точки тела включает скорость полюса системы координат, связанной с телом, и угловой скорости вращения подвижной системы координат.

Следующая трехмерная система СДУ с аддитивными шумами

$$\begin{aligned} dy_1 &= (-0,4y_1 + y_2 + 10y_2y_3)dt + 0,1dw_1(t), \quad y_1(0)=1, \\ dy_2 &= (-y_1 - 0,4y_2 + 5y_1y_3)dt + 0,1dw_2(t), \quad y_2(0)=1, \\ dy_3 &= (0,175y_3 - 5y_1y_2)dt, \quad y_3(0)=1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

описывает процесс стабилизации вращений твердого тела при внешних возмущениях. Здесь y_1 , y_2 , y_3 – проекции угловой скорости тела на главные оси инерции. График компоненты y_1 одной смоделированной траектории решения системы СДУ (2.6) на рис. 2.14 говорит о стабилизации вращений твердого тела, хотя характер поведения второй и последующих смоделированных траекторий, возможно, будет иным.

На рис. 2.15 и 2.16 приведены графики ЧИК (вид сбоку и сверху) компоненты y_1 численного решения системы СДУ (2.6) на интервале $[0, 10]$. Из вида графиков можно сделать вывод об идентичном поведении всех смоделированных траекторий компоненты y_1 , когда колебания затухают и дисперсия амплитуды колебаний убывает до некоторого уровня. Не проводя дополнительных расчетов, из графиков на рис. 2.15 и 2.16 можно сделать вывод, что математическое ожидание $Ey_1(t)$ с ростом t быстро выходит на

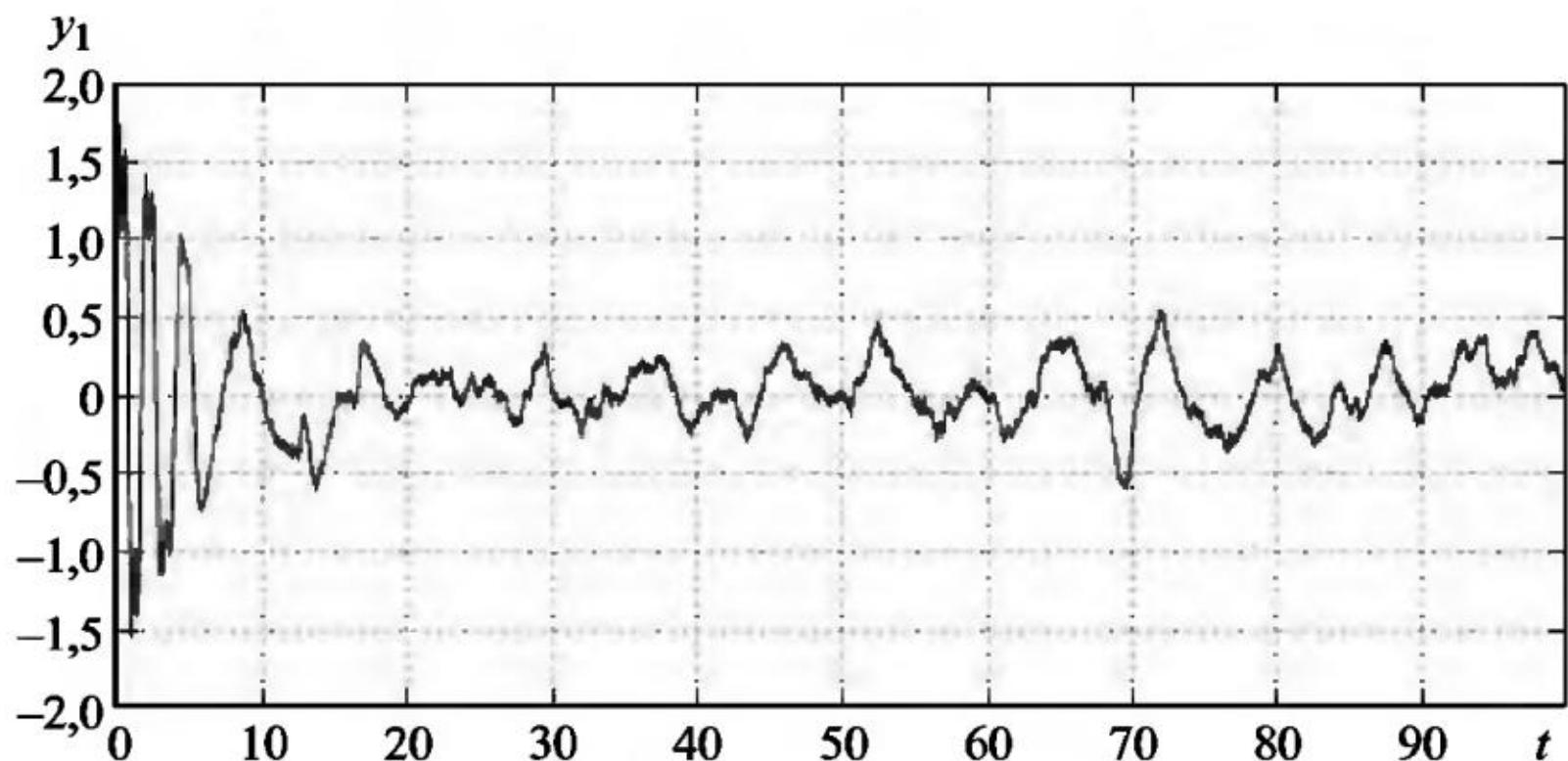


Рис. 2.14

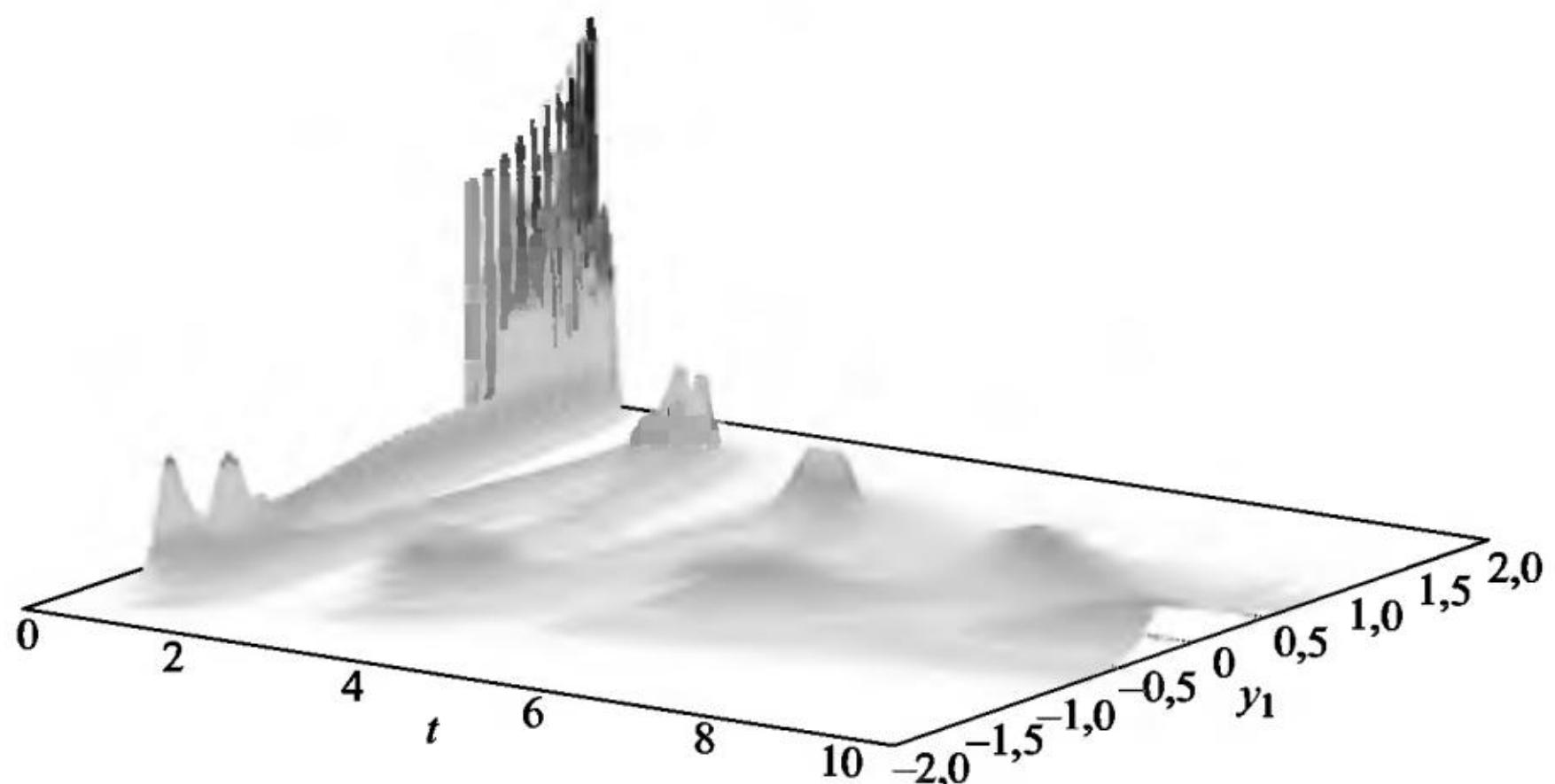


Рис. 2.15

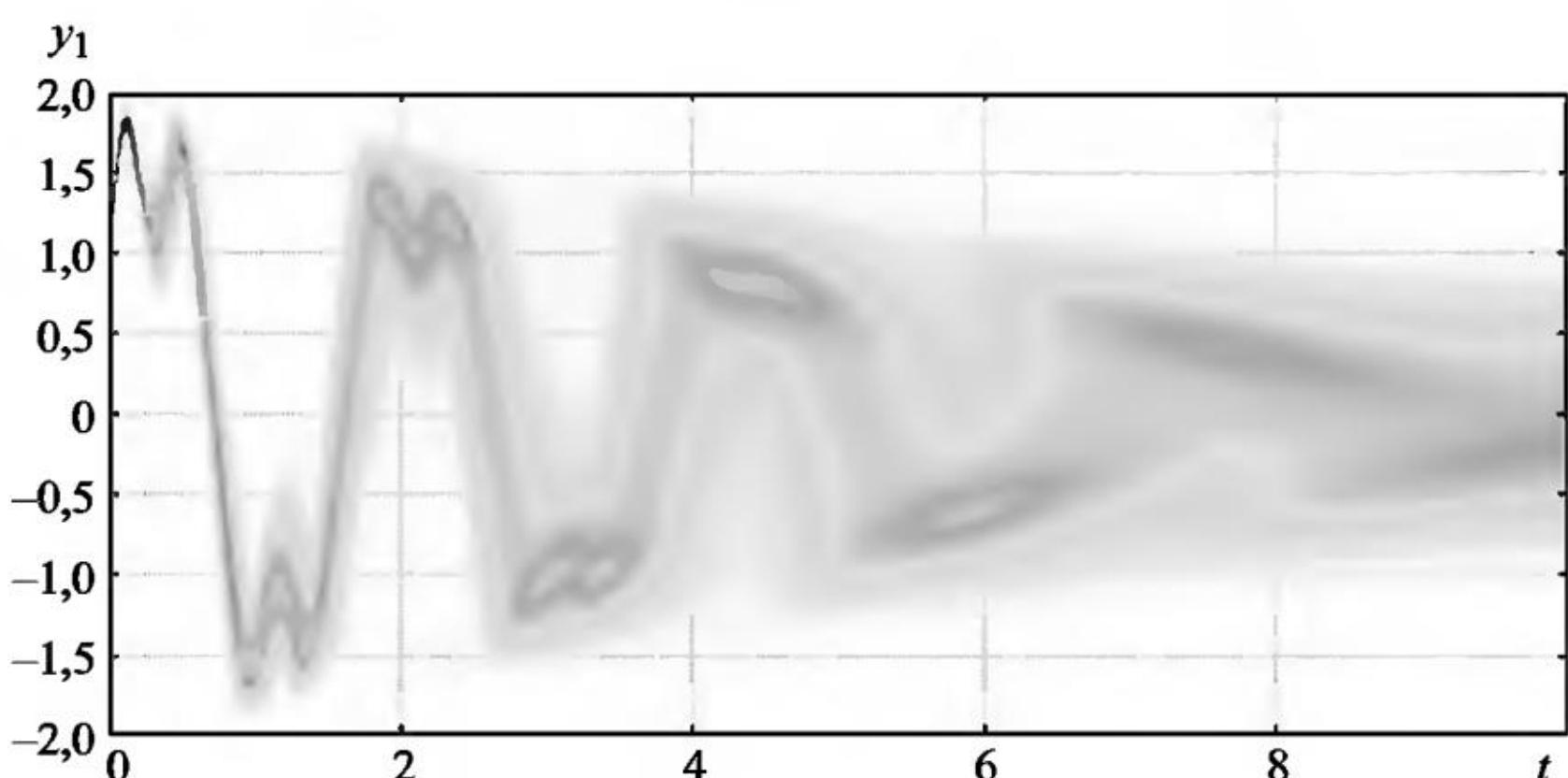


Рис. 2.16

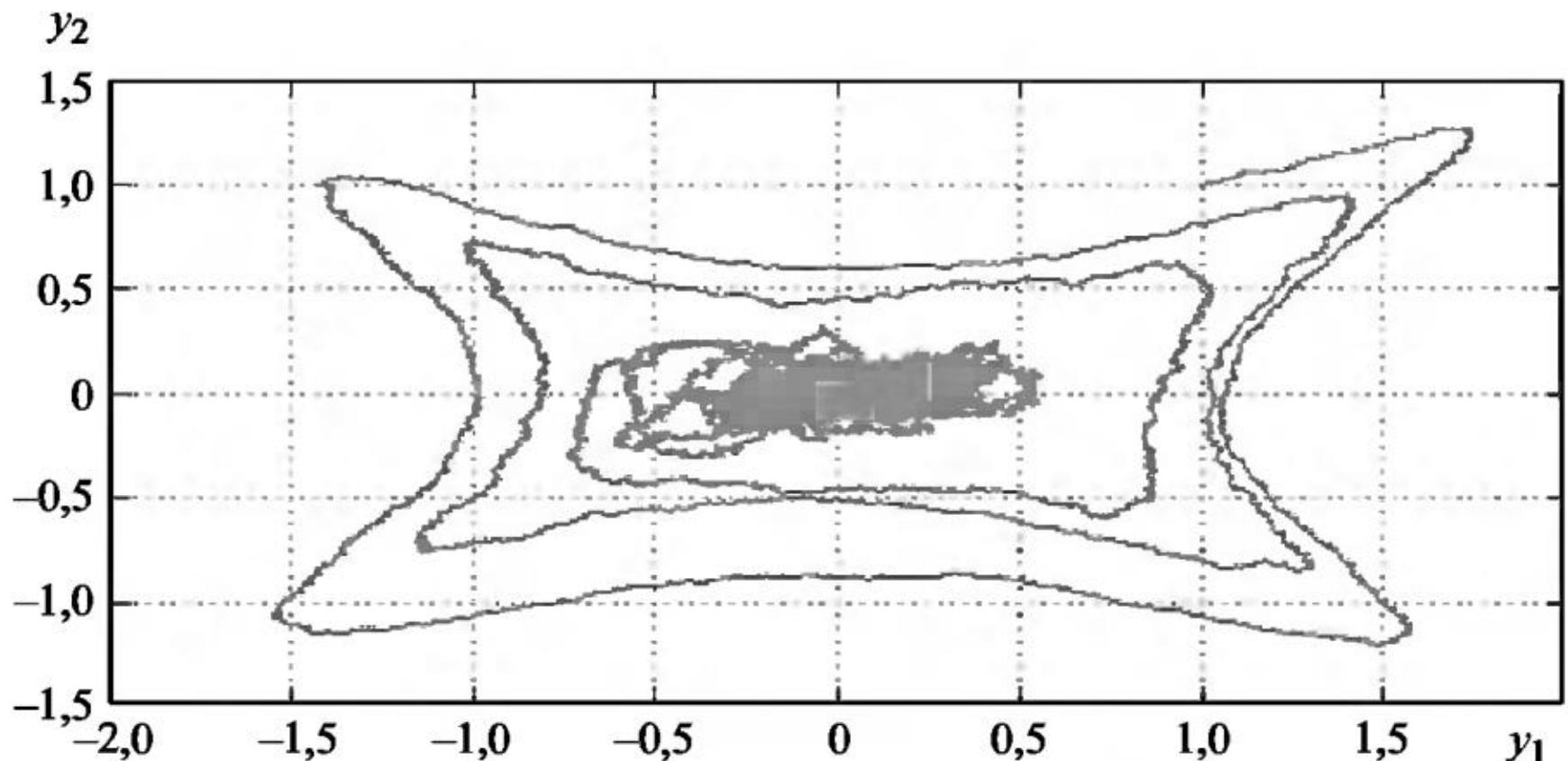


Рис. 2.17

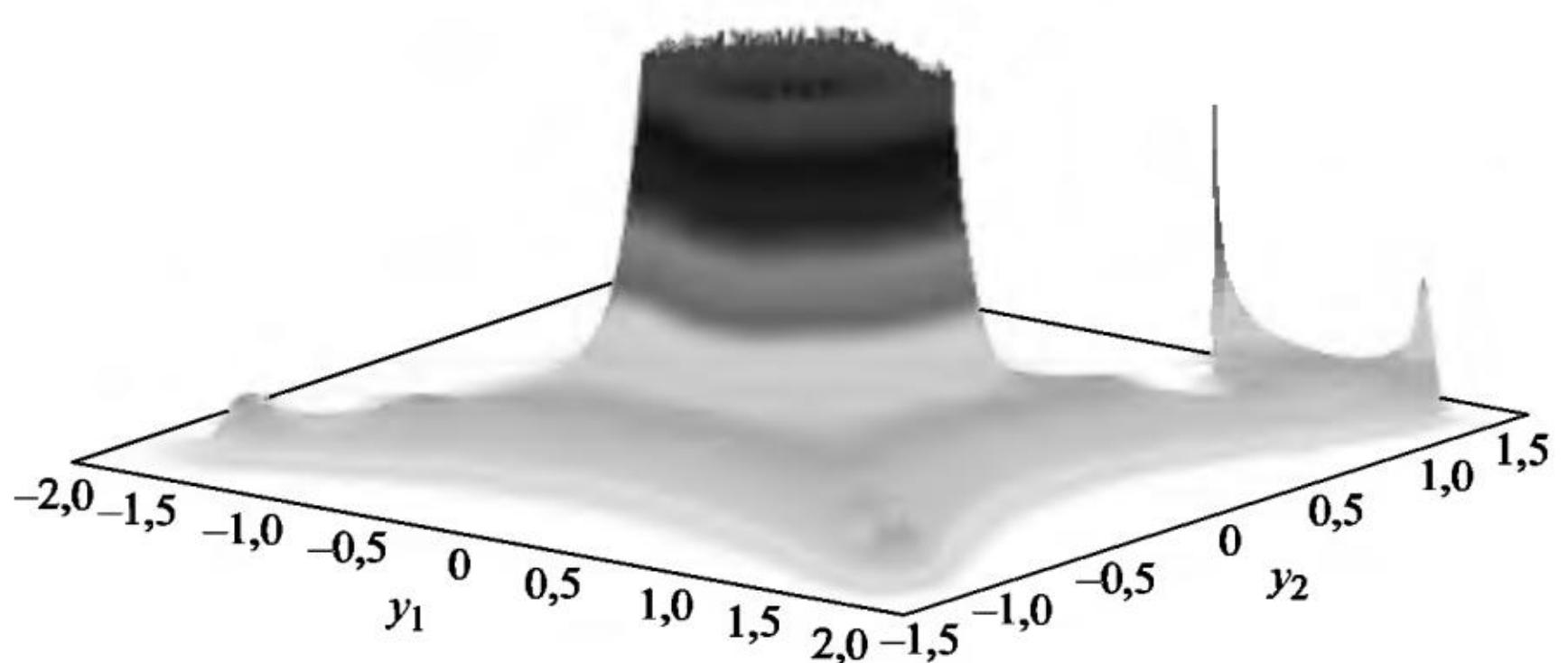


Рис. 2.18

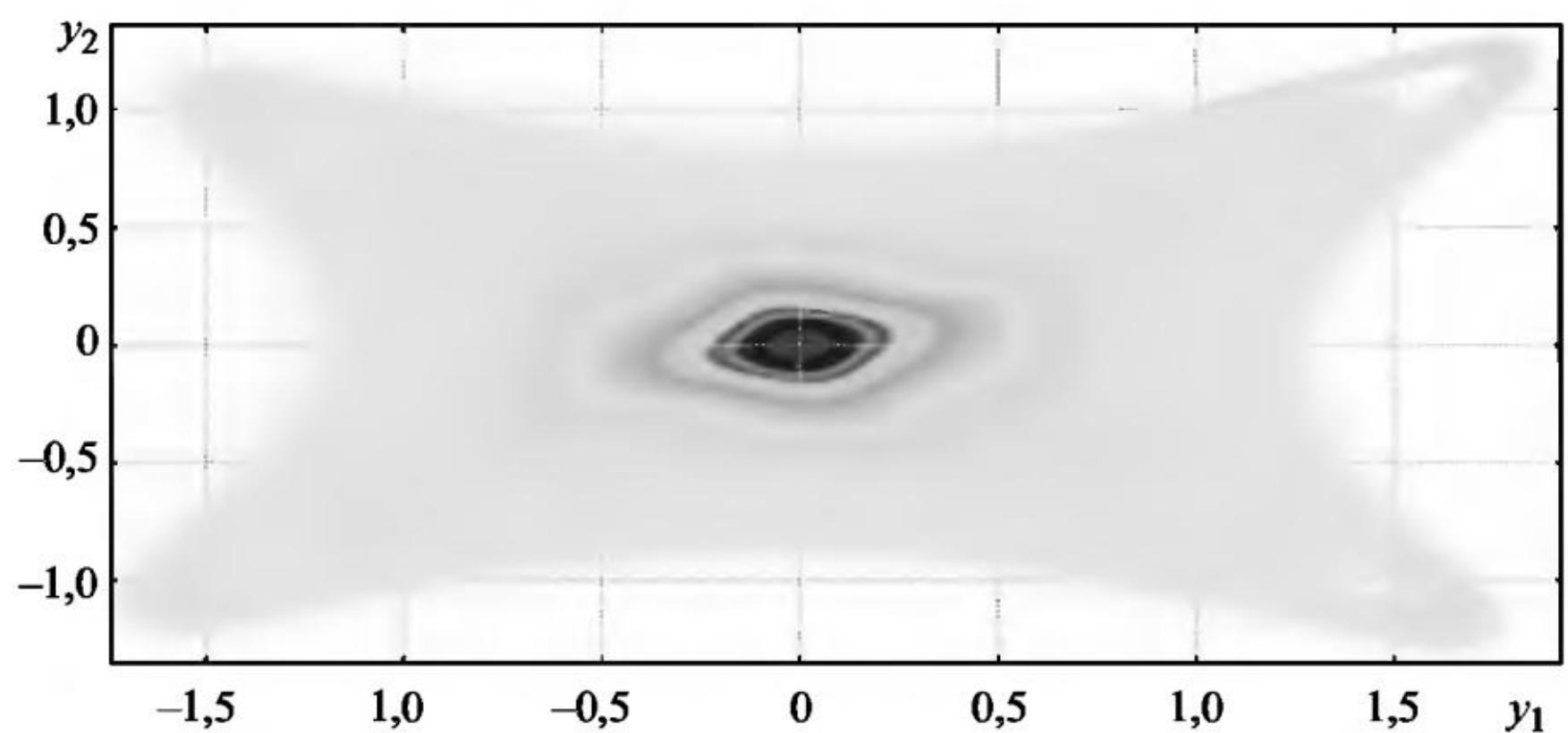


Рис. 2.19

0, а дисперсия $Dy_1(t)$ после небольшого роста стабилизируется на некотором уровне, т. е. начальное вращение твердого тела быстро переходит в «дрожание».

Из графика на рис. 2.17 фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) одной симулированной траектории решения системы СДУ (2.6) видно, что угловые скорости вращений твердого тела при внешних возмущениях остаются ограниченными на всем интервале интегрирования [0,100].

На рис. 2.18 и 2.19 даны графики ЧФП (вид сбоку и сверху) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (2.6). Сравнение графиков на рис. 2.17 и 2.19 показывает идентичное поведение всех симулированных траекторий пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (2.6). Все проведенные расчеты показали устойчивое поведение численного решения системы СДУ (2.6) с аддитивными шумами малой интенсивности. Из этого можно сделать вывод, что используемая система стабилизации вращений устойчива к малым возмущениям. Для расчета ЧИК и ЧФП моделировалось 10^6 траекторий на интервале интегрирования [0,100] на 120 ядрах кластера.

Замечание. Для большей наглядности здесь и далее некоторые графики ЧИК и ЧФП (вид сбоку) будут усечены сверху. Напомним, что более темному тону на рисунках соответствует большее число попаданий значений компонент решения в ячейки сетки ЧИК и ЧФП .

Пример 2.3. Движение вала в упругих подшипниках под воздействием внешних и внутренних случайных шумов задается системой СДУ

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= y_4 dt, & y_1(0) &= 1, \\
 dy_2 &= y_5 dt, & y_2(0) &= 1, \\
 dy_3 &= y_6 dt, & y_3(0) &= 1, \\
 dy_4 &= \left(y_1 y_5 - 0,0016 y_1^{\frac{3}{2}} \sin^2(y_3) + 0,04(y_5 + y_6)^2 \cos(y_3) - y_1^{\frac{3}{2}} \right) dt + \\
 &\quad + \sigma_1 y_1 dw_1(t), & y_4(0) &= 0,1, \\
 dy_5 &= f_1 dt + \frac{\sigma_2}{y_1} dw_2(t), & y_5(0) &= 0,1, \\
 dy_6 &= -\left(f_1 + 0,04 y_1^{\frac{3}{2}} \sin(y_3) \right) dt + \sigma_3 dw_3(t), & y_6(0) &= 0,1.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

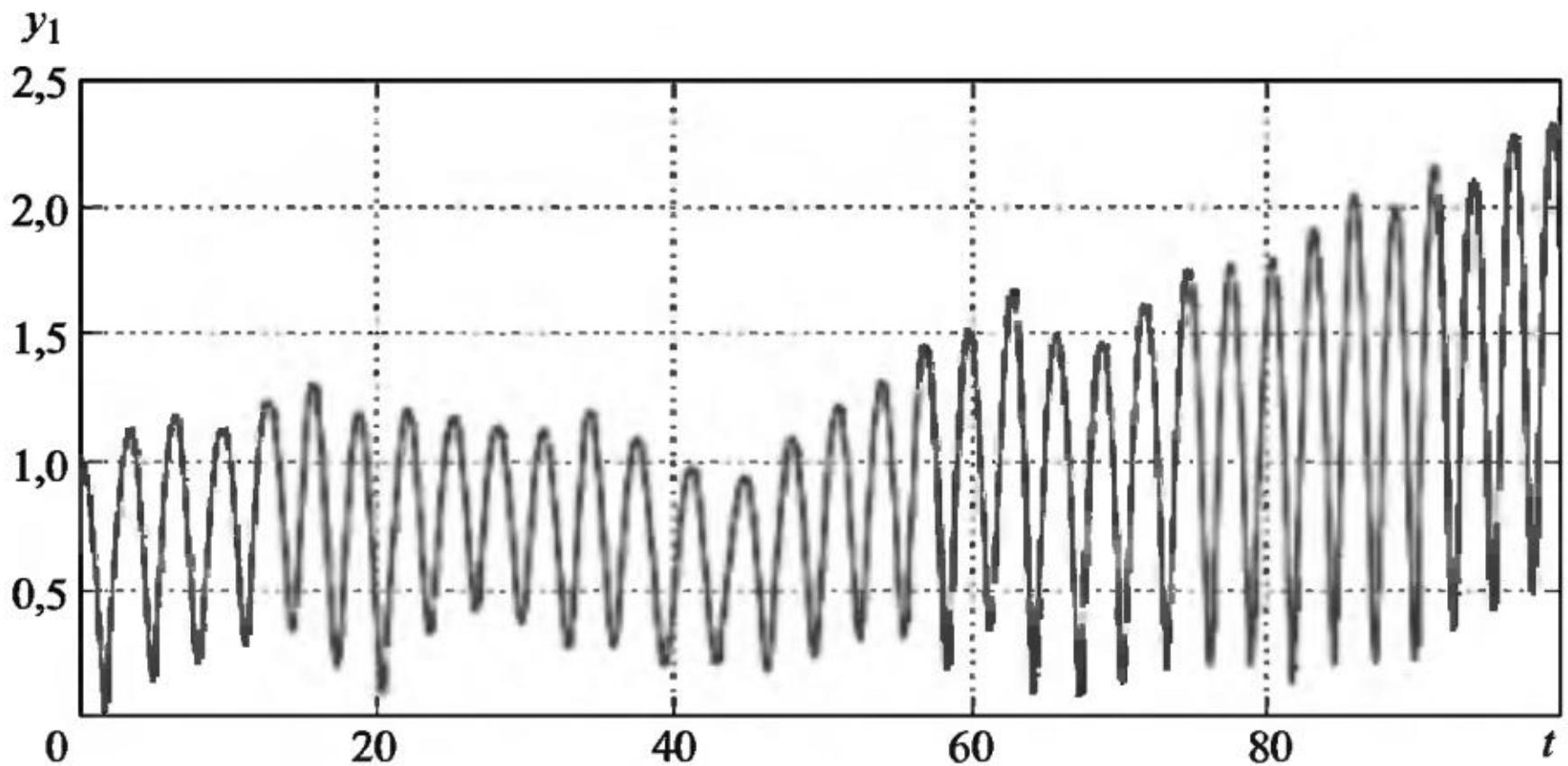


Рис. 2.20

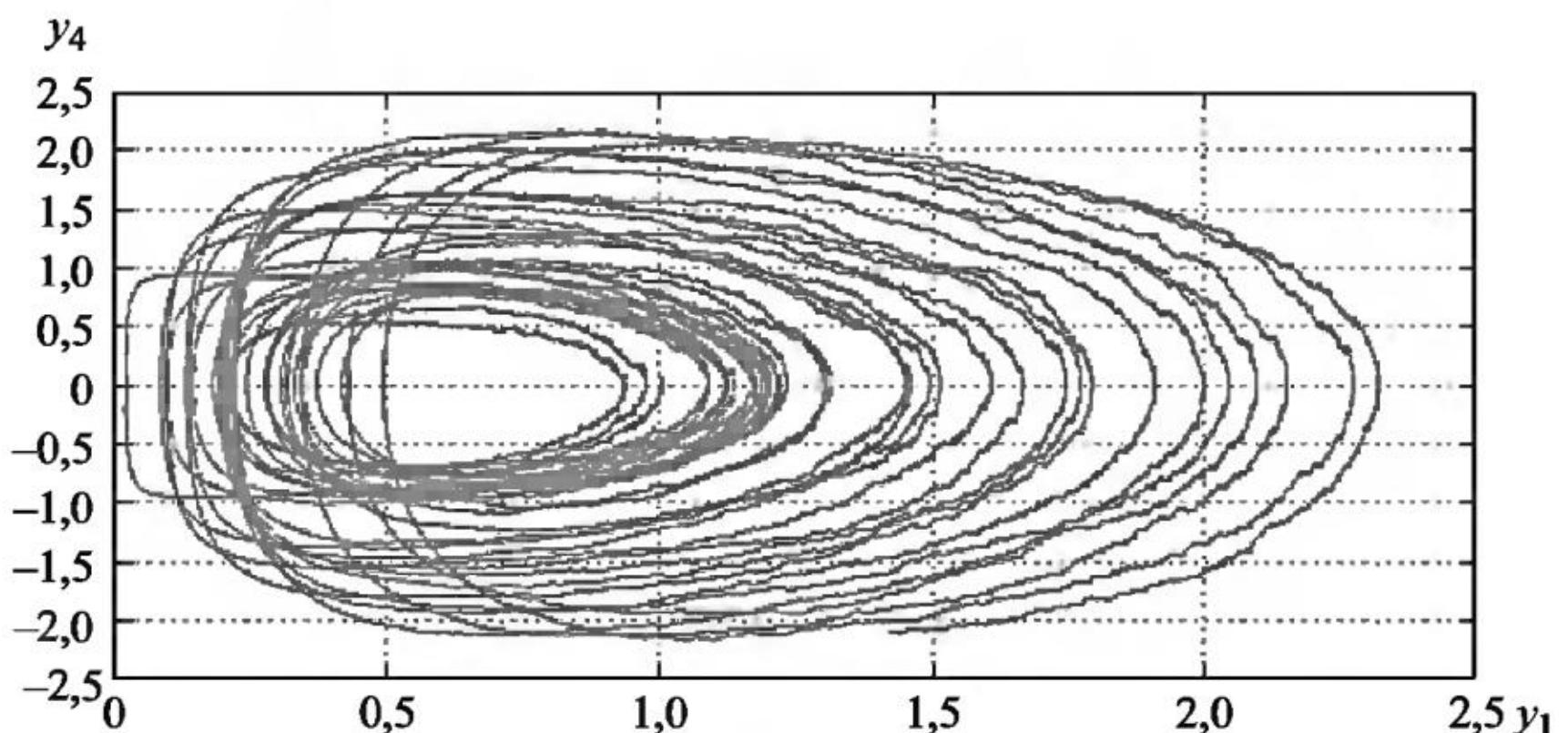


Рис. 2.21

Здесь y_1 – расстояние от оси вала до центра подшипника, y_2 , y_3 – углы между осями неподвижной и подвижной систем координат, $f_1 = \frac{1}{y_1} \left(-2y_4y_5 + 0,01 \left(0,16y_1^{\frac{3}{2}} + 4(y_5 + y_6)^2 \sin(y_3) \right) \right)$. Отметим, что интенсивность шума в четвертом уравнении растет с ростом y_1 , а в пятом уравнении – при y_1 , стремящемся к 0.

На рис. 2.20 дан график одной смоделированной траектории компоненты y_1 решения системы СДУ (2.7), на рис. 2.21 – фазовый портрет пары компонент (y_1, y_4) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,1$. Расчеты проводились с шагом интегрирования $h = 10^{-5}$.

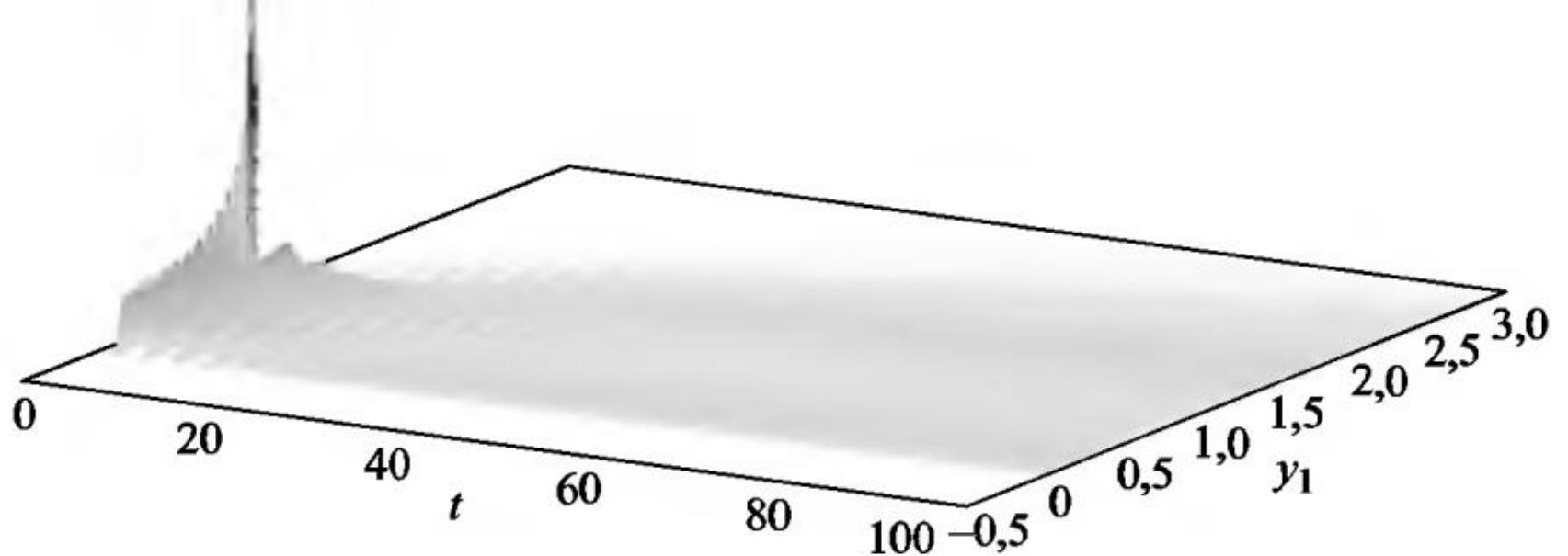


Рис. 2.22

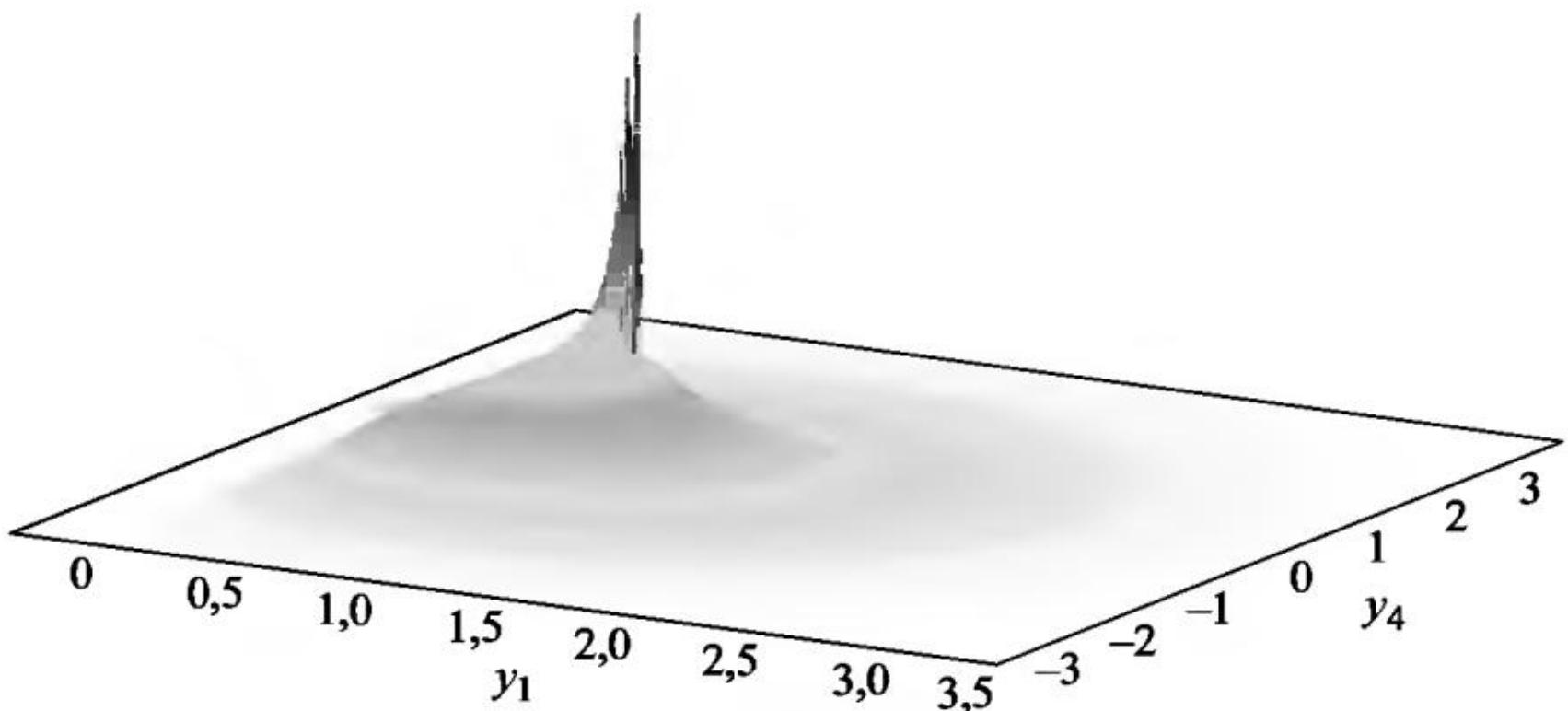


Рис. 2.23

На рис.2.22 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 решения системы СДУ (2.7). Как видно из графика, все смоделированные траектории компоненты y_1 положительны, со временем диапазон значений увеличивается и колебаний траекторий не наблюдается.

На рис. 2.23 дан график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1 , y_4) численного решения системы СДУ (2.7).

Из вида графиков ЧИК и ЧФП можно сделать вывод, что расстояние от оси вала до центра подшипника не превышает некоторого уровня.

Для сравнения на рис. 2.24 и 2.25 приведены аналогичные графики ЧИК (вид сбоку) и ЧФП (вид сверху) с большей интенсивностью шума $\sigma = 0,3$. Сравнение рис. 2.22, 2.23 с рис. 2.24, 2.25 показывает, что увеличение интенсивности шума приводит только к

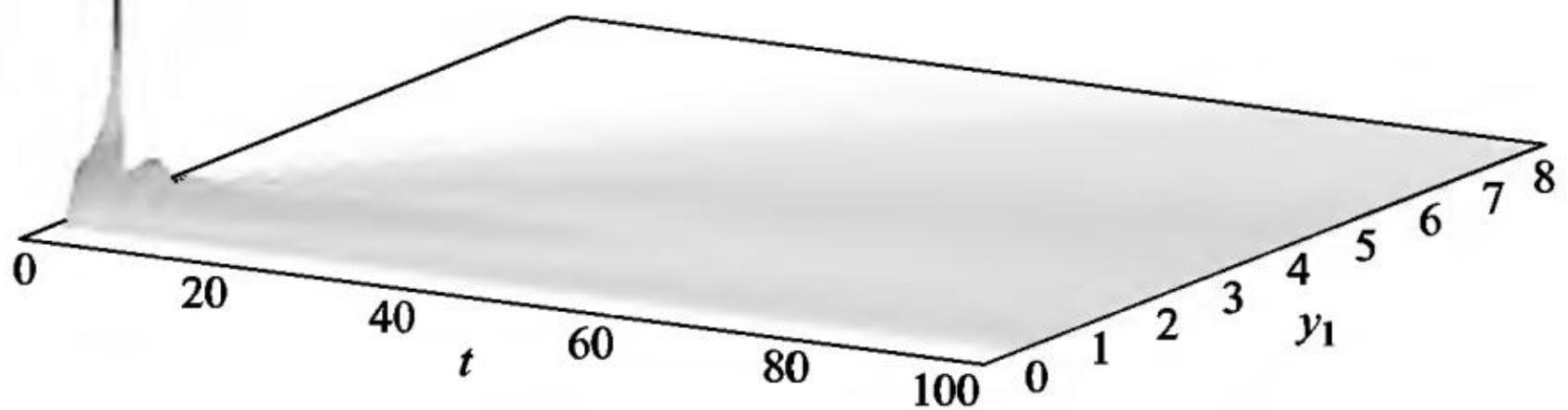


Рис. 2.24

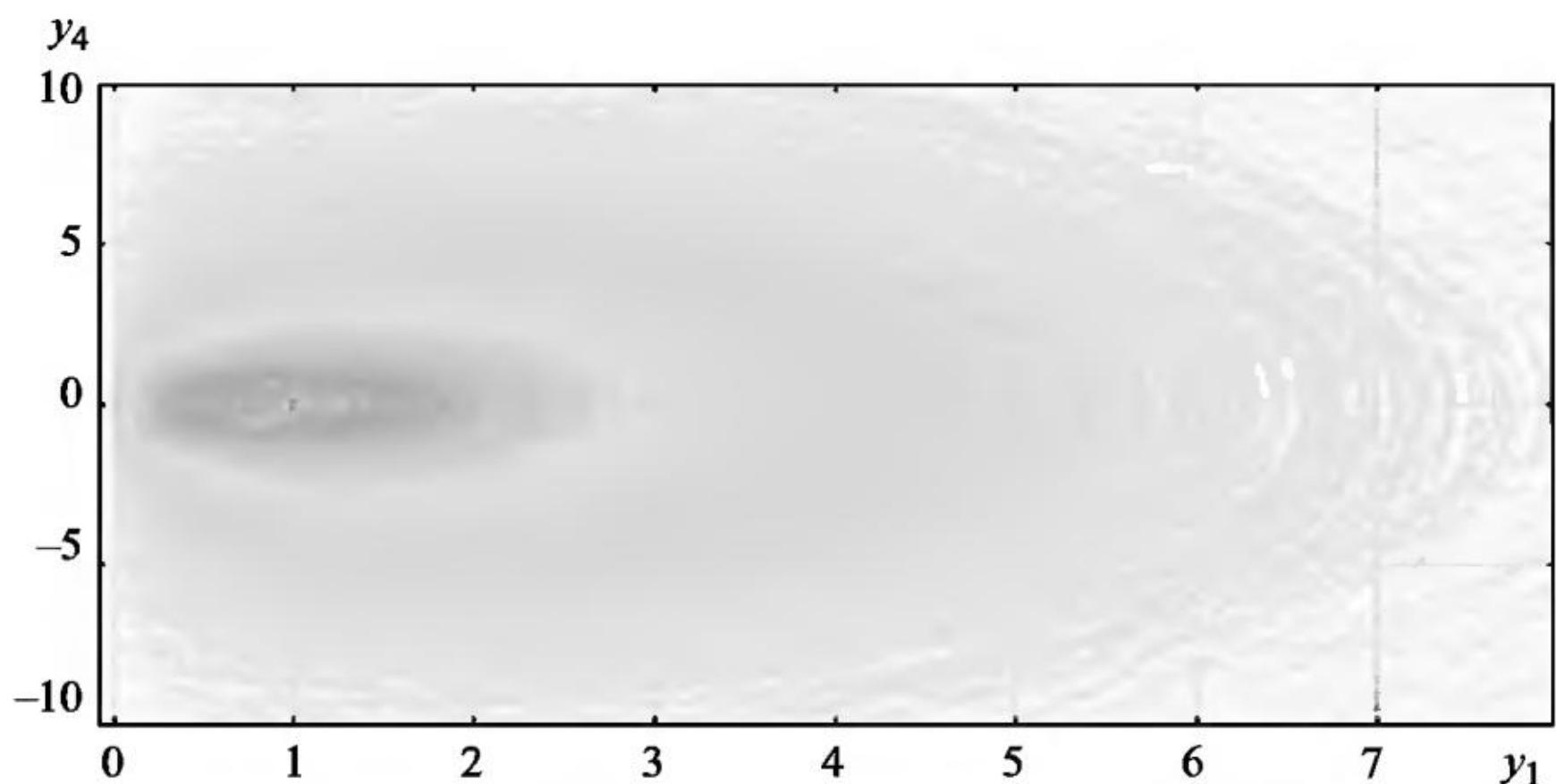


Рис. 2.25

увеличению частоты на графиках ЧИК и ЧФП, но не меняет их форму. Аналогичный вид графиков на рис. 2.21 и 2.25 говорит об идентичности поведения всех смоделированных траекторий решения.

3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ.

СИНХРОНИЗАЦИЯ

Модель динамической системы – это математическая модель, которая отражает изменение реального рассматриваемого явления во времени. Важную группу динамических систем представляют системы, в которых возможны колебания. Колебательные системы с точки зрения их математических моделей разделяют на определенные классы. Различают линейные и нелинейные колебательные системы, сосредоточенные и распределенные, консервативные и диссипативные, автономные и неавтономные. Особый класс представляют так называемые автоколебательные системы. Динамические системы, моделируемые конечным числом ОДУ, называют сосредоточенными, или точечными, системами. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Математические модели распределенных систем – это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Число степеней свободы распределенной системы бесконечно, и требуется бесконечное число данных для определения ее состояния. По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и неконсервативные. Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются диссипативными. Динамические системы называются автономными, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени (правая часть сопутствующей системы ОДУ явно не зависит от времени). Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т. д.) определяются параметрами системы и в пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

В классе математических моделей в виде линейных и нелинейных систем ОДУ особо выделяется подкласс систем с осциллирующими решениями. Механизм возникновения осцилляций в таких системах может быть различным:

1. Собственные колебания решений линейных систем ОДУ с постоянными коэффициентами определяются мнимыми частями комплексных собственных значений матрицы системы и происходят после внешнего начального возмущения,

2. Вынужденные колебания определяются осцилляциями функции в правой части системы ОДУ, действующими независимо от колебаний системы,

3. Параметрические колебания вызываются изменениями во времени (необязательно периодическими) некоторых вещественных параметров системы ОДУ,

4. Автоколебания могут возникнуть в нелинейных автономных системах ОДУ при отсутствии внешнего периодического воздействия,

5. В многочисленных системах ОДУ, моделирующих динамику управляемых динамических объектов, осцилляции решения вызываются разрывными правыми частями.

Например, точное решение задачи Коши для ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0 \quad (3.1)$$

имеет вид $y(t) = \cos(\omega t)$, так что интегральная кривая представляет собой график косинуса с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, а фазовая траектория $\left(y, \frac{dy}{dt}\right)$ – эллипс $(\cos(\omega t), -\omega \sin(\omega t))$. Если (3.1) переписать в виде системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega^2 y_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

то матрица системы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ имеет мнимые собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и, значит, колебания (3.2) являются собственными. Вынужденные колебания появляются, если в правую часть (3.2) добавить осциллирующую функцию $g(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega^2 y_1 + g(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Параметрические колебания заменяют собственные, если в (3.2) вставить функцию $g(t)$, меняющую частоту колебаний:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -(\omega^2 + g(t))y_1.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Автоколебания возникают в нелинейных системах ОДУ, например, в уравнении Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega^2 y_1 + ay_2(1 - by_1^2).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Под стохастическими колебаниями принято понимать нерегулярные, внешне не отличимые от реализации случайного процесса колебания в полностью детерминированной нелинейной системе ОДУ. Физическая природа возникновения сложного запутанного поведения конечномерной системы связана с неустойчивостью всех (или большинства) индивидуальных движений. В настоящей монографии (как уже говорилось ранее) под стохастическими колебаниями будем понимать также и осциллирующие случайные процессы, а точнее, решения систем СДУ, у которых осциллируют решения сопутствующих ОДУ.

Пример 3.1. Центробежный регулятор Уатта предназначен для поддержания равномерности подъема клети из шахты. В системе СДУ с аддитивным шумом

$$\begin{aligned}dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= 0,1, \\ dy_2 &= (2y_3^2 \sin(2y_1) - 9,81 \sin(y_1) - 0,01y_2) dt + \sigma dw(t), & y_2(0) &= 0, \\ dy_3 &= (-0,001 + 0,02(\cos(y_1) - \cos(0,7))) dt, & y_3(0) &= 0,\end{aligned}\tag{3.6}$$

введены следующие обозначения: y_1 – угол отклонения регулирующих шаров от вертикальной оси, y_2 – угловая скорость вращения вокруг вертикальной оси, y_3 – угловая скорость вращения маховика. График компоненты y_1 на рис. 3.1 и фазовый портрет пары компонент (y_1, y_2) на рис. 3.2 решения сопутствующей системы ОДУ получены с помощью явного метода Эйлера для решения ОДУ с очень малым размером шага интегрирования $h = 10^{-4}$.

Замечание. Скорее всего, сложные режимы колебаний на рис. 3.1 и 3.2 присущи используемой математической модели регулятора Уатта (3.6), но не наблюдаются в натурных экспериментах.

При большем размере шага интегрирования графики резко отличаются от приведенных, т. е. в них присутствует эффект численной неустойчивости схемы Эйлера. Но если размер шага интегрирования рассматривать как параметр дискретной модели, то при большем размере шага интегрирования просто получаем другой режим колебаний. Так на рис. 3.3 приведен график компоненты y_1 , полученный с размером шага интегрирования $h = 0,002$.

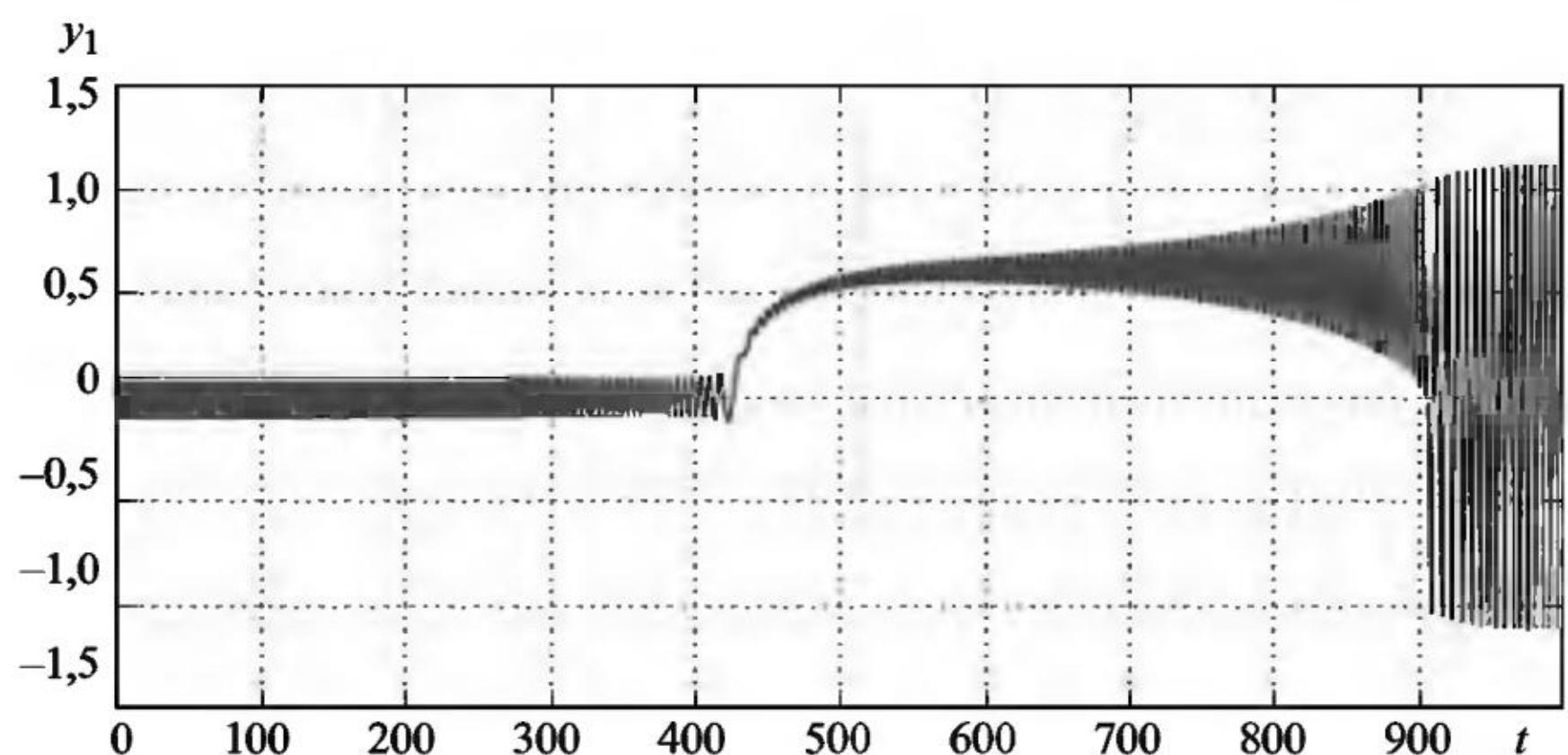


Рис. 3.1

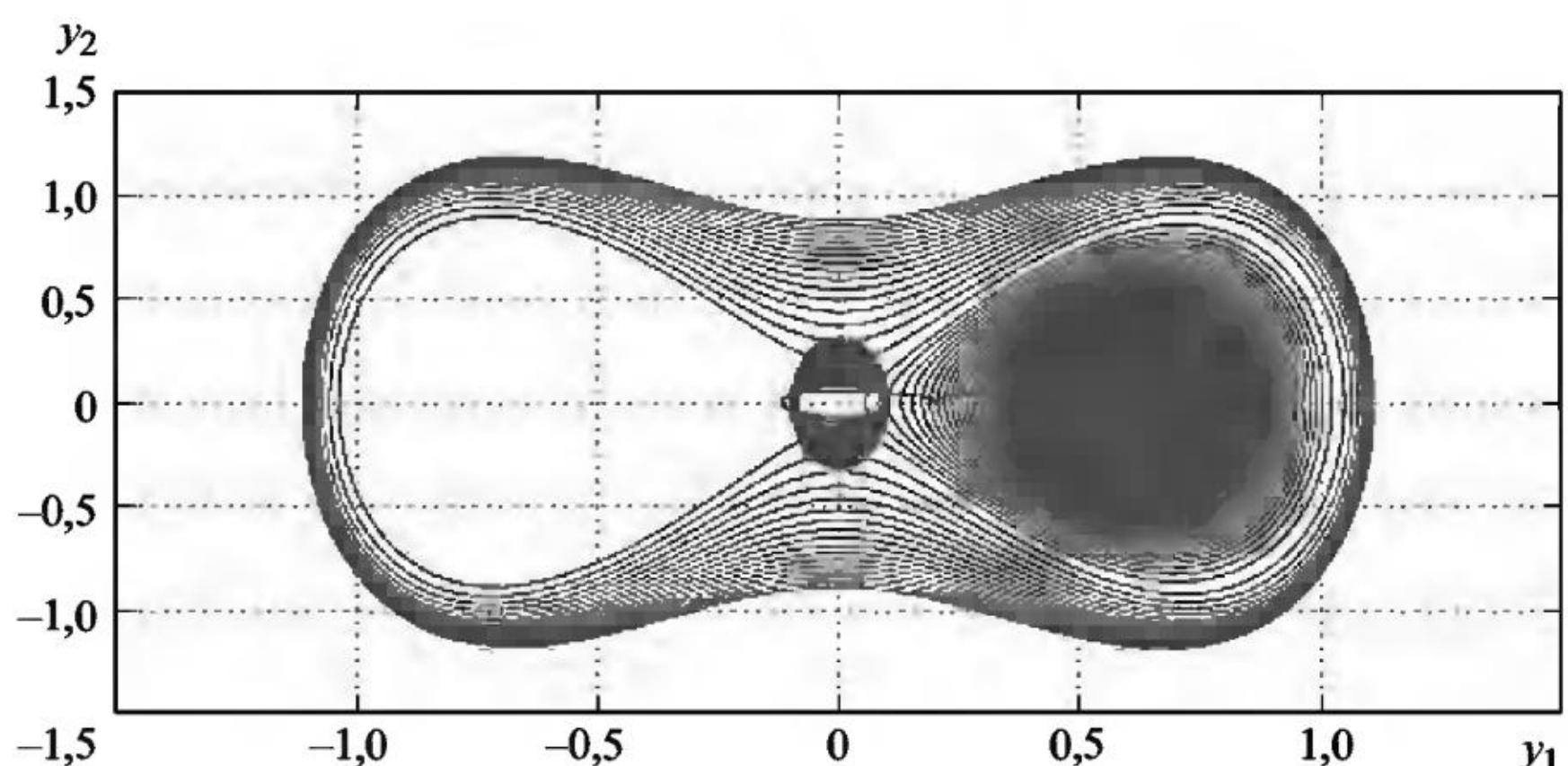


Рис. 3.2

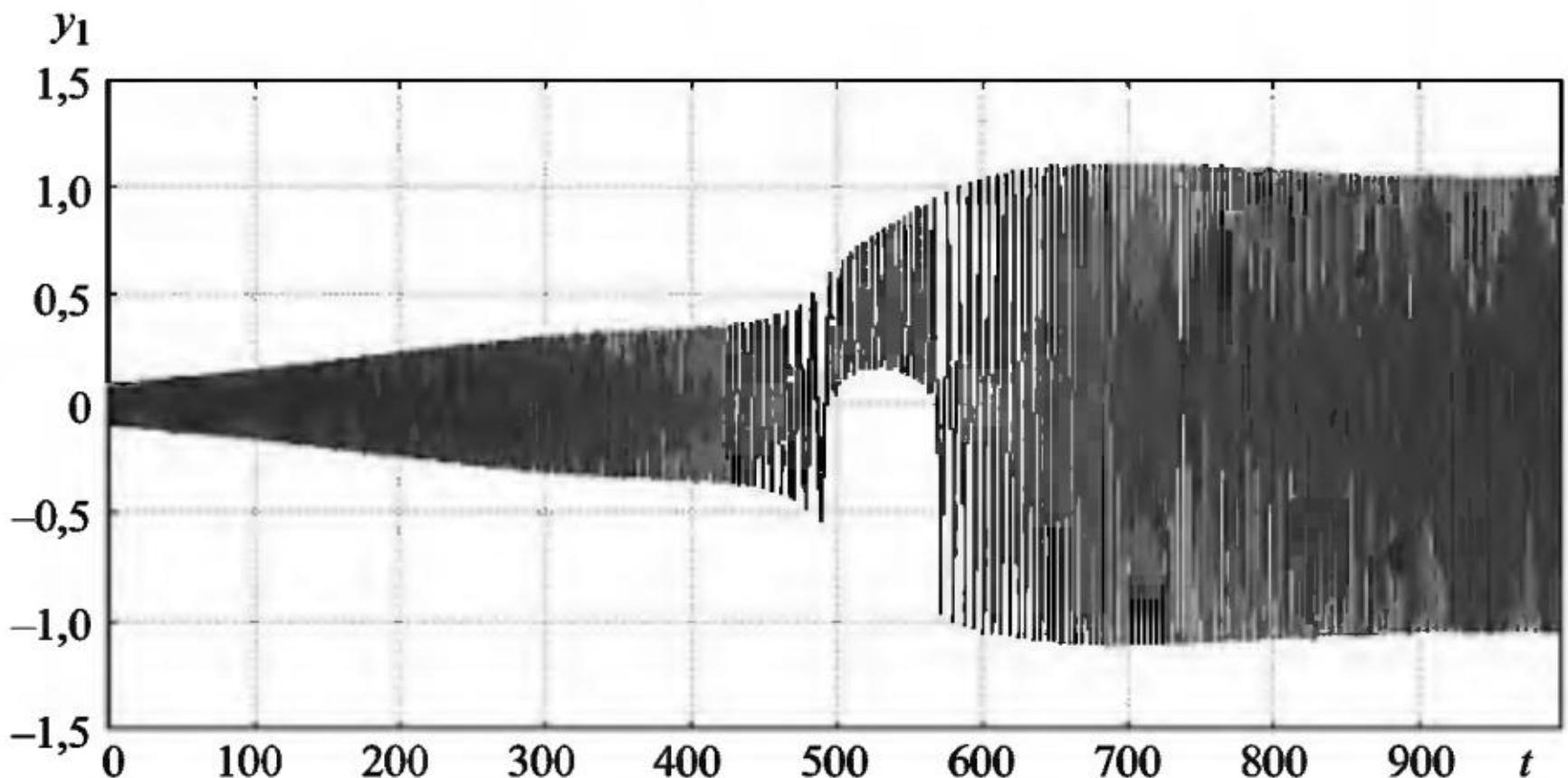


Рис. 3.3

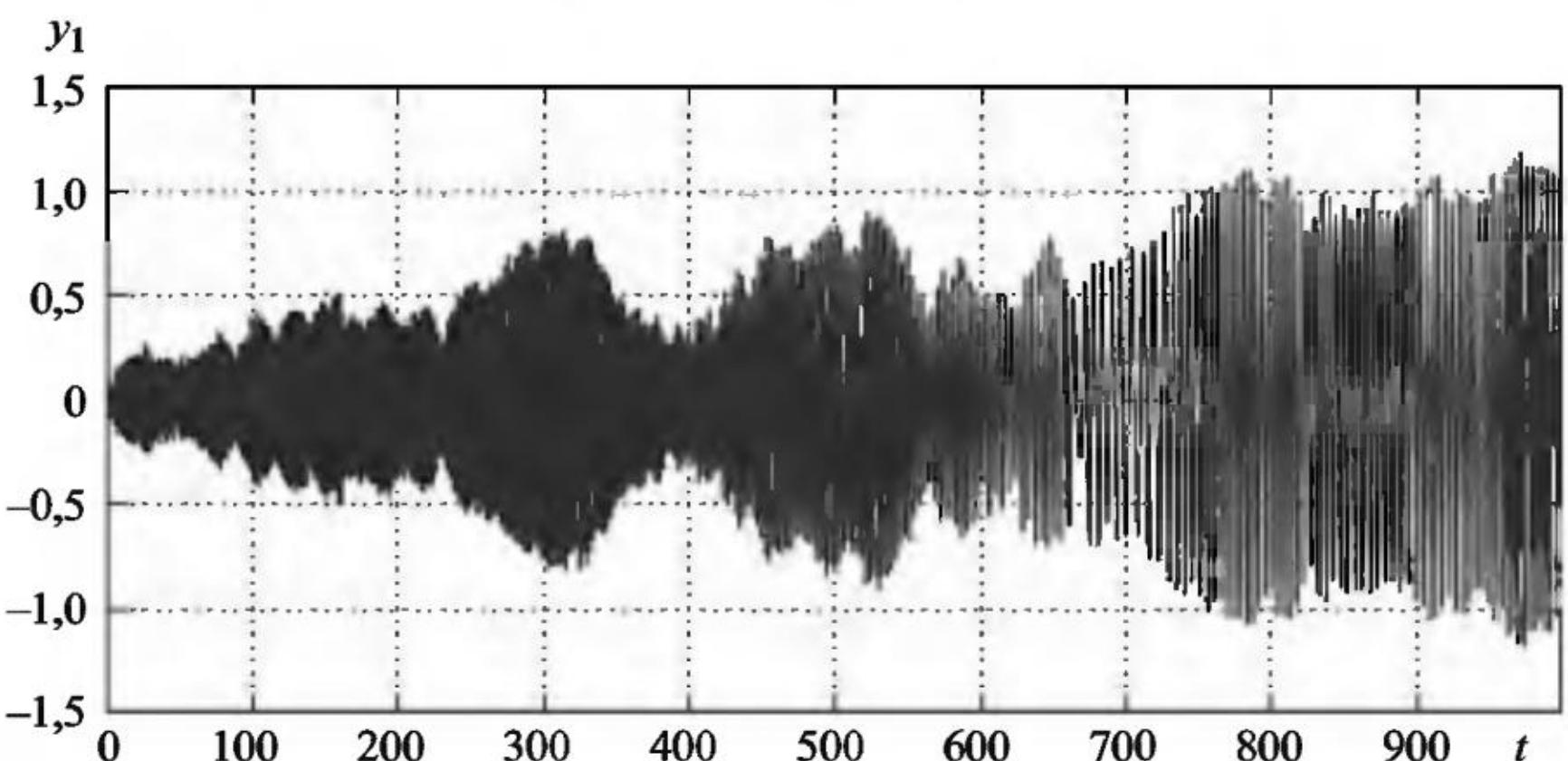


Рис. 3.4

График компоненты y_1 (рис. 3.4) и фазовый портрет пары компонент (y_1, y_2) одной смоделированной траектории решения системы СДУ (3.6) с шумом интенсивности $\sigma = 0,1$ (рис. 3.5) совершенно отличны от аналогичных графиков на рис. 3.1 и 3.2.

График оценки дисперсии $Dy_1(t)$ (рис. 3.6) показывает ее выход на стационарный уровень, что означает устойчивую работу регулятора Уатта при так заданной интенсивности внешнего шума.

График ЧИК (вид сбоку) на рис. 3.7 компоненты y_1 численного решения системы СДУ (3.6) дает полную картину динамики угла отклонения регулирующих шаров от вертикальной оси. Стоит также отметить, что ЧИК стабилизируется в размерах при продвижении по интервалу интегрирования $[0, 1000]$ и не наблю-

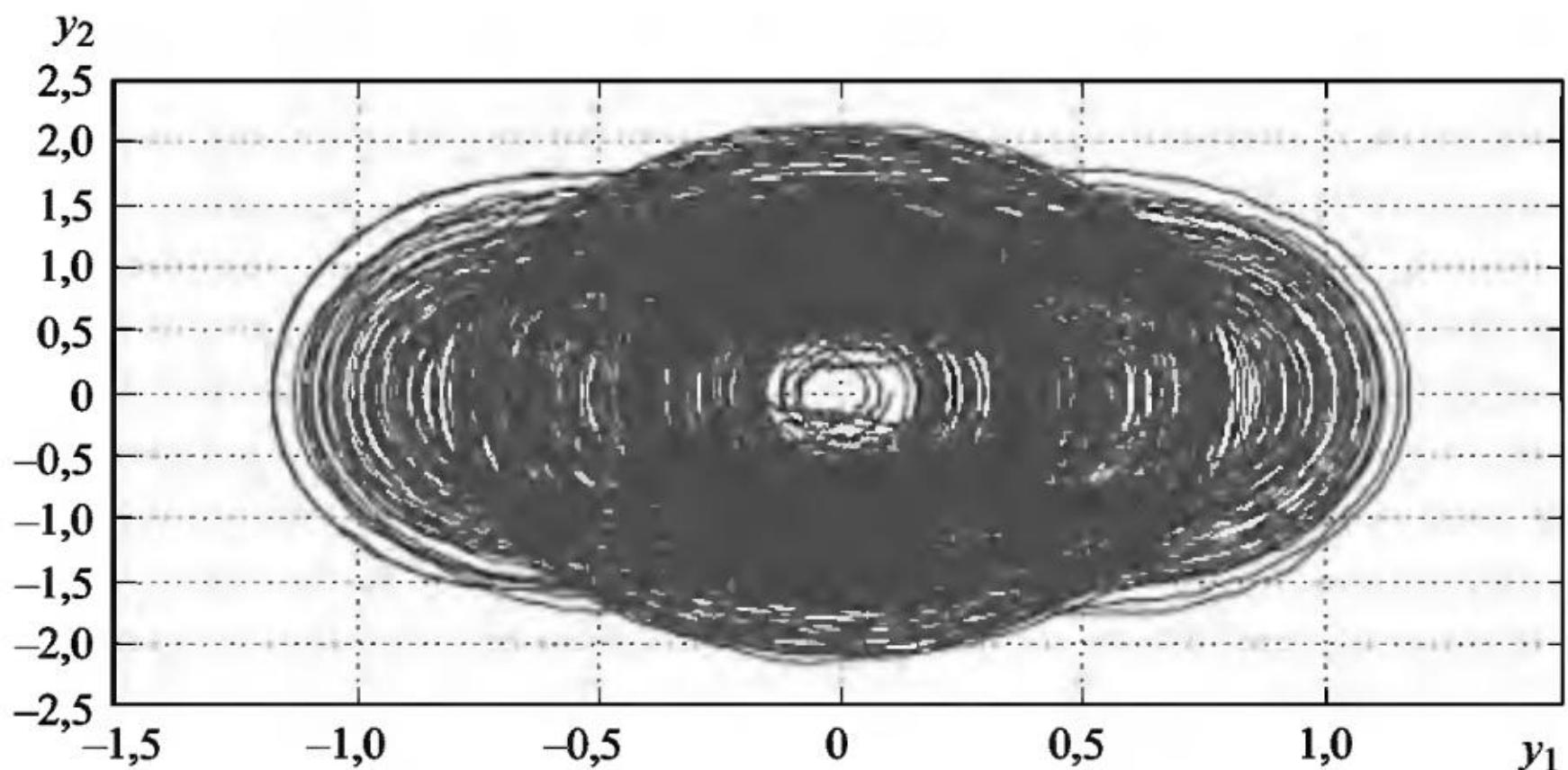


Рис. 3.5

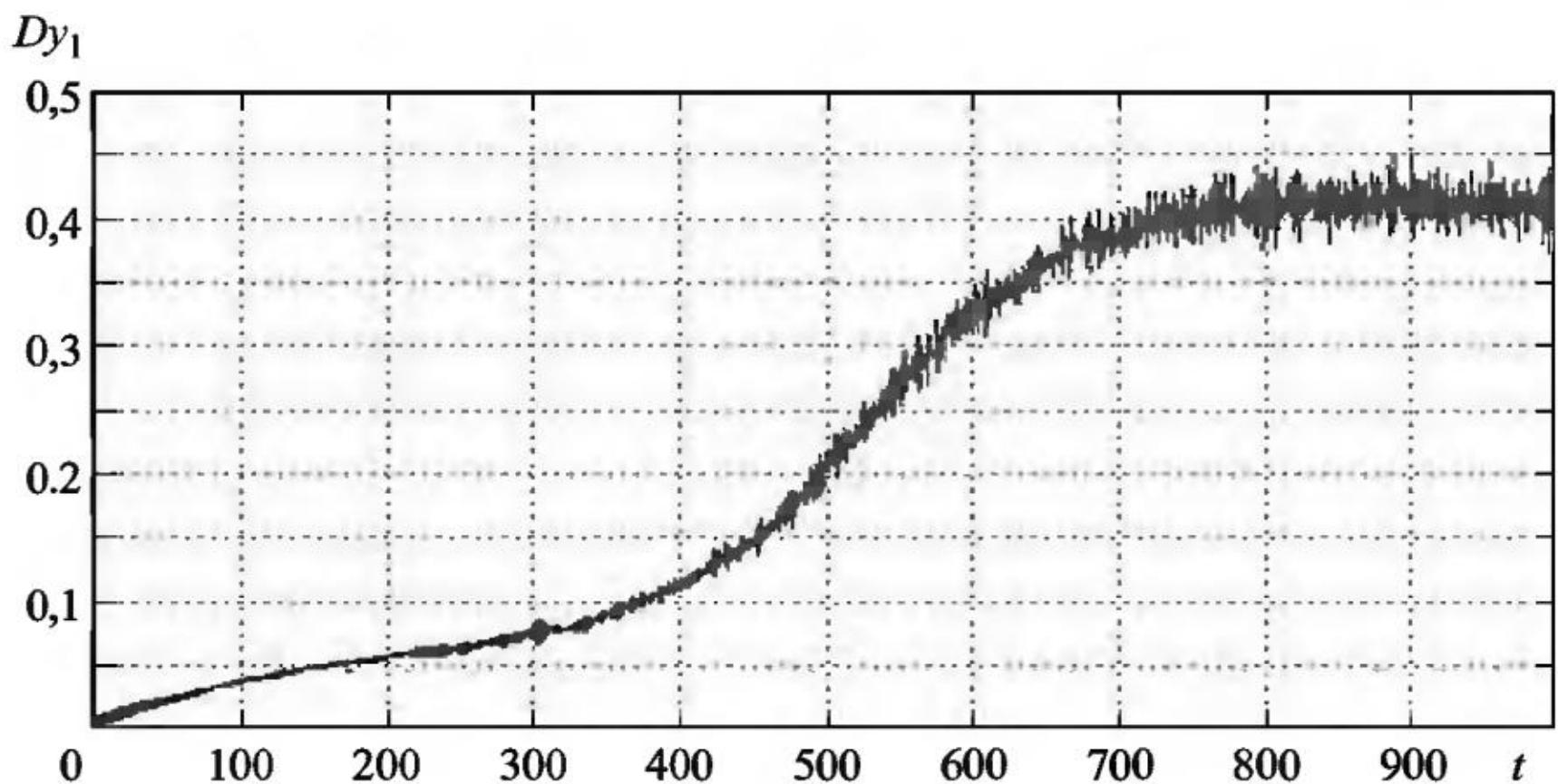


Рис. 3.6

дается резких скачков амплитуды колебаний компоненты y_1 , как это было при расчете решения сопутствующей системы ОДУ (см. рис. 3.1).

На рис. 3.8 дан график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (3.6), из которого также можно видеть все преимущественные амплитуды колебаний угла y_1 .

Как уже указывалось ранее, основные характеристики колебаний – это амплитуда, частота и форма, которые определяются параметрами системы. Анализируя графики ЧИК и ЧФП, особенно их изменения в процессе статистического моделирования, их размеры и форму, можно выявить особенности режимов колеба-

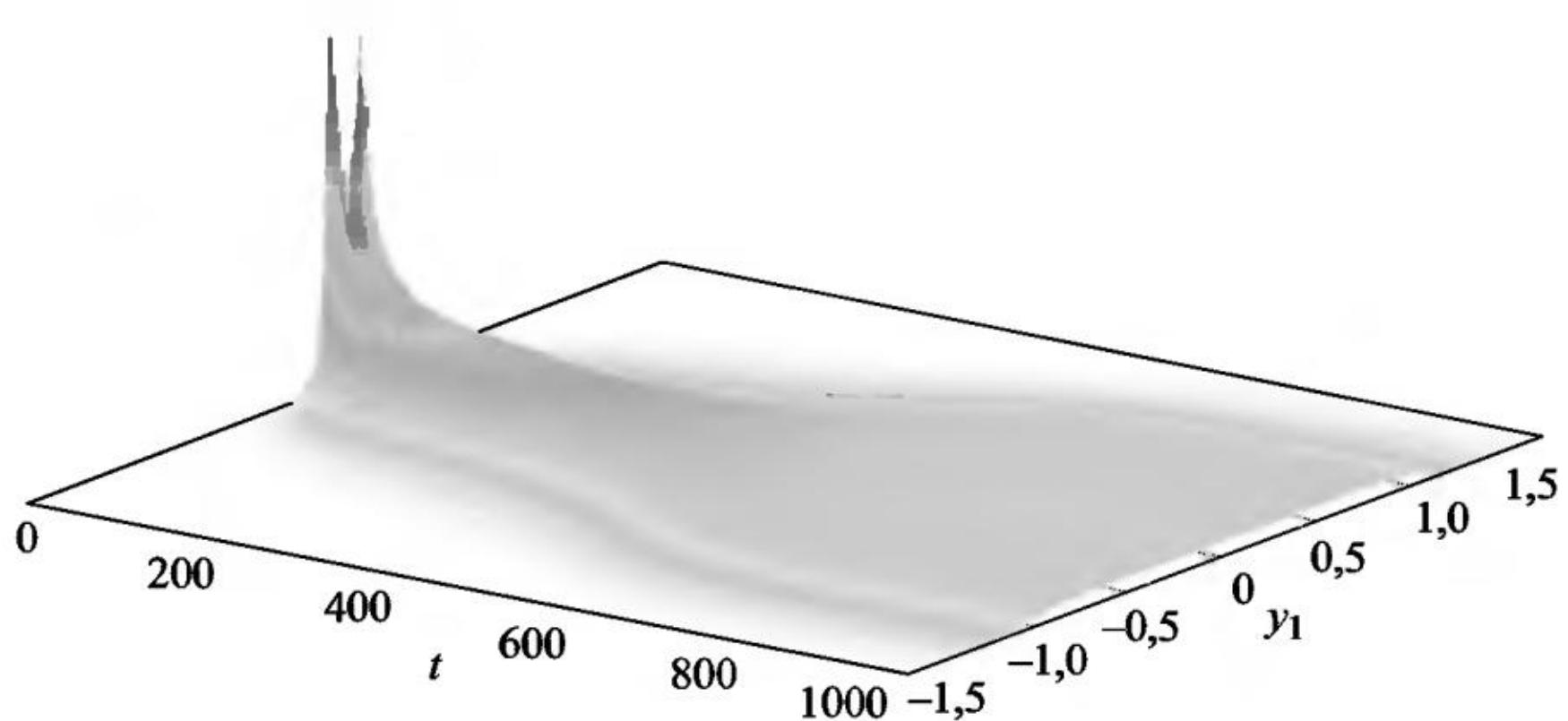


Рис. 3.7

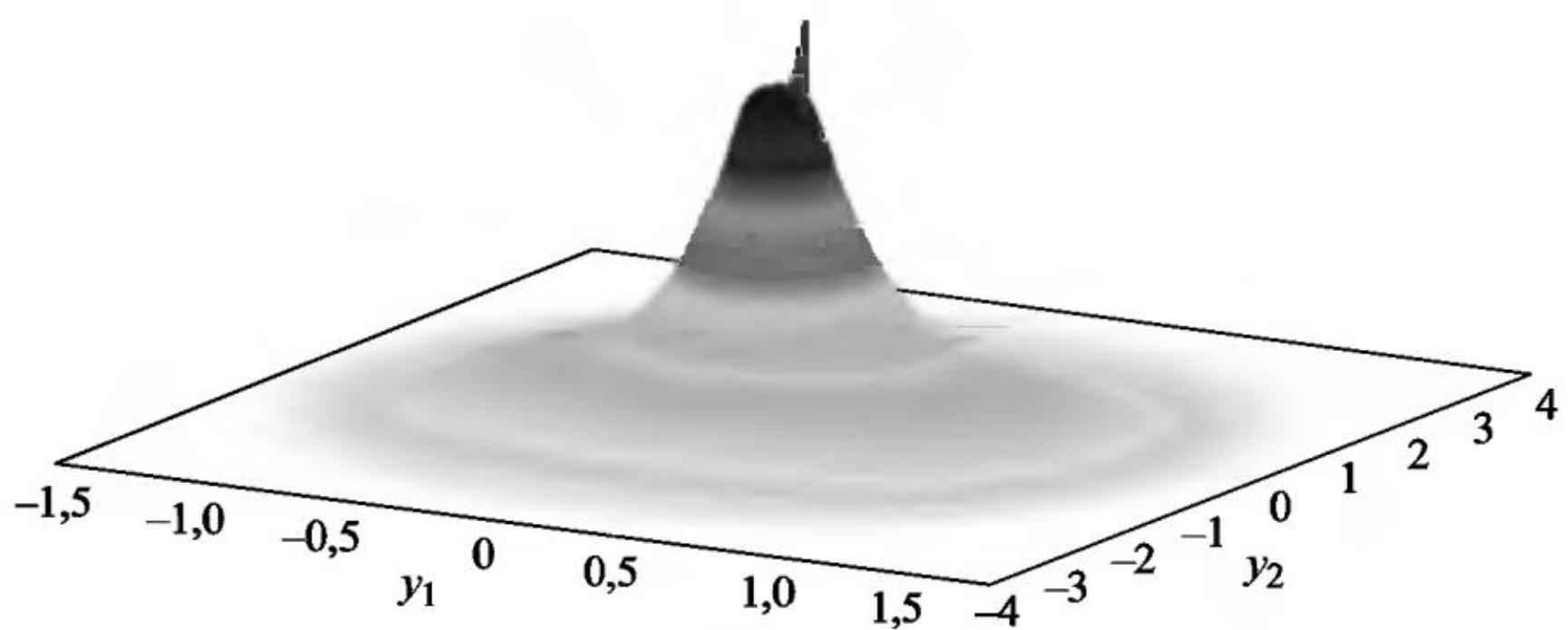


Рис. 3.8

ний. В частности, по кольцам на рис. 3.9 (ЧФП, вид сверху) можно судить о преобладающих амплитудах колебаний угла отклонения регулирующих шаров от вертикальной оси и угловой скорости вращения вокруг вертикальной оси.

Когда мы говорим об устойчивости движения, то понимаем под этим характер реакции динамической системы на малое возмущение ее состояния. Если сколь угодно малые изменения состояния системы начинают нарастать со временем, то система неустойчива. Анализ устойчивости режима функционирования динамической системы является чрезвычайно важным с практической точки зрения. Устойчивость таких систем, как автомобиль, воздушный или морской лайнеры, ракета, по отношению к возмущениям, которые всегда сопровождают их движение, безусловно жизненно важный фактор в самом прямом смысле этого слова. Еще более важной проблемой является анализ устойчивости слож-

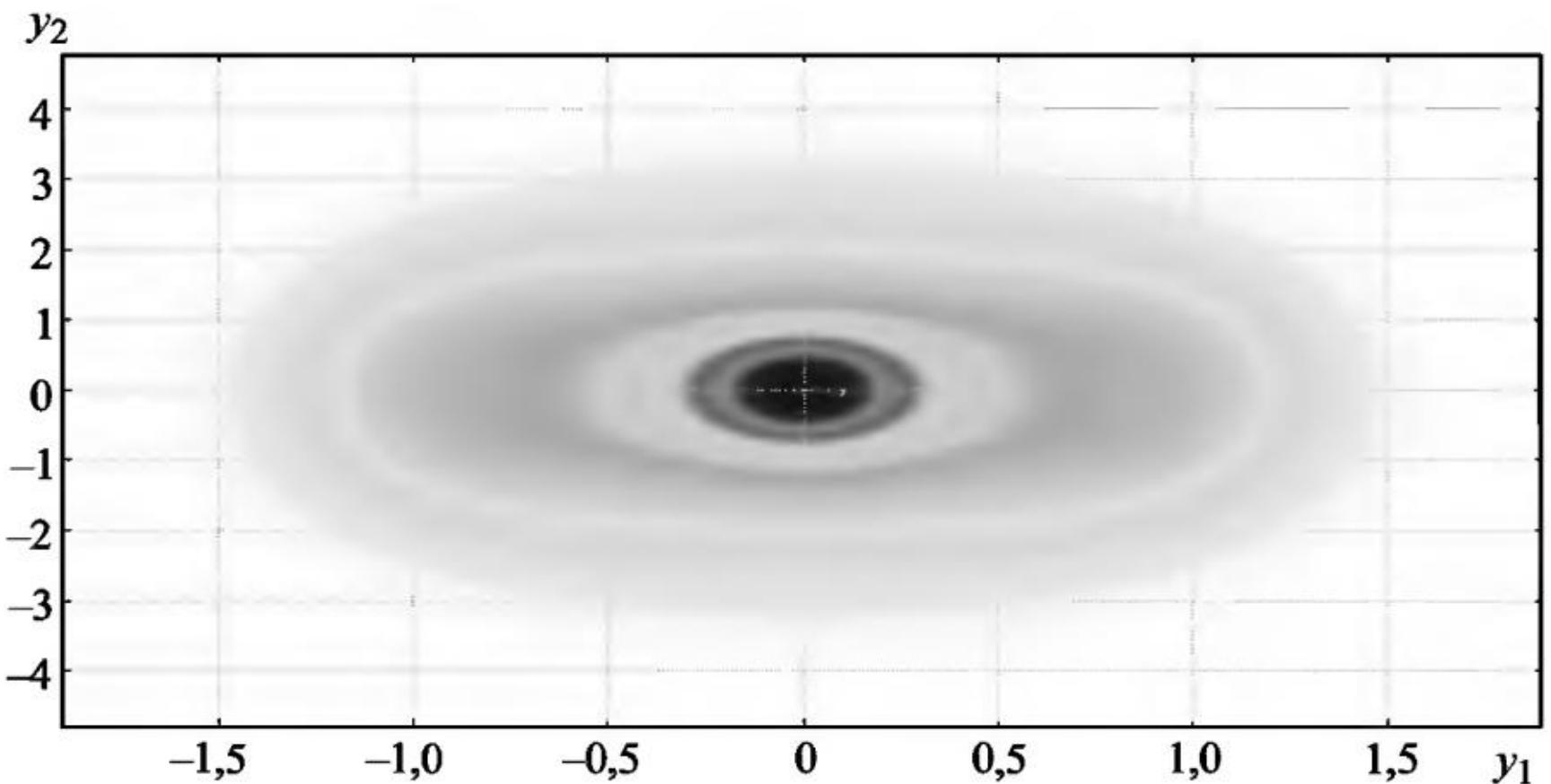


Рис. 3.9

ных, многокомпонентных систем. Наблюдая за эволюцией живой и неживой природы, можем заметить, что развитие той или иной сложной системы всегда сопровождается потерей устойчивости некоторыми режимами ее функционирования и рождением новых, устойчивых. Изменения могут накапливаться плавно, а могут происходить скачком в виде катастроф. Формирование новых структур всегда сопровождается потерей устойчивости (даже разрушением) предшествующих. Если предшествующий режим потерял устойчивость, то при этом система выбирает новый устойчивый режим, который может наследовать некоторые свойства предыдущего, а может быть и резко отличным [2]. В таких случаях говорят о бифуркациях динамических систем. Поведение неустойчивых систем интересней и неожиданней поведения устойчивых систем: зачастую неустойчивость приводит не просто к потере равновесия, но к проявлению качественно новых эффектов – например, к переходу вещества из одного состояния в другое или к самопривольному зарождению порядка в хаотической среде. В критическом состоянии малое событие может привести к катастрофе. При этом появляются такие эффекты, как ветвление, скачки, катастрофы и т. п.

Под устойчивостью решения системы ОДУ обычно понимается соответствующий характер реакции решения на малое возмущение ее начального состояния. Если при решении систем ОДУ обычно имеют дело с устойчивым поведением траекторий решения, т. е. малые возмущения затухают со временем, то в случае со СДУ скорее наоборот, приходится моделировать системы, у которых шумы в правой части вызывают рост дисперсии компо-

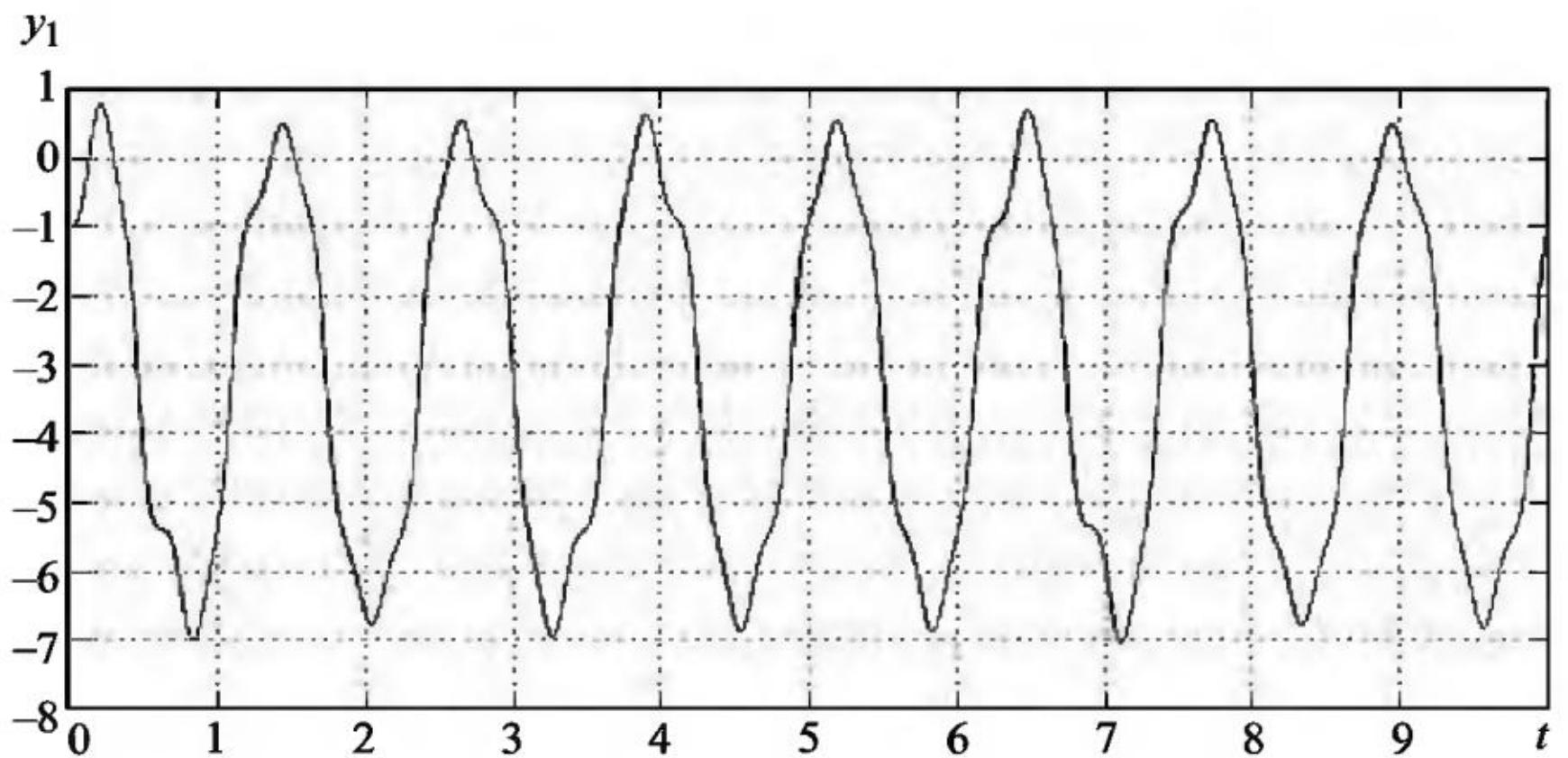


Рис. 3.10

нент решения, что, в конечном счете, приводит к резкому изменению поведения решений, причем изменения могут происходить скачком в виде катастроф. Приходится учитывать, что с ростом дисперсии возникает необходимость увеличения объема ансамбля моделируемых траекторий, а так как это невозможно осуществить в процессе счета, то большие объемы приходится задавать перед началом счета. На суперкомпьютере в проведенных численных экспериментах количество моделируемых траекторий доводилось до 10^{12} . При этом приходится интегрировать с очень мелким шагом, так как в противном случае может проявиться эффект неустойчивости численного решения, хотя точное решение устойчиво.

Для СДУ имеются различные определения устойчивости: в среднем, в среднеквадратичном, в слабом смысле. Так СДУ (1.2) и (1.3) устойчивы в среднем, если $\alpha < 0$, а в среднеквадратичном при $\alpha < 0$ для (1.2) и $\alpha < -\frac{\sigma^2}{2}$ для (1.3). Пример расчета неустойчивого в среднеквадратичном линейного колебательного контура с мультипликативными шумами приведен в разделе 9.

Пример 3.2. Следующая система СДУ с аддитивным шумом описывает движения осциллятора и ротора:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= -1, \\ dy_2 &= \left(1 - 4\pi^2(1 + 10\sin(10t))\sin(y_1) - 0,1y_2\right)dt + \sigma dw(t), & y_2(0) &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Графики траектории компоненты y_1 решения системы СДУ (3.7) без шума ($\sigma = 0$) (рис. 3.10) и с шумом ($\sigma = 10$) (рис. 3.11) рассчитаны на интервале $[0, 10]$ с малым размером шага интегри-

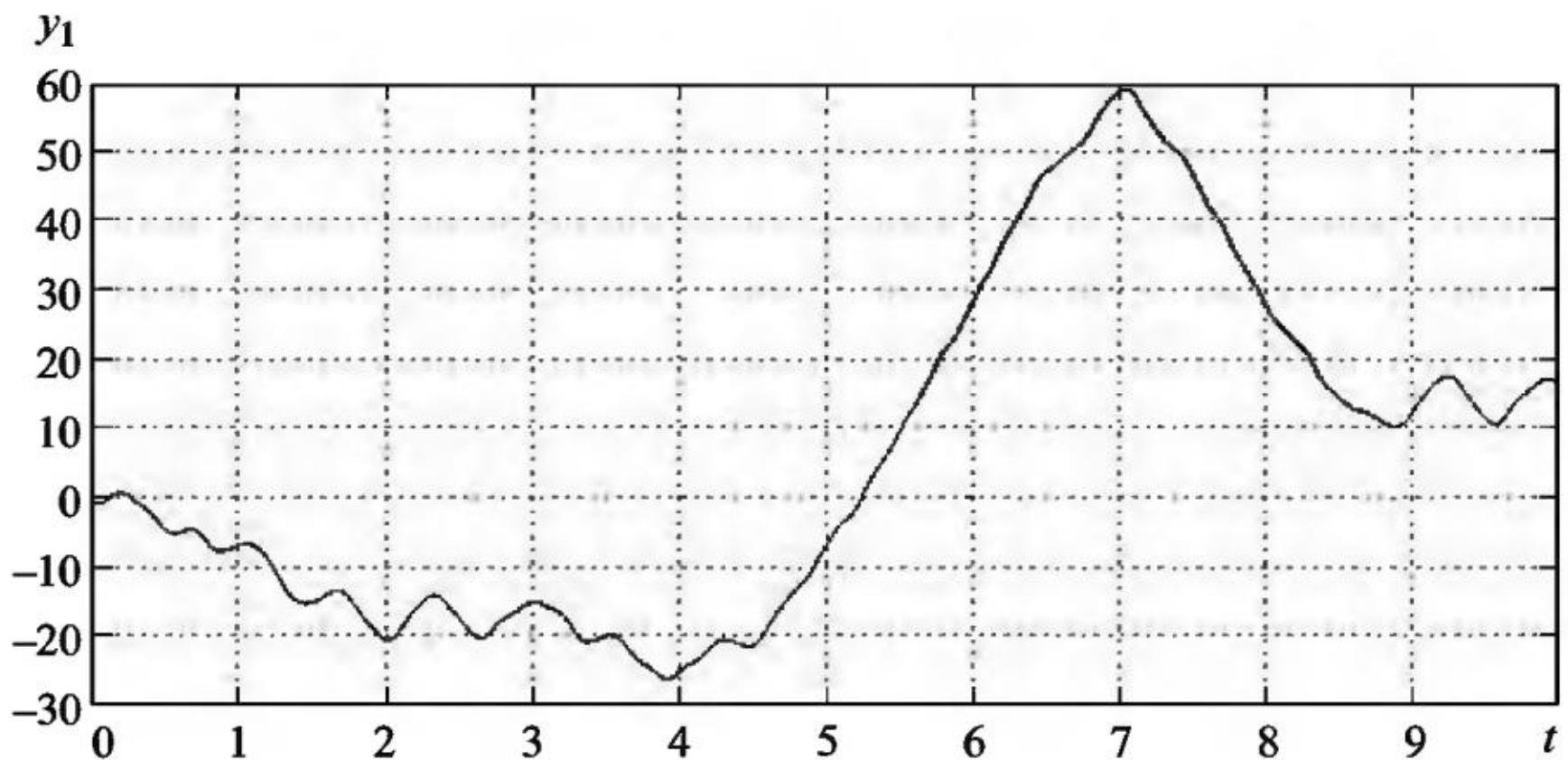


Рис. 3.11

рования $h=10^{-5}$, так как при больших размерах шага наступает численная неустойчивость схемы Эйлера. Как видим, внешний шум большой интенсивности полностью нарушает гармонические колебания компоненты и увеличивает диапазон изменения смоделированных значений $y_1(t)$.

Из вида графиков ЧИК (вид сбоку и сверху) на рис. 3.12 и 3.13 компоненты $y_1(t)$ численного решения системы СДУ (3.7) сразу, без дополнительных расчетов, можно сделать заключение о выходе преобладающего количества смоделированных траекторий, а значит, и математического ожидания $Ey_1(t)$, в отрицательную область, а также о росте дисперсии $Dy_1(t)$ вдоль интервала интегрирования.

Действительно, график оценки дисперсии компоненты y_1 решения системы СДУ (3.7) на рис. 3.14 демонстрирует сильный рост, что говорит о неустойчивости решения системы СДУ (3.7).

Графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (3.7) без шума ($\sigma = 0$) (рис. 3.15) и с шумом ($\sigma = 10$) (рис. 3.16) совершенно различны.

На рис. 3.17 приведен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (3.7) при $\sigma = 10$, из вида которого можно сделать вывод о сильном нарушении осцилляций у всего ансамбля смоделированных траекторий, хотя контур, подобный рис. 3.15, просматривается.

Для сравнения на рис. 3.18 приведен аналогичный график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (3.7) с шумом меньшей интенсивности $\sigma = 1$, на котором хорошо видны идентичные колебания всего ансамбля смоде-

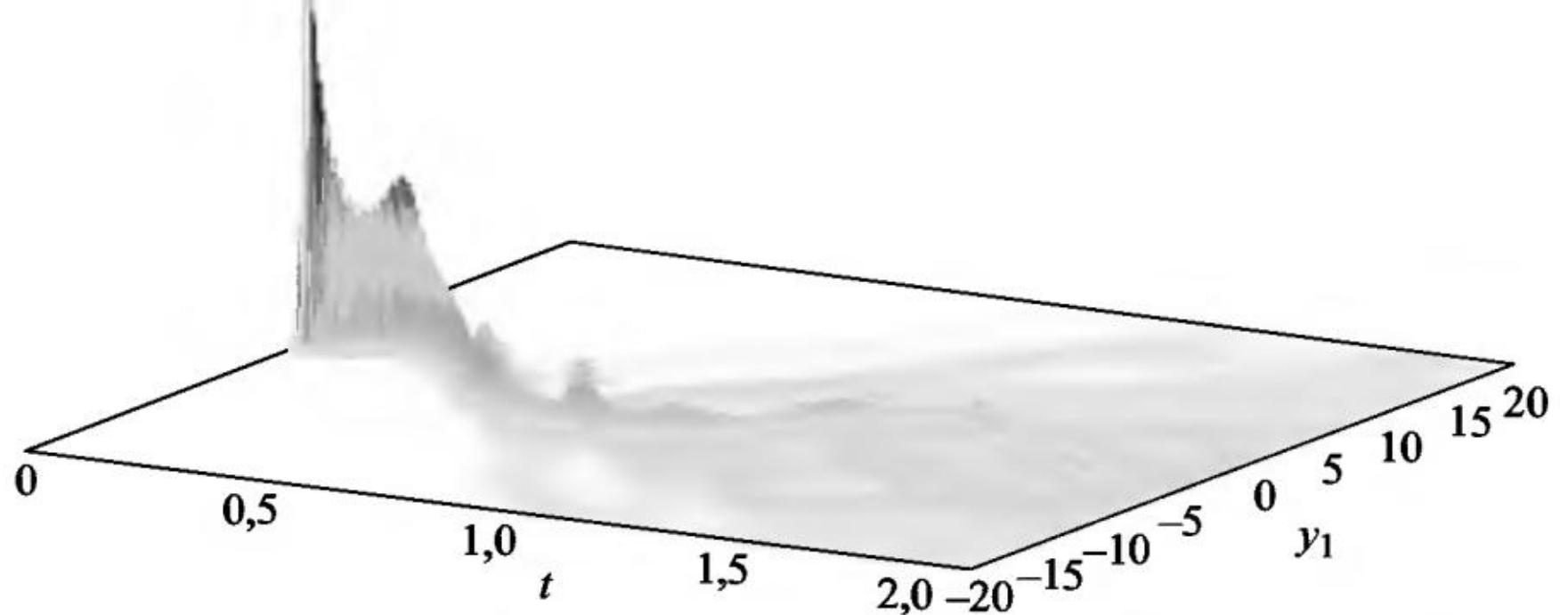


Рис. 3.12

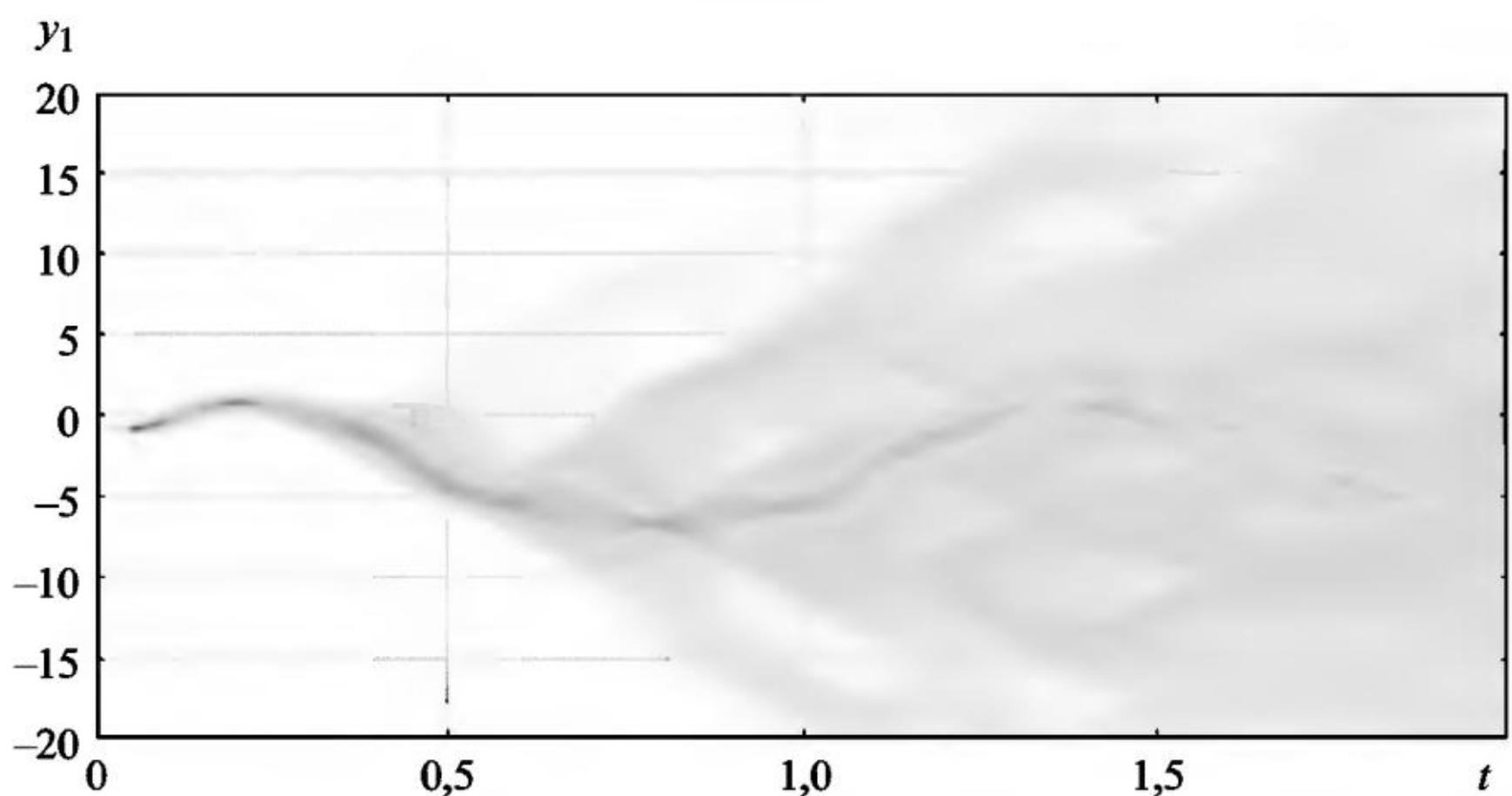


Рис. 3.13

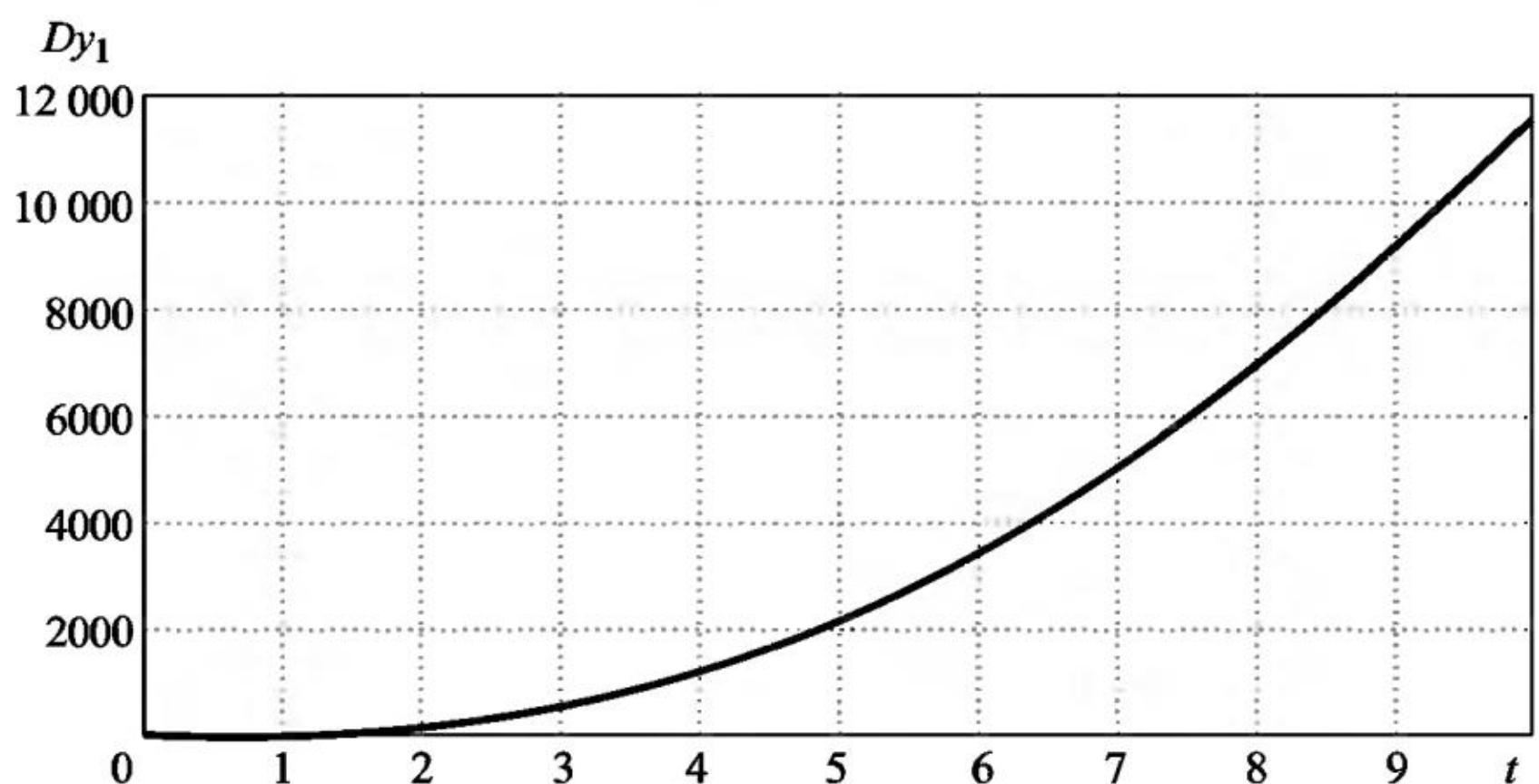


Рис. 3.14

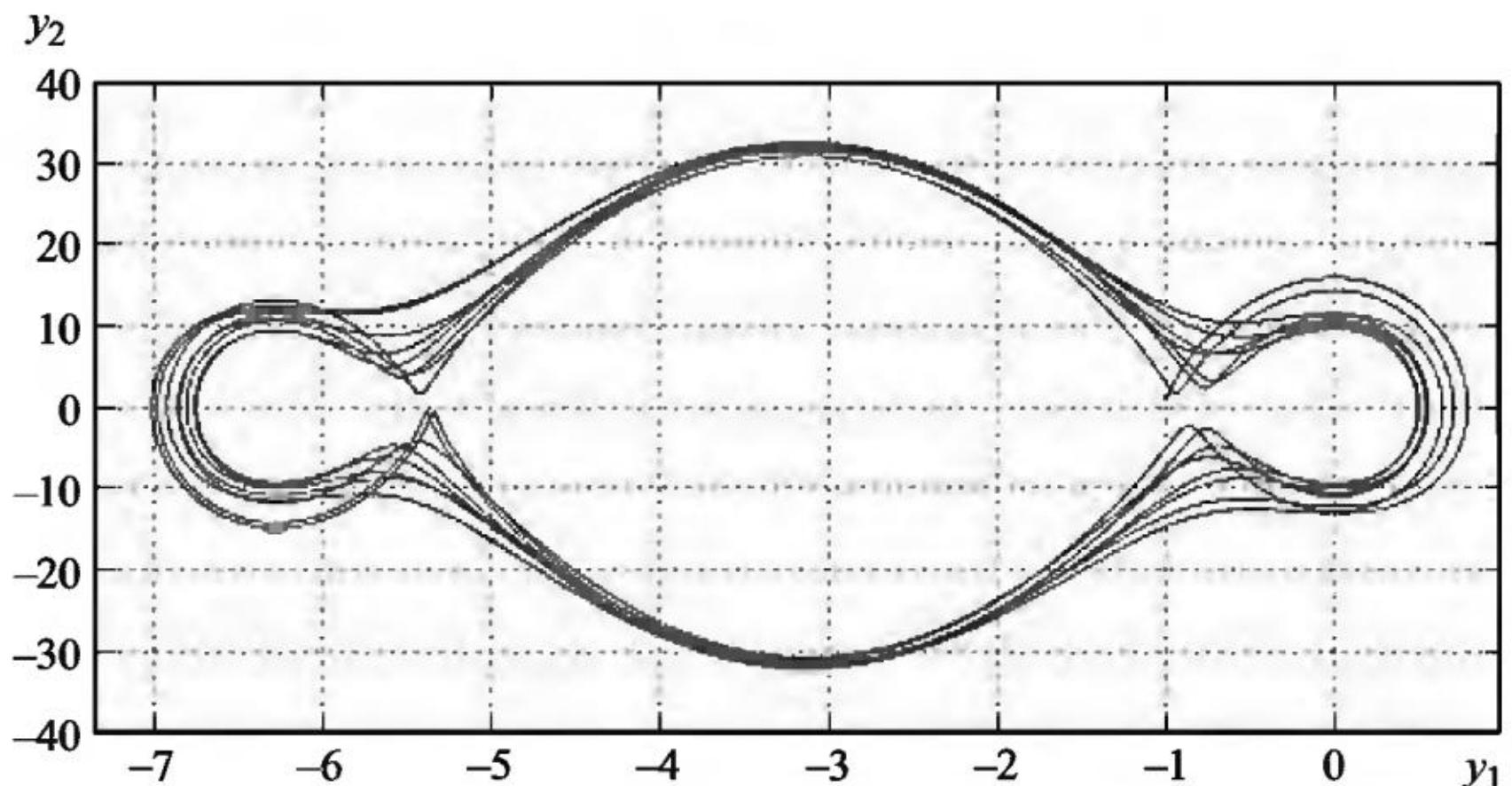


Рис. 3.15

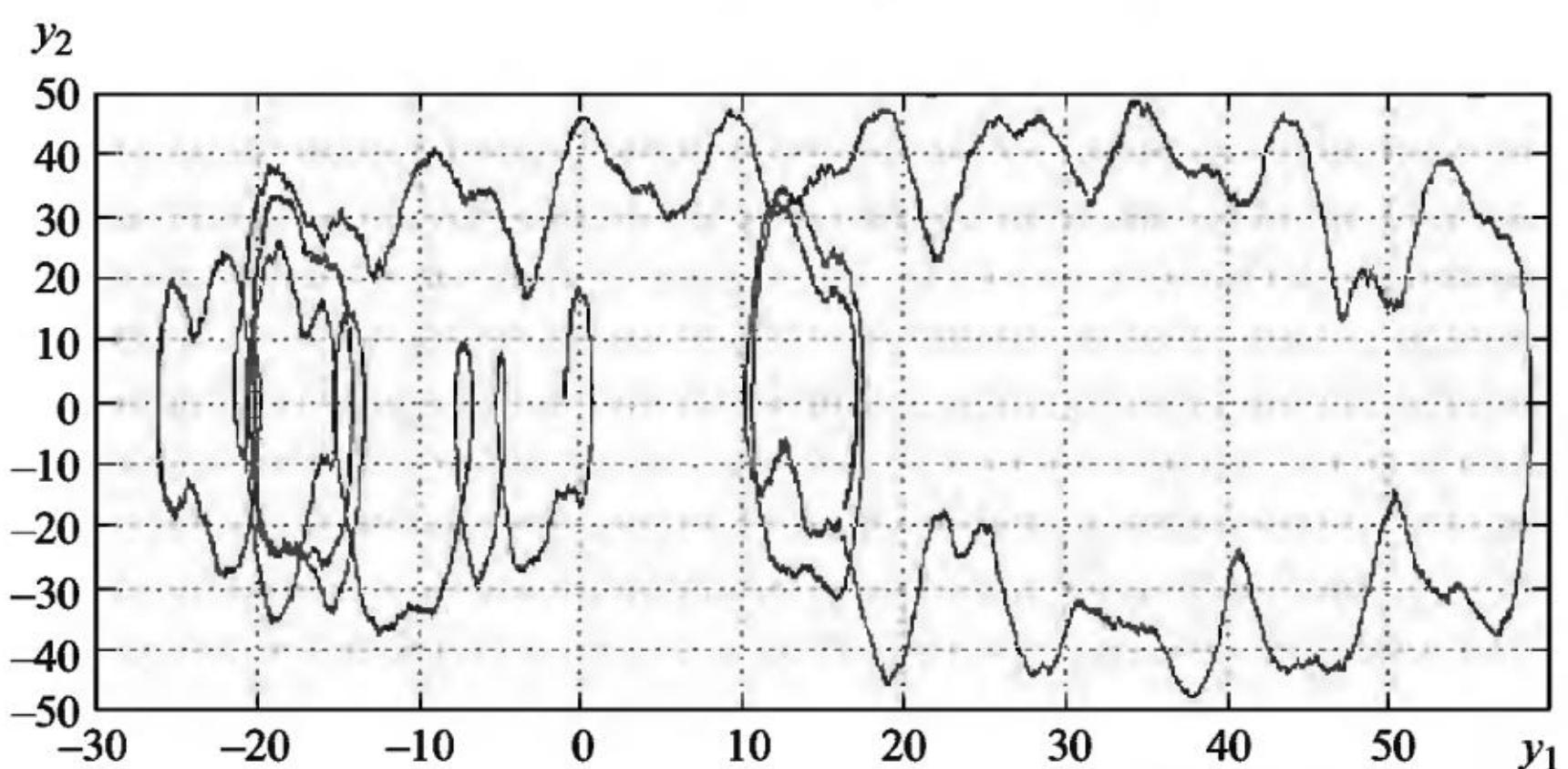


Рис. 3.16

лированных траекторий и который совершенно подобен графику на рис. 3.15.

Пример 3.3. Моделируется система, относящаяся к ограниченной задаче трех тел, в которой масса одного из тел пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других тел. В таком случае можно пренебречь влиянием тела малой массы («легкого» тела) на движение массивных тел. Оказывается, что даже ограниченная задача трех тел в общем случае не имеет аналитического решения. При некоторых значениях параметров системы и начальных условиях движение «легкого» тела становится нерегулярным, хаотическим, несмотря на детерминистский характер задачи.

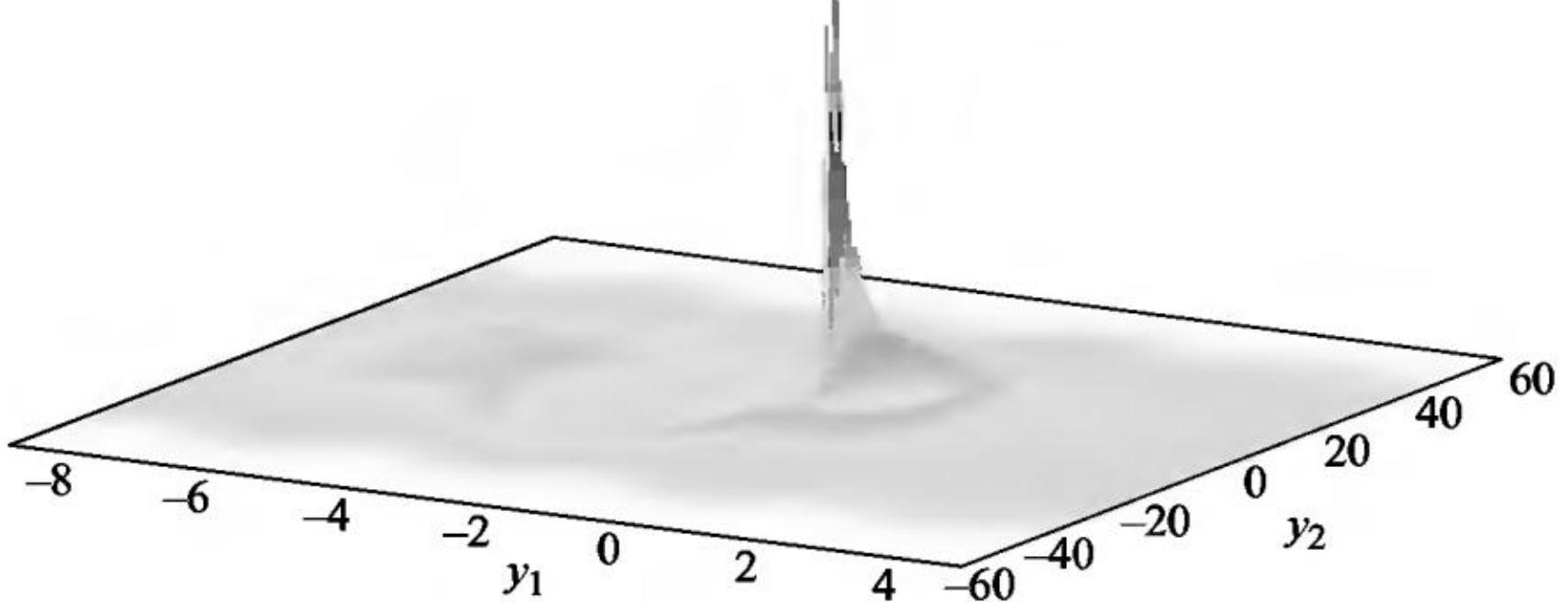


Рис. 3.17

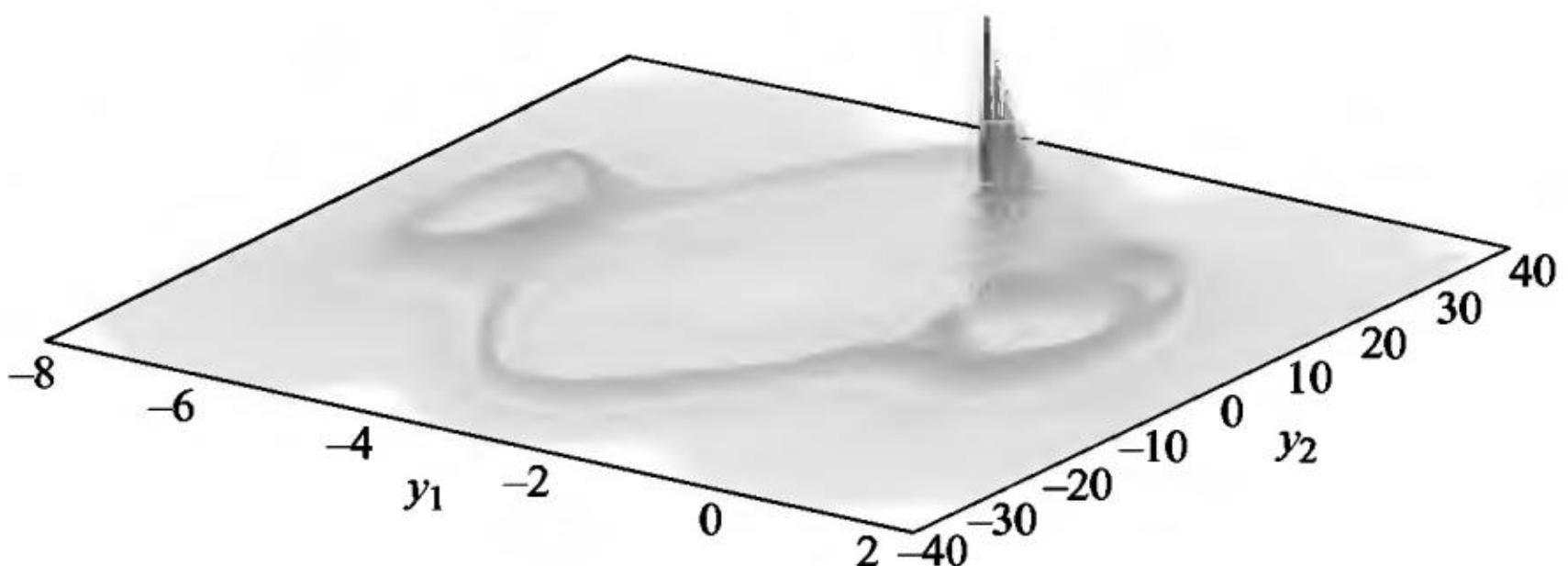


Рис. 3.18

Система СДУ (3.8) с аддитивным и мультипликативным шумами описывает круговое движение в некоторой плоскости трех тел, одно из которых пренебрежимо малой массы:

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= y_3 dt, & y_1(0) &= 0,994, \\
 dy_2 &= y_2 dt, & y_2(0) &= 0, \\
 dy_3 &= \left(y_1 + 2y_4 - \mu_1 \frac{y_1 + \mu_2}{D_1} - \mu_2 \frac{y_1 - \mu_1}{D_2} \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_3(0) &= 0, \\
 dy_4 &= \left(y_2 - 2y_3 - \mu_1 \frac{y_2}{D_1} - \mu_2 \frac{y_2}{D_2} \right) dt + \sigma_2 y_2 dw_2(t), & y_4(0) &= -2,015851063791. \\
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь y_1, y_2 – координаты третьего малого тела на плоской орбите, $\mu_2 = 0,012277471$, $\mu_1 = 1 - \mu_2$, $D_1 = \sqrt{\frac{3}{((y_1 + \mu_2)^2 + y_2^2)}}$,

$D_2 = \left((y_1 - \mu_1)^2 + y_2^2 \right)^{\frac{3}{2}}$. На рис. 3.19 приведен график компоненты y_1 решения сопутствующей системы ОДУ на интервале интегрирования $[0, 100]$.

На рис. 3.20 приведен график фазовой траектории (y_1, y_2) также без шумов, полученный на интервале интегрирования $[0, 20]$ с шагом $h = 10^{-5}$.

График фазовой траектории (y_1, y_2) на рис. 3.21 получен также с шагом $h = 10^{-5}$, но на длинном интервале интегрирования $[0, 300]$, который совершенно отличается от графика на рис. 3.20 и демонстрирует неустойчивый характер поведения численного решения сопутствующей системы ОДУ.

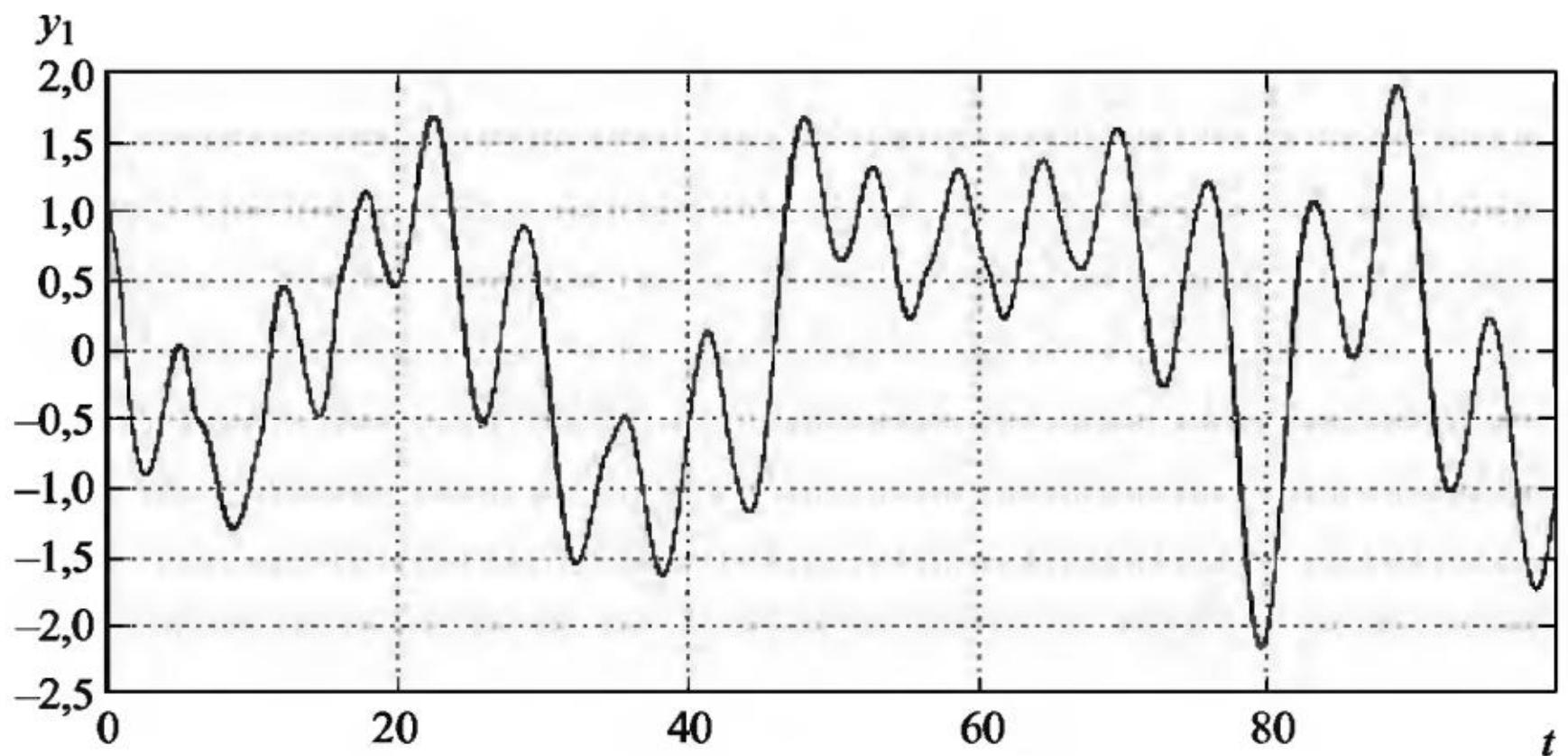


Рис. 3.19

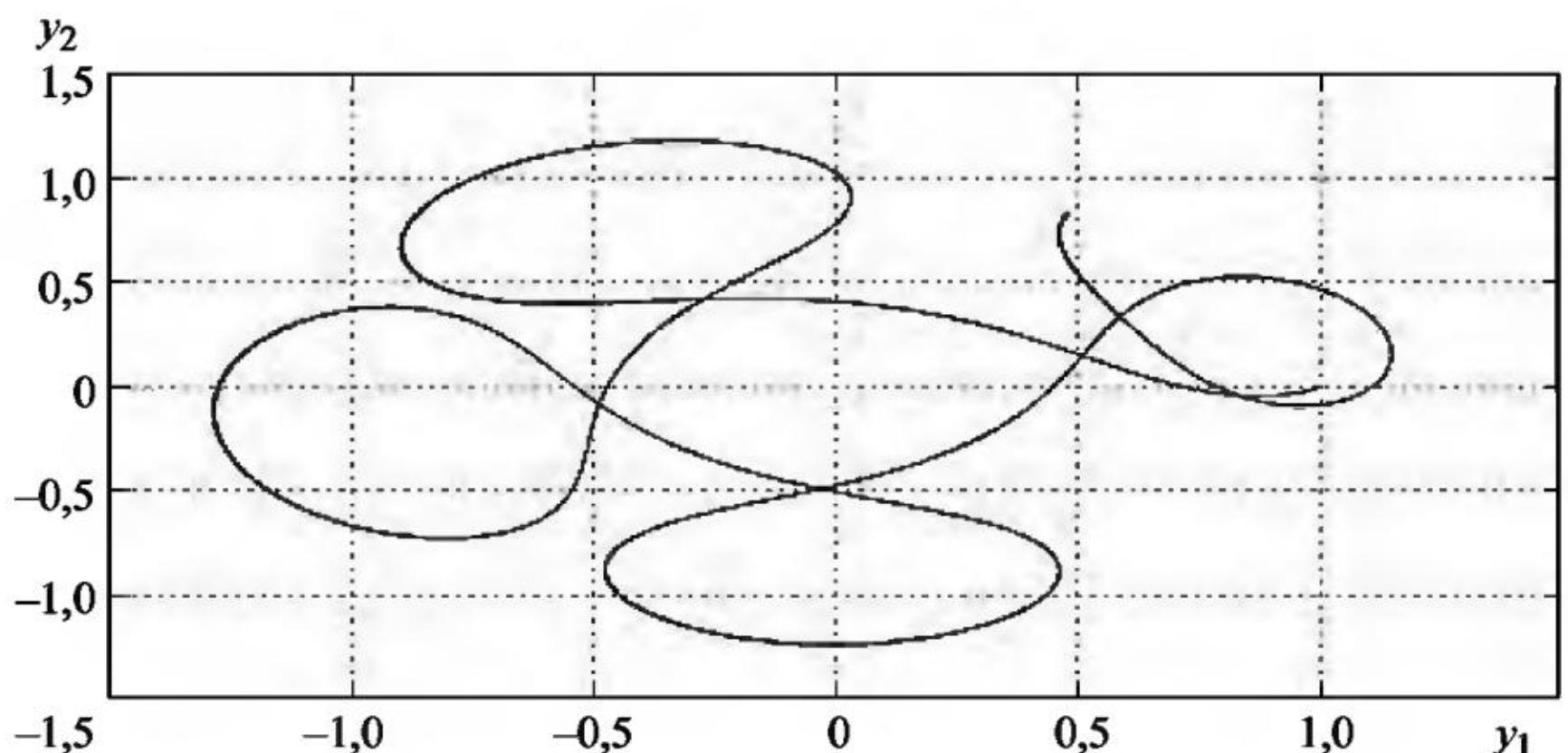


Рис. 3.20

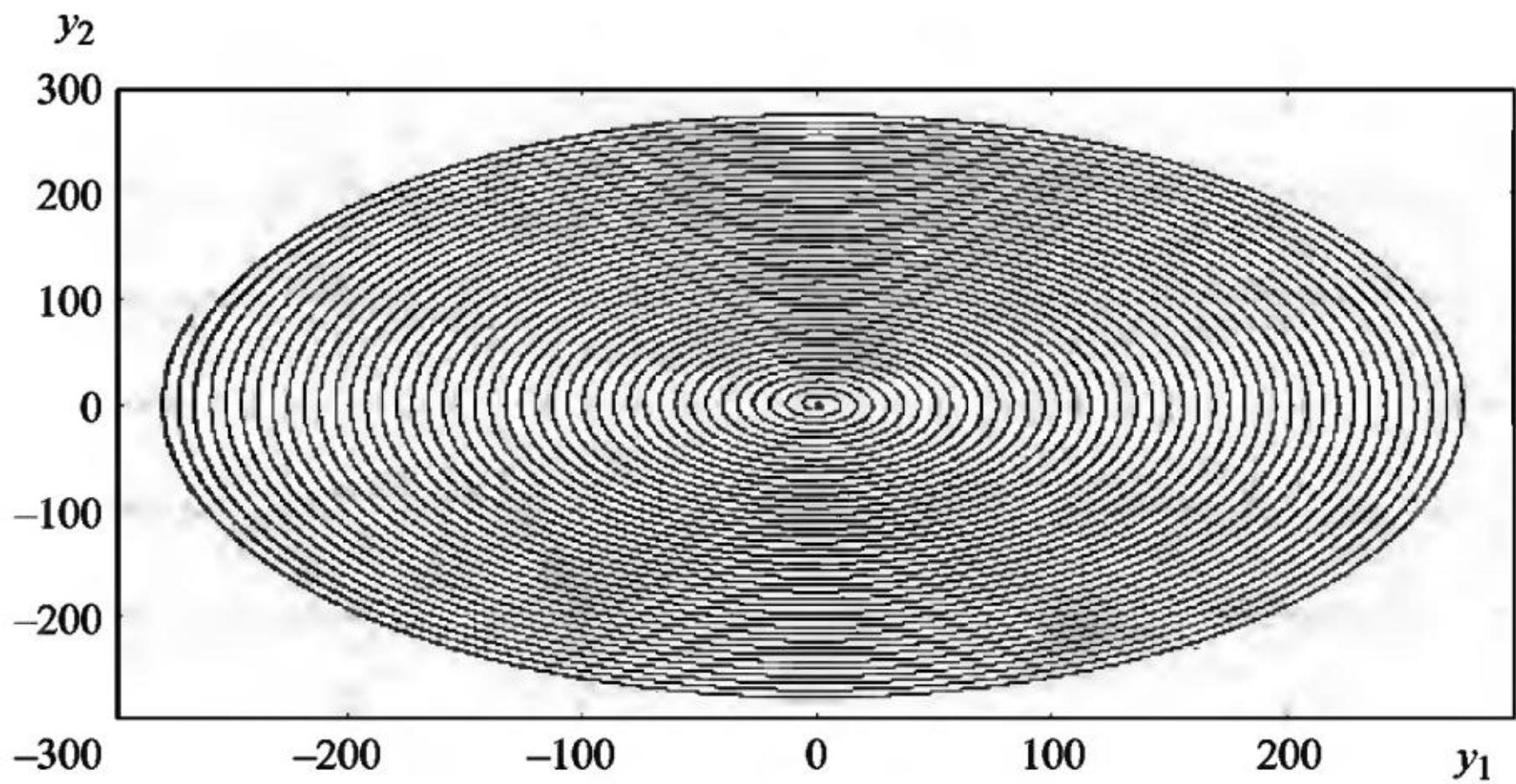


Рис. 3.21

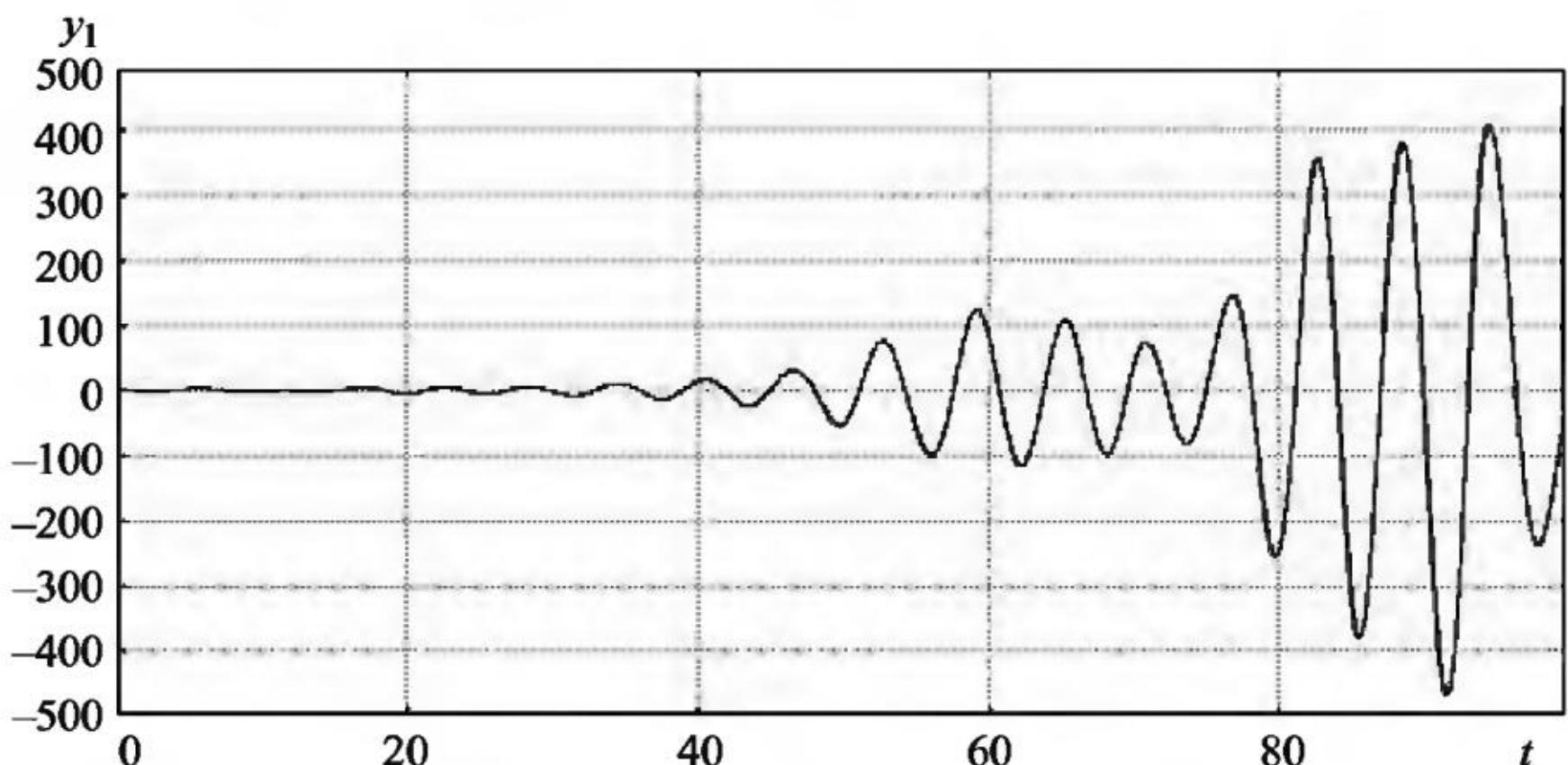


Рис. 3.22

На рис. 3.22 и 3.23 приведены графики интегральной кривой и фазовой траектории, смоделированные с шумами малой интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$ и заметно отличающиеся от аналогичных графиков сопутствующих ОДУ на рис. 3.19 и 3.21, имеющих совершенно другие режимы колебаний.

На рис. 3.24 и 3.25 приведены графики ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 и ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (3.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$.

Из вида графиков ЧИК и ЧФП можно заключить, что воздействие внешних даже малых случайных возмущений полностью нарушает режим колебаний малого тела и оно достаточно быстро уходит из-под влияния больших тел.

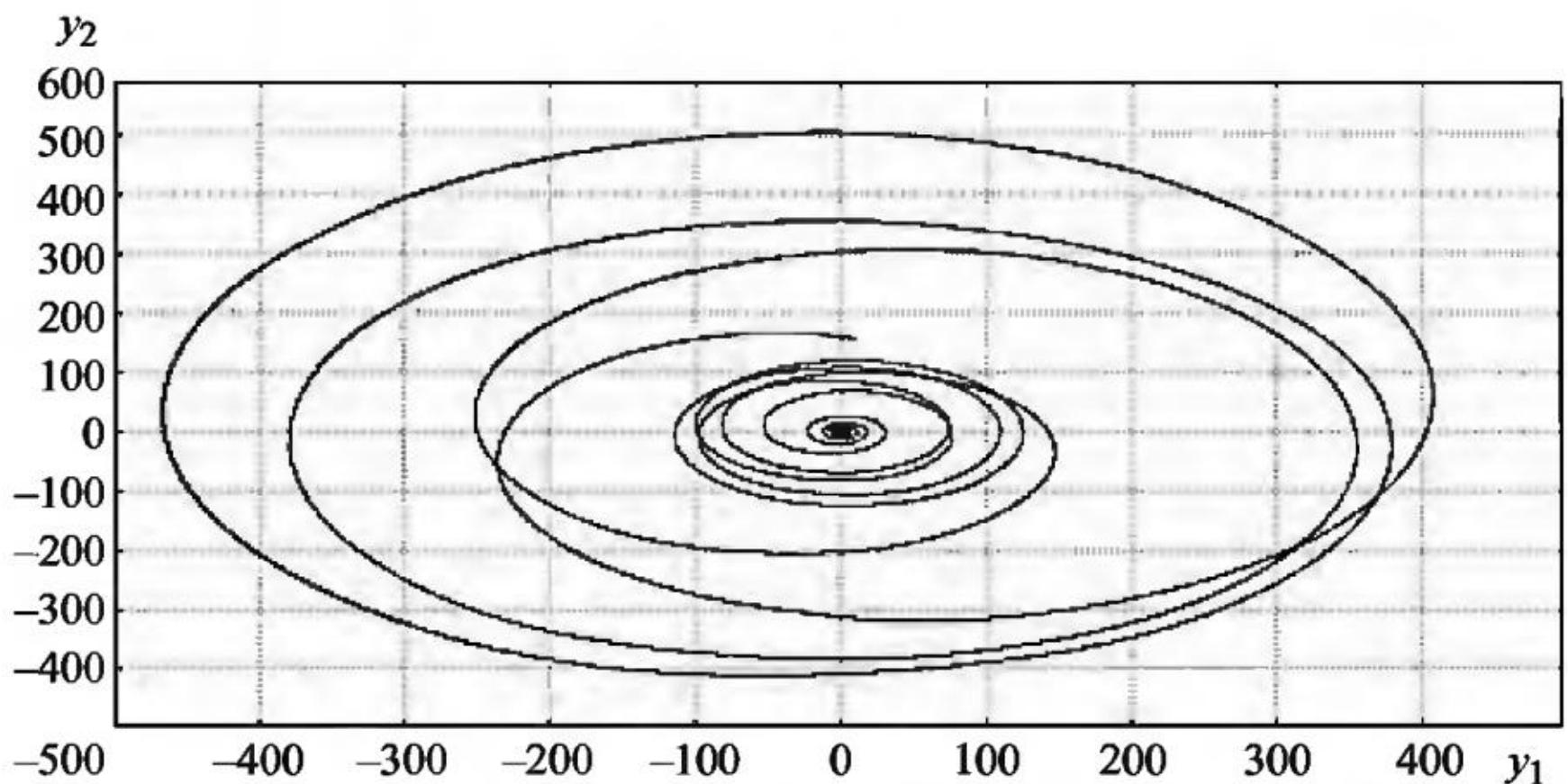


Рис. 3.23

Синхронизация колебаний – это установление и поддержание такого режима колебаний двух или нескольких связанных систем, при котором их частоты равны, кратны или находятся в рациональном отношении друг с другом. В отсутствие взаимодействия частоты колебаний этих систем могут быть любыми. Различают взаимную синхронизацию связанных систем, при которой каждая из систем действует на другие и частота синхронных колебаний отличается от исходных частот, и принудительную синхронизацию или захватывание частоты, при которой связь между системами такова, что одна из них (синхронизирующая) влияет на другую (синхронизируемую), а обратное влияние исключено; в этом случае устанавливается колебание с частотой синхронизирующей системы. При взаимной синхронизации двух связанных генераторов, сильно различающихся по мощности, более мощный генератор играет роль синхронизирующего, а менее мощный — синхронизируемого. Этот случай является переходным от взаимной синхронизации к принудительной. Применения синхронизации обширны. Так, синхронизация позволяет генераторам переменного тока, синхронным моторам и другим нелинейным системам входить в синхронный режим и устойчиво работать в пределах конечной полосы частот, а также позволяет нескольким генераторам устойчиво работать на общую сеть энергосистемы или нескольким радиопередатчикам на одну антенну. Больным с нарушением ритма сердца вживляют электронный синхронизатор сердечного ритма (так называемый кардиостимулятор). Взаимная синхронизация наблюдается в системах с числом степеней свобо-

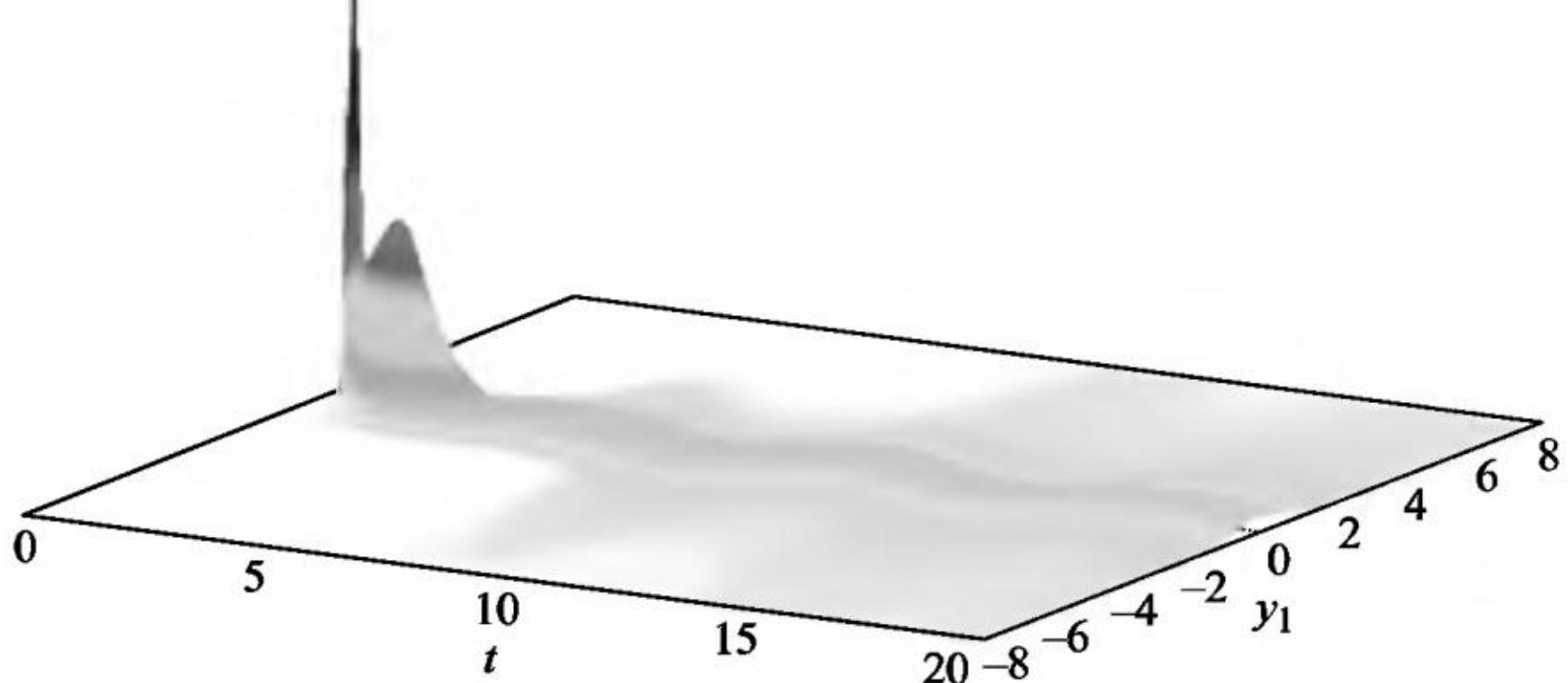


Рис. 3.24

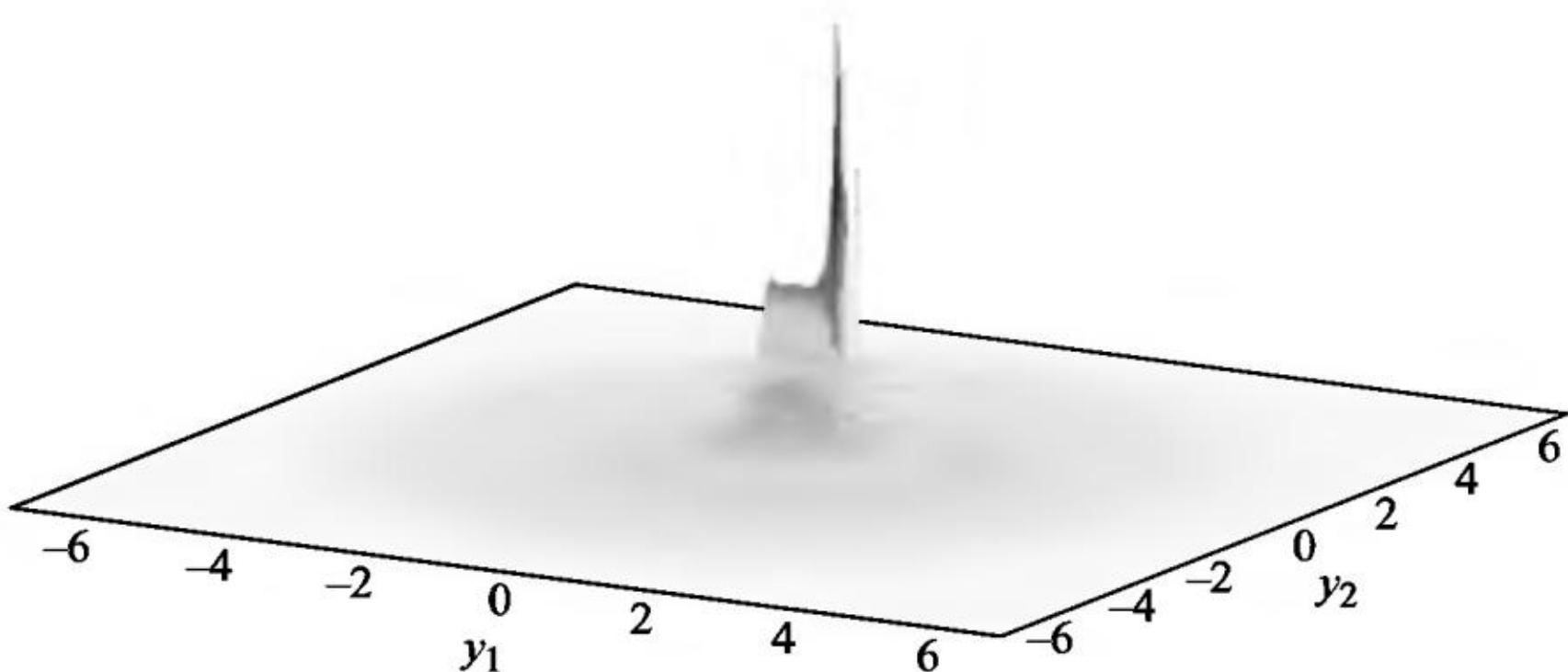


Рис. 3.25

ды больше двух, и во многих ситуациях после разрушения режима синхронизации возможно возникновение стохастических автоколебаний. Явление синхронизации наблюдается не только в случае, когда частоты парциальных генераторов близки друг к другу, но и когда они близки к кратным друг друга (синхронизация на гармониках и субгармониках).

Описание различных систем в терминах взаимодействующих осцилляторов используется в радиофизике, микроволновой электронике, биофизике, химии. Простейшей такой системой, имеющей универсальный для теории колебаний характер, являются связанные осцилляторы Ван-дер-Поля. Популярны также модели типа классического брюсселятора, разнообразных радиофизических генераторов. Оказывается, что даже два связанных автоколебательных элемента демонстрируют весьма разнообразную картину возможных эффектов. Прежде всего, это такие классические

эффекты, как «биения» (квазипериодические колебания) и взаимный захват осцилляторов с различным соотношением частот. В случае диссипативной связи также возможен эффект гашения («гибели») колебаний, который состоит в том, что диссипативная связь подавляет автоколебания осцилляторов так, что состояние равновесия в начале координат из неустойчивого становится устойчивым. При этом осцилляторы должны быть достаточно отстроены друг от друга по частоте, так как в противном случае диссириация не может скомпенсировать воздействие одного осциллятора на другой и возникает режим синхронизации.

Возникает естественный вопрос: как различные случайные возмущения влияют на синхронизацию колебаний? Для изучения этого вопроса достаточно перейти от синхронизируемой системы ОДУ к системе СДУ и построить ЧИК и ЧФП для соответствующих компонент решения.

Пример 3.4. В системе СДУ с внутренними шумами для двух осцилляторов Дуффинга

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_3 dt, & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= y_4 dt, & y_2(0) &= -1, \\ dy_3 &= \left(-0,5y_3 - (1 + \cos(2t))y_1 - y_1^3 + c(y_4 - y_3) \right) dt + & y_3(0) &= 0, \\ &+ \sigma_1 y_1 dw_1(t), \\ dy_4 &= \left(-0,005y_4 - 9(1 + \cos(2t))y_2 - y_2^3 + c(y_3 - y_4) \right) dt + & y_4(0) &= 0, \\ &+ \sigma_2 y_2 dw_2(t), \end{aligned} \tag{3.9}$$

связь между двумя осцилляторами возникает при $c \neq 0$. Графики компонент $y_1(t)$ (пунктирная линия) и $y_2(t)$ (сплошная линия) решения сопутствующей системы ОДУ (рис. 3.26) рассчитаны при отсутствии связи $c = 0$. Как видно из графиков, компонента y_2 решения имеет большую частоту колебаний, чем компонента y_1 .

На рис. 3.27 приведен график фазового портрета (y_1, y_2) без связи и шумов ($c = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$) в системе СДУ (3.9).

На таких же графиках, но при наличии связи $c = 10$ (рис. 3.28 и 3.29) явно виден эффект синхронизации колебаний, причем частота синхронных колебаний отличается от исходных частот компонент решения сопутствующей системы ОДУ.

Из графиков на рис. 3.30 траекторий компонент $y_1(t)$ (пунктирная линия) и $y_2(t)$ (сплошная линия) решения системы СДУ (3.9), рассчитанных при наличии связи $c = 10$ и сильных внутрен-

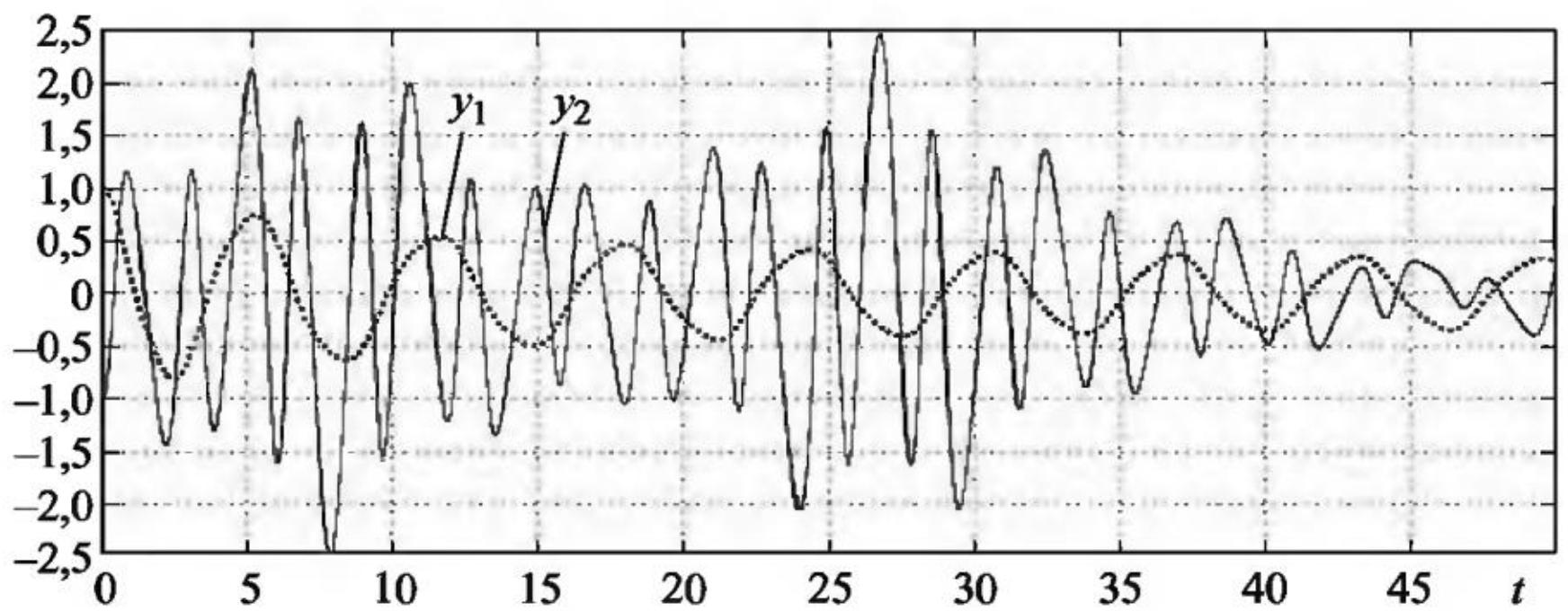


Рис. 3.26

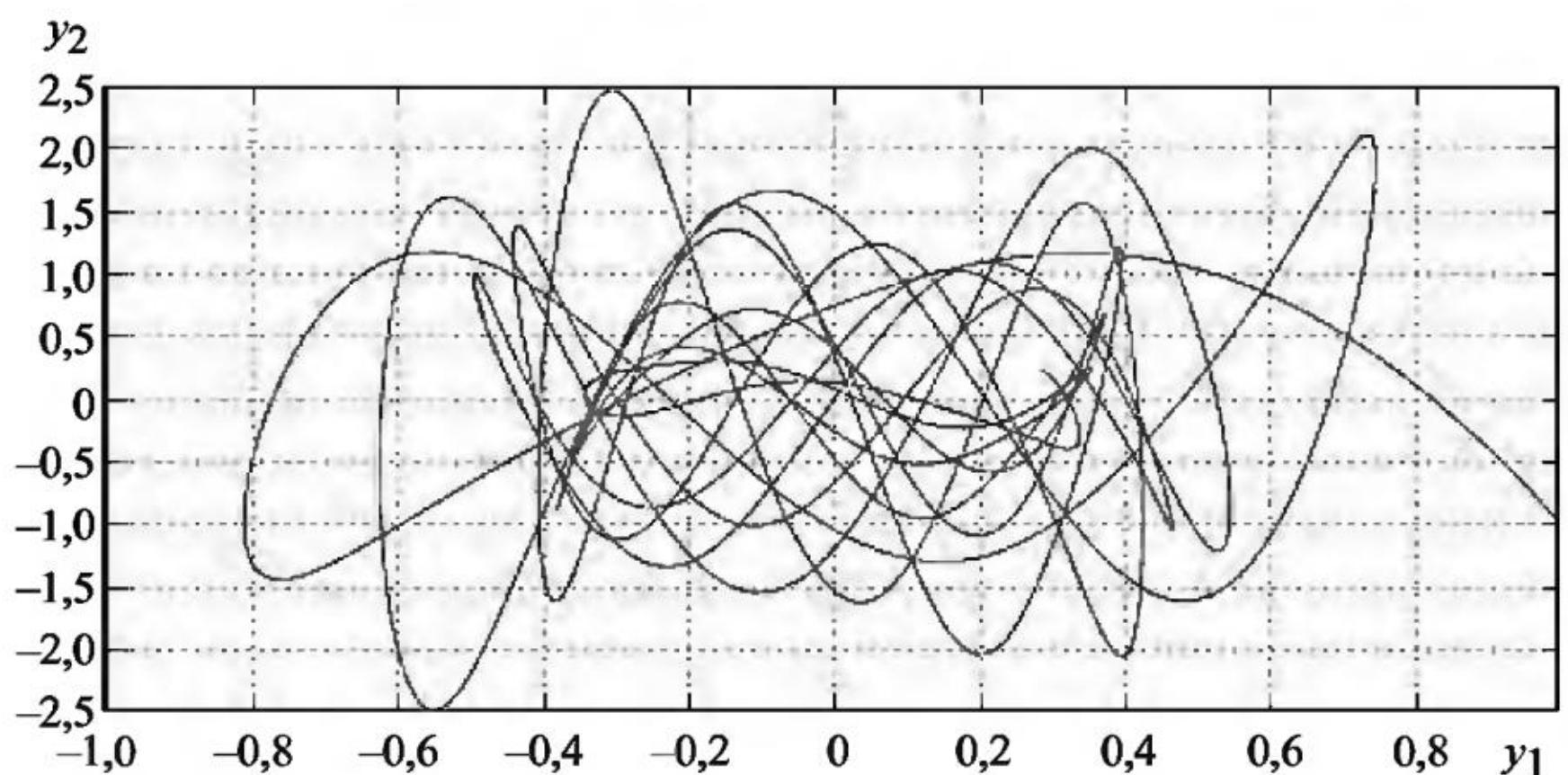


Рис. 3.27

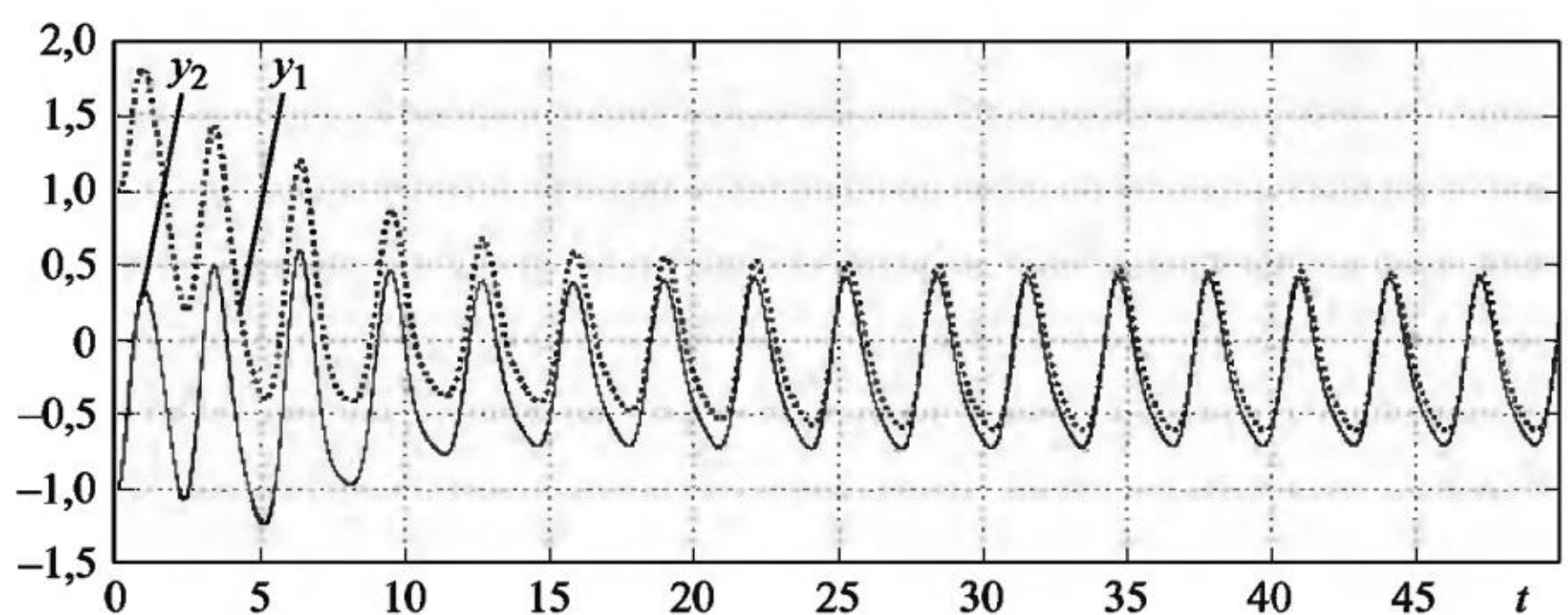


Рис. 3.28

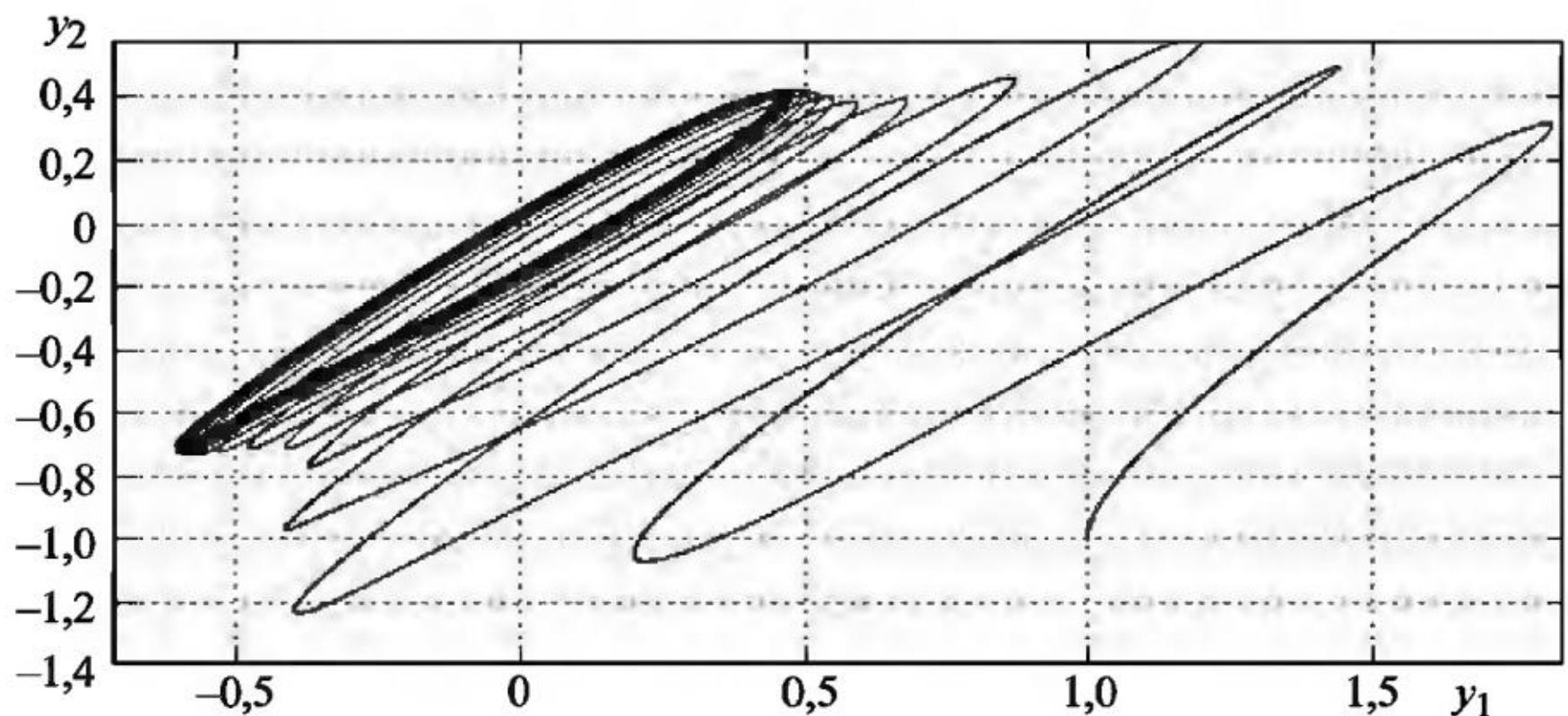


Рис. 3.29

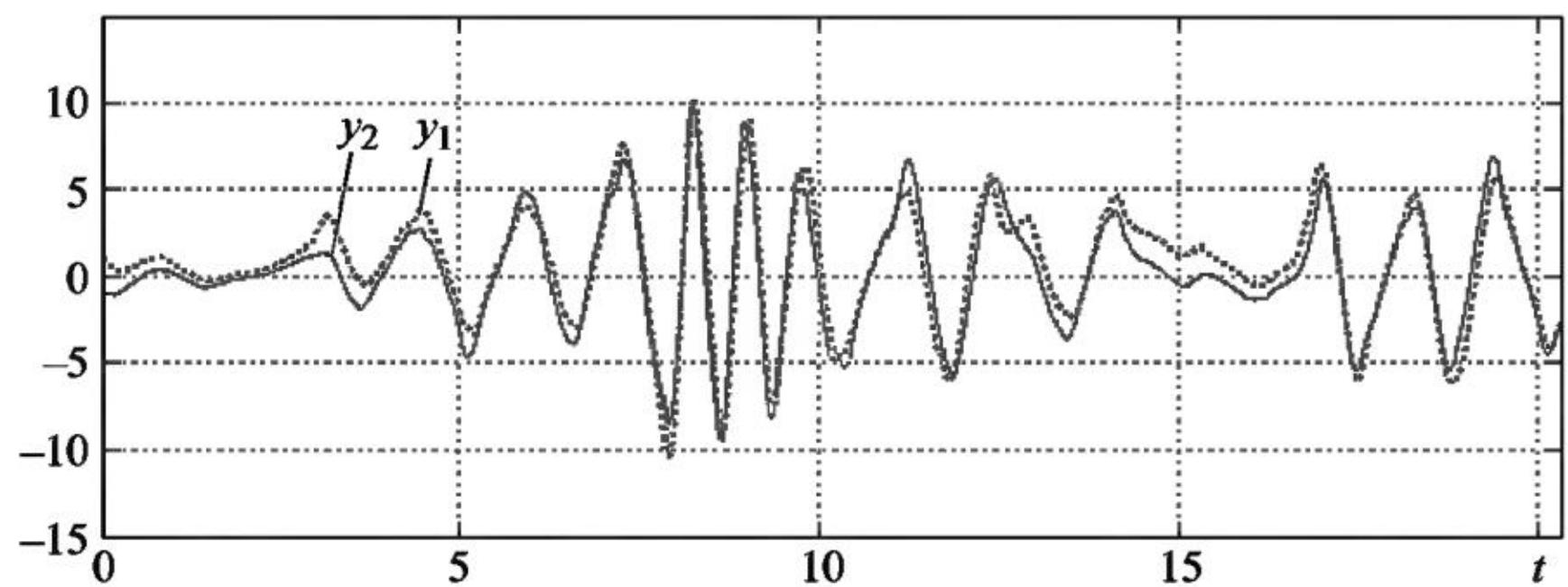


Рис. 3.30

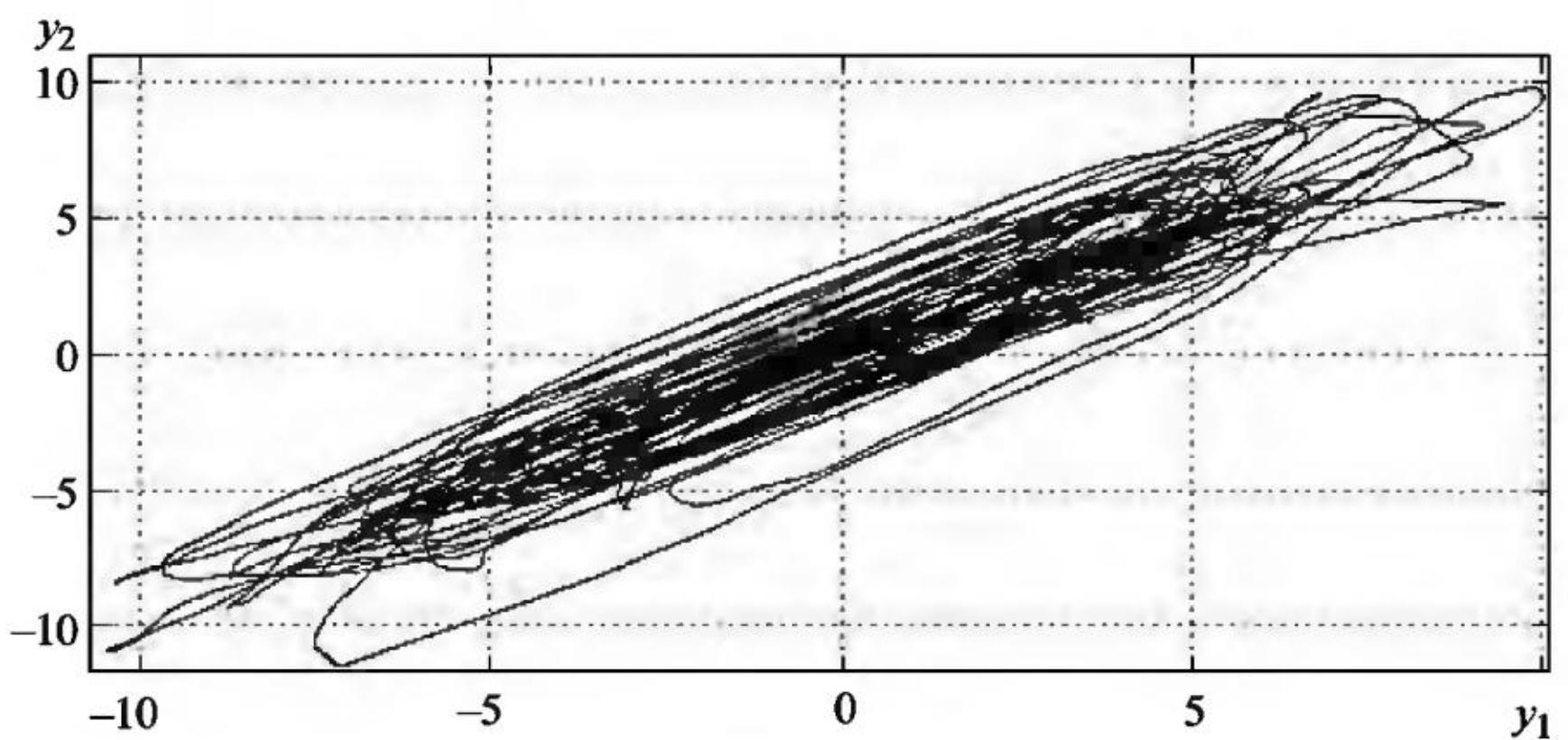


Рис. 3.31

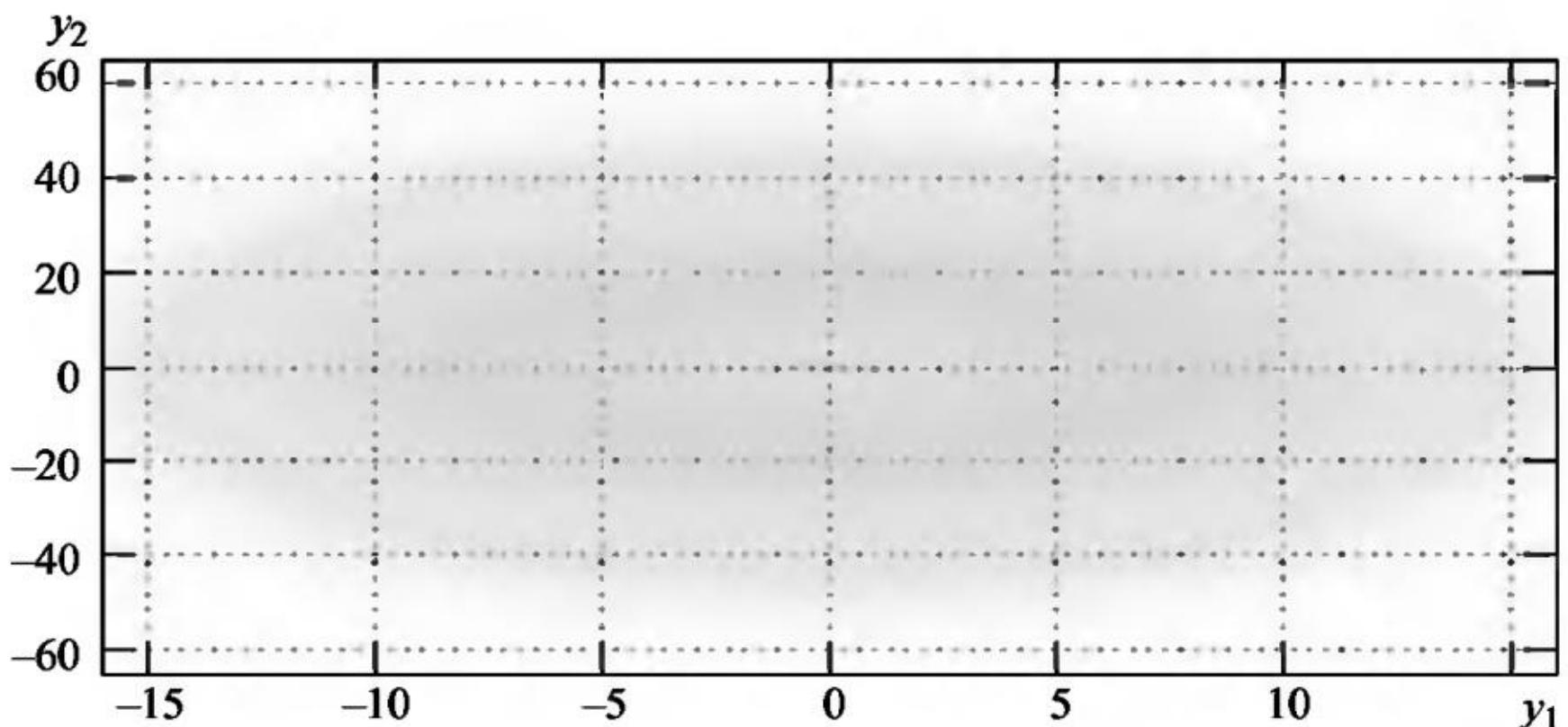


Рис. 3.32

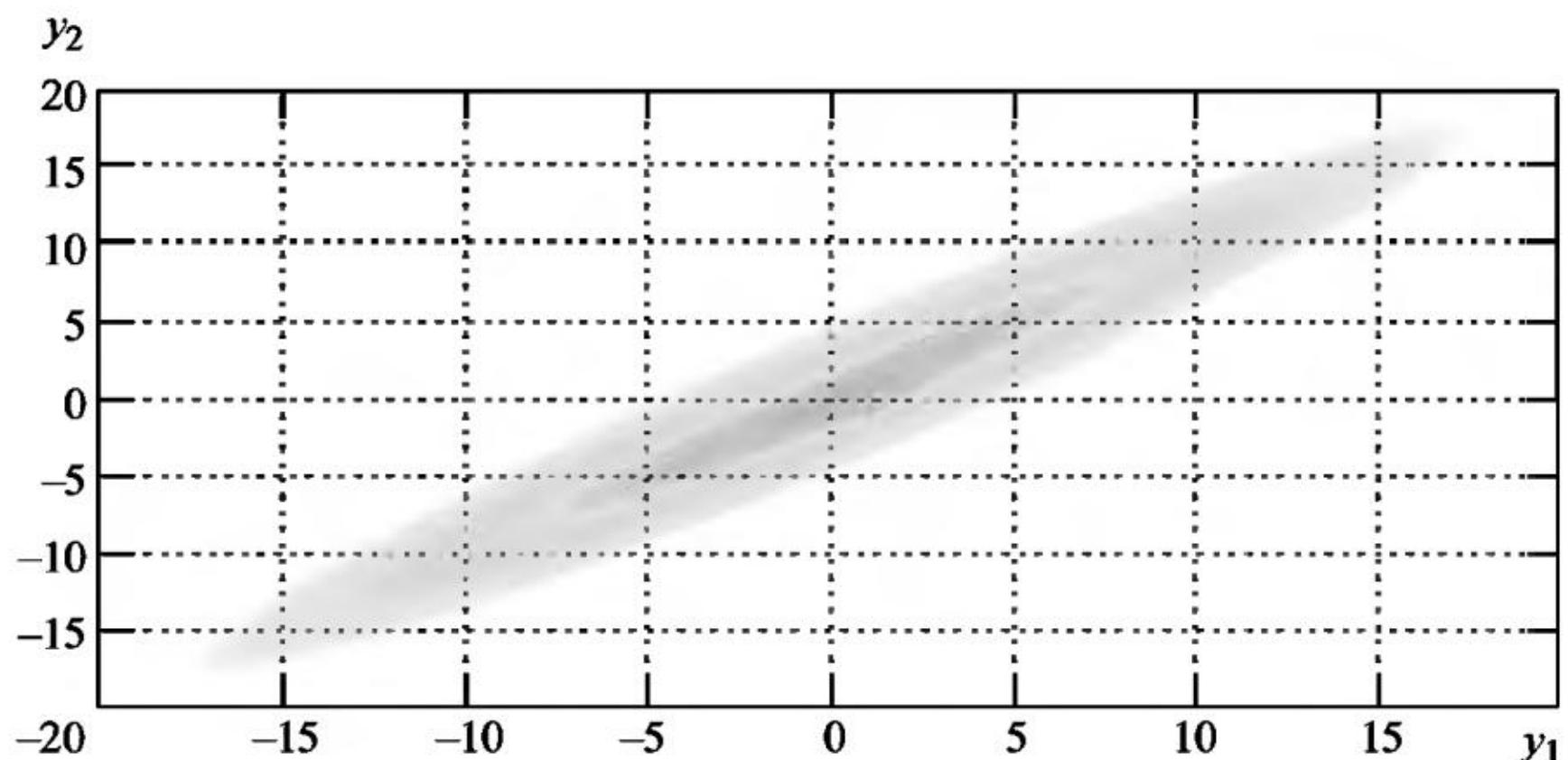


Рис. 3.33

них шумах ($\sigma_1 = \sigma_2 = 10$), видим, что сильная связь обеспечивает синхронизацию незатухающих колебаний переменной амплитуды обеих компонент y_1 и y_2 решения даже при шумах с большой интенсивностью.

На рис. 3.31 приведен график фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) одной смоделированной траектории решения при наличии связи $c = 10$ и сильных шумах интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 10$ в системе СДУ (3.9), где также виден эффект синхронизации колебаний.

На рис. 3.32 и 3.33 приведены графики ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_1, y_2) решения системы СДУ (3.9) без связи и со связью при $\sigma_1 = \sigma_2 = 10$, сильно отличающиеся друг от друга. Из этих графиков легко увидеть разницу в поведении траекторий $y_1(t)$

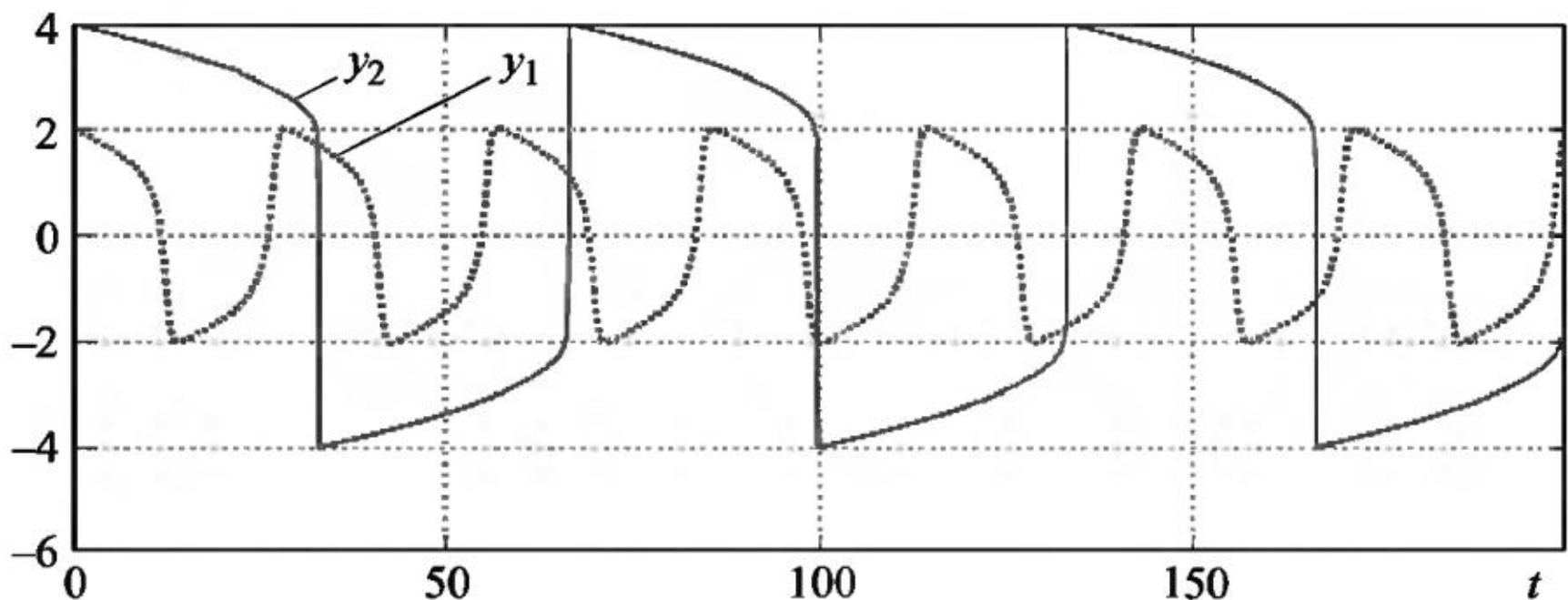


Рис. 3.34

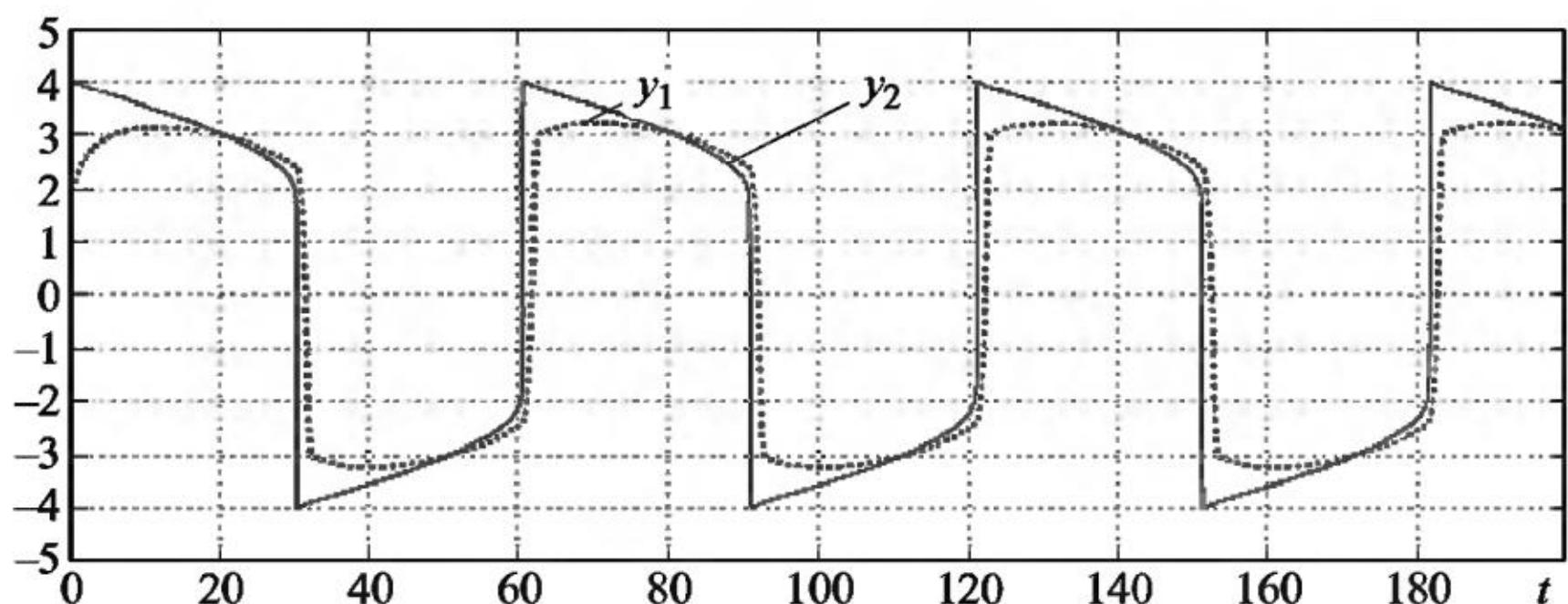


Рис. 3.35

и $y_2(t)$ решения системы СДУ (3.9) без связи ($c = 0$) и со связью ($c = 10$). Вид графика ЧФП на рис. 3.33 говорит о сохранении синхронизации колебаний даже при шумах большой интенсивности.

Пример 3.5. Модель двух связанных стохастических осцилляторов Ван-дер-Поля задается следующей системой СДУ с внутренними шумами:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_3 dt, & y_1(0) &= 2, \\ dy_2 &= y_4 dt, & y_2(0) &= 4, \\ dy_3 &= \left(-0.1y_1 + (1 - y_1^2)y_3 - c(y_1 - y_2) \right) dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t), & y_3(0) &= 0, \\ dy_4 &= \left(-y_2 + 10(4 - y_2^2)y_4 - c(y_2 - y_1) \right) dt + \sigma_2 y_2 dw_2(t), & y_4(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

и связь осцилляторов возникает при $c \neq 0$. На рис. 3.34 и 3.35 приведены графики компонент $y_1(t)$ (пунктирная линия) и $y_2(t)$ (сплошная линия) численного решения сопутствующей системы ОДУ при $c = 0$ и $c = 1$ соответственно. Как видно из графиков, при

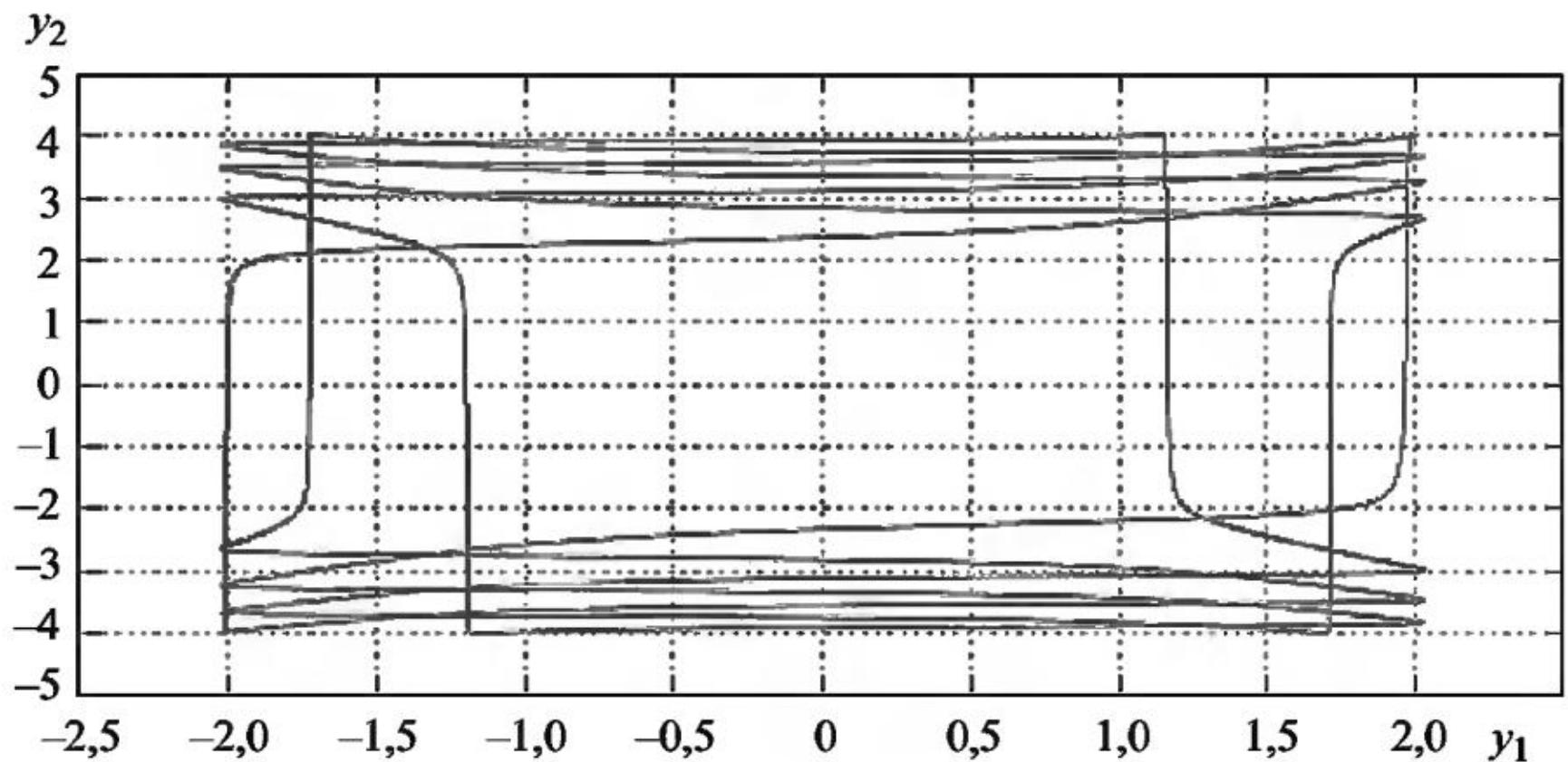


Рис. 3.36

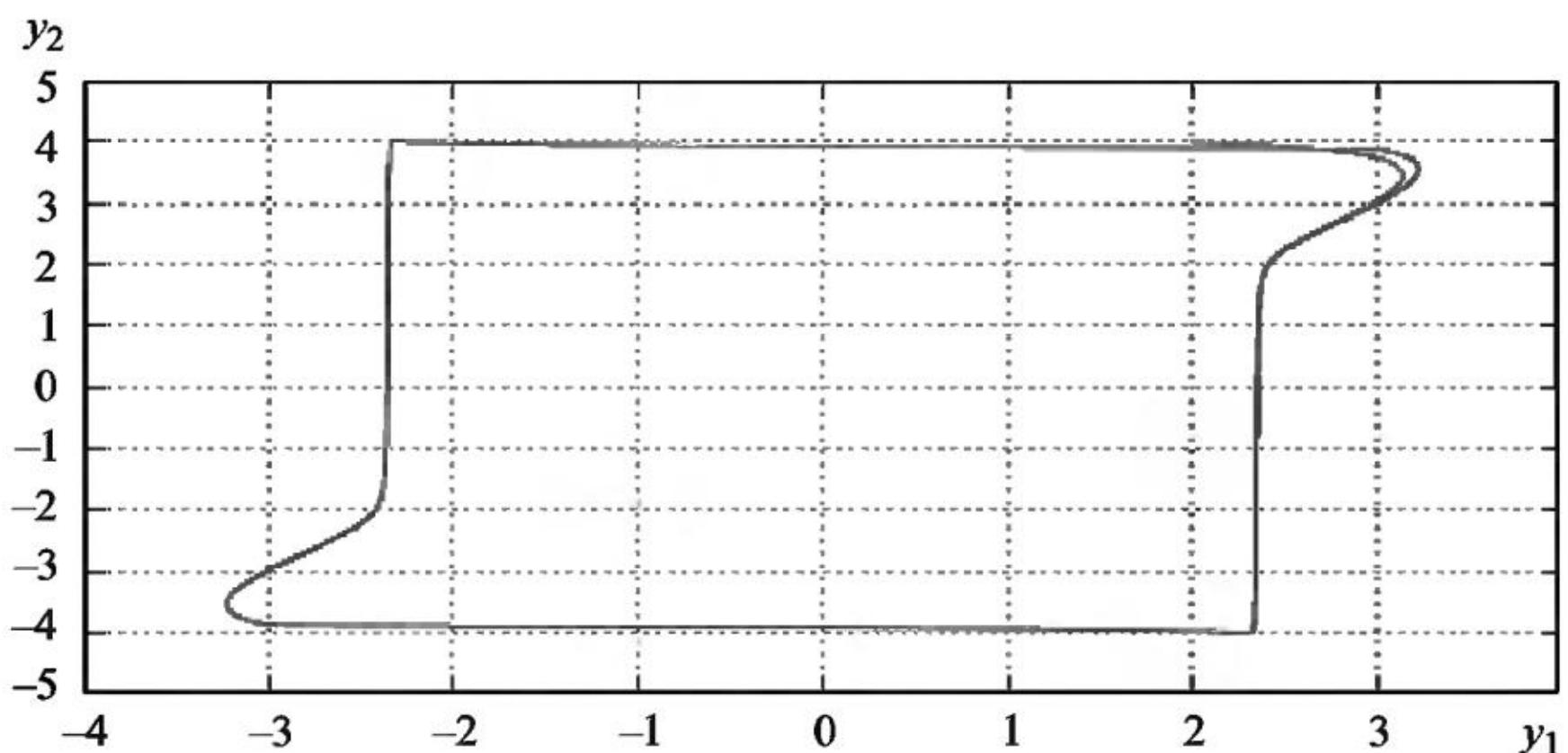


Рис. 3.37

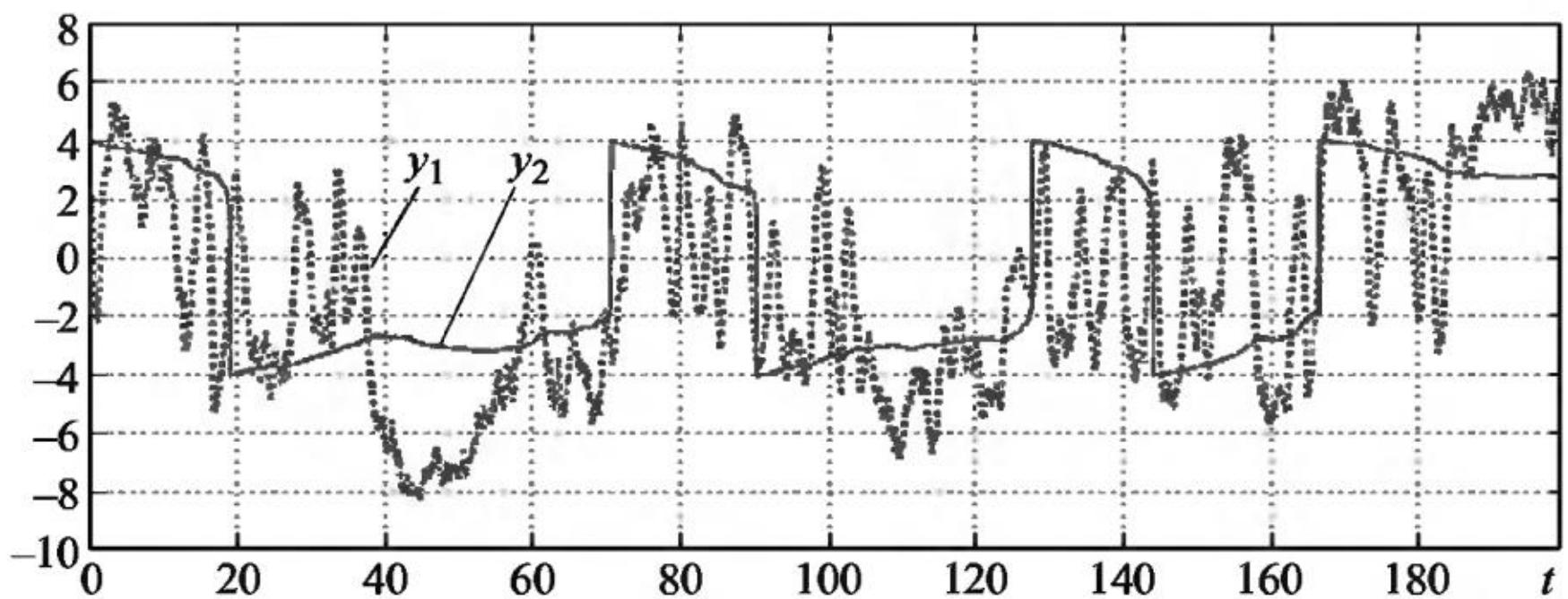


Рис. 3.38

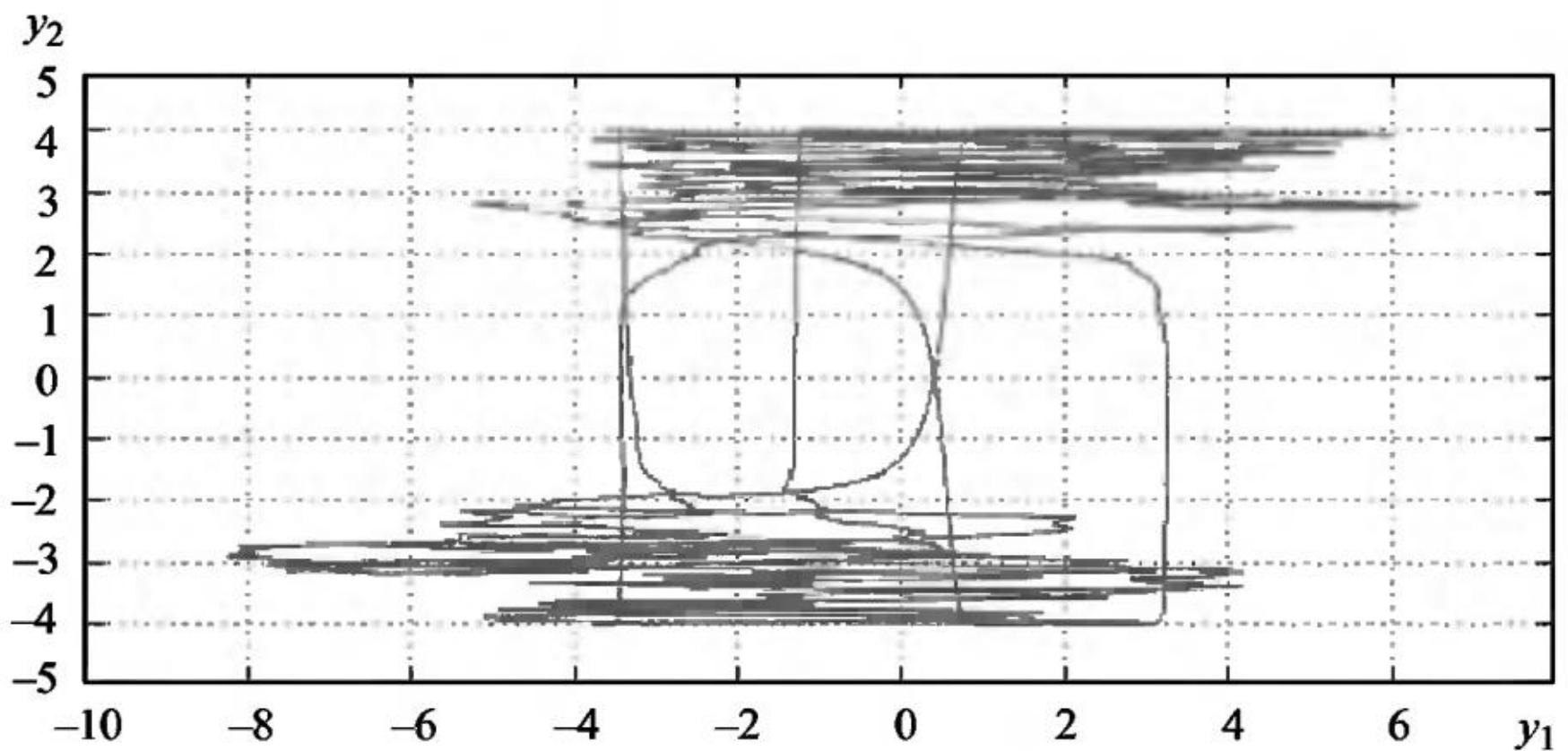


Рис. 3.39

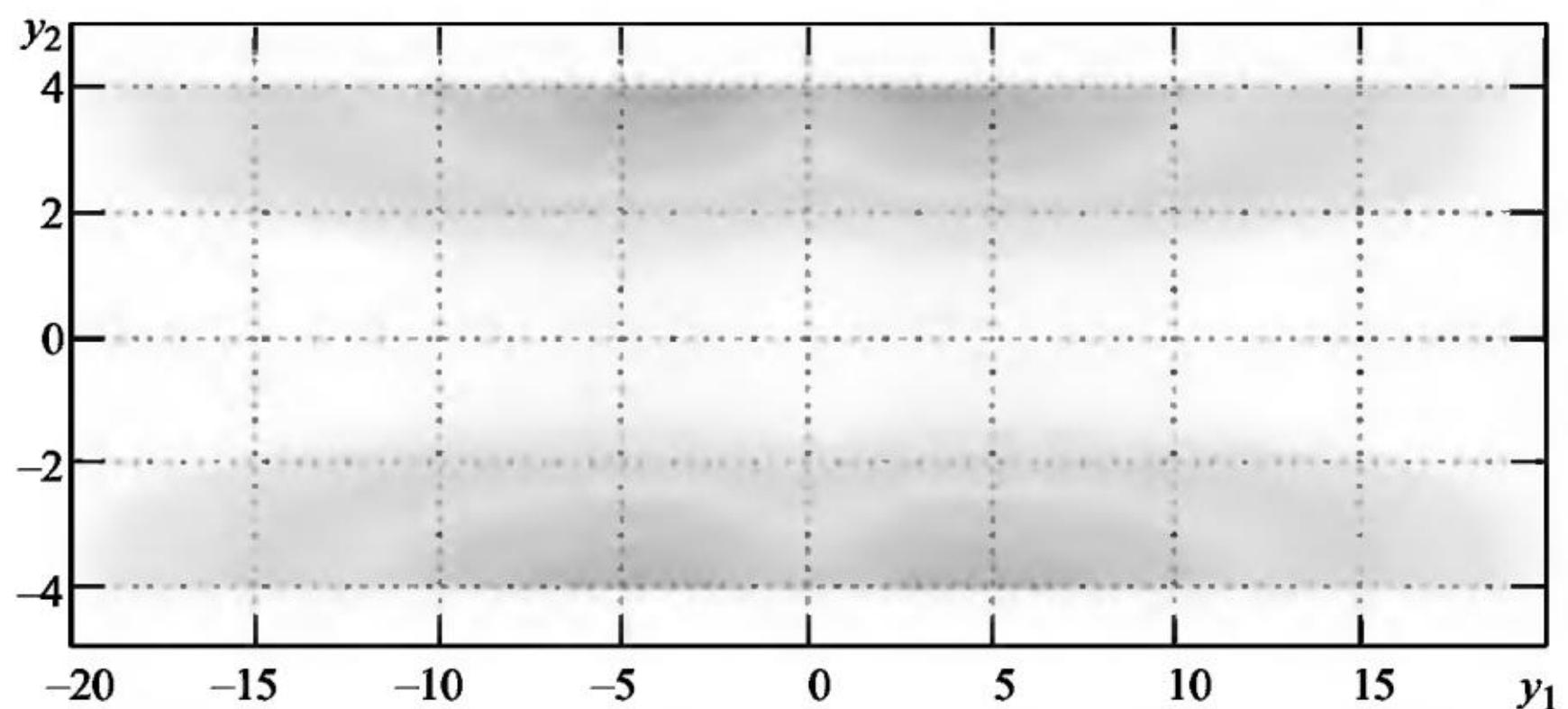


Рис. 3.40

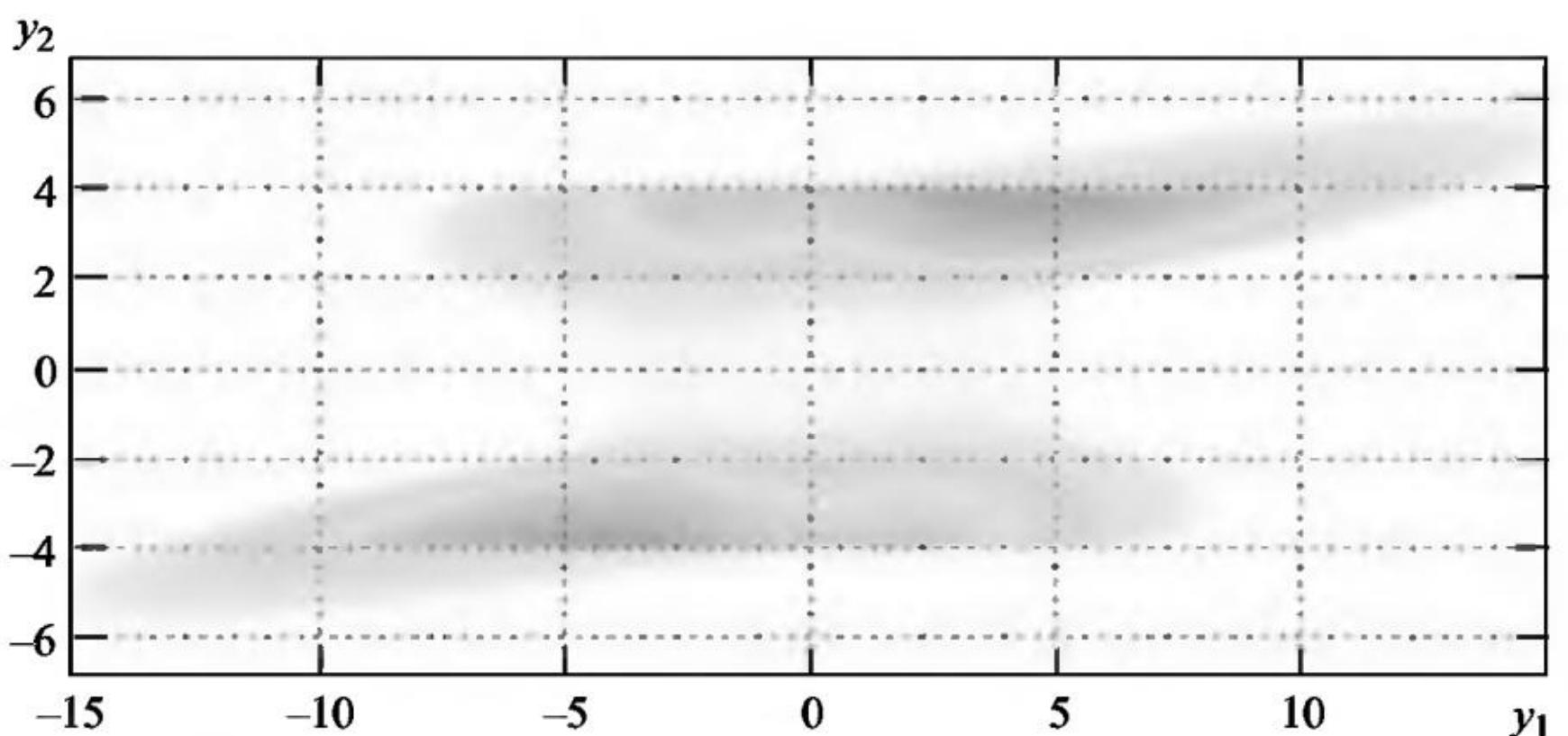


Рис. 3.41

$c = 1$ эффект синхронизации налицо. При этом второй осциллятор является синхронизирующим.

Эффект синхронизации колебаний также виден из рис. 3.36 и 3.37, где приведены графики фазового портрета пары компонент (y_1, y_2) одной смоделированной траектории решения сопутствующей системы ОДУ при $c = 0$ и $c = 1$.

На рис. 3.38 и 3.39 приведены графики компонент y_1 (пунктирная линия) и y_2 (сплошная линия) и фазовый портрет пары компонент (y_1, y_2) одной смоделированной траектории решения системы СДУ (3.10) при $c = 1$ с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$, откуда видно, что при наличии сильного мультипликативного шума («шумят» частоты) синхронизация нарушается.

На рис. 3.40 и 3.41 приведены графики ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_1, y_2) решения системы СДУ (3.10) без связи $c = 0$ и со связью $c = 1$ с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$. В отличие от предыдущего примера, графики ЧФП при $c = 0$ и $c = 1$ различаются незначительно, т. е. из этих графиков видим, что наличие мультипликативного шума большой интенсивности синхронизацию нарушает.

4. ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ. АТТРАКТОРЫ

Изменение некоторых вещественных параметров в системе ОДУ может вызвать потерю устойчивости одного состояния (или режима функционирования) системы и переход ее в другое, отличное от первого состояние. Это явление называется бифуркацией (от слова раздвоение), а значение параметра, при котором оно происходит, – точкой бифуркации. Принято различать мягкие и жесткие бифуркации. В первом случае в результате бифуркации исходное стационарное состояние теряет устойчивость и рождаются два новых устойчивых стационарных состояния. При этом вновь появившиеся два стационарных состояния расположены в непосредственной близости от исходного состояния, которое потеряло устойчивость. Во втором случае система выбирает новый режим, который существенно отличается от предыдущего и не находится в непосредственной близости от исходного режима. Такой тип бифуркаций называют жестким, и именно жесткие бифуркации явились предметом анализа в теории катастроф. Прогрессирование параметра через точку бифуркации, как правило, сопровождается изменением свойств устойчивости равновесий.

Для диссипативной нелинейной системы ОДУ может быть установлен порог в виде так называемого критического значения управляющего параметра, т. е. параметра, обеспечивающего связь системы с внешней средой. При этом, если управляющий параметр меньше критического, то поведение системы обычное, решение имеет строго детерминированный характер. Если же управляющий параметр больше критического, зависимости любой из переменных от времени внешне выглядят как стохастические процессы. Система начинает генерировать хаотическое решение. При критических значениях управляющего параметра фазовые траектории системы ведут себя столь сложно и запутанно, что внешний наблюдатель может принять их характеристики за случайные, хаотические. Более того, траектории нелинейной динамической системы в многомерном фазовом пространстве ведут себя необычным образом. При определенных условиях существует область, которая притягивает к себе все траектории из окрестных областей. Она и была названа странным аттрактором. Все траектории сбега-

ются в странном аттракторе, а попав в него, разбегаются. Эти два условия кажутся несовместимыми, странными. Это противоречие устраняется, если учесть, что траектории могут быть неустойчивыми по одним направлениям (разбегаются) и устойчивыми (притягиваются) по другим. Таким образом, в странном аттракторе точки никогда не повторяются, орбиты никогда не пересекаются друг с другом и, однако, как точки, так и орбиты остаются внутри некоторой области в фазовом пространстве [1].

Теория динамического хаоса в последнее время является одним из самых модных подходов к исследованию рынка, Вселенной, общества, физических процессов и т. д. Обнаруженный Лоренцем аттрактор стал первым примером хаотического, или странного, аттрактора. Для многих систем со случайным поведением удалось найти несколько простых хаотических аттракторов. Среди них — колебание концентрации веществ при химических реакциях с перемешиванием, а также колебательные процессы в большом числе электрических цепей и механических установок.

Термин «случайный» имеет вполне определенный смысл. Случайное движение непредсказуемо либо предсказуемо с определенной вероятностью. Другими словами, траектории случайного движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом эксперименте. В случае странного аттрактора имеется строгая предсказуемость в смысле детерминированности закона эволюции. Решение уравнений (как и для регулярных аттракторов) подчиняется теореме единственности и однозначно воспроизводится при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных «шумоподобных» автоколебаний, математическим образом которых служит странный аттрактор, используются термины типа динамическая стохастичность, детерминированный хаос и подобные. Важно отличать эти процессы от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета флуктуаций в исходных динамических уравнениях. Аттракторы различают по: 1) формализации понятия стремления: максимальный аттрактор, неблуждающее множество, аттрактор Милнора, центр Биркгофа, статистический и минимальный аттрактор; 2) по регулярности самого аттрактора: регулярные (притягивающая неподвижная точка, притягивающая периодическая траектория) и странные (нерегулярные, динамика на них обычно хаотична) и 3) по локальности («притягивающее множество») и глобальности.

Странные аттракторы наблюдаются в поведении динамической системы с фазовым пространством размера $K \geq 3$, и они

характеризуются режимом установившихся непериодических автоколебаний. Странный аттрактор имеет два существенных отличия от обычного: траектории непериодические и режим функционирования неустойчив. Явление резкого изменения фазового портрета аттрактора при прохождении вещественным параметром системы ОДУ критической точки называется бифуркацией странного аттрактора. Особый интерес представляет сочетание «детерминированного хаоса», присущего странным аттракторам, и «стochasticского хаоса», когда в правую часть системы ОДУ добавляются внутренние и внешние случайные шумы и система ОДУ превращается в систему СДУ. В этом случае приходится исследовать зависимость режимов колебаний не только от вещественных параметров в функции сноса, но и от коэффициентов интенсивности шумов.

Пример 4.1. В системе СДУ с аддитивными шумами

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= \left(-0,5y_2 - \left(3y_3^2 + y_1^2 \right) \frac{y_1}{8} + 0,08\cos(t) \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_2(0) &= 0, \\ dy_3 &= \left(0,03 - a \left(3y_1^2 + y_3^2 \right) y_3 \right) dt + \sigma_2 dw_2(t), & y_3(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

при разных значениях параметра a решения имеют совершенно различные режимы колебаний. Например, фазовые траектории пары компонент (y_1, y_2) (рис. 4.1 и 4.2) решения сопутствующей системы ОДУ при $a = 0$ и $a = 10$ видимо различны.

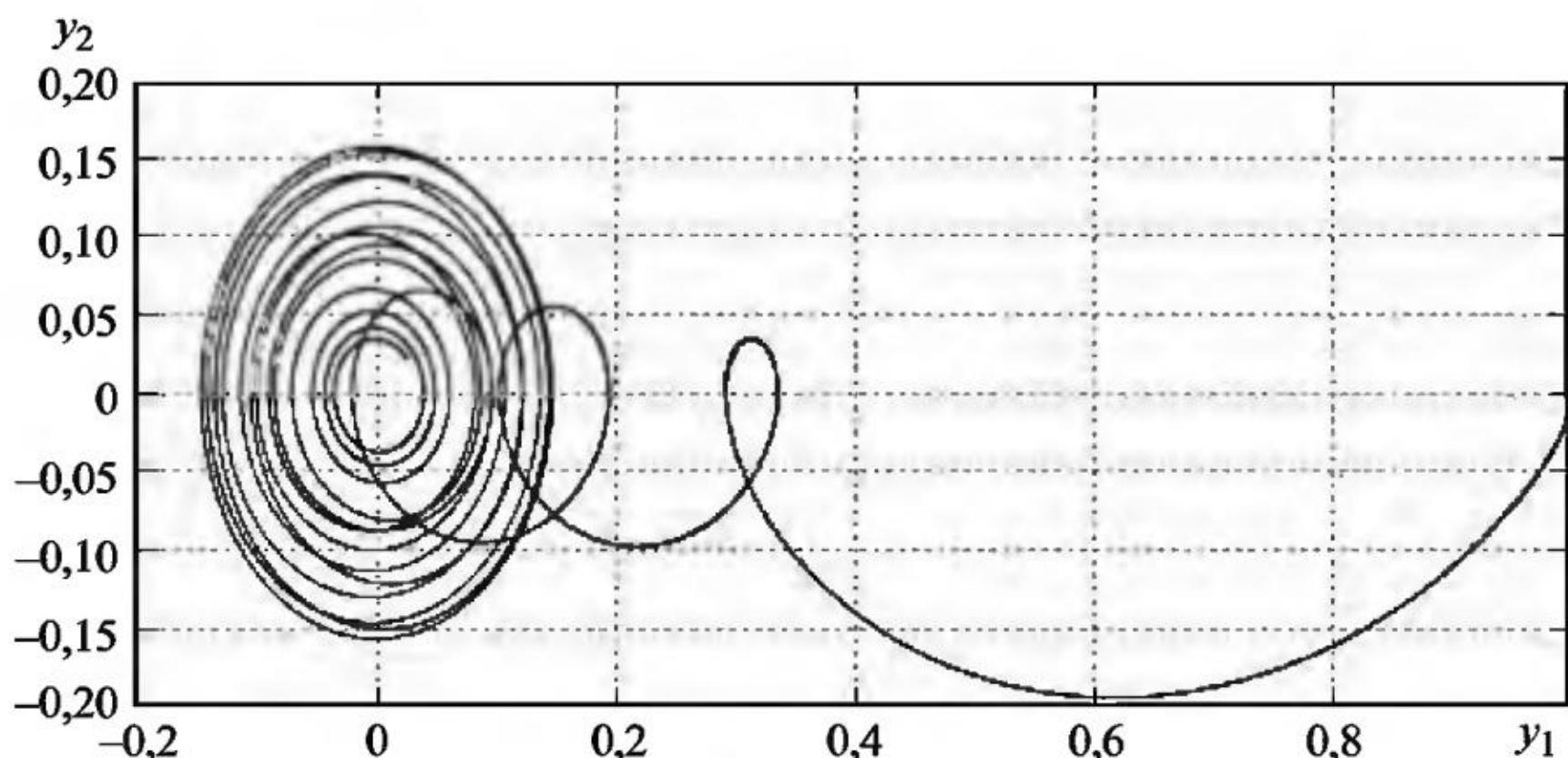


Рис. 4.1

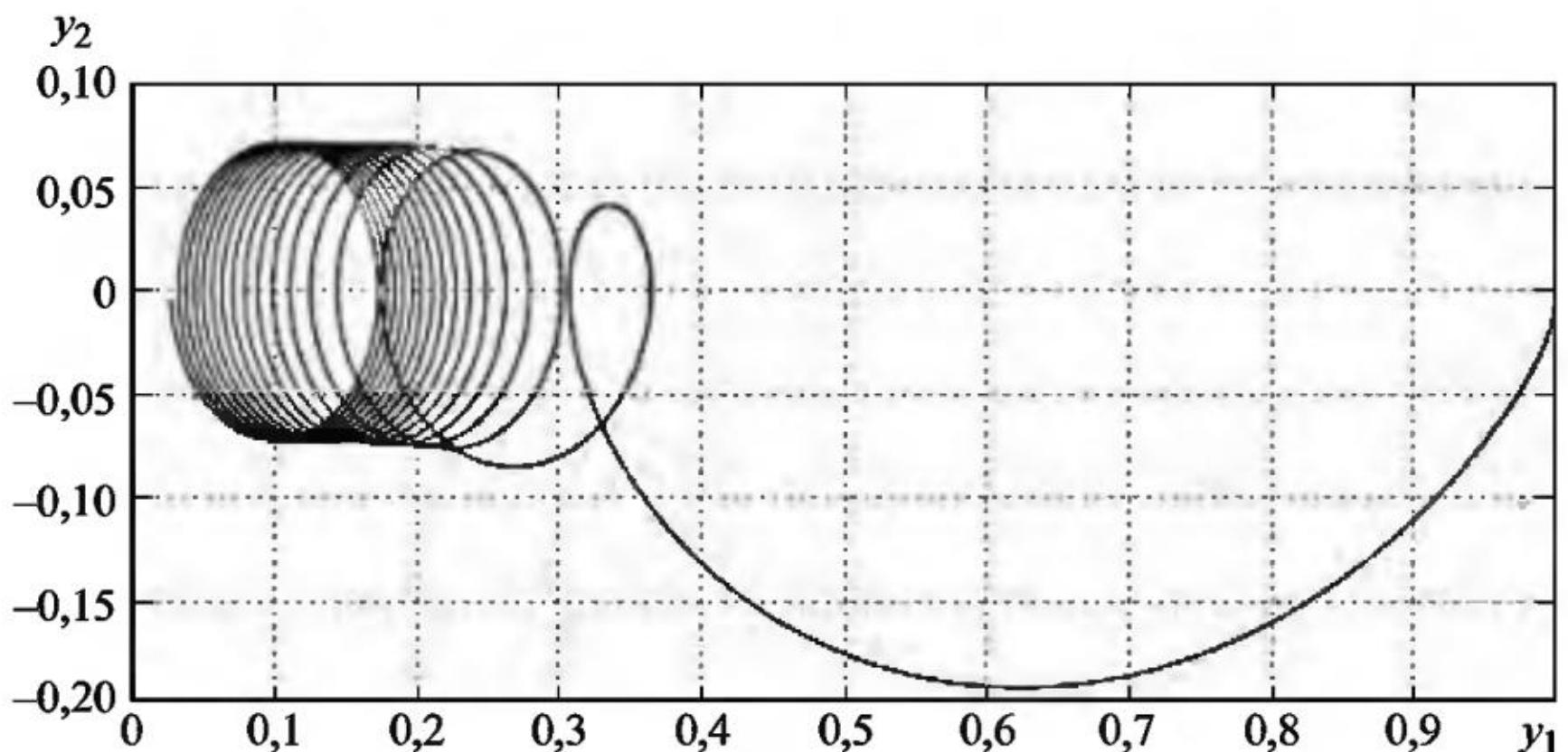


Рис. 4.2

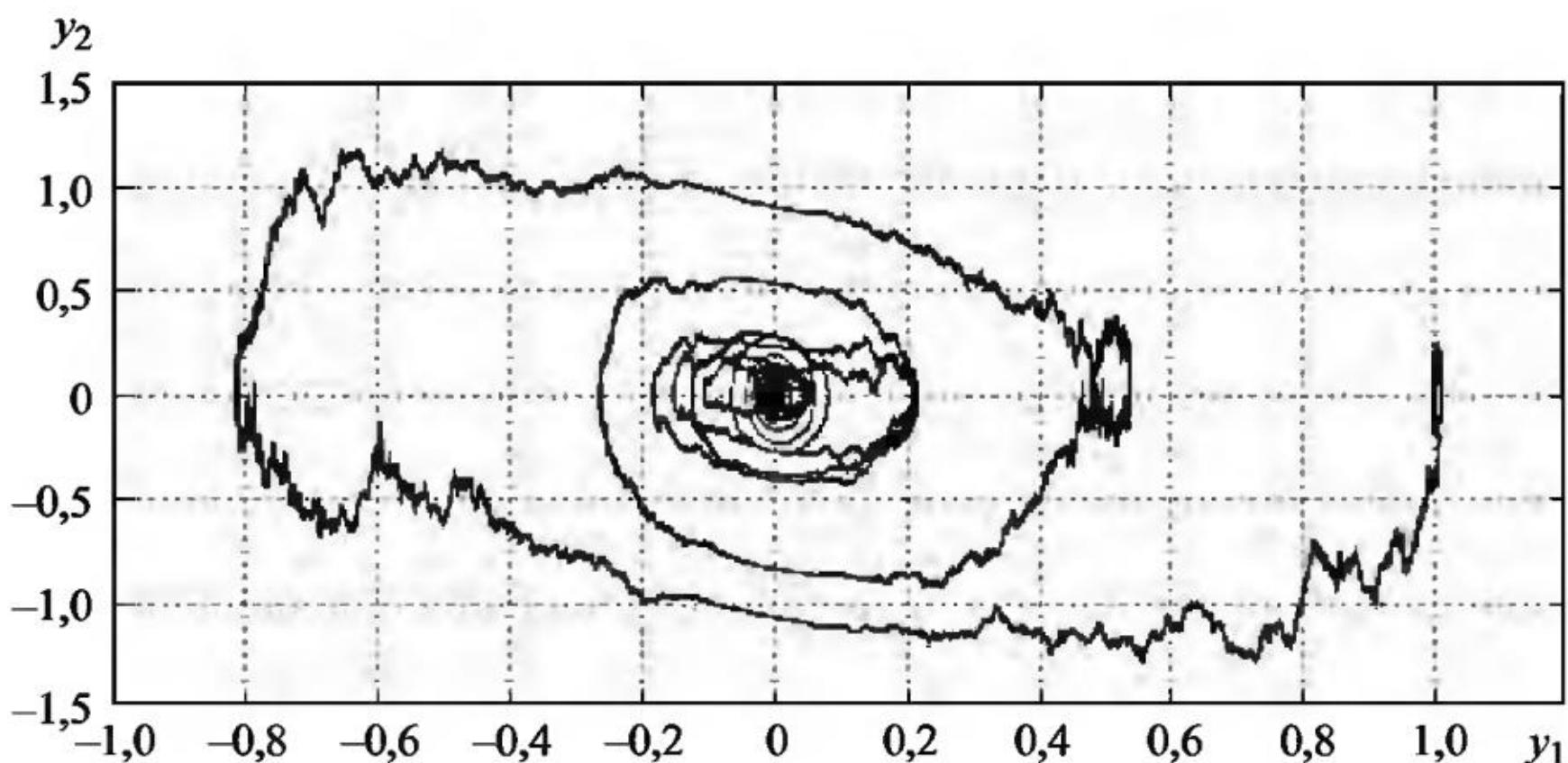


Рис. 4.3

А график фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) одной смоделированной траектории решения системы СДУ (4.1) при $a = 0$ с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ имеет свой отличный от обоих предыдущих графиков вид (рис. 4.3). Расчет проводился с шагом интегрирования $h = 10^{-4}$.

Теперь сравним графики ЧФП и ЧИК при $a = 0$ и $a = 10$. На рис. 4.4 приведен график ЧФП (вид сбоку) компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (4.1) при $a = 0$. Один меньший пик на графике связан с детерминированным начальным условием задачи Коши.

На рис. 4.5 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 численного решения системы СДУ (4.1) при $a = 0$, из которого видим устойчивый характер поведения компоненты.

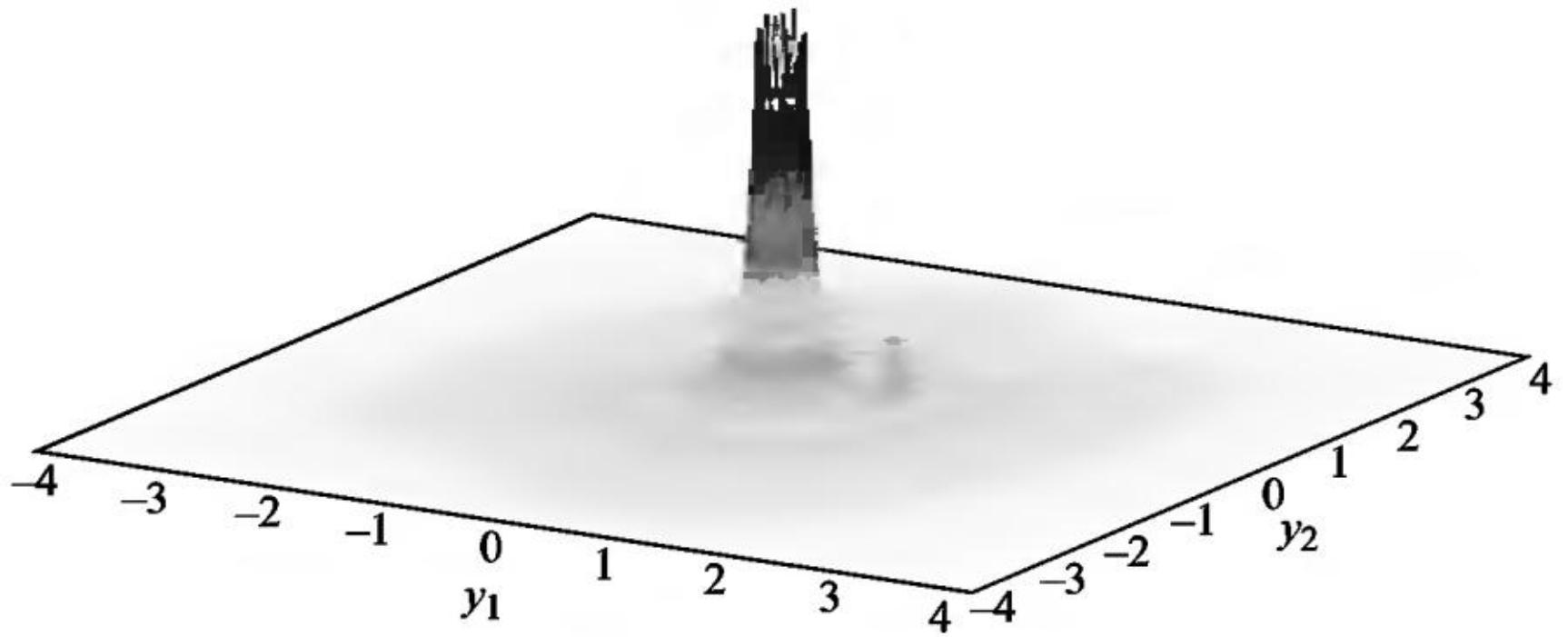


Рис. 4.4

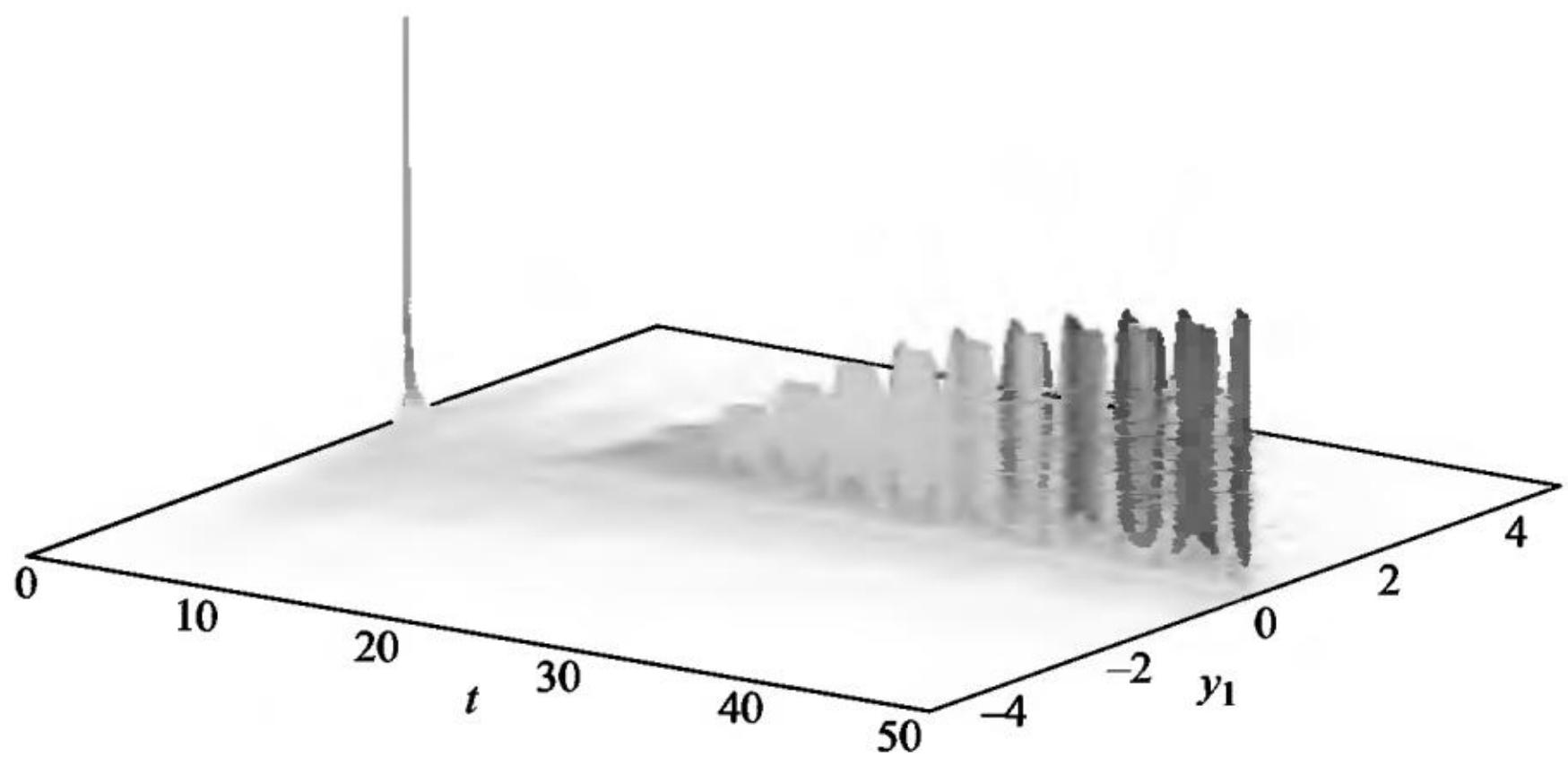


Рис. 4.5

На рис. 4.6 и 4.7 приведены аналогичные графики ЧФП и ЧИК (вид сбоку) численного решения системы СДУ (4.1) при $a = 10$. Как видим, графики ЧФП при $a = 0$ и $a = 10$ (см. рис. 4.4 и рис. 4.6) схожи по форме и у фазовых траекторий пары компонент численных решений в обоих случаях в центре лежит точка $(0, 0)$, что находится в полном контрасте с детерминированным случаем, когда у решения системы ОДУ существует бифуркационный переход. Графики ЧИК при $a = 0$ и $a = 10$ (см. рис. 4.5 и рис. 4.7) различаются «шириной потока»: при $a = 0$ «поток частот» узкий «одноструйный», при $a = 10$ – широкий, «двухструйный».

Пример 4.2. Современные системы управления частотой вращения ротора гидротурбины представляют собою сложные динамические системы, включающие механические, гидравлические, электрические и электронные элементы, в том числе и ЭВМ.

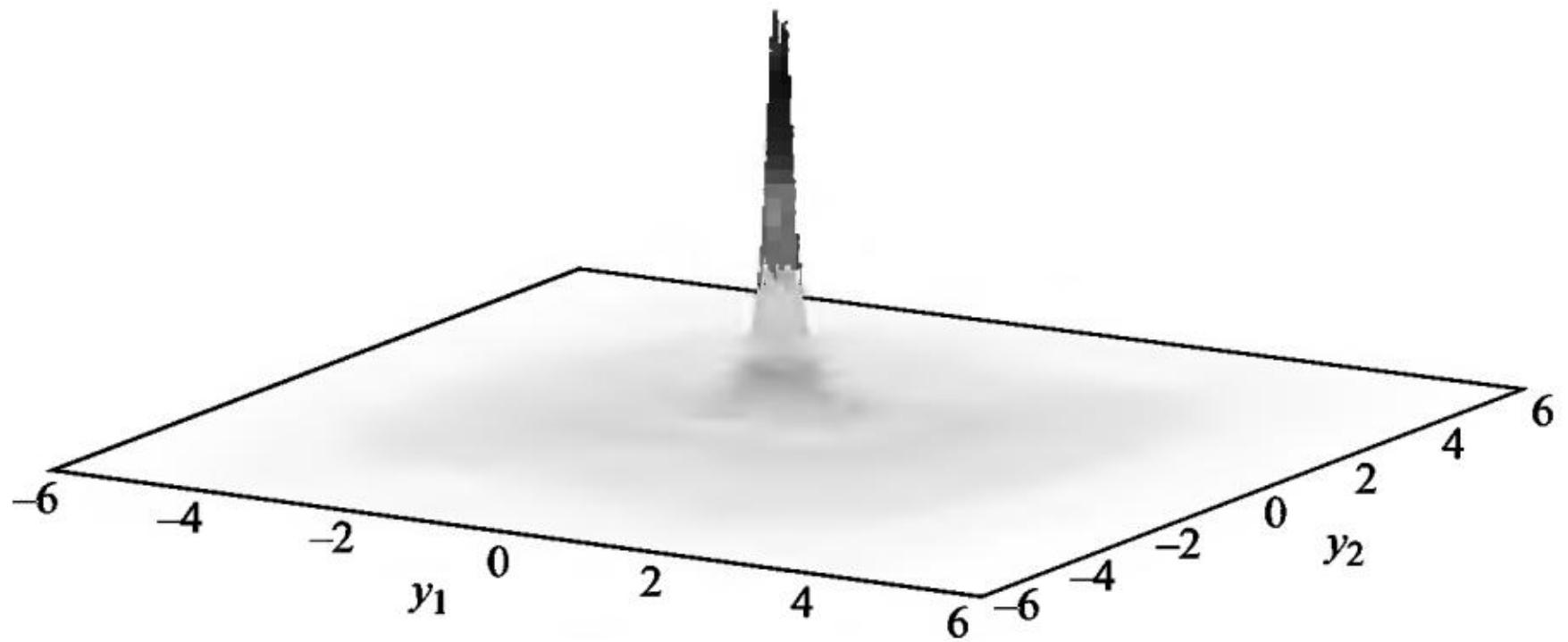


Рис. 4.6

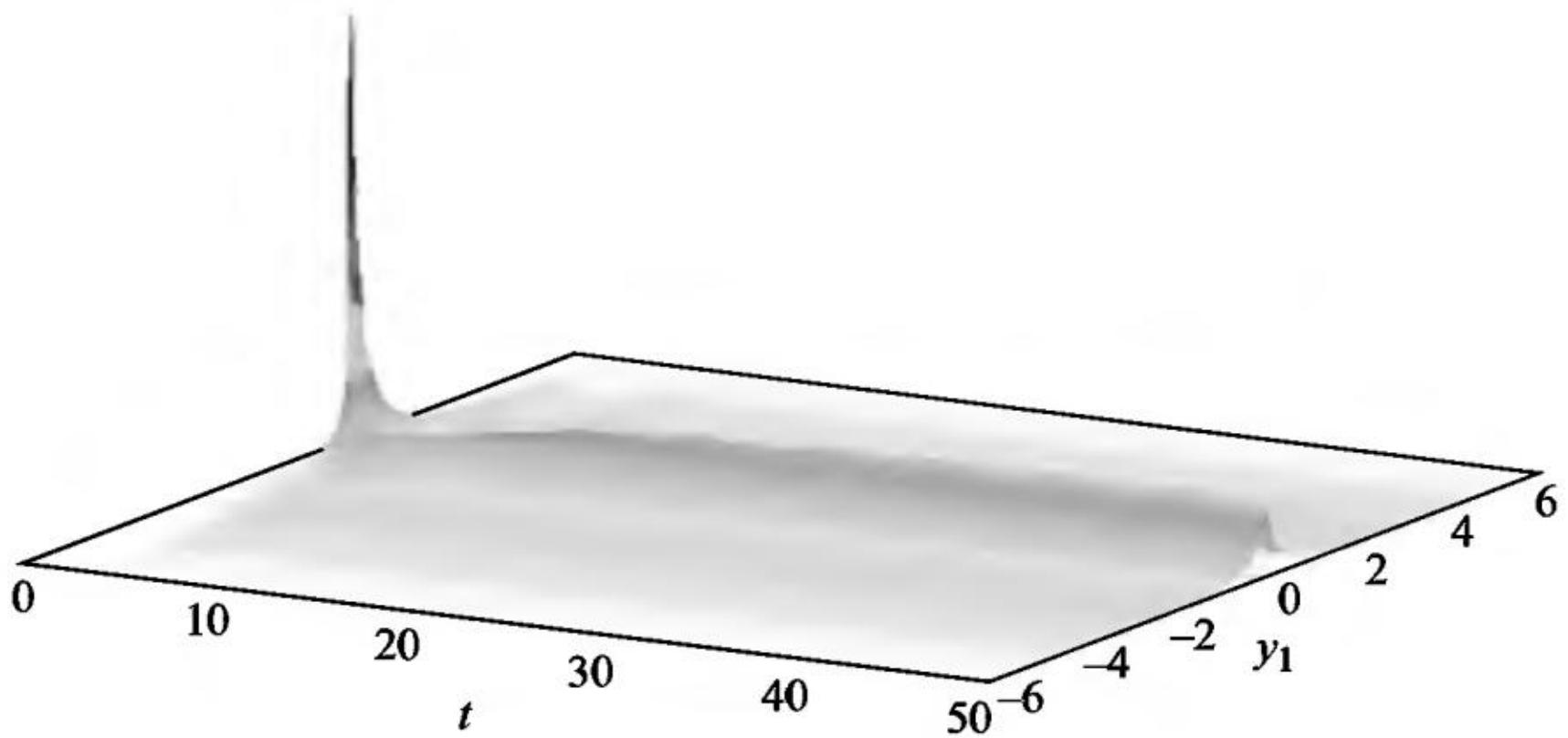


Рис. 4.7

Современные электрогидравлические регуляторы предусматривают выполнение следующих основных функций: пуск и синхронизацию на холостом ходу, работу под нагрузкой при слабых возмущениях и переходных процессах при больших возмущениях. Существуют разные специфические симптомы неисправностей, сопровождаемые простыми математическими моделями. Неисправности включают дисбаланс, чрезмерный радиальный натяг, затирь ротора о статор, гидродинамическую нестабильность подшипника, разболтанность стационарных и движущихся деталей, вибрацию, порожденную крутильными/поперечными колебаниями, трещины ротора и т. д. Большинство неисправностей характеризуется прямой передачей энергии вращения ротора в вибрационную энергию разных мод. Вибрация ротора в конце концов передается раме, корпусу, фундаменту [12]. Моделировать вибрацию ротора можно добавлением в систему ОДУ случайных шумов, т. е. переходом к СДУ.

Движение ротора гидротурбины с учетом случайного сопротивления движению вала, случайного расхода воды через турбину и случайного изменения напора на гидротурбине задается системой СДУ с аддитивными шумами

$$\begin{aligned} dy_1 &= \left(\frac{10^{-2} y_3 y_2^{\frac{3}{2}}}{y_1} - 10^{-2} y_1 \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), \quad y_1(0) = 1, \\ dy_2 &= 10^{-2} (1,2 - y_2) y_2^{\frac{1}{2}} y_3 dt + \sigma_2 dw_2(t), \quad y_2(0) = 1, \\ dy_3 &= q \cos(t) dt + \sigma_3 dw_3(t), \quad y_3(0) = 0,5, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где y_1 – угловая скорость вращения вала, y_2 – расход воды через турбину, y_3 – изменение напора на гидротурбине, q – вещественный параметр. На рис. 4.8 и рис. 4.9 приведены фазовые траектории пары компонент (y_1, y_3) решения сопутствующей системы ОДУ при $q = 0,3$ и $q = 1$.

Сравнивая эти графики, видим что различаются как размеры амплитуды колебаний компоненты y_3 , так и сами режимы колебаний. На рис. 4.10 приведен фазовый портрет пары компонент (y_1, y_3) одной смоделированной траектории решения системы СДУ (4.2) с малым шумом $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,01$ при $q = 1$. График на рис. 4.10 отличен как от графика на рис. 4.8, так и на рис. 4.9.

На рис. 4.11 дан график ЧФП пары компонент (y_1, y_3) (вид сверху), рассчитанный при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,01$, $q = 1$. Из этого рисунка видно, что угловая скорость вращения вала при таких па-

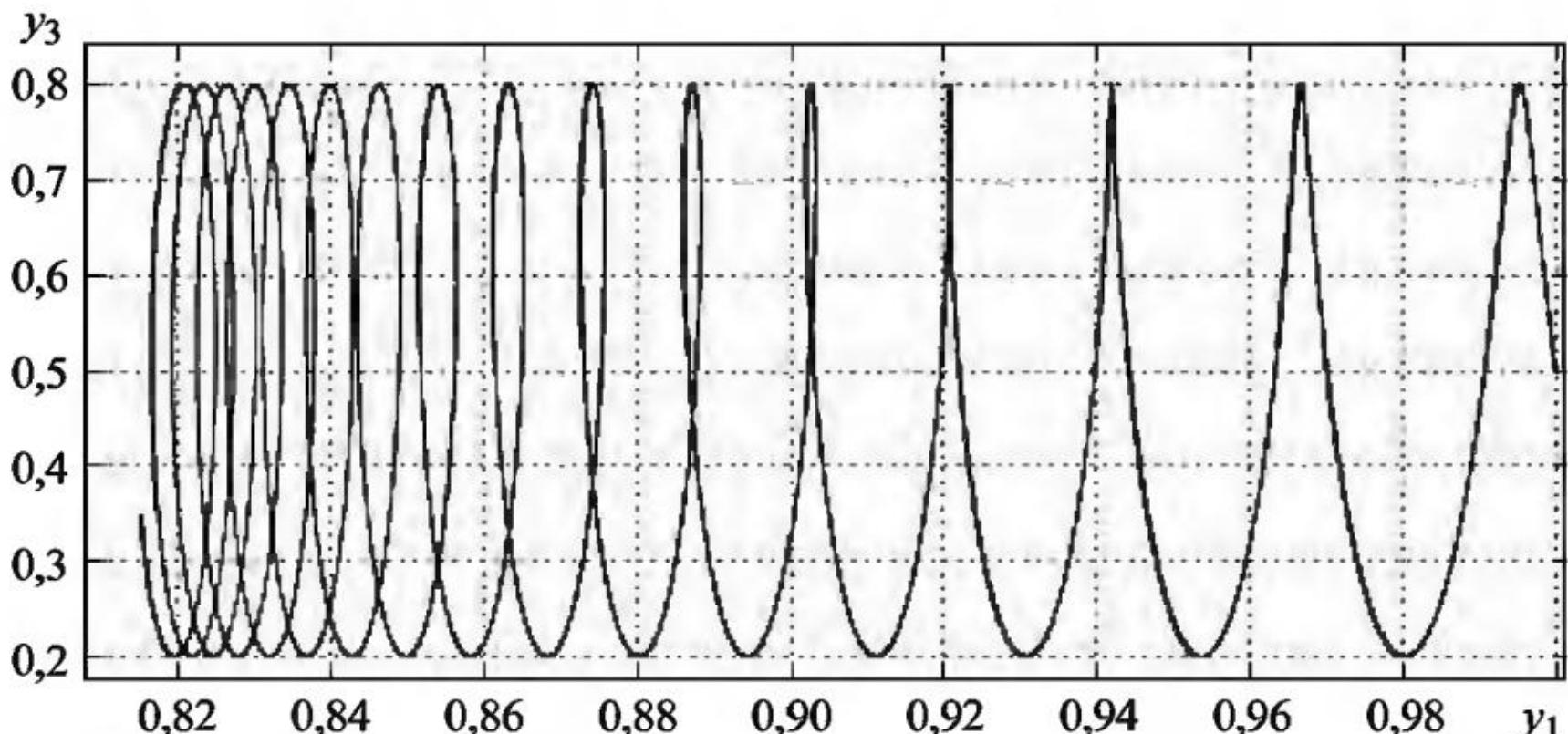


Рис. 4.8

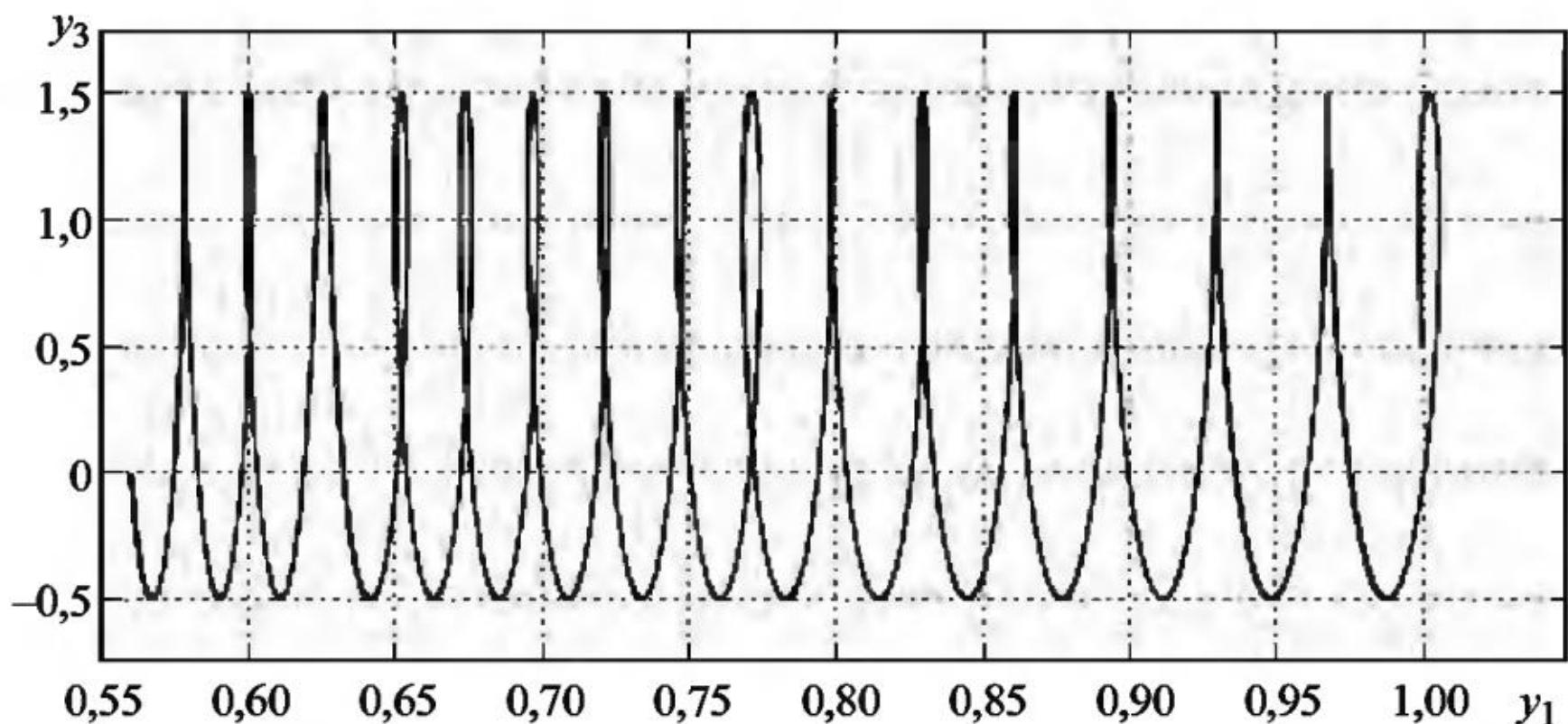


Рис. 4.9

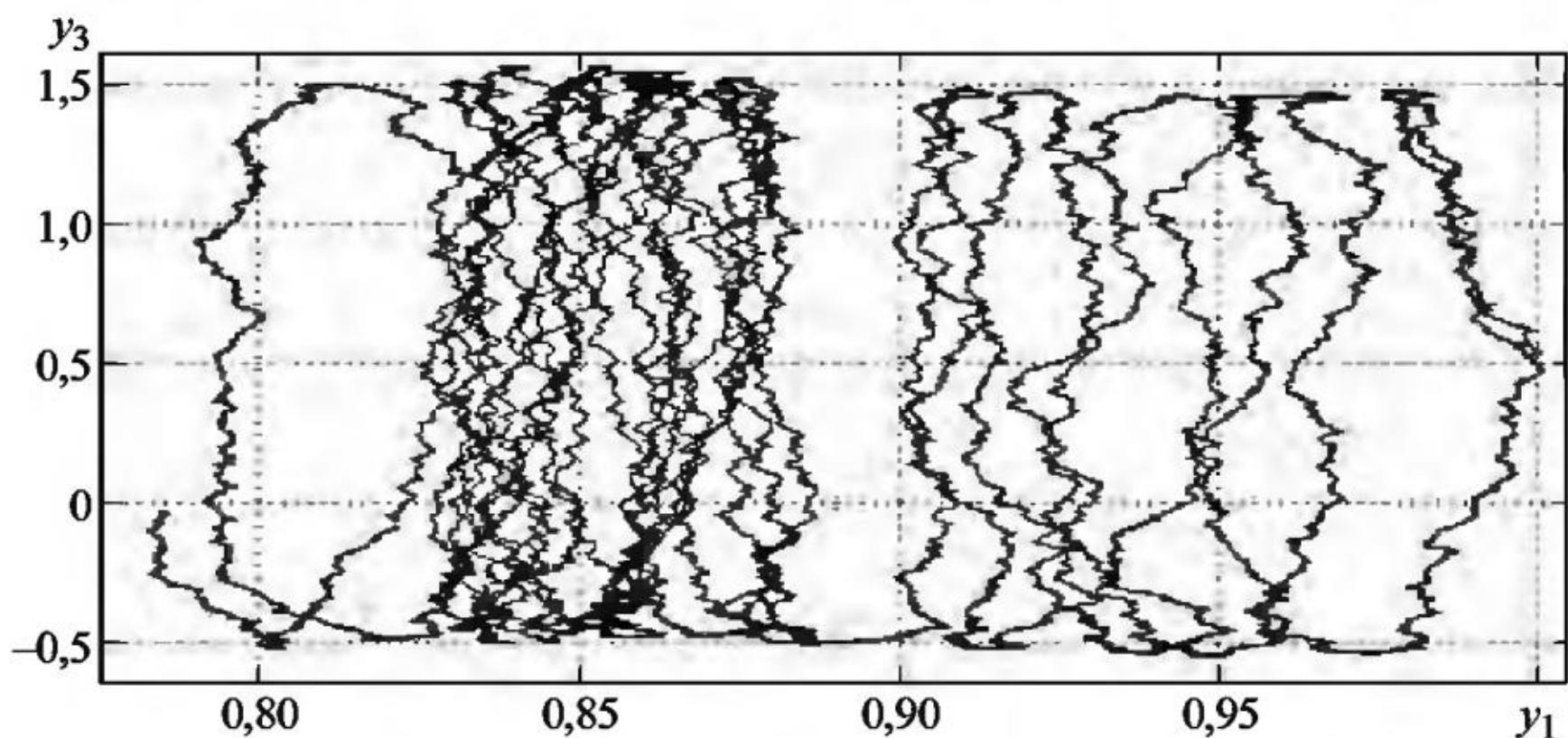


Рис. 4.10

раметрах преимущественно меняется в диапазоне $(0,8, 1)$, однако полный размах выборки $y_1(t)$ гораздо шире.

График ЧФП на рис. 4.12 при $q = 0,3$ по форме и размерам отличен от графика на рис. 4.11, что находится в соответствии с различием графиков на рис. 4.8 и 4.9.

На рис. 4.13 и 4.14 приведены графики ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 , рассчитанные при $q = 1$ и $q = 0,3$, которые очень схожи и по форме, и по размерам и из которых можно сделать заключение о неустойчивости решения системы СДУ (4.2) в обоих случаях. Из этих графиков также можно оценить разброс экстремальных значений угловой скорости вращения вала турбины и видеть общую тенденцию к уменьшению скорости со временем.

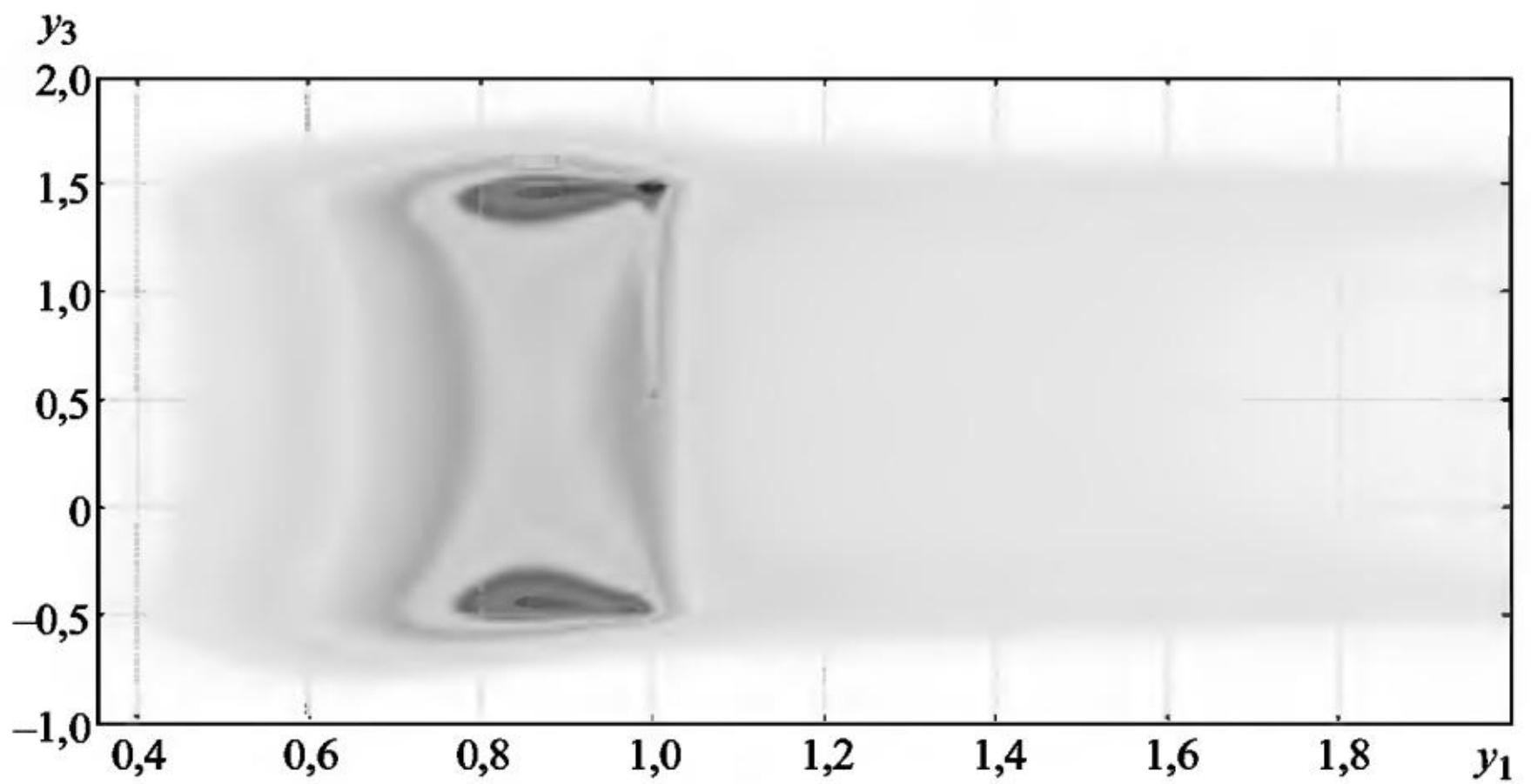


Рис. 4.11

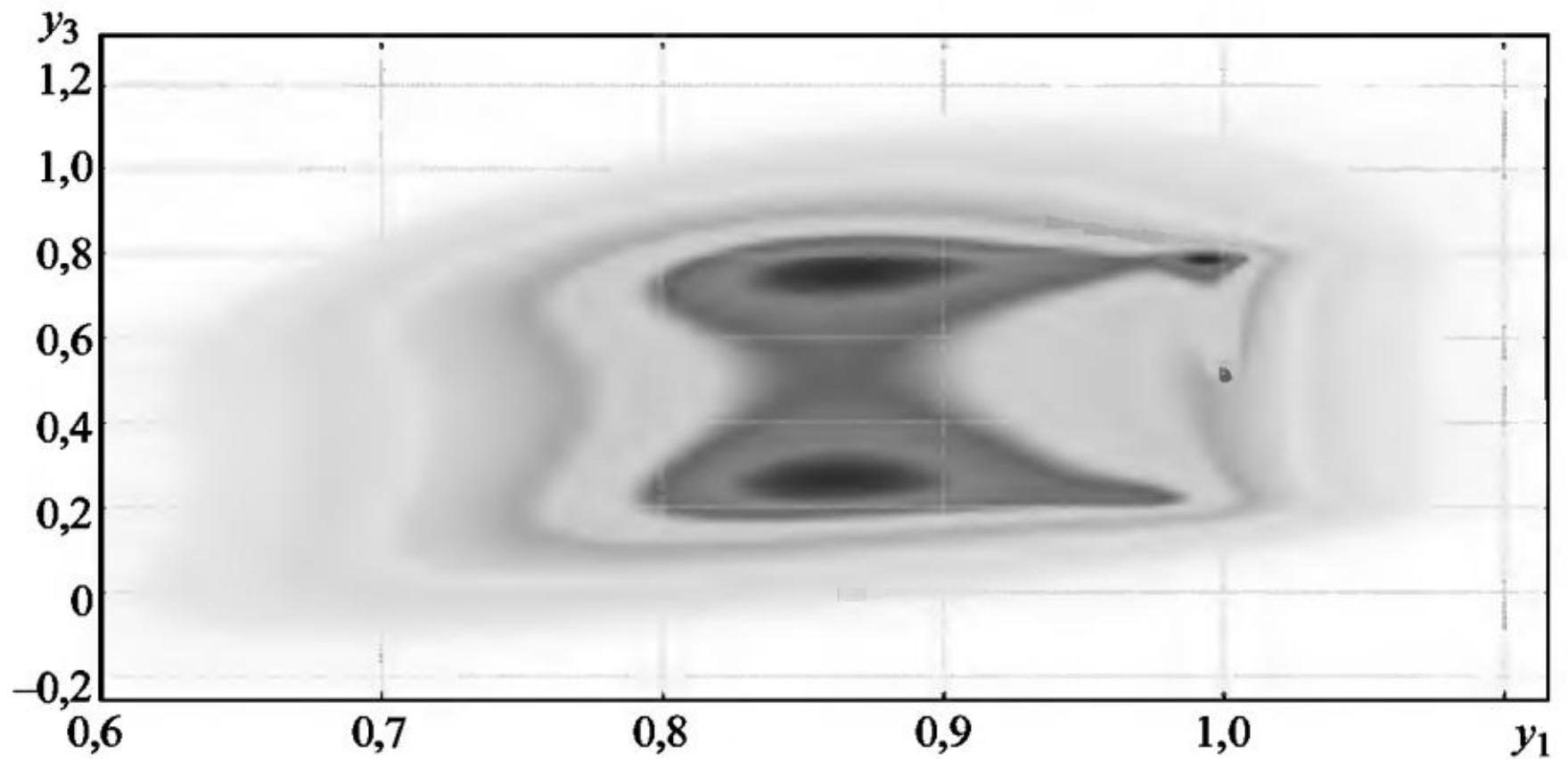


Рис. 4.12

Пример 4.3. Следующая система СДУ описывает колебания точки на струне на плоскости при наличии внутренних шумов:

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= y_3 dt, & y_1(0) &= 0,1, \\
 dy_2 &= y_4 dt, & y_2(0) &= -0,1, \\
 dy_3 &= \left(-ry_1 - c(y_4 + 10^{-2}y_1y_3)y_1 - g \right) dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t), & y_3(0) &= 0, \\
 dy_4 &= \left(-r - c(y_4 + 2 \cdot 10^{-2}y_2y_3) + g \right) dt + \sigma_2 y_2 dw_2(t), & y_4(0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

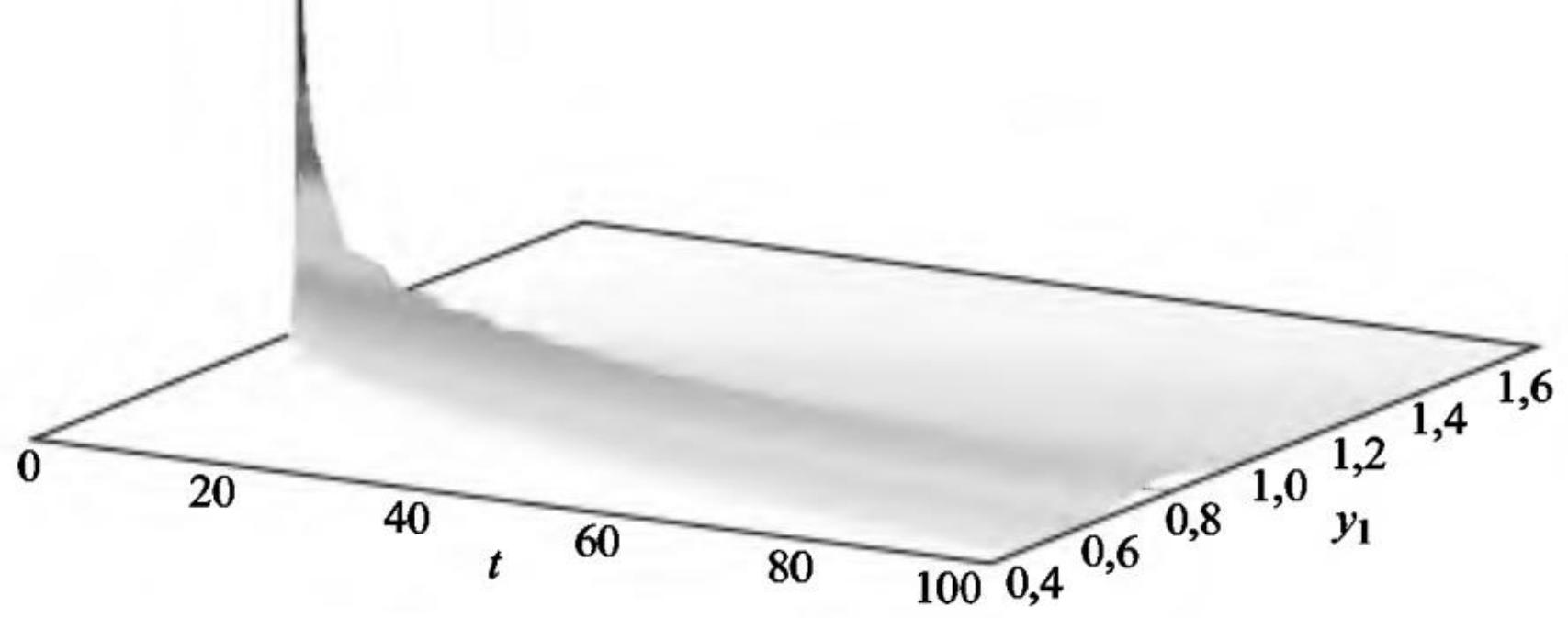


Рис. 4.13

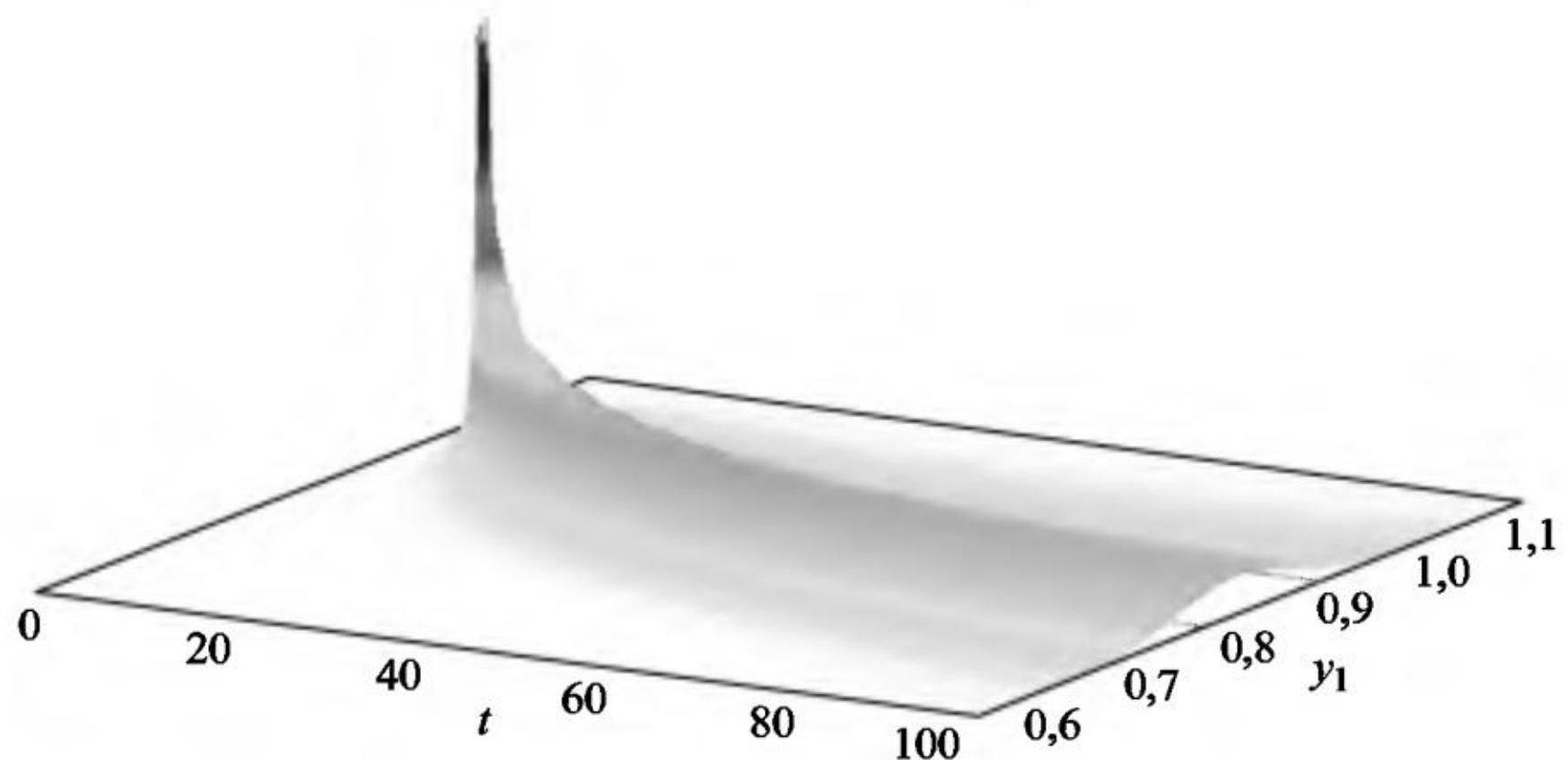


Рис. 4.14

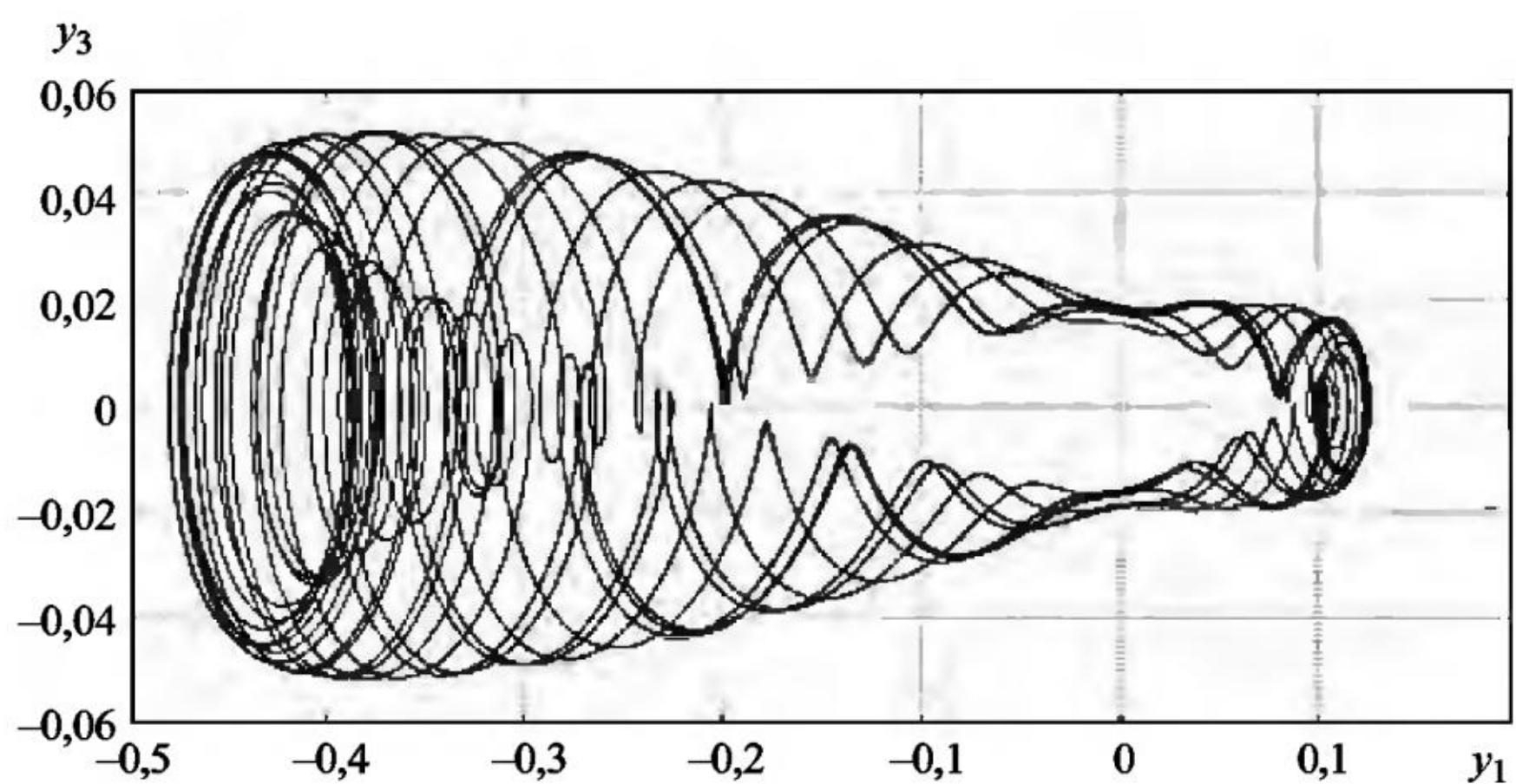


Рис. 4.15

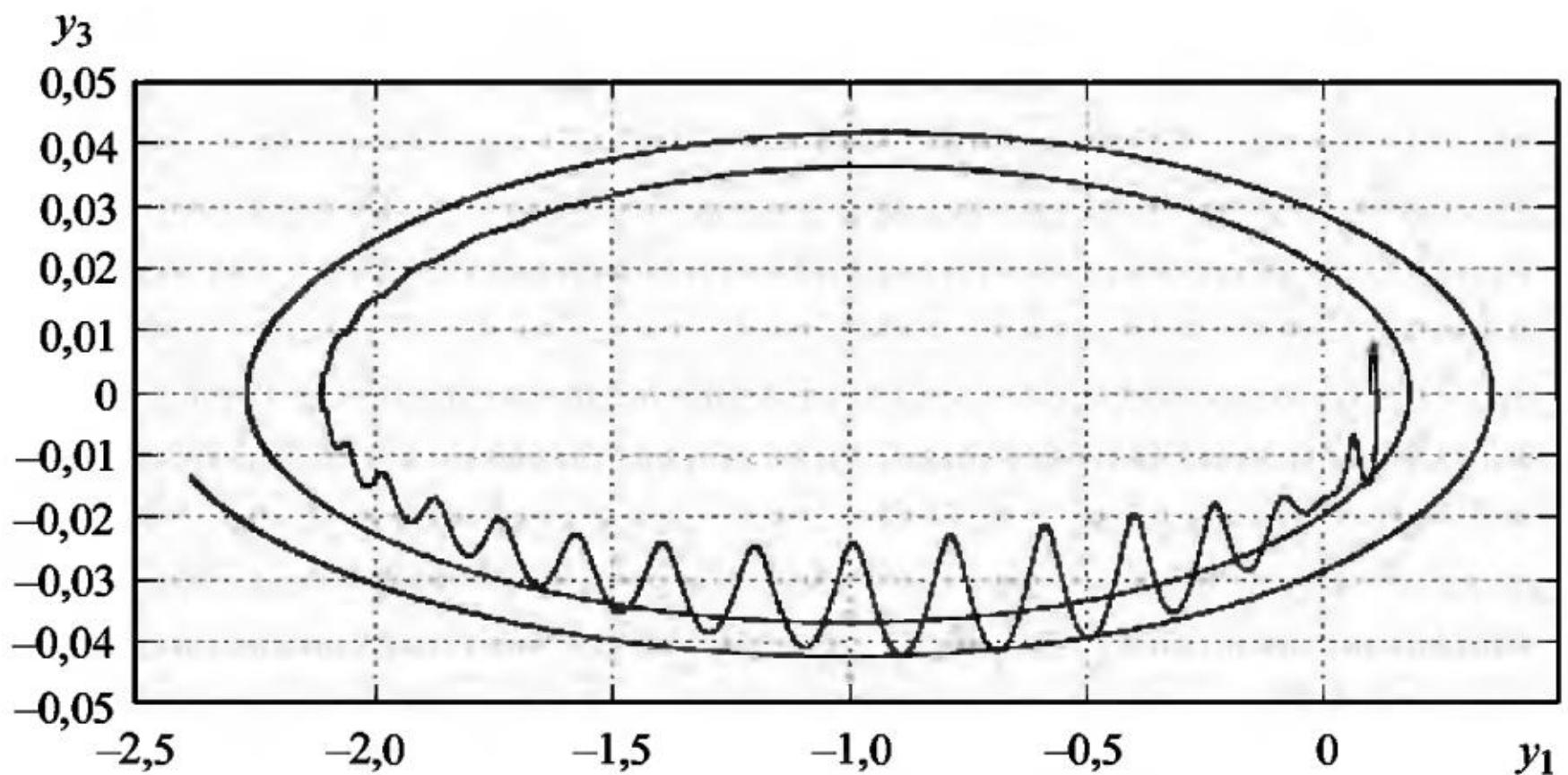


Рис. 4.16

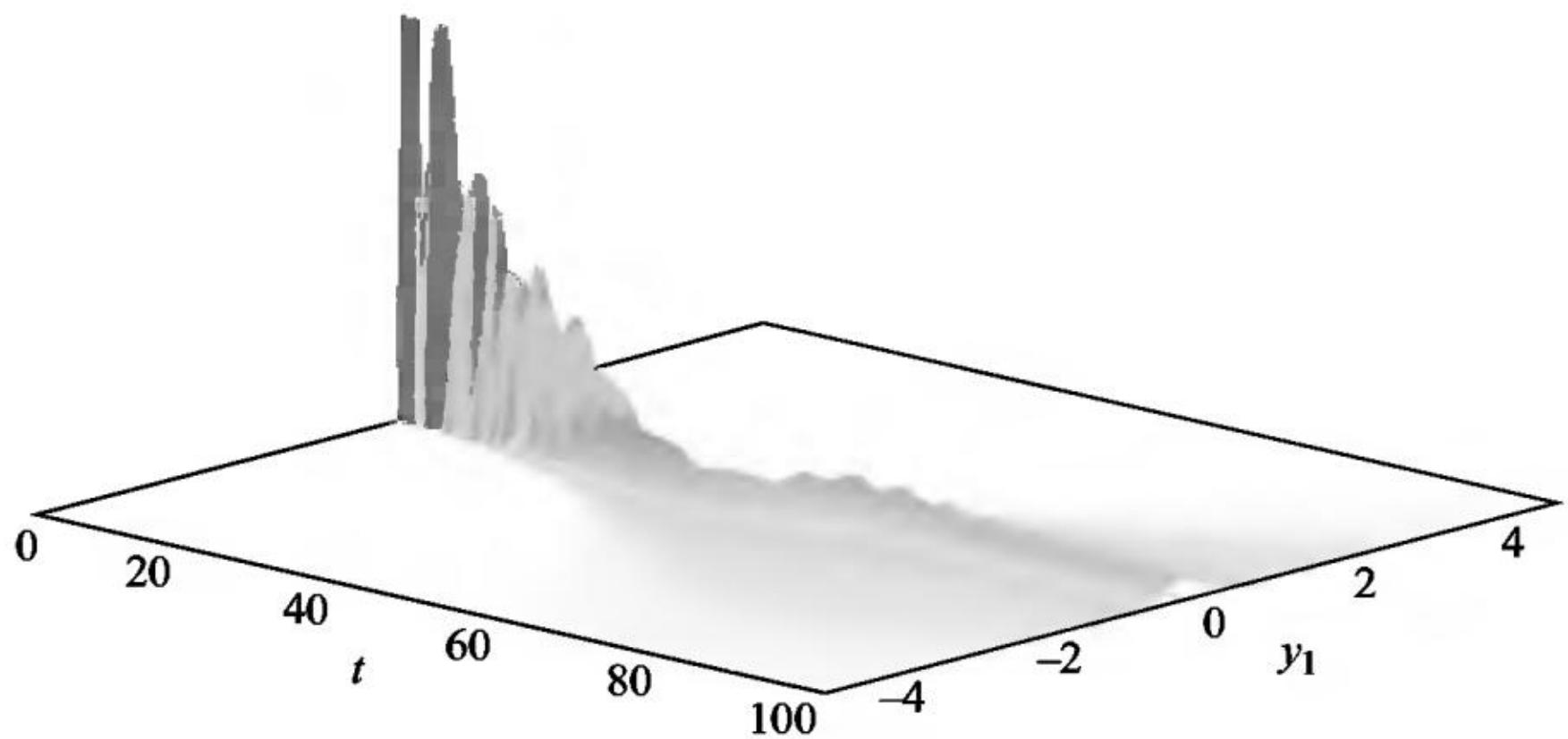


Рис. 4.17

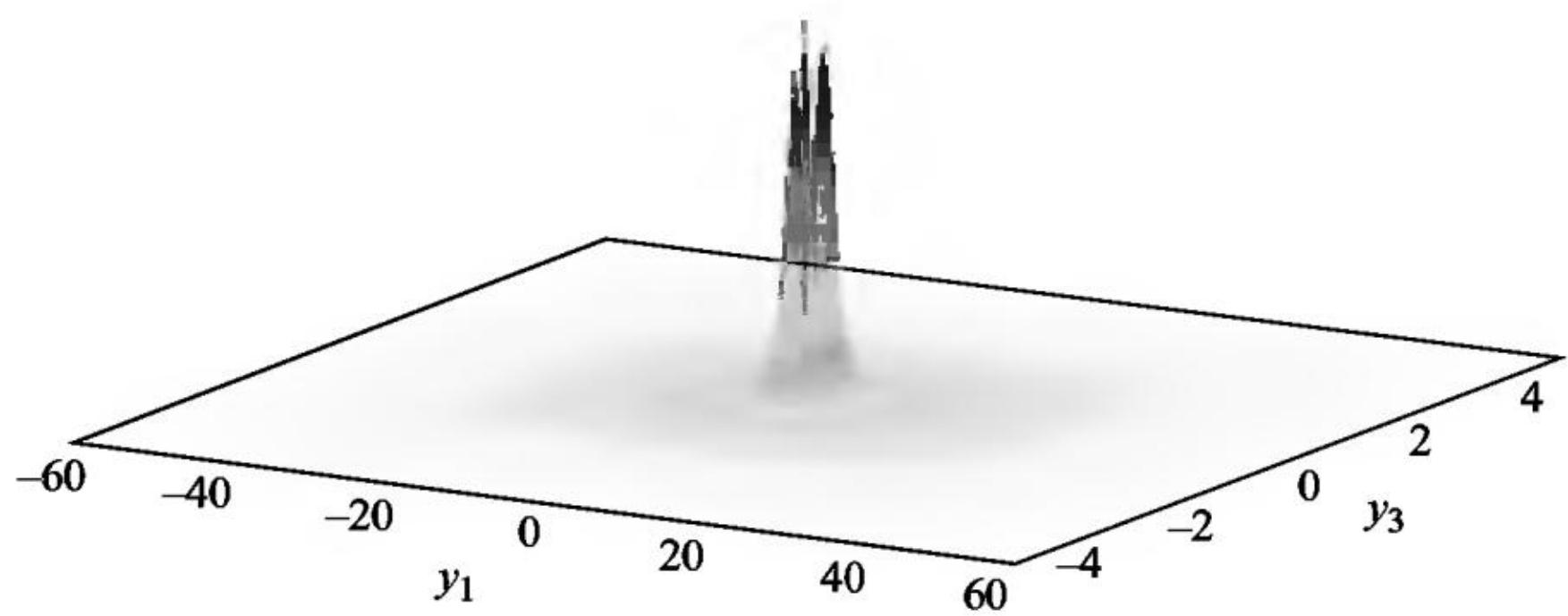


Рис. 4.18

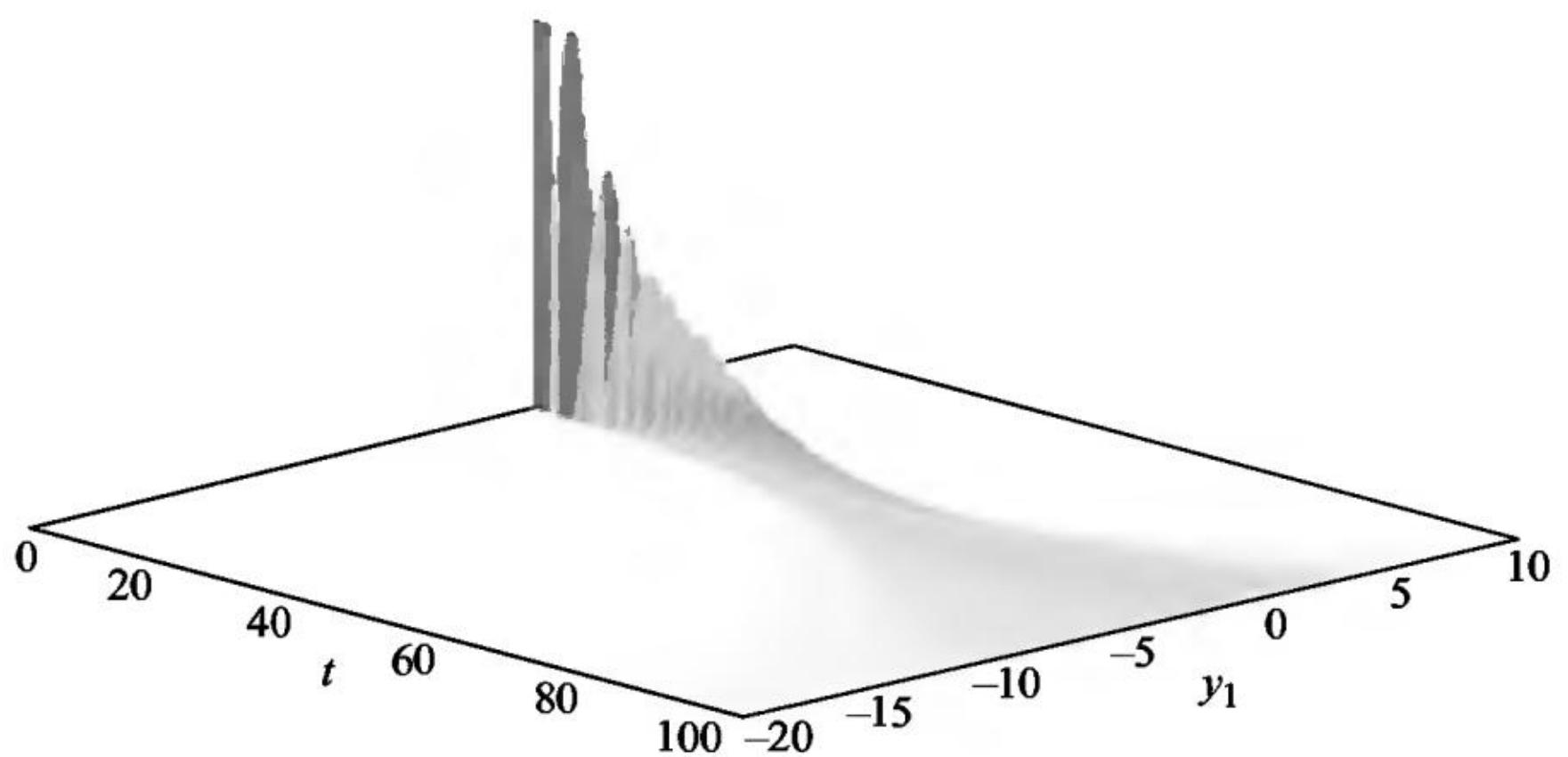


Рис. 4.19

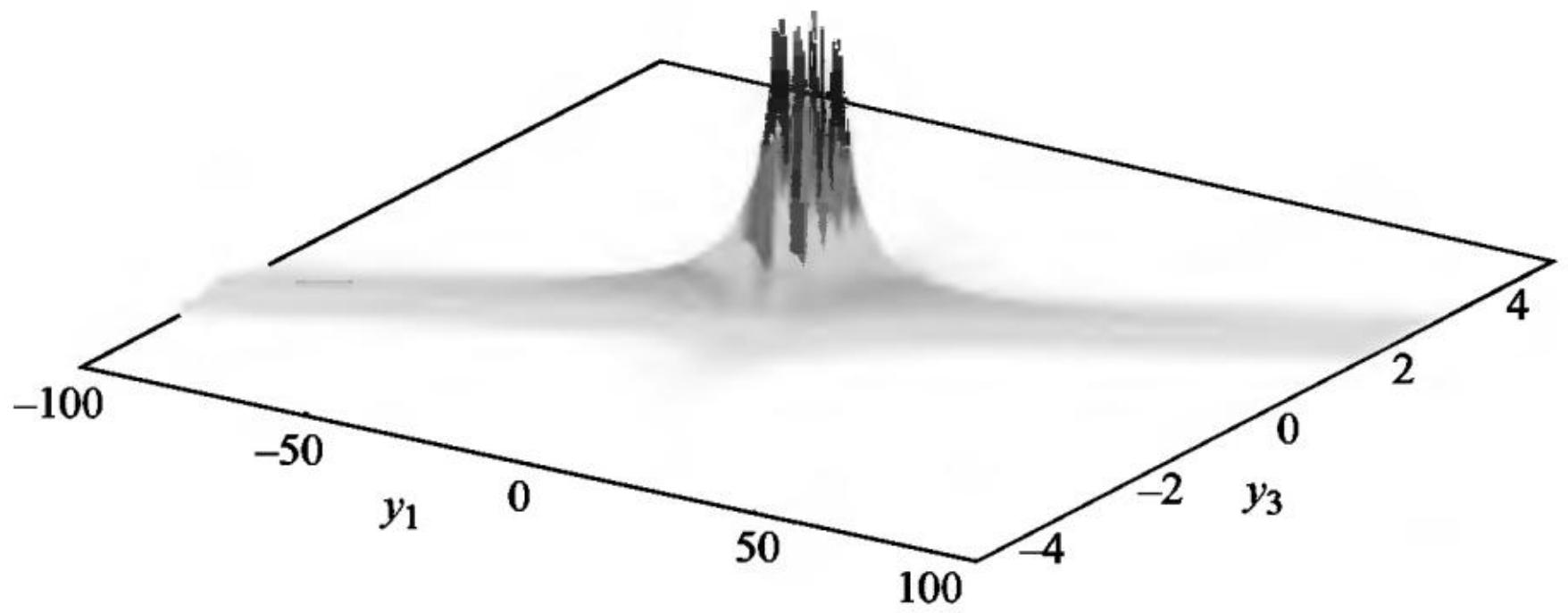


Рис. 4.20

Здесь y_1, y_2 – координаты точки струны, y_3, y_4 – скорости точки вдоль осей y_1 и y_2 , $r = y_2 + 10^{-2} y_1^2$, $g = 9,81 \cdot 10^{-4}$. Принципиально различный характер изменения со временем фазового портрета пары компонент (y_1, y_3) решения сопутствующей системы ОДУ при $c = 0$ и $c = 0,1$ на интервале интегрирования $[0, 500]$ виден из рис. 4.15 и 4.16.

На рис. 4.17 и 4.18 приведены графики ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 и ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_3) численного решения системы СДУ (4.3) при $c = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,01$.

Из графика ЧИК можем видеть колебательный характер движения точки струны со временем, а из графика ЧФП можем оценить область изменения координаты $y_1(t)$ и ее скорости $y_3(t)$. Как видим, контур «бутылки» (см. рис. 4.15) на графике ЧФП не про-

сматривается. На рис. 4.19 и 4.20 приведены аналогичные графики ЧИК и ЧФП, рассчитанные при $c = 0,1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,01$.

Если графики ЧИК на рис. 4.17 и 4.19 во многом схожи по форме, то этого нельзя сказать о графиках ЧФП на рис. 4.18 и 4.20. Это значит, что при $c = 0$ и $c = 0,1$ характер поведения скоростей точки струны принципиально различный. Для расчета ЧИК и ЧФП моделировалось по 10^6 траекторий на 120 ядрах кластера.

5. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРАХ

Параллельные вычисления – это современная многогранная область вычислительных наук, бурно развивающаяся и являющаяся наиболее актуальной в ближайшие десятилетия. Актуальность эта складывается из множества факторов и в первую очередь исходя из потребности в больших вычислительных ресурсах для решения прикладных задач моделирования процессов в физике, биофизике, химии, механике и др. К тому же традиционные последовательные архитектуры вычислителей и схем вычислений находятся в преддверии технологического предела. В то же время технологический прорыв в области создания средств межпроцессорных и межкомпьютерных коммуникаций позволяет реализовать одно из ключевых звеньев параллелизма – эффективное управление в распределении вычислений по различным компонентам интегрированной вычислительной установки [15].

Значимость параллельных вычислений обусловлена тем, что принятие обоснованных решений во многих сферах человеческой деятельности предполагает проведение расширенного математического моделирования с тщательным исследованием возможных вариантов решений с помощью вычислительных экспериментов. При этом появление столь радикально возросших возможностей суперкомпьютерных технологий позволяет разрабатывать углубленные математические модели, максимально точно описывающие объекты реального мира и требующие для своего анализа проведения масштабных вычислений.

Области приложений, в которых суперкомпьютерные вычисления имеют особую значимость:

- В силу невозможности (недопустимости) натурных экспериментов – изучение процессов при ядерном взрыве или серьезных воздействий на природу.
- Изучение влияния экстремальных условий (температур, магнитных полей, радиации и др.) – старение материалов, безопасность конструкций, боевое применение.
- Моделирование наноустройств и наноматериалов, движение заряженных частиц в электромагнитных полях.

- Науки о жизни – изучение генома человека, разработка новых лекарственных препаратов, поведение сообществ хищник–жертва, отклик иммунной системы человека на лекарства.

- Науки о Земле – обработка геоинформации: полезные ископаемые, селевая, сейсмическая и т. п. безопасность, прогнозы погоды, модели изменения климата.

- Моделирование при разработке новых технических устройств – инженерные расчеты, режимы работы гидротурбин и виброударников.

- Разработка систем управления движением космических летательных аппаратов.

- Моделирование протекания химических реакций с катализаторами.

Есть два подхода при построении современных суперкомпьютеров – системы с общей памятью и кластеры. Каждый подход не исключает другого.

В вычислительных системах с общей памятью процессоры имеют доступ ко всей памяти мультипроцессора. Архитектура современных процессоров достигла достаточно высокой сложности, поэтому в настоящее время переход к многоядерным процессорам становится основным направлением повышения производительности вычислительных систем. Многоядерный процессор – это процессор, содержащий два и более (до нескольких десятков) вычислительных ядер, выполненных на одном процессорном кристалле. Процессорных кристаллов может быть до нескольких сотен тысяч. Каждое процессорное ядро может работать отдельно друг от друга, или они вместе могут выполнять одну сложную задачу. При этом процессорные ядра работают на одинаковой частоте.

Способ связи между ядрами:

- разделяемая шина,
- сеть (Mesh) на каналах точка–точка,
- сеть с коммутатором,
- общая кэш-память,
- общая память.

На рис. 5.1 показана архитектура многопроцессорных систем с общей (разделяемой) памятью с однородным доступом к памяти.

Отметим, что системы с общей памятью плохо масштабируются при росте числа вычислительных процессоров. Как правило, современные суперкомпьютеры представляют собой большое число высокопроизводительных серверных компьютеров, соединенных друг с другом локальной высокоскоростной магистралью для достижения максимальной производительности в рамках подхода

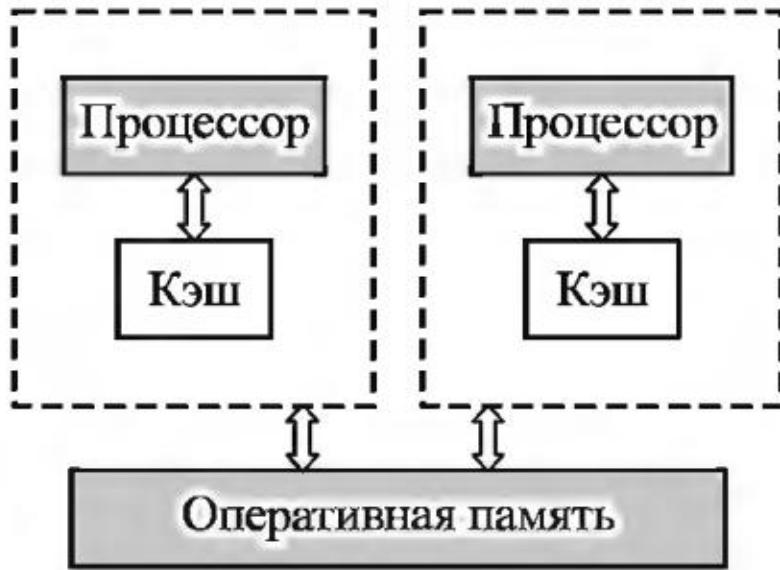


Рис. 5.1

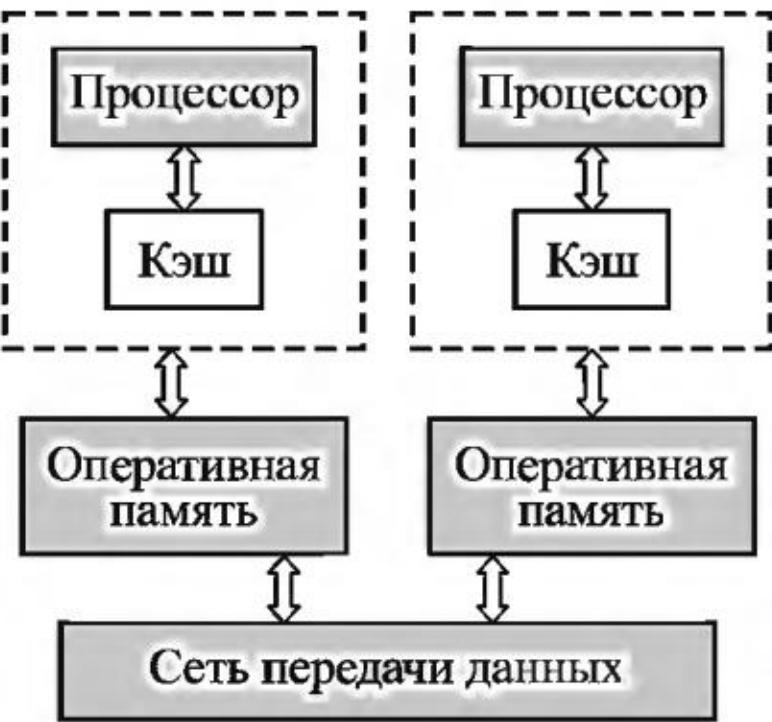


Рис. 5.2

распараллеливания вычислительной задачи. Такая вычислительная система называется кластером. Каждый сервер (*computation node*, узел) кластера в настоящее время – это один или несколько многоядерных процессоров с общей памятью. Так практически строятся почти все современные суперкомпьютеры, и есть тенденция к увеличению количества процессоров в одном узле и ядер в одном процессоре.

На рис. 5.2 показана архитектура многопроцессорных систем с распределенной памятью.

Кластеры масштабируются хорошо до достижения некоторого предела количества узлов в системе. И ухудшение масштабирования происходит из-за возрастающей сложности коммуникационной сети, когда число узлов в системе измеряется уже многими тысячами и даже сотнями тысяч.

Опишем процедуру параллельного программирования на вычислительных системах с общей памятью. Наличие общих данных при параллельных вычислениях приводит к необходимости синхронизации взаимодействий одновременно выполняемых процессов (потоков) команд. Так как нет ограничений на использование общих данных, то программист должен явно специфицировать общие данные и упорядочивать доступ к ним с помощью средств синхронизации. Решение этих вопросов обеспечивает интерфейс OpenMP, являющийся стандартом для программирования на масштабируемых SMP-системах. OpenMP основан на существовании множественных потоков в общедоступной памяти. Несколько нитей управления имеют общее адресное пространство, но разные потоки команд и раздельные стеки. OpenMP использует модель Fork-Join параллельного выполнения: все программы OpenMP начинаются как единственный процесс – главный поток. Главный поток выполняется последовательно, пока не сталкивается с первой областью параллельной конструкции (рис. 5.3).

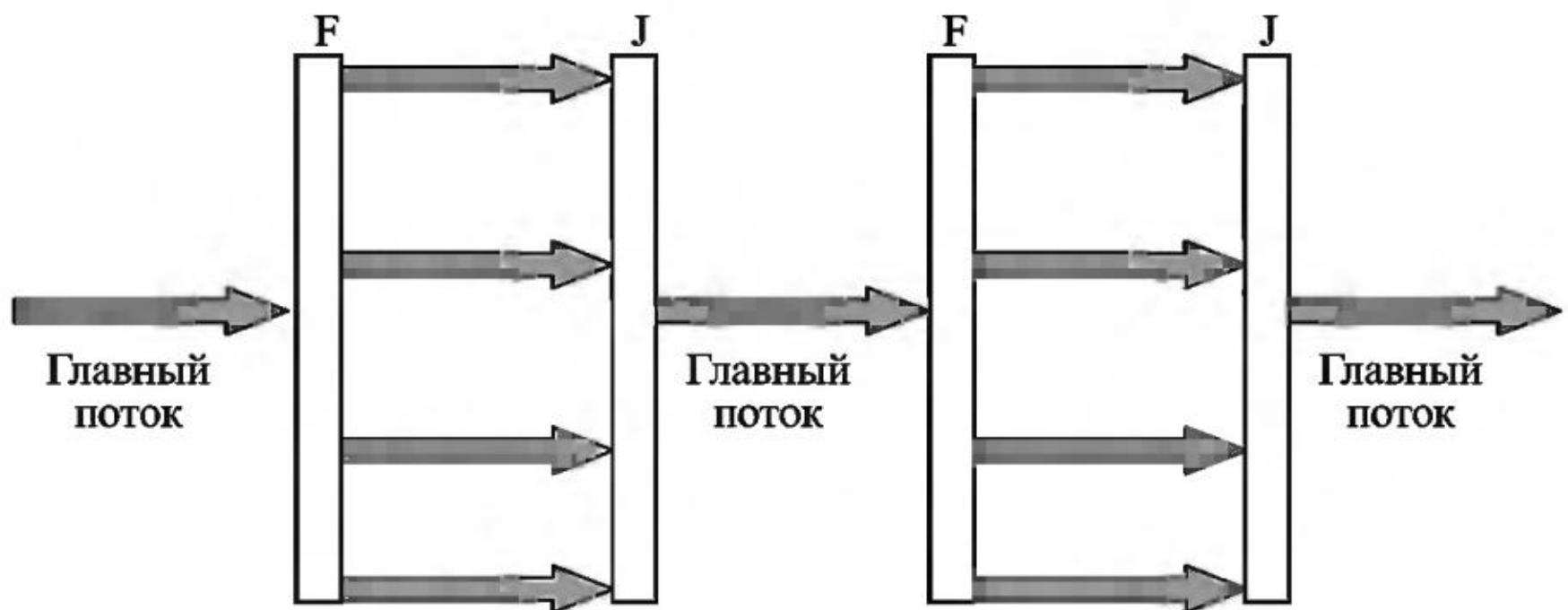


Рис. 5.3

Fork (Ветвление): главный поток создает группу параллельных потоков.

Код программы, который включен параллельной конструкцией в область действия этой конструкции, выполняется параллельно на разных потоках.

Join (Объединение): Когда потоки группы завершают выполнять код программы в области параллельной конструкции, они синхронизируются и закрываются, оставляя только главный поток.

Поскольку в этой модели нет коммуникаций, как в модели передачи сообщений, сдерживающих скорость обработки общих данных, то эта модель в большей степени относится к среднезернистой модели программирования. То есть в этой модели параллельные процессы могут строиться из небольших блоков. Причем параллельные процессы, обрабатывающие такие блоки, как правило, достаточно часто инициируются и завершаются в процессе вычислений.

Организация параллельного программирования на вычислительных системах с распределенной памятью является возможной при использовании тех или иных способов передачи данных между взаимодействующими процессорами. Модель с передачей сообщений подразумевает концепцию построения распределенного приложения, при которой приложение представляется в виде множества процессов, имеющих только локальную память, но способных связываться с другими процессами, посыпая и принимая сообщения. Определяющим свойством модели для передачи сообщений является тот факт, что передача данных из локальной памяти одного процесса в локальную память другого процесса требует выполнения операций обмена (приема-передачи) обоими процессами. Решение этих вопросов обеспечивает интерфейс – MPI (message passing interface), являющийся стандартом для программирования практических на всех современных масштабируемых

суперкомьютерах. MPI является библиотекой функций обмена данными между процессами, реализованной для языков С (C++) и Fortran-77 (Fortran-90). Само название MPI указывает на модель параллельного программирования, которую поддерживает MPI – модель передачи сообщений. MPI является самой распространенной системой параллельного программирования, поддерживающей данную модель. В модели передачи сообщений каждый процесс имеет свое собственное локальное адресное пространство, т. е. процессы, выполняющиеся параллельно, имеют раздельные адресные пространства. Обработка общих данных и синхронизация осуществляются посредством передачи сообщений.

Центральными в идеологии MPI являются механизмы синхронизации и обмена данными между процессами. Операции связи между процессами можно подразделить на:

- двухточечные, необходимые для того, чтобы послать сообщение от одного именованного процесса к другому (эти операции могут использоваться для обеспечения локальной и неструктурной связи);
- групповые, необходимые для того, чтобы инициировать коллективные операции связи.

В рамках данной модели параллельного программирования реализуются две подмодели с точки зрения построения ветвей параллельной программы: MPMD – модель вычислений (много процессов, функционирующих под управлением своих собственных программ, много данных) и SPMD – модель вычислений (много процессов, функционирующих под управлением одной и той же программы, много данных).

Поскольку в этой модели передачи сообщений коммуникации сдерживают скорость обработки общих данных, то эта модель в большей степени относится к крупнозернистой модели программирования. Для параллельных систем с передачей сообщений оптимальное соотношение между вычислениями и коммуникациями обеспечивают методы крупнозернистого распараллеливания, когда параллельные алгоритмы строятся из крупных и редко взаимодействующих блоков. Многие задачи из прикладных областей достаточно эффективно распараллеливаются крупнозернистыми методами.

Таким образом, MPI-программа – это некоторый набор ветвей параллельной программы, которые реализуются в виде параллельно исполняемых и взаимодействующих друг с другом процессов. Ветви реализуются разными алгоритмами (разными программами) или одним и тем же алгоритмом (одной программой).

6. РЕАЛИЗАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРАХ

Использование ММК для численного анализа решений СДУ позволяет оценивать математическое ожидание любых функционалов от решений либо рассчитывать характеристики типа ЧИК или ЧФП и зачастую является единственным конструктивным способом анализа решений нелинейных систем СДУ на практике. Использование ММК для нахождения решений краевых задач математической физики на основе вероятностных представлений подразумевает необходимость численного решения соответствующих СДУ и вычисления интегралов вдоль моделируемых траекторий. Требование оценки математического ожидания функционалов от решений СДУ с высокой точностью либо построения ЧИК и ЧФП приводит к необходимости моделирования ансамблей траекторий размера 10^9 – 10^{13} . Это делает ММК неприменимыми на ПК из-за высокой трудоемкости алгоритмов и многосуточных вычислений, откуда естественно следует необходимость использования для вычислений мощных суперкомпьютеров с большим числом процессоров.

Для оценки математического ожидания функционалов от решений СДУ вида

$$J = EF(y(\cdot)) \quad (6.1)$$

используется стандартная формула статистики

$$\hat{J} = \frac{1}{N_{\text{tr}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{tr}}} F^{(m)}(y(\cdot)), \quad (6.2)$$

где N_{tr} – размер ансамбля моделируемых траекторий решения СДУ. Точность оценки (6.2) определяется величиной $\sqrt{D_F / N_{\text{tr}}}$, где D_F – дисперсия оценки. Это значит, что при необходимости повысить точность оценки на одну значащую цифру потребуется увеличить размер ансамбля в 100 раз.

ММК часто рекомендуются для нахождения решений краевых задач для эллиптических и параболических уравнений с использованием вероятностного представления. Например, для одномерной задачи Дирихле

$$\frac{1}{2}\sigma^2(y)\frac{d^2u}{dy^2} + f(y)\frac{du}{dy} + 1 = 0 \quad (6.3)$$

в интервале $[a, b]$ с граничными условиями $u(a) = u(b) = 0$ решение $u(y_0)$ с траекториями, стартующими из y_0 , может быть представлено в вероятностном виде

$$u(y_0) = E\tau(y_0), \quad (6.4)$$

где τ – время первого выхода решения скалярного СДУ (1.1) из интервала $[a, b]$. При использовании ММК для вычисления решений краевой задачи с помощью вероятностного представления время моделирования каждой отдельной траектории решения соответствующего СДУ до ее выхода на границу заданной области неопределенно и может быть очень большим. Кроме того, распределение случайной величины τ сильно асимметрично. Но обычно решение краевой задачи требуется получить с достаточно высокой точностью, а это потребует моделирования ансамбля траекторий СДУ размеров 10^9 – 10^{13} .

Опишем некоторые способы распараллеливания статистических алгоритмов.

Алгоритмы ММК для численного анализа решений СДУ в основном состоят из двух типов: первый связан с оценкой математического ожидания решения СДУ на всем интервале интегрирования и отличается одинаковой продолжительностью моделирования всех траекторий из ансамбля; второй связан с моделированием траекторий до их первого выхода на границу заданной области и отличается различной продолжительностью моделирования каждой траектории из ансамбля. При этом фиксируется первый выход моделируемой последовательности $\{y_n\}$ за границу заданной области и фиксируется количество итерационных шагов n_m , осуществленных до этого выхода.

В первом способе распараллеливания оценка математического ожидания решения в узле сетки t_n осуществляется по формуле

$$m_n = \frac{1}{N_{tr}} \sum_{m=1}^{N_{tr}} y_n^{(m)}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (6.5)$$

Здесь $y_n^{(m)}$ – значение m -й реализации решения СДУ в n -м узле сетки. При больших N_{tr} и N потребуются большие затраты машинного времени, поэтому необходимо распараллеливание вычислений. Поскольку в ММК моделируются независимые реализации решения СДУ, это допускает эффективную организацию их параллельного или, можно сказать, распределенного выполнения на многопроцессорном кластере. Схема распараллеливания в данном случае проста: различные процессоры вычислительной системы осуществляют полностью независимое решение, т. е. вычисляют последовательности, полученные на основе разных (в каждом процессоре) псевдослучайных чисел. Таким образом, моделируется последовательность, построенная на выборке независимых по процессорам одинаково распределенных случайных величин.

Пусть K – количество процессоров в вычислительной системе, реализующей алгоритм. Положим $M_k = N_{\text{tr}} / K$ – размер ансамбля на одном процессоре. Тогда формула (6.5) в параллельном исполнении имеет вид

$$m_n = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{M_k} \sum_{m=1}^{M_k} y_n^{(m,k)}. \quad (6.6)$$

Здесь $y_n^{(m,k)}$ – значение m -й реализации решения СДУ в n -м узле сетки, полученное на k -м процессоре. Как правило, у многочисленных решаемых задач из разных областей знаний большое количество машинного времени многопроцессорного вычислительного комплекса уходит на обмен данными между процессорами и на время простоя процессоров при ожидании сообщений [15, 16]. При распараллеливании данного алгоритма подобные временные затраты сведены к минимуму: здесь время, затраченное на финальное осреднение независимых результатов, практически играет небольшую роль, особенно, если выполняется моделирование большого числа независимых реализаций, а межпроцессорных обменов в процессе моделирования вообще нет. При этом структура данного алгоритма позволяет добиться обратно пропорциональной зависимости величины времени расчета случайных оценок от числа процессоров (современные вычислительные кластеры строятся на основе, как правило, однотипных процессоров). Это означает, что распараллеливание позволяет добиться эффективного уменьшения среднего времени ЭВМ, затрачиваемого на моделирование одного выборочного значения случайной оценки. Говоря другими словами, эффективность распараллеливания ал-

горитмов для расчета оценок типа (6.5) будет достаточно высокой, близкой к 100 %.

Второй способ распараллеливания связан с моделированием траекторий до их первого выхода на границу заданной области и отличается различной продолжительностью моделирования каждой траектории из ансамбля. При этом фиксируется первый выход моделируемой последовательности $\{y_n\}$ за границу заданной области и фиксируется количество итерационных шагов n_m , осуществленных до этого выхода. Под итерационным шагом здесь понимается вычисление следующего значения y_{n+1} . После чего процесс моделирования начинается заново из точки y_0 . Формула оценки среднего времени до первого выхода траекторий, стартующих из y_0 , имеет вид

$$\hat{\tau}(y_0) = \frac{1}{M^{\min}} \sum_{m=1}^{M^{\min}} n_m h. \quad (6.7)$$

Здесь M^{\min} – задаваемое минимальное количество выходов, определяющее размер ансамбля, h – шаг равномерной временной сетки. Заметим, что в отличие от первого алгоритма, здесь шаг h должен быть достаточно малым, чтобы при фиксации момента выхода траектории за границу области не было большой потери точности оценки. Как и в предыдущем алгоритме, здесь моделируются независимые реализации решения СДУ, и это позволяет эффективно организовать их параллельное выполнение. Положим $M_k^{\min} = M^{\min} / K$. Тогда в параллельном исполнении формулу (6.7) можно записать в виде

$$\hat{\tau}(y_0) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{M_k^{\min}} \sum_{m=1}^{M_k^{\min}} n_m^{(k)} h. \quad (6.8)$$

Здесь $n_m^{(k)}$ – количество итерационных шагов, осуществленных до выхода k -й реализации на k -м процессоре. Отметим, что по окончании моделирования число выходов реализаций на границу области может сильно различаться от процессора к процессору. Главное, чтобы суммарное число выходов было не меньше M^{\min} .

Схема распараллеливания здесь иная, чем в первом алгоритме, так как необходимо постоянно, через некоторое заданное количество итерационных шагов, сканировать по всем процессорам величины M_k^{\min} , вычислять их сумму и проверять на достижение заданного общего минимума M^{\min} . Количество итерационных шагов в каждом процессоре до выхода реализации за границы об-

ласти сильно зависит от параметров краевой задачи, причем приблизительное среднее число таких шагов неизвестно. Частота обменов данными между компьютерами оказывает сильное влияние на время выполнения параллельного алгоритма. Поэтому необходимо оптимизировать взаимодействия процессоров и тем самым минимизировать время решения задач при проведении большого количества численных экспериментов.

Описываемый способ распараллеливания реализуется двумя алгоритмами с разными типами взаимодействий параллельных процессов (синхронными и асинхронными). В этом способе параллельные вычисления оптимизируются по двум параметрам: вначале а) вычисляется (в каждом процессоре) размер временного интервала I_s (рис. 6.1), через который потом осуществляются межпроцессорные обмены данными и, затем, б) выбираются типы и схемы межпроцессорных обменов.

Интервал I_s измеряется в количествах итерационных шагов и устанавливается одинаковым на всех процессорах. При вычислении интервала I_s его размер динамически подстраивается к параметрам решаемой задачи. Поскольку алгоритм решения задачи один и тот же на всех процессорах, то и время выполнения одного итерационного шага будет одинаковым на всех процессорах. На рис. 6.1 схемы организации процесса вычислений для синхронного алгоритма введены следующие обозначения:

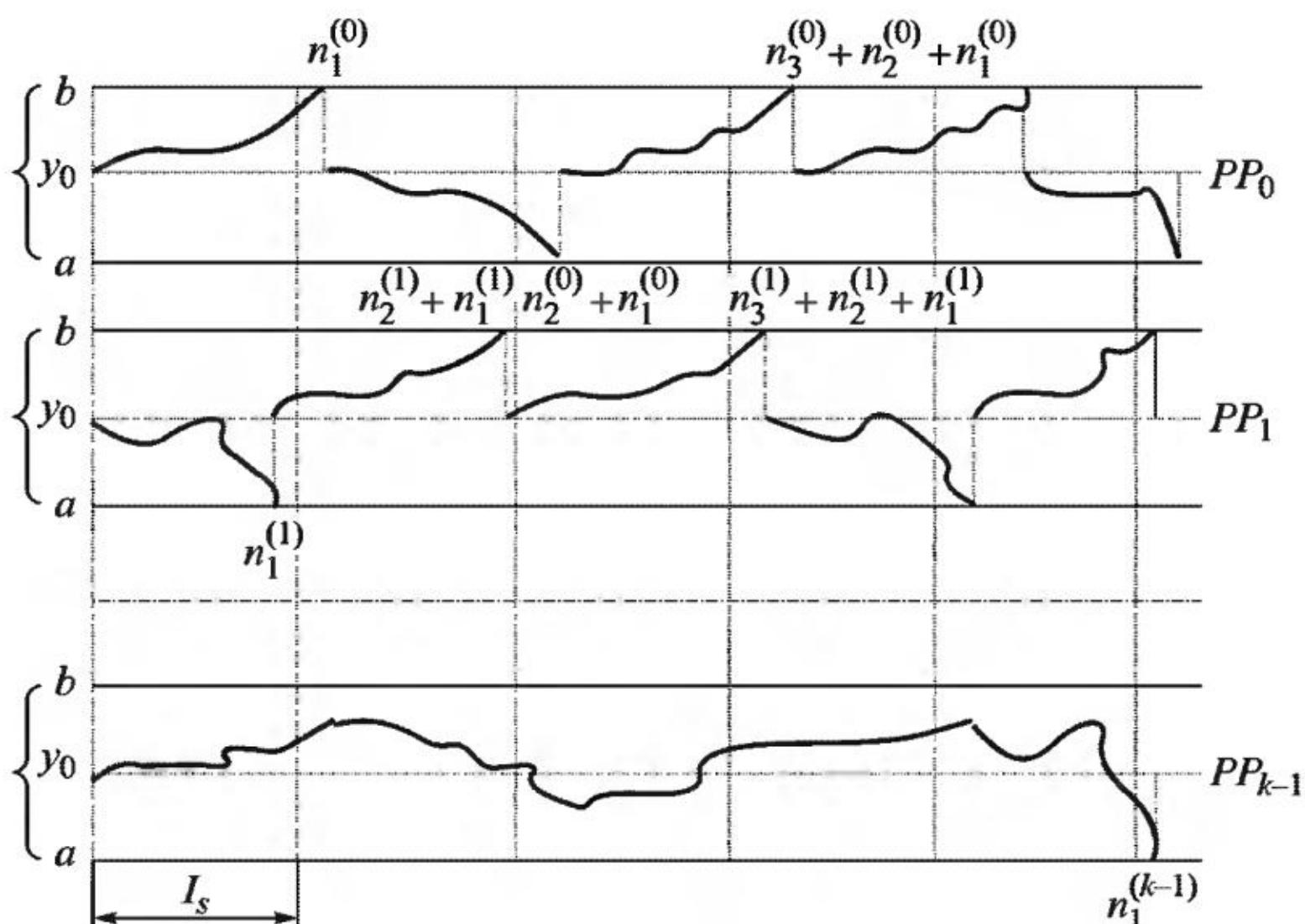


Рис. 6.1

PP_i – это логические MPI-номера процессоров [17], фигурными скобками обозначен диапазон для процессов, кривыми линиями обозначены моделируемые траектории, $n_m^{(k)}$ – количество итераций (шагов) до соответствующего выхода за границу, I_s – интервал, через который процессоры взаимодействуют друг с другом. При вычислении I_s используется синхронная, редуцированная MPI-функция (MPI_Allreduce(...)) [17].

Предлагается следующая стратегия динамического выбора размера интервала I_s . Пусть GSM_k^{\min} – текущее суммарное (глобальное) по всем процессорам количество выходов реализаций, а через GSn_k обозначено текущее суммарное (глобальное) по всем процессорам количество итерационных шагов, связанных с достигнутыми выходами.

1. В начальный момент вычислений в каждом процессоре устанавливается некоторый размер интервала $I_s = N_{I_s}$.

2. Если $GSM_k^{\min} = 0$, то все процессоры увеличивают размер интервала I_s в два раза. Таким образом, все процессоры в следующий раз выйдут на взаимодействие уже через интервал в два раза больший предыдущего.

3. Если $GSM_k^{\min} \neq 0$ и $GSn_k \neq 0$, то каждый процессор присваивает своей переменной I_s значение $C \cdot (GSn_k) / (GSM_k^{\min})$. После этого I_s больше не меняется.

Здесь специально отметим, что суммируются только те итерационные шаги, которые связаны с фактом выхода за границы области. Отметим также, что в результате редуцированной (MPI-) операции суммирования значения счетчиков GSM_k^{\min} и GSn_k будут находиться в каждом процессоре.

В решаемой задаче на каждом интервале I_s суммируются по всем процессорам три величины, накапливаемые в течение текущего интервала: LM_k^{\min} – счетчик количества выходов реализаций на границы области, LS_{nk} – счетчик суммарного количества шагов, связанных с этими выходами, и LS_{vk} – счетчик вторых моментов.

После вычисления интервала I_s следует выбор типа и схемы взаимодействий процессоров. Вычисления продолжаются в двух вариантах: 1) с синхронными межпроцессорными взаимодействиями или 2) с асинхронными взаимодействиями.

В алгоритме с синхронными межпроцессорными взаимодействиями схема обменов – «взаимодействующие равные» (рис. 6.2).

Суммирование указанных счетчиков осуществляется синхронной редуцированной MPI-функцией (MPI_Allreduce(...)).

В алгоритме с асинхронными межпроцессорными взаимодействиями схема обменов – «управляющий–рабочие» (рис. 6.3).

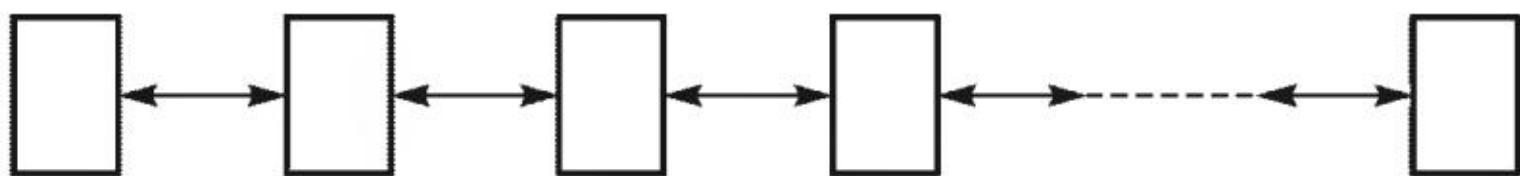


Рис. 6.2.

Нулевой процессор – управляющий, все остальные – рабочие. Управляющий принимает от рабочих счетчики, суммирует их и передает рабочим флаг завершения вычислений. Рабочие процессоры взаимодействуют с управляющим процессором асинхронно.

Распараллеливание первого алгоритма решения задачи в данном случае просто и осуществляется методом распределения витков цикла по процессорам. Распараллеливание реализуется в системе параллельного программирования MPI. Взаимодействия между процессорами осуществляются в самом конце вычислений с помощью коллективной редуцированной функции суммирования — `MPI_Allreduce(. . .)`. Во втором алгоритме моделируются независимые реализации случайных процессов с периодическими коллективными взаимодействиями между процессорами для проверки выходов (суммарных по всем процессорам) реализаций за границы заданной области. Эти взаимодействия реализуются с помощью той же коллективной редуцированной функции. Одной функцией суммируются элементы одномерных, локальных (в каждом процессоре) массивов из двух элементов. В одном адресе (ячейке) массива процессоры накапливают количество выходов реализаций за границы заданной области (счетчик LM_k^{\min}), в другом адресе — количество итераций (шагов), осуществленных до выходов за данный период (счетчик LSn_k). Это оптимизирует количество взаимодействий и время взаимодействий. Если сумма выходов больше заданного минимума или равна ему, то параллельный процесс вычислений завершается. В некоторых процессорах с большой вероятностью имеются долговременные незавершенные реализации, которые в данной оценке уже не учитывают-

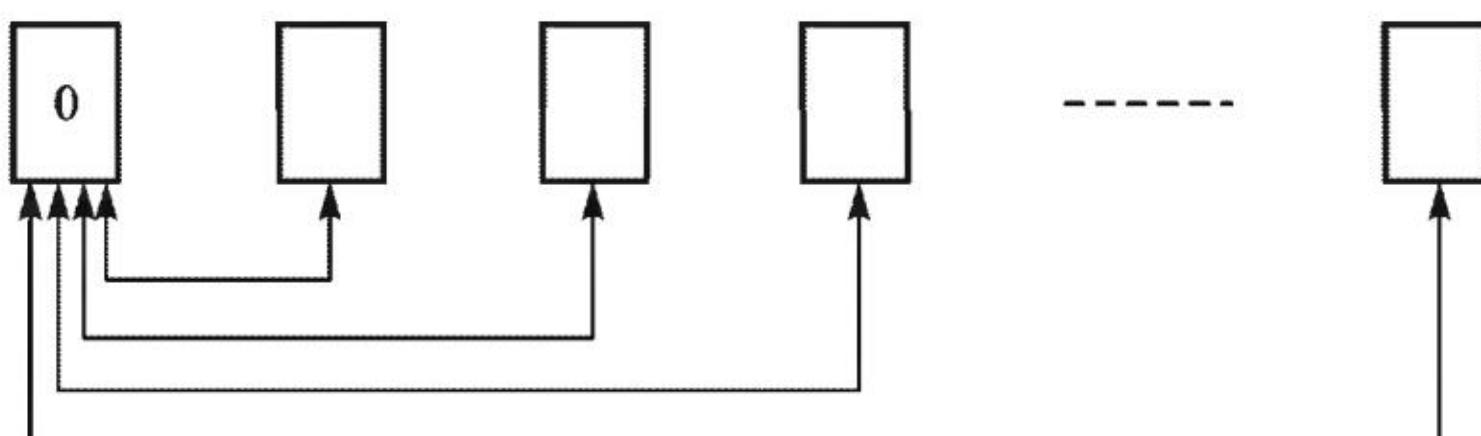


Рис. 6.3.

ся, хотя в принципе программа может быть модернизирована для доведения всех оставшихся реализаций до момента выхода.

Кроме хорошего распараллеливания на системах с распределенной памятью, рассматриваемые алгоритмы и, вообще, широкий круг задач, решаемых методом ММК, идеален для векторных вычислений. Векторное исполнение можно отнести к локальной параллелизации кода программы, реализующейся на уровне одного процессора. Программы решаемых задач за счет векторизации вычислений ускоряются на 50–60 % (на каждом процессоре) по сравнению с этими же программами, но без векторизации вычислений.

В программе, реализующей первый и второй алгоритмы, при достаточно больших значениях величины суммирования N_{tr} в формуле (6.5) и относительно небольшом количестве процессоров (порядка 20–50) величина M_k – количество суммирований в каждом процессоре – тоже будет большой. Чтобы уменьшить потери точности при вычислениях, в каждом процессоре величина M_k представляется в виде произведения $M_k = M_l \times B$, и величины M_l и B берутся приблизительно одинаковыми. Например, если $M_k = 10^{11}$, то M_l и B можно взять равными соответственно 10^6 и 10^5 . И, таким образом, суммирование разбивается на два этапа, на каждом из которых объем суммирований приблизительно одинаковый. Теперь формула (6.6) выглядит следующим образом:

$$m_n = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \frac{1}{M_l} \sum_{m=1}^{M_l} y_n^{(b,m,k)}. \quad (6.9)$$

Точность расчетов при больших N_{tr} особенно важна, если по аналогичной формуле вычисляется дисперсия, где суммируемые величины нужно возводить в квадрат.

В решаемых задачах необходимый объем выборки базовых случайных чисел очень велик ($\approx 2 \cdot 10^{14}$), поэтому целесообразно использовать «длиннопериодные» псевдослучайные последовательности. При этом важно, чтобы каждый процессор моделировал свои независимые от всех других процессоров выборки псевдослучайных чисел. Это позволит эффективно реализовывать распределенные вычисления рассматриваемых алгоритмов на многопроцессорных вычислительных системах. В некоторых расчетах используется функция из библиотеки MKL, которая реализует: 1) тип статистических распределений – UNIFORM (однородное, равномерное); 2) метод – STD (стандартный); 3) генератор

случайных чисел – MT2203. Это фактически набор из 1024 генераторов псевдослучайных чисел, которые предназначены для использования в параллельных моделях ММК. Каждый из них генерирует последовательность с периодичностью, равной 2 в степени 2203. Параметры генераторов обеспечивают взаимную независимость соответствующих последовательностей псевдослучайных чисел. Одним из таких параметров является идентификационный логический номер процессора, назначаемый системой параллельного программирования MPI. В некоторых расчетах используется функция из библиотеки PARMONC (см. раздел 7). В расчетах с использованием библиотеки PARMONC моделирование псевдослучайных чисел производится встроенным датчиком.

7. БИБЛИОТЕКА ПРОГРАММ PARMONC

1. Как обычно, под численным статистическим моделированием понимается реализация с помощью компьютера вероятностной модели некоторого объекта, например, случайной величины ζ , для оценивания изучаемых интегральных характеристик ϕ на основе закона больших чисел:

$$\phi = E\zeta \approx \bar{\zeta} = L^{-1} \sum_{i=1}^L \zeta^{(i)}.$$

Трудоемкость L статистического моделирования (т. е. затраты машинного времени, необходимые для достижения заданного уровня погрешности ϵ) определяется величиной $\tau_\zeta L$, которая, в свою очередь, пропорциональна величине $\tau_\zeta D\zeta \epsilon^{-2}$. Здесь τ_ζ – среднее время моделирования одной реализации случайной величины ζ на конкретном компьютере, $D\zeta$ – дисперсия случайной величины ζ . Вычислительно трудоемкие задачи статистического моделирования характеризуются такими свойствами, как большие величины τ_ζ и $D\zeta$, малая величина ϵ (каждое из этих свойств может проявляться как по отдельности, так и в сочетании с другими). Кроме того, такие задачи статистического моделирования часто требуют значительных объемов оперативной и дисковой памяти при моделировании реализаций и сохранении результатов. Наиболее трудоемкие вычисления возникают при статистическом моделировании долговременных стохастических процессов, когда интегральная характеристика зависит от времени и при этом ее необходимо оценивать на частой временной сетке.

Для уменьшения трудоемкости целесообразно применять технологию распределенного статистического моделирования, которая состоит в распределении моделирования независимых реализаций по процессорам. При этом на некотором выделенном процессоре (центральном «процессоре-сборщике») осуществляется периодическое осреднение полученных на всех процессорах выборочных значений по статистически эффективной формуле

$$\bar{\zeta} = \left[\sum_{m=1}^M l_m \right]^{-1} \sum_{m=1}^M l_m \bar{\zeta}_m, \quad (7.1)$$

где M – общее число процессоров, I_m – объем выборки, полученной на m -м процессоре, ζ_m – соответствующее m -му процессору выборочное среднее значение. Очевидно, что главным критерием осуществимости такой параллельной реализации является возможность целиком разместить данные вычислительной программы для моделирования реализаций в оперативную память каждого процессора. Подчеркнем, что в целях распределенного статистического моделирования допустимо использовать процессоры с разной производительностью. При этом обмен данными, в принципе, можно свести к минимуму, допуская только начальную «загрузку» процессоров и финальное получение выборочных средних. Действуя таким образом, можно добиться обратно пропорциональной зависимости величины трудоемкости «распределенной» случайной оценки (7.1) от числа процессоров, при условии, что используемые процессоры имеют одинаковую производительность [7].

Описанную выше технологию распределенного статистического моделирования можно легко модифицировать с целью эффективной оценки функционалов от решения системы СДУ, зависящих от параметра $x \in X$:

$$\varphi \approx E\zeta(x, \omega).$$

При этом моделируемое распределение случайной величины ω может зависеть, а может и не зависеть от параметра x . Аналогичную методику можно также использовать для оценки функционалов, возникающих в результате осреднения базовых функционалов по случайному параметру σ задачи, например по интенсивности случайного шума в системе СДУ. Вероятностное представление при этом имеет вид двойного математического ожидания

$$\varphi \approx EE\zeta(\omega, \sigma).$$

2. Как правило, при параллельной реализации необходимый объем выборки базовых случайных чисел очень велик, поэтому целесообразно использовать длиннопериодные псевдослучайные последовательности. А именно, для решения вычислительно трудоемких задач по методу Монте-Карло предлагается использовать следующий 128-битный линейный конгруэнтный генератор [7]:

$$u_0 = 1, u_n \equiv u_{n-1}A \pmod{2^{128}}, \alpha_n = u_n 2^{-128}, n = 1, 2, \dots, \quad (7.2)$$

$$A \equiv 5^{100109} \pmod{2^{128}}.$$

Последовательность псевдослучайных чисел $\{\alpha_n\}$ является периодической, длина ее периода равна $2^{126} \approx 10^{38}$. Важным свойством генератора (7.2) является статистическая независимость чисел из непересекающихся подпоследовательностей базовой последовательности $\{\alpha_n\}$ и хорошие статистические свойства чисел из каждой подпоследовательности при условии их достаточно большой длины. Для определения начальных чисел $\{\alpha_{m\mu}\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, в подпоследовательностях длины μ используется формула, аналогичная (7.2):

$$u_{(m+1)\mu} = u_{m\mu} A_\mu (\text{mod } 2^{128}), \quad \alpha_{m\mu} = u_{m\mu} 2^{-128}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (7.3)$$

$$A_\mu \equiv A^\mu (\text{mod } 2^{128}).$$

Можно сказать, что начальные числа подпоследовательностей получаются с помощью «прыжков» длины μ . Иногда такую методику называют «big-frog»-генератор или «split»-метод.

В некоторых случаях для моделирования элементов траектории полезно использовать дополнительный генератор, например, можно применять генератор (7.3) с относительно малыми длинами «прыжков». Также можно использовать хорошо проверенный 40-битный быстродействующий генератор с множителем 5^{17} :

$$v_n \equiv v_{n-1} A (\text{mod } 2^{40}), \quad \alpha_n = v_n 2^{-40}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.4)$$

$$A \equiv 5^{17} (\text{mod } 2^{40}).$$

Здесь для определения начального значения v_0 используются старшие 40 бит чисел u_n генератора (7.2), т. е. генератор (7.4) «рандомизируется» с помощью 128-битного генератора с соответствующим увеличением длины периода. Подчеркнем, что в этом случае распределительный способ использования генератора (7.2) обеспечивает распределительный способ и для генератора (7.4).

Описанная выше методика позволяет определять различные подпоследовательности базовых псевдослучайных чисел для проведения разных вычислительных экспериментов, для вычислений на процессорах и для каждой реализации. Такой способ можно назвать распределительным, так как он особенно удобен для распределенных вычислений [7]. Распределительный способ коррелирует статистические оценки для различных вариантов задачи, улучшая параметрический анализ результатов. Здесь под вычислительным экспериментом понимается конкретный расчет задачи

Прыжки длиной μ

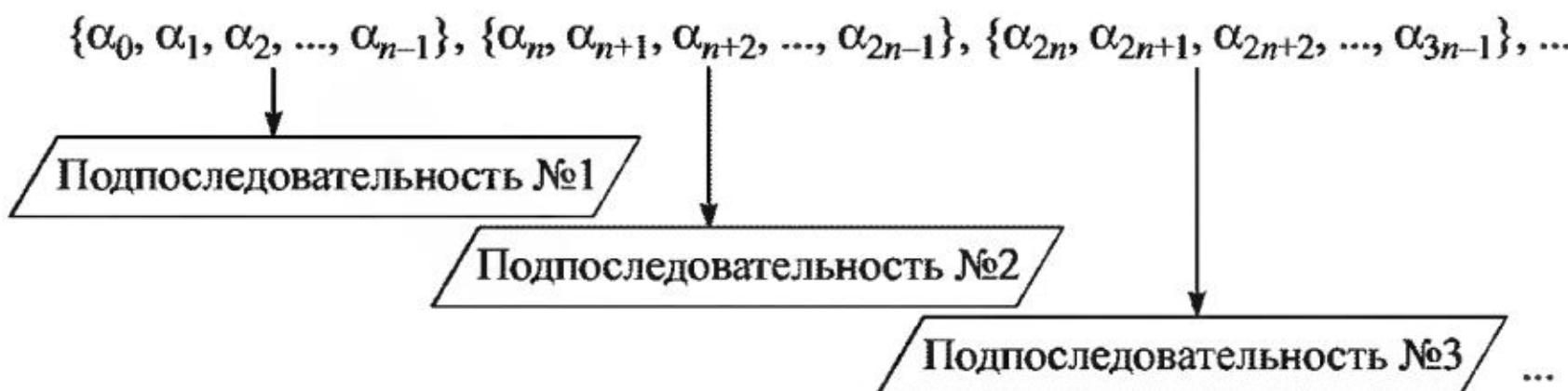


Рис. 7.1.

по методу Монте-Карло. На рис. 7.1 показан распределительный способ для формирования подпоследовательностей параллельного генератора (7.2)–(7.3).

Для проведения вычислительного эксперимента выделяется самая большая по количеству чисел подпоследовательность для экспериментов длиной n_e . Из подпоследовательности для экспериментов выделяются подпоследовательности для процессоров длиной n_p , которые используются для расчетов на каждом процессоре. Из подпоследовательности для реализаций длиной n_r , которые используются для моделирования отдельных реализаций. Из подпоследовательности для реализаций выделяются подпоследовательности для их элементов длиной n_i , которые используются для моделирования отдельных реализаций. Такая иерархическая организация подпоследовательностей параллельного генератора (7.2)–(7.3) представлена на рис. 7.2.

В библиотеке PARMONC, которая представлена далее в этом разделе, по умолчанию определены следующие длины «прыжков» [8–10]:

- $n_e = 2^{115} \approx 10^{34}$ – для подпоследовательностей для экспериментов,
- $n_p = 2^{98} \approx 10^{29}$ – для подпоследовательностей для процессоров,
- $n_r = 2^{43} \approx 10^{13}$ – для подпоследовательностей для реализаций,
- $n_i = 2^{33} \approx 10^{10}$ – для подпоследовательностей для элементов реализации.

Таким образом, с использованием этих параметров для генератора (7.2) можно

- провести $2^{125} \cdot 2^{-115} = 2^{10} \approx 10^3$ вычислительных экспериментов,
- в рамках одного эксперимента использовать $2^{115} \cdot 2^{-98} = 2^{17} \approx 10^5$ процессоров,
- на одном процессоре моделировать $2^{98} \cdot 2^{-43} = 2^{55} \approx 10^{16}$ независимых реализаций,
- для одной реализации моделировать $2^{43} \cdot 2^{-33} = 2^{10} \approx 10^3$ ее независимых элементов.

Подпоследовательности
для экспериментов

«Прыжок» длиной $n = n_e$

$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}, \{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n-1}\}, \{\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}, \dots, \alpha_{3n-1}\}, \dots$

Подпоследовательности
для процессоров

«Прыжок» длиной $n = n_p$

$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}, \{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n-1}\}, \{\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}, \dots, \alpha_{3n-1}\}, \dots$

Подпоследовательности
для реализаций

«Прыжок» длиной $n = n_r$

$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}, \{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n-1}\}, \{\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}, \dots, \alpha_{3n-1}\}, \dots$

Подпоследовательности
для элементов реализаций

«Прыжок» длиной $n = n_l$

$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}, \{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n-1}\}, \{\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}, \dots, \alpha_{3n-1}\}, \dots$

Рис. 7.2

При использовании библиотеки PARMONC подпоследовательность для экспериментов пользователь выбирает самостоятельно (а именно, выбирает ее номер); подпоследовательности для процессоров, реализаций и ее элементов определяются автоматически.

Рекомендуется следующая методология использования параллельного генератора (7.2)–(7.3) с учетом «иерархии подпоследовательностей»:

- с целью коррелирования результатов серии вычислительных экспериментов (например, при изменении параметров вероятностной модели) при их проведении следует в каждом расчете выбирать одну и ту же подпоследовательность для экспериментов;
- для проведения независимых в статистическом смысле расчетов следует выбирать для них различные подпоследовательности для экспериментов;
- при возобновлении ранее проведенного расчета (например, с целью уменьшения статистической погрешности) в новом расчете следует выбирать подпоследовательность для экспериментов, отличную от первого расчета;
- псевдослучайные числа из подпоследовательностей для элементов реализации целесообразно использовать при моделировании таких ее элементов, распределение которых различно в разных вариантах задачи, что позволяет улучшить параметрический анализ результатов.

Отметим, что длина периода генератора (7.2) позволяет независимым образом распределять псевдослучайные числа по реализациям на практически неограниченное число процессоров. Параллельный генератор (7.2) успешно используется для решения вычислительно трудоемких практических задач в ряде институтов СО РАН на протяжении последних десяти лет.

3. Библиотека PARMONC (сокращение от «PARallel MONte Carlo») предназначена для эффективного распараллеливания широкого круга приложений статистического моделирования, обладающих большой вычислительной трудоемкостью [8–10]. При этом автоматически вычисляются выборочные средние, вторые моменты, границы доверительных интервалов для оценок функционалов, ковариация и коэффициент корреляции для выбранных пар случайных оценок. Область применения библиотеки достаточно широкая: вычислительно трудоемкие задачи статистического моделирования в естественных, технических и гуманитарных науках.

В библиотеке используется параллельный генератор (7.2)–(7.3), а также (7.4). Библиотека представляет собой простой в использовании программный инструмент для организации распределенных вычислений, не требующий от пользователя знания операторов MPI, распараллеливание сложных последовательных программ статистического моделирования (написанных на языках Fortran или С) производится достаточно просто. Библиотека PARMONC позволяет масштабировать вычисления на практически неограниченное число процессоров, которое зависит только от используемой вычислительной системы, причем вычислительная нагрузка равномерно распределяется по всем процессорам, точнее, по вычислительным ядрам многопроцессорной вычислительной системы.

В процессе счета происходит автоматическое вычисление выборочных средних и границ доверительного интервала для статистических оценок, алгоритм моделирования которых задается в моделирующей подпрограмме; результаты вычислений периодически сохраняются на диске в удобном для дальнейшей обработки виде. С помощью библиотеки PARMONC можно легко организовать продолжение ранее проведенных расчетов с автоматическим учетом их результатов. Также с помощью библиотеки можно получать коррелированные статистические оценки различных функционалов.

Возможность применения библиотеки PARMONC определяется «естественной» крупноблочной фрагментированностью про-

грамм статистического моделирования. Общая структура такого рода программ, в упрощенном виде, следующая:

```
void main( void ) {
    int i, L;
    TypeRL RL, SUBT=0, SUBT2=0;
    //      цикл по реализациям:
    for( i = 0; i < L; i++ ) {
        // операторы, вычисляющие реализацию RL:
        ...
        SUBT= SUBT + RL;
        SUBT2= SUBT2 + RL * RL;
    }
    SUBT = SUBT / L;
    SUBT2 = SUBT2 / L;
    // расчет границ доверительного интервала
    ...
    // сохранение функционалов на диск
    ...
}
```

Здесь L – общее число независимых реализаций случайного объекта, которые хранятся в программе в переменной типа *TypeRL* (например, это вектор или матрица); реализации *RL* моделируются внутри цикла. Полученные таким образом статистически независимые реализации *RL* добавляются к «счетчику» *SUBT* и по выходу из цикла осредняются, что дает статистическую оценку искомого математического ожидания случайного объекта. Для использования библиотеки PARMONC предполагается, что реализация случайного объекта *RL* является одно- или двухмерным массивом.

При распараллеливании последовательных программ с помощью PARMONC определяется процедура, возвращающая одну реализацию *RL* (предполагается, что возвращение происходит через аргумент процедуры). В нашем примере имя такой процедуры – *realization*. При этом считается, что процедура *realization* использует последовательности псевдослучайных чисел, генерируемых внешней по отношению к ней подпрограммой. Взаимосвязь программных объектов и объектов данных при статистическом моделировании поясняется на рис. 7.3.

С учетом такой взаимосвязи цикл по независимым реализациям, финальное осреднение, расчет границ доверительного интервала, сохранение данных на диск заменяются вызовом библиотечной процедуры следующего вида:

```
parmonc( realization, ..., L, ... );
```



Рис. 7.3

Здесь имя моделирующей подпрограммы (фактически – ее адрес) и общее число независимых реализаций передаются в библиотечную процедуру *parmonc* в качестве входных аргументов; для простоты остальные аргументы процедуры *parmonc* пока опущены и заменены многоточием. Процедура *parmonc* автоматически распределяет моделирование независимых реализаций по процессорам. При этом все остальные операторы пользовательской программы остаются без изменений.

Выборочное среднее, получаемое в результате расчетов на многих процессорах, будет автоматически возвращаться в служебные переменные библиотеки PARMONC и по окончании работы программы сохраняться на диск (также рассчитываются и сохраняются на диск границы доверительного интервала, относительная статистическая погрешность, дисперсия оценок). Отметим, что конкретное название библиотечной процедуры *parmonc* и соответствующий порядок передачи параметров зависит от используемого языка программирования, принципа периодического обмена данными (см. документацию [9]).

Таким образом, в итоге имеем следующий код (в сокращенном виде), пригодный для компиляции и сборки с помощью библиотеки PARMONC:

```

void realization( TypeRL RL ) {
    // операторы моделирующей подпрограммы
    ...
    // присвоение выборочного значения переменной RL
    ...
}
int main( ) {
    parmonc( realization, ..., L, ... );
}

```

В процессе распределенных вычислений на процессорах используются последовательности независимых псевдослучайных чисел, получаемые в результате работы подпрограммы, реализующей параллельный генератор (7.2). В процедуре *realization* библиотечный параллельный генератор (7.2) – (7.3) вызывается следующим образом:

```
a = rnd128();
```

Здесь a – очередное псевдослучайное число, равномерно распределенное в интервале от нуля до единицы. Генератор (7.4) вызывается следующим образом:

```
a = rnd40();
```

Модификация генератора (7.2)–(7.3) для моделирования элементов траектории вызывается следующим образом:

```
a = rnd128e1(n);
```

где $n = 0, 1, 2, \dots, 1023$ – номер подпоследовательности для моделирования элементов траектории.

Для достижения равномерной загрузки процессоров распределенное статистическое моделирование организовано следующим образом. Каждый процессор (например, с номером m , где $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$) независимо моделирует реализации $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots$ и периодически, например через каждые LS реализаций, дает команду на отправку вычисленных выборочных средних $\bar{\zeta}_m$ на центральный «процессор-сборщик». В свою очередь, центральный «процессор-сборщик» периодически, через каждые LR реализаций, дает команду на получение отправленных с других процессоров значений, осредняет их по формуле (7.1) и сохраняет на диск. Отметим, что отправка данных со всех процессоров на «процессор-сборщик» и получение им отправленных ему данных происходит в асинхронном режиме. Значения периодов отправки LS и приемки LR задаются в числе параметров процедуры *parmonc*:

```
parmonc( realization, ..., L, ... , LR, LS );
```

При такой организации вычислений параметр L целесообразно задавать достаточно большим, а параметры отправки LS и приемки LR определять так, чтобы результаты осреднения на центральном «процессоре-сборщике» обновлялись на диске через удобные для пользователя промежутки времени. Такая организация вычислений позволяет пользователю контролировать погрешность моделирования.

Отметим, что в библиотеке PARMONC есть модификация процедуры *parmonc*, в которой аргументы LS и LR задаются в ми-

нутах, ее имя – *tparmonc*. Назначение этих аргументов следующее: отправка, прием данных и сохранение на диск происходят, соответственно, через *LS* и *LR* минут. Количество и тип аргументов процедуры *tparmonc* такие же, как у *parmonc*.

С целью возобновления расчетов используется аргумент (флаг) *RES*. Если пользователь начинает новый расчет, тогда *RES* = = 0. Если он хочет продолжить ранее проделанный расчет, тогда *RES* = 1. В этом случае результаты предыдущего расчета, автоматически сохраненные PARMONC, учитываются с использованием формулы (7.1).

Номер подпоследовательности для экспериментов задается аргументом *EXP* = 0, 1, 2, ... При новом расчете целесообразно положить *EXP* = 0. При продолжении расчетов следует увеличить значение *EXP* на единицу по сравнению с предыдущим расчетом. При этом информация о предыдущем расчете, в частности об использованном значении аргумента *EXP*, сохраняется в специальном файле в рабочем каталоге пользователя [8].

Следовательно, для управления подпоследовательностями псевдослучайных чисел параллельного генератора (7.2)–(7.3) и (7.4) пользователь задает параметр *EXP*. Инициализация параллельных подпоследовательностей для процессоров и реализаций (т. е. выбор соответствующих подпоследовательностей) выполняется библиотекой PARMONC автоматически.

Итак, полный набор аргументов процедуры *parmonc* следующий:

```
parmonc( realization, N1, L, RES, EXP, LR, LS );
```

для случая, когда реализация возвращается в одномерный массив;

```
parmonc( realization, N1, N2, L, RES, EXP, LR, LS );
```

для случая, когда реализация возвращается в двухмерный массив. Здесь аргументы *N1*, *N2* определяют размерность массивов.

Организация асинхронного обмена данными при расчетах с помощью библиотеки PARMONC схематически представлена на рис. 7.4 для четырех процессоров, которые пронумерованы от 0 до 3. По горизонтальной оси отложено машинное время. В прямоугольниках, обозначающих процессоры, указывается число реализаций, полученных на данном процессоре к моменту отправки/приемки. Центральный «процессор-сборщик» имеет нулевой номер.

4. В настоящее время библиотека PARMONC установлена на многопроцессорном кластере НКС-30Т Центра коллективного пользования «Сибирский суперкомпьютерный центр» СО РАН

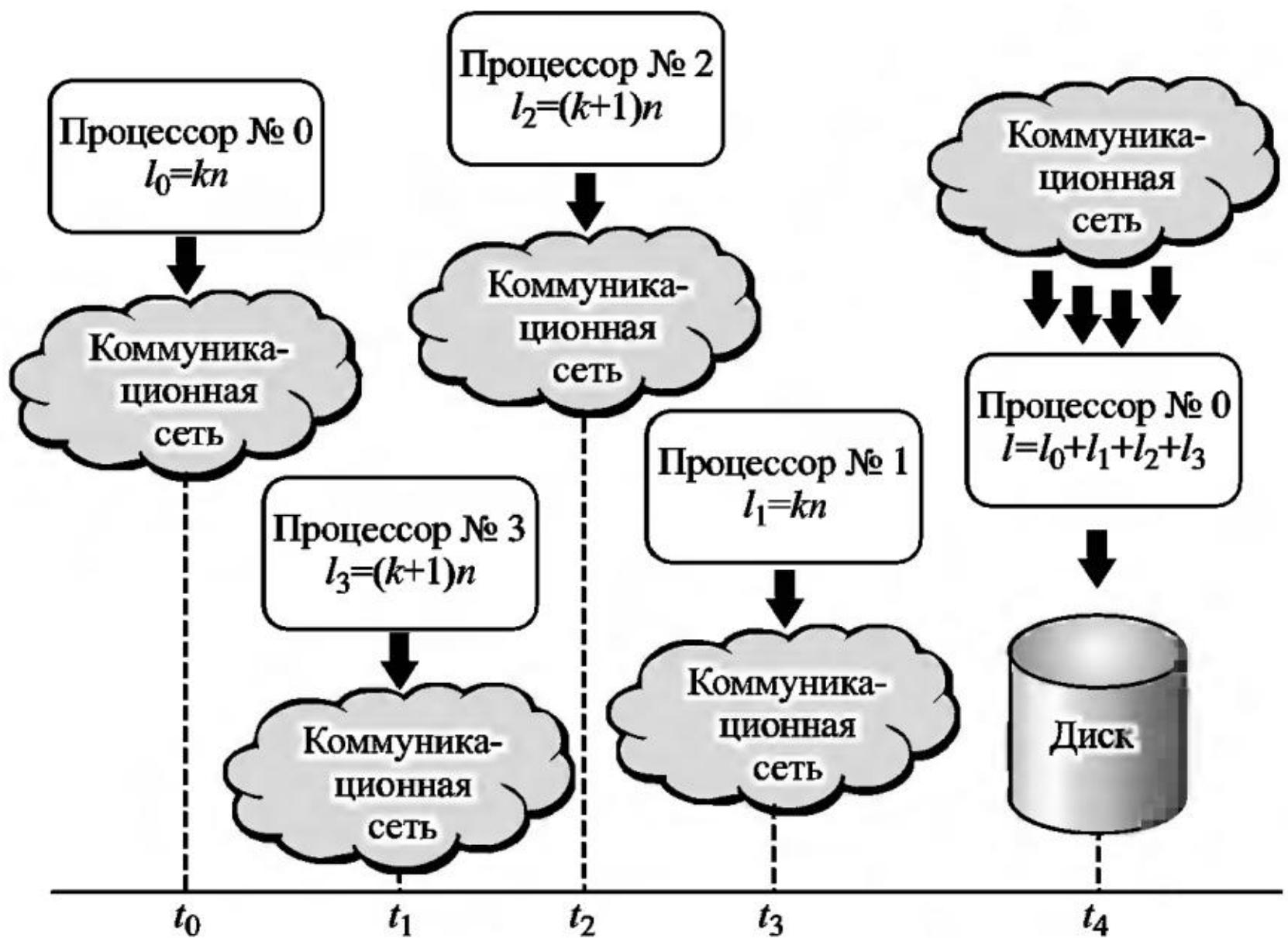


Рис. 7.4

(ССКЦ) и может использоваться на вычислительных системах с аналогичной архитектурой, поскольку библиотека не привязана к каким-то определенным компиляторам С и Fortran и реализациям MPI. Также возможно использование библиотеки PARMONC на суперкомпьютерах с гибридной архитектурой, оснащенных со-процессорами Intel Xeon Phi [9–11].

Оборудование кластера НКС-30Т позволяет производить длительные по времени расчеты, в соответствии с методологией распределенного статистического моделирования на каждом из вычислительных ядер доступно от 2 до 8 Гб оперативной памяти для моделирования реализаций (объем доступной памяти зависит от используемого сервера кластера). Коммуникационная сеть кластера позволяет пересылать между ядрами и процессорами данные большого объема (объем данных соответствует рассчитанным на процессорах выборочным значениям). С целью апробации библиотеки моделирование реализаций распределялось на все вычислительные ядра кластера, общее число которых превышает 3000.

В процессе обмена данными с целью разгрузки центрального «процессора-сборщика» при большом числе процессоров используется иерархическая структура «процессоров-вычислителей» (функция которых – моделировать реализации) и «процессоров-сборщиков» (помимо вычислений в число их функций входит сбор

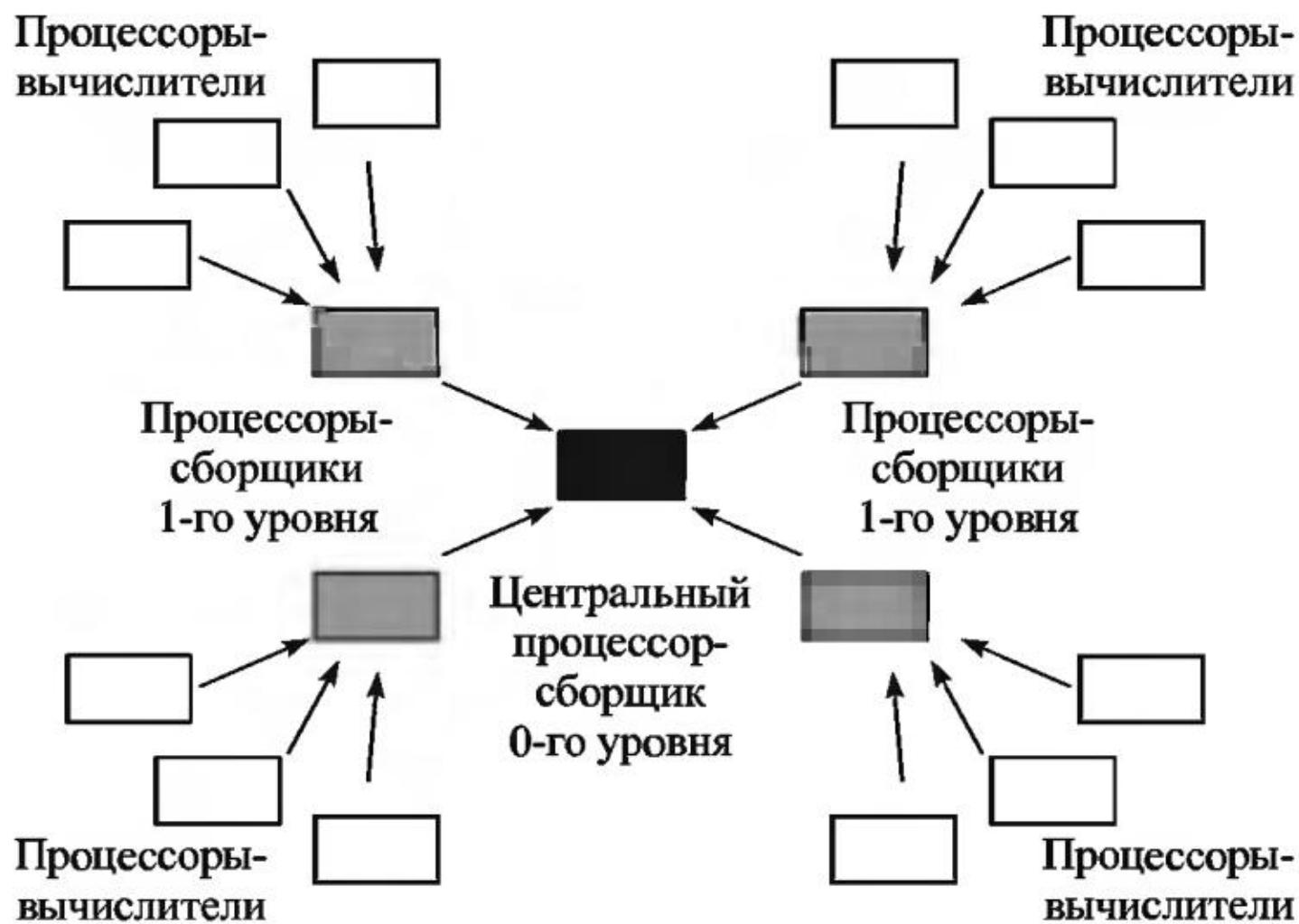


Рис. 7.5

данных – выборочных средних с «процессоров-вычислителей») (рис. 7.5). Такая иерархическая структура применяется с целью оптимизации обмена данными. Она также полезна в целях недопущения потери точности при вычислениях выборочных средних при большом числе реализаций: такие вычисления сгруппированы по «процессорам-сборщикам» 1-го уровня, в свою очередь центральный «процессор-сборщик» 0-го уровня осредняет выборочные средние с «процессоров-сборщиками» 1-го уровня.

Библиотека состоит из следующих подпрограмм и исполняемых файлов [9]:

- *rnd128*, *rnd40*, *rnd128el* – функции для получения одного псевдослучайного числа, равномерно распределенного в интервале от 0 до 1, с помощью параллельных генераторов (7.2)–(7.3) и (7.4);
- *parmonc1d*, *tparmonc1d* – расчет выборочных математических ожиданий и оценок погрешности для случая, когда моделируемая реализация (возвращаемое значение процедуры) представляет собой одномерный массив;
- *parmoncf2d*, *tparmoncf2d* – расчет выборочных математических ожиданий и оценок погрешности для случая, когда моделируемая реализация (возвращаемое значение процедуры) представляет собой двухмерный массив;

- *parmonc_corr* – расчет ковариаций и коэффициентов корреляции для пары случайных векторов;
- *parmonc_fnparam*, *tparmonc_fnparam* – расчет выборочных математических ожиданий и оценок погрешности для случая, когда моделируемая реализация зависит от заданного набора параметров.

Пользователь вставляет вызов нужного варианта процедуры *parmonc* в свои программы. В начале программы на Fortran стоит оператор

```
use parmonc_data
```

а в программах на С

```
#include <parmonc.h>
```

Главная пользовательская программа, в которой находится вызов *parmonc*, рассматривается компилятором как MPI-программа, несмотря на то, что в самой пользовательской программе нет явных вызовов операторов MPI. Это означает, что такая программа должна компилироваться и собираться с использованием команд *mpicc/mpifort* от OpenMPI или *mpiicc/mpiifort* от Intel.

Результаты расчетов, выполненных с использованием нужного варианта процедуры *parmonc*, сохраняются в файлы, которые находятся в специальной поддиректории *parmonc_data* в рабочей директории пользователя, эта поддиректория создается автоматически. В директории *parmonc_data/results* результаты статистического моделирования содержатся в файлах *func.dat*, *func_ci.dat* и *func_log.dat*:

- *func.dat* содержит вектор или матрицу с выборочными средними,
- *func_ci.dat* содержит вектор или матрицу с выборочными средними вместе с вектором или матрицами со значениями абсолютной и относительной погрешностей,
- *func_log.dat* содержит информацию о статистическом моделировании.

В этой директории также располагается файл *parmonc_exp.dat*, содержащий информацию о каждом вычислительном эксперименте, проведенном пользователем. Все эти файлы обновляются всякий раз, когда центральный процессор получает данные с других процессоров, осредняет их и сохраняет на диск. Список и назначение файлов с результатами описываются в [9].

В файл *.bashrc*, который находится в домашней директории пользователя, необходимо добавить следующую строку:

```
source /ifs/apps/parmonc/bin/parmoncvars.sh
```

Тем самым объявляются три переменные окружения

```
$PRMCBIN, $PRMCLIB, $PRMCINC
```

Эти переменные используются при компиляции и сборке приложений с помощью библиотеки PARMONC, а также при запуске команд. Для компиляции и сборки пользовательских программ с использованием библиотеки PARMONC следует использовать следующие команды:

- для программ на C:

```
mpicc -o test -LPRMCLIB -I$PRMCINC test.c -lparmonc
```

- для программ на Fortran:

```
mpifort -o test -LPRMCLIB -I$PRMCINC test.f90 -lparmonc
```

Здесь *test* – имя исполняемого файла, *test.c/test.f90* – пользовательская программа.

5. Ниже приведен Листинг 7.1 с демонстрационной программой на С. В программе реализована процедура распределенного численного статистического моделирования с помощью библиотеки PARMONC с целью оценки статистических характеристик для вектора, состоящего из независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением. В программе используются все три генератора псевдослучайных чисел, входящие в библиотеку.

Набор и тип аргументов процедуры

```
realization(int *numrow, double *sample)
```

соответствуют определенному в библиотеке стандарту [9]. Здесь *sample* – одномерный массив, в который возвращается выборочная реализация, *numrow* – размерность массива.

В программе используется вариант библиотечной процедуры под названием *tparmoncId_*, который обеспечивает обмен данными и сохранение результатов на диск с нужной периодичностью по времени (в приведенном примере – через 1 минуту).

Листинг 7.1. Пример параллельной программы с использованием библиотеки PARMONC.

```
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
/*
Необходимый для работы библиотеки заголовочный файл parmonc.h
*/
#include <parmonc.h>
/*
Процедура для моделирования одной реализации – вектора со
случайными значениями
*/
void realization(int *nrow, double *sample)
{
    int i;
    double alfa1, alfa2, alfa3, alfa4, alfa5, alfa6;
    double ksi1, ksi2, ksi3, ksi4, ksi5, ksi6;
    // Цикл для моделирования одной траектории
    for (i = 0; i < nrow/6; i++)
    {
        // Вызов различных генераторов псевдослучайных чисел
        alfa1 = rnd128_();
        alfa2 = rnd128_();
        alfa3 = rnd128el_(0);
        alfa4 = rnd128el_(1);
        alfa5 = rnd40_();
        alfa6 = rnd40_();

        // Моделирование гауссовых случайных величин
        ksi1 = sqrt(-2.0 * log(alfa1)) * sin(2.0 * 3.1415927 * alfa2);
        ksi2 = sqrt(-2.0 * log(alfa1)) * cos(2.0 * 3.1415927 * alfa2);
        ksi3 = sqrt(-2.0 * log(alfa3)) * sin(2.0 * 3.1415927 * alfa4);
        ksi4 = sqrt(-2.0 * log(alfa3)) * cos(2.0 * 3.1415927 * alfa4);
        ksi5 = sqrt(-2.0 * log(alfa5)) * sin(2.0 * 3.1415927 * alfa6);
        ksi6 = sqrt(-2.0 * log(alfa5)) * cos(2.0 * 3.1415927 * alfa6);

        // Заполнение массива с возвращаемым значением
        sample[6*i] = ksi1;
        sample[6*i+1] = ksi2;
        sample[6*i+2] = ksi3;
        sample[6*i+3] = ksi4;
        sample[6*i+4] = ksi5;
        sample[6*i+5] = ksi6;
    }
}
/*
Главная программа
*/
int main()
{
    int nrow, res, expseq, prpass, praver;
    long long svol;
    // Параметры библиотечной процедуры
    nrow = 600;
    svol = pow(10, 9);
    res = 0;
    expseq = 0;
    prpass = 1;
    praver = 1;
    // Вызов библиотечной процедуры
    tparmoncl_(realization, &nrow, &svol, &res, &expseq,
    &prpass, &praver);
}
```

8. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ AMIKS ДЛЯ РЕШЕНИЯ СДУ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРАХ

1. Комплекс программ AMIKS (сокращение образовано первыми буквами фамилий разработчиков на английском языке: Artemiev, Marchenko, Ivanov, Korneev, Smirnov) представляет собой удобный программный инструмент для численного анализа систем СДУ большой размерности, описывающих различные модели стохастических осцилляторов, а также для проведения параметрического анализа такого рода задач [11]. С помощью программы можно запускать задачи на счет как на суперЭВМ (суперкомпьютере), так и на персональном компьютере. При статистическом моделировании траекторий решения СДУ рассчитываются различные динамические характеристики осциллирующей системы, в том числе частотный фазовый портрет и частотная интегральная кривая.

Комплекс программ соответствует модели «клиент-сервер», в него входят следующие основные программные блоки:

- управляющий блок («клиент»), который устанавливается на персональном компьютере пользователя; с его помощью осуществляется удобная для пользователя процедура определения задач численного анализа систем СДУ; подается команда на запуск задачи на счет на суперЭВМ; производится контроль исполнения запущенных задач; выполняются обработка, анализ и визуализация результатов расчетов;
- вычислительный блок («сервер»), который устанавливается на суперЭВМ или персональном компьютере; в варианте для суперЭВМ содержит библиотеку PARMONC; с его помощью производится расчет задач, подготовленных в управляющем блоке.

2. Введем определения объектов данных «Задача» и «Расчет». Под объектом «Задача» понимается совокупность следующей информации:

- описание системы СДУ, т. е. функций сноса и диффузии, начального значения, и необходимых параметрических переменных;
- описание численного метода статистического моделирования траекторий решения системы СДУ и его параметров, например, размера шага интегрирования;

- описание функционалов от решения системы СДУ и их параметров, например, пространственно-временной сетки.

Объекту «Задача» соответствуют файлы с результатами расчетов, т. е. со статистическими оценками функционалов.

Под объектом «Расчет» понимается совокупность параметров исполнения параллельной программы на суперЭВМ или персональном компьютере:

- количество реализаций;
- номер подпоследовательности для параллельного генератора псевдослучайных чисел (7.2)–(7.3);
- количество процессоров (вычислительных ядер) для запуска параллельной программы (для суперЭВМ);
- максимальное время счета и другие параметры, специфичные для конкретной вычислительной системы.

Одному объекту «Задача» может соответствовать несколько объектов «Расчет», причем при каждом запуске на счет используются данные только одного из объектов «Расчет».

Вся информация об объектах «Задача» и «Расчет» сохраняется в управляющем блоке на жестком диске. Открытие, просмотр и редактирование сохраненной информации осуществляются в управляющем блоке с помощью графического интерфейса.

В управляющем блоке работа с задачами по численному анализу систем СДУ производится в несколько этапов:

- 1) определение данных объекта «Задача»;
- 2) определение данных объекта «Расчет»;
- 3) запуск задачи на счет на суперЭВМ или персональном компьютере и контроль исполнения;
- 4) обработка и визуализация результатов расчетов.

При этом из управляющего блока возможно независимо определять и запускать на счет несколько задач, для которых контроль исполнения и обработка результатов также осуществляются независимо друг от друга.

3. С целью определения объекта «Задача» пользователь с помощью графического интерфейса последовательно выполняет следующие действия (см. рис. 8.1, 8.2):

1') выбирает конкретную задачу из каталога с программными модулями (информация о них приведена ниже), определяет временной интервал интегрирования и, при необходимости, выбирает параметрические переменные системы СДУ и вектора начального значения;

либо

1") самостоятельно создает подпрограммы на языке С, определяющие систему СДУ (векторную функцию сноса и матричную функцию диффузии, вектор начального значения), определяет размерность системы, временной интервал интегрирования и, при необходимости, выделяет параметрические переменные для функций сноса и диффузии, вектора начального значения;

2) выбирает численный метод статистического моделирования траекторий системы СДУ и его параметры: размера шага интегрирования и др.;

3) выбирает рассчитываемые функционалы (моменты компонент решения, ЧФП, ЧИК и др.) и их параметры (размеры расчетной области, шаги временной и пространственной сеток и др.) (см. рис. 8.2).

В управляющем блоке в рабочем каталоге комплекса программ AMIKS хранятся программные модули задач по следующим направлениям:

- линейные колебательные контуры,
- нелинейные колебательные контуры,
- СДУ со случайной структурой,
- странные аттракторы,
- модели движения летательных космических аппаратов,
- модели гироскопов,
- модели автоколебательных режимов в химических реакциях,
- модели движения заряженной частицы в электромагнитном поле,
- стохастические уравнения движения жидкости и газа,
- СДУ с пуассоновской составляющей.

Пользователь имеет возможность дополнять, копировать и редактировать сохраненные программные модули.

При самостоятельном определении подпрограмм для системы СДУ на языке С пользователь выделяет необходимые параметрические переменные.

Задача считается завершенной, если соответствующие объектам «Задача» и «Расчет» вычисления на суперЭВМ или персональном компьютере закончены и их результаты сохранены в управляющем блоке.

4. Для объекта «Расчет» и соответствующего ему объекта «Задача» пользователь вначале выбирает вычислительную систему, на которой будет производится данный расчет (см. рис. 8.3):

- суперЭВМ;
- персональный компьютер.

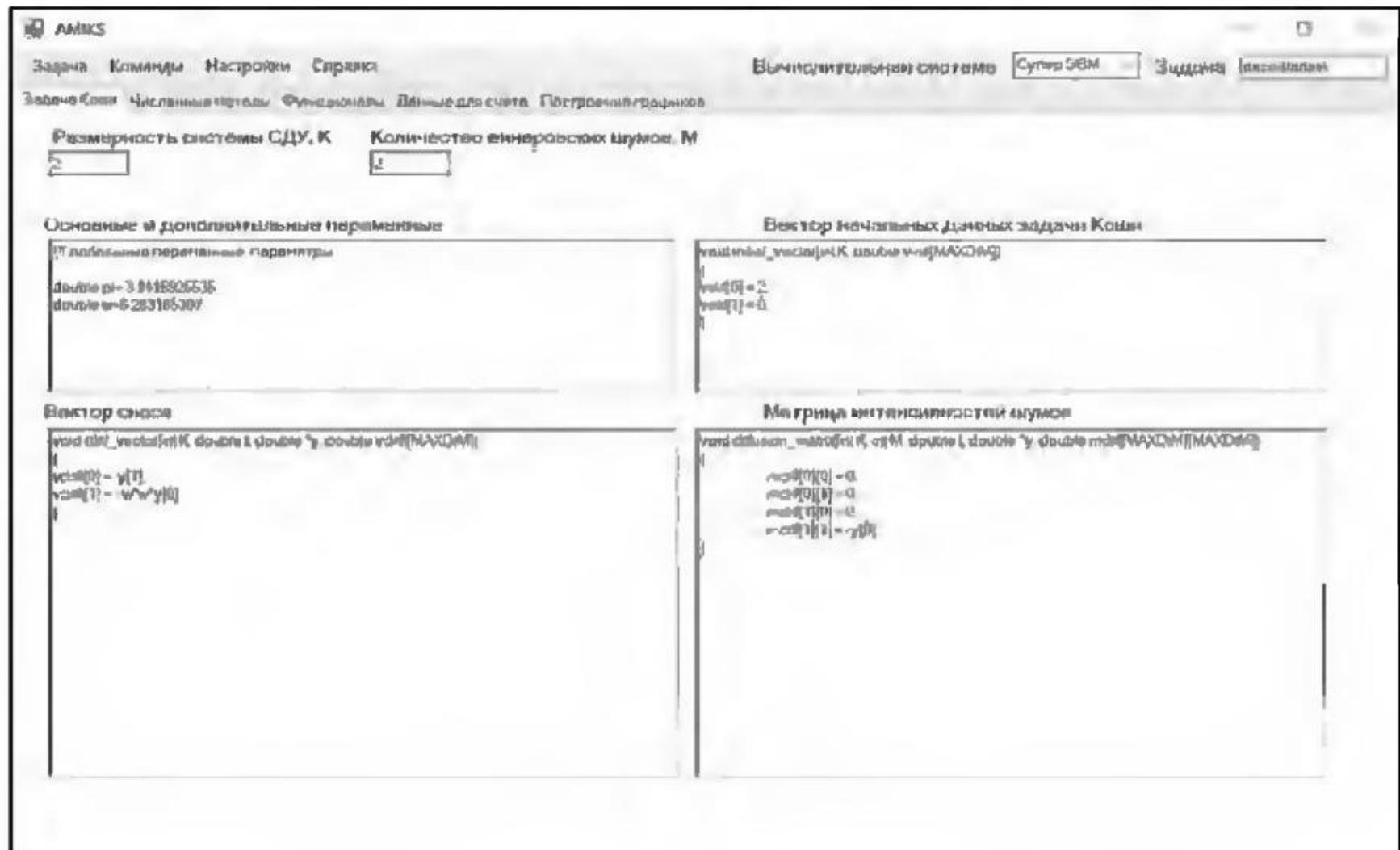


Рис. 8.1

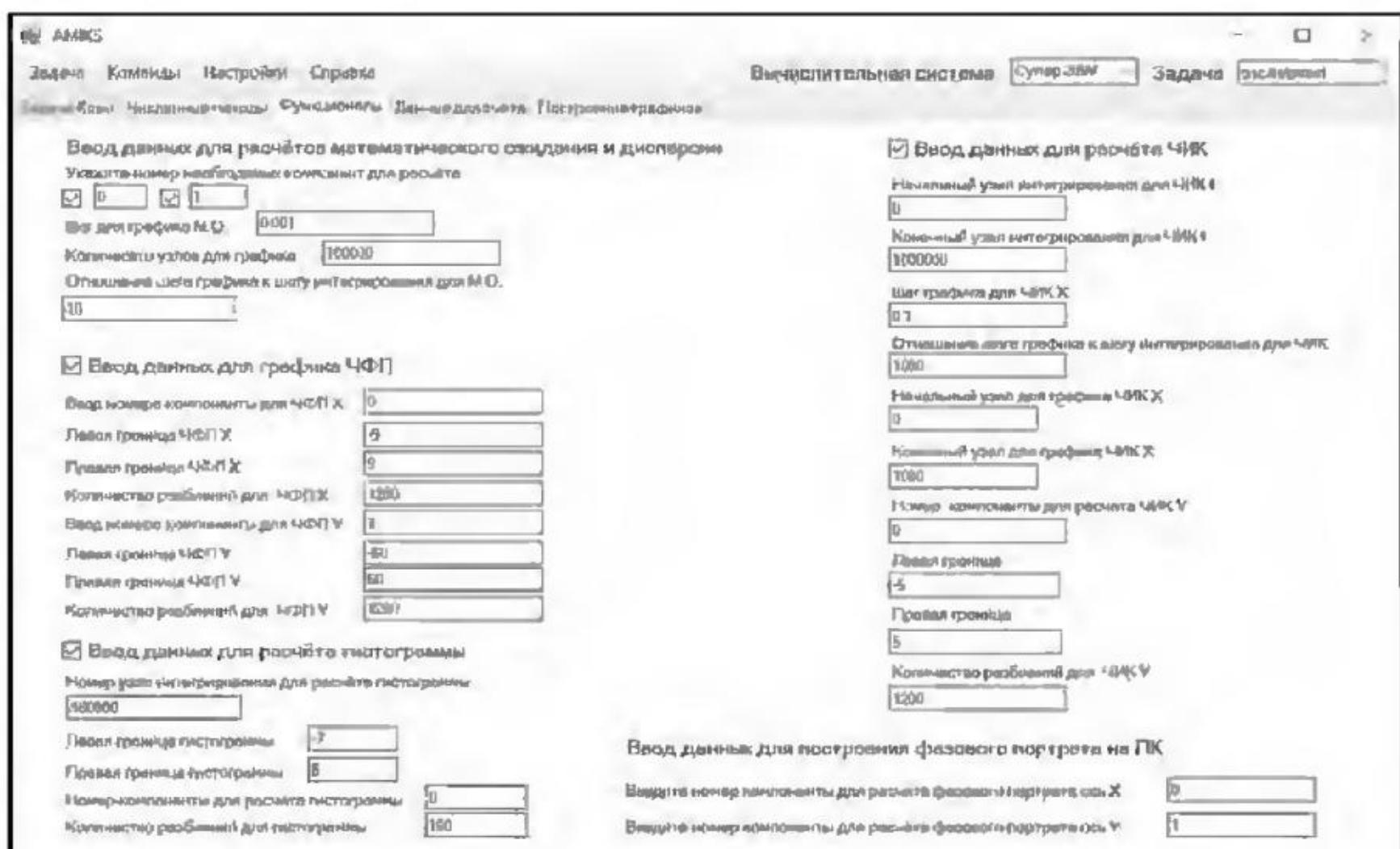


Рис. 8.2

При выборе в качестве вычислительной системы персонального компьютера перечисленные ниже параметры для суперЭВМ не выбираются и в соответствующей форме графического интерфейса они становятся недоступными.

В случае выбора в качестве вычислительной системы суперЭВМ пользователь определяет число процессоров (вычислитель-



Рис. 8.3

ных ядер) и максимальное время счета задачи; также задаются данные, необходимые для работы библиотеки PARMONC: количество моделируемых реализаций, номер подпоследовательности для экспериментов параллельного генератора псевдослучайных чисел (7.2)–(7.3), периодичность получения промежуточных результатов расчетов.

Для объекта «Расчет» также определяется вид расчета: «Новый» или «Продолжение». Вид расчета «Новый» применяется в случае, когда для конкретной задачи необходимо получить новые результаты расчетов, а полученные ранее результаты (для завершенной задачи) можно не учитывать.

Вид расчета «Продолжение» применяется для завершенной задачи с целью уменьшения погрешности полученных ранее статистических оценок за счет моделирования новых независимых реализаций. При этом можно менять параметры исполнения параллельной программы на суперЭВМ или персональном компьютере, например, для суперЭВМ можно изменить параметры библиотеки PARMONC: количество реализаций, периодичность получения промежуточных результатов расчетов, количество процессоров, максимальное время счета. С целью использования псевдослучайных чисел, не зависимых от ранее использовавшихся, пользователь выбирает новый номер подпоследовательности для генератора псевдослучайных чисел (7.2)–(7.3). При этом в соответствующем объекте «Задача» можно выбирать лишь часть

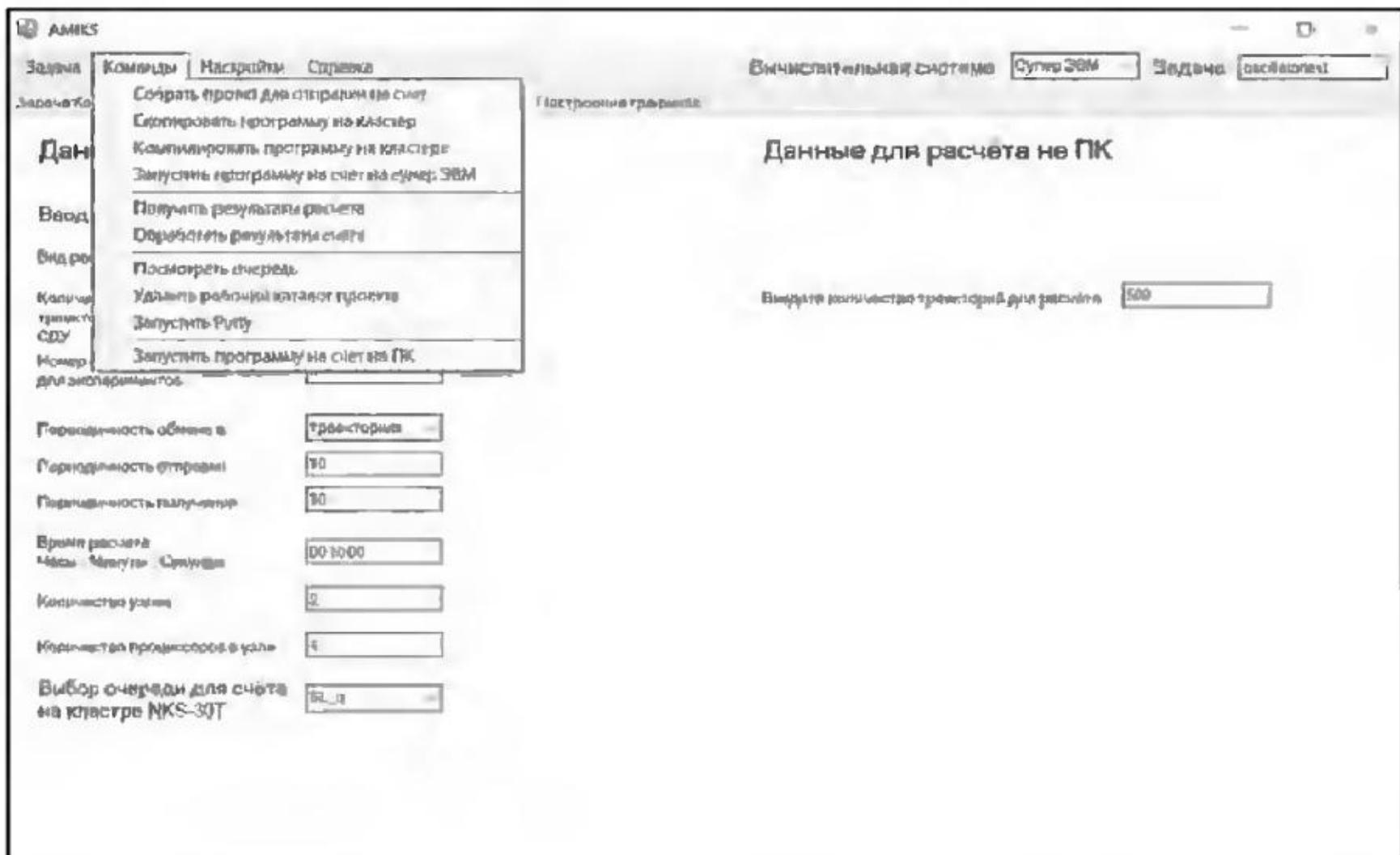


Рис. 8.4

функционалов из числа ранее рассчитанных, а именно, те из них, для которых необходимо уменьшить статистическую погрешность оценок.

5. По завершении определения данных для объектов «Задача» и «Расчет» пользователь отдает команду на запуск задачи на счет, выбирая соответствующий пункт меню (рис. 8.4). При этом в управляющем блоке автоматически формируются параллельная программа и соответствующий ей файл с входными параметрами.

Если в качестве вычислительной системы пользователь выбрал персональный компьютер, то подготовленная программа компилируется и запускается на компьютере пользователя. Для компиляции и сборки можно использовать различные компиляторы языка С, например, использовать компилятор из среды разработки Microsoft Visual Studio.

Если в качестве вычислительной системы пользователь выбрал суперЭВМ, то подготовленная программа и файл с входными параметрами передаются в вычислительный блок для компиляции и сборки, и информация о ходе их выполнения доступна в управляющем блоке. После компиляции и сборки параллельная программа запускается на счет, т. е. ставится в очередь заданий на суперЭВМ.

В управляющем блоке с целью контроля над исполнением запущенной на суперЭВМ задачи пользователь, используя графический интерфейс, имеет возможность:

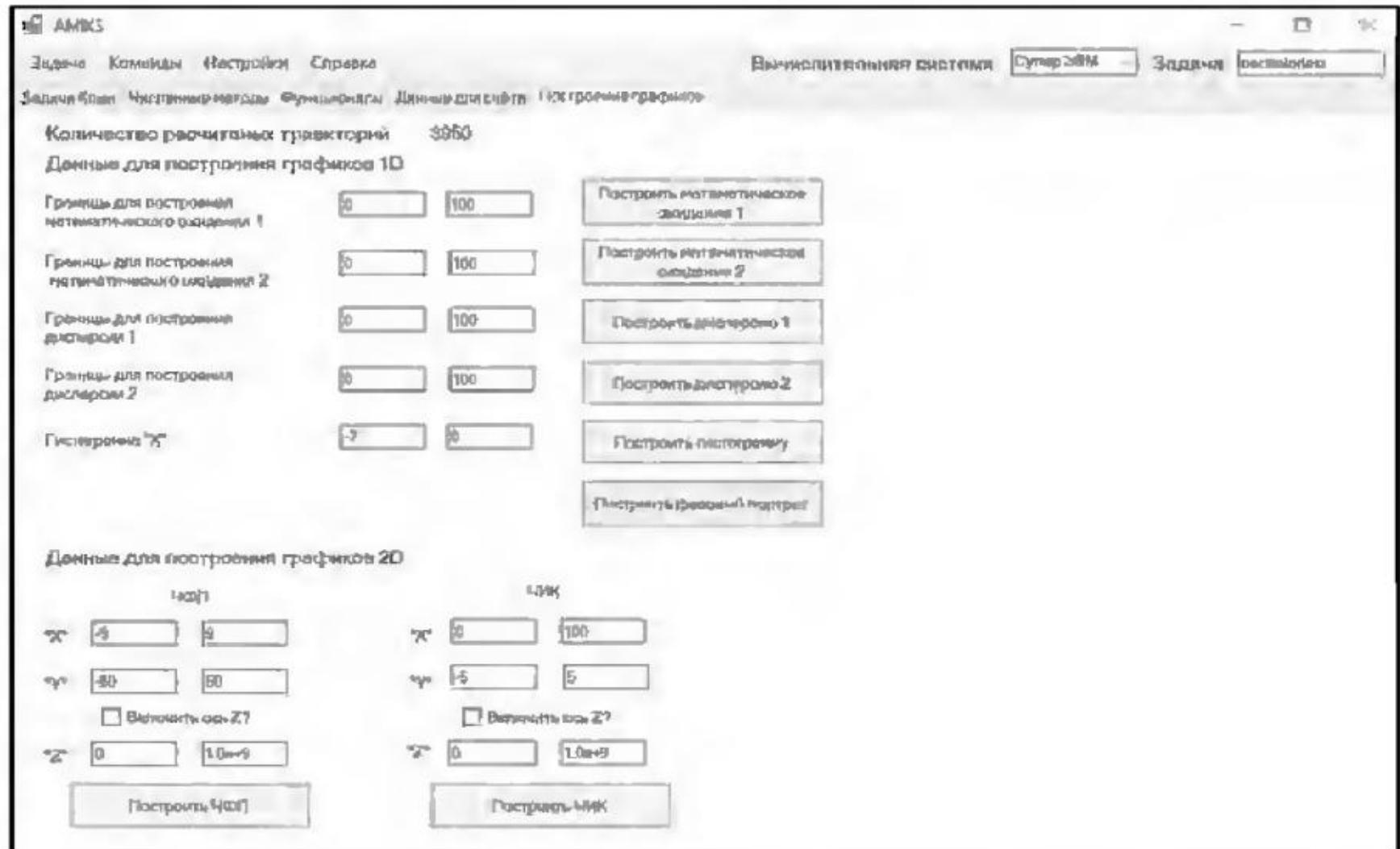


Рис. 8.5

- удаленно просматривать очередь заданий на суперЭВМ и параметры своих заданий, удалять задания из очереди и т. п.;
- удаленно просматривать содержимое рабочего каталога задачи на суперЭВМ;
- контролировать статистическую погрешность оценок функционалов в процессе счета.

В процессе счета получение промежуточных результатов расчетов осуществляется по команде пользователя. В результате в управляющий блок из вычислительного блока копируются файлы с результатами расчетов, количество и состав которых определяются методологией библиотеки PARMONC (см. раздел 7).

- 6.** С целью обработки результатов расчетов пользователь, используя графический интерфейс, имеет возможность (см. рис. 8.5):
- просматривать файлы с результатами;
 - осуществлять построение двух- и трехмерных графиков.

Визуализация результатов осуществляется с использованием свободно распространяемой программы *gnuplot*.

- 7.** В вычислительный блок на суперЭВМ входят библиотека PARMONC и установленные компиляторы MPI-программ на языке C, например, *tricc* от OpenMPI или *tricc* от Intel. Переданная из управляющего блока программа компилируется и собирается с использованием библиотеки PARMONC.

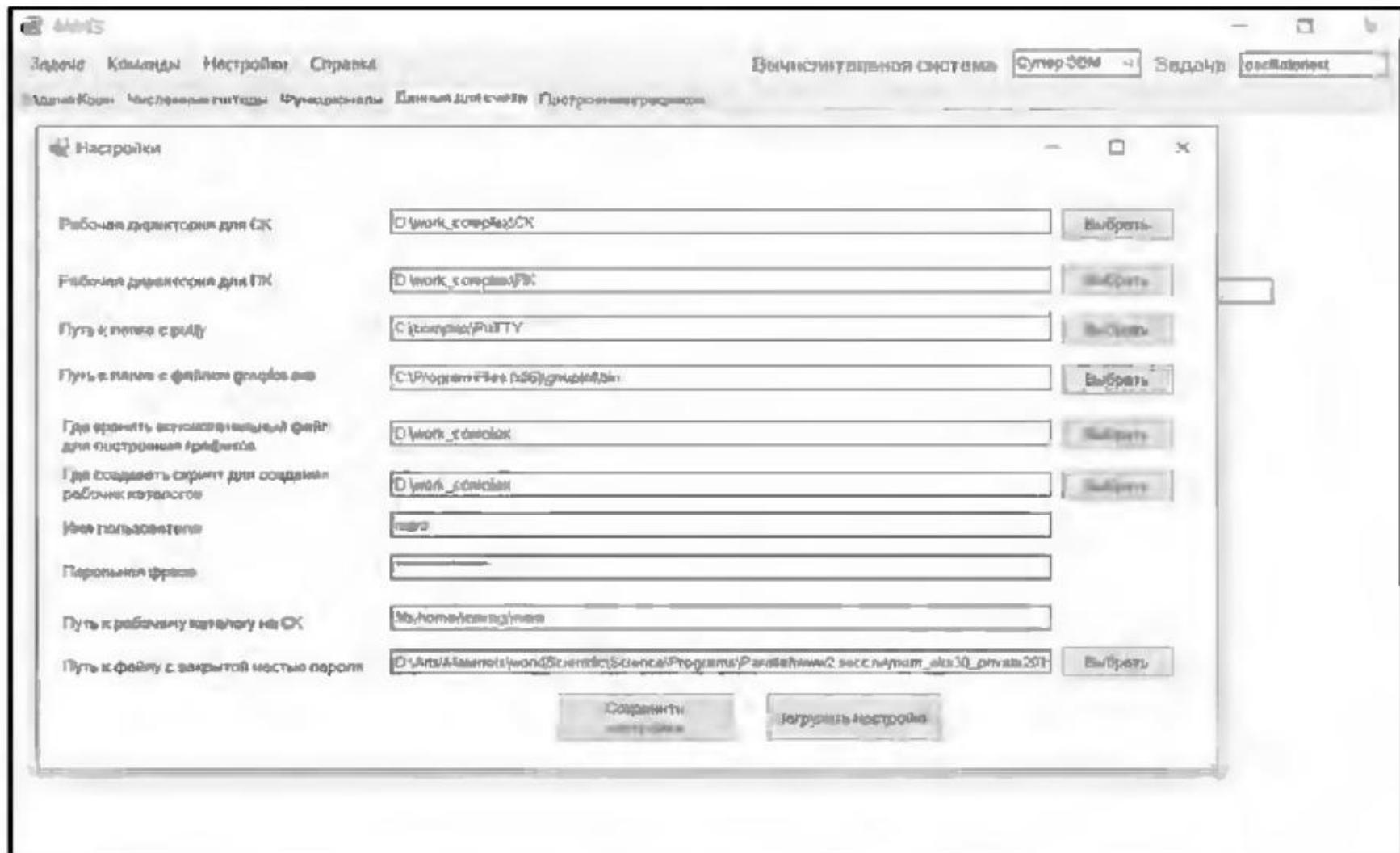


Рис. 8.6

Особенности организации выполнения программ в вычислительном блоке следующие:

- для решения каждой задачи автоматически создается отдельный рабочий каталог для размещения параллельной программы, файла с входными параметрами, а также файлов с результатами расчетов (см. раздел 7);
- в процессе расчетов файлы с результатами по команде пользователя копируются в управляющий блок для обработки, анализа и визуализации;
- для завершенной задачи по команде пользователя все данные расчетов из рабочего каталога на суперЭВМ архивируются и передаются в управляющий блок.

После запуска задачи на счет в вычислительном блоке пользователь может закрыть комплекс программ AMIKS в управляющем блоке, при этом счет на суперЭВМ для запущенной задачи продолжится согласно определенной в объекте «Расчет» информации.

8. В управляющем блоке пользователь также задает служебные параметры, необходимые для осуществления удаленного доступа к суперЭВМ: сетевой адрес кластера, логин и пароль пользователя и т.п. (см. рис. 8.6).

9. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

Наиболее сложными для численного анализа решений являются системы СДУ с переменной интенсивностью шумов. Обычно наличие мультипликативного шума вызывает рост дисперсии компонент решения системы СДУ и сильную асимметрию их плотностей распределений, что, соответственно, требует моделирования ансамблей траекторий больших размеров. В линейных системах СДУ с аддитивными шумами компоненты решения всегда имеют гауссово распределение, что значительно облегчает их анализ.

Мультипликативные шумы зачастую связаны с «шумящими» коэффициентами в ОДУ. Рассмотрим случай «шумящих» коэффициентов в линейном колебательном контуре, который задается СДУ 2-го порядка вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\lambda + \sigma_1 \frac{dw_1}{dt} \right) \frac{dy}{dt} + \left(\omega^2 + \sigma_2 \frac{dw_2}{dt} \right) y = 0 \quad (9.1)$$

с постоянными λ , ω , σ_1 , σ_2 . СДУ (9.1) можно переписать в виде линейной системы с $K = 2$, $M = 2$:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, \\ dy_2 &= -\left(\omega^2 y_1 + \lambda y_2 \right) dt - \sigma_1 y_2 dw_1(t) - \sigma_2 y_1 dw_2(t). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Математическое ожидание $m(t) = E y(t)$ решения СДУ (9.1) определяется ОДУ вида

$$\frac{d^2m}{dt^2} + \lambda \frac{dm}{dt} + \omega^2 m = 0, \quad m(0) = E y_0.$$

Для нахождения вторых моментов $\gamma_{ij}(t) = E y_i(t) y_j(t)$ требуется решить трехмерную линейную систему ОДУ вида

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{11}}{dt} &= 2\gamma_{12}, \\ \frac{d\gamma_{12}}{dt} &= -\omega^2 \gamma_{11} - \lambda \gamma_{12} + \gamma_{22}, \\ \frac{d\gamma_{22}}{dt} &= \sigma_2^2 \gamma_{11} - 2\omega^2 \gamma_{12} + (-2\lambda + \sigma_1^2) \gamma_{22}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Заметим, что частота колебаний $\gamma_{11}(t)$ в два раза выше, чем у $m(t)$. Для частного случая СДУ (9.1) вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\omega^2 + \frac{dw}{dt}\right)y = 0, \quad y(0) \in N(1,1), \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0, \quad (9.4)$$

когда «шумит» только частота колебаний решения и декремент затухания равен нулю, математическое ожидание процесса $y(t)$ задается простой формулой $m(t) = \cos(\omega t)$.

Исследуем поведение ошибки вычислений математического ожидания линейного СДУ (9.4) обобщенным методом Эйлера, вызванной только дискретизацией исходной непрерывной задачи, но не конечным размером ансамбля моделируемых траекторий решения. Применяя метод Эйлера к СДУ (9.4), записанному в виде системы (9.2) с $K=2, M=2$, получим следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(1)} &= y_n^{(1)} + hy_n^{(2)}, \\ y_{n+1}^{(2)} &= y_n^{(2)} - h\omega^2 y_n^{(1)} + \sqrt{h} y_n^{(1)} \xi_{n+1}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Применяя к (9.5) операцию взятия математического ожидания, получаем

$$\begin{aligned} m_{n+1}^{(1)} &= m_n^{(1)} + hm_n^{(2)}, \\ m_{n+1}^{(2)} &= m_n^{(2)} - h\omega^2 m_n^{(1)}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} m_{n+1}^{(1)} \\ m_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0^{(1)} \\ m_0^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Элемент $a_{11}^{(n)}$ матрицы $A^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h\omega^2 & 1 \end{pmatrix}^n$ при $m_0^{(1)} = 1, m_0^{(2)} = 0$

аппроксимирует функцию $\cos(\omega hn)$. Перепишем матрицу $A^{(n)}$ в другом виде:

$$A^{(n)} = (I + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k, \quad (9.6)$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & h \\ -h\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$. Представив B^{k+1} в рекуррентном виде

$$\begin{pmatrix} b_{11}^{(k+1)} & b_{12}^{(k+1)} \\ b_{21}^{(k+1)} & b_{22}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h \\ -h\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{aligned} b_{11}^{(k+1)} &= -h\omega^2 b_{12}^{(k)}, & b_{11}^{(k+1)} &= -h^2 \omega^2 b_{11}^{(k-1)}, \\ b_{12}^{(k)} &= h b_{11}^{(k-1)}, & b_{11}^{(0)} &= 1, b_{11}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Возвращаясь к матрице $A^{(n)}$ в (9.6), запишем

$$a_{11}^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k b_{11}^{(k)}, \quad (9.8)$$

причем из-за такого выбора начальных $b_{11}^{(0)}, b_{11}^{(1)}$ в (9.7), в сумме (9.8) отсутствуют слагаемые с нечетными номерами.

На рис. 9.1 приведены графики $\cos(\omega hn)$ (сплошная линия) и $a_{11}^{(n)}$ (пунктирная линия) для $h = 10^{-2}$, $\omega = 2\pi$. Как видно из графиков, ошибка оценки математического ожидания при таком размере шага интегрирования достаточно большая (равна 0,21 уже в конце первого периода) и будет расти от периода к периоду. Удовлетворительная точность оценки достигается при $h = 10^{-5}$, причем только на первых 100 периодах. Это значит, что даже при бесконечном размере ансамбля моделируемых траекторий решения СДУ обобщенный метод Эйлера будет давать оценку математического ожидания $y(t)$ с растущей амплитудой, что может оказывать сильное влияние на сделанные выводы при большом числе периодов колебаний, например, неверный вывод о неустойчивости решения по первому моменту.

Возведя правую и левую часть (9.5) в квадрат, получаем разностную схему:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(1)2} &= y_n^{(1)2} + 2hy_n^{(1)}y_n^{(2)} + h^2y_n^{(2)2}, \\ y_{n+1}^{(2)2} &= y_n^{(2)2} - 2h\omega^2 y_n^{(1)}y_n^{(2)} + h^2\omega^4 y_n^{(1)2} + hy_n^{(1)2}\xi_{n+1}^2 + c_1\xi_{n+1}, \\ y_{n+1}^{(1)}y_{n+1}^{(2)} &= \left(y_n^{(1)} + hy_n^{(2)}\right)\left(y_n^{(2)} - h\omega^2 y_n^{(1)}\right) + c_2\xi_{n+1}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

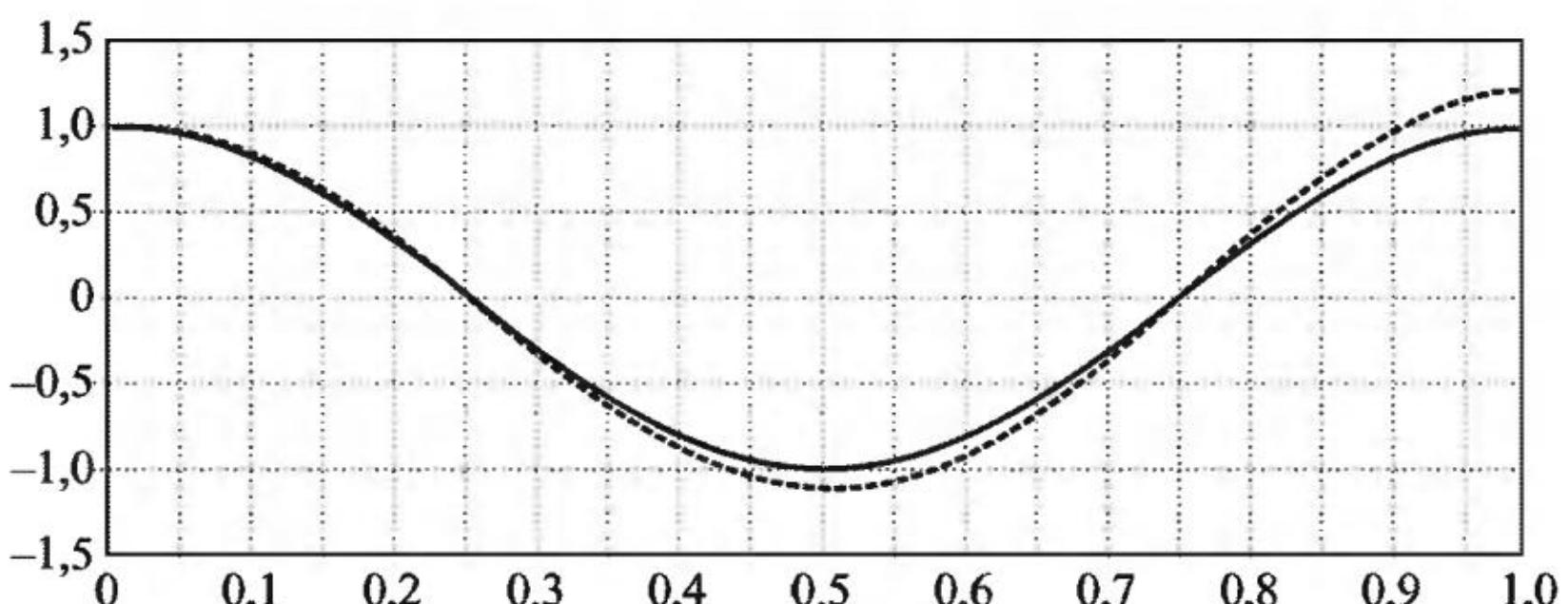


Рис. 9.1

где c_1, c_2 – некоторые вещественные постоянные. Применяя к (9.9) операцию взятия математического ожидания, для вторых моментов имеем следующую рекуррентную схему:

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}^{(1)} &= \gamma_n^{(1)} + 2h\gamma_n^{(1,2)} + h^2\gamma_n^{(2)}, \\ \gamma_{n+1}^{(2)} &= \gamma_n^{(2)} - 2h\omega^2\gamma_n^{(1,2)} + (h^2\omega^4 + h)\gamma_n^{(1)}, \\ \gamma_{n+1}^{(1,2)} &= -h\omega^2\gamma_n^{(1)} + h\gamma_n^{(2)} + (1 - h^2\omega^2)\gamma_n^{(1,2)},\end{aligned}$$

или

$$\begin{pmatrix} \gamma_{n+1}^{(1)} \\ \gamma_{n+1}^{(2)} \\ \gamma_{n+1}^{(1,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h^2 & 2h \\ h^2\omega^4 + h & 1 & -2h\omega^2 \\ -h\omega^2 & h & 1 - h^2\omega^2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \gamma_0^{(1)} \\ \gamma_0^{(2)} \\ \gamma_0^{(1,2)} \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Элемент $d_{11}^{(n)}$ матрицы

$$D^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & h^2 & 2h \\ h^2\omega^4 + h & 1 & -2h\omega^2 \\ -h\omega^2 & h & 1 - h^2\omega^2 \end{pmatrix}^n$$

при $\gamma_0^{(1)} = 2, \gamma_0^{(2)} = 0, \gamma_0^{(1,2)} = 0$, что соответствует начальным условиям из (9.4), аппроксимирует значение $\frac{1}{2}\gamma_{11}(nh)$, которое может быть вычислено из системы ОДУ (9.8). Перепишем матрицу $D^{(n)}$ в виде

$$D^{(n)} = (I + P)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k P^k,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & h^2 & 2h \\ h^2\omega^4 + h & 0 & -2h\omega^2 \\ -h\omega^2 & h & -h^2\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Представив P^{k+1} в виде

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(k+1)} & p_{12}^{(k+1)} & p_{13}^{(k+1)} \\ p_{21}^{(k+1)} & p_{22}^{(k+1)} & p_{23}^{(k+1)} \\ p_{31}^{(k+1)} & p_{32}^{(k+1)} & p_{33}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & p_{13}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & p_{23}^{(k)} \\ p_{31}^{(k)} & p_{32}^{(k)} & p_{33}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h^2 & 2h \\ h^2\omega^4 + h & 0 & -2h\omega^2 \\ -h\omega^2 & h & -h^2\omega^2 \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{aligned} p_{11}^{(k+1)} &= p_{12}^{(k)}(h^2\omega^2 + h) - p_{13}^{(k)}h\omega^2, \\ p_{12}^{(k+1)} &= p_{11}^{(k)}h^2 + p_{13}^{(k)}h, \\ p_{13}^{(k+1)} &= 2p_{11}^{(k)}h - 2p_{12}^{(k)}h\omega^2 - p_{13}^{(k)}h^2\omega^2, \\ p_{11}^{(0)} &= 1, \quad p_{12}^{(0)} = 0, \quad p_{13}^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Теперь можем записать

$$d_{11}^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k p_{11}^{(k)}. \tag{9.12}$$

На рис. 9.2 приведен график $\gamma_{11}(nh)$ (сплошная линия), полученный посредством численного решения с высокой точностью системы ОДУ (9.3) на интервале $[0, 1]$ и график $2d_{11}^{(n)}$ (пунктирная линия) из (9.11), (9.12) для $\omega = 2\pi$, $h = 10^{-2}$. Как и для случая математического ожидания видим, что ошибка оценки второго момента численного решения методом Эйлера при $h = 10^{-2}$ значительна (равна $-0,79$ в середине второго периода) и растет от периода к периоду.

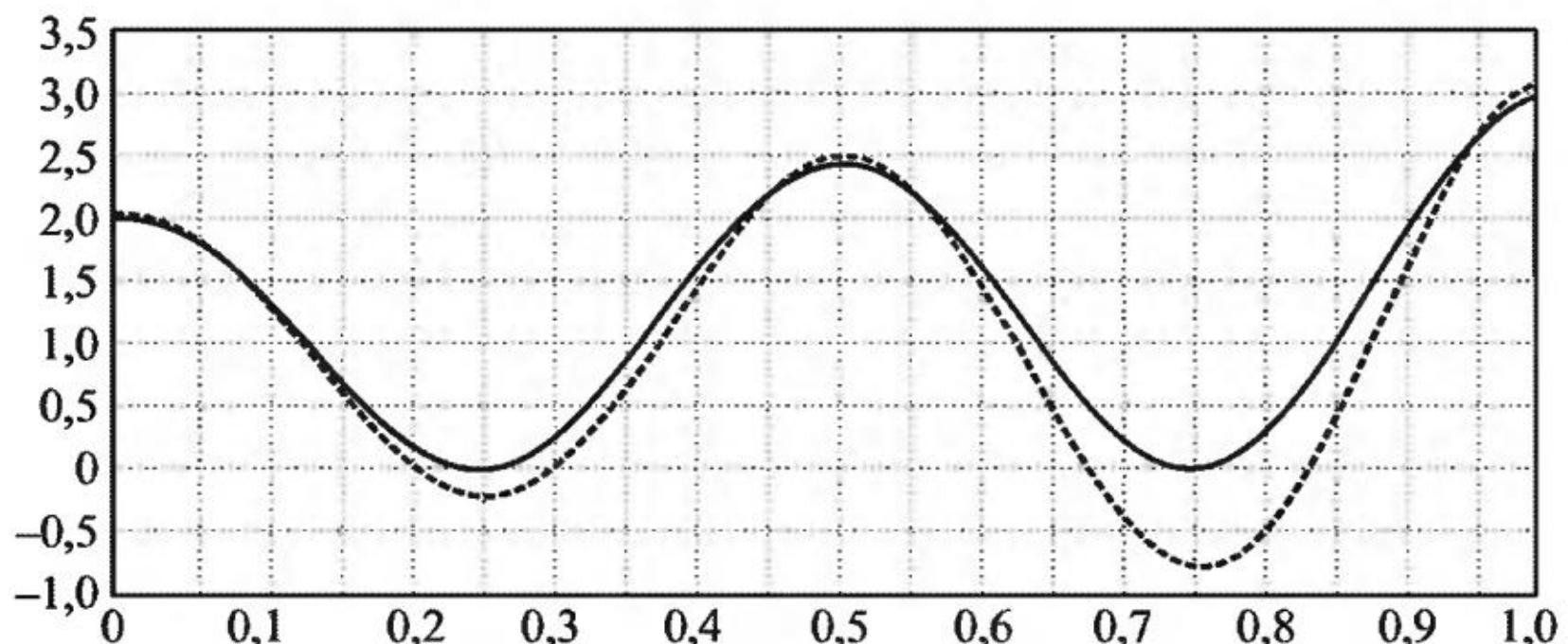


Рис. 9.2

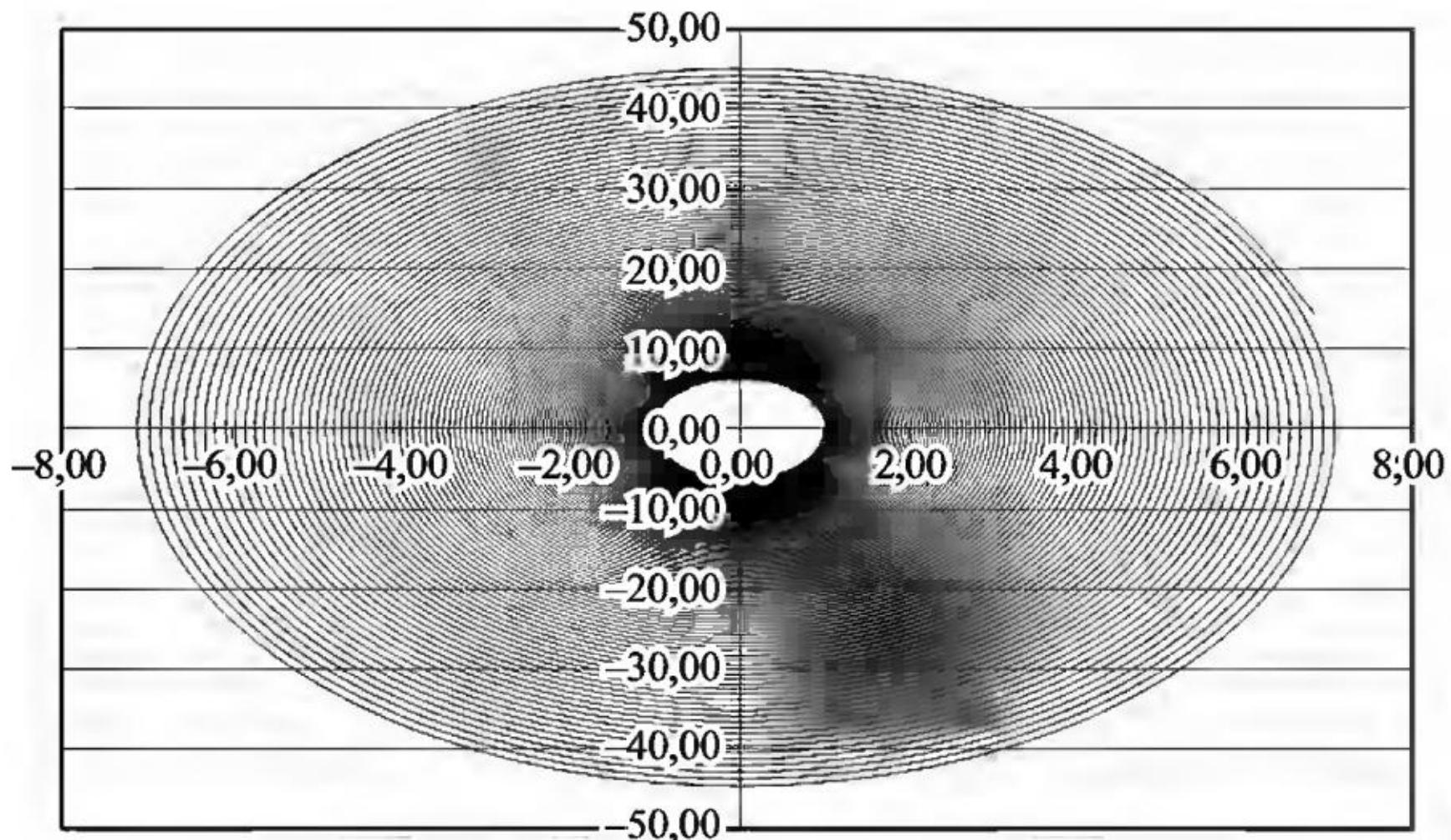


Рис. 9.3

Пример 9.1. Линейный стохастический осциллятор с нулевым декрементом затухания. Исследуем точность оценки математического ожидания и второго момента решения $y(t)$ линейного СДУ (9.4) в зависимости от размера шага интегрирования обобщенного метода Эйлера. Как уже указывалось ранее, математическое ожидание решения при начальных условиях $m(0)=1, \frac{dm}{dt}(0)=0$ задается формулой $m(t)=\cos(\omega t)$. При $\omega=2\pi$ функция $m(t)$ на интервале $[0, 100]$ имеет 100 периодов колебаний с одинаковой амплитудой 1. На рис. 9.3 приведен график фазовой траектории (Ey_1, Ey_2) , рассчитанной с шагом $h = 10^{-3}$ и размером ансамбля моделируемых траекторий решения $N_{tr} = 8^7$. Как видно из рисунка, при таком размере шага интегрирования наблюдается устойчивый рост амплитуды колебаний оценки математического ожидания, что далеко от истинного поведения $m(t)$. Устойчивую фазовую траекторию в виде эллипса $(\cos(2\pi t), -2\pi \sin(2\pi t))$ удается получить только при шаге интегрирования $h = 10^{-6}$ и меньше.

На рис. 9.4 приведен график второго момента $\gamma_{11}(t) = Ey^2(t)$ решения СДУ (9.4), полученный путем численного решения системы ОДУ (9.3) при $\omega = 2\pi, \lambda = 0, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$. Максимальное значение $\gamma_{11}(t)$ на рисунке равно 2,11. При оценке второго момента численного решения СДУ (9.4) с шагом $h = 10^{-3}$ получаем максимальное значение, равное 110, что говорит о полной потере точ-

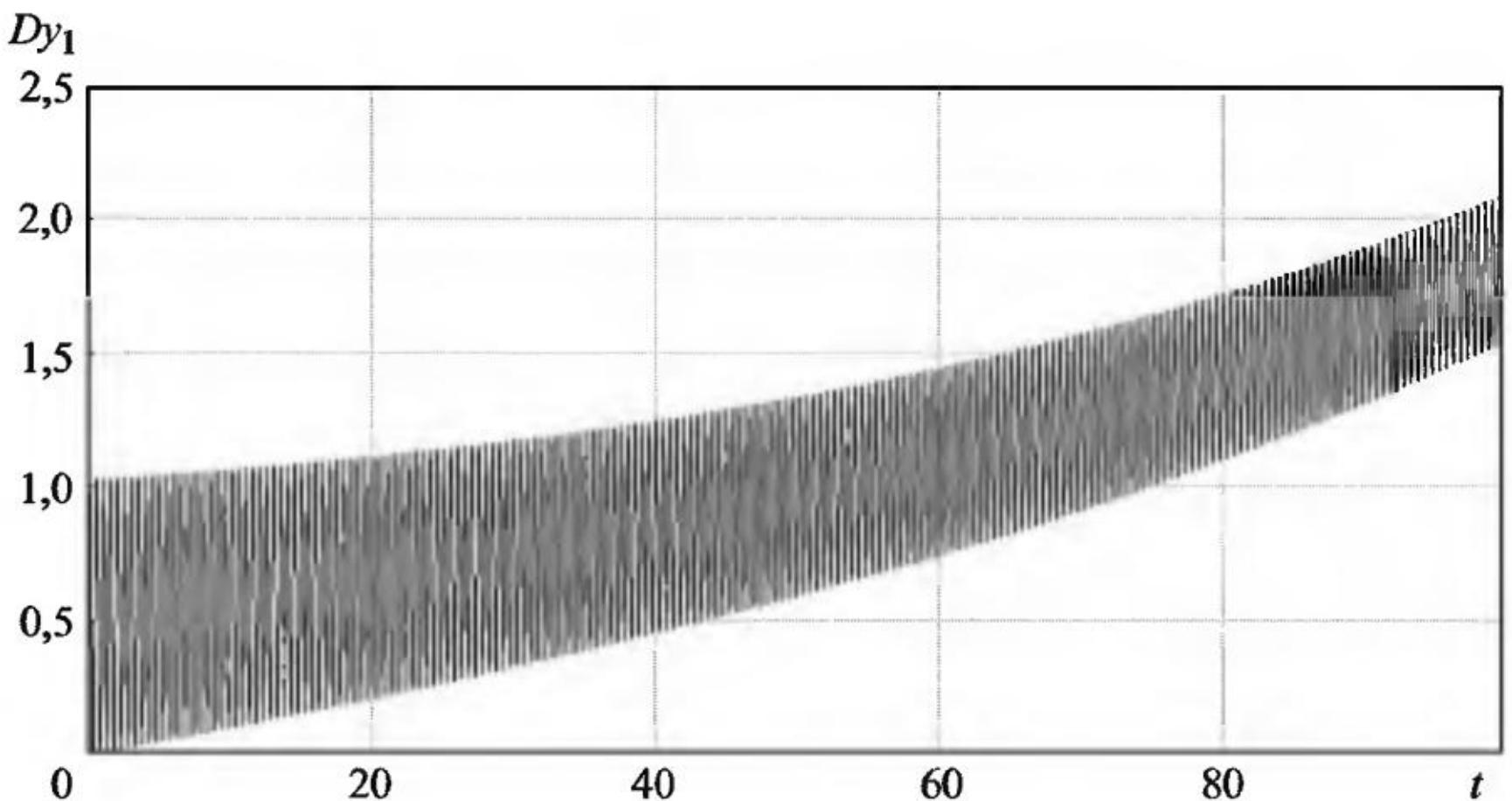


Рис. 9.4

ности оценки с таким размером шага обобщенного метода Эйлера. Удовлетворительная точность получается только, если размер шага не превышает 10^{-6} , когда имеем оценку максимального значения, равную 2,1. Число моделируемых траекторий выбиралось настолько большим, чтобы в данном расчете размер ансамбля моделируемых траекторий не оказывал влияние на точность оценок. Рост дисперсии решения СДУ (9.4) со временем делает проблемным точную оценку математического ожидания $Ey(t) = \cos(2\pi t)$ на большом числе периодов колебаний и требует увеличения размера ансамбля моделируемых траекторий при увеличении t_{end} , что естественно увеличивает время счета задачи. Для данной оценки время счета на 64 процессорах с шагом $h = 10^{-6}$, $N_{tr} = 8^6$ составило около 16 ч. Расчеты с более мелким шагом интегрирования требуют многосуточных вычислений.

Проведенные исследования показали, что при численном анализе стохастических осцилляторов методом Монте-Карло использование больших размеров шагов интегрирования решений СДУ, а это практически всегда делается при проведении численных экспериментов на ПК, могут приводить к совершенно ошибочным выводам (например, вместо значения, равного 2,1, имеем значение, равное 110).

На рис. 9.5 и 9.6 приведены графики ЧИК (вид сбоку и сверху) компоненты $y_1(t)$ численного решения системы СДУ (9.2), полученные с шагом интегрирования $h = 10^{-6}$, размером ансамбля моделируемых траекторий $N_{tr} = 10^6$ при $\omega = 2\pi$, $\lambda = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ на интервале интегрирования $[0, 10]$. Из графиков видно, что в

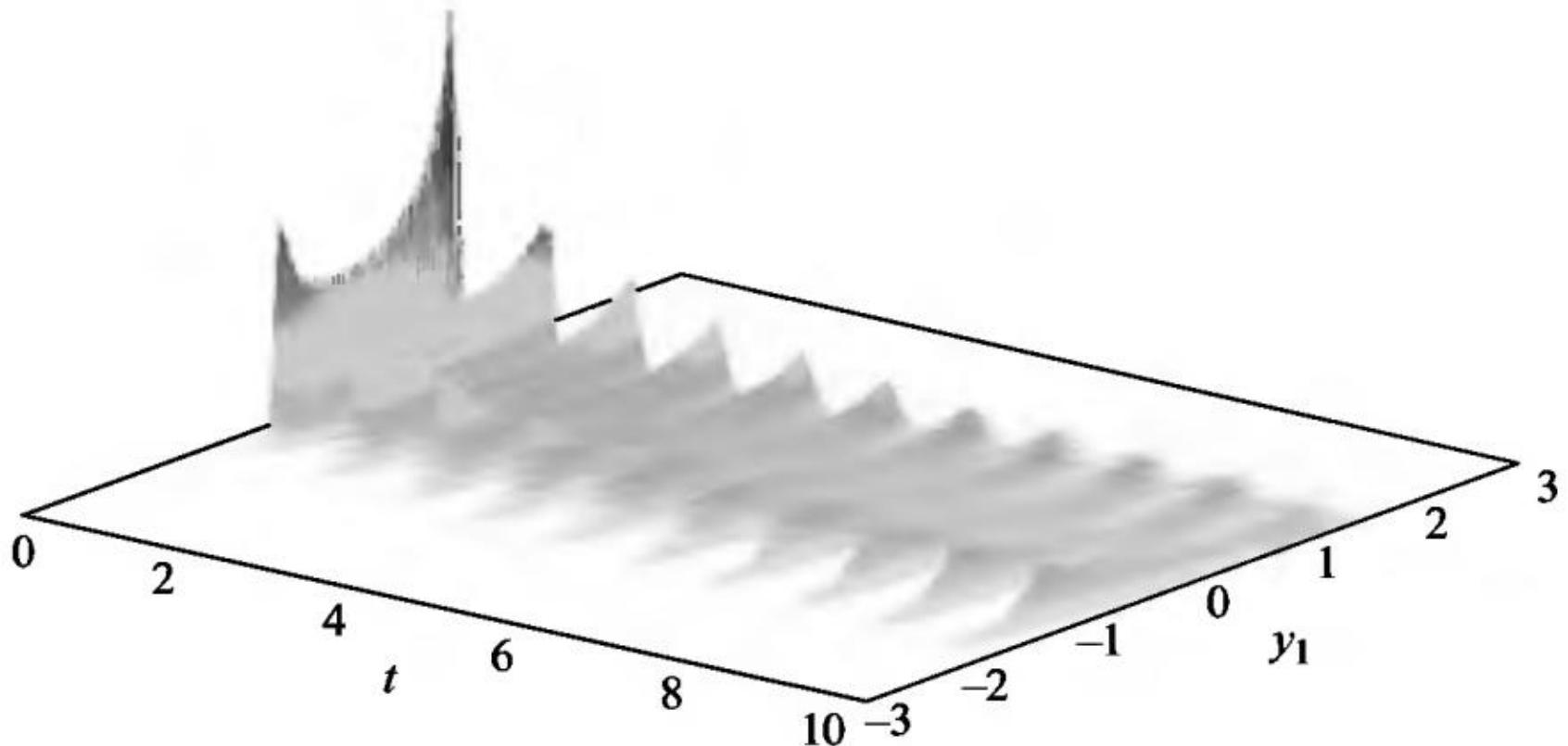


Рис. 9.5

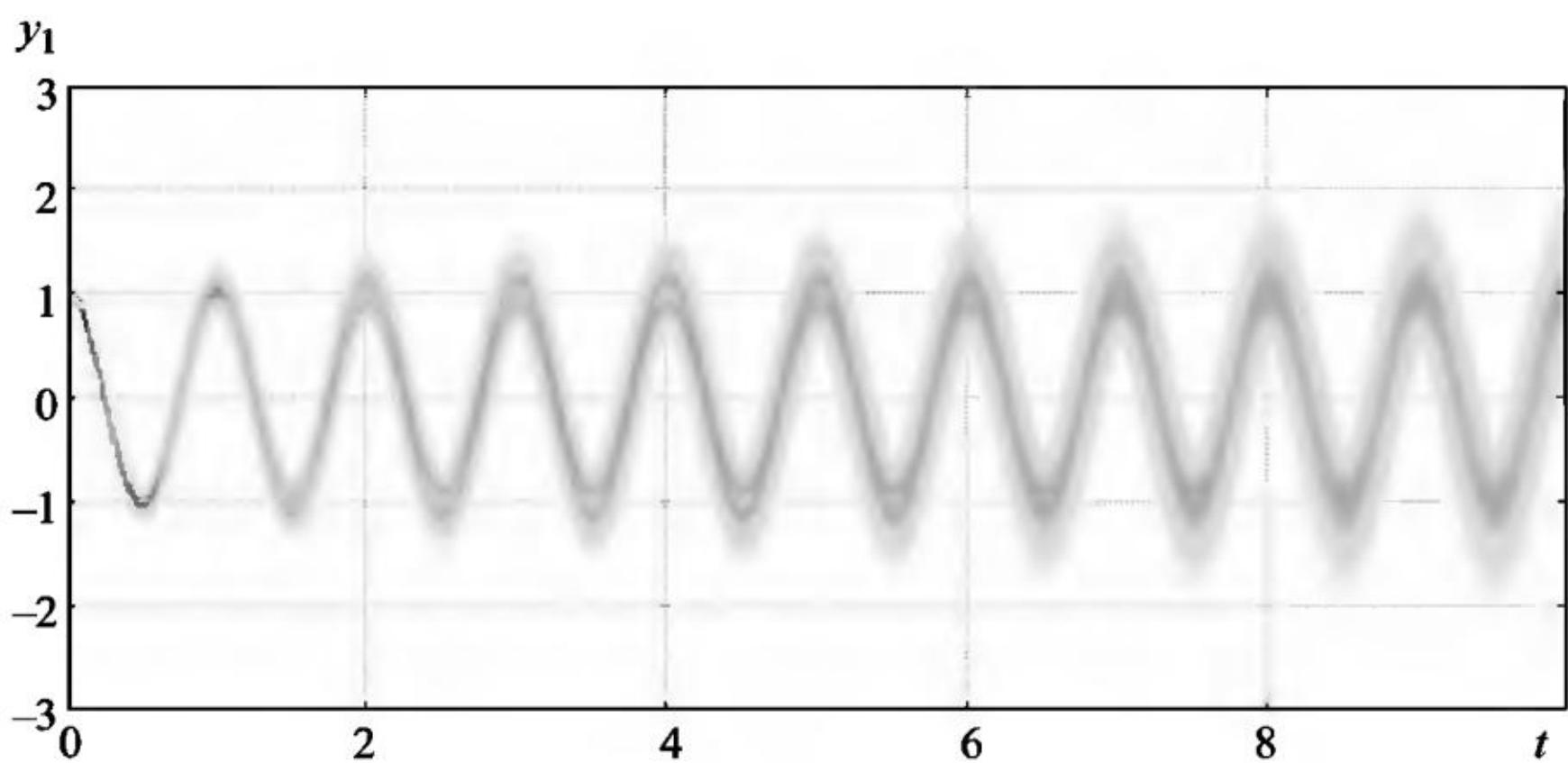


Рис. 9.6

любой фиксированный момент времени ЧИК аппроксимирует асимметричную одновершинную плотность распределения. При продвижении по интервалу интегрирования вершина асимметричного распределения в точке моды смещается вправо и влево относительно нуля, что соответствует гармоническому поведению математического ожидания решения на этом интервале. Напомним, что если рассматривать линейный осциллятор с аддитивным шумом, то решение $y_1(t)$ будет всегда иметь симметричное гауссово распределение.

График ЧИК позволяет визуально оценить диапазон изменения амплитуды и частоты колебаний любой компоненты решения произвольной осциллирующей линейной системы СДУ.

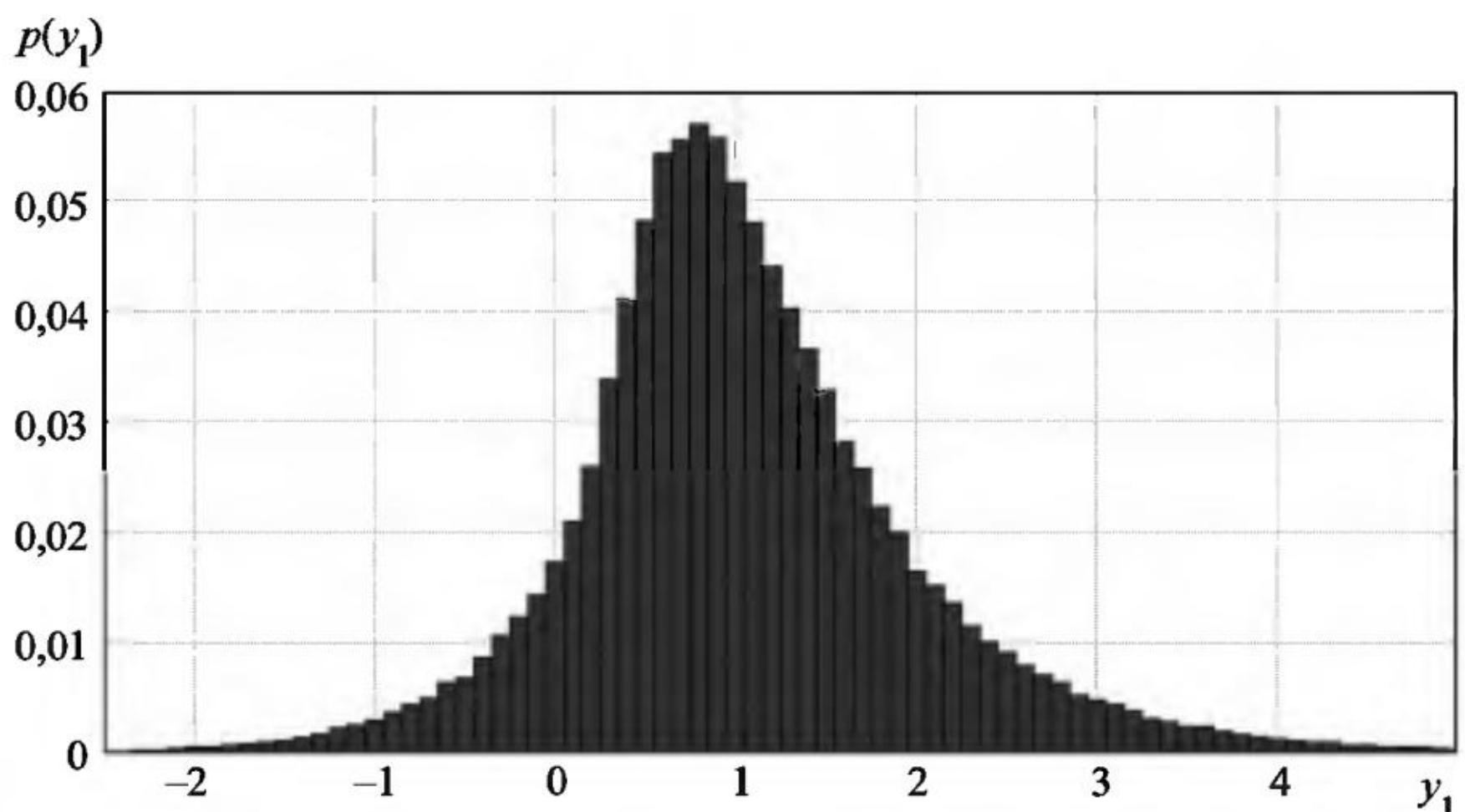


Рис. 9.7

График гистограммы плотности вероятности решения $y_1(t)$ линейного осциллятора (9.2) в конечной точке интегрирования $t_{\text{end}} = 100$ (рис. 9.7) подтверждает одновершинность и асимметричность плотности.

На рис. 9.8 и 9.9 приведены графики ЧФП (вид сбоку и сверху) для двух компонент решения (y_1, y_2) линейного осциллятора (9.2), напоминающие «жерло вулкана с крутыми склонами». Это означает, что у компонент решения (y_1, y_2) отсутствуют колебания с малой амплитудой. Для построения ЧФП использовалась сетка 100×100 . Для расчета ЧИК и ЧФП моделировалось 10^6 траекторий на 120 ядрах кластера.

Графики ЧИК и ЧФП позволяют более наглядно и информативно, чем моментные функции и гистограммы в заданные моменты времени, увидеть, как полученные оценки функционалов от решения осциллирующей системы СДУ зависят от параметров функции сноса СДУ, от интенсивности случайных шумов, от размера шага интегрирования и от размера ансамбля моделируемых траекторий.

Пример 9.2. Вращение волчка (гироскопа) с учетом внутренних случайных возмущений описывается линейной системой СДУ

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= y_3 dt, & y_1(0) &= 1, \\
 dy_2 &= y_4 dt, & y_2(0) &= 1, \\
 dy_3 &= (-20y_4 + ay_1)dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t), & y_3(0) &= 0,1, \\
 dv_+ &= (20v_- + av_+)dt + \sigma_2 v_- dw_2(t). & v_+(0) &= 0,1
 \end{aligned} \tag{9.13}$$

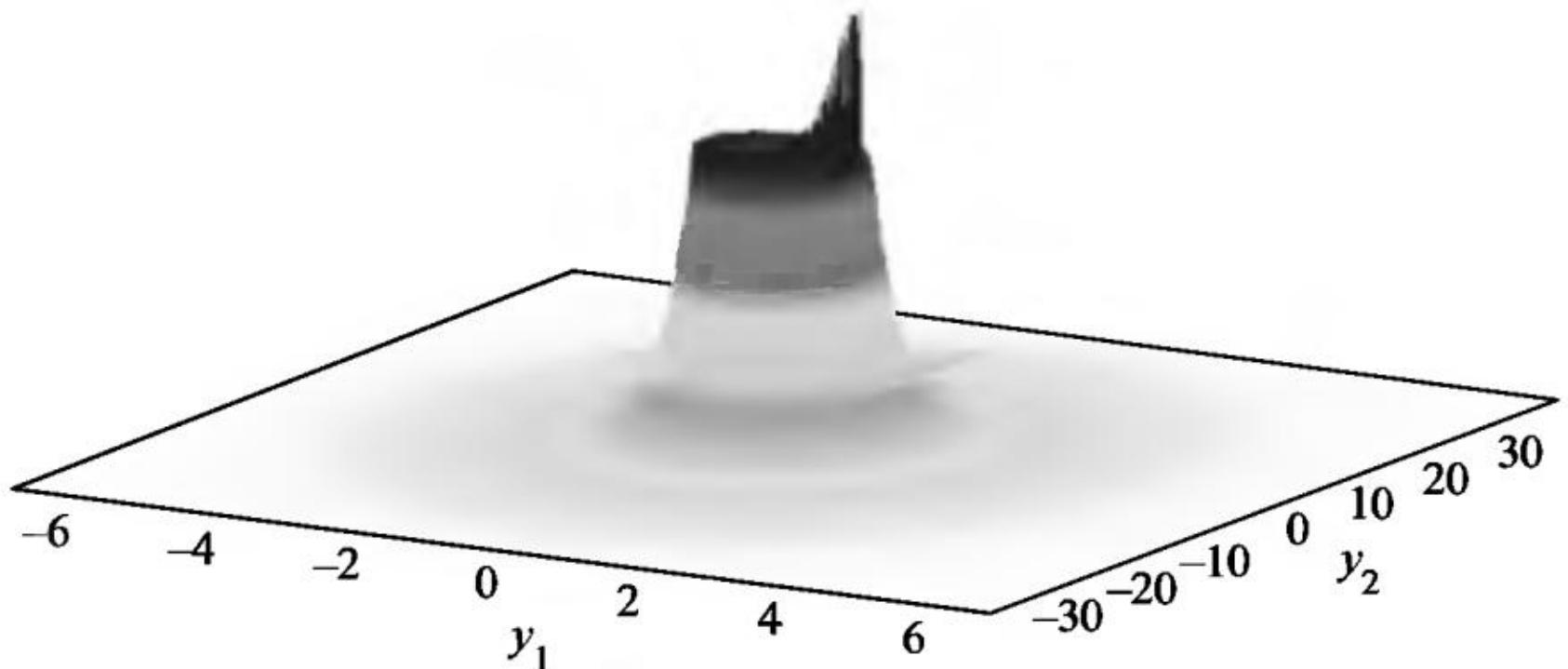


Рис. 9.8

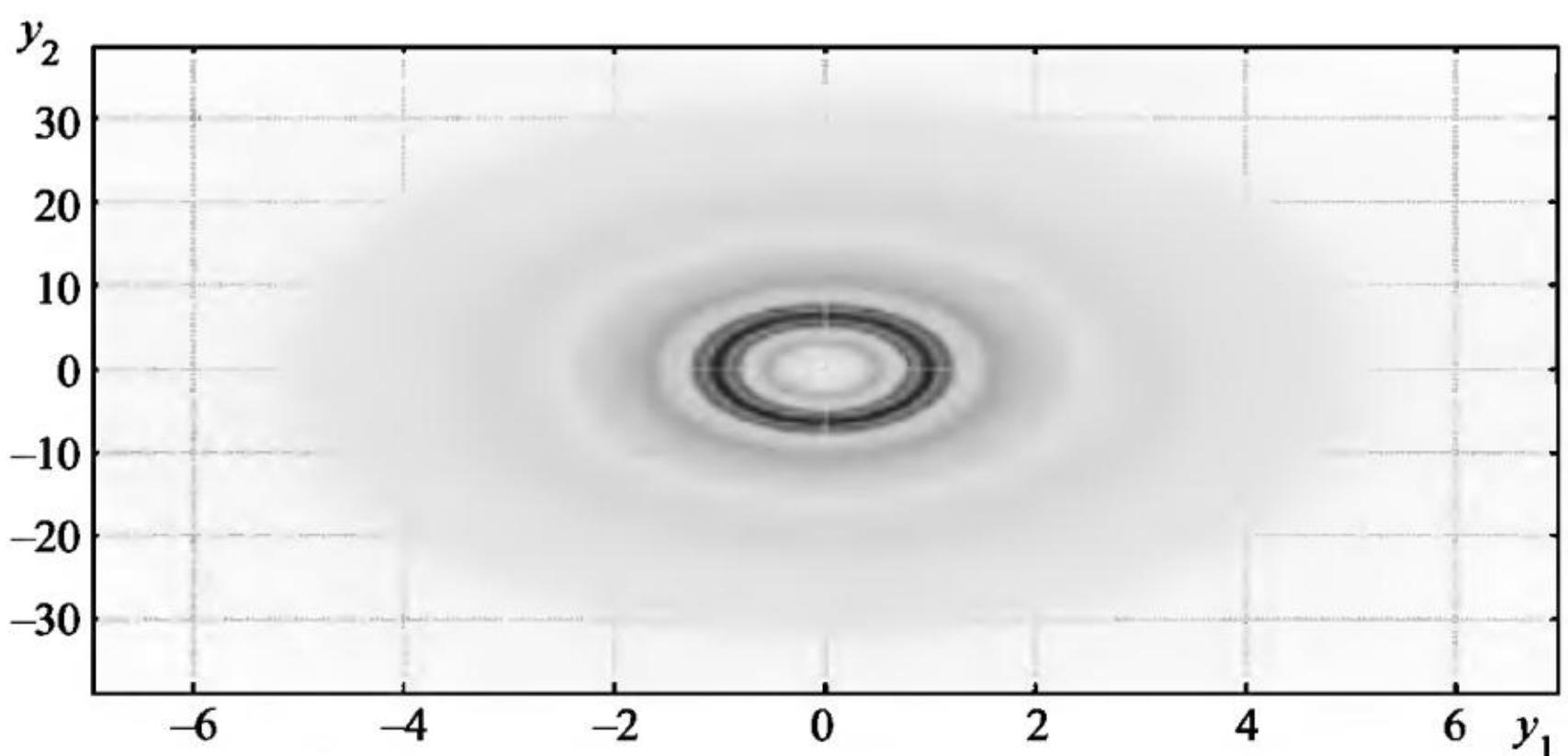


Рис. 9.9

Здесь y_1, y_2 – углы между осями неподвижной системы координат и осью симметрии волчка. При численных расчетах решения системы СДУ (9.5) моделировалось $N_{\text{tr}} = 10^6$ траекторий с шагом интегрирования $h = 10^{-5}$ на интервале $[0, 100]$. На рис. 9.10 и 9.11 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_3) численного решения системы СДУ (9.5) без шумов при значениях параметра $a = 5$ и 10 соответственно.

На рис. 9.12 приведен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_3) численного решения системы СДУ (9.5) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$ при значении параметра $a = 5$.

На рис. 9.13 приведен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_3) численного решения системы СДУ (9.5) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$ при значении параметра $a = 10$.

Вид графиков ЧФП показывает идентичное поведение всех смоделированных траекторий решений системы СДУ (9.5). Пик

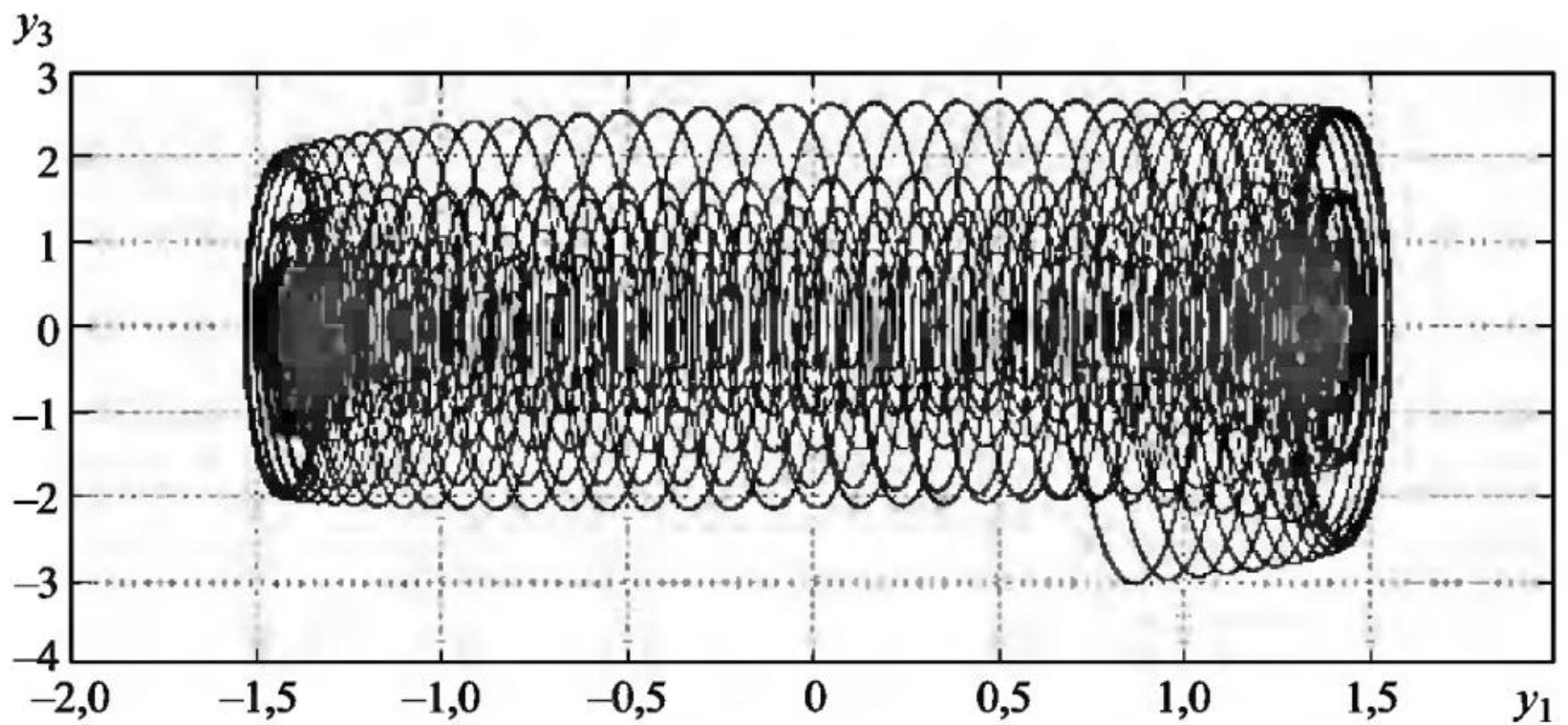


Рис. 9.10

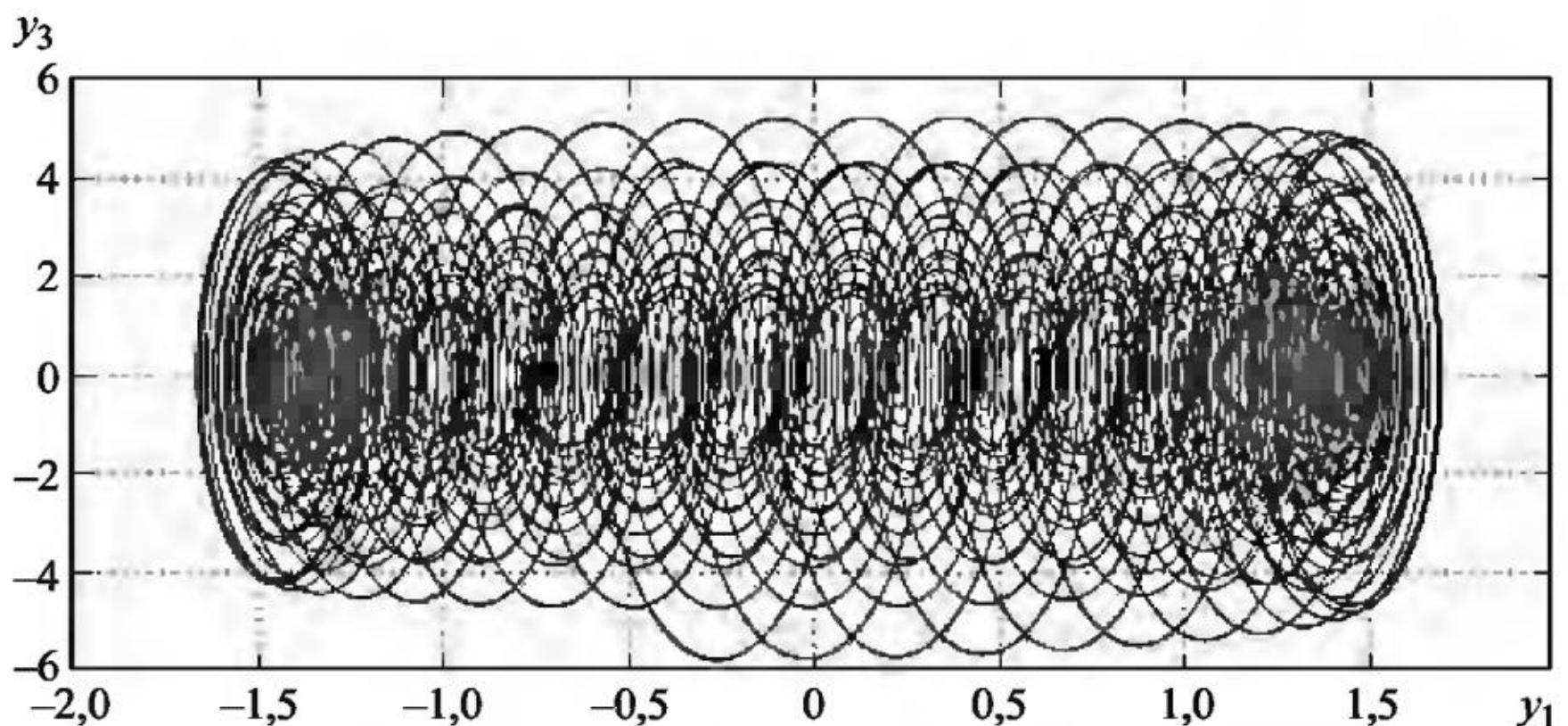


Рис. 9.11

частот графиков дает косвенную информацию о нахождении начальной (детерминированной) точки статистического моделирования траекторий решения СДУ. На рисунках хорошо видны области больших и малых частот в ЧФП, что позволяет определить преобладающие амплитуды колебаний пары компонент численного решения.

На рис. 9.14 и 9.15 приведены графики интегральной кривой компоненты y_1 численного решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 5$ и 10 .

Как видно из графиков, при увеличении параметра a увеличивается частота колебаний компоненты y_1 . На рис. 9.16 и 9.17 приведены графики оценок математического ожидания компоненты y_1 численного решения системы СДУ (9.5) с шумами интенсив-

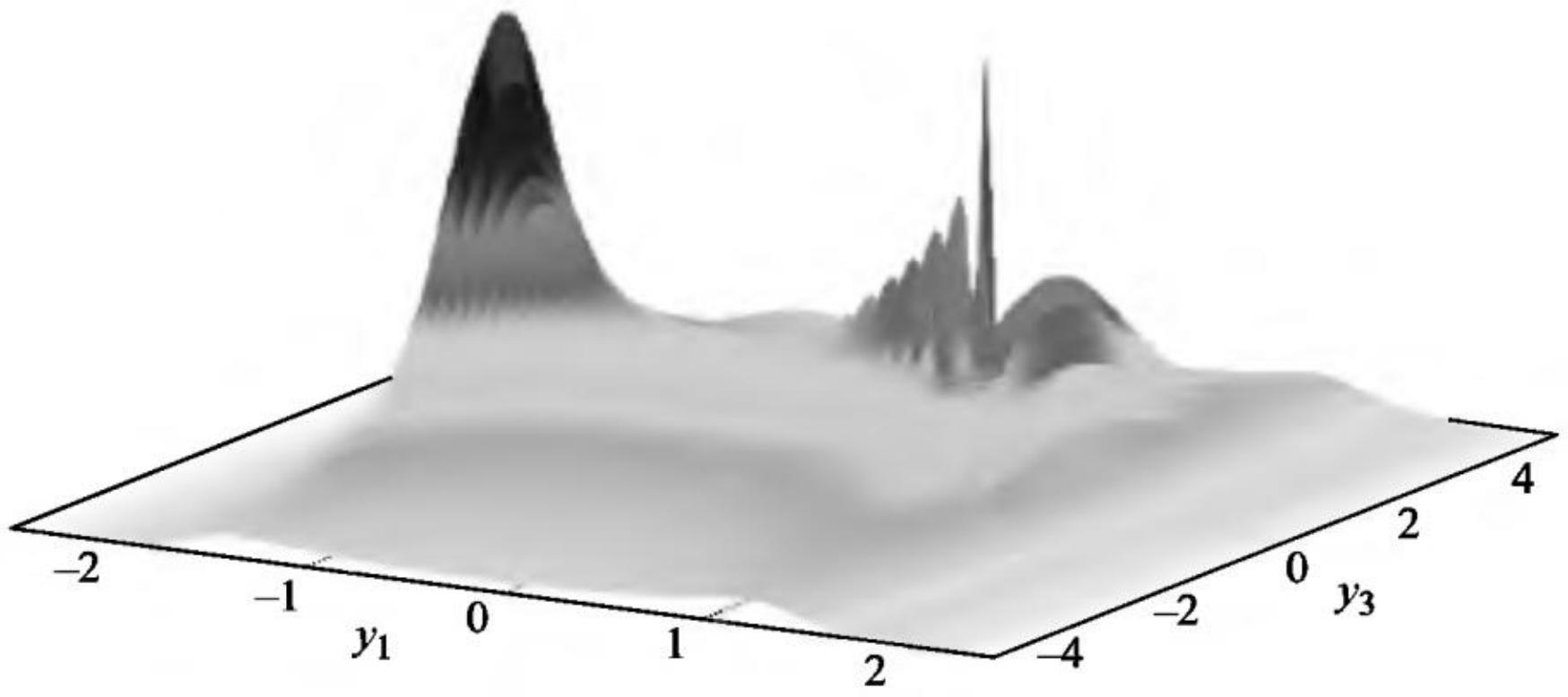


Рис. 9.12

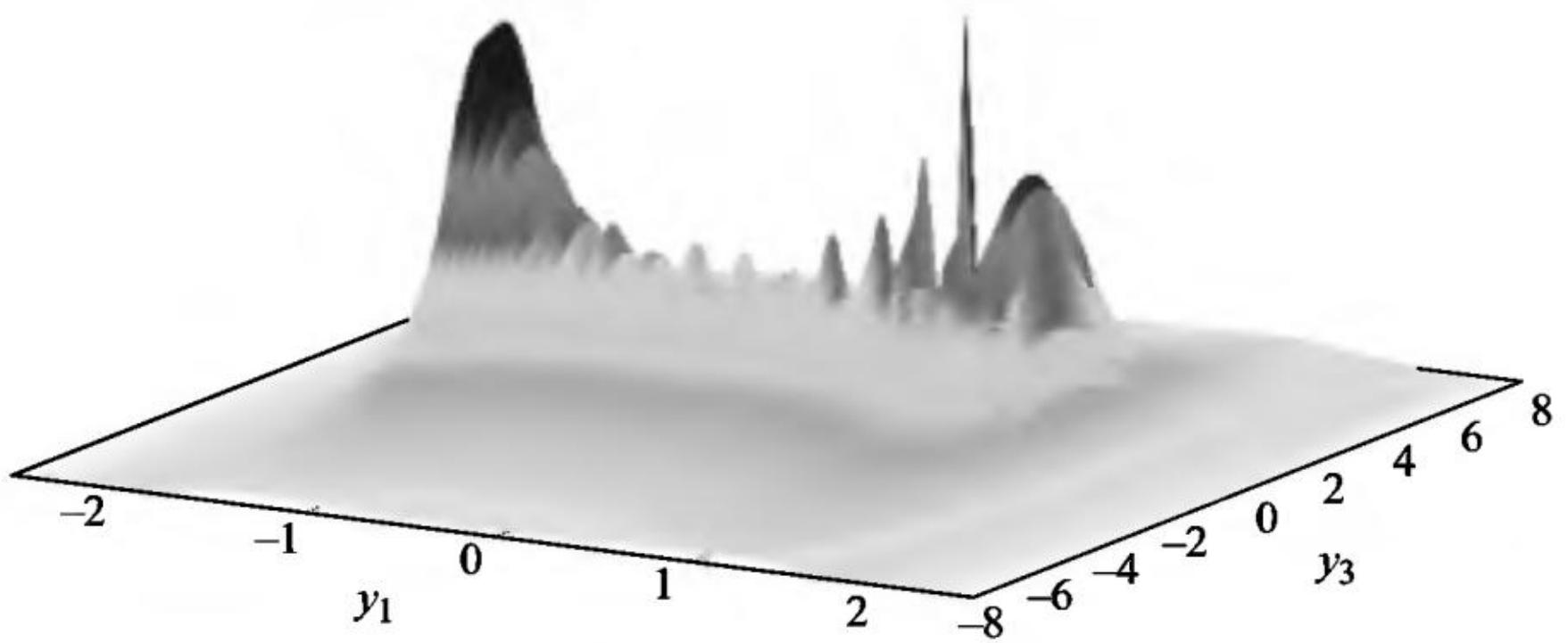


Рис. 9.13

ности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$ при значениях параметра $a = 5$ и 10 соответственно.

На рис. 9.18 и 9.19 приведены графики оценок дисперсии компоненты y_1 численного решения системы СДУ (9.5) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$ при значениях параметра $a = 5$ и 10 соответственно.

Рост оценок дисперсии говорит о неустойчивости численного решения системы СДУ (9.5), а это означает, что со временем «волчок упадет».

На рис. 9.20 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 численного решения системы СДУ (9.5) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$ при значении параметра $a = 5$.

На рис. 9.21 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_1 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 100$ численного решения системы СДУ (9.5) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$ при значении параметра $a = 5$.

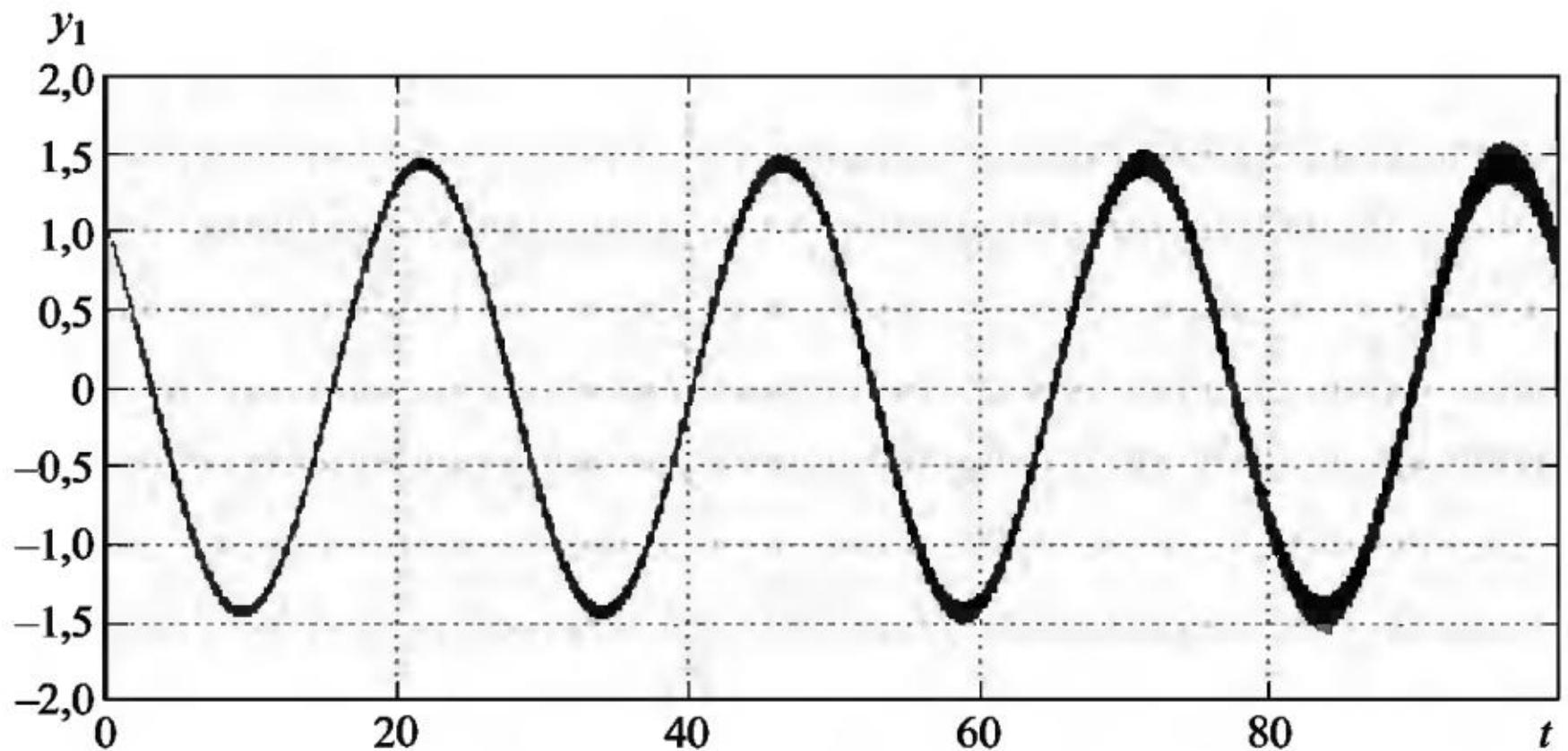


Рис. 9.14

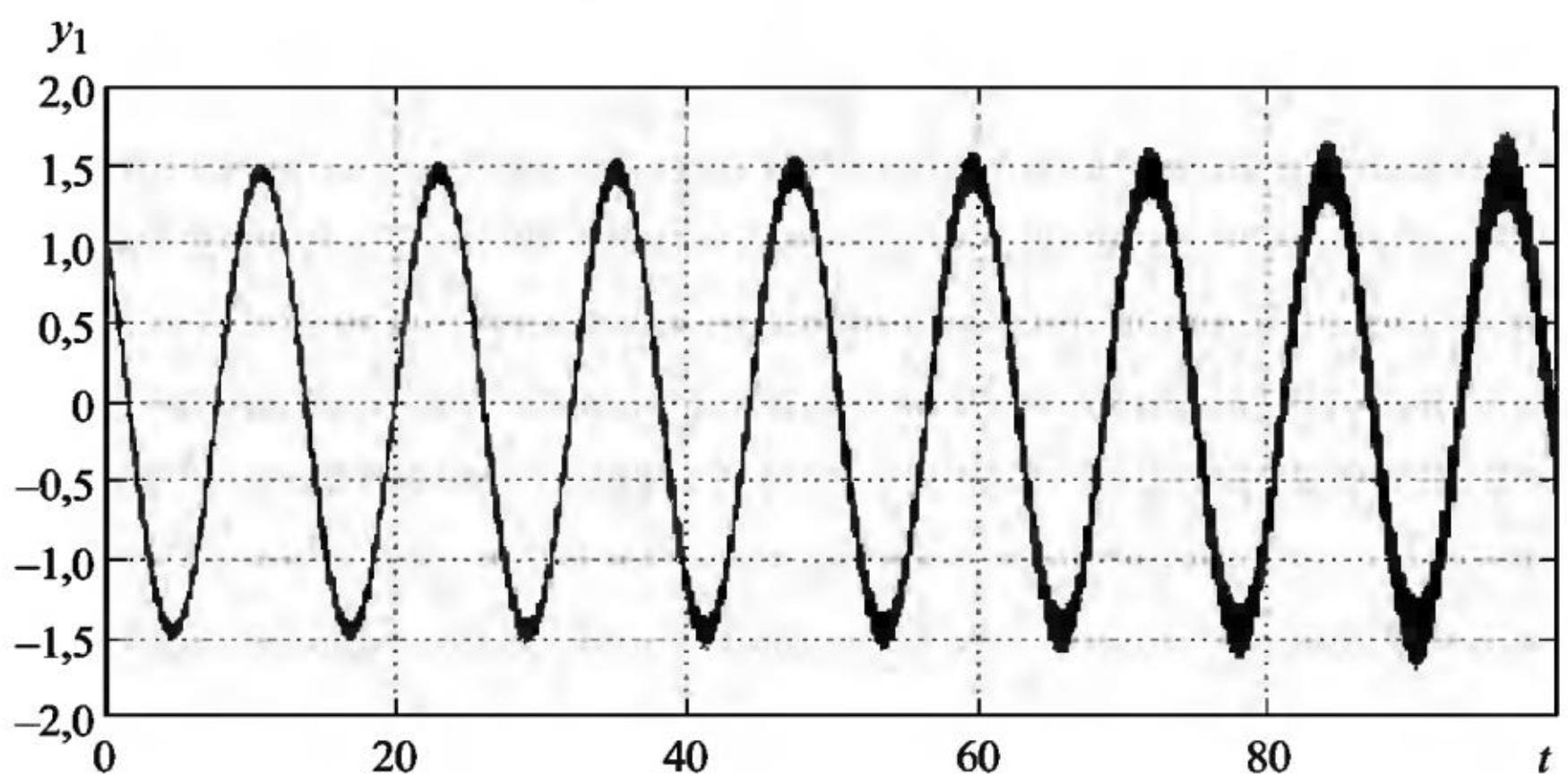


Рис. 9.15

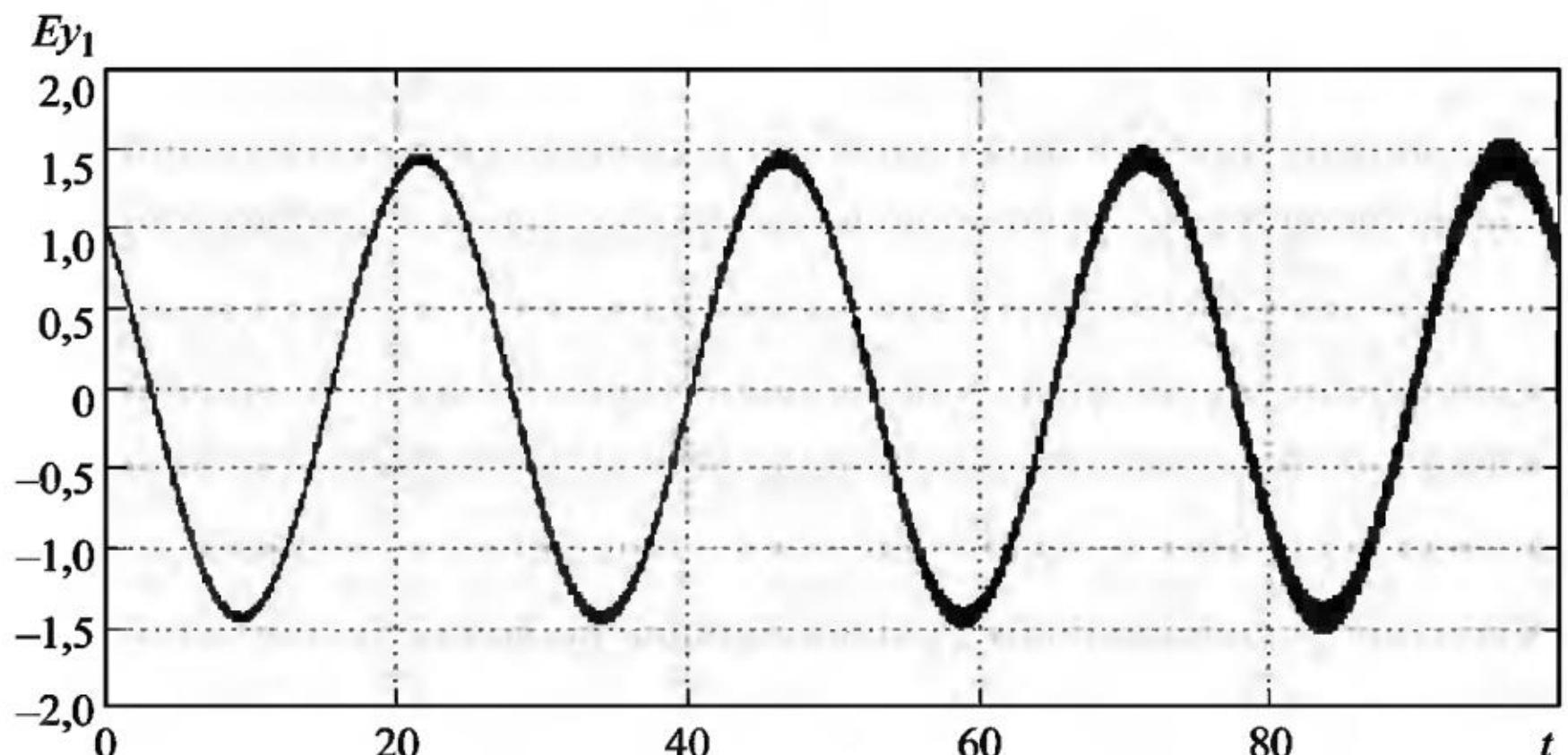


Рис. 9.16

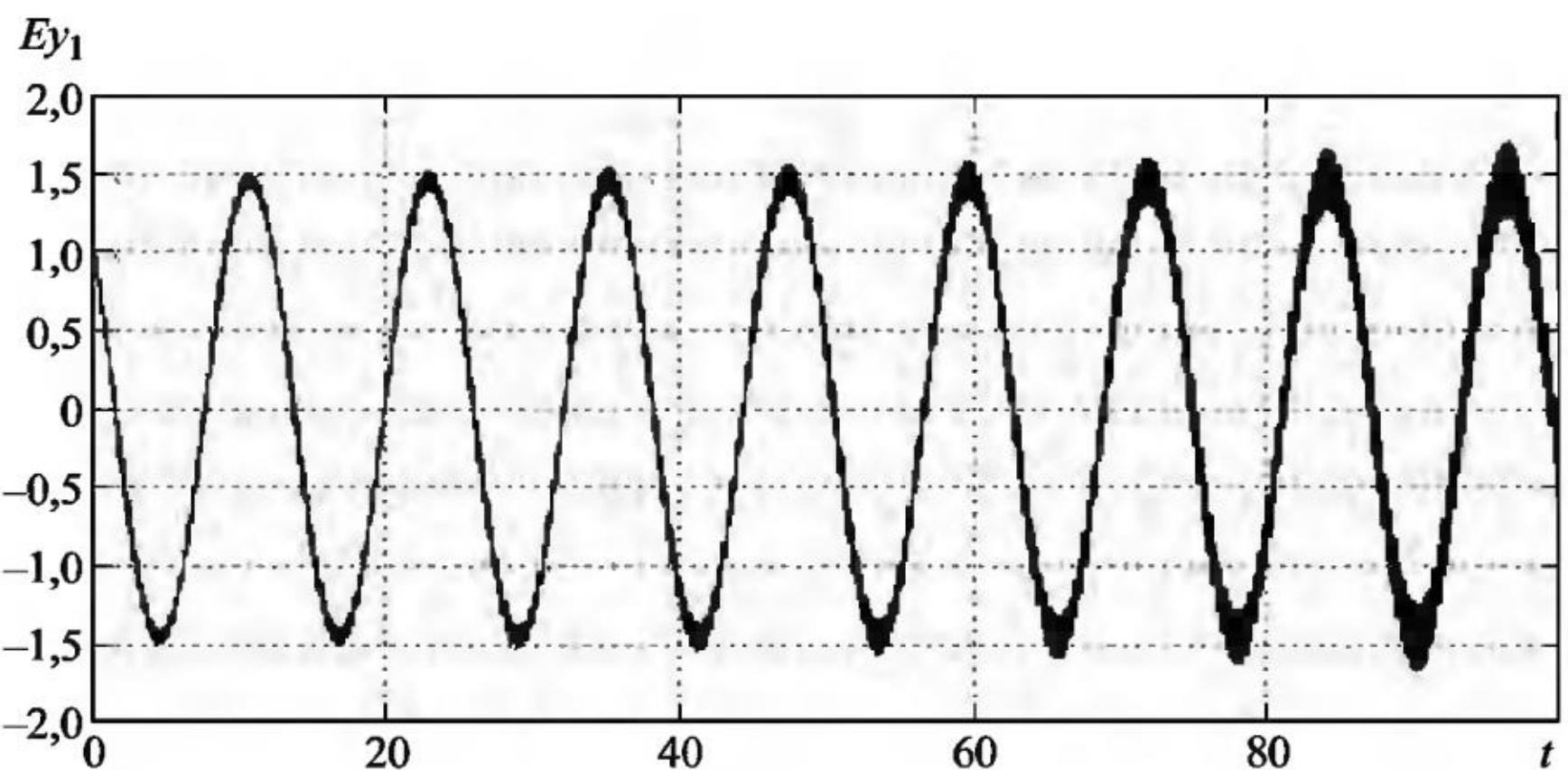


Рис. 9.17

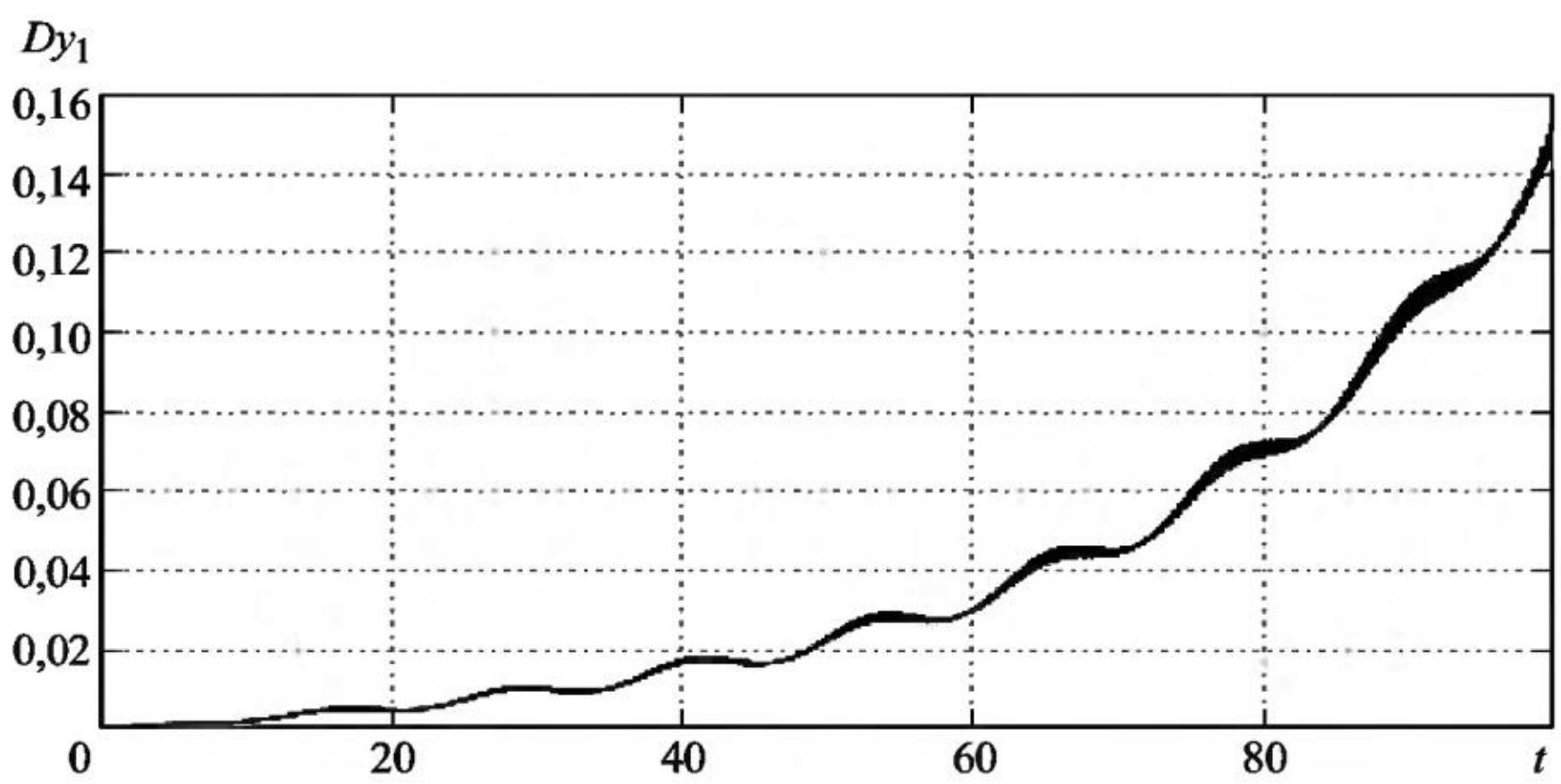


Рис. 9.18

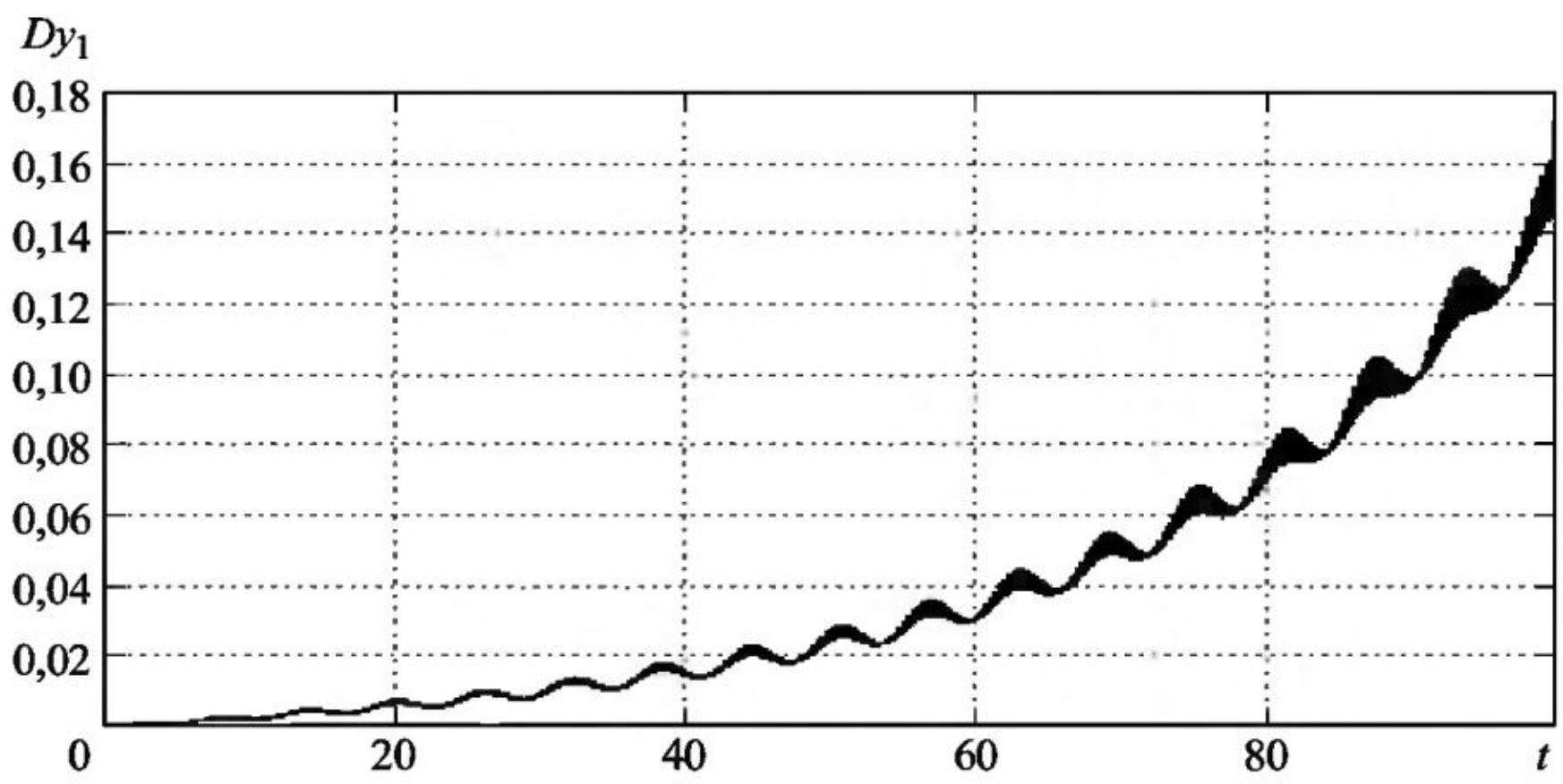


Рис. 9.19

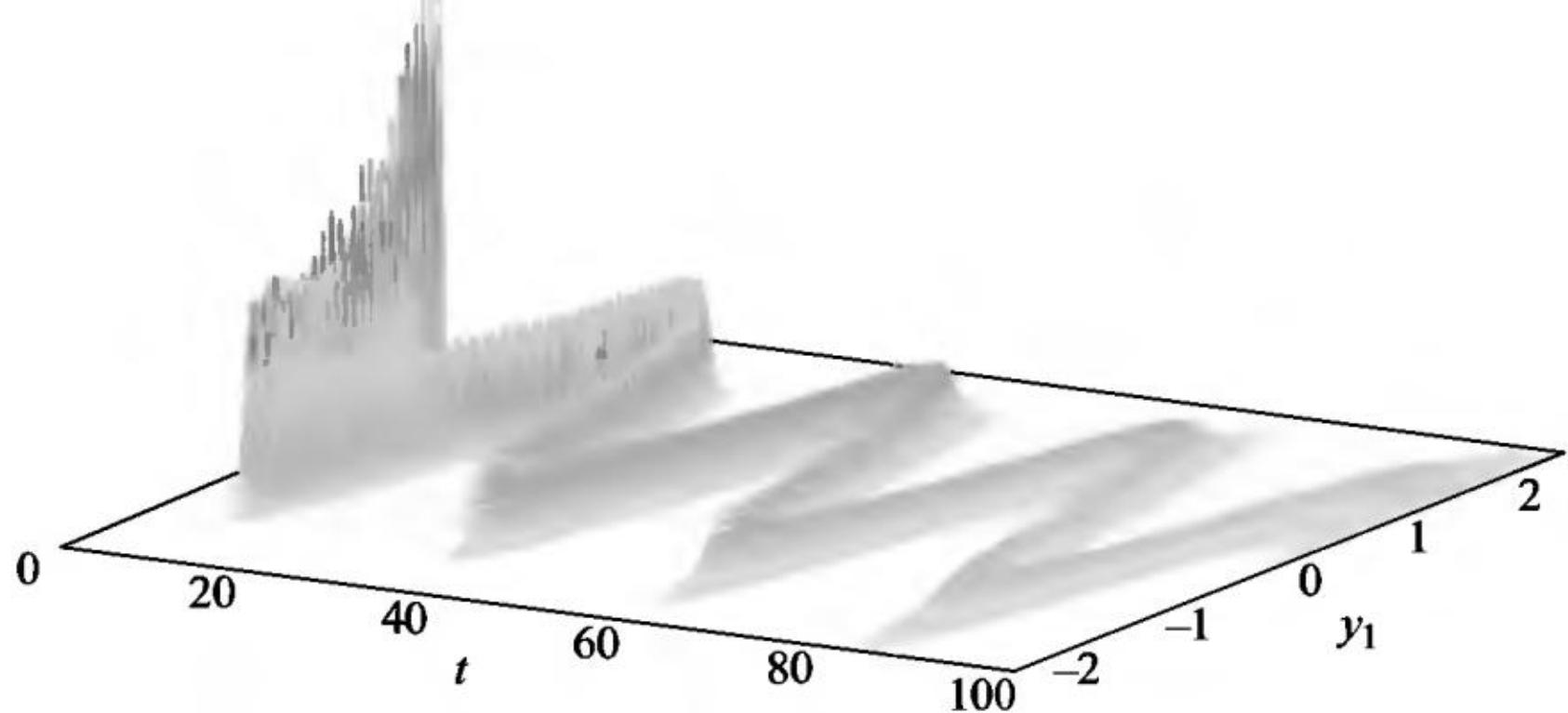


Рис. 9.20

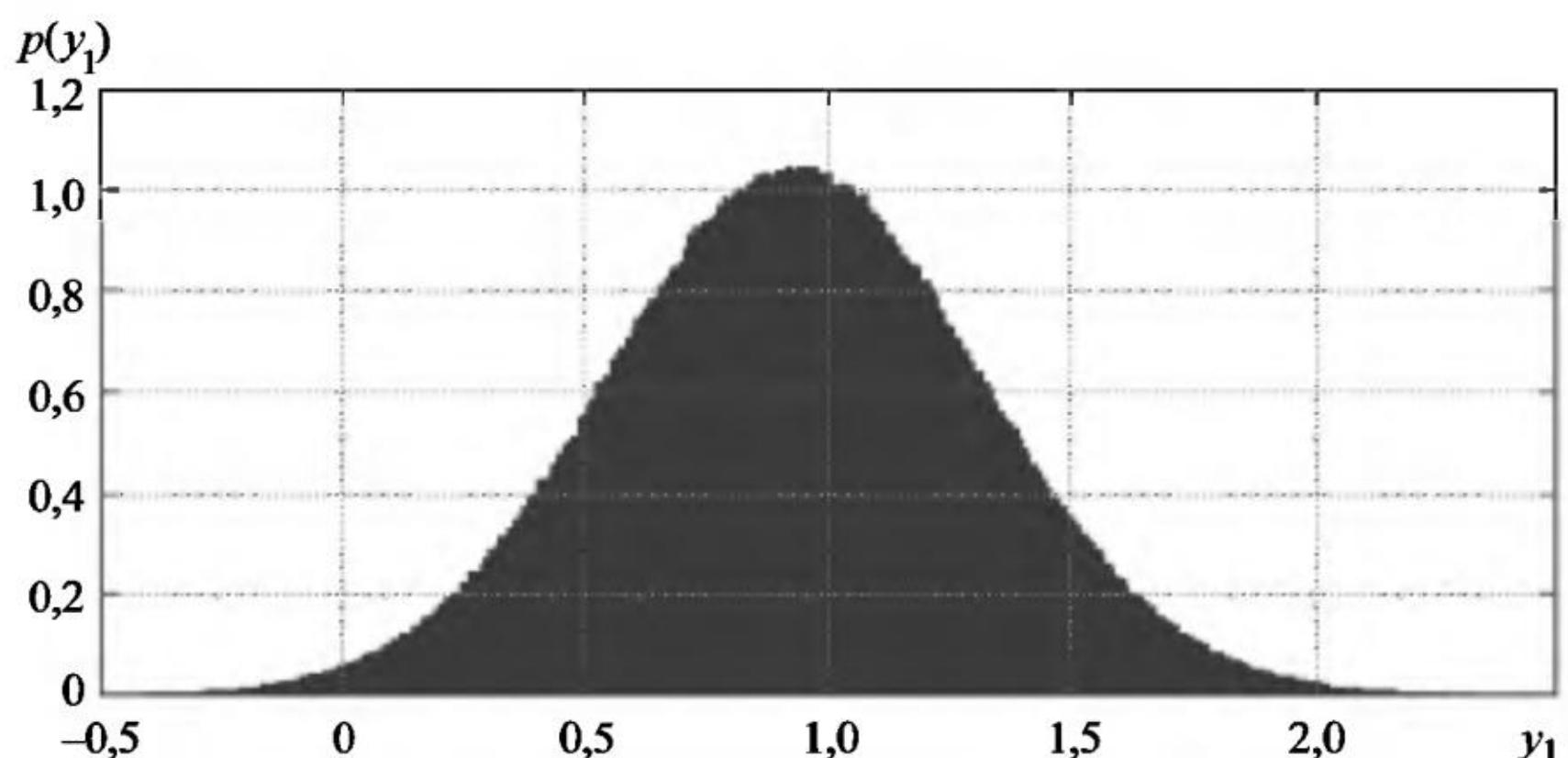


Рис. 9.21

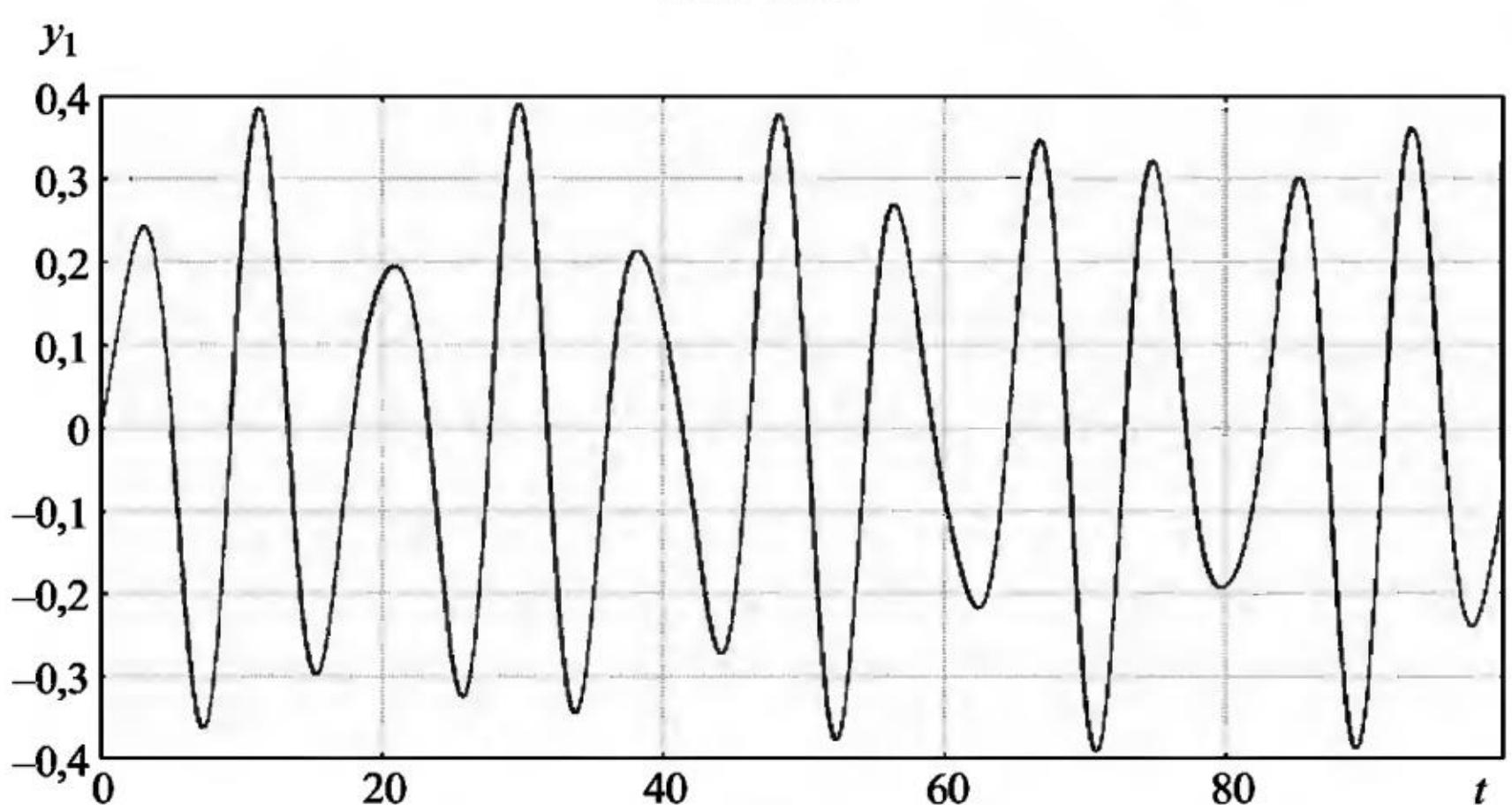


Рис. 9.22

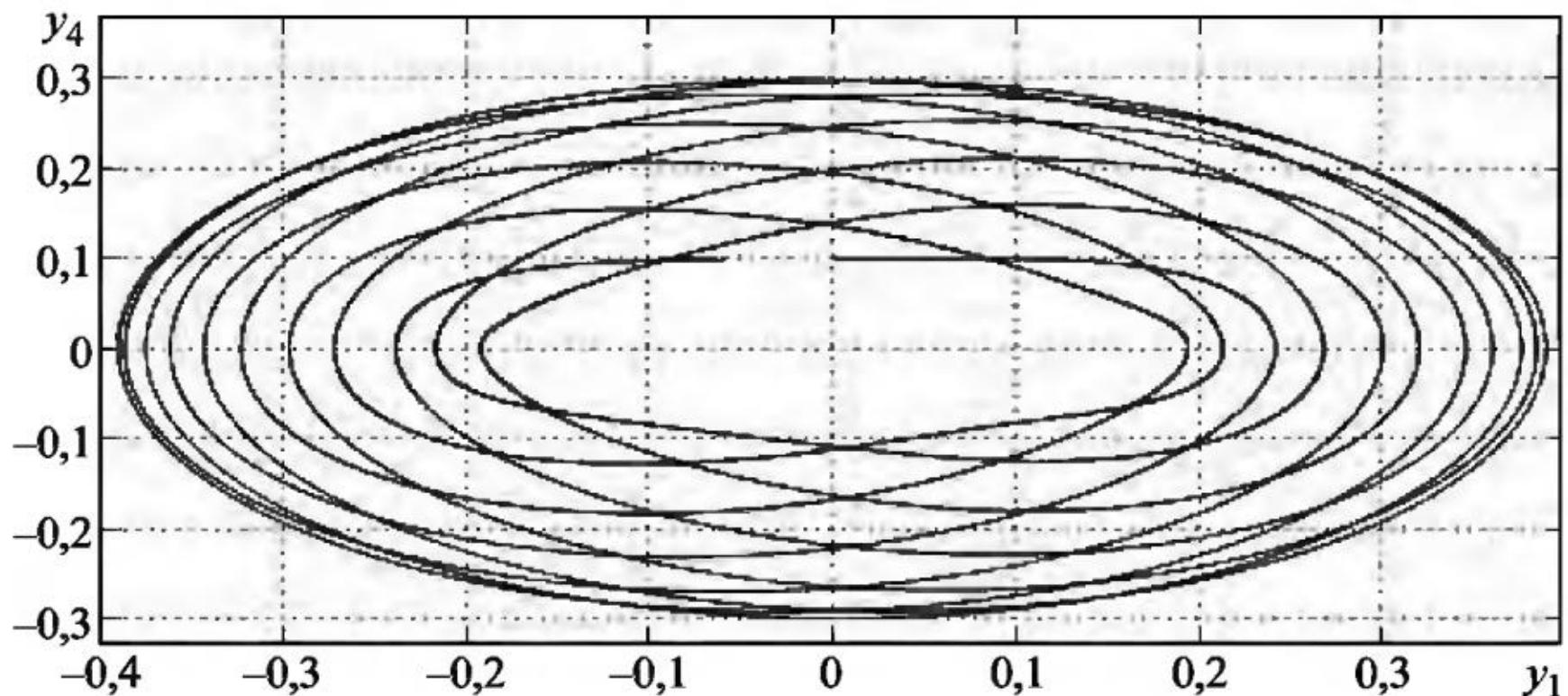


Рис. 9.23

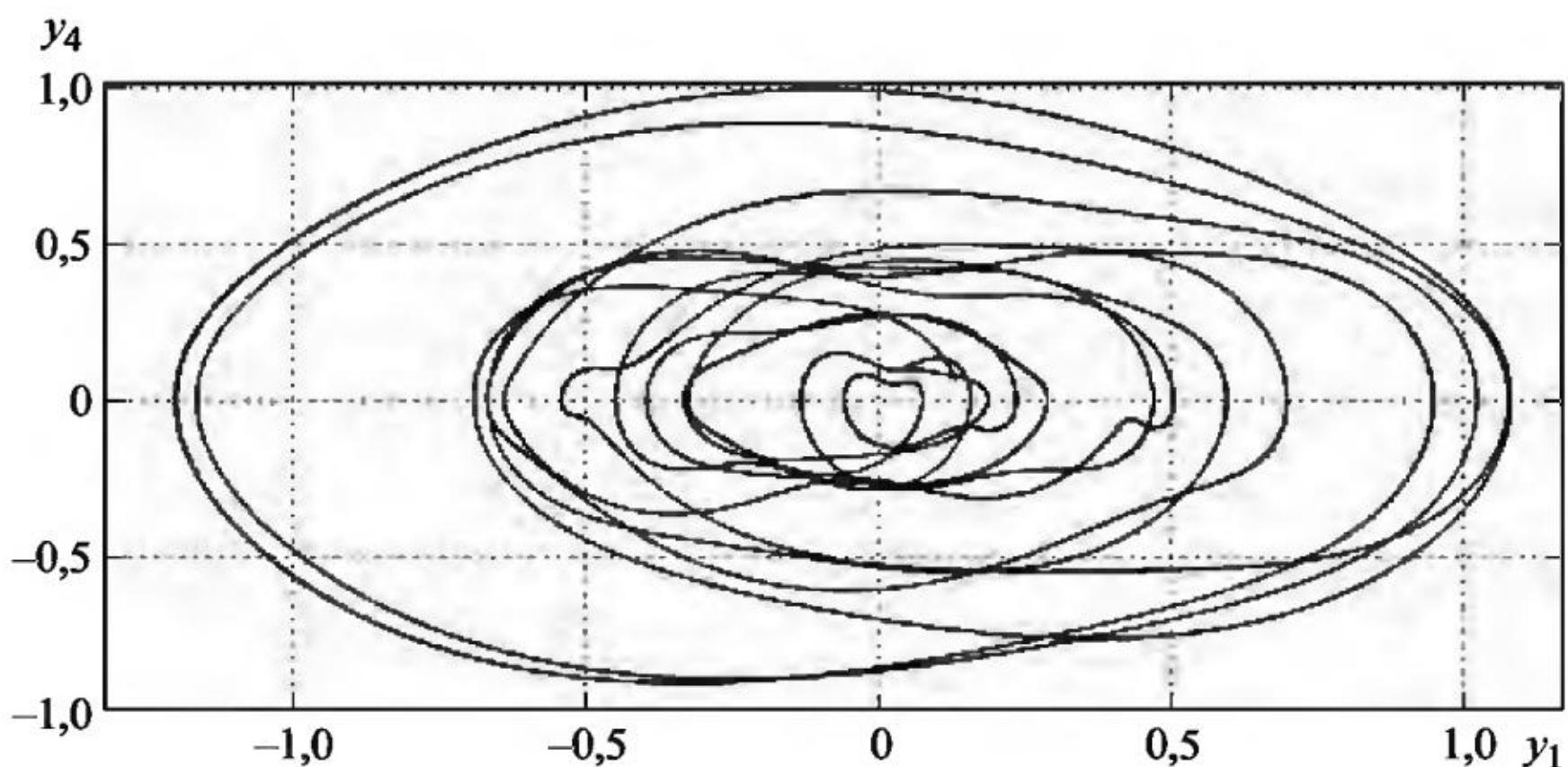


Рис. 9.24

Сравнивая графики одной интегральной кривой численного решения ОДУ и ЧИК для СДУ, можно оценить влияние случайных возмущений на поведение решений сопутствующей системы ОДУ.

Пример 9.3. Поперечные колебания струны с тремя бусинками, находящейся под воздействием внешних случайных шумов, задаются линейной системой СДУ

$$dy_1 = y_4 dt,$$

$$y_1(0) = 0,$$

$$dy_2 = y_5 dt,$$

$$y_2(0) = 0,$$

$$dy_3 = y_6 dt,$$

$$y_3(0) = 0,$$

(9.14)

$$\begin{aligned} dy_4 &= \left(a(y_2 - 2y_1) \right) dt, & y_4(0) &= 0,1, \\ dy_5 &= 9a(y_1 - 2y_2 + y_3)dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_5(0) &= 0,2, \\ dy_6 &= a(y_2 - 2y_3)dt + \sigma_2 dw_2(t), & y_6(0) &= 0,3. \end{aligned}$$

Здесь y_1, y_2, y_3 – смещения бусинок перпендикулярно струне. На рис. 9.22 приведен график компоненты y_1 решения сопутствующей системы ОДУ при $a = 0,5$.

На рис. 9.23 и 9.24 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_4) решения системы СДУ (9.14) без шумов и с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$, рассчитанные с шагом интегрирования $h = 10^{-4}$ на интервале $[0, 100]$ с параметром $a = 0,5$.

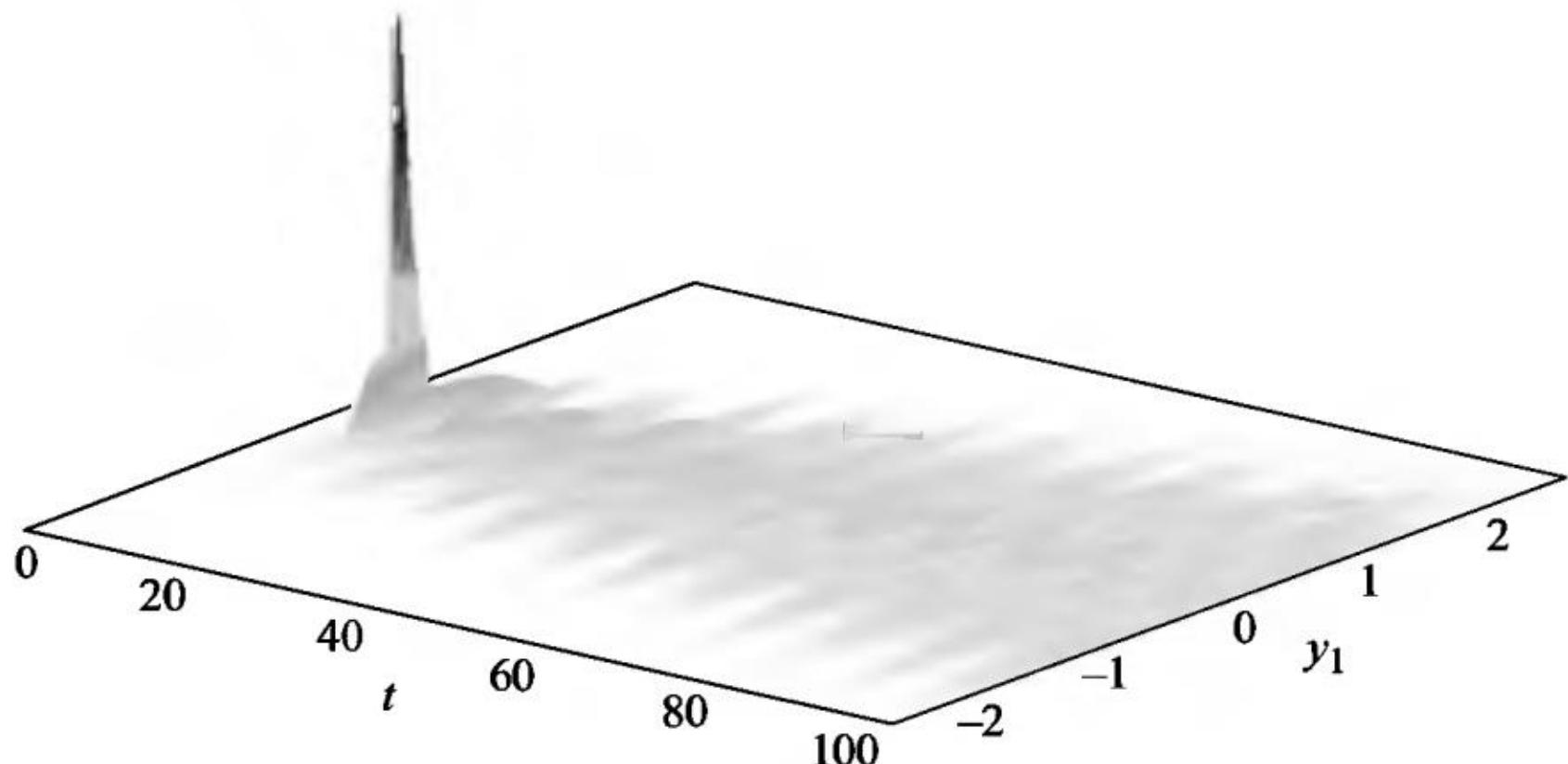


Рис. 9.25

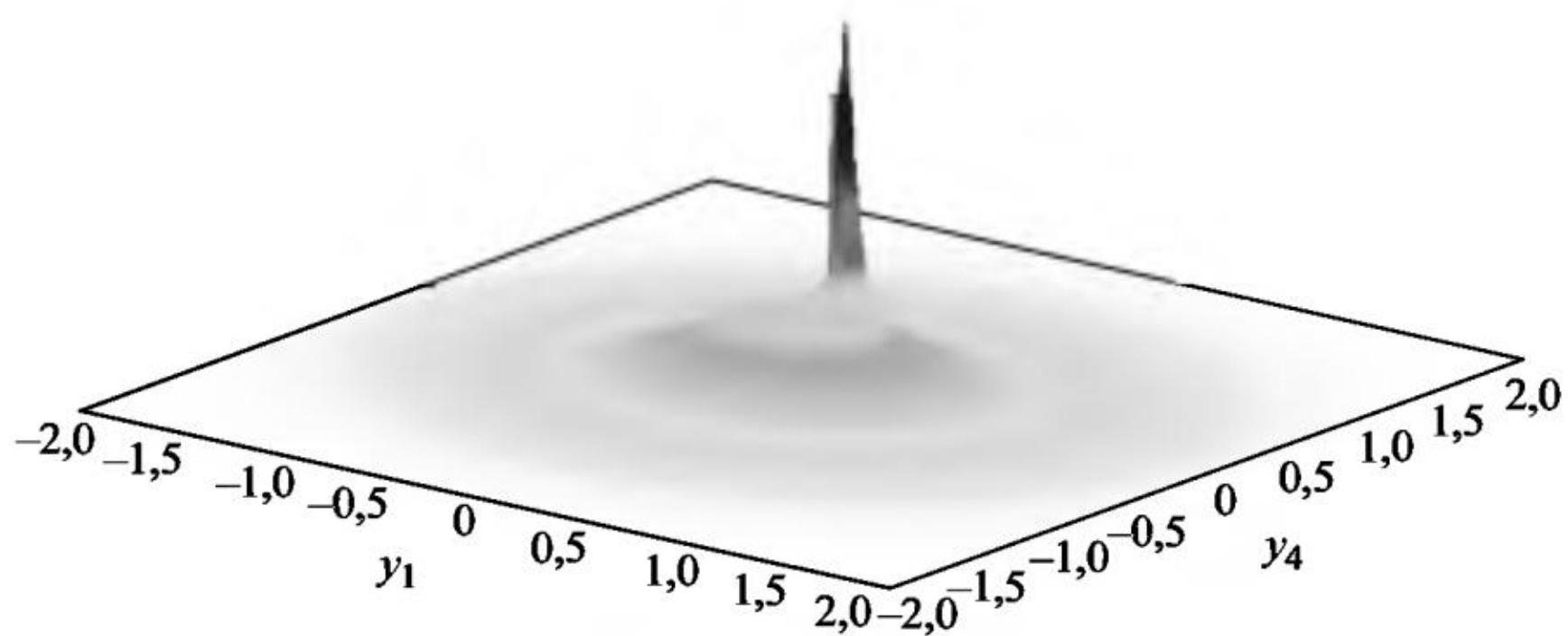


Рис. 9.26

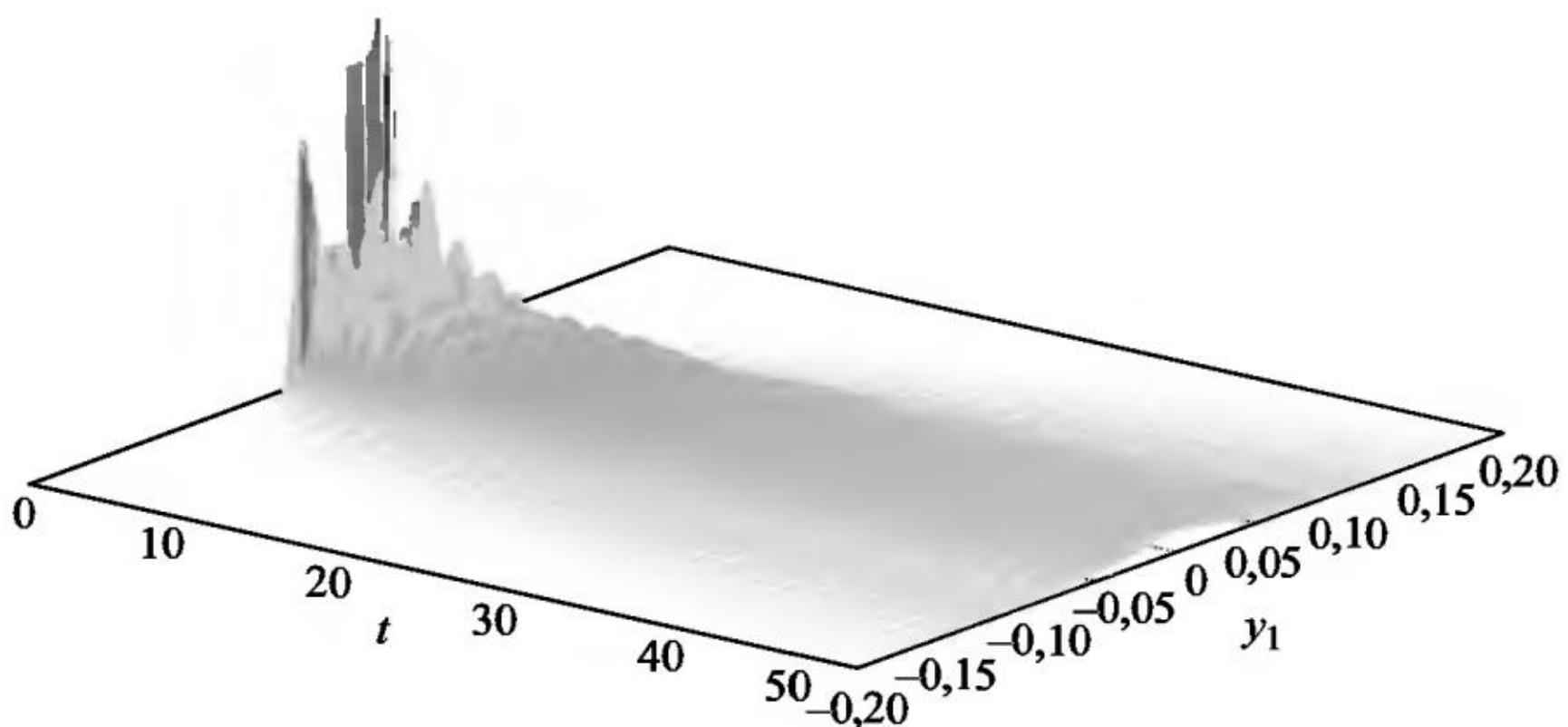


Рис. 9.27

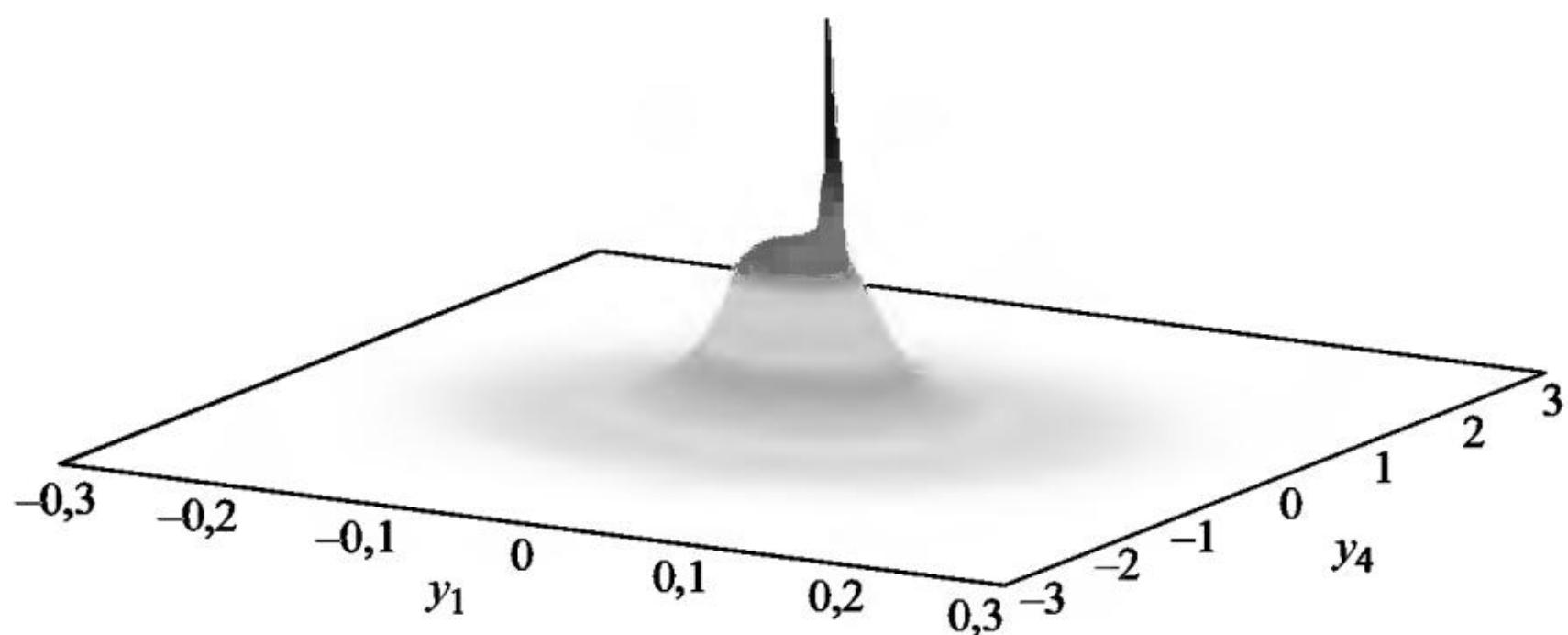


Рис. 9.28

График ЧИК (вид сбоку) (рис. 9.25) и график ЧФП (вид сбоку) (рис. 9.26), рассчитанные с параметром $a = 0,5$ и с интенсивностью шумов $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$, показывают динамику изменения частоты и рост амплитуды колебаний компоненты y_1 решения системы СДУ (9.14).

Графики ЧИК (вид сбоку) (рис. 9.27) компоненты y_1 и ЧФП (вид сбоку) (рис. 9.28) пары компонент (y_1, y_4) численного решения системы СДУ (9.14) имеют другие вид и размеры при $a = 0,5$.

Сравнивая формы ЧФП на рис. 9.8 и 9.28, можно увидеть принципиальную разницу влияния мультипликативных и аддитивных шумов на решения линейных систем ОДУ.

10. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

Решение нелинейной системы СДУ отличается от решения линейной хотя бы тем, что сопутствующая система ОДУ не совпадает с системой ОДУ для нахождения математического ожидания решения. Кроме того, стационарное решение линейной системы СДУ с аддитивным шумом всегда имеет гауссово распределение, а решение нелинейной СДУ с аддитивным шумом никогда не может быть гауссовым, что дает бесконечное многообразие законов распределений решений. Соответственно, для решений нелинейных систем СДУ характерно большое разнообразие форм ЧИК и ЧФП.

Пример 10.1. Стохастическое нелинейное уравнение Вандер-Поля с одним «шумящим» коэффициентом, записанное в виде системы СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, \\ dy_2 &= \left(ay_2 \left(1 - by_1^2 \right) - \omega^2 y_1 \right) dt + \sigma y_1 dw(t), \end{aligned} \quad (10.1)$$

описывает колебания нелинейного контура под воздействием внутреннего шума. В (10.1) постоянные a , b , ω определяют скорость переходных участков в решении и длину «полочек» (см. рис. 10.1). Для математического ожидания точного решения СДУ (10.1) не существует ни явного формульного представления, ни замкнутой системы ОДУ для его численного расчета. Единственным конструктивным способом анализа нелинейных СДУ с большим шумом является ММК.

На рис. 10.1 приведен график одной траектории численного решения y_1 системы СДУ (10.1), полученный с шагом $h = 10^{-8}$ при $\sigma = 1$, $a = 20$, $b = 0,3$, $\omega = 1$. При так выбранном параметре $a = 20$ стохастическое уравнение Ван-дер-Поля можно считать «жестким», имеющим и быстрые переходные участки, и установившиеся участки решения вблизи значений ± 3 .

На рис. 10.2 приведен график одной фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (10.1). Как видно из рис. 10.1 и 10.2, амплитуда колебаний траектории ре-

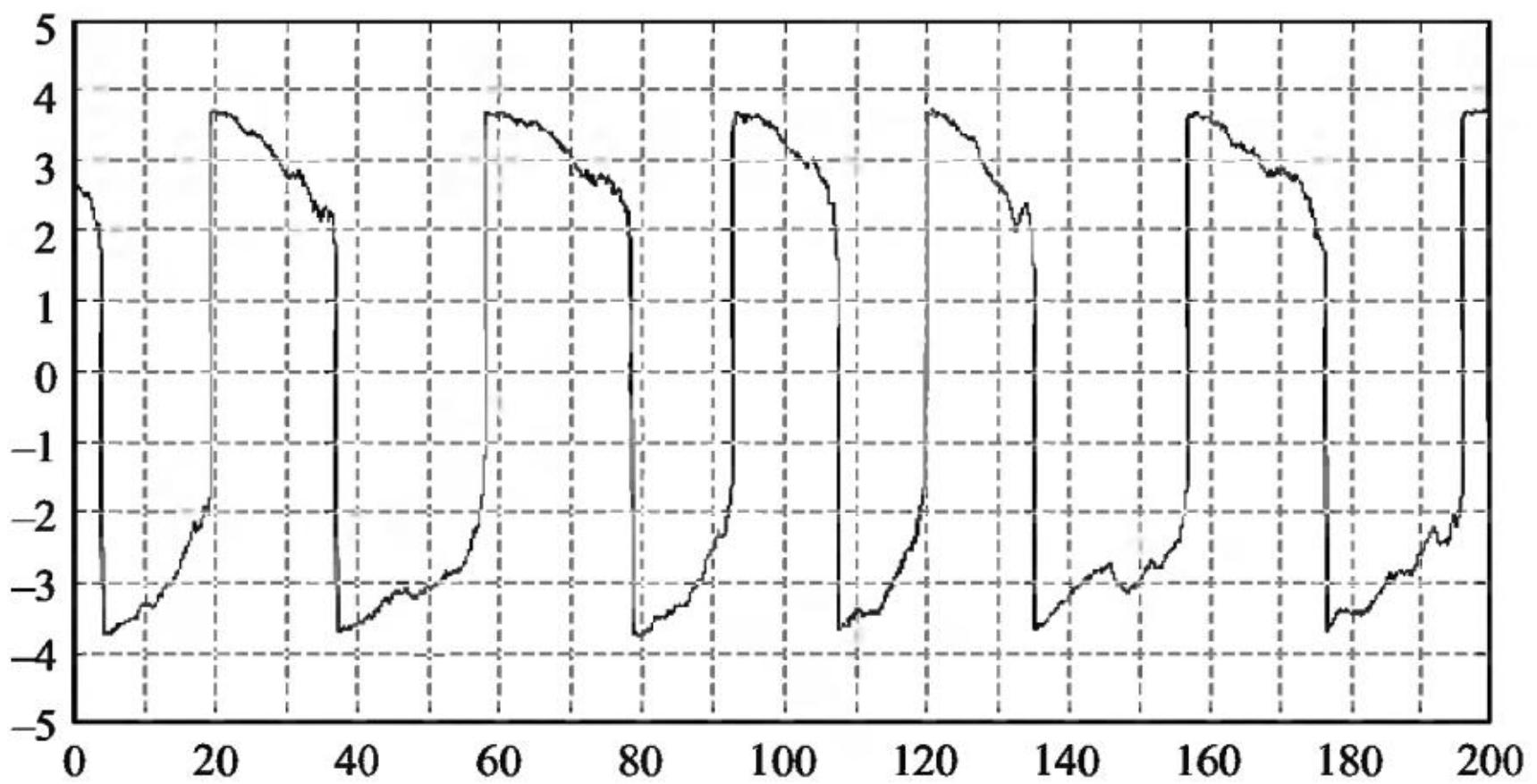


Рис. 10.1

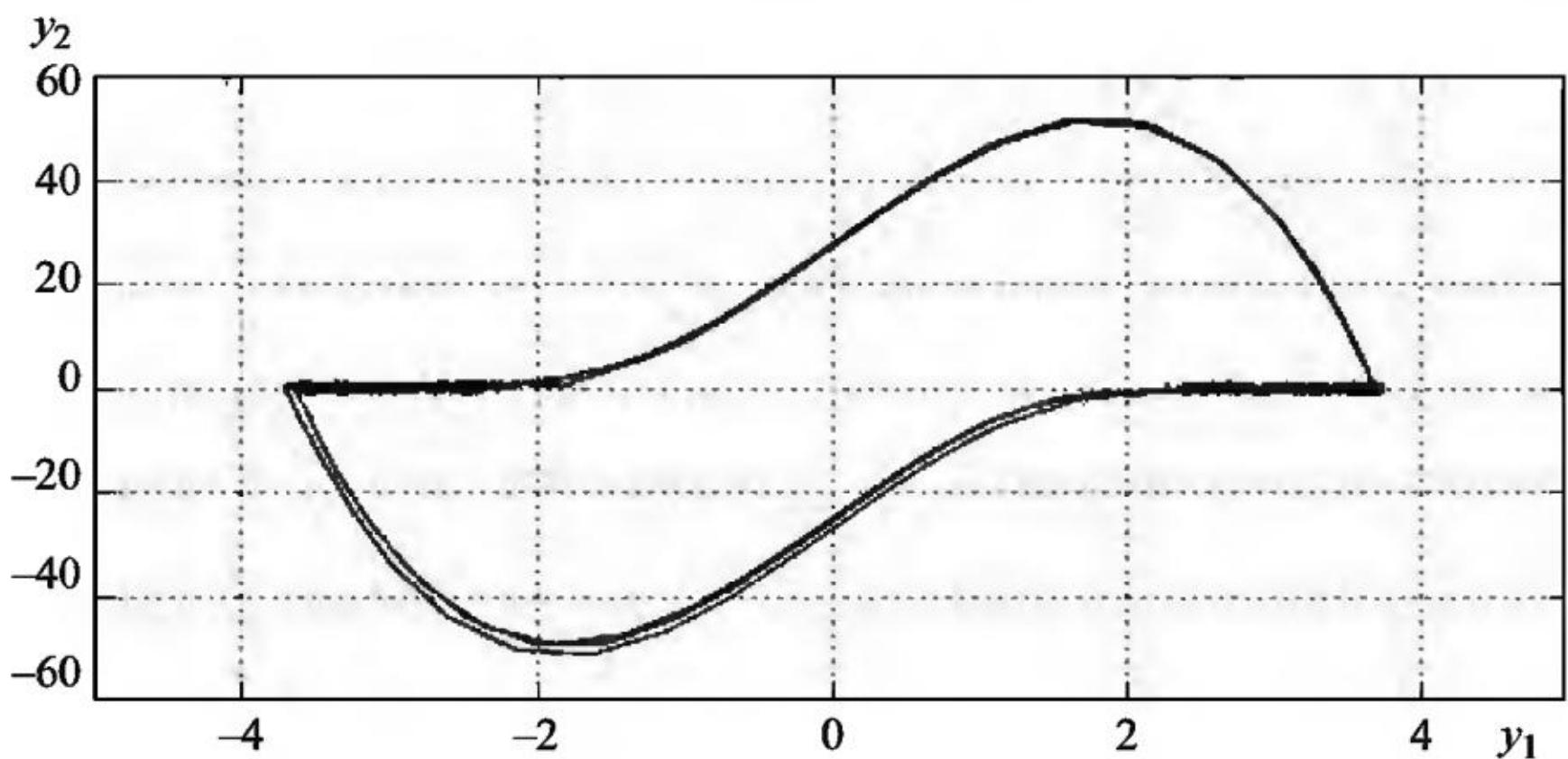


Рис. 10.2

шения не уменьшается. Однако численные расчеты показывают, что этого нельзя сказать о поведении математического ожидания $Ey_1(t)$.

Из графика оценки математического ожидания $Ey_1(t)$ (рис. 10.3) видим, что амплитуда колебаний $Ey_1(t)$ уменьшается от периода к периоду, а это находится в резком контрасте с поведением математического ожидания в линейном колебательном контуре. Можно сказать, что математическое ожидание нелинейного СДУ со временем «теряет информацию» о поведении каждой отдельной траектории решения СДУ (10.1). Дополнительные расчеты показали, что и в случае малой нелинейности (например, с $a = 1$) математическое ожидание решения (10.1) также имеет убываю-

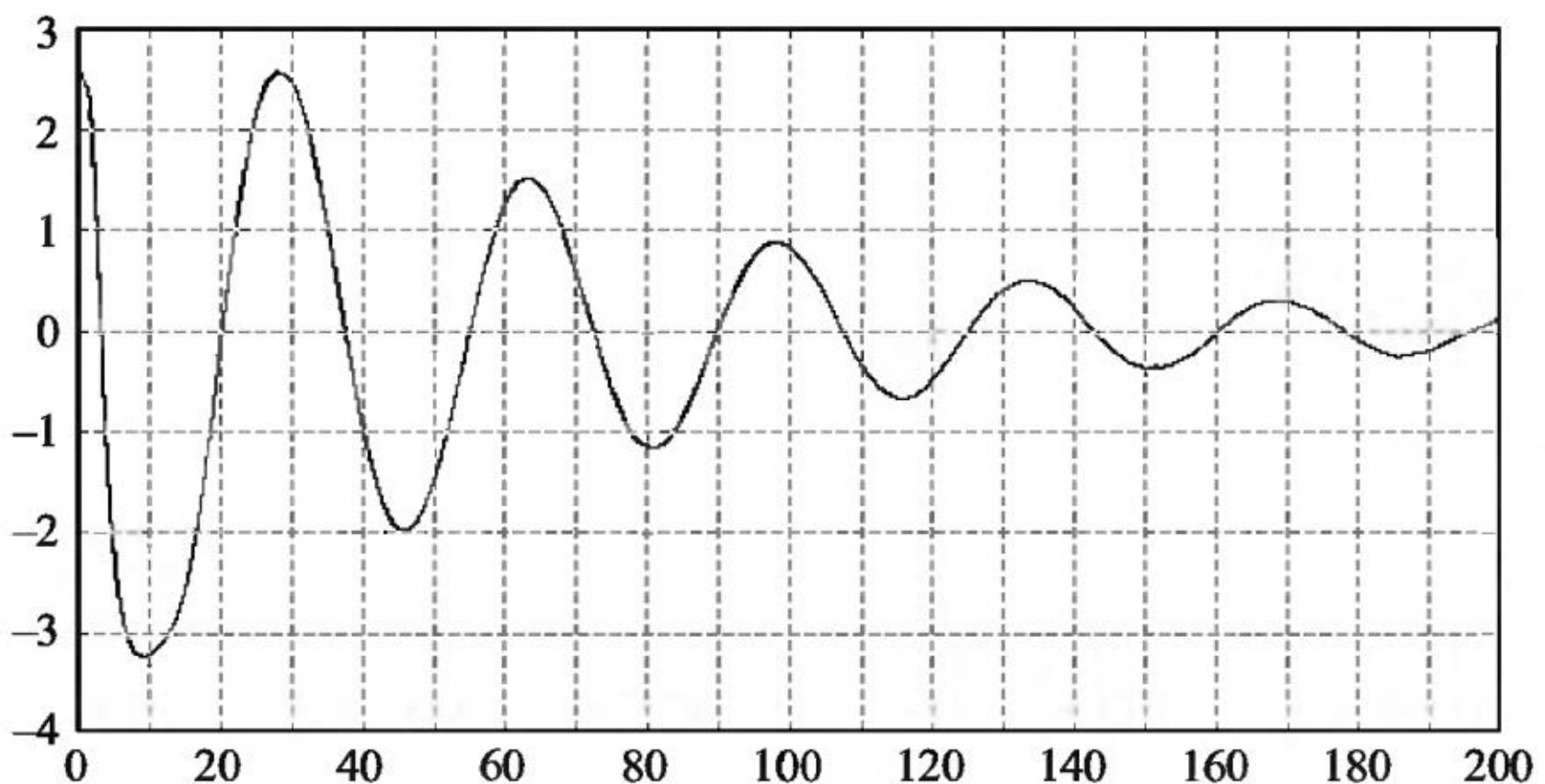


Рис. 10.3

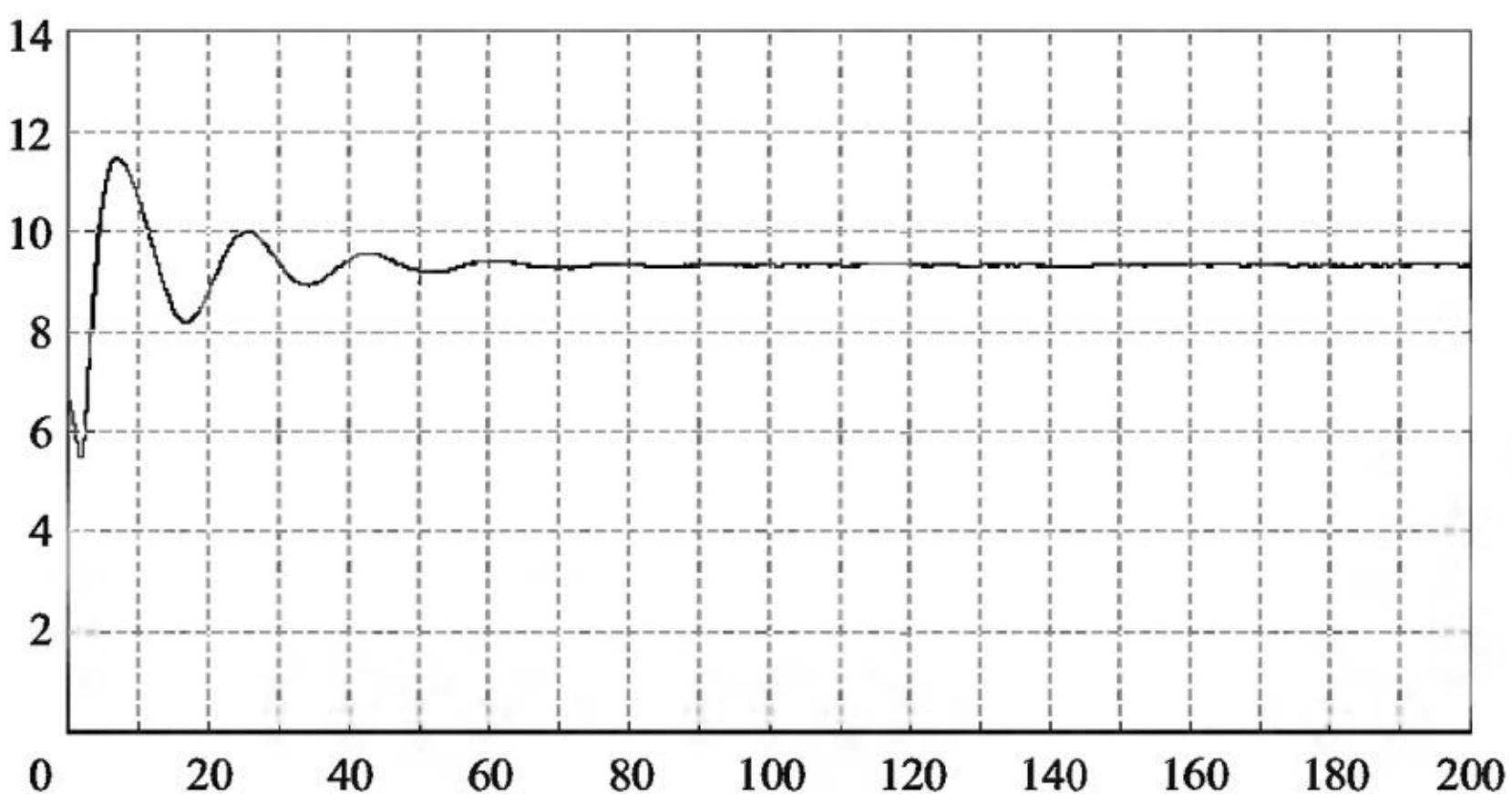


Рис. 10.4

щую со временем амплитуду колебаний. Такое резкое различие в поведении математического ожидания решений линейных и нелинейных осцилляторов предупреждает об опасностях решения нелинейных СДУ с помощью их линеаризации.

На графике оценки второго момента решения $E y_1^2(t)$ (рис. 10.4) видим, что достаточно быстро происходит стабилизация дисперсии решения, а это также отлично от линейного осциллятора, где дисперсия растет со временем (см. рис. 9.4). Время счета данного теста на 128 процессорах с шагом $h = 10^{-8}$ и $N_{\text{tr}} = 8^5$ составило около 73 ч. Отметим, что использование большего размера шага интегрирования ведет к неустойчивости численного решения, что в конечном итоге приводит к переполнению разрядной

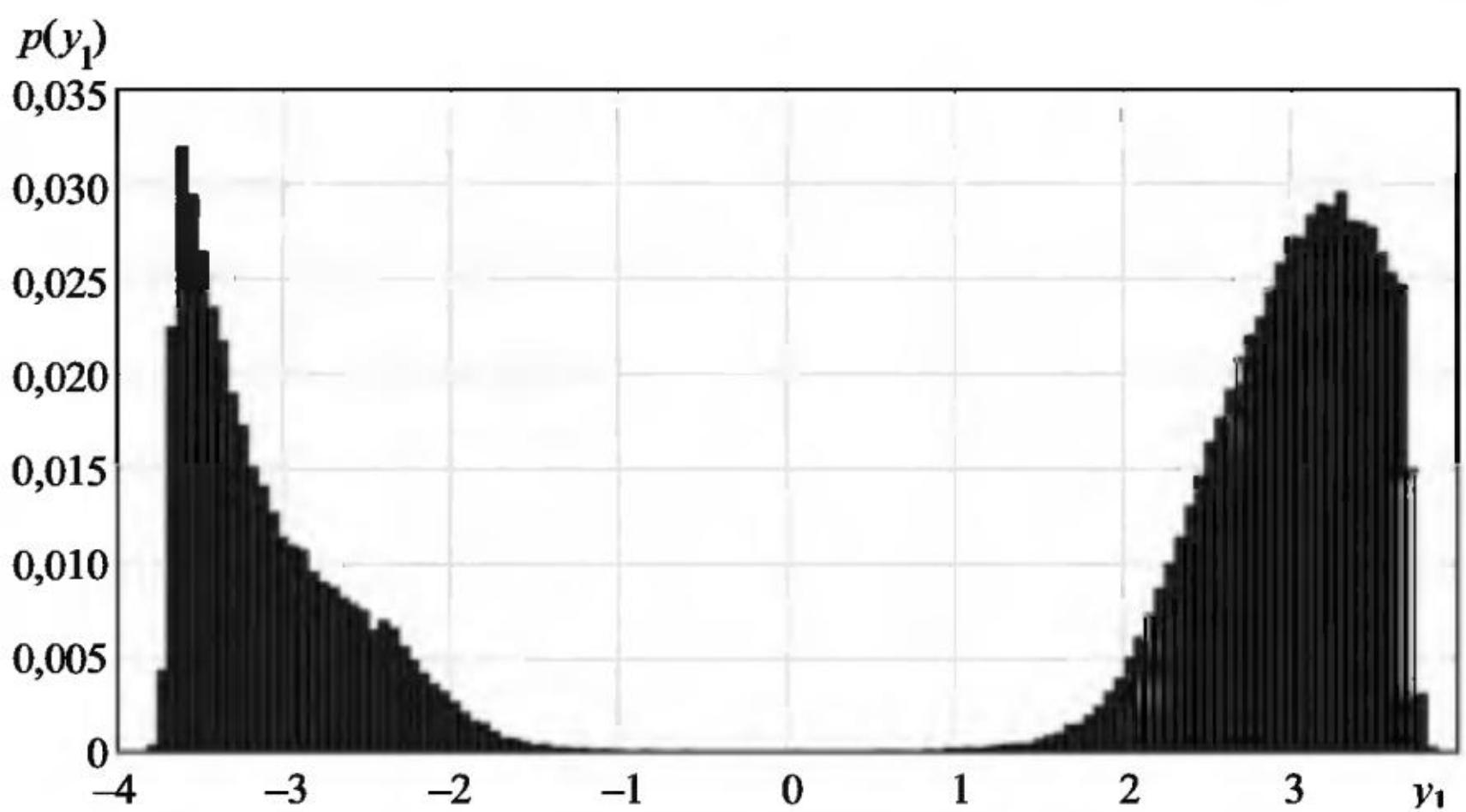


Рис. 10.5

сетки арифметического устройства процессора и появлению значений Nan (несуществующее число).

График гистограммы (рис. 10.5) плотности вероятности решения уравнения Ван-дер-Поля $y_1(t)$ в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 100$ показывает, что наибольшее число смоделированных значений $y_1(t_{\text{end}})$ находится на «полочках» ± 3 , а гистограммы плотности вероятности решений линейного и нелинейного колебательных контуров в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 100$ (см. рис. 9.7 и рис. 10.5) кардинально отличаются тем, что в линейном контуре наблюдается одна, а в нелинейном – две вершины. Также из рис. 10.5 видно, что гистограмма симметрична относительно нуля и, естественно, что математическое ожидание $Ey(t_{\text{end}})$ близко к нулю.

В каждом конкретном случае необходимости численного решения осциллирующих СДУ выбор размера шага интегрирования и объема моделируемых траекторий для получения приемлемой точности оценок функционалов и вывода об устойчивости или неустойчивости решений СДУ осуществляется индивидуально путем сравнения результатов счета между собой до достижения их идентичности. Сделанные выводы по поведению моментов решения стохастического уравнения Ван-дер-Поля с большим шумом невозможно получить никаким другим методом, кроме статистического моделирования. Это касается как методов гауссовской аппроксимации, так и спектрального метода.

На рис. 10.6 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 численного решения уравнения Ван-дер-Поля, рассчитанный с

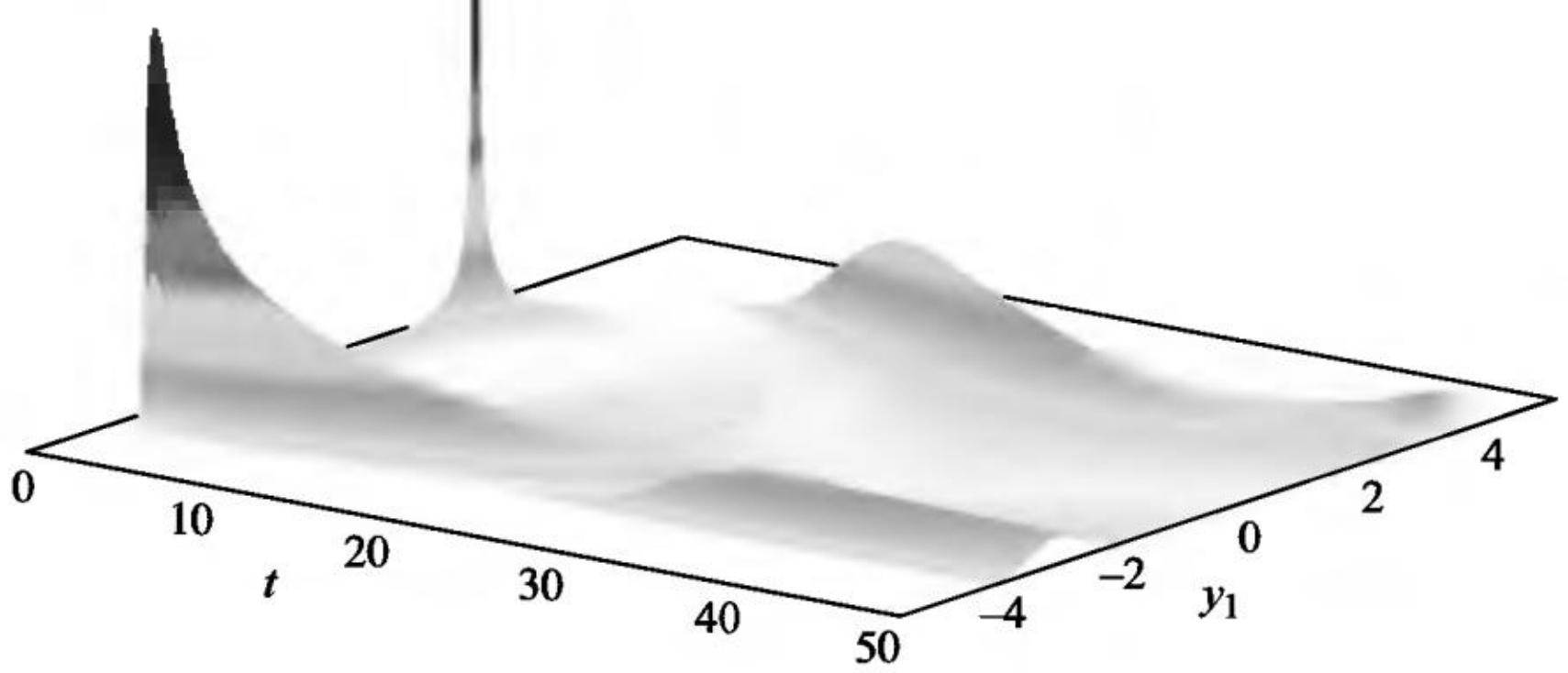


Рис. 10.6

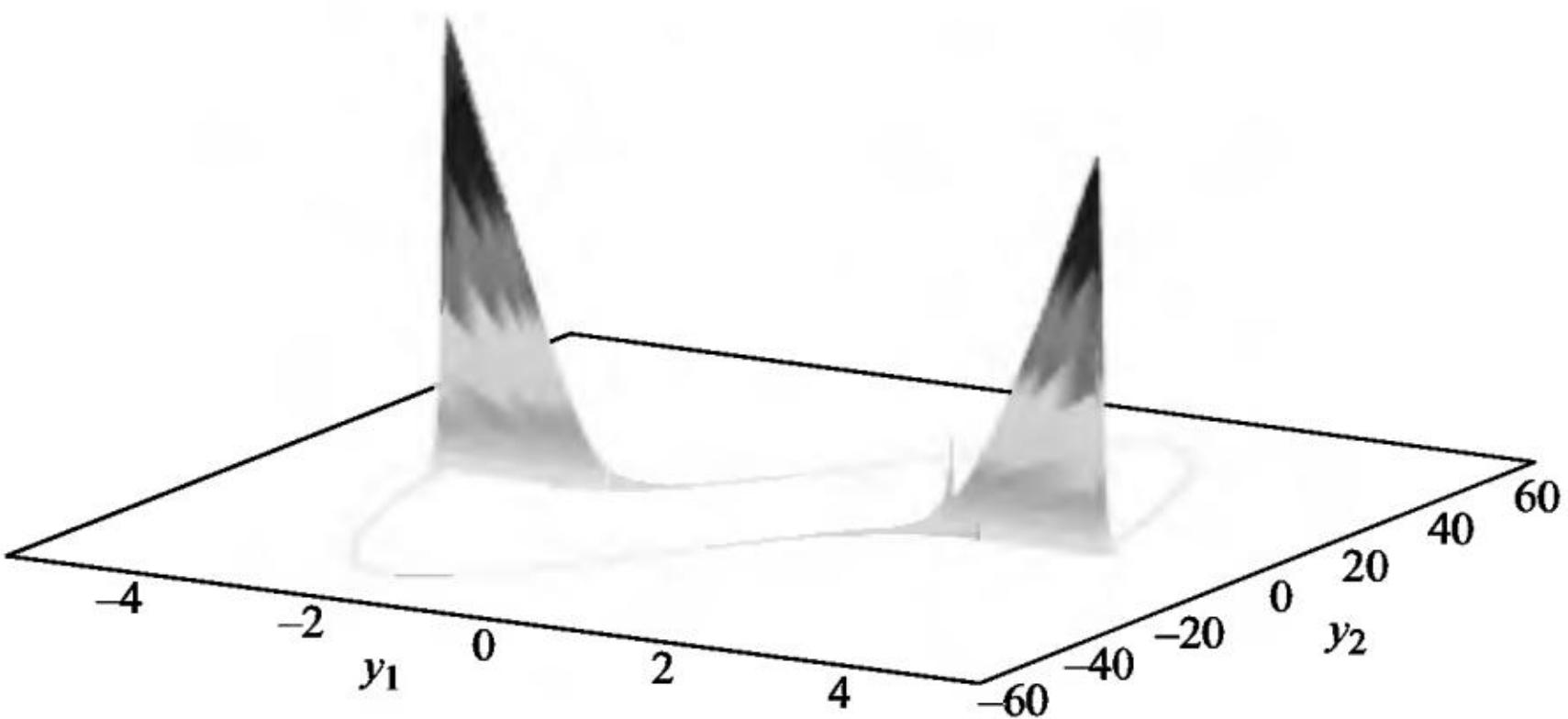


Рис. 10.7

шагом интегрирования $h = 10^{-6}$ и размером ансамбля моделируемых траекторий $N_{\text{tr}} = 10^6$ на интервале времени $[0, 50]$. Вдоль интервала интегрирования наблюдается следующая динамика поведения решения – начальное значение детерминированное, затем с левой стороны относительно нуля наблюдается пик частот, а с правой стороны – спад, по мере продвижения по интервалу интегрирования уже с левой стороны наблюдается спад, а с правой – пик, в некоторых точках график ЧИК почти симметричный относительно нуля.

На рис. 10.7 приведен график ЧФП (вид сбоку) для пары компонент (y_1, y_2) численного решения уравнения Ван-дер-Поля при коэффициенте интенсивности шума $\sigma = 1$.

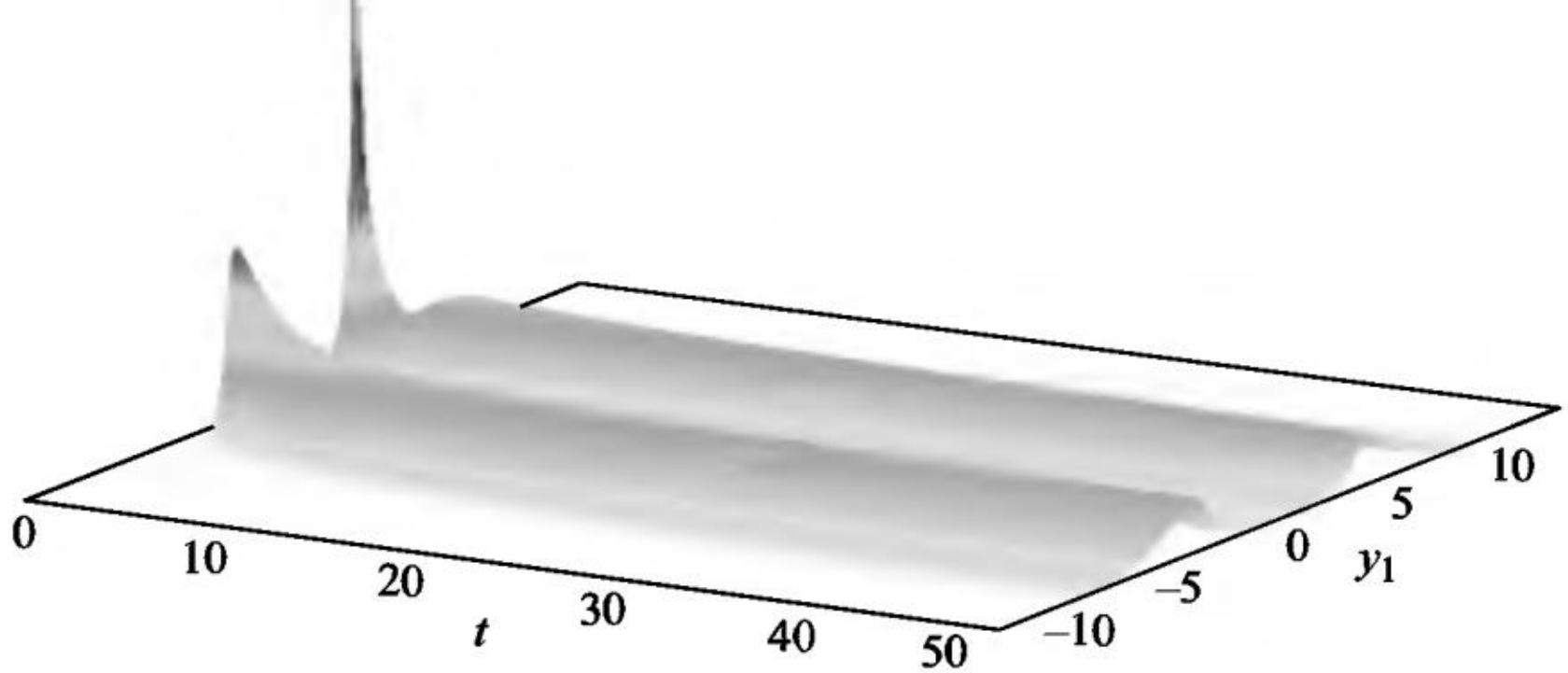


Рис. 10.8

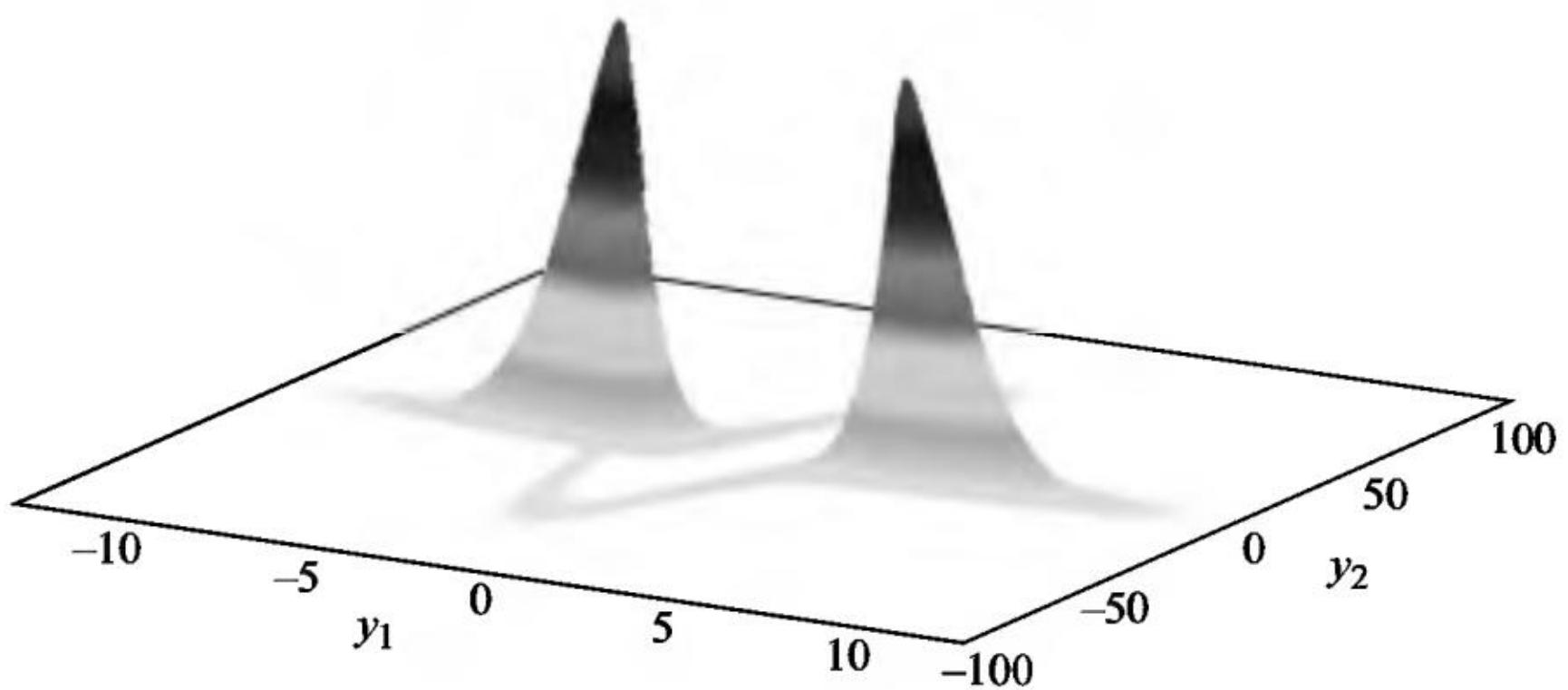


Рис. 10.9

Сравнение рис. 10.2 и 10.7 говорит о том, что график ЧФП дает гораздо больше информации о поведении компонент решения СДУ, чем фазовый портрет одной смоделированной траектории. Также видно из сравнения рис. 9.8 и рис. 10.7, что графики ЧФП линейного и нелинейного колебательных контуров сильно отличаются друг от друга. ЧФП для нелинейного СДУ имеет ярко выраженные пики, в область этих пиков попадает больше всего точек $(y_1(t), y_2(t))$, тогда как для линейного контура больше всего точек $(y_1(t), y_2(t))$ лежит в окрестности эллипса.

Для сравнения на рис. 10.8 и 10.9 приведены графики ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 и ЧФП (вид сбоку) для пары компонент (y_1, y_2) численного решения уравнения Ван-дер-Поля, рассчитанные с шумом большой интенсивности $\sigma = 10$. Как видим, графики ЧИК значительно различаются для шумов разной интенсивности,

тогда как ЧФП остаются достаточно похожими друг на друга. Для построения ЧИК и ЧФП использовалась сетка 100×100 .

Пример 10.2. Модель экологической системы, состоящей из двух пар «хищник–жертва», при внутренних и внешних шумах задается системой СДУ [18]

$$\begin{aligned} dy_1 &= \left(-y_1 - 2 \frac{y_1 y_2}{1 + 0,08 y_1} + \frac{y_1 M_0}{1 + 0,08 M_0} \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), \quad y_1(0) = 1, \\ dy_2 &= \left(-y_2 + \frac{y_1 y_2}{1 + 0,08 y_1} \right) dt, \quad y_2(0) = 1, \\ dy_3 &= \left(b y_3 - 2 \frac{y_3 y_4}{1 + 0,08 y_3} + \frac{y_3 M_0}{1 + 0,08 M_0} \right) dt + \sigma_2 y_2 dw_2(t), \quad y_3(0) = 3, \\ dy_4 &= \left(b y_4 + \frac{y_3 y_4}{1 + 0,08 y_3} \right) dt, \quad y_4(0) = 3. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Здесь $M_0 = 20 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4$, y_1 и y_3 – количество «овец», y_2 и y_4 – количество «волков» (например, в тысячах штук). На рис. 10.10 и 10.11 приведены графики компоненты y_3 и пары компонент (y_3, y_4) решения сопутствующей системы ОДУ, рассчитанные при $b = -2$. Графики показывают циклическое изменение количества «овец» и «волков» со временем.

На рис. 10.12 и 10.13 приведены аналогичные рис. 10.11 графики одной фазовой траектории и ЧФП (вид сверху) пары ком-

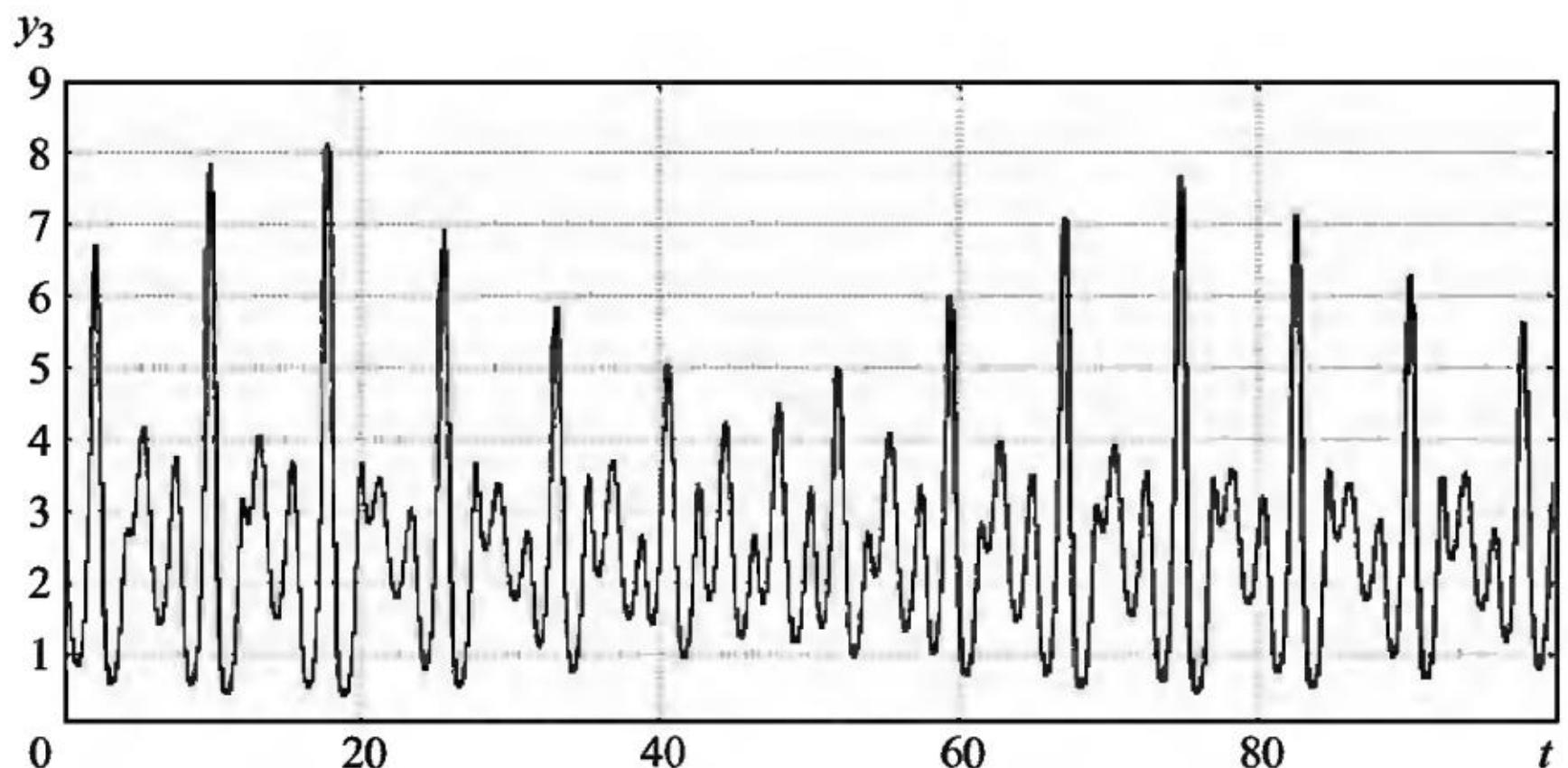


Рис. 10.10

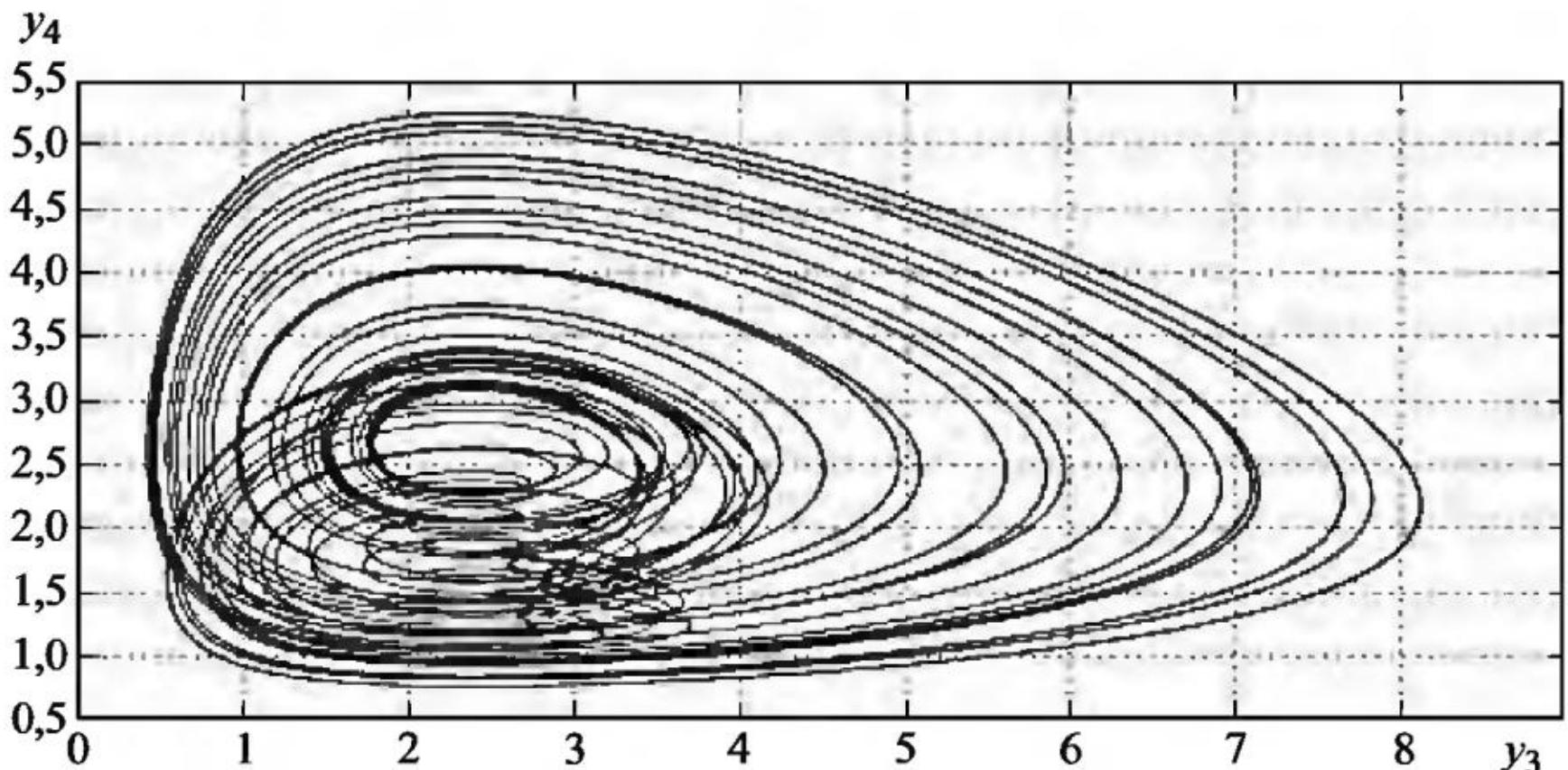


Рис. 10.11

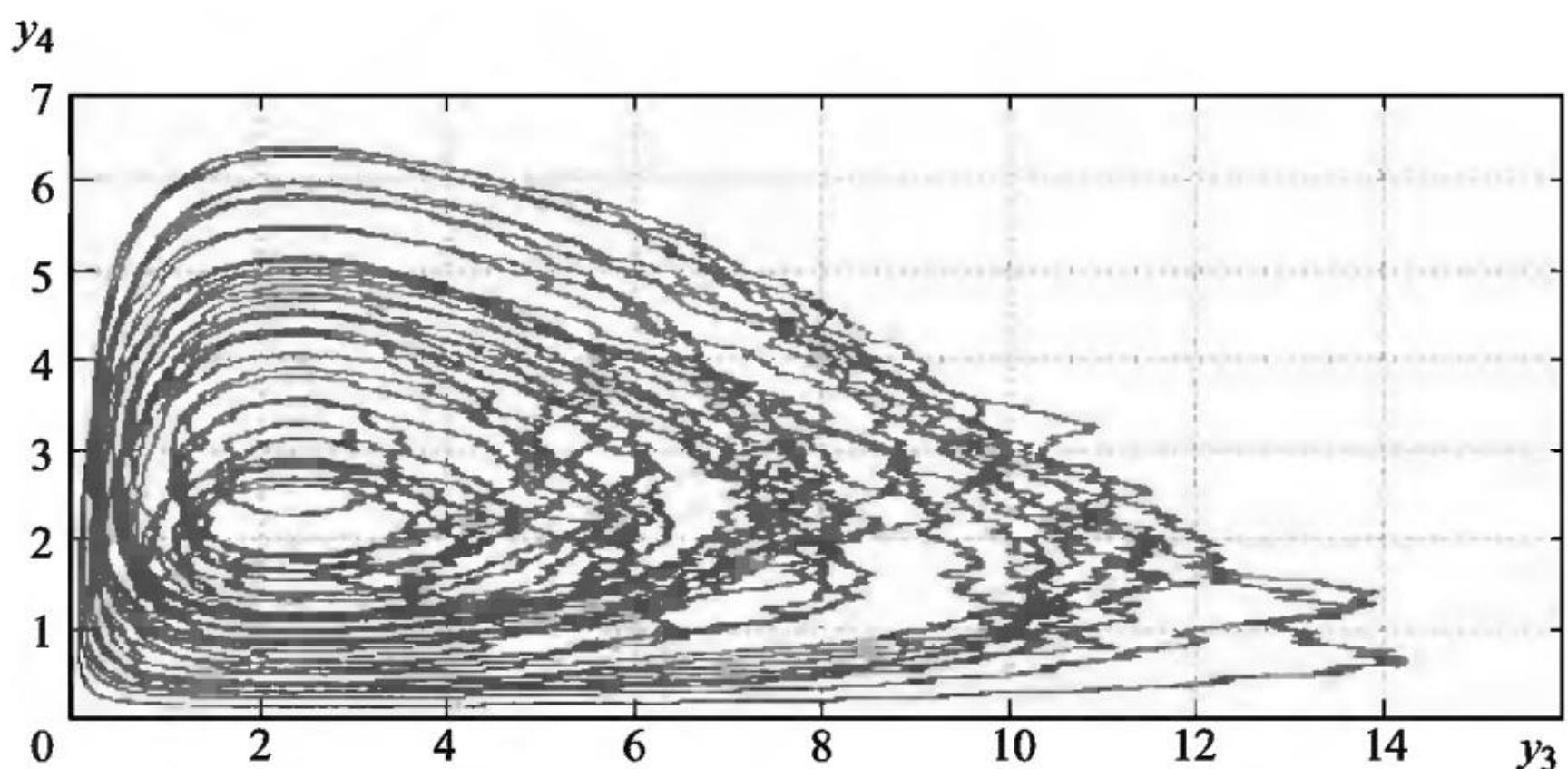


Рис. 10.12

понент (y_3, y_4) решения системы СДУ (10.2) при $b = -2$ с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$.

Из размеров ЧФП можно оценить разброс значений $y_3(t)$ и $y_4(t)$ и области их концентраций. На рис. 10.14 дан график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_3 решения системы СДУ (10.2) при $b = -2$ с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$. Графики ЧФП и ЧИК показывают эффект влияния внешних и внутренних случайных возмущений в количестве «овец» на количество «волков».

Для сравнения на рис. 10.15 приведен график ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_3, y_4) решения системы СДУ (10.2) с другим параметром $b = -3$ при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$, на котором видим несколько другие области концентраций значений $y_3(t)$ и $y_4(t)$.

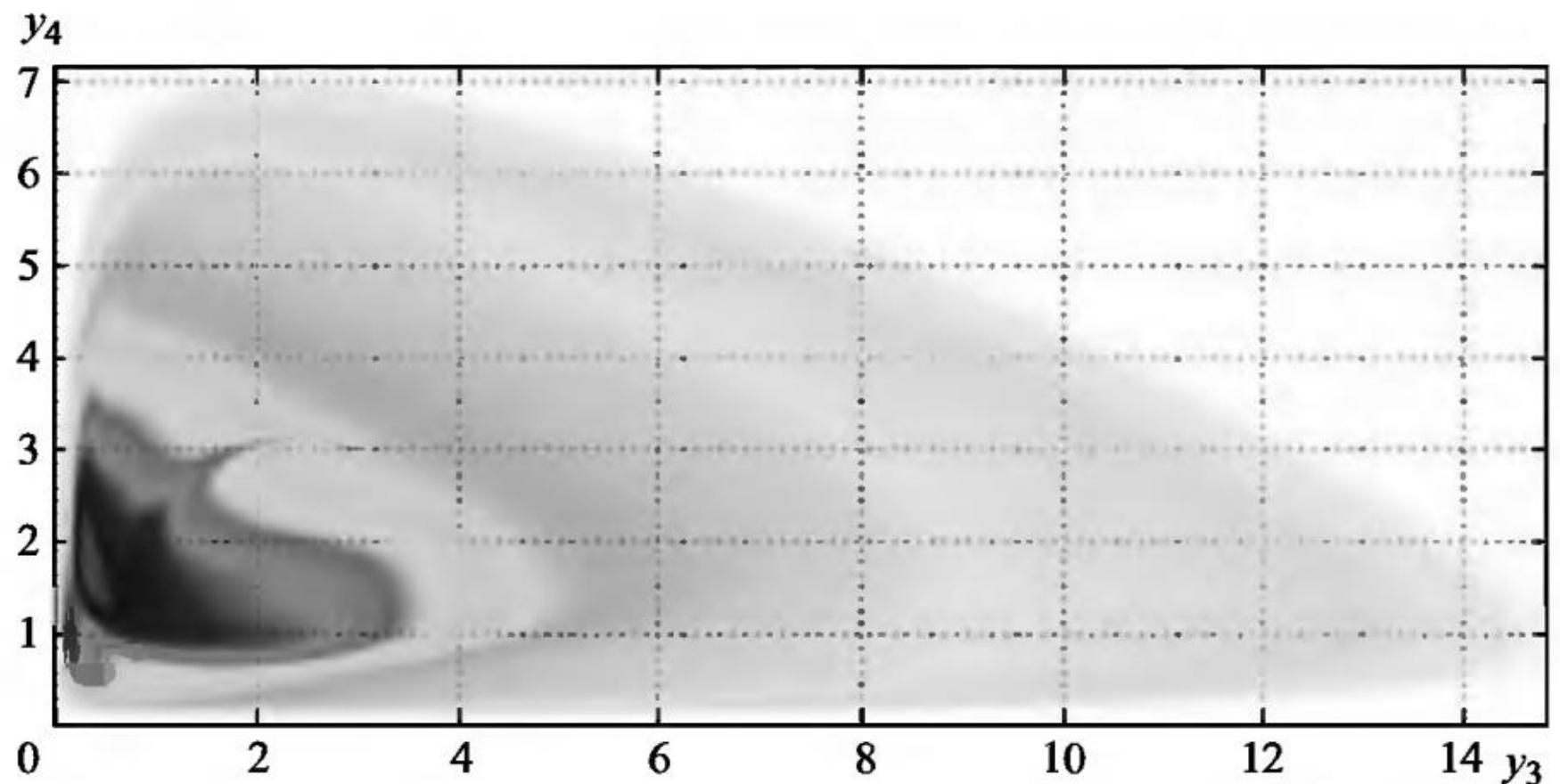


Рис. 10.13

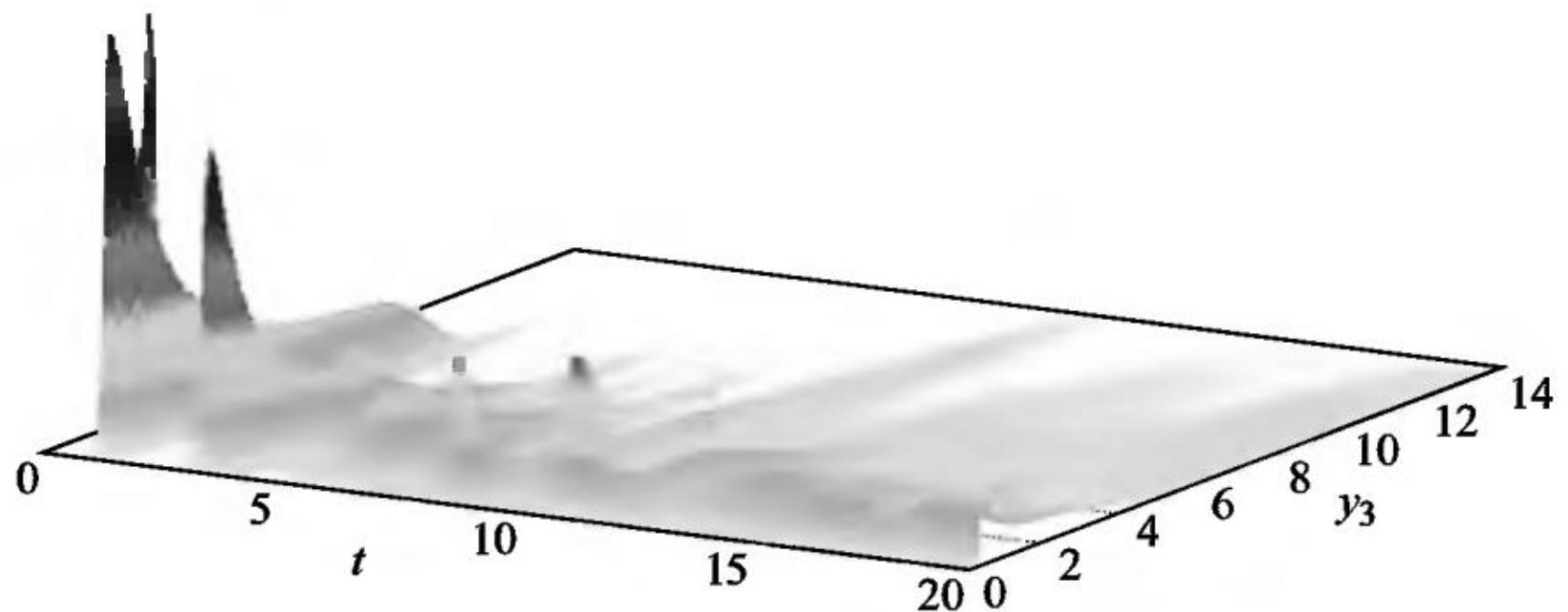


Рис. 10.14

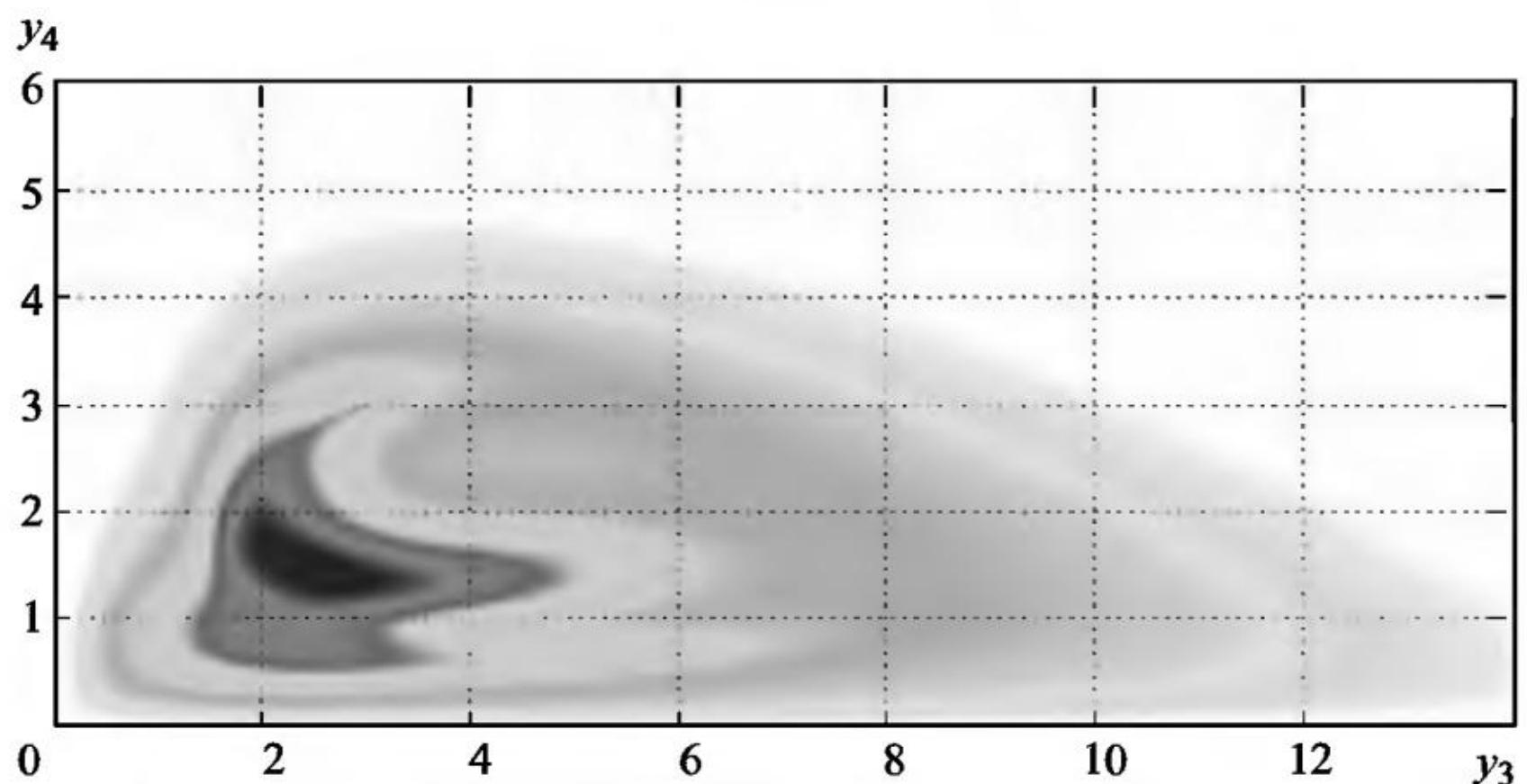


Рис. 10.15

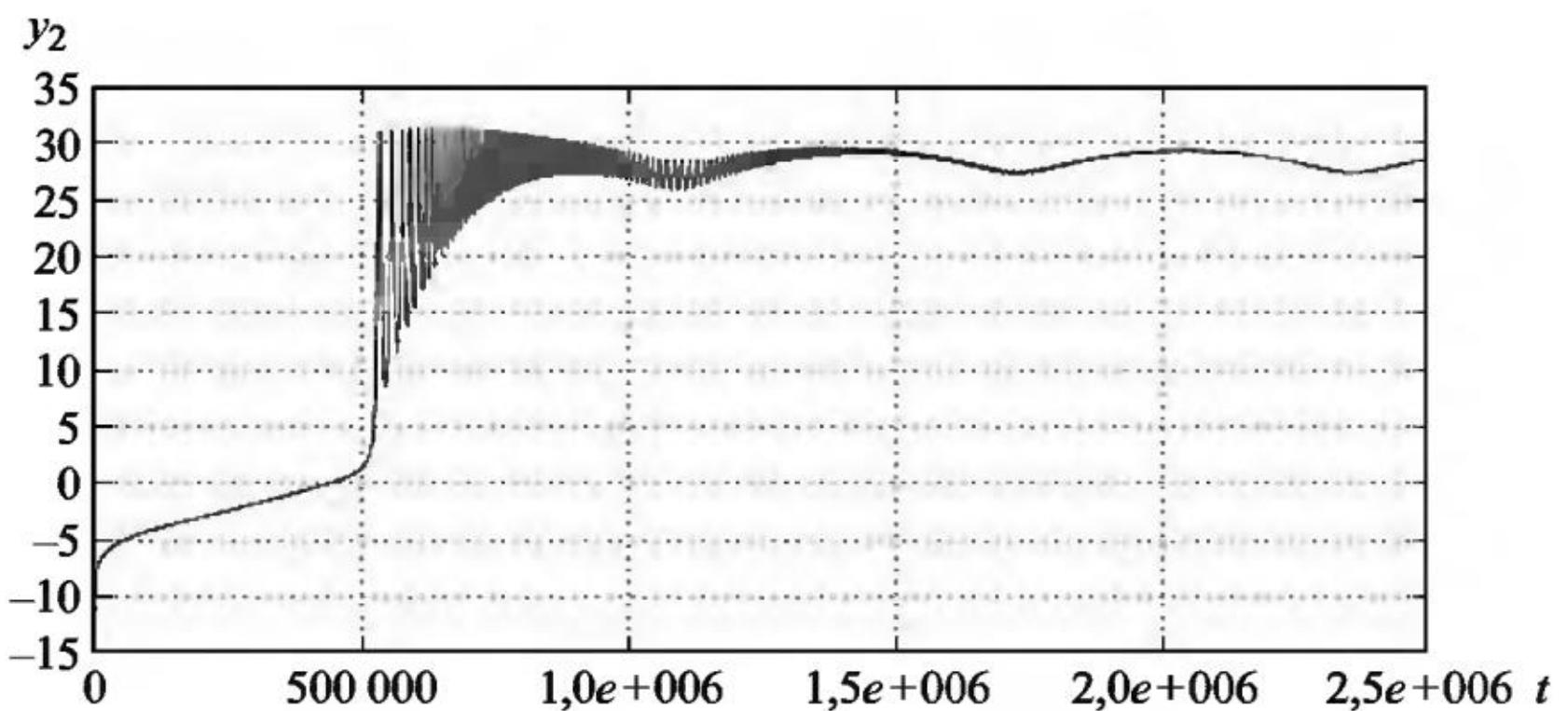


Рис. 10.16

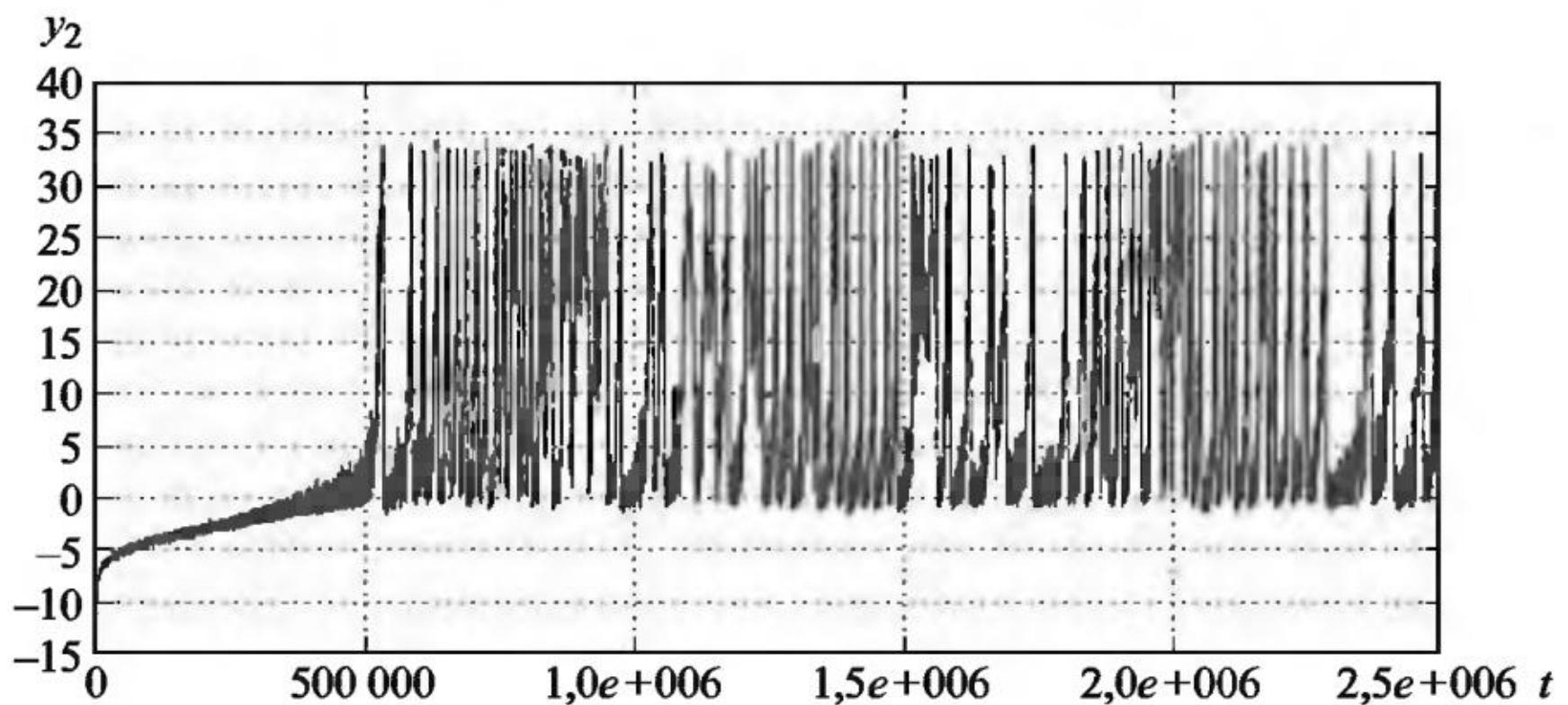


Рис. 10.17

Расчеты показали, что и математическое ожидание, и дисперсия компоненты y_3 численного решения системы СДУ (10.2) при $b = -2$ с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$ выходят на стационарный уровень.

Пример 10.3. Модель рубинового лазерного осциллятора с внешним шумом задается системой СДУ вида

$$\begin{aligned} dy_1 &= \left(-y_1 \left(1,5 \cdot 10^{-18} e^{y_2} + 2,5 \cdot 10^{-6} \right) + 2,1 \cdot 10^{-6} + 10^{-6} \sin(10^{-5} t) \right) dt, \quad y_1(0) = -1, \\ dy_2 &= \left(\rho y_1 - 0,18 + 0,016(1+y_1)e^{-y_2} \right) dt + \sigma dw_1(t), \quad y_2(0) = -10. \end{aligned} \tag{10.3}$$

На рис. 10.16 и 10.17 приведены графики смоделированной траектории компоненты y_2 численного решения системы СДУ

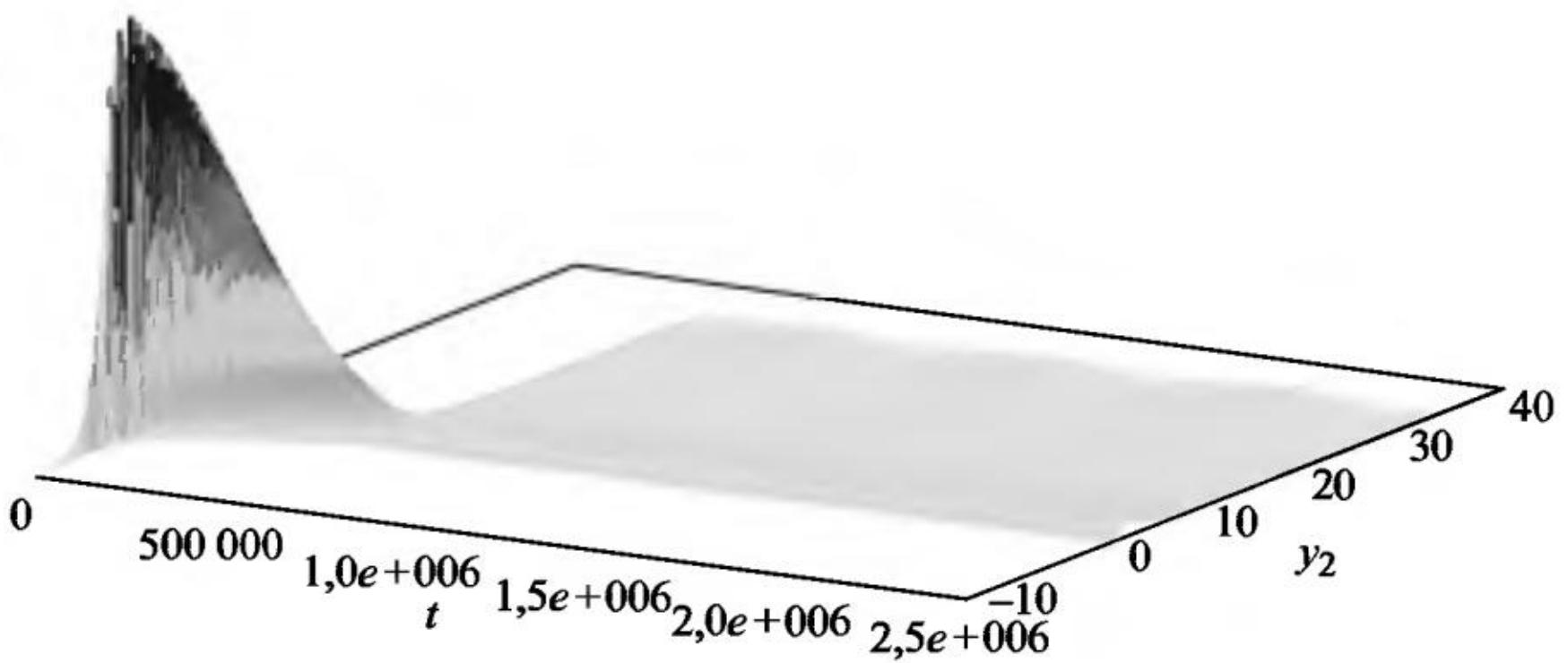


Рис. 10.18

Ey_2

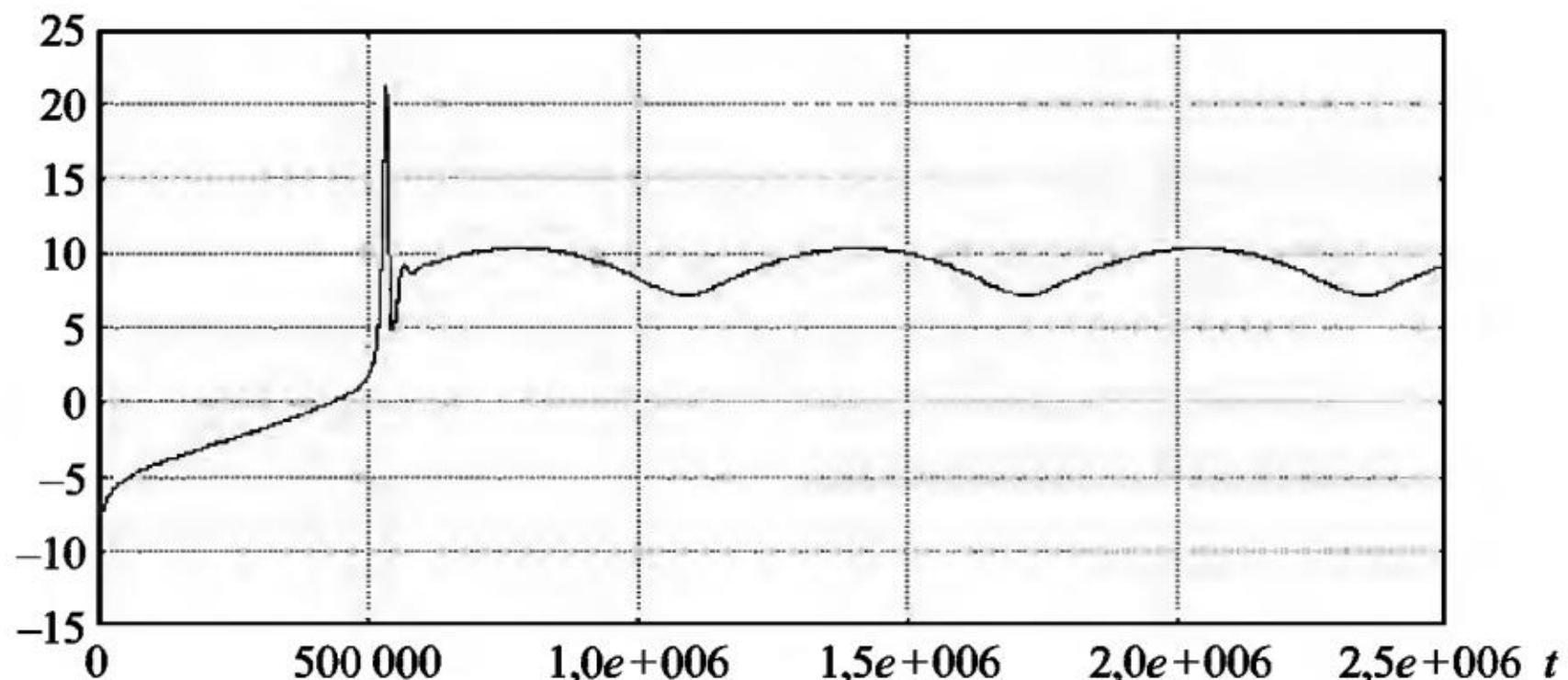


Рис. 10.19

(10.3) без шумов и с шумом интенсивности $\sigma = 0,1$, рассчитанные на интервале интегрирования $[0,25 \cdot 10^6]$ с $\rho = 0,6$ и шагом интегрирования $h = 1$.

Сравнивая рисунки, видим, что внешний случайный шум даже малой интенсивности меняет характер осцилляций компоненты $y_2(t)$. На рис. 10.18 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты $y_2(t)$ решения системы СДУ (10.3) с шумом интенсивности $\sigma = 0,1$, с $\rho = 0,6$ и шагом интегрирования $h = 1$. Из рисунка можем заключить, что у всех смоделированных траекторий решения $y_2(t)$ одинаковая амплитуда колебаний.

На рис. 10.19–10.21 приведены графики оценок математического ожидания, дисперсии и плотности распределения в конце интервала интегрирования компоненты y_2 численного решения си-

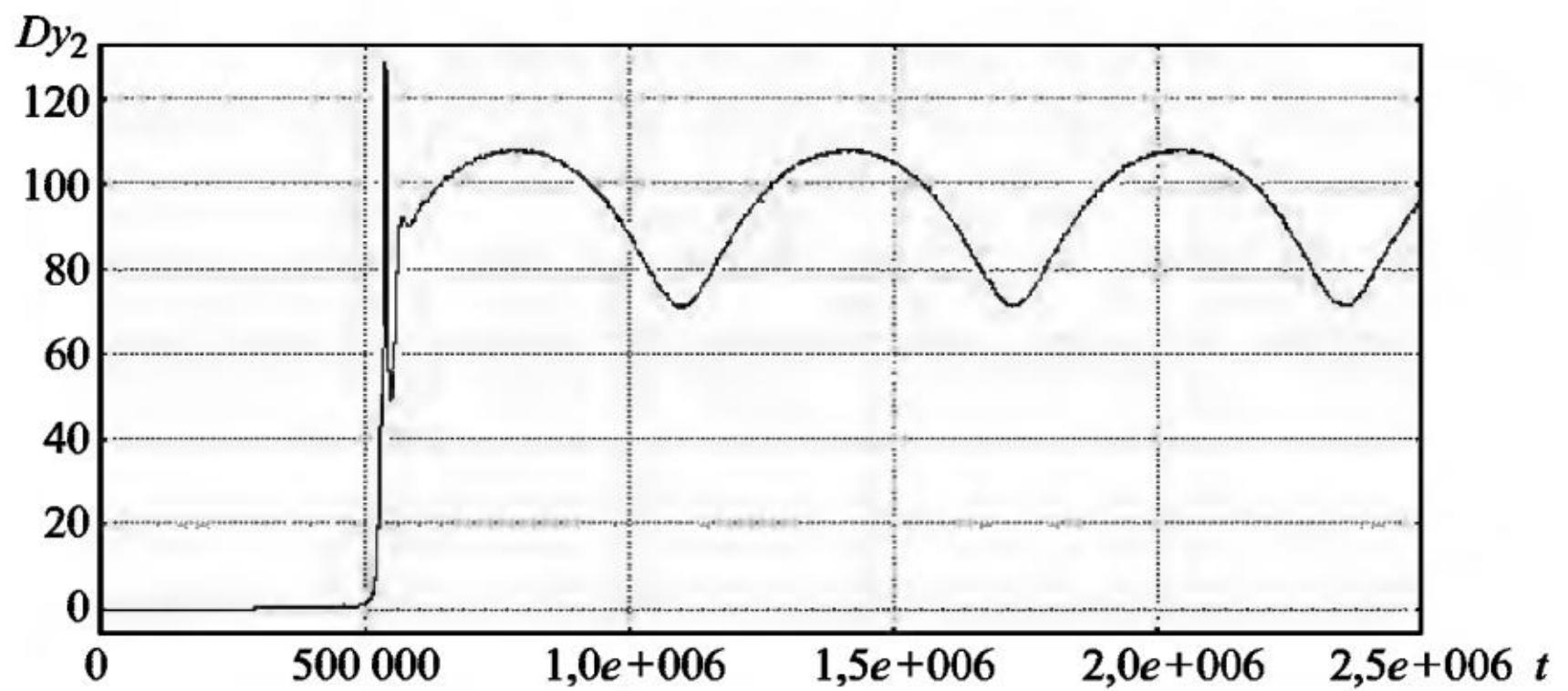


Рис. 10.20

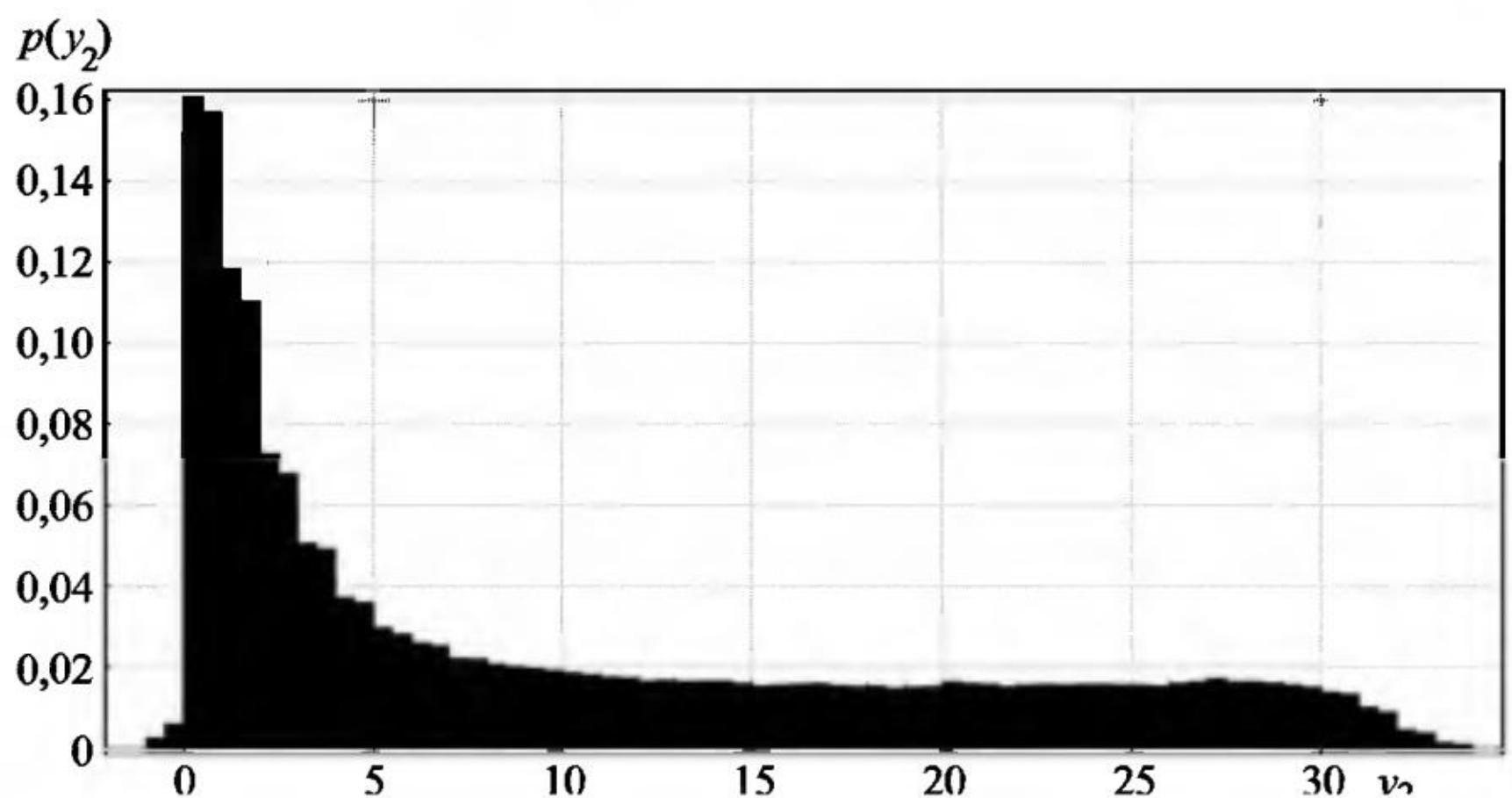


Рис. 10.21

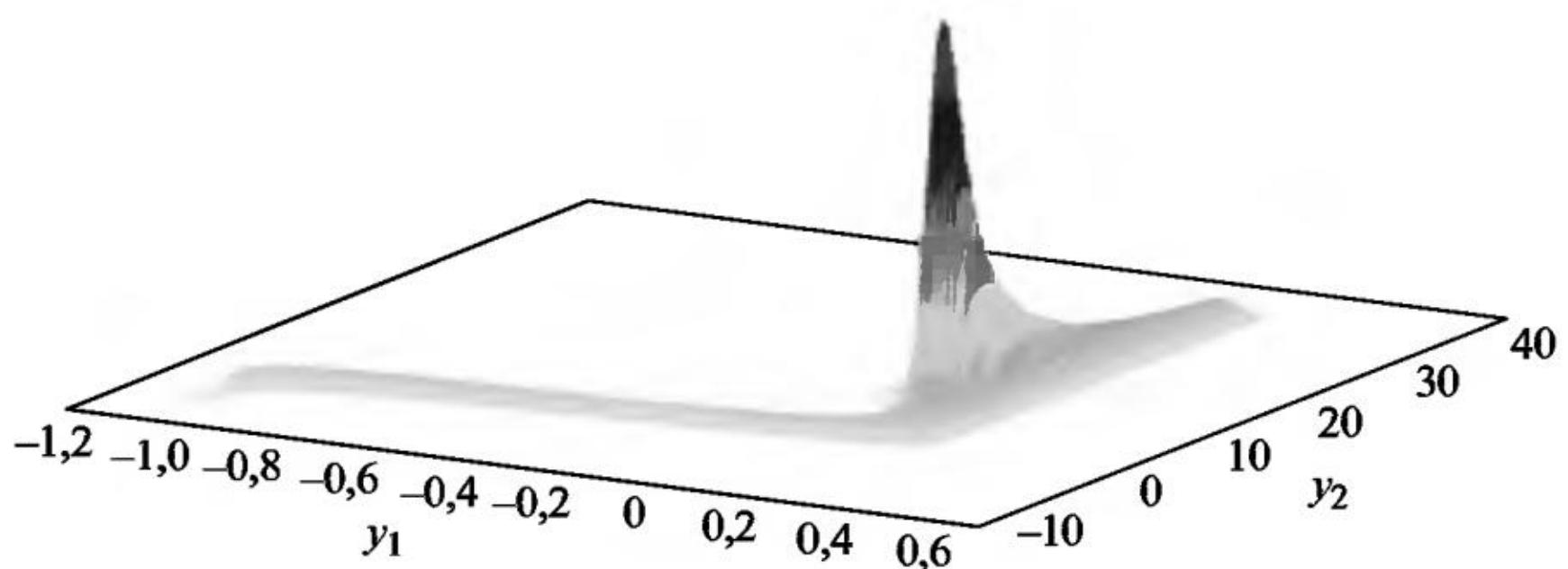


Рис. 10.22

стемы СДУ (10.3), рассчитанные с шумом интенсивности $\sigma = 0,1$ и с $\rho = 0,6$.

На рис. 10.22 приведен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (10.3).

Расчеты показали, что при $\rho = 3$ вышеприведенные графики остаются похожими по форме.

11. СДУ со случайной структурой

Изучение многих реальных процессов, происходящих в природе, технике, естествознании, связано с рассмотрением дифференциальных уравнений, параметры которых являются случайными функциями времени. Математическое моделирование динамики таких систем проводится с помощью СДУ. В современной теории случайных процессов широкое распространение также получили модели, параметрами которых являются однородные марковские цепи с конечным числом состояний. Такое описание объекта управления оказалось наиболее полным, поскольку однородная марковская цепь несет информацию о режиме (или структуре) объекта в данный момент времени, а фазовый вектор описывает его состояние в данном режиме. В отечественной литературе описанные системы называют системами со случайной структурой, а в западной литературе распространен термин «системы со скачками» (jump systems).

Одним из основных условий физической реализуемости эволюционного процесса является его устойчивость. Однако представляется естественной ситуацией, когда в случайные моменты времени за счет перехода системы из одного состояния в другое фазовый вектор изменяется скачком случайным образом. Скажем, если в механических системах изменение структуры связано со случайным скачкообразным изменением массы или геометрии системы, то корректная постановка задачи требует задания новых начальных условий, поскольку фазовый вектор оказался разрывным. Подобные проблемы возникают в виброударных, механических, экономических и других сложных системах, связанных с частичным отказом элементов.

Существует широкий класс СДУ со случайной структурой [19]. Простейшим СДУ со случайной структурой можно назвать уравнение, в котором в некоторые моменты времени изменяются вещественные параметры. Эти моменты времени могут быть как детерминированными, так и случайными с заданными законами распределения, например, экспоненциальным или логнор-

мальным. Зачастую изменение структуры СДУ происходит при достижении траекторией решения границы заданной области, например, в задачах о срыве слежения. Так как универсальным способом анализа свойств решений СДУ является численное моделирование траекторий, то возникает вопрос о точности оценок в моменты изменения структуры СДУ. Проведенные численные эксперименты показали серьезную потерю точности оценок ММК в такие моменты. Ниже рассматриваются случаи, когда время переключения является детерминированным либо случайным с экспоненциальным или логнормальным законом распределения. Параметры логнормального распределения подбираются таким образом, чтобы аппроксимировать плотность вероятности времени первого достижения траекториями решения СДУ границ интервала $[a, b]$. Это возможно лишь при определенных соотношениях между параметрами функции сноса в СДУ и границами интервала. В этом случае исследуется упрощенный вариант структуры СДУ, когда время переключения моделируется по логнормальному закону независимо от решения СДУ и не фиксируются моменты первого достижения границ траекториями. Отметим, что при других параметрах СДУ и $[a, b]$ плотность вероятности времени первого достижения может быть, например, и бимодальной. Для указанных выше трех случаев времени переключения получены точные выражения для математического ожидания решения СДУ, что и позволяет выводить заключения о необходимых размерах шагов интегрирования и ансамблей моделируемых траекторий.

К системам со случайной структурой относят динамические системы с нестационарной параметрической и структурной неопределенностями. Математическая модель системы со случайной структурой может быть задана в виде задачи Коши для системы СДУ

$$dy = f^{(s)}(y, t)dt + \sigma^{(s)}(y, t)dw(t), y(0) = y_0, 0 \leq t \leq t_{\text{end}}, \quad (11.1)$$

где $y(t)$ – K -мерный случайный процесс, $w(t)$ – M -мерный стандартный винеровский процесс, $f^{(s)}(y, t)$, $s = 1, \dots, S$, – заданные K -мерные функции, $\sigma^{(s)}(y, t)$, $s = 1, \dots, S$, – заданные $(K \times M)$ -мерные функции, s – номер структуры. Переход из одной структуры s в другую $s + 1$ может происходить в случайные или неслучайные моменты времени $t^{(s)}$, $s = 1, \dots, S$, $t^{(1)} = 0$, $t^{(s)} < t_{\text{end}}$.

Простейший пример системы со случайной структурой зададим в виде двухструктурного скалярного линейного СДУ с мультипликативным шумом:

$$dy = \alpha_s y dt + \sigma_s y dw(t), s=1,2, K=1, M=1, \quad (11.2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1, \sigma_2$ – вещественные параметры. В момент времени $t^{(2)}$ происходит замена в (11.2) параметров α_1 на α_2 , σ_1 на σ_2 . Решение уравнения (11.2) находим в виде

$$y(t) = \begin{cases} y_0 \exp(a_1 t + \sigma_1 w(t)), & t \leq t^{(2)}, \\ C \exp(a_2 t + \sigma_2 w(t)), & t > t^{(2)}, \end{cases}$$

где согласно формуле Ито $a_i = \alpha_i - \sigma_i^2 / 2, i=1,2$. Константу C определяем, исходя из условия отсутствия скачка случайного процесса $y(t)$ в момент времени $t^{(2)}$, т. е. из равенства

$$C \exp(a_2 t^{(2)} + \sigma_2 w(t^{(2)})) = y_0 \exp(a_1 t^{(2)} + \sigma_1 w(t^{(2)})).$$

Отсюда получаем

$$y(t) = \begin{cases} y_0 \exp(a_1 t + \sigma_1 w(t)), & t \leq t^{(2)}, \\ y(t^{(2)}) \exp\left(a_2(t-t^{(2)}) + \sigma_2(w(t)-w(t^{(2)}))\right), & t > t^{(2)}, \end{cases} \quad (11.3)$$

где $y(t^{(2)}) = y_0 \exp(a_1 t^{(2)} + \sigma_1 w(t^{(2)}))$. Из свойств винеровского процесса следует, что случайные величины $w(t^{(2)})$ и $w(t) - w(t^{(2)})$ являются независимыми как в случайный, так и в неслучайный момент времени $t^{(2)}$ при $t > t^{(2)}$.

Определим распределение решения двухструктурного линейного СДУ для неслучайного и случайного времени переключения структур.

1. Неслучайное время переключения структур $t^{(2)}$. Согласно (11.3), одномерное распределение решения СДУ на каждом интервале времени $(t^{(1)}, t^{(2)})$ и $(t^{(2)}, t_{\text{end}})$ является логнормальным:

$$f_y(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{x \sigma_1 \sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\ln(x/y_0) - a_1 t)^2}{2\sigma_1^2 t}\right), & t \leq t^{(2)}, \\ \frac{1}{x \sqrt{2\pi (\sigma_1^2 t^{(2)} + \sigma_2^2 (t-t^{(2)}))}} \exp\left(-\frac{(\ln(x/y_0) - a_1 t^{(2)} - a_2(t-t^{(2)}))^2}{2(\sigma_1^2 t^{(2)} + \sigma_2^2 (t-t^{(2)}))}\right), & t > t^{(2)}. \end{cases} \quad (11.4)$$

Учитывая, что логнормальная случайная величина e^ζ , где $\zeta \in N(m_\zeta, \sigma_\zeta^2)$, имеет первый момент $e^{m_\zeta + \sigma_\zeta^2/2}$, для математического ожидания решения (11.3) получаем

$$m_y(t) = \begin{cases} y_0 \exp(\alpha_1 t), & t \leq t^{(2)}, \\ y_0 \exp\left(\alpha_1 t^{(2)} + \alpha_2(t - t^{(2)})\right), & t > t^{(2)}. \end{cases} \quad (11.5)$$

2. Случайное время переключения структур $t^{(2)} = \theta$. Случайная величина θ имеет функцию распределения $F_\theta(t)$, заданную на положительной полуоси, причем время переключения не зависит от случайного процесса $y(t)$. Одномерная функция распределения решения (11.3) имеет вид

$$F_y(x, t) = P(y(t) < x | \theta \geq t)P(\theta \geq t) + P(y_\theta(t) < x, \theta < t),$$

а плотность вероятности

$$f_y(x, t) = f_{1y}(x, t)(1 - F_\theta(t)) + \frac{\partial}{\partial x} P(y_\theta(t) < x, \theta < t). \quad (11.6)$$

Здесь в соответствии с (11.3) $y_\theta(t) = y(\theta) \exp(a_2(t - \theta) + \sigma_2(w(t) - w(\theta)))$, а плотность вероятности $f_{1y}(x, t)$ согласно (11.4) имеет вид

$$f_{1y}(x, t) = \frac{1}{x \sigma_1 \sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\ln(x/y_0) - a_1 t)^2}{2\sigma_1^2 t}\right).$$

Для нахождения вероятности $P(y_\theta(t) < x, \theta < t)$ разобьем интервал $[0, t]$ на подынтервалы $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, \dots, I$, одинаковой длины $\Delta\tau$, $\tau_0 = 0$, $\tau_I = t$. Тогда согласно формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(y_\theta(t) < x, \theta < t) &= \sum_i P(y_\theta(t) < x, \tau_{i-1} \leq \theta < \tau_i) = \\ &= \sum_i P(y_\theta(t) < x | \tau_{i-1} \leq \theta < \tau_i) (F_\theta(\tau_i) - F_\theta(\tau_{i-1})). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Переходя в (11.7) к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$, получаем

$$P(y_\theta(t) < x, \theta < t) = \int_0^t P(y_\tau(t) < x) f_\theta(\tau) d\tau, \quad (11.8)$$

где плотность вероятности $f_\theta(\tau) = dF_\theta(\tau)/d\tau$. Подставляя (11.8) в (11.6), окончательно получаем

$$f_y(x, t) = f_{1y}(x, t)(1 - F_\theta(t)) + \int_0^t f_{2y}(x, t, \tau) f_\theta(\tau) d\tau. \quad (11.9)$$

Здесь в соответствии с (11.4)

$$f_{2y}(x, t, \tau) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi(\sigma_1^2 \tau + \sigma_2^2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{(\ln(x/y_0) - \alpha_1 \tau - \alpha_2(t-\tau))^2}{2(\sigma_1^2 \tau + \sigma_2^2(t-\tau))}\right).$$

Заметим, что для рассмотренного выше неслучайного времени переключения структур плотность вероятности случайной величины θ является дельта-функцией $f_\theta(t) = \delta(t - t^{(2)})$ и формула (11.9) переходит в (11.4). Математическое ожидание случайного процесса $y(t)$ в соответствии с (11.9) имеет вид

$$m_y(t) = \int_0^\infty x f_y(x, t) dx = y_0 e^{\alpha_1 t} (1 - F_0(t)) + y_0 \int_0^t e^{\alpha_1 \tau + \alpha_2(t-\tau)} f_0(\tau) d\tau. \quad (11.10)$$

Рассмотрим два варианта случайного времени переключения структур.

1. Переключение структур происходит по экспоненциальному закону $f_\theta(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, с параметром $\lambda > 0$. Математическое ожидание (11.10) при таком законе распределения принимает вид

$$m_y(t) = \frac{y_0}{\alpha_1 - \alpha_2 - \lambda} \left((\alpha_1 - \alpha_2) e^{(\alpha_1 - \lambda)t} - \lambda e^{\alpha_2 t} \right). \quad (11.11)$$

Решая уравнение $dm_y(t)/dt = 0$, можно найти момент времени t_{ext} , при котором математическое ожидание достигает экстремального значения (максимума или минимума):

$$t_{\text{ext}} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1 + \lambda} \ln \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \lambda)}{\alpha_2 \lambda}. \quad (11.12)$$

При подходящих соотношениях между параметрами α_1 , α_2 , λ значение t_{ext} положительно. Если $\alpha_1 = 0$, то согласно (11.12) $t_{\text{ext}} = 0$. Если же, например, $\lambda = \alpha_1 - \alpha_2$, то из (11.10) получаем $m_y(t) = y_0 e^{\alpha_2 t} (1 + \lambda t)$, и экстремум достигается при $t_{\text{ext}} = -(\alpha_2 + \lambda) / (\alpha_2 \lambda)$; значение $t_{\text{ext}} \geq 0$ при $-\lambda \leq \alpha_2 < 0$. Значение t_{end} помогает выбрать необходимую длину интервала интегрирования t_{ext} . Заметим, что при $\alpha_1 > \lambda$ и любом α_2 математическое ожидание $m_y(t)$ неограниченно монотонно возрастает при $t \rightarrow \infty$.

2. Переключение структур происходит при первом достижении траекториями случайного процесса $y(t)$ границ допустимой области, заданной в виде интервала $[a, b]$, $a < y_0 < b$. В этом случае время переключения структур θ становится зависимым от $y(t)$ и задача определения распределения решения СДУ аналитическим методом становится более сложной, чем рассмотренная в настоящем разделе. Здесь же рассмотрим только простой вариант переключения структур независимо от $y(t)$ с логнормальной плотностью вероятности времени переключения $f_\theta(t)$, аппроксимирующей плотность вероятности времени первого достижения границ случайным процессом $y(t)$. При этом $f_y(x, t)$ и $m_y(t)$ будут определяться, как и ранее, по формулам (11.9) и (11.10) соответственно.

Случайный процесс $y(t)$ без переключения структур согласно (11.3) имеет вид

$$y(t) = y_0 e^{a_1 t + \sigma w(t)}, \quad t \geq 0, \quad (11.13)$$

где $\sigma = \sigma_1$. Очевидно, что достижение границ интервала $[a, b]$, где $b > y_0 > a > 0$, траекториями случайного процесса (11.13) происходит в те же моменты времени, что и границ $c = \ln a$, $d = \ln b$ траекториями случайного процесса $z(t) = \ln y(t)$ с начальным значением $z_0 = \ln y_0$. Поэтому вместо (11.13) рассматриваем более простой случайный процесс

$$z(t) = z_0 + a_1 t + \sigma w(t), \quad t \geq 0, \quad (11.14)$$

являющийся винеровским процессом со сносом. Для него распределение времени первого достижения границ интервала $[c, d]$ известно и представляется в виде ряда [20]. В зависимости от значений параметров a_1 , σ , z_0 , c , d оно может быть унимодальным или бимодальным. Вычисления плотности вероятности данного распределения показывают, что при значительном (по сравнению с величиной σ) удалении z_0 от одной из границ интервала $[c, d]$,

а именно, от границы c при $a_1 > 0$ или от границы d при $a_1 < 0$, данное распределение весьма близко к распределению времени первого достижения границы односторонней области $(-\infty, d]$ или $[c, \infty)$ соответственно. Для односторонней области, как известно, время первого достижения траекториями случайного процесса (11.14) ее границы имеет распределение Вальда с плотностью вероятности

$$f_w(t) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi t^3}} \exp \frac{-\beta(t-\mu)^2}{2\mu^2 t}, \quad (11.15)$$

где μ – математическое ожидание, β – параметр формы. Для области с верхней границей $(-\infty, d]$ и $a_1 > 0$ имеем $\mu = (d - z_0)/a_1$, $\beta = (d - z_0)^2 / \sigma^2$. Для области с нижней границей $[c, \infty)$ и $a_1 < 0$ в приведенных выше формулах d следует заменить на c . Плотность вероятности (11.15) является унимодальной и хорошо аппроксимируется логнормальной плотностью

$$f_\theta(t) = \frac{1}{\sigma_\zeta t \sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\ln t - m_\zeta)^2}{2\sigma_\zeta^2}. \quad (11.16)$$

Параметры m_ζ и σ_ζ несложно оценить, например, путем приравнивания теоретических координат моды логнормального распределения (11.16) к координатам моды распределения Вальда (11.15) в случае односторонней допустимой области или к вычисленным координатам максимума функции плотности вероятности времени первого достижения границ в случае двусторонней допустимой области.

Ниже приводятся три примера оценки математического ожидания решения СДУ (11.2) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ на основе ансамбля из смоделированных траекторий решения обобщенным методом Эйлера.

Пример 11.1. Неслучайное время переключения структур $t^{(2)} = 0,5$. Оценивается $m_y(t)$ в узлах сетки на интервале $[0, t_{\text{end}}]$ при значениях параметров $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1,5, \sigma = 5, t_{\text{end}} = 1, y_0 = 1$. На рис. 11.1 приведены графики оценок математического ожидания при $N_{\text{tr}} = 10^6$ (сплошная линия) и $N_{\text{tr}} = 10^{11}$ (штриховая линия).

В варианте с низкой точностью оценки математического ожидания размер шага интегрирования задавался равным $h = 10^{-2}$ и моделировалось $N_{\text{tr}} = 10^6$ траекторий. Время счета на 32 процессорах составило менее секунды. В варианте с высокой точностью

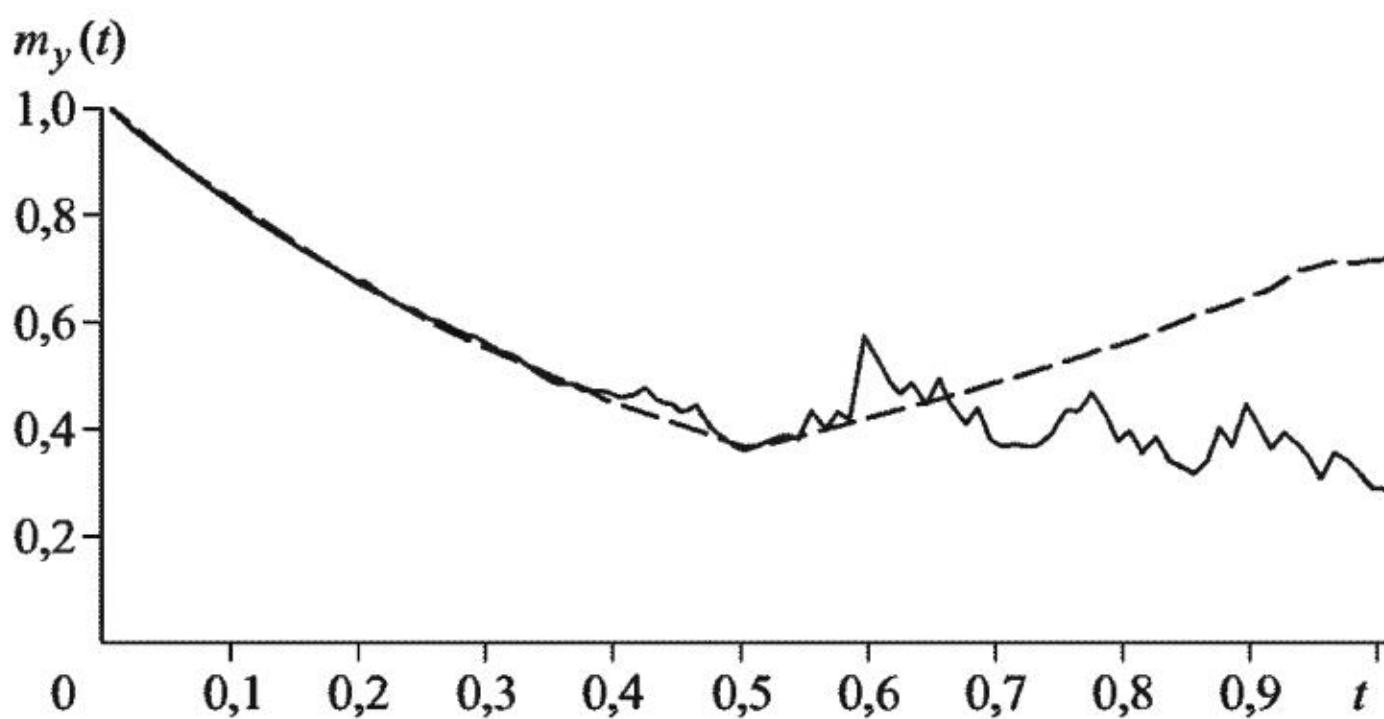


Рис. 11.1.

оценки задавались $h = 10^{-3}$, $N_{\text{tr}} = 10^{11}$. Время счета на 128 процессорах составило 52160 с.

Как видно из рис. 11.1, удовлетворительная точность оценки математического ожидания решения после переключения достигается только при $N_{\text{tr}} = 10^{11}$. График оценки математического ожидания, полученной при $N_{\text{tr}} = 10^{11}$, почти совпадает с графиком $m_y(t)$, полученным по формуле (11.5) (для точного решения имеем $m_y(1) = 0,68$, для оценки значение 0,67).

Пример 11.2. Случайное время переключения структур распределено по экспоненциальному закону. Значения параметров: $\lambda = 1$, $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1,5$, $\sigma = 5$, $t_{\text{end}} = 1$, $y_0 = 1$. В варианте с низкой точностью оценки математического ожидания при $h = 10^{-2}$, $N_{\text{tr}} = 10^6$ время счета на 4 процессорах составило менее секунды. В варианте с высокой точностью оценки при $h = 10^{-3}$, $N_{\text{tr}} = 10^{12}$ время счета на 256 процессорах составило 268000 с. (около 75 ч).

Как и в предыдущем примере, точная оценка $m_y(t)$ после $t > t^{(2)}$ получается только при малом размере шага интегрирования и огромном объеме моделируемых траекторий. На рис. 11.2 приведены графики оценок математического ожидания при $N_{\text{tr}} = 10^7$ (сплошная линия) и $N_{\text{tr}} = 10^{11}$ (штриховая линия). Штриховая линия почти совпадает с рассчитанной по формуле (11.11).

Пример 11.3. Распределение случайного времени переключения структур является логнормальным: $\theta = e^\zeta$, где $\zeta \in N(m_\zeta, \sigma_\zeta^2)$. Значения параметров: $m_\zeta = 0,5622$, $\sigma_\zeta = 0,4856$, $\alpha_1 = 1,25$, $\alpha_2 = -2$, $\sigma = 0,7071$, $t_{\text{end}} = 5$. Отметим, что при таких значениях параметров плотность логнормального распределения хорошо аппроксимирует плотность распределения времени первого выхода траекторий решения СДУ (11.2) на границы интервала $[e^{-5}, e^2]$. В варианте с низкой точностью оценки математического ожидания при $h = 10^{-2}$,

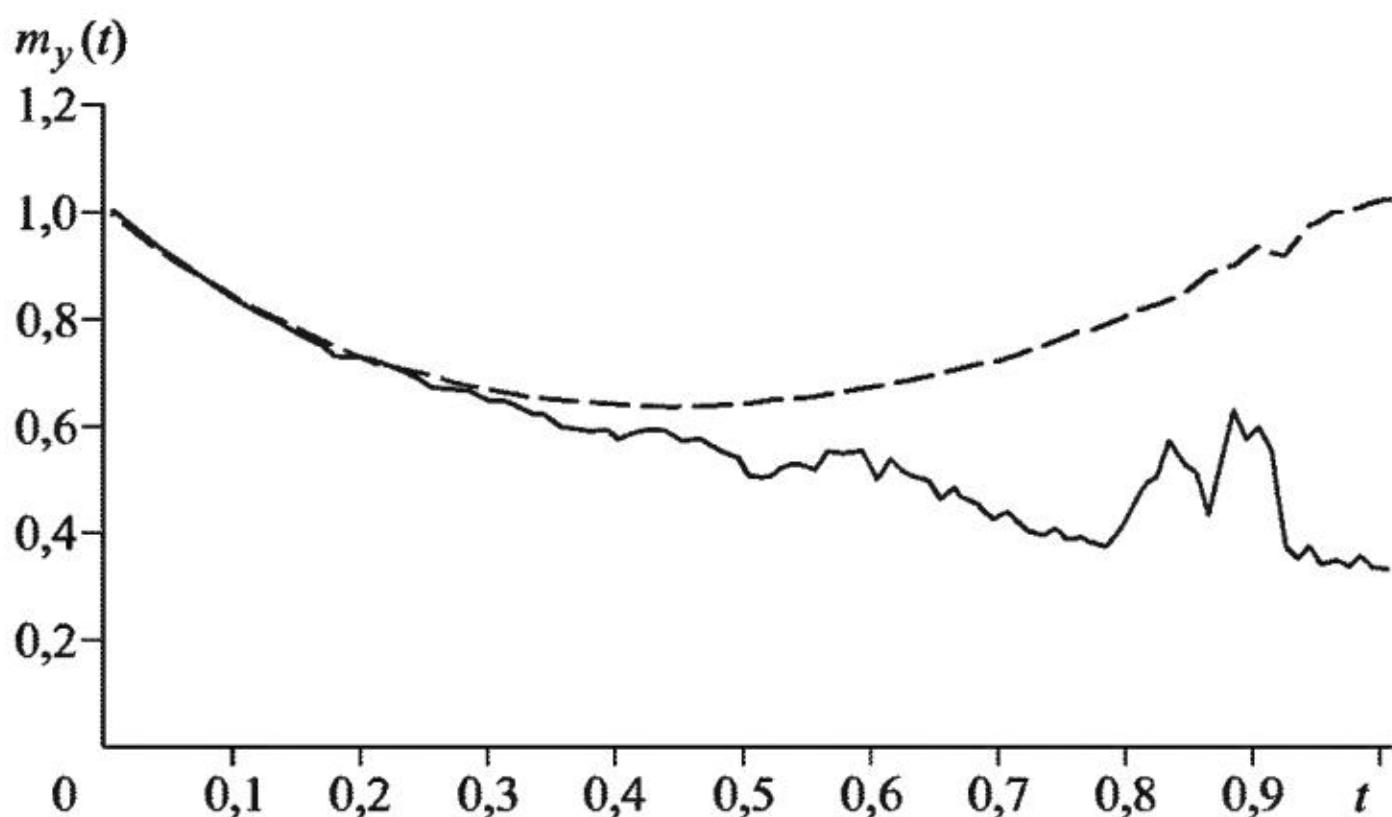


Рис. 11.2

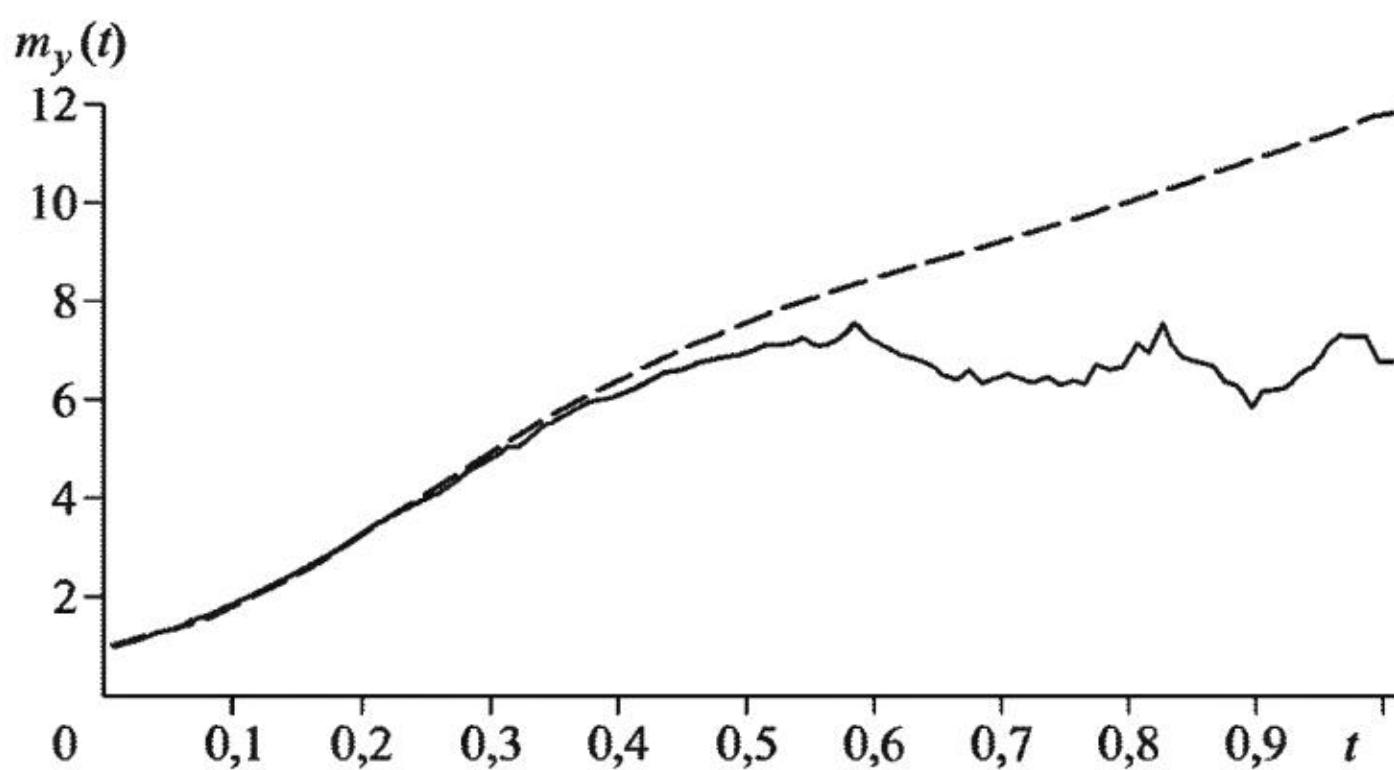


Рис. 11.3

$N_{\text{tr}} = 10^4$ время счета на 64 процессорах составило менее секунды. В варианте с высокой точностью оценки при $h = 10^{-3}$, $N_{\text{tr}} = 10^{10}$ время счета на 64 процессорах составило 8881 с (148 мин.)

На рис. 11.3 приведены графики оценок математического ожидания при $N_{\text{tr}} = 10^3$ (сплошная линия) и $N_{\text{tr}} = 10^{10}$ (штриховая линия). Штриховая линия почти совпадает с рассчитанной по формуле (11.10).

На рис. 11.4 приведены графики оценок плотности вероятности (11.9) при $t = 2$ и заданных выше значениях параметров СДУ (11.2). Графики полигонов частот для случайной величины $y(2)$ получены при $h = 10^{-2}$, $N_{\text{tr}} = 10^5$ (сплошная линия) и $h = 10^{-3}$, $N_{\text{tr}} = 10^{10}$ (штриховая линия). Штриховая линия везде совпадает с рассчитанной по формуле (11.9). Заметим, что при расчетах точ-

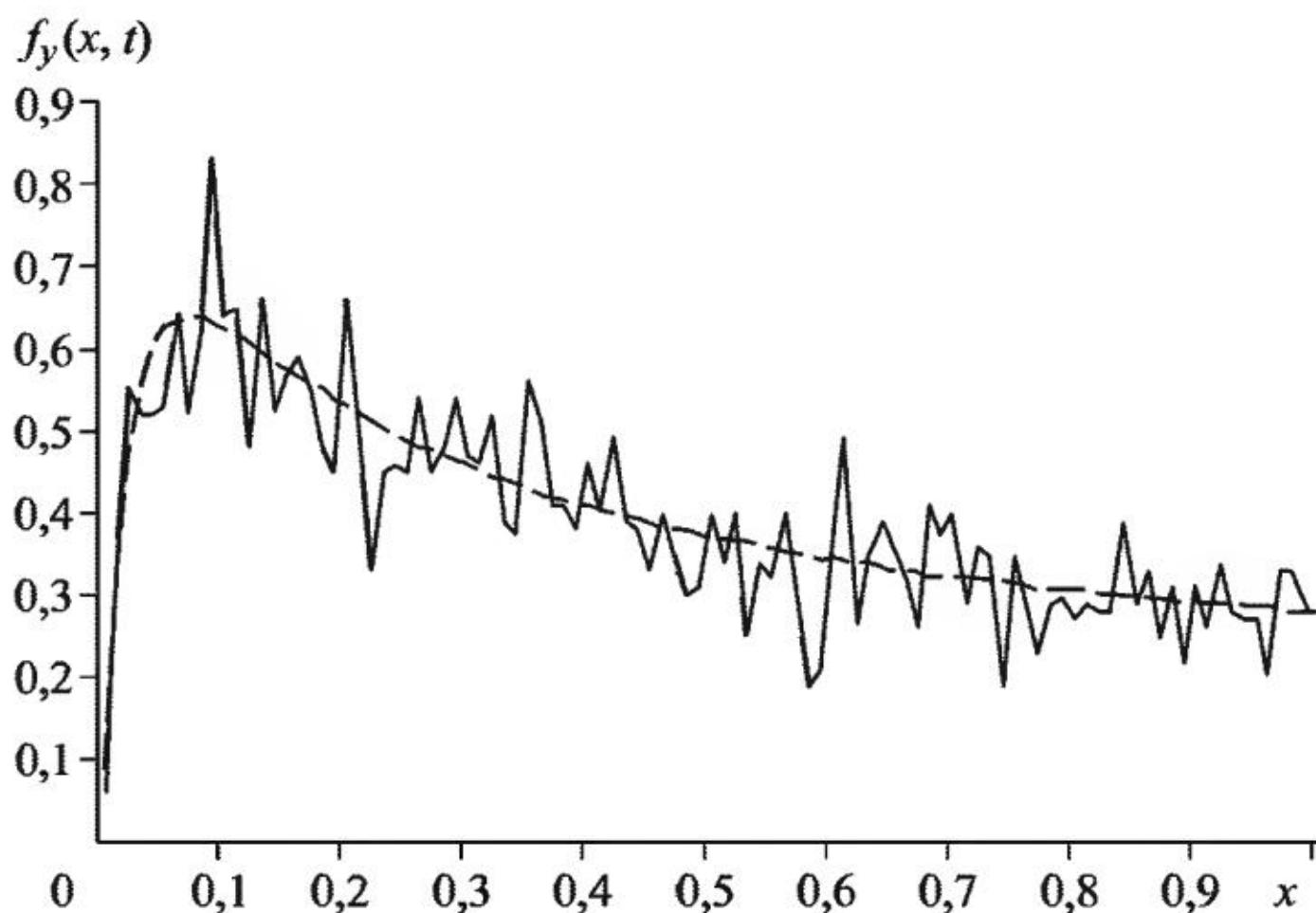


Рис. 11.4

ной плотности вероятности интеграл в (11.9) вычислялся по формуле прямоугольников.

Далее для иллюстрации приведены три примера расчета ЧИК и ЧФП для систем СДУ со случайной структурой.

Пример 11.4. Модель инерционного генератора с учетом воздействия внешних случайных шумов задается системой СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= (1,45y_1 + y_2 - y_1y_3)dt + 0,1dw_1(t), \quad y_1(0) = 3,5, \\ dy_2 &= -y_1dt, \quad y_2(0) = 0, \\ dy_3 &= g(-y_3 + \chi(y_1)y_1^2)dt + 0,1dw_2(t), \quad y_3(0) = 1, \end{aligned} \quad (11.17)$$

где $\chi(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$. В (11.17) функция сноса меняется в случайные моменты времени. Легко посчитать, что при отсутствии переключений ($\chi(y) = 0$) сопутствующая система ОДУ является осциллирующей с растущей амплитудой компонент решений.

На рис. 11.5 и 11.6 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) решения сопутствующей системы ОДУ при $g = 0,02$ и $g = 10$ соответственно, на рис. 11.7, 11.8 – такие же графики для численного решения системы СДУ (11.17).

Как видим из рисунков, поведение траекторий компонент y_1 и y_2 численного решения системы СДУ (11.17) для разных g принципиально различно, как без шума, так и с аддитивным шумом.

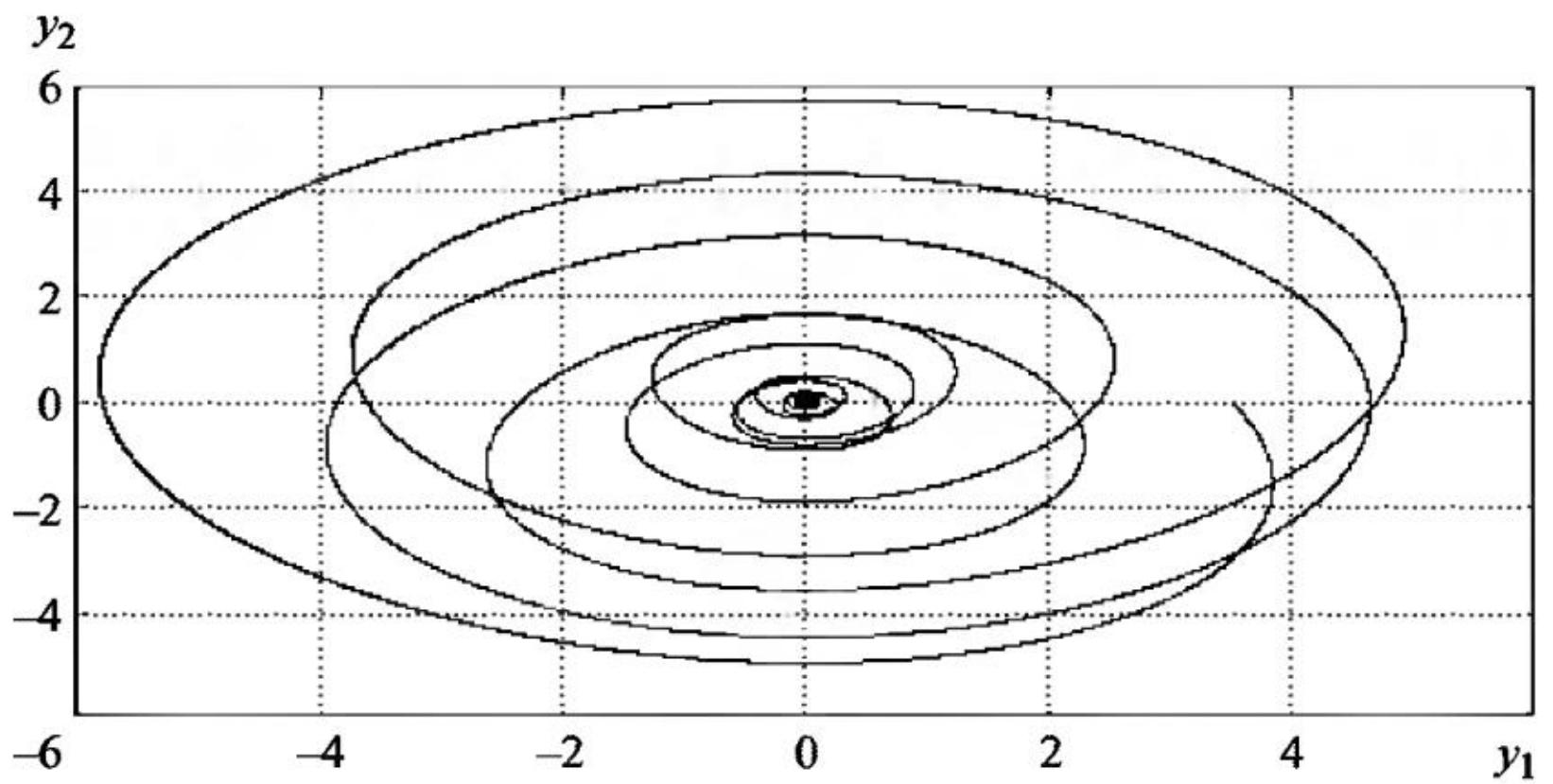


Рис. 11.5

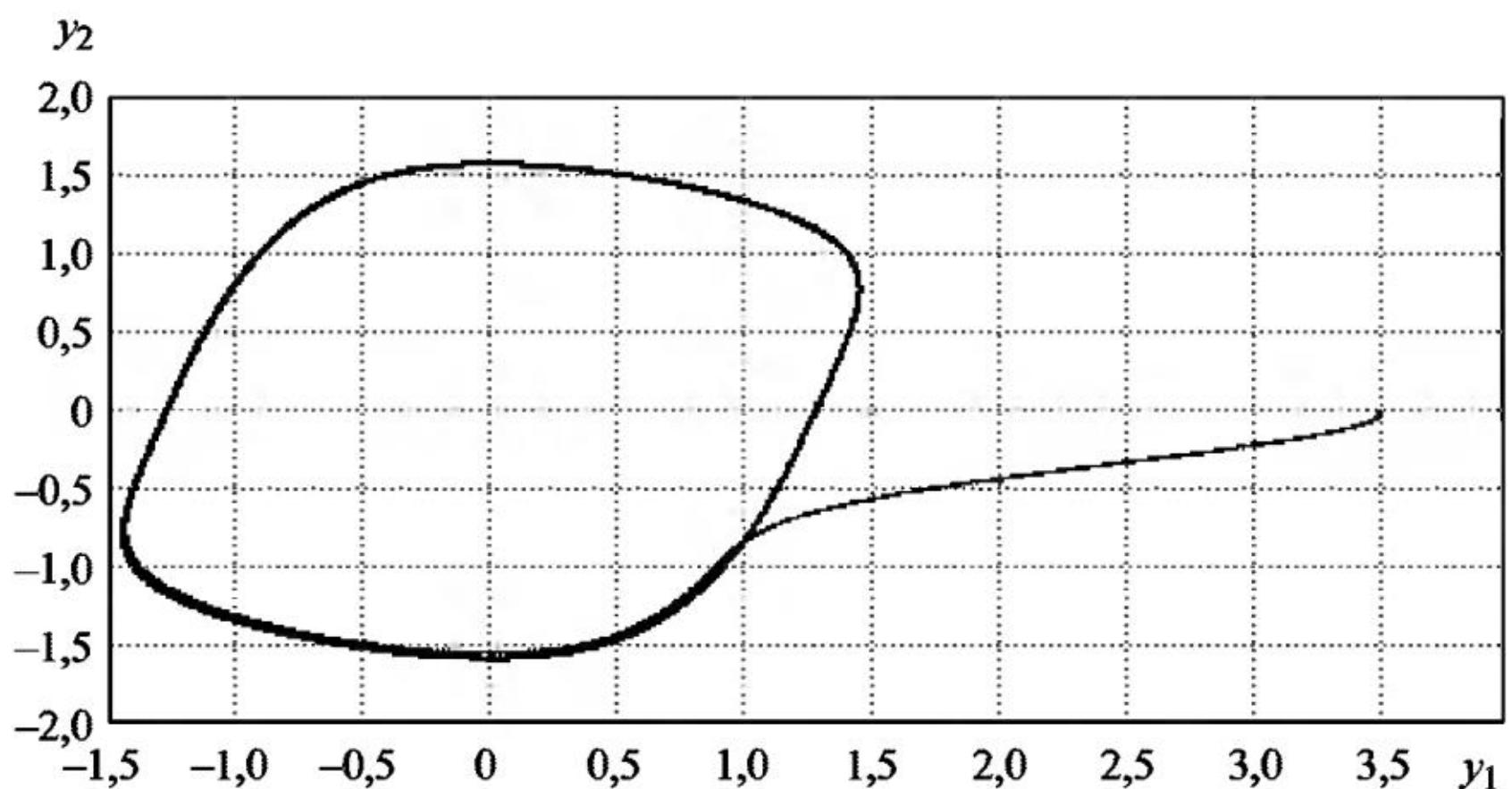


Рис. 11.6

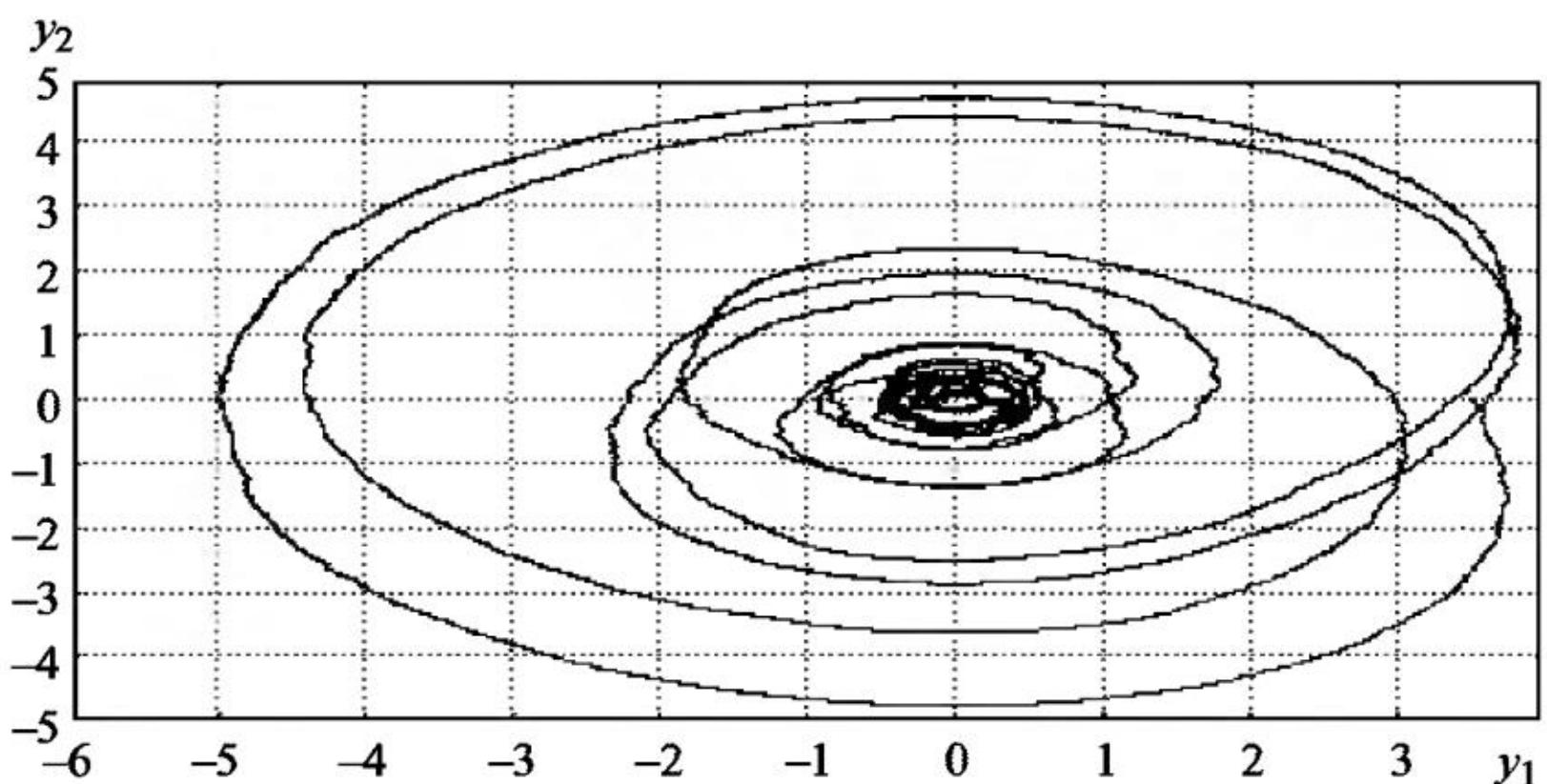


Рис. 11.7

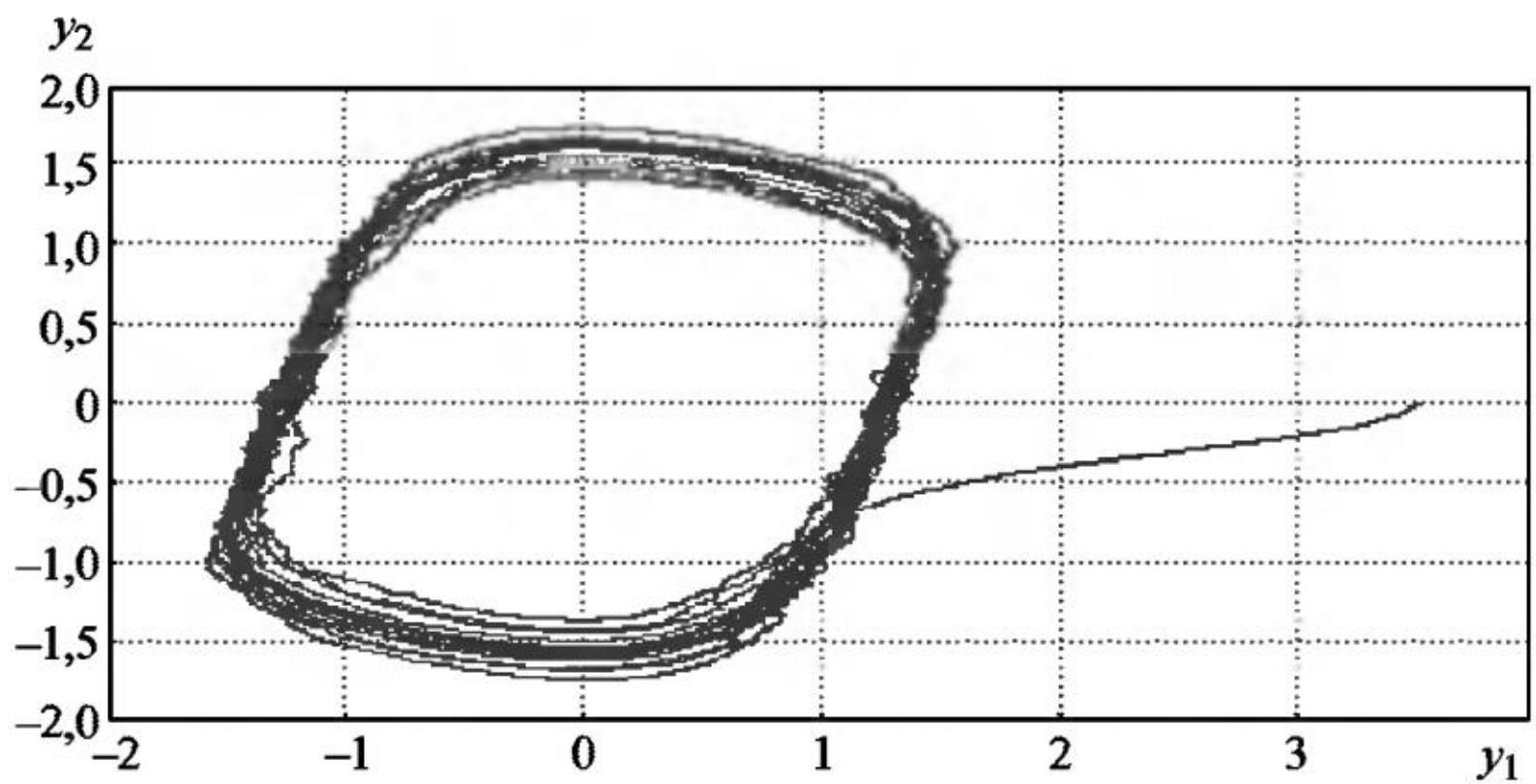


Рис. 11.8

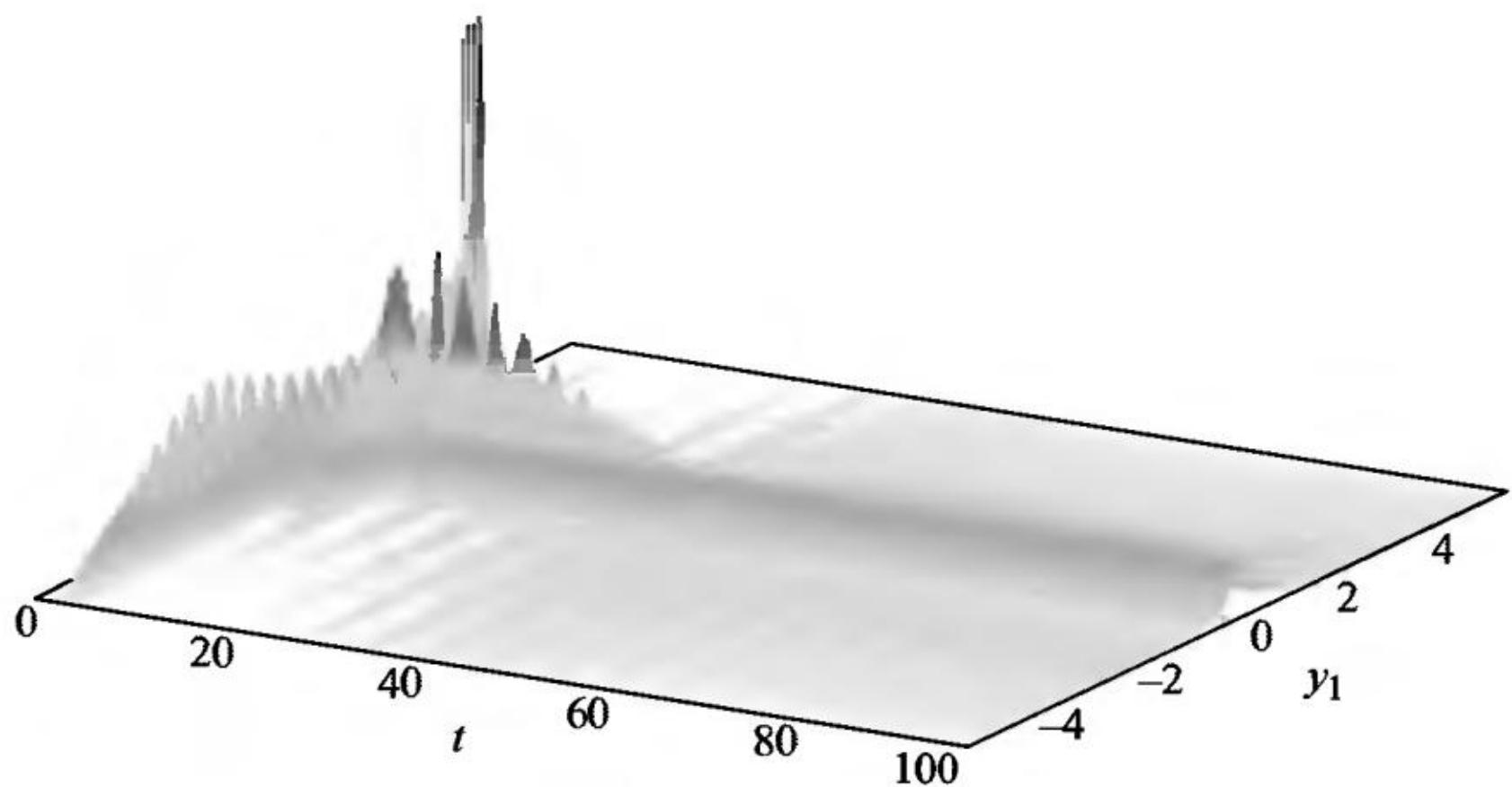


Рис. 11.9

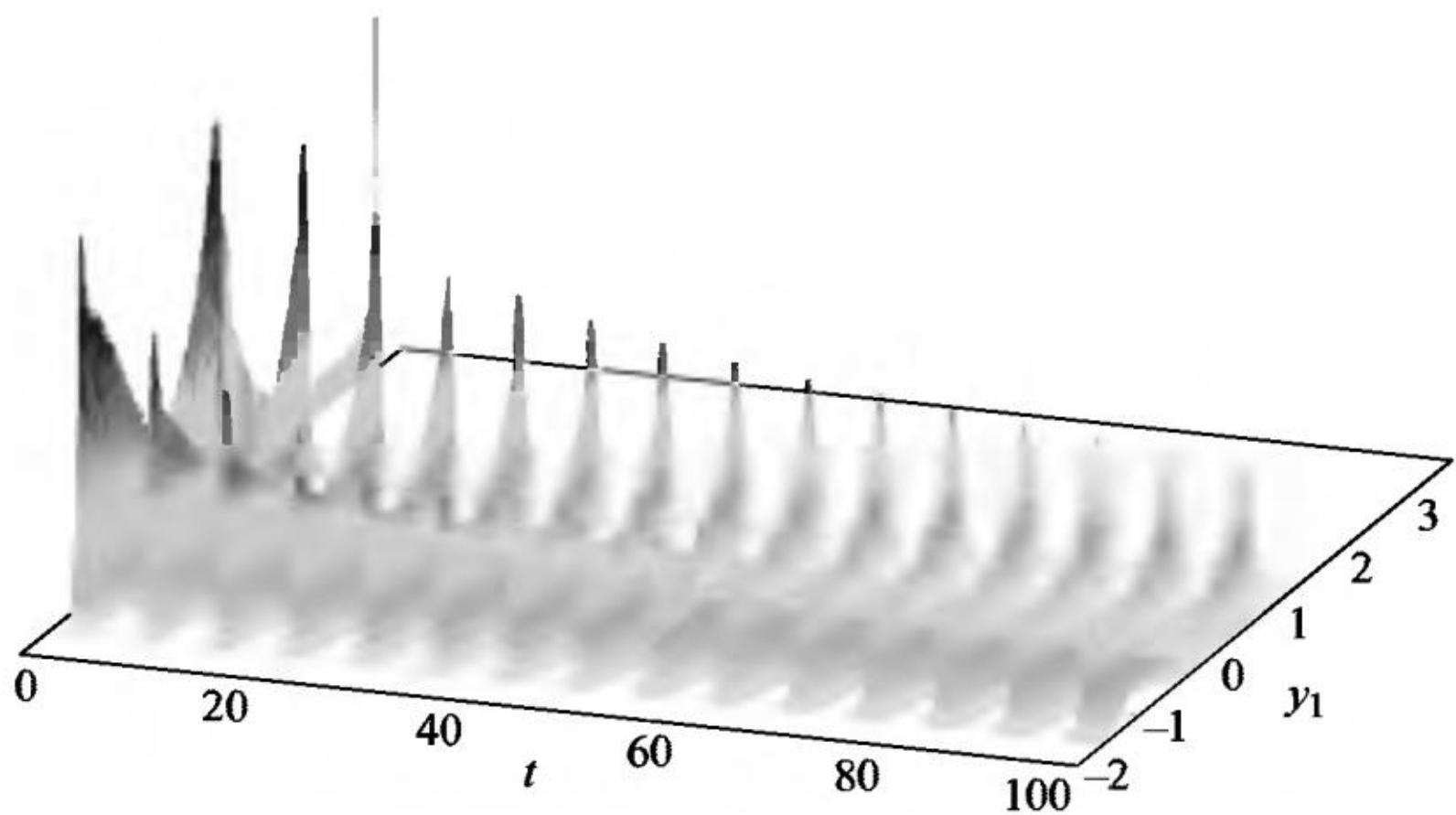


Рис. 11.10

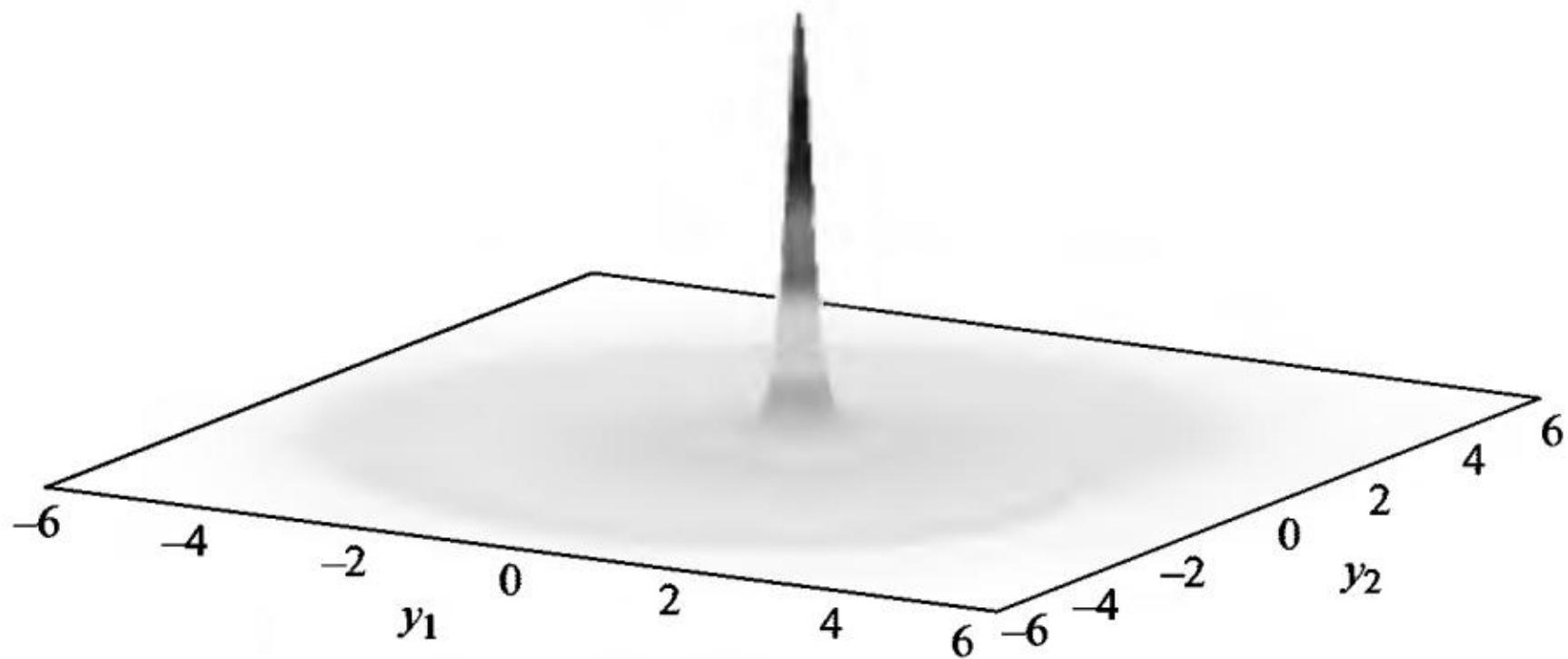


Рис. 11.11

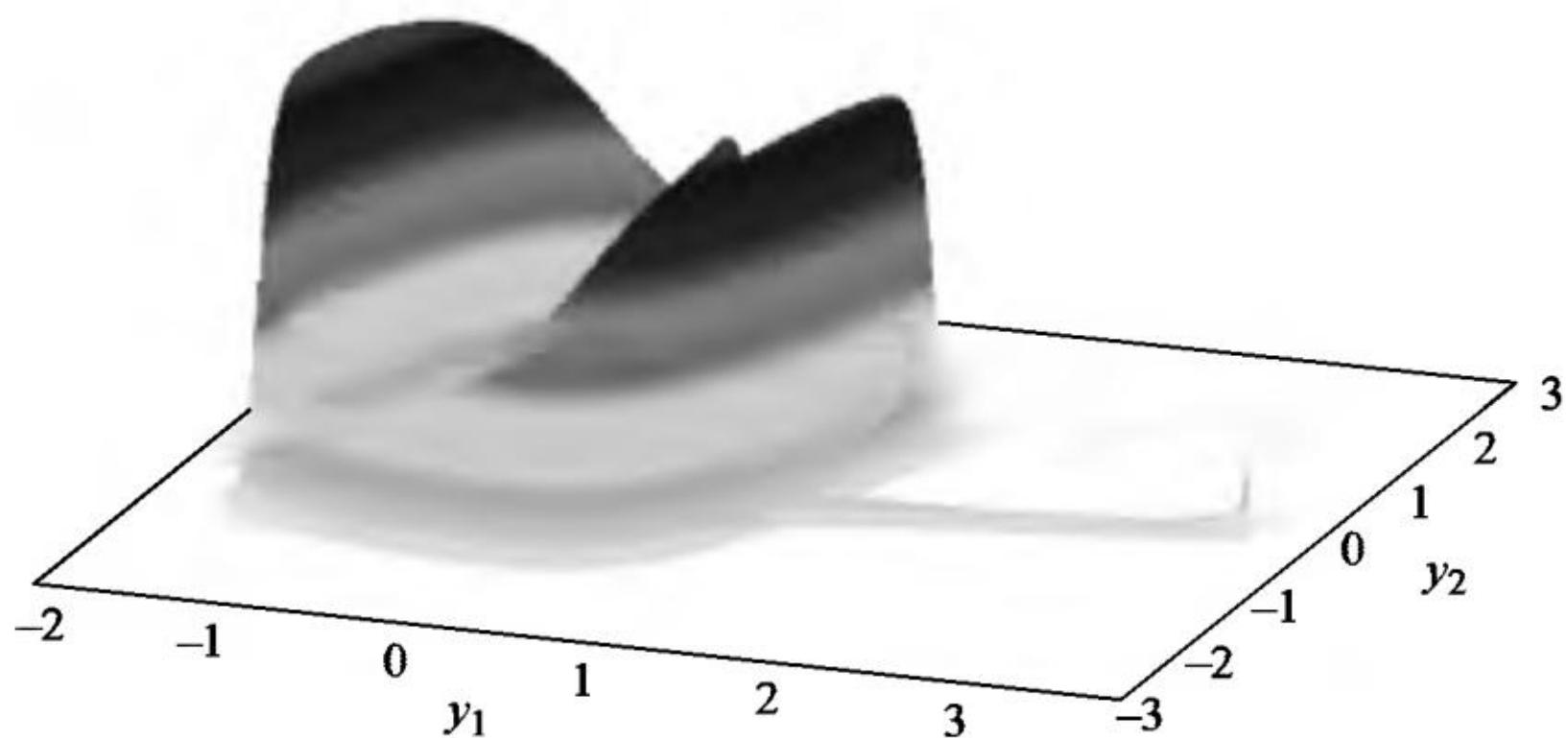


Рис. 11.12

На рис. 11.9 и 11.10 даны графики ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 численного решения при $g = 0,02$ и $g = 10$ соответственно, которые также совершенно различны по форме между собой. На графиках ясно видны области наибольших частот в ЧИК.

Из графиков ЧИК ясно виден установившийся характер колебаний с постоянной амплитудой и частотой всех смоделированных траекторий компонент (y_1, y_2) решения системы СДУ (11.17).

На рис. 11.11 и 11.12 даны графики ЧФП (вид сбоку) пары компонент численного решения (y_1, y_2) при $g = 0,02$ и $g = 10$ соответственно.

Хотя графики ЧФП различаются между собой и по размерам, и по форме, можно заключить, что все индивидуальные траектории компонент y_1 и y_2 численного решения ведут себя однообразно. Сравнение графиков на рис. 11.8 и 11.12 показывает, что график на рис. 11.12 обобщает график на рис. 11.8. Сравнивая гра-

фики ЧФП на рис. 11.11 и 11.12, видим, что при малом $g = 0,02$ имеют место колебания как с очень малой амплитудой, так и с большой, тогда как при $g = 10$ амплитуда колебаний постоянна.

Пример 11.5. Управляемая система, находящаяся под воздействием внешних случайных возмущений, задается системой СДУ вида

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_3 dt, & y_1(0) &= -0,02, \\ dy_2 &= y_4 dt, & y_2(0) &= -0,02, \\ dy_3 &= \left(8,7 \cdot 10^{-3} y_1 - 0,18 y_3 - 5,57 \cdot 10^{-2} u(t)\right) dt + 0,1 dw_1(t), & y_3(0) &= 10, \\ dy_4 &= \left(1,39 \cdot 10^{-2} y_1 + 0,28 y_3 + 2,1 u(t)\right) dt + 0,1 dw_2(t), & y_4(0) &= 0, \end{aligned} \quad (11.18)$$

где

$$u(t) = F_M - 3 \cdot 10^{-2} \operatorname{sign}(y_4), \text{ а } F_M = \begin{cases} 0, & \text{если } |y_2| \leq 4 \cdot 10^{-5}, \\ -175 y_2, & \text{если } |y_2| > 4 \cdot 10^{-5}. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, в (11.18) функция сноса меняется в случайные моменты времени. При нулевом управлении $u(t)=0$ амплитуда колебаний компоненты решения y_1 медленно убывает со временем.

На рис. 11.13 приведен график фазовой траектории пары компонент (y_1, y_3) решения сопутствующей системы ОДУ. Как видно из рисунка, управление успешно и быстро погашает колебания решения системы ОДУ. Когда колебания становятся стохастическими, то даже при малой интенсивности шума качество управления резко ухудшается. На рис. 11.14 приведен график одной смодели-

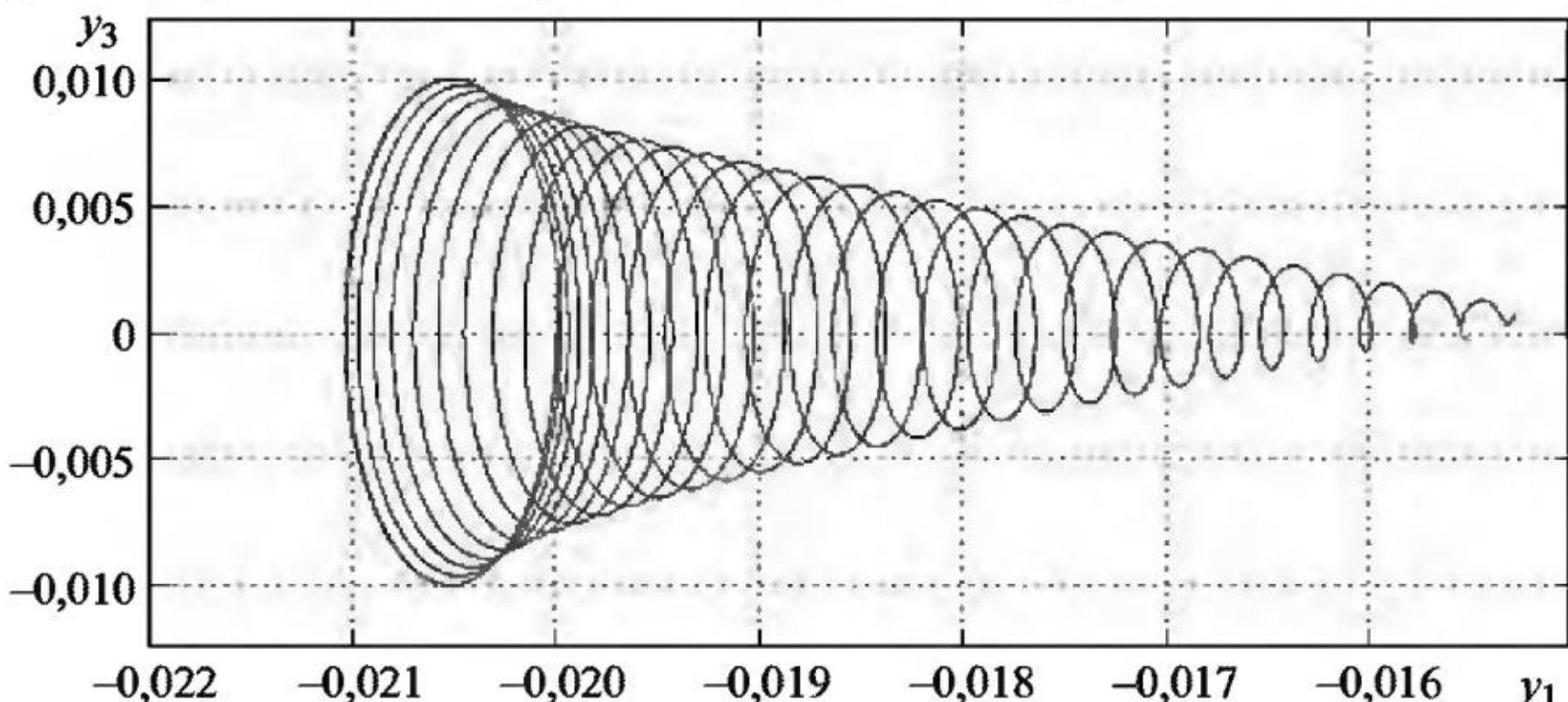


Рис. 11.13

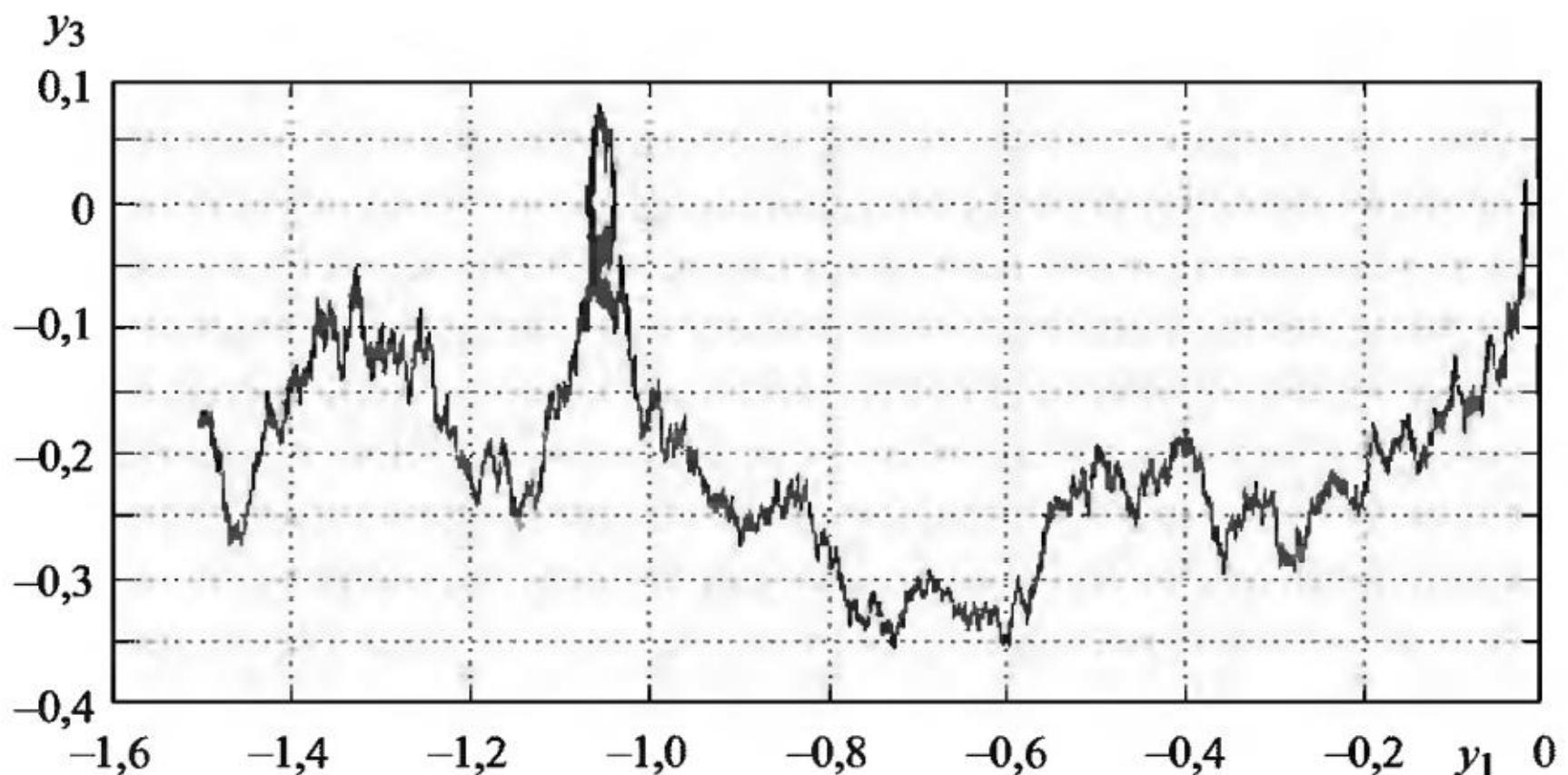


Рис. 11.14

рованной фазовой траектории для пары компонент (y_1, y_3) решения системы СДУ на интервале интегрирования $[0, 10]$.

Если размер шага интегрирования увеличить, то амплитуда колебаний компоненты y_3 начинает быстро расти. На рис. 11.15 и 11.16 приведены графики ЧИК (вид сбоку) для компоненты y_3 и ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_3) решения системы СДУ (11.18), из формы и размеров которых можно делать выводы о качестве управления при наличии случайных возмущений.

Графики ЧИК и ЧФП позволяют оценить быстродействие и точность управления системой, находящейся под воздействием случайных возмущений.

Пример 11.6. Модель виброударника. Большие силы, возникающие при соударении твердых тел, используются в технике для создания интенсивных воздействий на обрабатываемые материалы и среды. Удар вызывает в соударяющихся телах сложные волновые процессы, которые и определяют результат его действия. Соударяющиеся системы после одного или некоторого числа ударов могут перейти в другое состояние или разрушиться. Цель деятельности большинства традиционных машин ударного действия состоит в организации соударений, в результате которых обрабатываемые материалы и среды претерпевают с точки зрения механики достаточно радикальные изменения. Удар как механическое явление характеризуется двумя основными свойствами. Во-первых, быстрой свершения: за очень малое с точки зрения механики время (порядка долей миллисекунд) скорость точек механической системы резко изменяется. Во-вторых, возникновением (и, естественно, быстрым исчезновением) ударных сил, на-

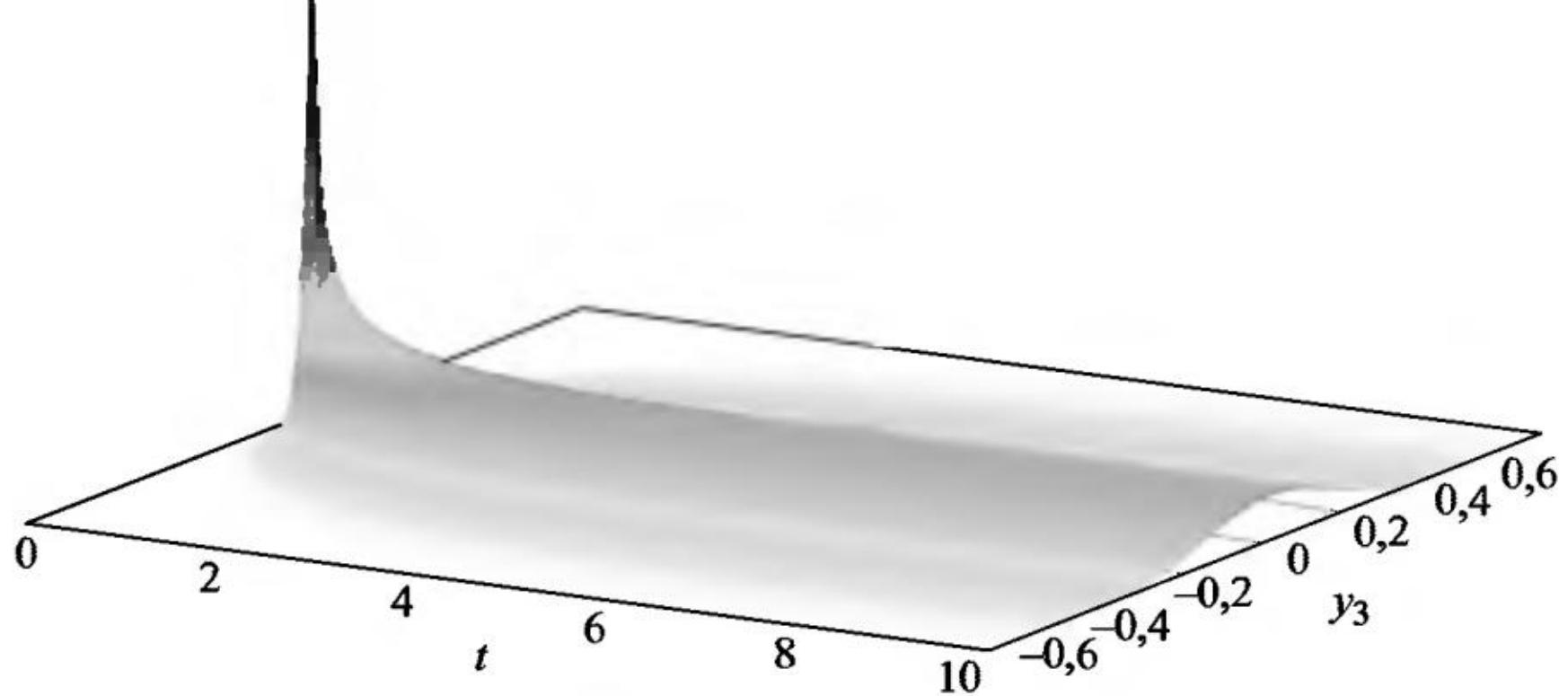


Рис. 11.15

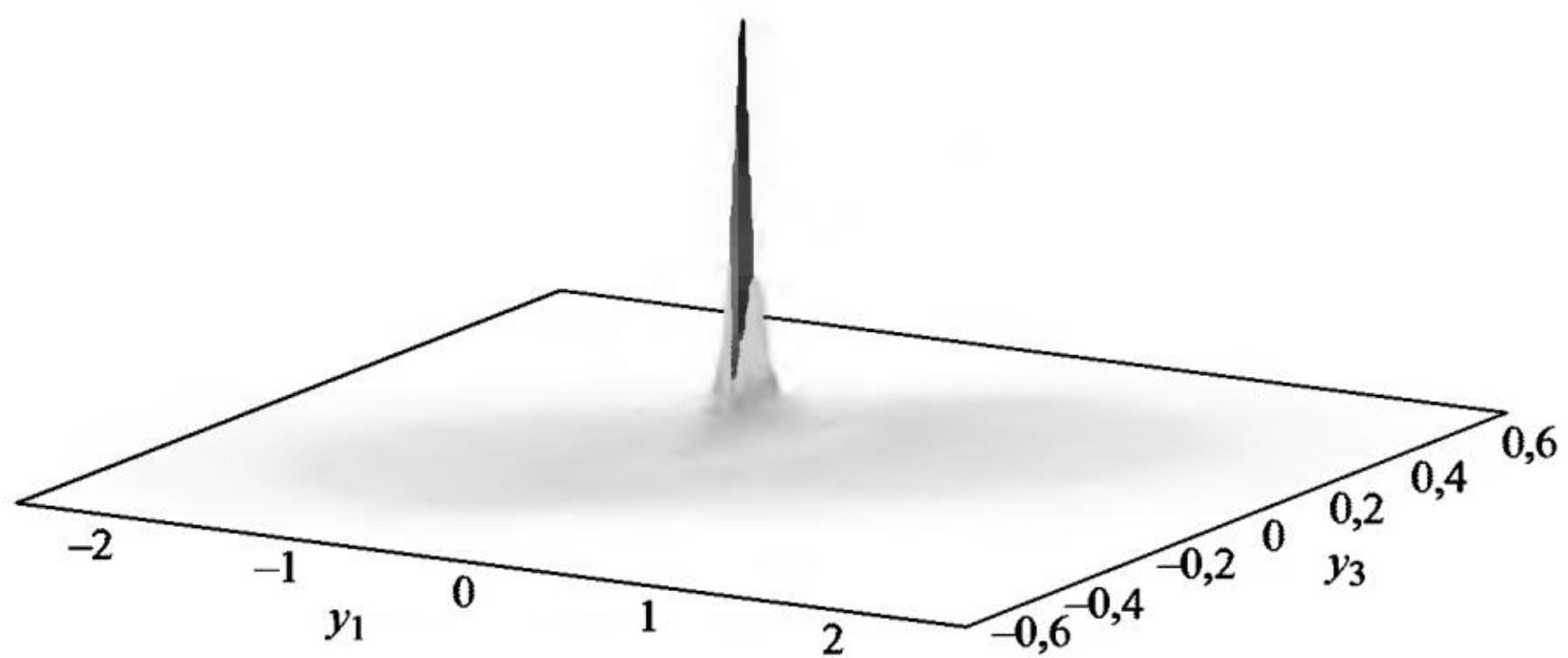


Рис. 11.16

столько больших, что во время удара все силы, кроме этих, можно просто не принимать во внимание [2].

Система СДУ с мультипликативными шумами

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= y_3 dt, & y_1(0) &= 1, \\
 dy_2 &= y_4 dt, & y_2(0) &= 1, \\
 dy_3 &= \left(\frac{f_1}{f_2} \right) dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t), & y_3(0) &= 0, \\
 dy_4 &= \left(\left(-10^{-2} y_4 + 0,02 \sin(y_2) \right) \frac{f_1}{f_2} \right) dt + \sigma_2 y_2 dw_2(t), & y_4(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{11.19}$$

описывает модель движения виброударника. Здесь $f_1 = -10^{-2} y_3 - y_1 + 0,1 y_4^2 \cos(y_2) - 10^{-3} y_4 \sin(y_2) + \sin(y_2) \sin(vt) + 0,5 \text{sign}(y_1)$,

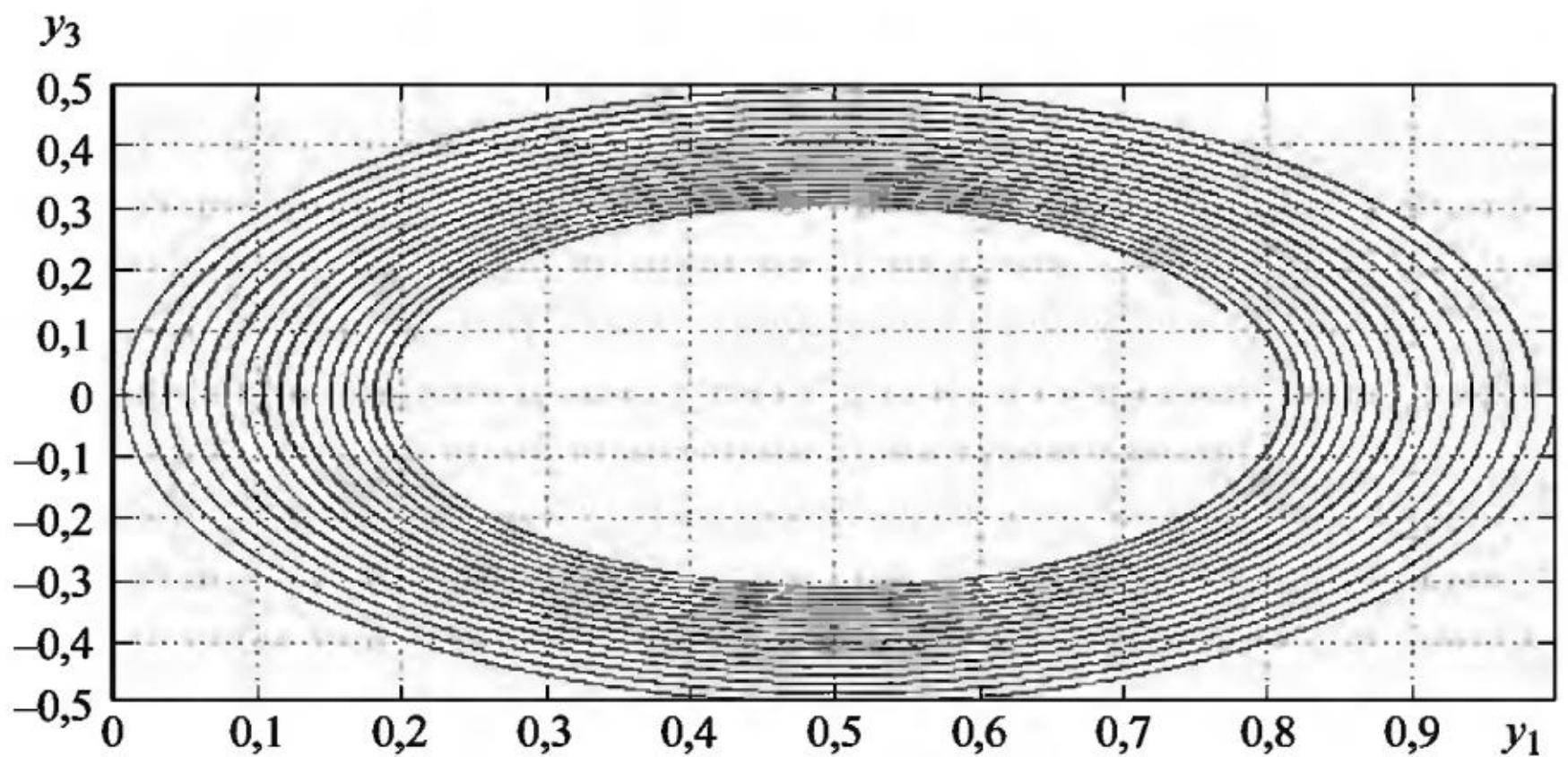


Рис. 11.17

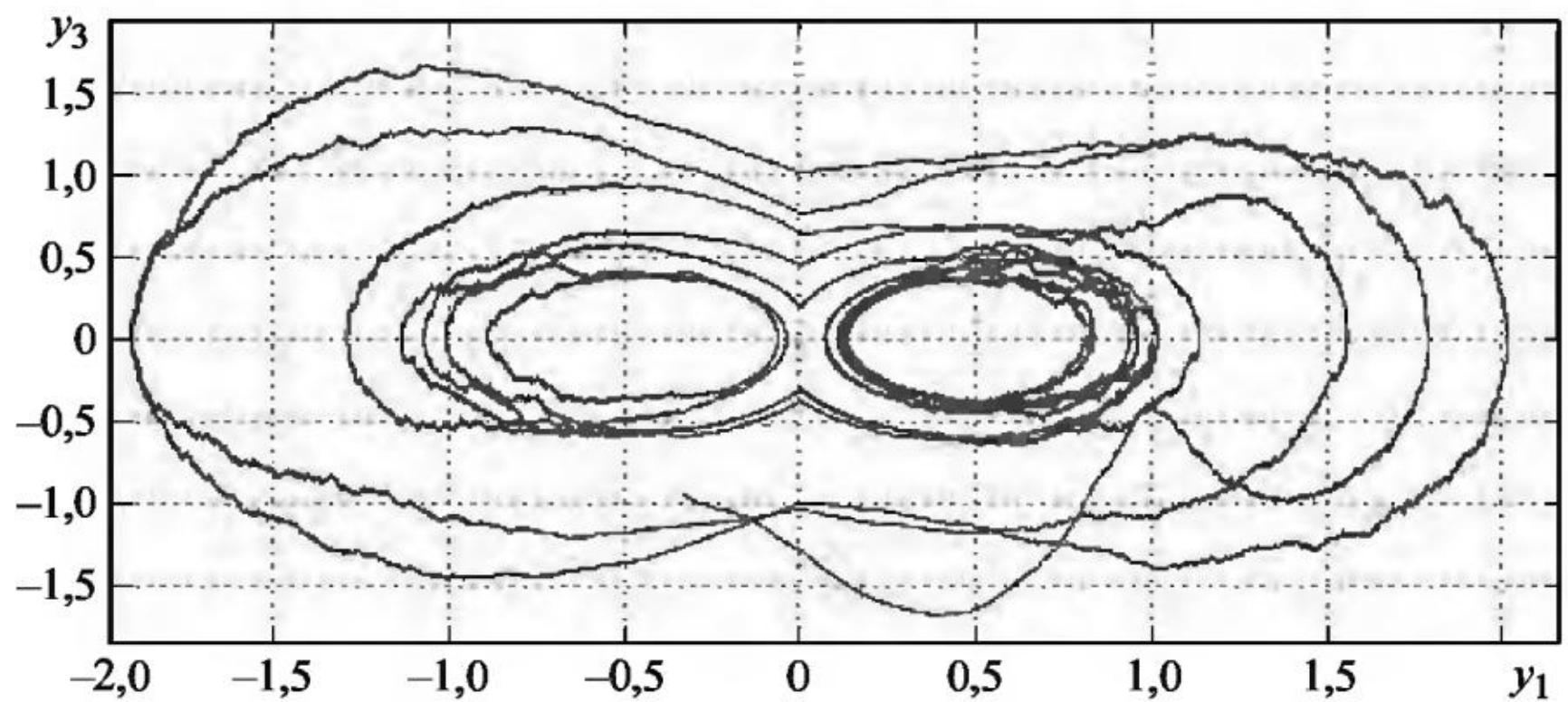


Рис. 11.18

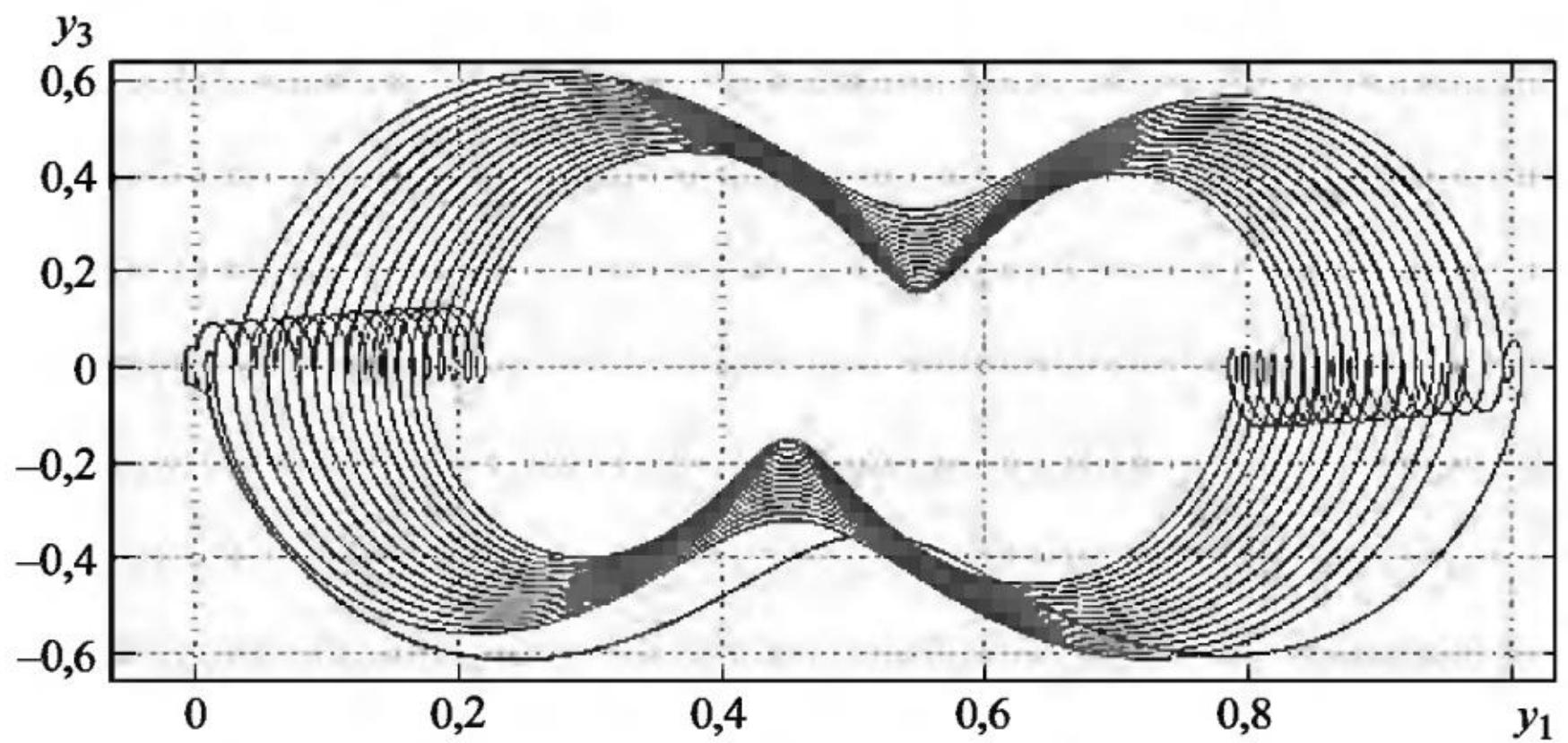


Рис. 11.19

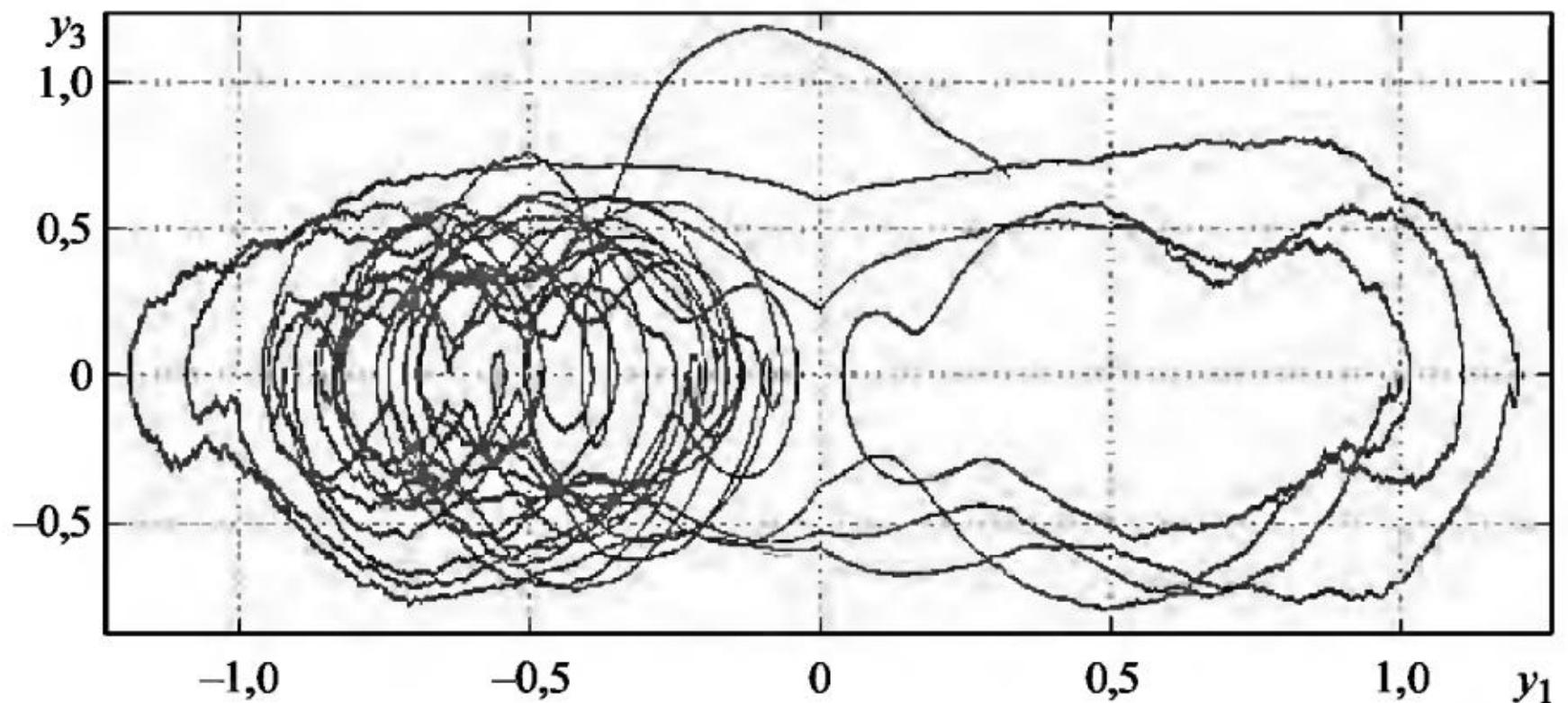


Рис. 11.20

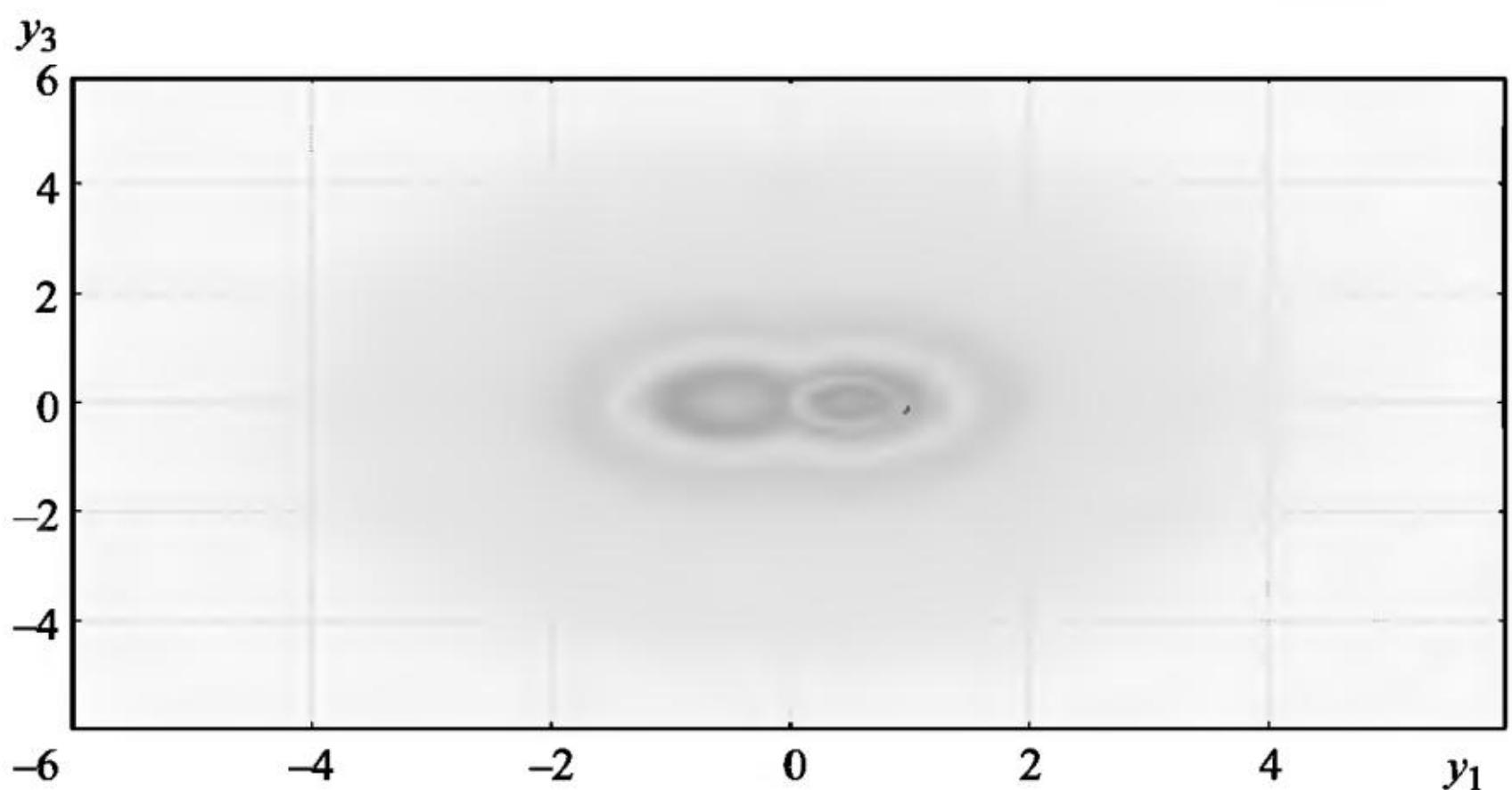


Рис. 11.21

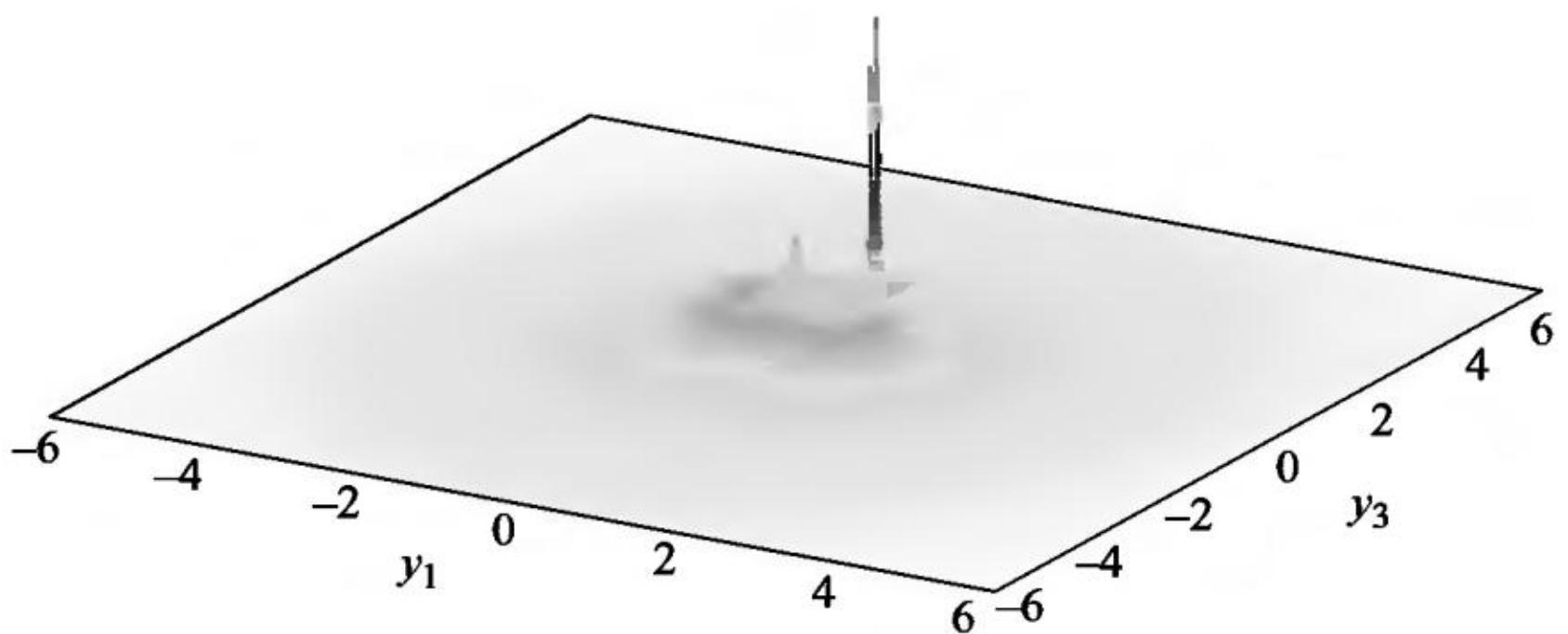


Рис. 11.22

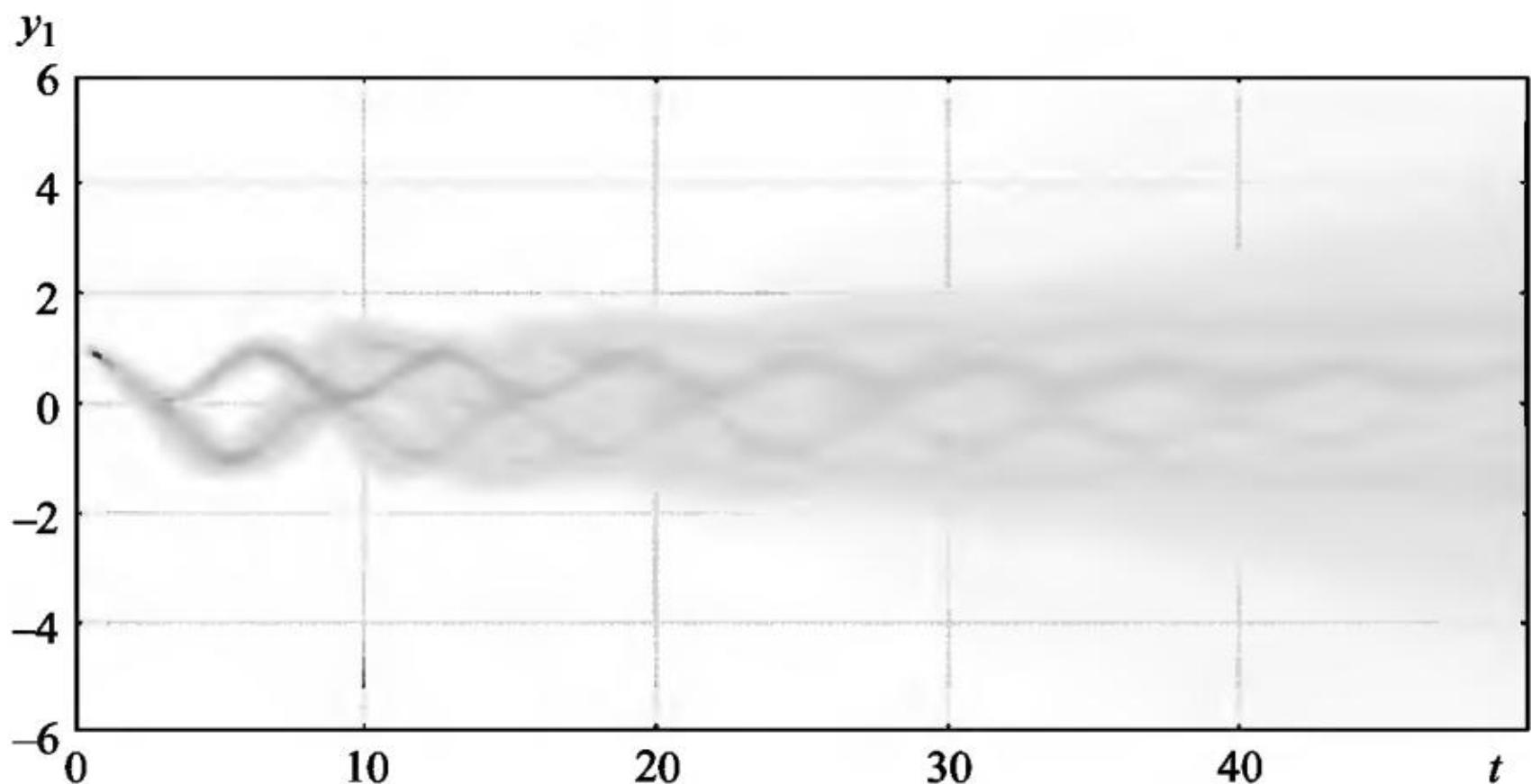


Рис. 11.23

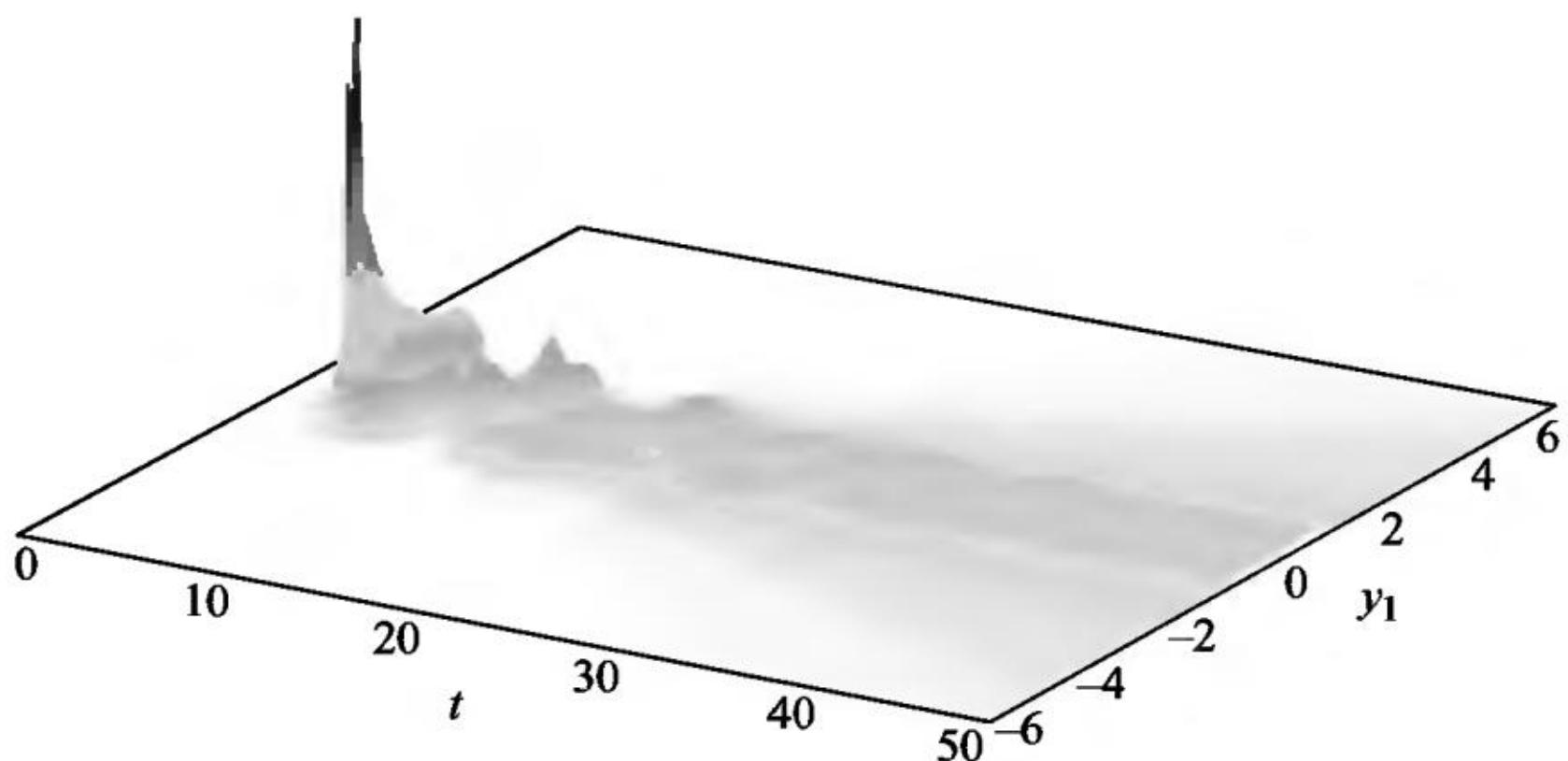


Рис. 11.24

$f_2 = 1 - 2 \cdot 10^{-3} \sin^2(y_2)$. В (11.19) функция сноса меняется в случайные моменты времени при переходе $y_1(t)$ через 0. На рис. 11.17–11.20 приведены графики фазовой траектории (y_1, y_3) решения системы СДУ (11.19) без шума и с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$ для разных значений частоты $v = 0$ и 5 . Как видим, графики при разных v совершенно различны, причем малые случайные шумы совершенно искажают фазовую картину (y_1, y_3) решения сопутствующей системы ОДУ.

На рис. 11.21 и 11.22 приведены графики ЧФП (вид сверху и сбоку) пары компонент (y_1, y_3) численного решения системы СДУ (11.19) для разных значений параметра $v = 0$ и 5 .

На рис. 11.23 и 11.24 приведены графики ЧИК (вид сверху и сбоку) компоненты y_1 численного решения системы СДУ (11.19) для $v = 0$ и 5 .

Как видим, в стохастическом случае нет принципиальных различий в размерах и форме ЧФП и ЧИК при разных v , что находится в контрасте с детерминированной моделью. А это означает, что под воздействием внутренних случайных шумов режимы работы виброударника схожи при разных частотах v .

12. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ

Численный анализ поведения решений систем ОДУ, называемых странными аттракторами, находящихся под воздействием случайных возмущений, подразумевает проведение многократных расчетов решений систем СДУ с разными вещественными параметрами в функции сноса и матрице интенсивности шумов, что достаточно трудоемкая процедура. Проведем параметрический анализ нескольких известных аттракторов [1].

Пример 12.1. Аттрактор Лоренца. Численный анализ решений системы ОДУ аттрактора Лоренца

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -10(y_1 - y_2), & y_1(0) &= 1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_2 - y_1 y_3 + r y_1, & y_2(0) &= 1, \\ \frac{dy_3}{dt} &= -\frac{8}{3} y_3 + y_1 y_2, & y_3(0) &= 20\end{aligned}\tag{12.1}$$

показывает, что точкой бифуркации является значение $r \approx 19,4$. На рис. 12.1 приведен график интегральной кривой компоненты y_1 решения системы ОДУ (12.1) при $r = 24$, из которого видны переходы

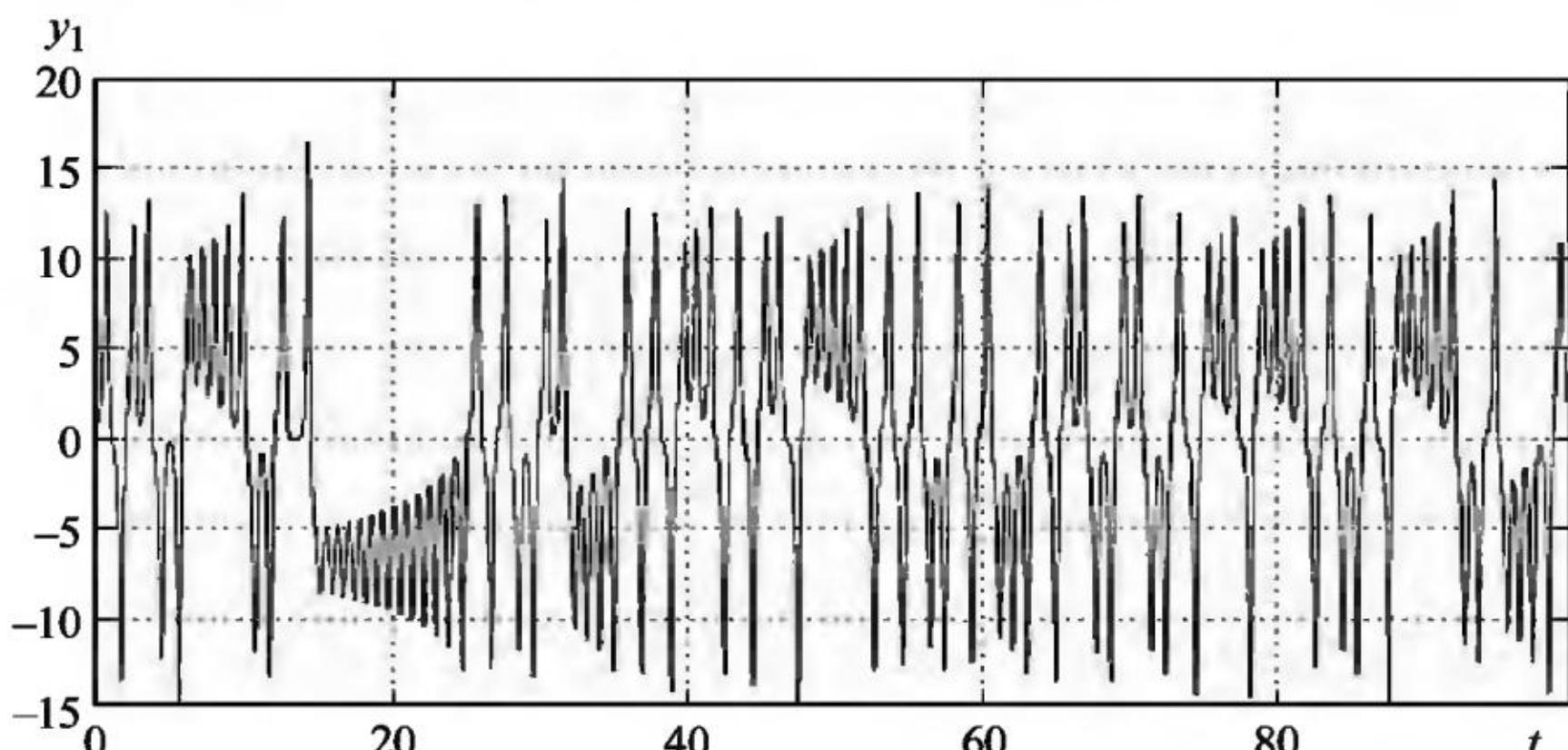


Рис. 12.1

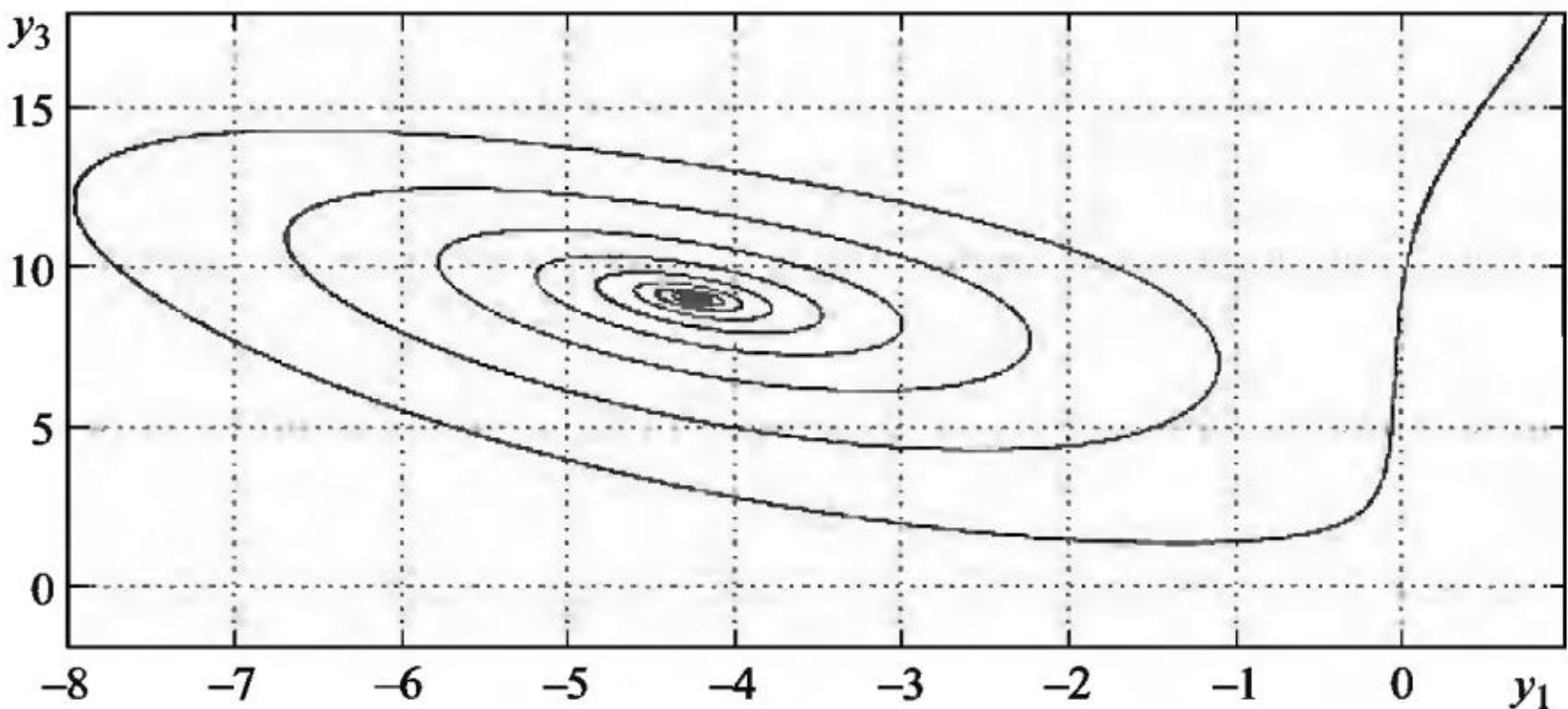


Рис. 12.2

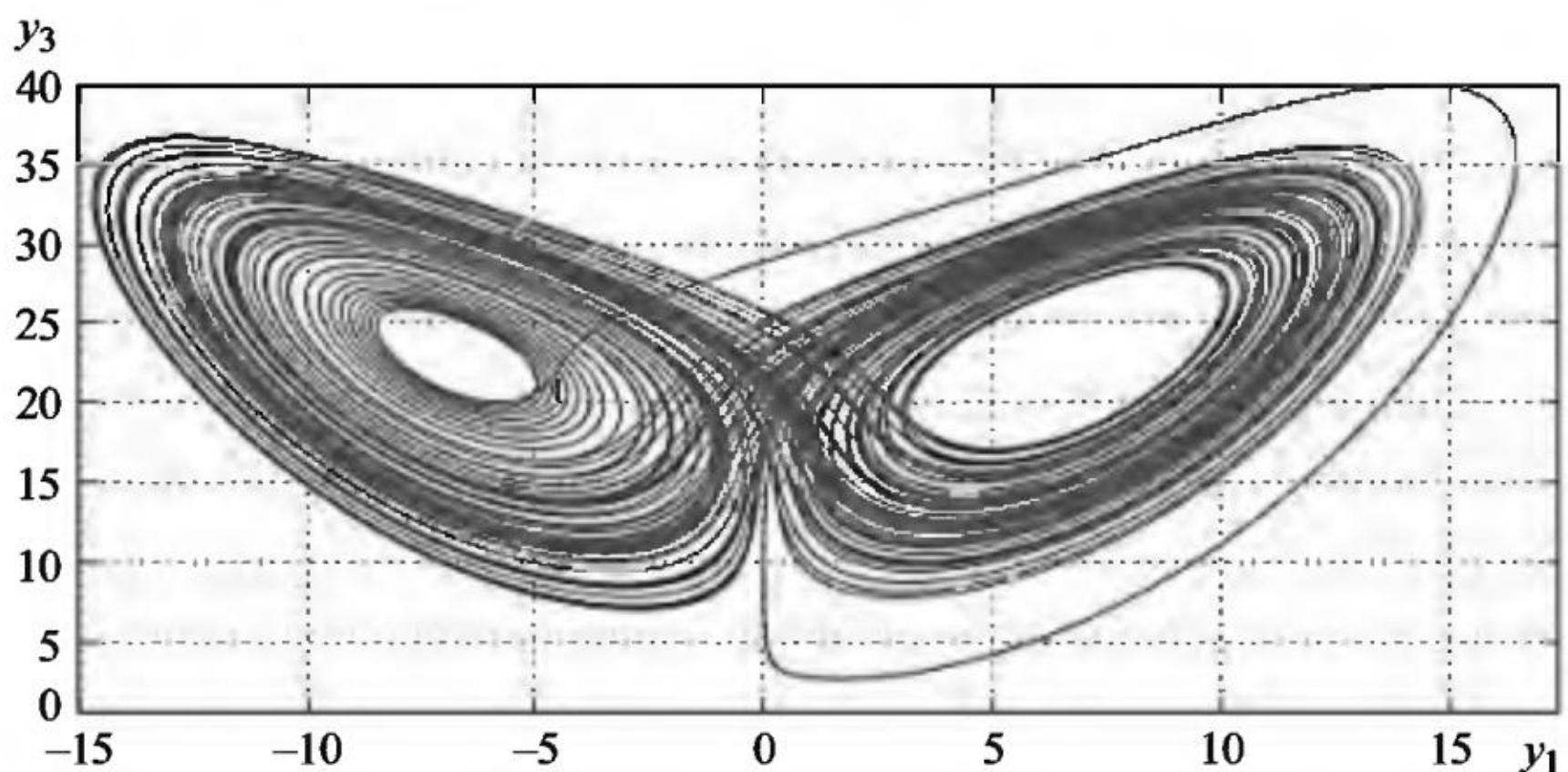


Рис. 12.3

ды режимов колебаний из положительной области в отрицательную и наоборот.

На рис. 12.2 и 12.3 даны графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_3) решений системы ОДУ (12.1) при $r=10$ и 24 соответственно. Такие значения параметра r выбраны для того, чтобы продемонстрировать переход параметром бифуркационного значения с изменением одного режима колебаний на другой. Фазовый портрет на рис. 12.2 называется гиперболическим аттрактором, на рис. 12.3 – аттрактором Лоренца.

Если рассматривать параметр r как «шумящий», то систему ОДУ (12.1) можно записать как систему СДУ с мультипликативным шумом

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= -10(y_1 - y_2)dt, & y_1(0) &= 1, \\
 dy_2 &= (-y_2 - y_1 y_3 + ry_1)dt + \sigma y_1 dw(t), & y_2(0) &= 1, \\
 dy_3 &= \left(-\frac{8}{3}y_3 + y_1 y_2\right)dt, & y_3(0) &= 20.
 \end{aligned} \tag{12.2}$$

Как видно из графика оценки математического ожидания компоненты $y_1(t)$ решения системы СДУ (12.2) при $r = 24$, $\sigma = 1$ (см. рис. 12.4), математическое ожидание $Ey_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, и, следовательно, его поведение совершенно отлично от поведения отдельно взятой траектории $y_1(t)$. Расчеты показывают, что значения математического ожидания $Ey_3(t)$ стабилизируются на уровне 16.

Как видно из графиков оценок дисперсии компоненты $y_1(t)$ решения системы СДУ (12.2) для разных значений r с $\sigma = 1$ (см. рис. 12.5), дисперсия $Dy_1(t)$ растет с увеличением r , но всегда вы-

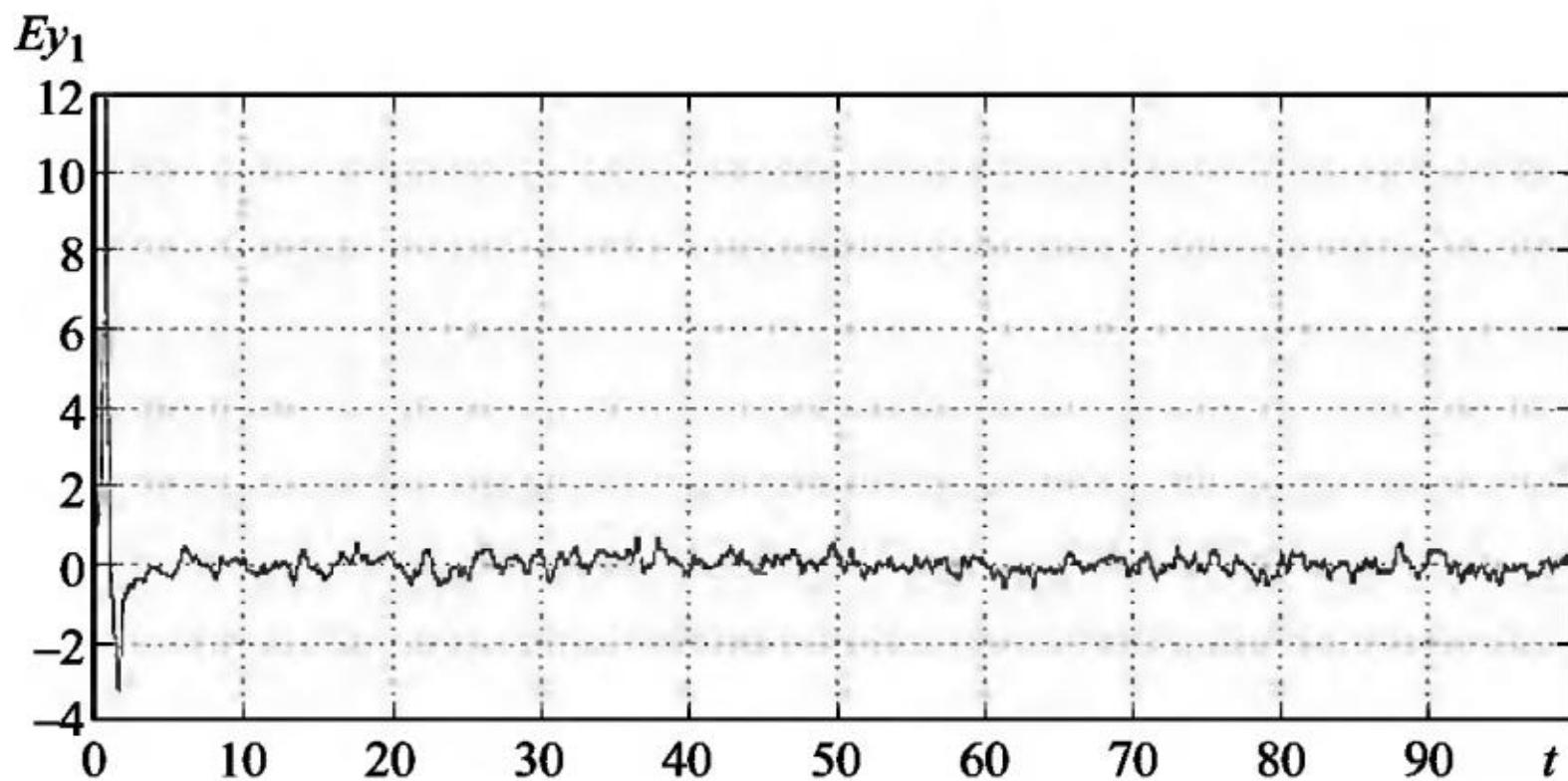


Рис. 12.4

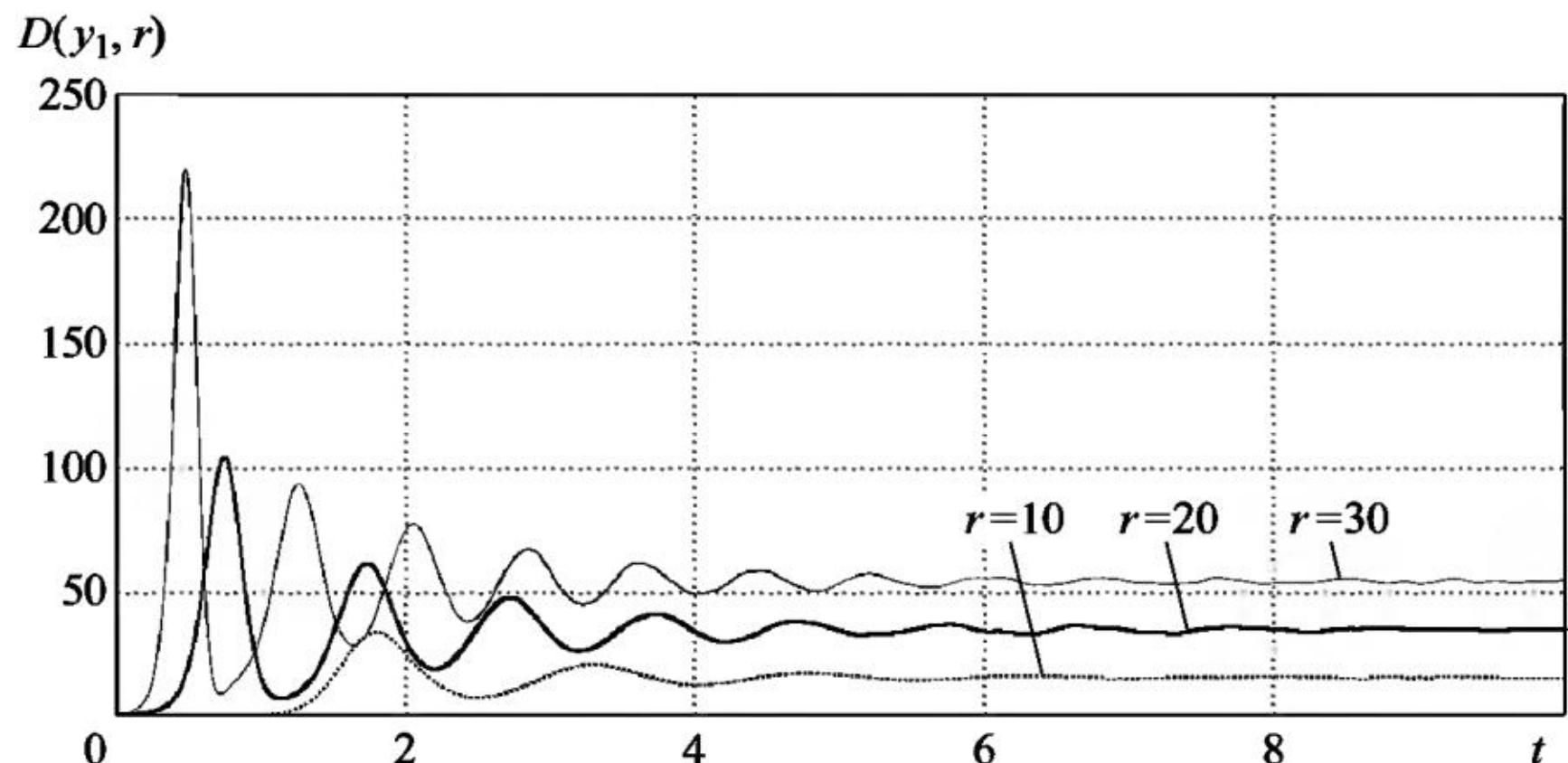


Рис. 12.5

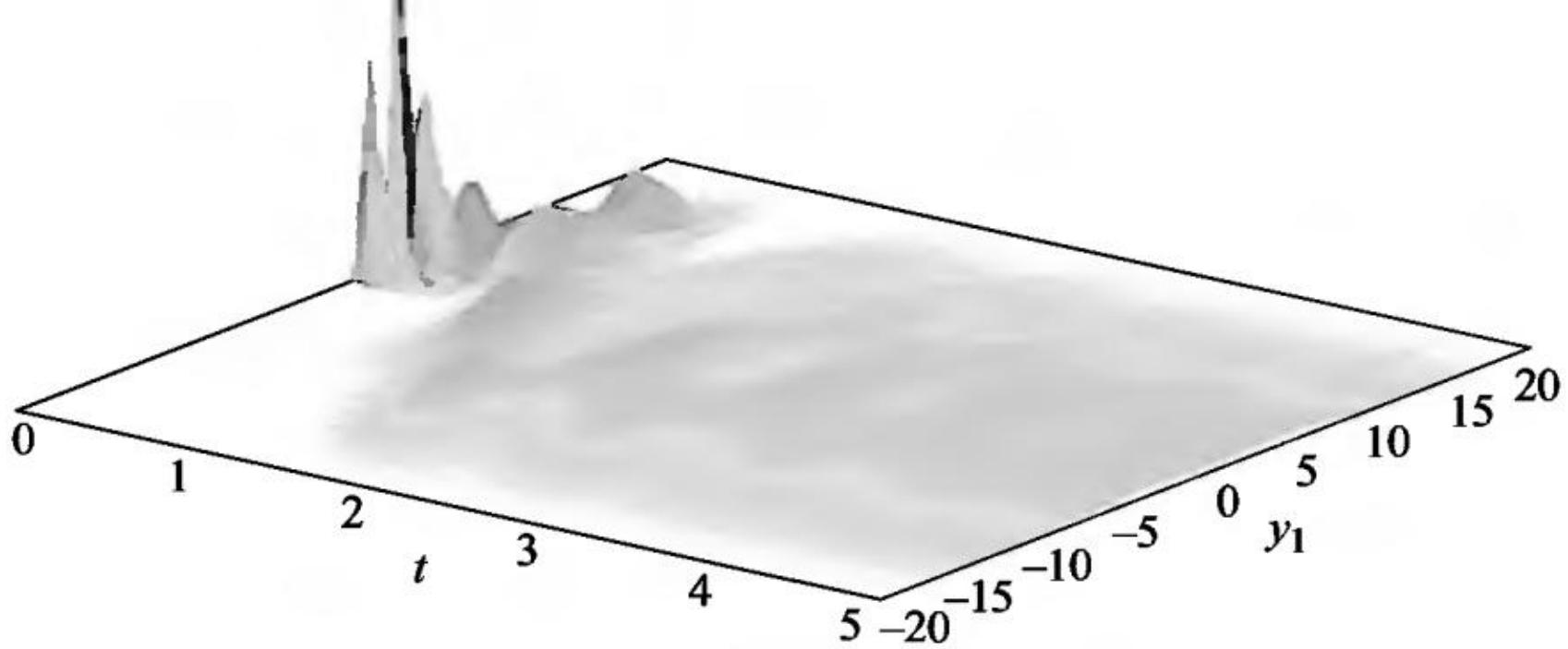


Рис. 12.6

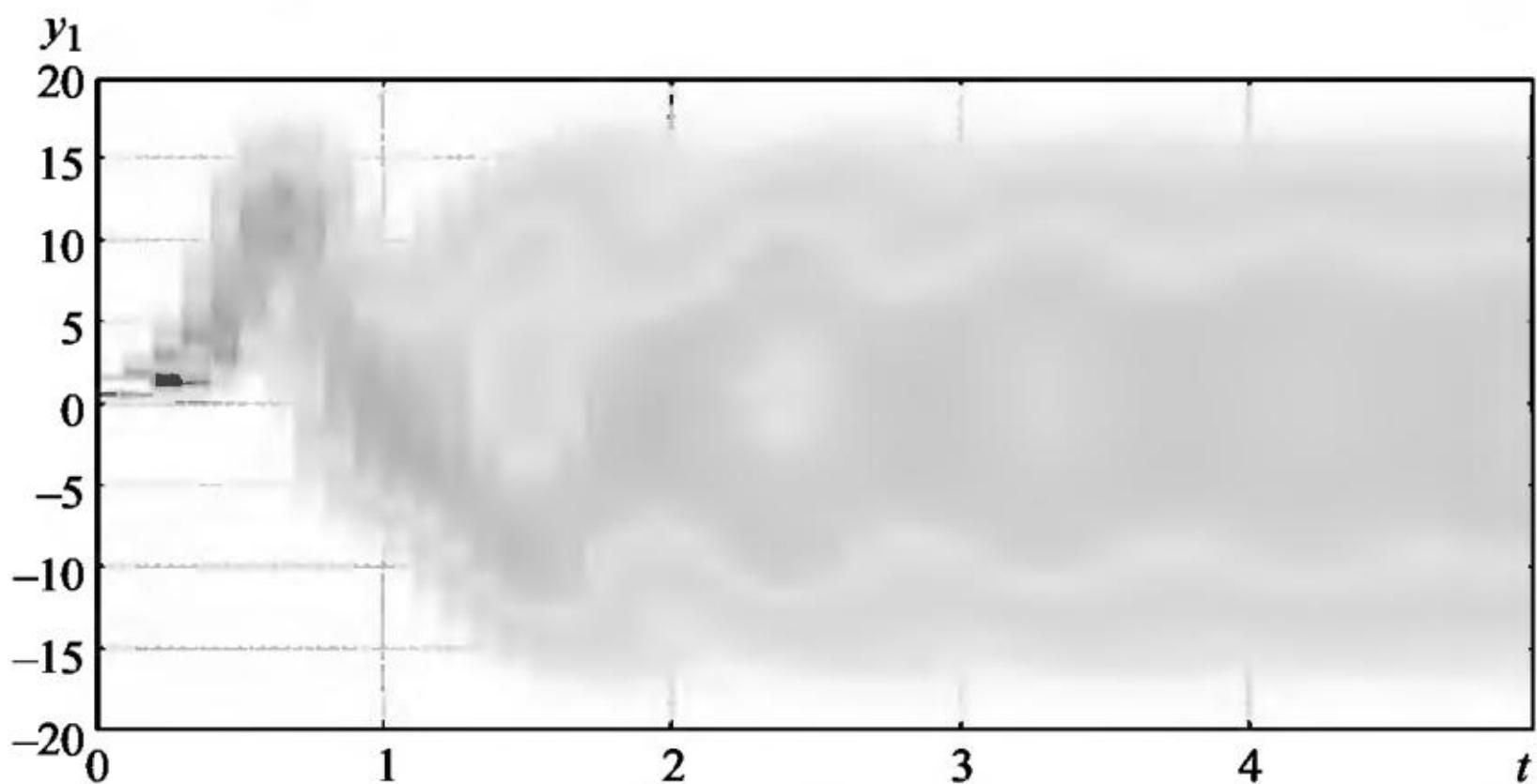


Рис. 12.7

ходит на стационарный уровень, хотя и с разной скоростью для разных r . Отметим, что при $r=100$ стационарный уровень дисперсии $Dy_1(t)$ возрастает до 250.

Из вида графиков ЧИК (вид сбоку и сверху) компоненты решения $y_1(t)$ системы СДУ (12.2) при $r=10$ на рис. 12.6 и 12.7 можно сделать вывод, что распределение решения $y_1(t)$ со временем переходит от одновершинного к равномерному.

На рис. 12.8 и 12.9 представлены графики ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_1, y_3) численного решения системы СДУ (12.2) при $r=10$ и 24. Воздействие случайного шума на параметр r приводит к тому, что точка бифуркации уже не является точкой изменения фазового портрета. Так, при $r=10$ и $r=24$ изображение ЧФП по форме практически совпадают, что расходится с графиками на рис. 12.2 и 12.3 для тех же значений параметра r в системе

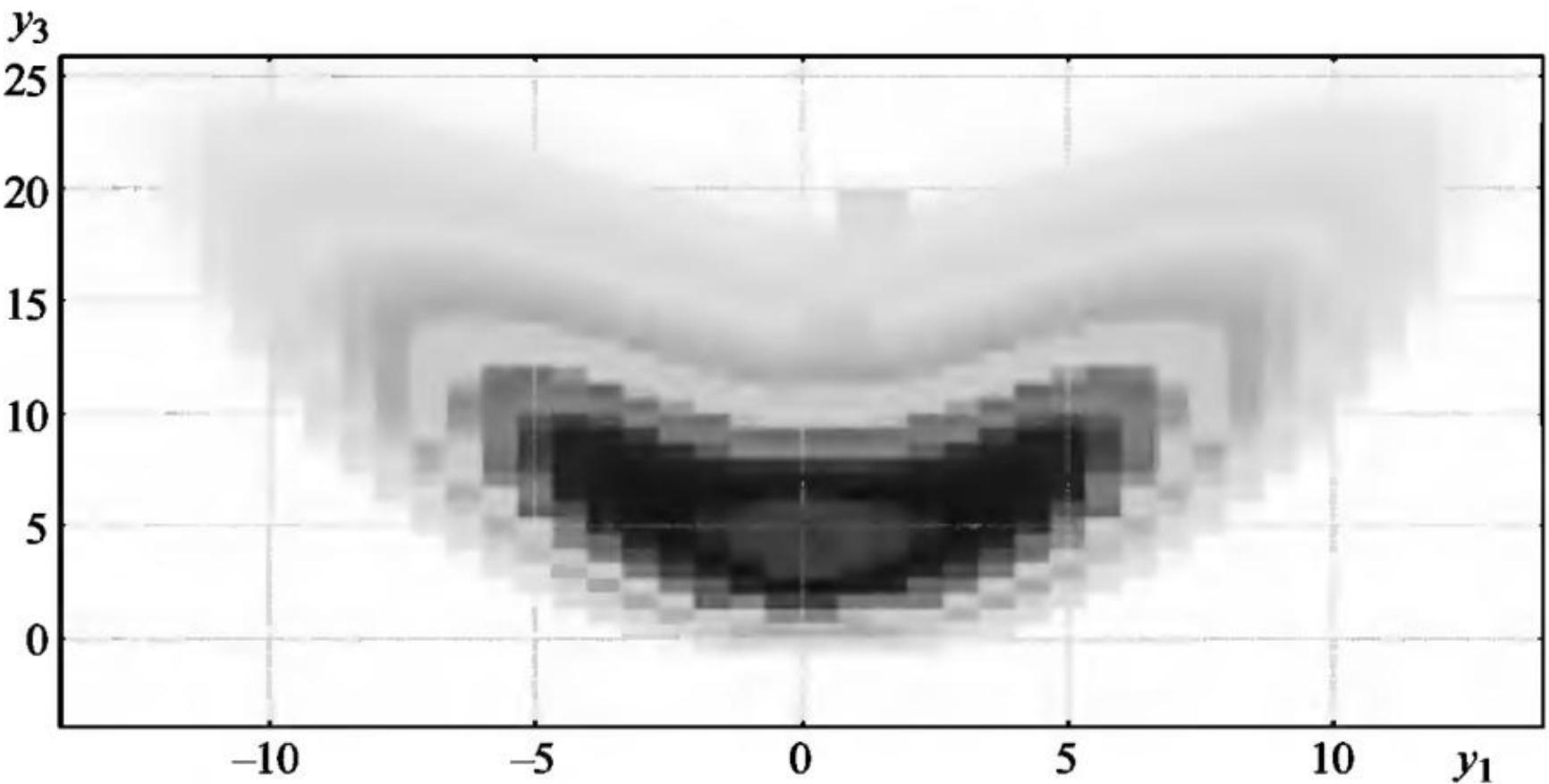


Рис. 12.8

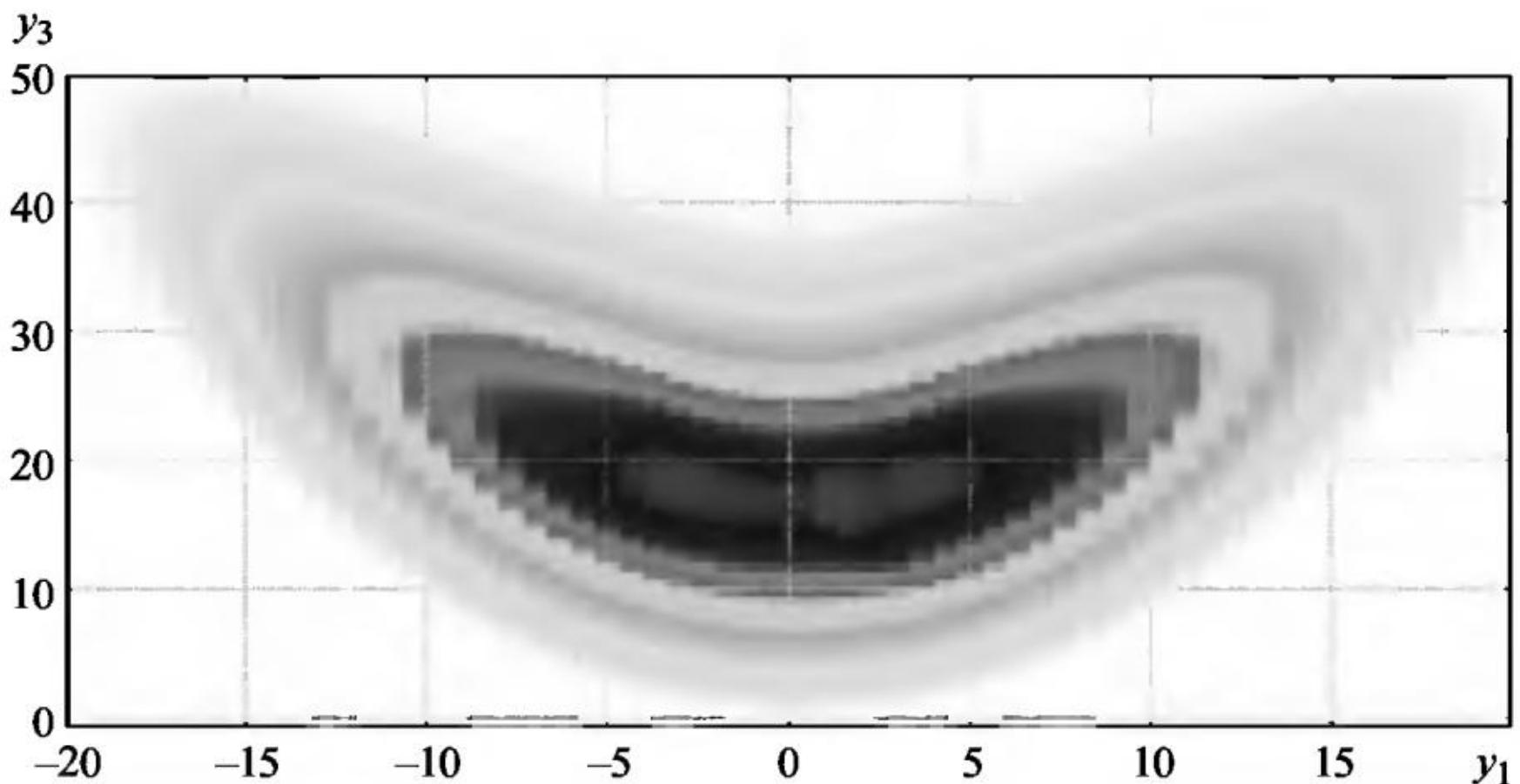


Рис. 12.9

ОДУ (12.1), хотя размеры ЧФП для разных r значительно различаются между собой. Для построения ЧФП использовалась сетка 300×300 . Для расчета ЧФП и ЧИК моделировалось $N_{\text{tr}} = 10^6$ траекторий решения системы СДУ, при этом использовалось 96 ядер кластера.

Пример 12.2. Аттрактор Рёсслера. Аттрактор Рёсслера под воздействием случайного внутреннего шума записывается в виде системы СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= -(y_2 + y_3)dt, & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= (y_1 + ay_2)dt + \sigma y_2 dw(t), & y_2(0) &= 1, \\ dy_3 &= (0,2 + y_1 y_3 - 2,83 y_3)dt, & y_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

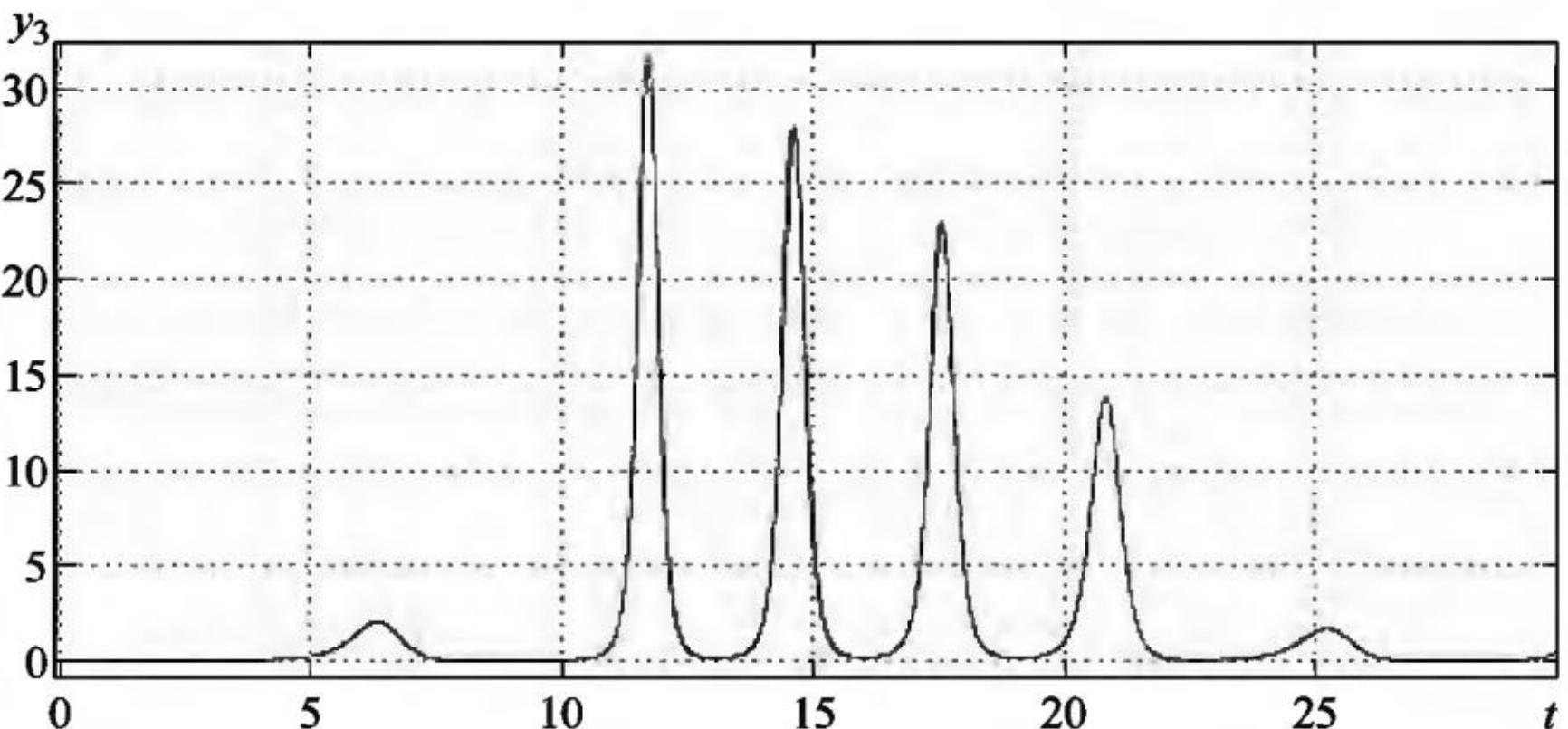


Рис. 12.10

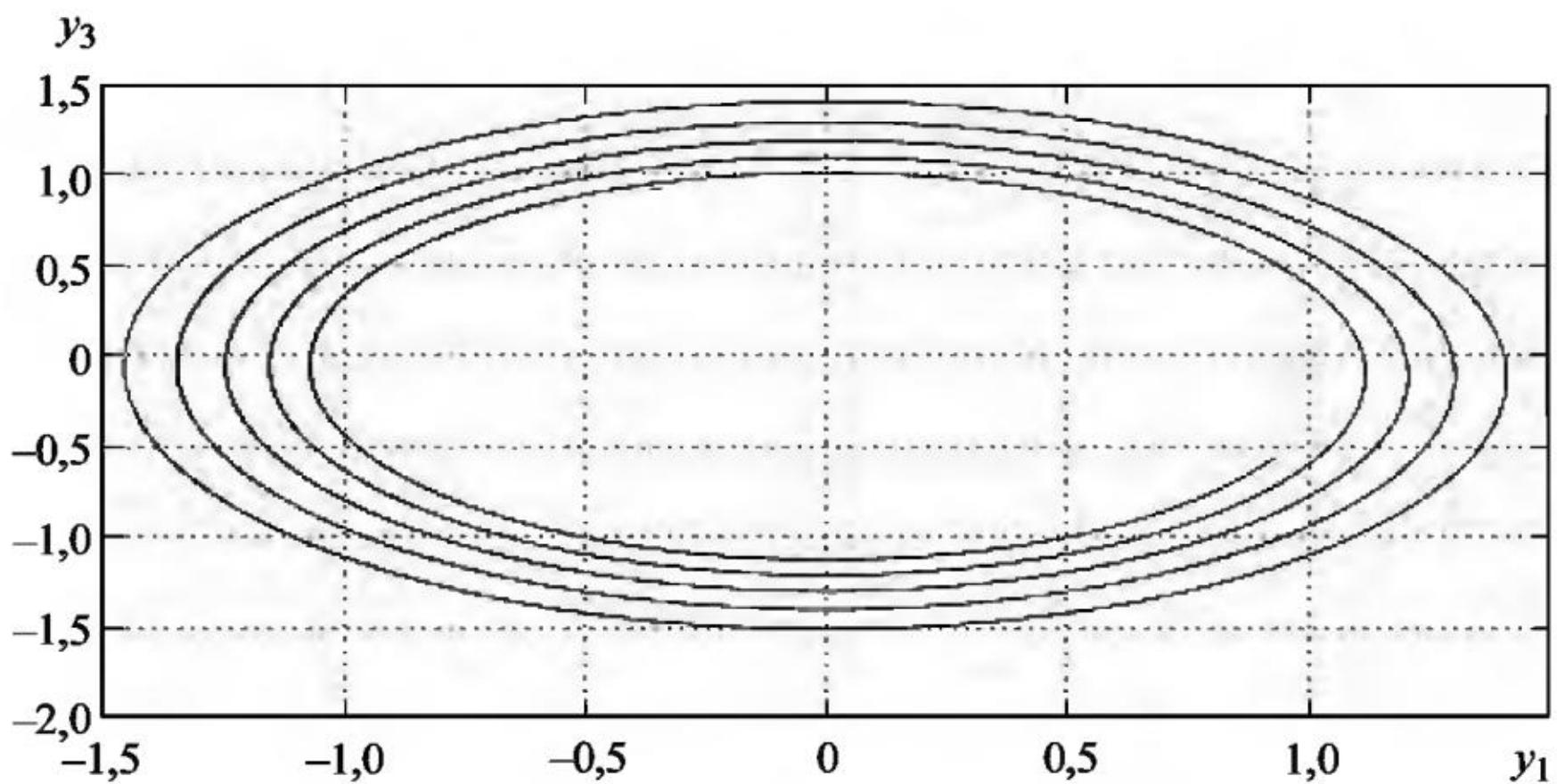


Рис. 12.11

На рис. 12.10 приведен график интегральной кривой компоненты y_3 решения сопутствующей системы ОДУ при $a = 0,4$, на котором видим квазипериодические «всплески» разной высоты.

Как видим из рис. 12.11 и 12.12, где приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_3) решения сопутствующей системы ОДУ при $a = 0$ и $0,4$, при переходе параметра a от 0 к $0,4$ резко меняется фазовый портрет. Расчеты показывают, что при $a = 0,5$ возникает неограниченный рост амплитуды колебаний траекторий всех компонент решения системы СДУ (12.3) со временем.

На рис. 12.13–12.15 даны те же графики, но с шумом интенсивности $\sigma = 0,8$, которые не соответствуют детерминированным графикам ни по форме, ни по размерам.

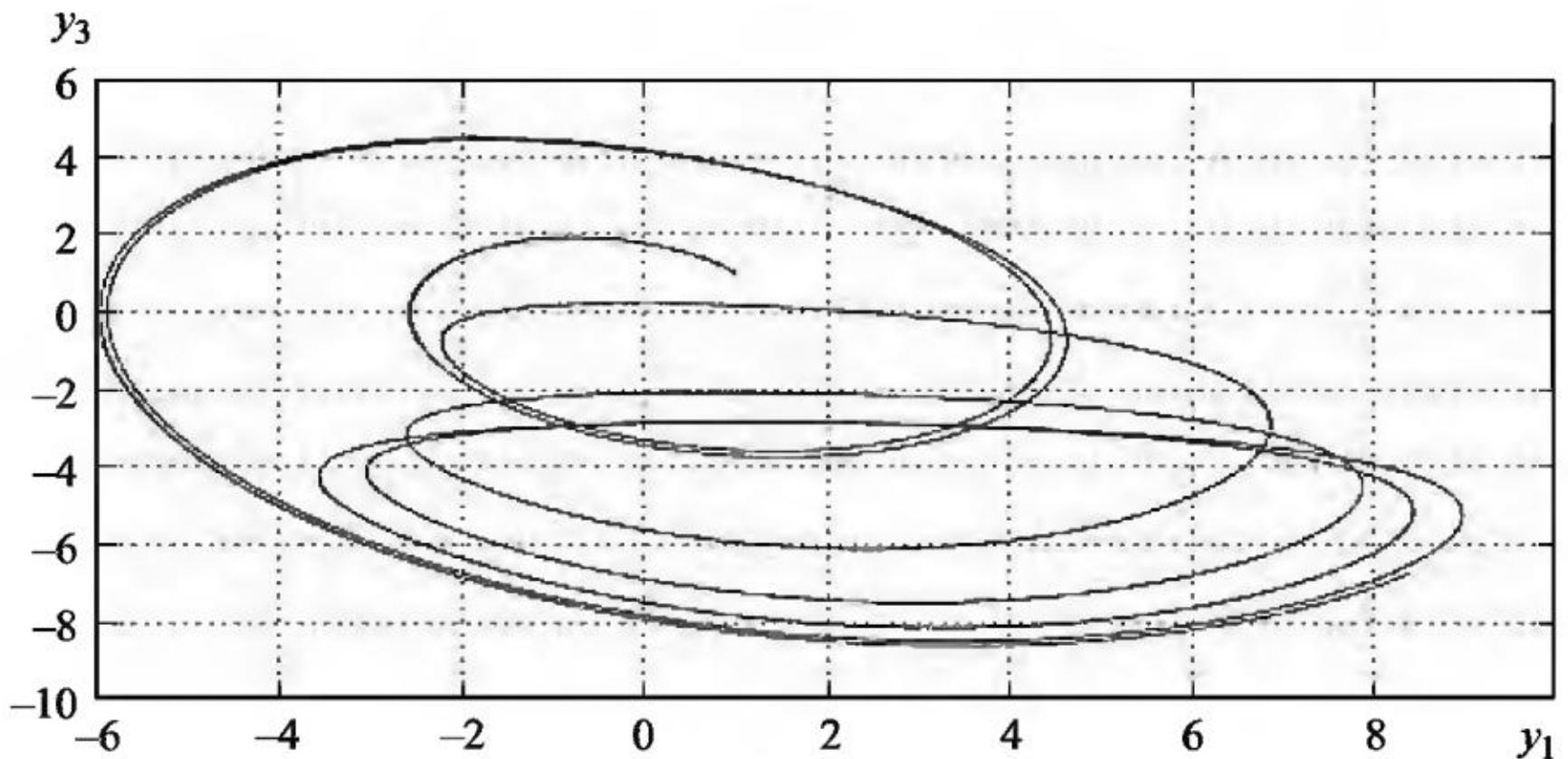


Рис. 12.12

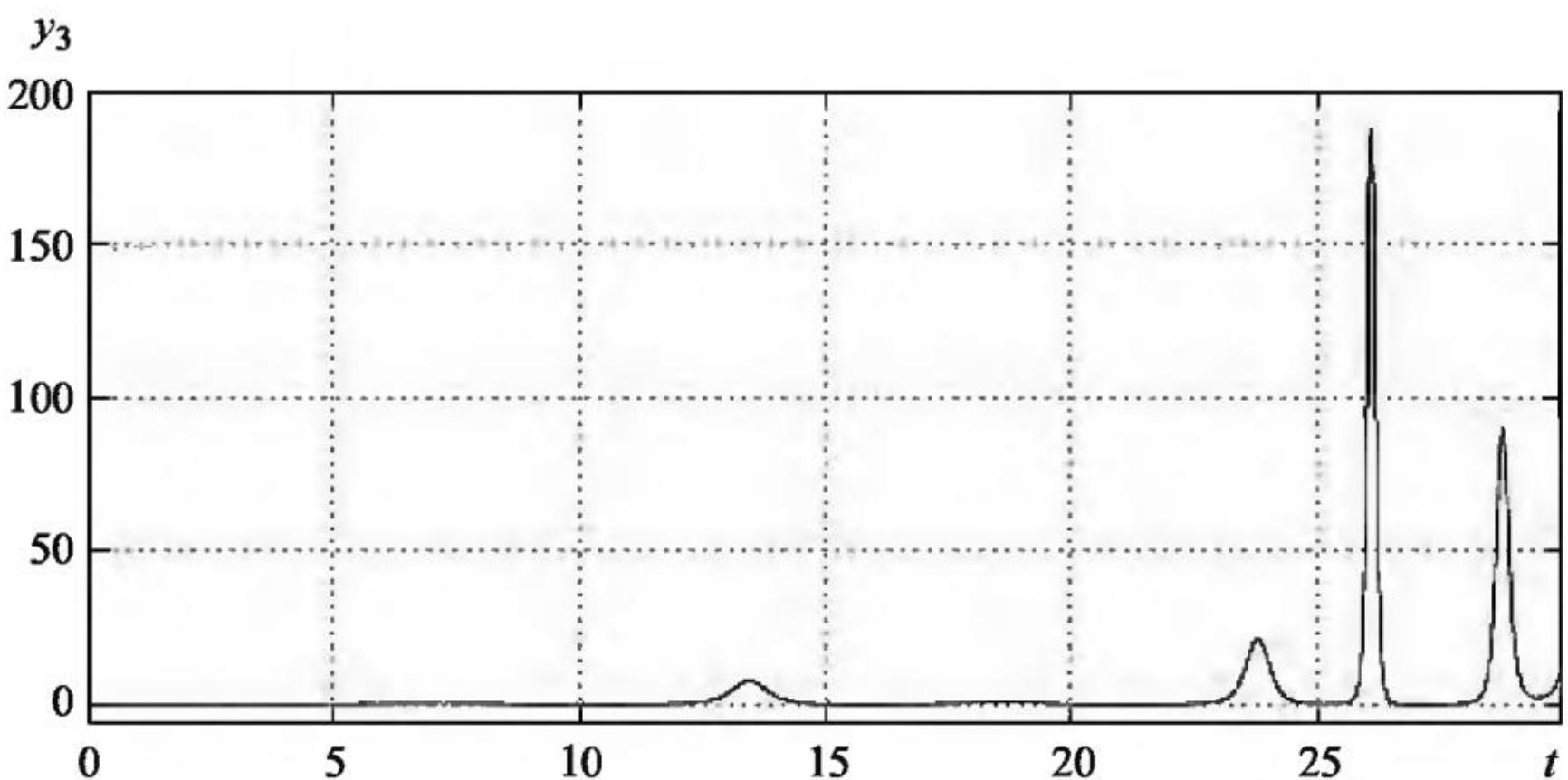


Рис. 12.13

На рис. 12.16 приведены графики оценок дисперсии $Dy_2(t)$ для разных значений параметра a . В отличие от аттрактора Лоренца, дисперсия $Dy_2(t)$ для аттрактора Рёсслера растет экспоненциально без выхода на стационарный уровень.

На рис. 12.17 приведен график ЧИК (вид сверху) для компоненты y_2 решения системы СДУ (12.3) для $a = 0,4$.

На рис. 12.18 и 12.19 представлены графики ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (12.3) при $a = 0$ и $0,4$.

Как и в аттракторе Лоренца, здесь нет резких различий в форме графиков ЧФП для разных значений параметра a . Отметим, что увеличение интенсивности шума в СДУ часто вызывает только увеличение размеров ЧФП, но не меняет их форму.

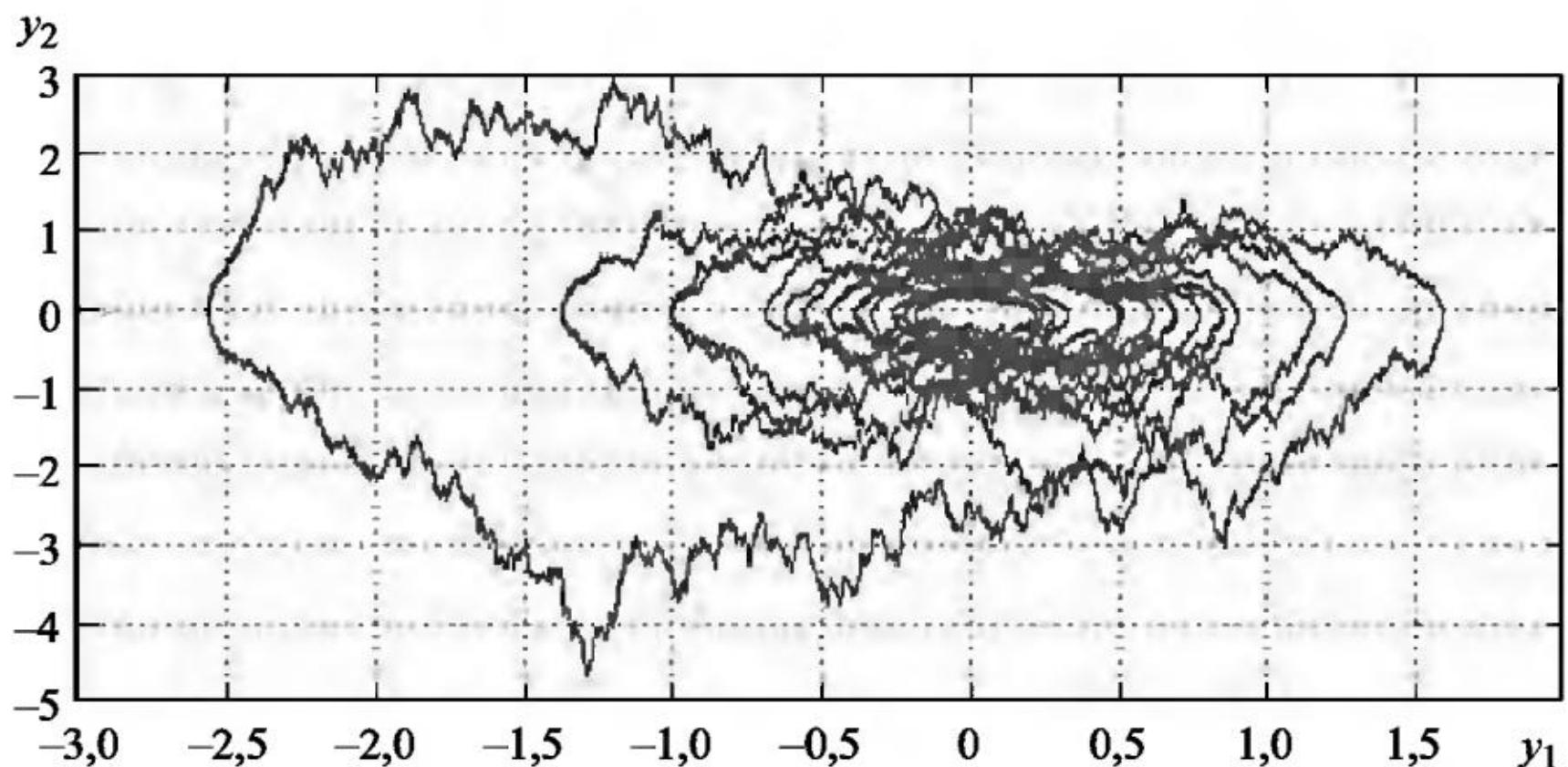


Рис. 12.14

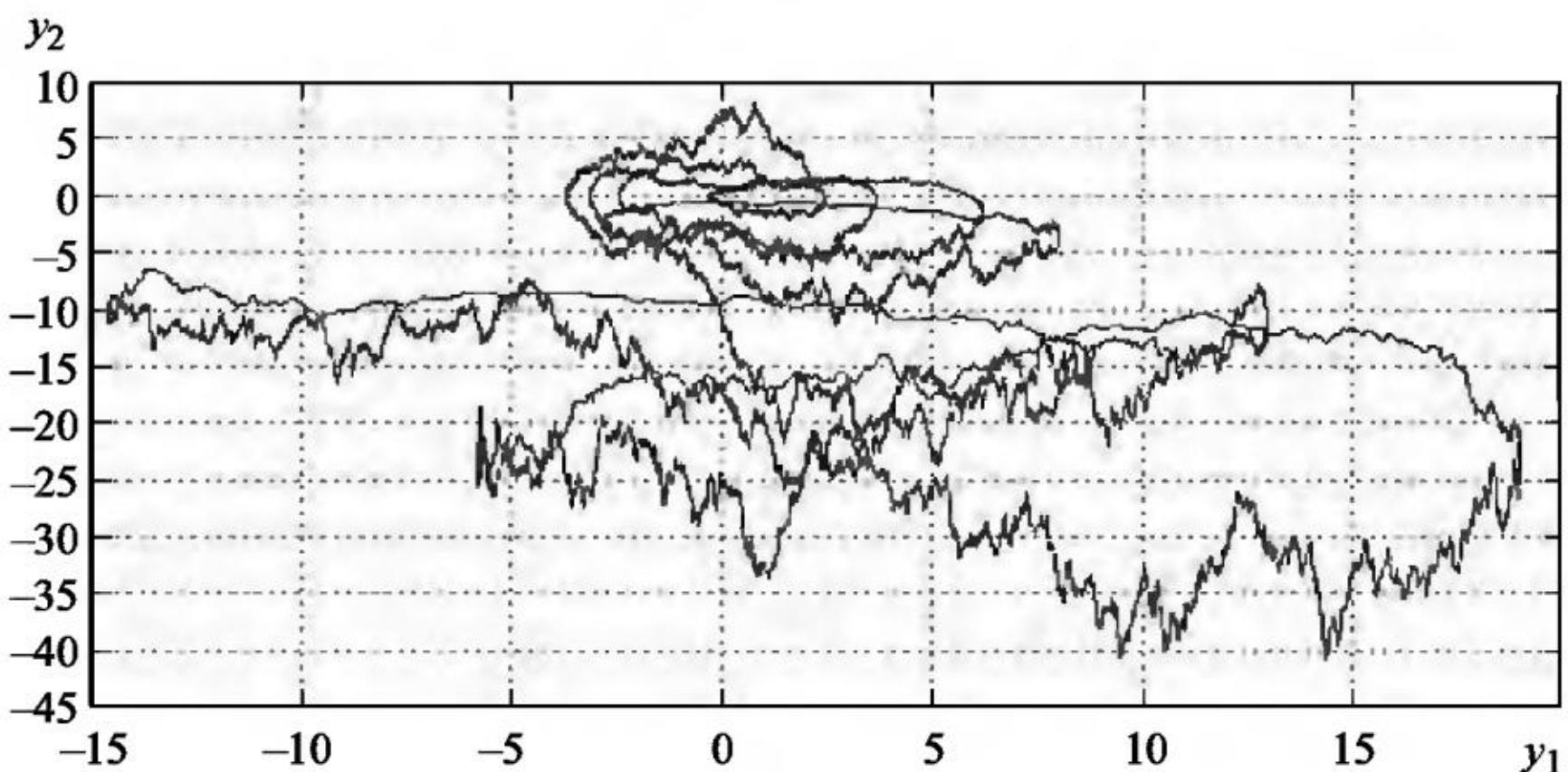


Рис. 12.15

$D(y_2, a)$

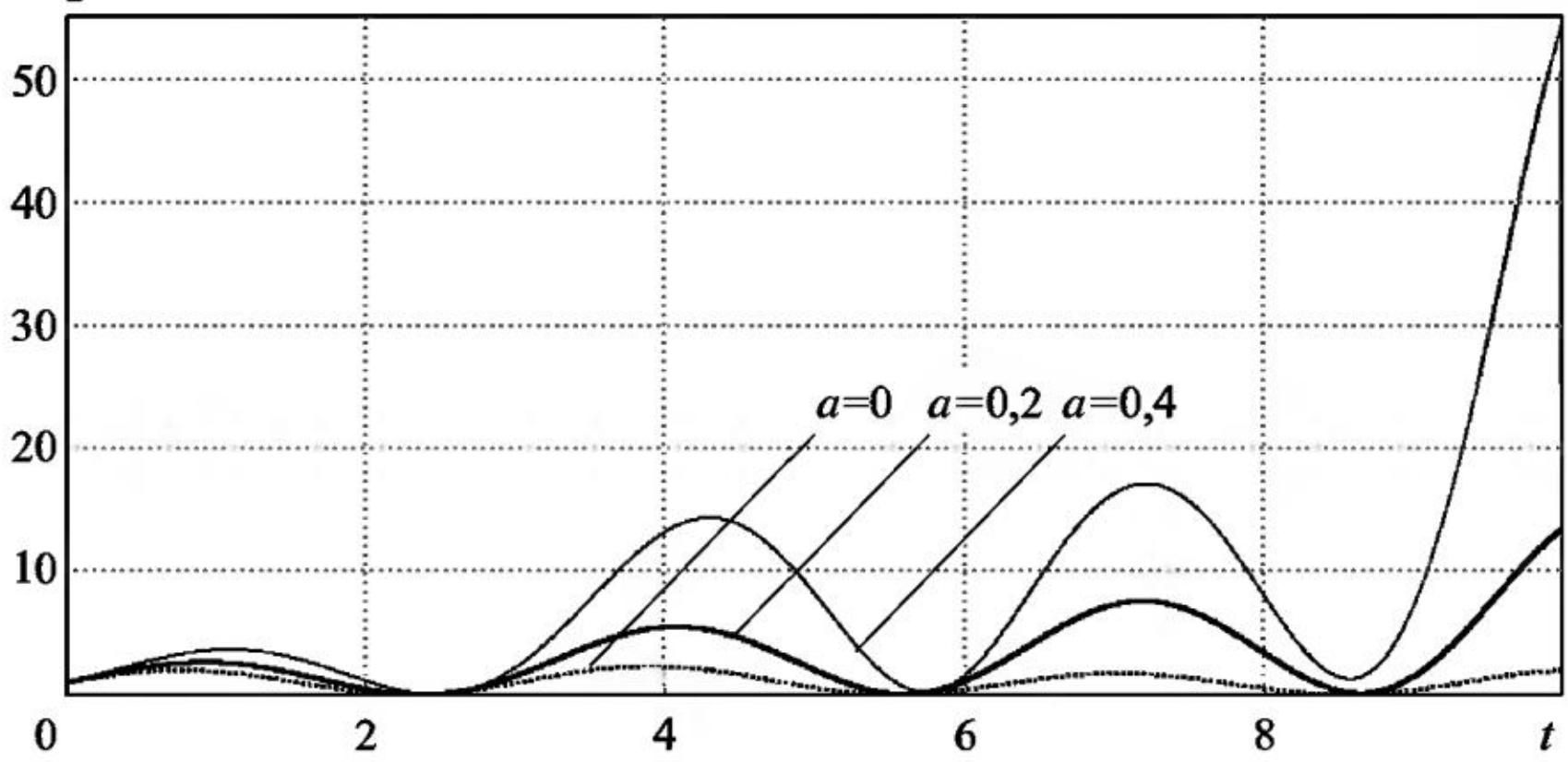


Рис. 12.16

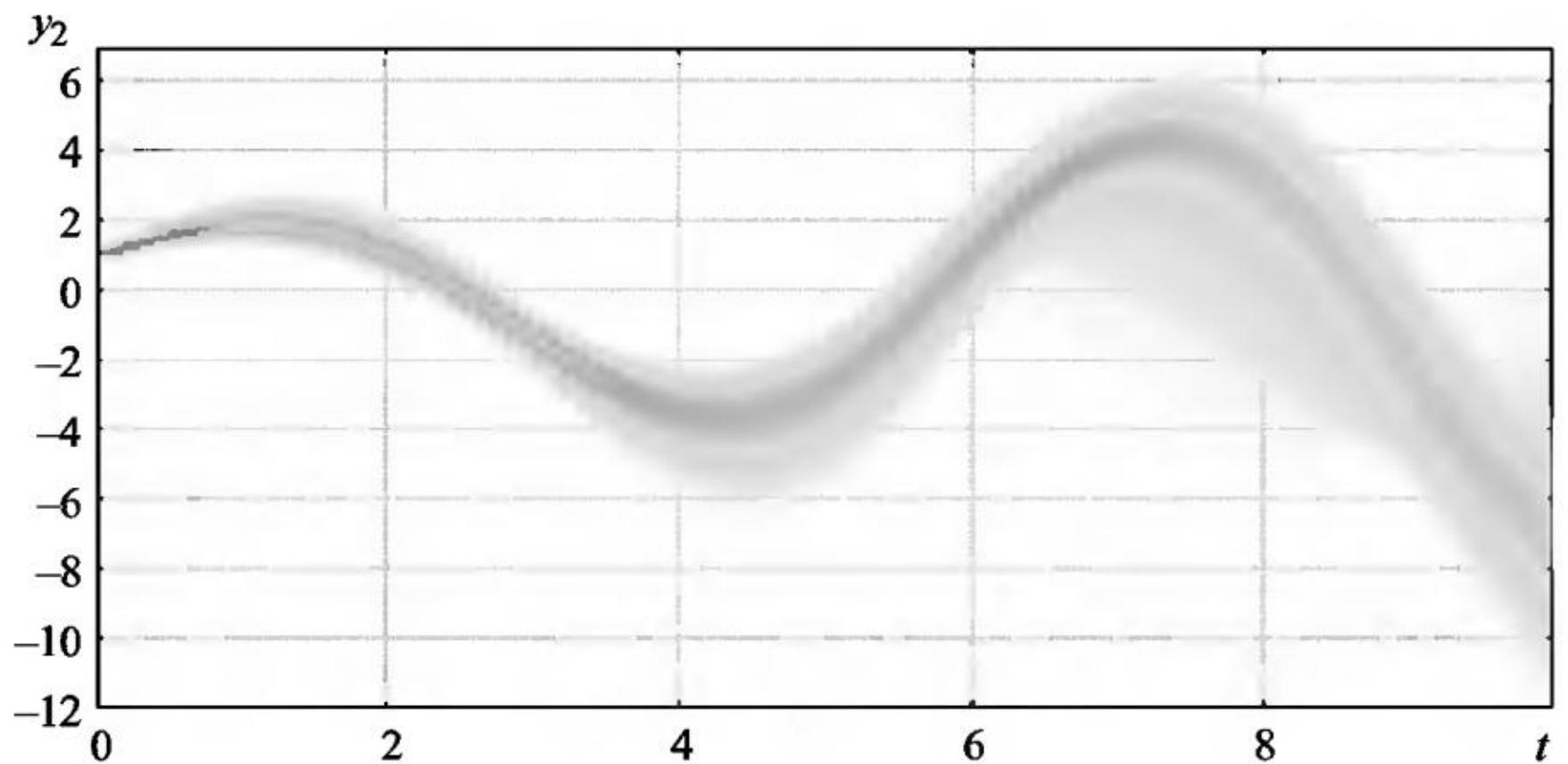


Рис. 12.17

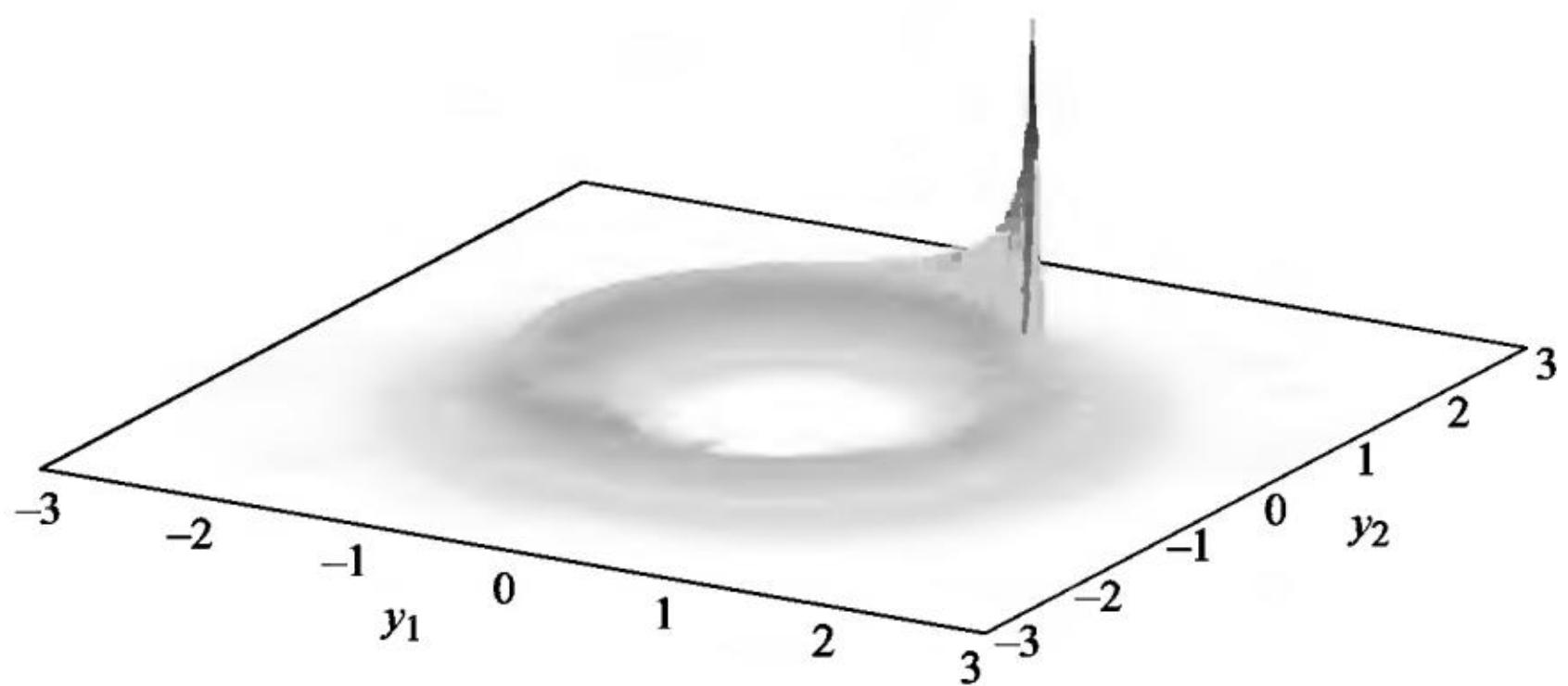


Рис. 12.18

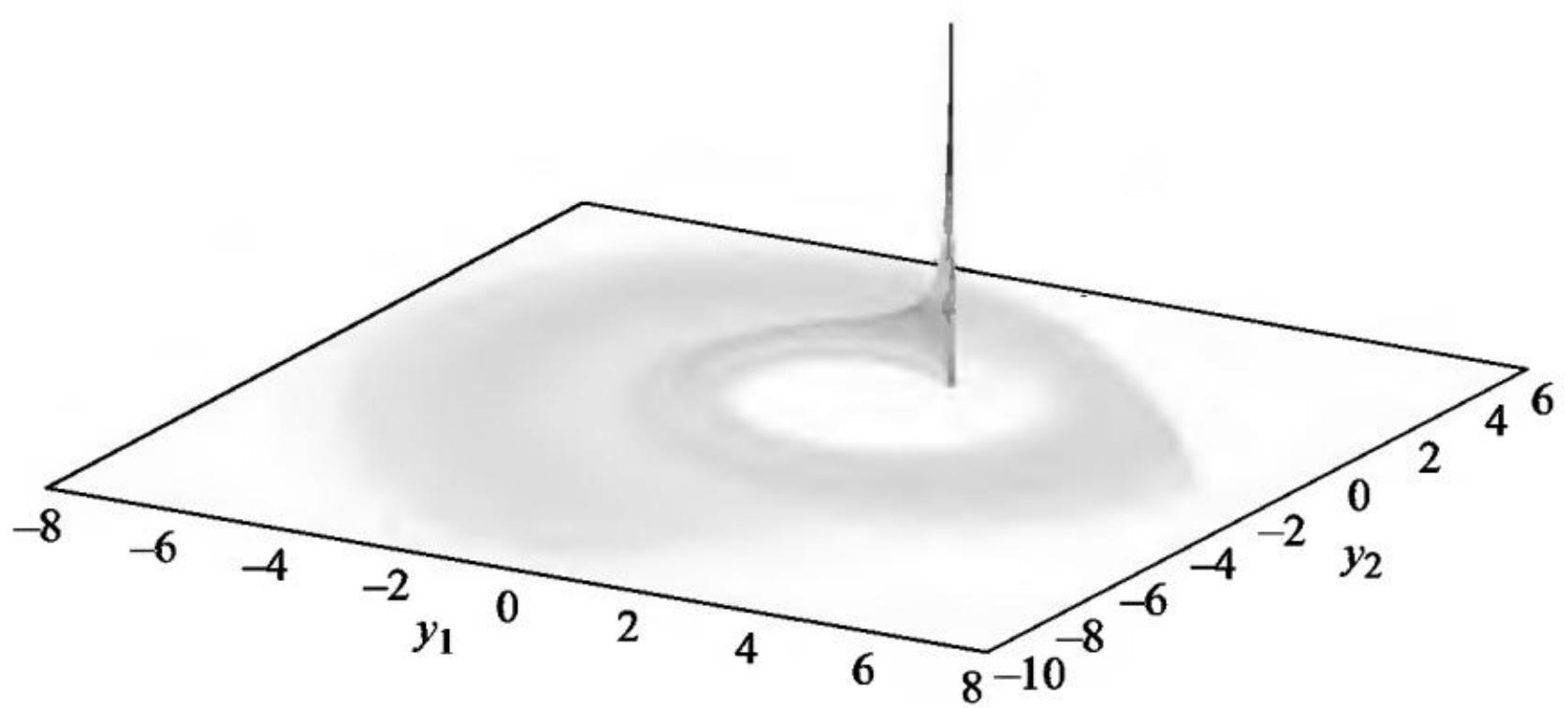


Рис. 12.19

Пример 12.3. Уравнения Рикитаки описывают работу спаренных динамо с учетом вязкого трения. В этой системе имеется пять состояний равновесия: четыре устойчивых фокуса-узла и одно седло. Установлены бифуркации рождений пространственных перекрученных циклов, соответствующие удвоению периода колебаний динамической переменной и приводящие к хаотическим колебаниям при увеличении отношения коэффициентов трения [21]. Уравнения Рикитаки с учетом внешних случайных возмущений записываются в виде системы СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= (-2,3y_1 + y_2y_3)dt, & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= (-2,3y_2 + y_1y_4)dt, & y_2(0) &= 1, \\ dy_3 &= (r - y_1y_2 - 0,034y_3)dt + 0,4dw_1(t), & y_3(0) &= 0, \\ dy_4 &= (r - y_1y_2 - 0,001y_4)dt + 0,4dw_2(t), & y_4(0) &= 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Здесь y_1, y_2 – угловые скорости двух дисков в магнитном поле, y_3, y_4 – возбуждаемые токи. Как видно из рис. 12.20 и 12.21, где приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_3) решения сопутствующей системы ОДУ при $r = 0,1$ и 1 соответственно, режимы колебаний для разных r совершенно различные.

На рис. 12.22 и 12.23 приведены графики интегральной кривой компоненты y_1 и фазовой траектории пары компонент (y_1, y_3) решения системы СДУ (12.4) при $r = 1$, где видим переходы режимов колебаний из положительной области плоскости в отрицательную и обратно.

На рис. 12.24 представлен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_3) решения системы СДУ (12.4) при $r = 1$, из ко-

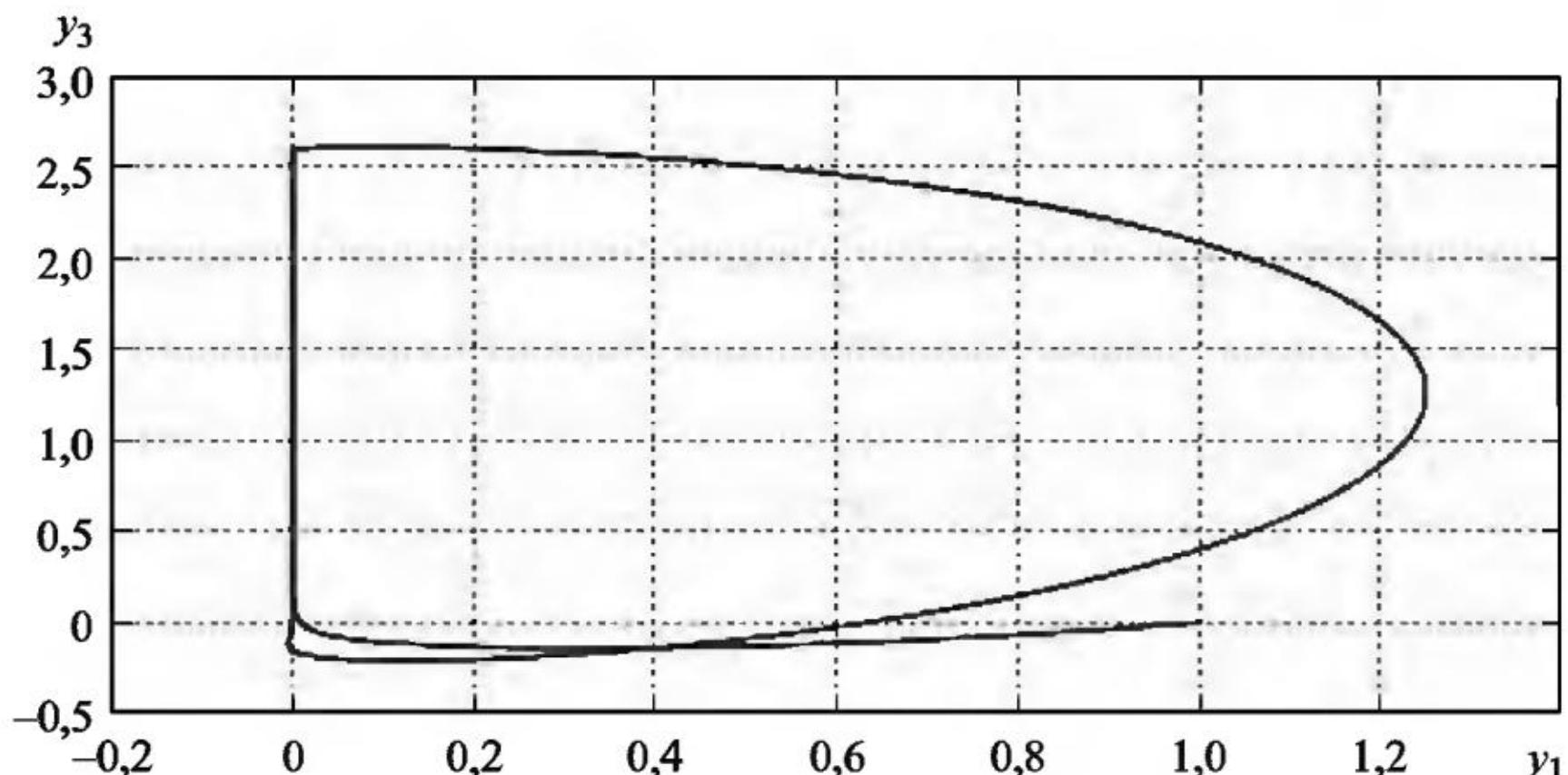


Рис. 12.20

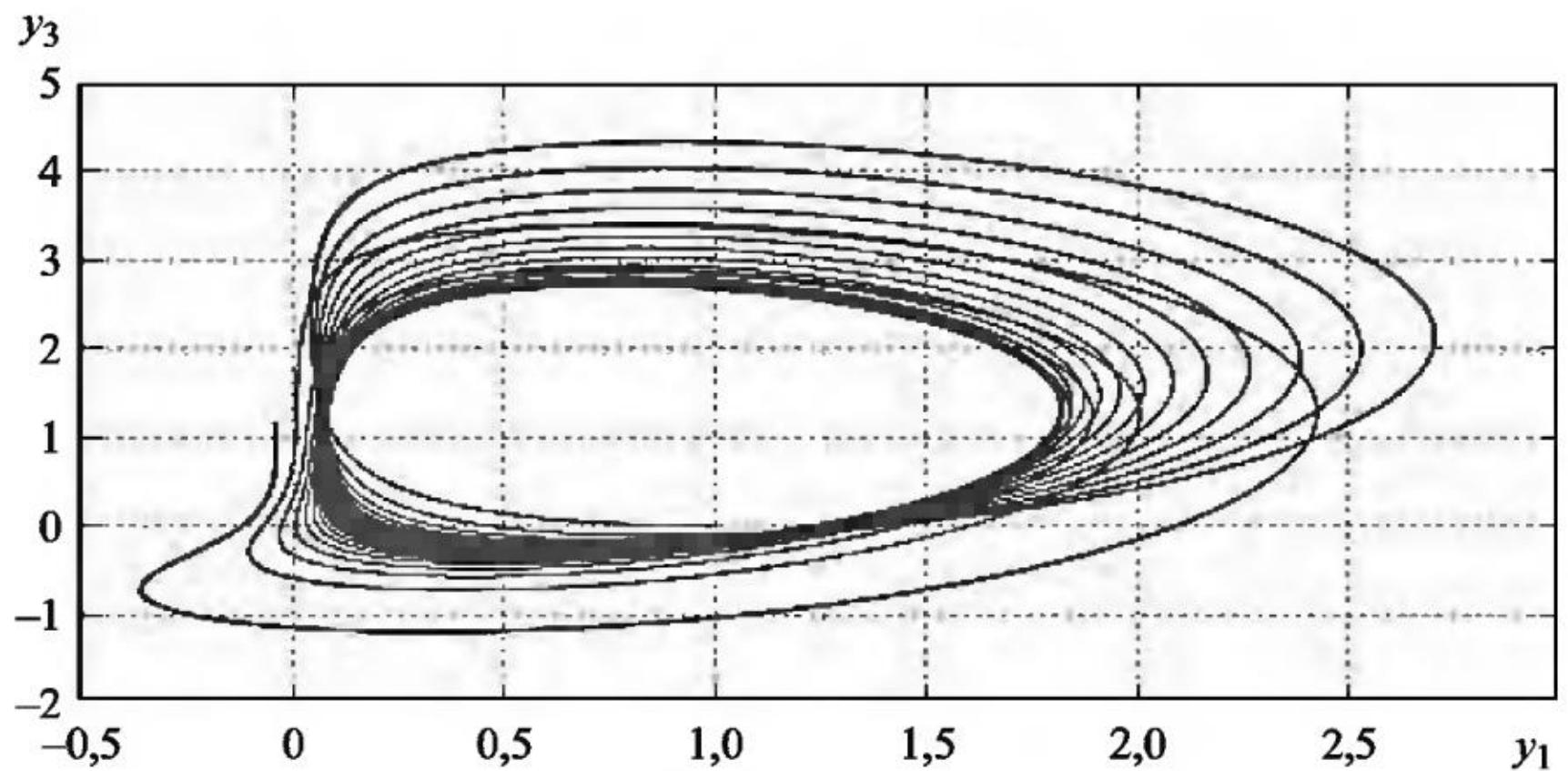


Рис. 12.21

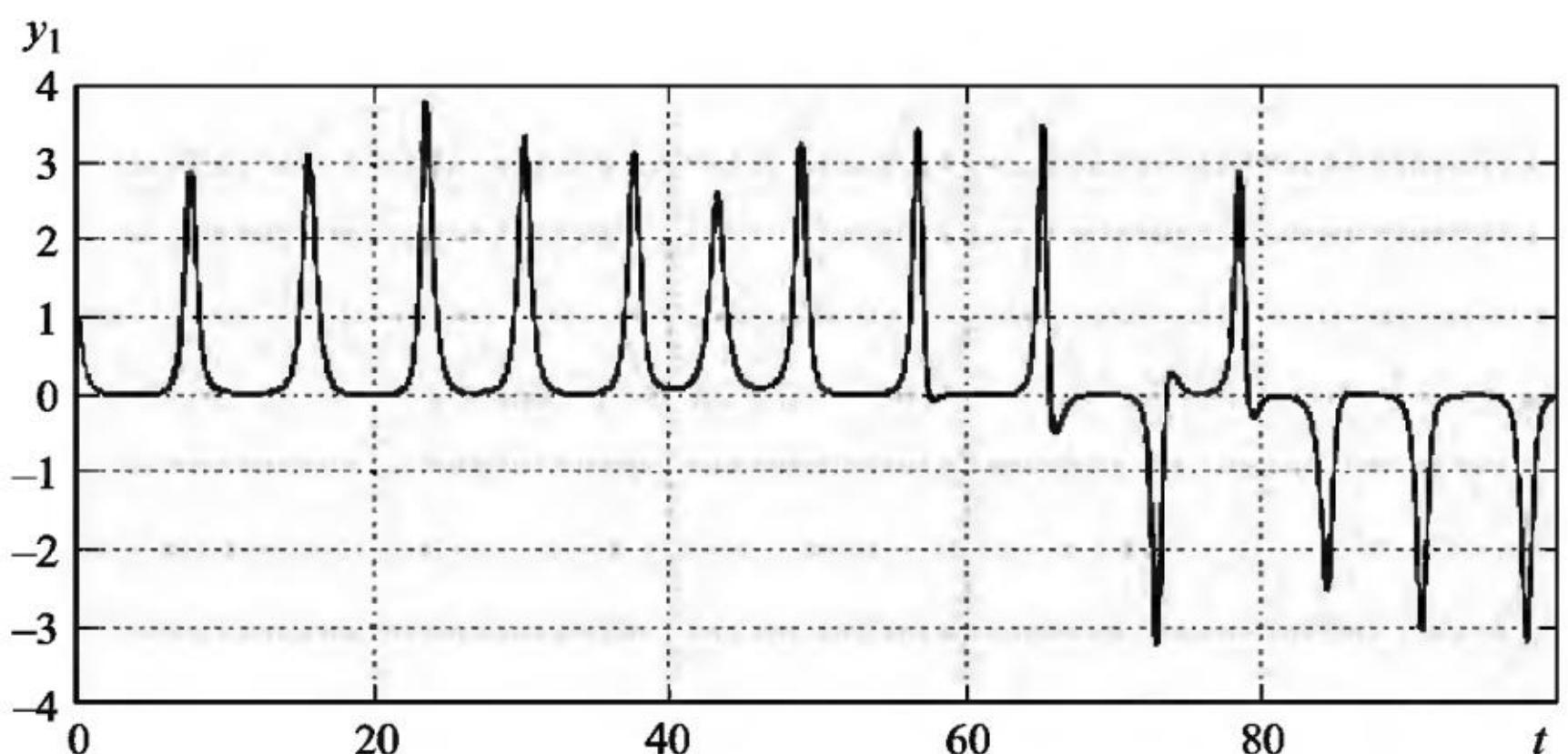


Рис. 12.22

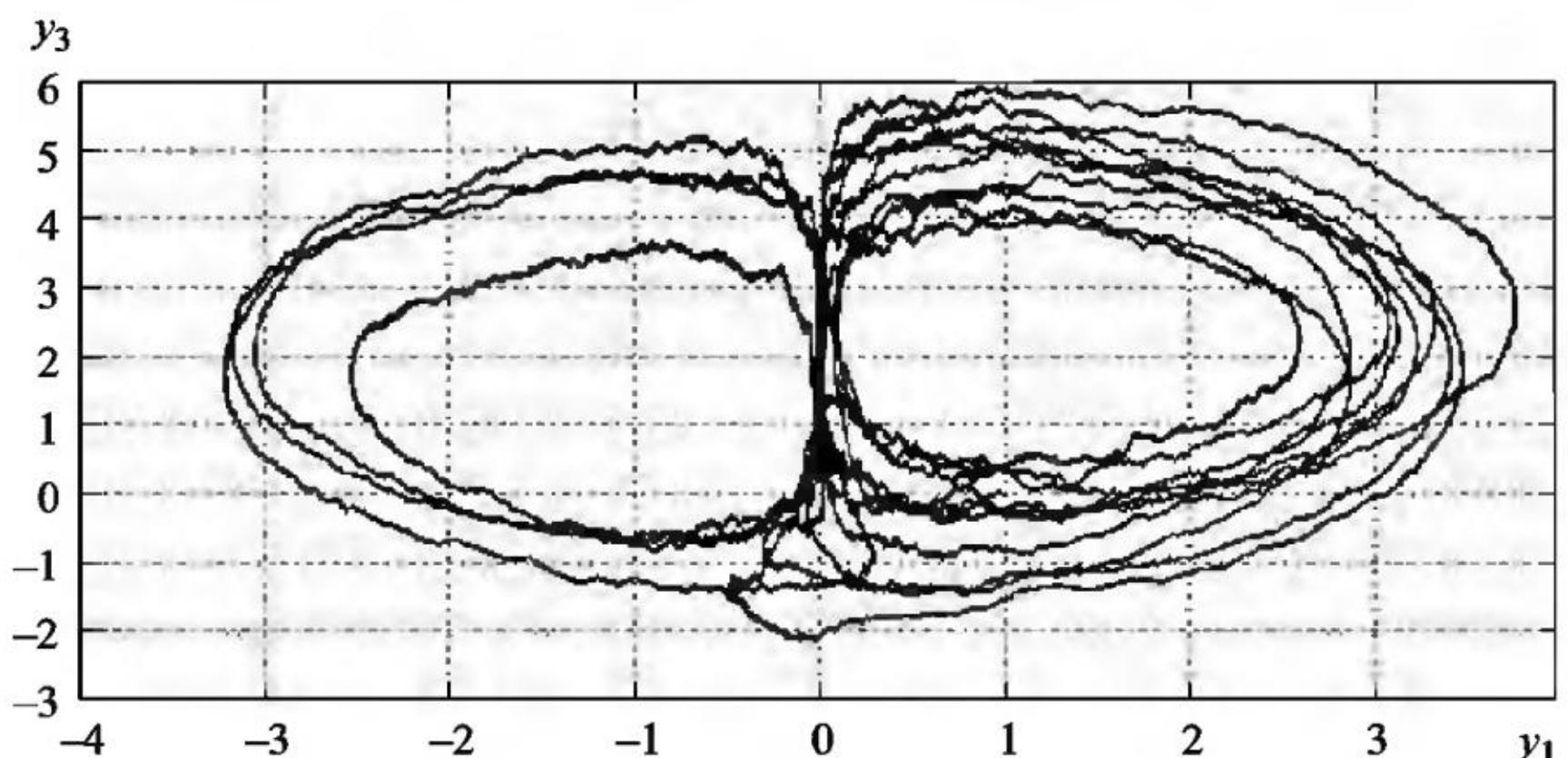


Рис. 12.23

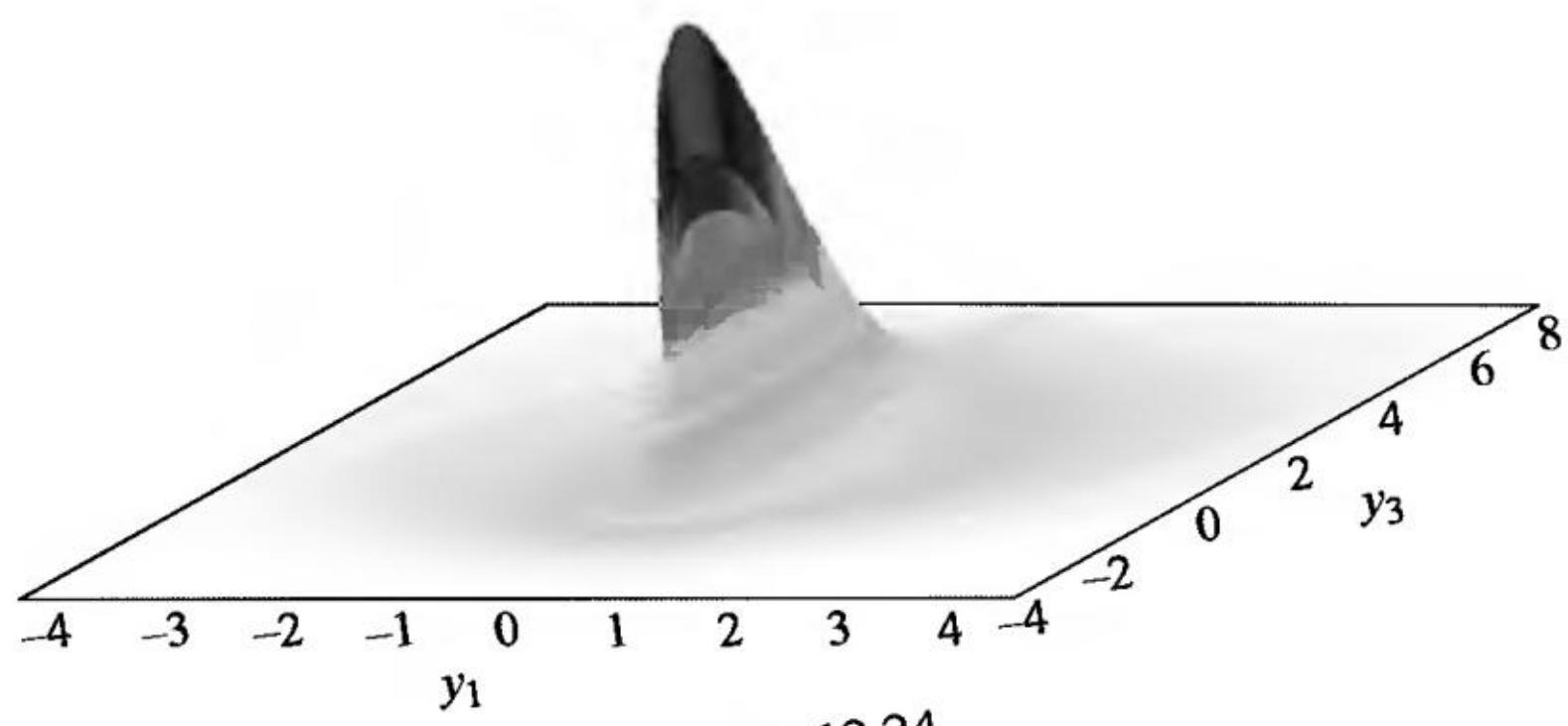


Рис. 12.24

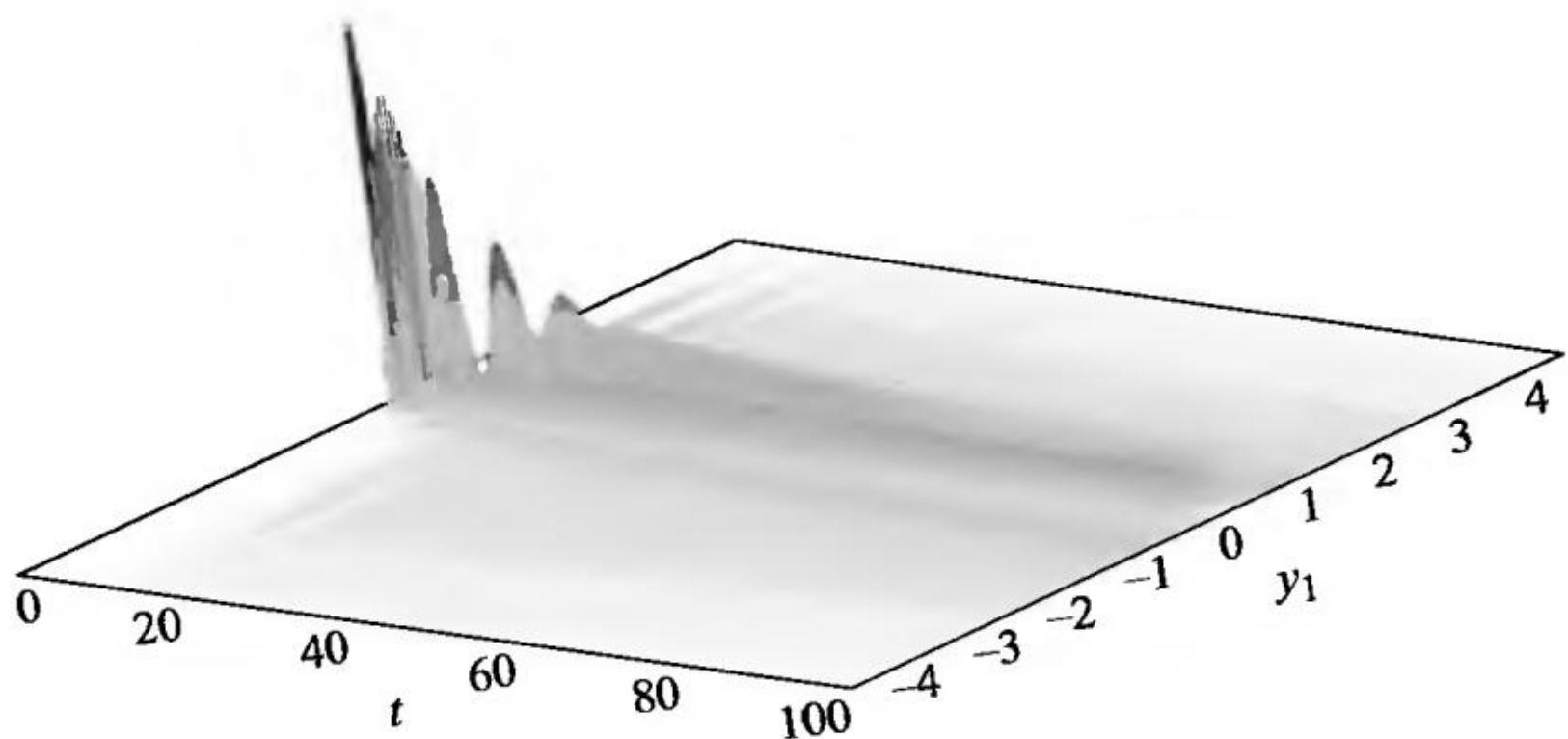


Рис. 12.25

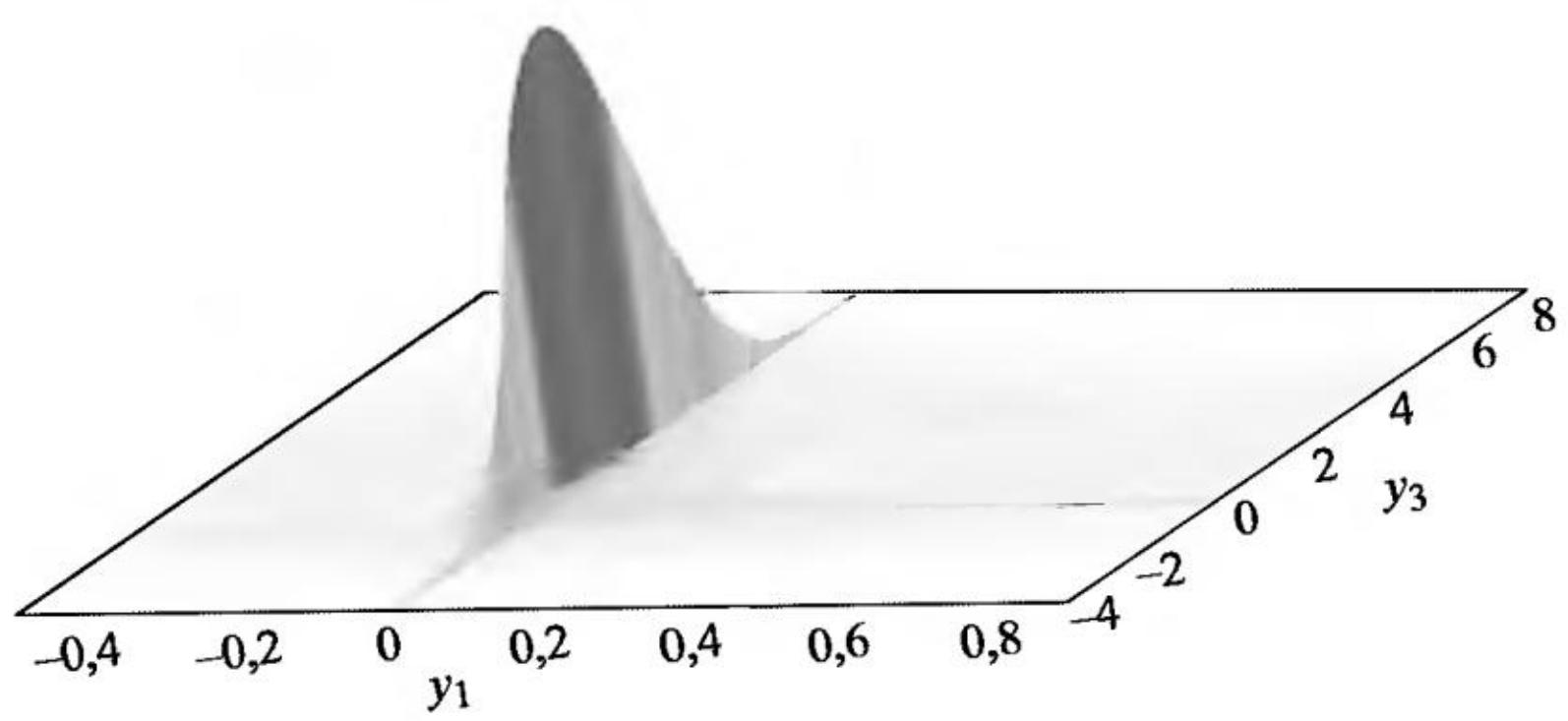


Рис. 12.26

торого можно увидеть, например, асимметричность «холма» и его размеры.

На рис. 12.25 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 решения системы СДУ (12.4) для $r = 1$, обобщающий график на рис. 12.22.

Для сравнения на рис. 12.26 представлен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_3) решения системы СДУ (12.4) при $r = 0,1$, который значительно отличается по форме от графика на рис. 12.24. Близкое к гауссову распределение компоненты y_3 имеет место при значениях компоненты y_1 вблизи нуля, а это означает, что при $r = 0,1$ все смоделированные траектории решения имеют идентичное поведение, соответствующее графику на рис. 12.20.

13. ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ. ГИРОСКОПЫ

Аэрокосмический аппарат – это летательный аппарат (ЛА), способный совершать управляемое движение как в атмосфере, так и в околоземном космическом пространстве на гиперзвуковых скоростях движения. Особый научный интерес представляет разработка методов формирования управления траекториями аэрокосмических аппаратов на атмосферных участках полета, при этом требования к точности выполнения заданных конечных условий достаточно высоки. Общая задача управлением движения ЛА заключается в определении параметров траектории (задача навигации), формирования управления движением центра масс (задача наведения) и формирования управления движением относительно центра масс (задача ориентации и стабилизации). Управление траекторией ЛА осуществляется под воздействием таких возмущающих факторов, как отклонение начальных условий движения от заданных значений, отклонений характеристик атмосферы от стандартных, отклонений аэродинамических характеристик ЛА от расчетных, ошибок реализации управляющих воздействий [22].

Случайные факторы или воздействия вызывают в процессе полета ЛА отклонения параметров движения от их программных значений. По причинам возникновения и изменения во времени случайные факторы удобно разделять на воздействия, вызванные внешними по отношению к ЛА причинами, воздействия, вызванные внутренними процессами, происходящими в ЛА, и разброс исходных данных. К внешним причинам относятся неточные знания внешних сил, действующих на ЛА во время полета. Решение о том, что считать возмущающим воздействием, зависит от требований практического использования результатов расчетов. Внутренние причины, вызывающие возмущающие воздействия, обусловливаются неидеальностью системы управления движением и ее приборной реализации, что приводит к отклонению формируемой управляющей силы от программных значений. Для большинства возмущающих воздействий статистические характеристики либо неизвестны, либо известны недостаточно полно, поэтому необходимо делать предположения о характере недостающих данных.

Пример 13.1. Модель продольного движения стабилизированной по крену ракеты. Динамика полета управляемых баллистических ракет значительно отличается от динамики ЛА других классов, так как полет включает два участка движения: управляемый и баллистический. Движение ЛА на управляемом участке определяется целенаправленным воздействием управляемых сил, на баллистическом участке – движение по инерции за счет накопленного запаса кинетической энергии при наличии сил гравитационного притяжения и аэродинамического сопротивления. Одна из основных задач баллистики состоит в изучении факторов, влияющих на рассеивание траекторий пускаемых ракет, рассмотрением способов уменьшения рассеивания и повышения точности наведения. Простая модель продольного движения стабилизированной по крену ракеты задается с помощью системы ОДУ вида [23]

$$m \frac{dV_P}{dt} = P \cos(\alpha) - C_T \sin(\theta) - X_\alpha, \quad (13.1)$$

$$m V_P \frac{d\theta}{dt} = P \sin(\alpha) - C_T \cos(\theta) + Y_\alpha,$$

$$\frac{dU}{dt} = \omega_z,$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z,$$

$$\frac{dH}{dt} = V_P \sin(\theta),$$

$$\frac{dm}{dt} = -\beta.$$

Введем обозначения: $y_1 = V_P$ – скорость полета ракеты, $y_2 = \theta$ – скоростной угол тангенса, $y_3 = U$ – угол тангенса, $\alpha = U - \theta$ – угол атаки, $y_4 = \omega_z$ – угловая скорость вращения ракеты вокруг поперечной оси, $y_5 = H$ – высота полета ракеты, $y_6 = m$ – масса ракеты, P – сила тяги двигателя, C_T – сила тяжести, X_α – сила лобового сопротивления, Y_α – аэродинамическая подъемная сила, M_z – сумма моментов, поворачивающих ракету вокруг поперечной оси, I_z – момент инерции ракеты относительно поперечной оси. Учитывая внешние случайные шумы и задавая конкретные значения параметров, модель продольного движения стабилизированной по крену ракеты запишем в виде системы СДУ

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= \frac{1}{y_6} \left(0,1 \cos(y_3 - y_2) - 10^{-3} \sin(y_2) - 10^{-4} \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), \quad y_1(0) = 1, \\
 dy_2 &= \frac{1}{y_1 y_6} \left(0,1 \sin(y_3 - y_2) - 10^{-3} \cos(y_2) + a \right) dt + \sigma_2 dw_2(t), \quad y_2(0) = 0, \\
 dy_3 &= y_4 dt, \quad y_3(0) = 0, \\
 dy_4 &= 10^{-4} dt + \sigma_3 dw_3(t), \quad y_4(0) = 0, \\
 dy_5 &= y_1 \sin(y_2) dt, \quad y_5(0) = 1, \\
 dy_6 &= -10^{-4} dt, \quad y_6(0) = 1.
 \end{aligned} \tag{13.2}$$

При численных расчетах моделировалось $N_{\text{tr}} = 10^6$ траекторий с шагом интегрирования $h = 10^{-5}$ на интервале $[0, 3500]$.

На рис. 13.1 и 13.2 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (13.2) без шумов при значениях параметра $a = 10^{-2}$ и $a = 10^{-4}$, из которых видно, что скорость ракеты и амплитуда колебаний скоростного угла тангажа со временем в первом случае увеличиваются, а во втором – уменьшаются.

На рис. 13.3 и 13.4 приведены графики ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (13.2) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значениях параметра $a = 10^{-2}$ и $a = 10^{-4}$.

Графики ЧФП на рис. 13.3 и 13.4 наглядно показывают, как при разных значениях параметра a и при влиянии шумов одина-

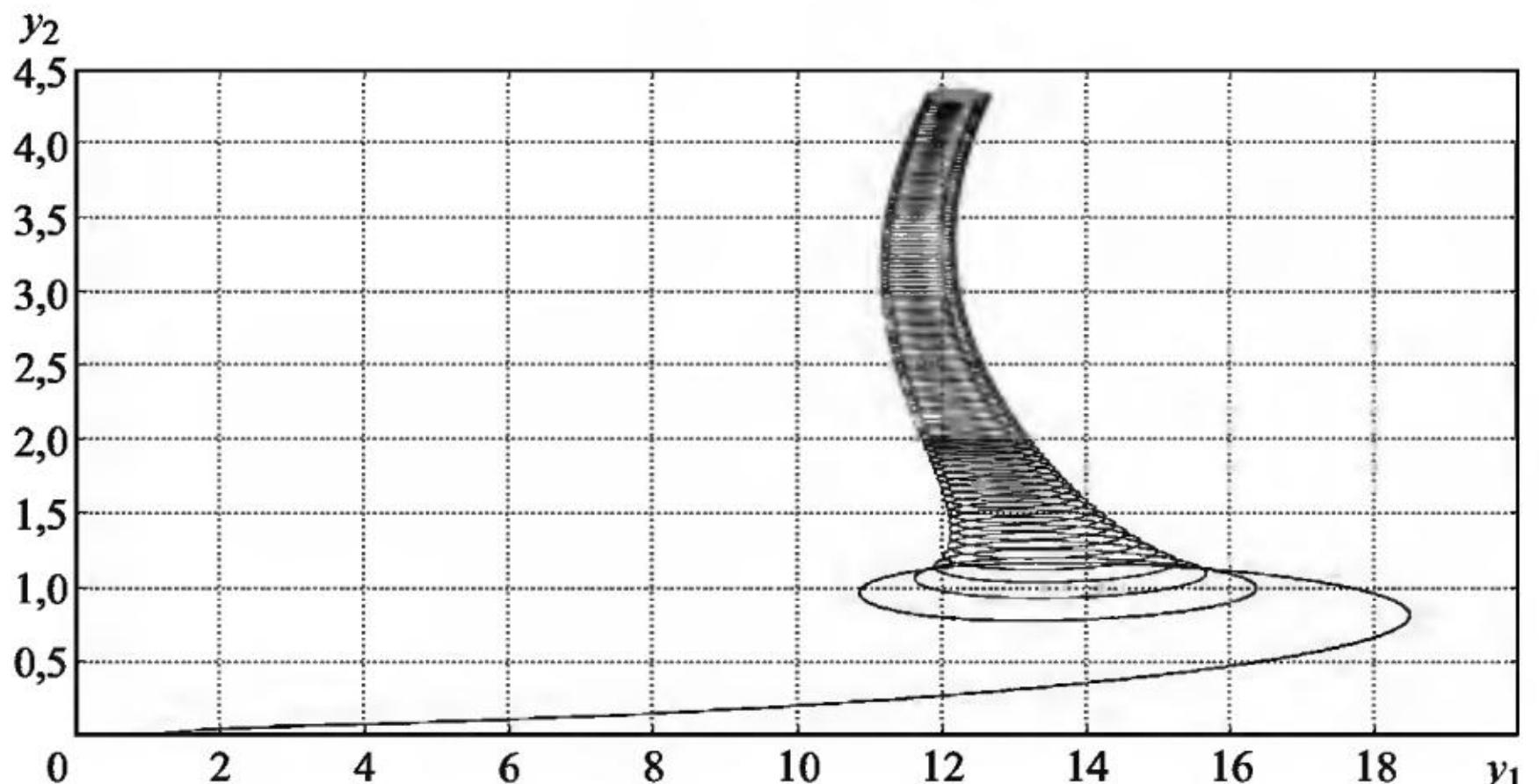


Рис. 13.1

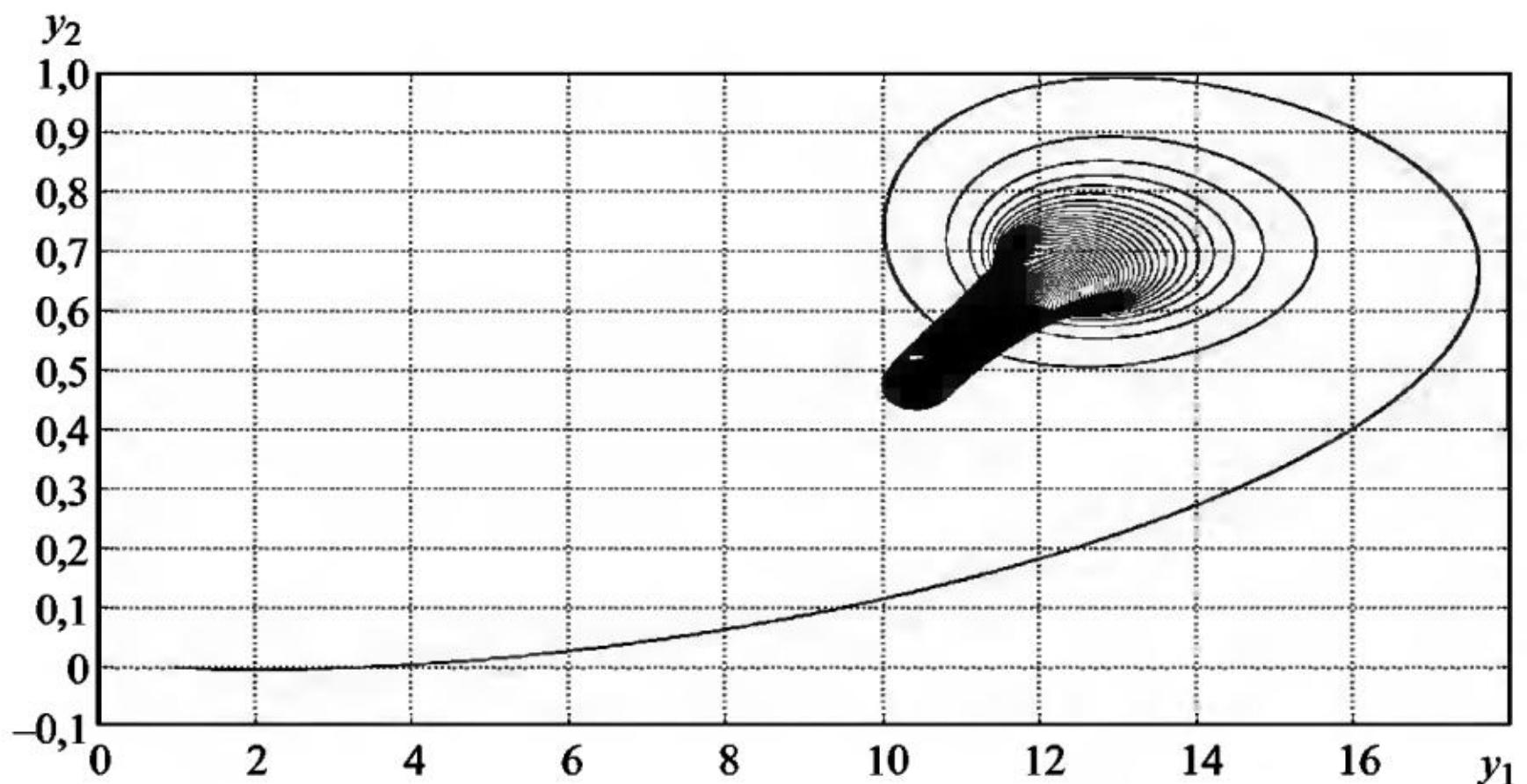


Рис. 13.2

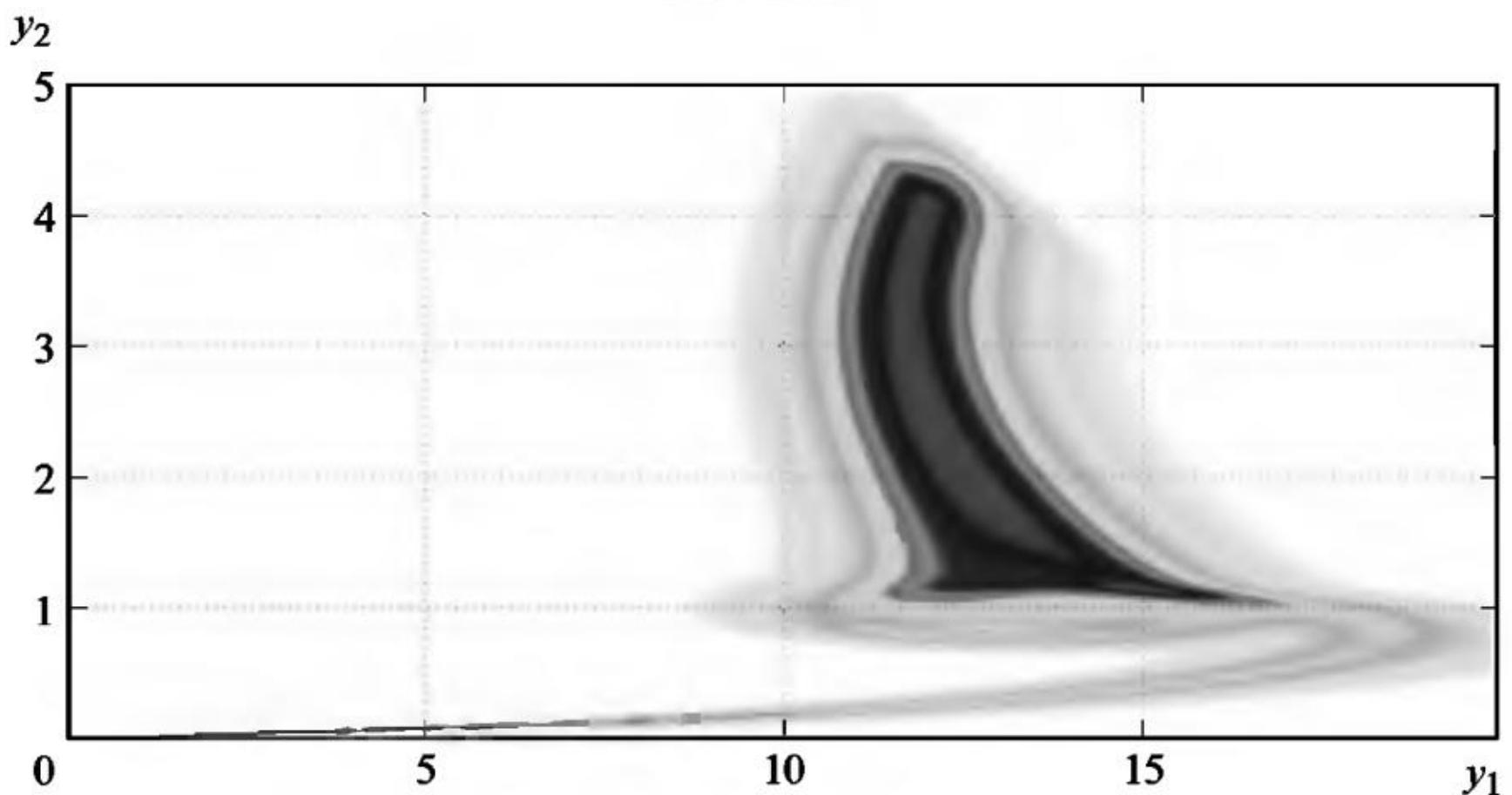


Рис. 13.3

ковой интенсивности отклоняются всевозможные траектории численного решения системы СДУ (13.2) от фазового портрета без шумов.

На рис. 13.5 приведен график ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (13.2) с шумами большей интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5 \cdot 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-4}$.

Графики ЧФП на рис. 13.4 и 13.5 показывают, как при одном и том же значении параметра a и при влиянии шумов разной интенсивности все возможные траектории численного решения системы СДУ (13.2) отклоняются от фазового портрета без шумов.

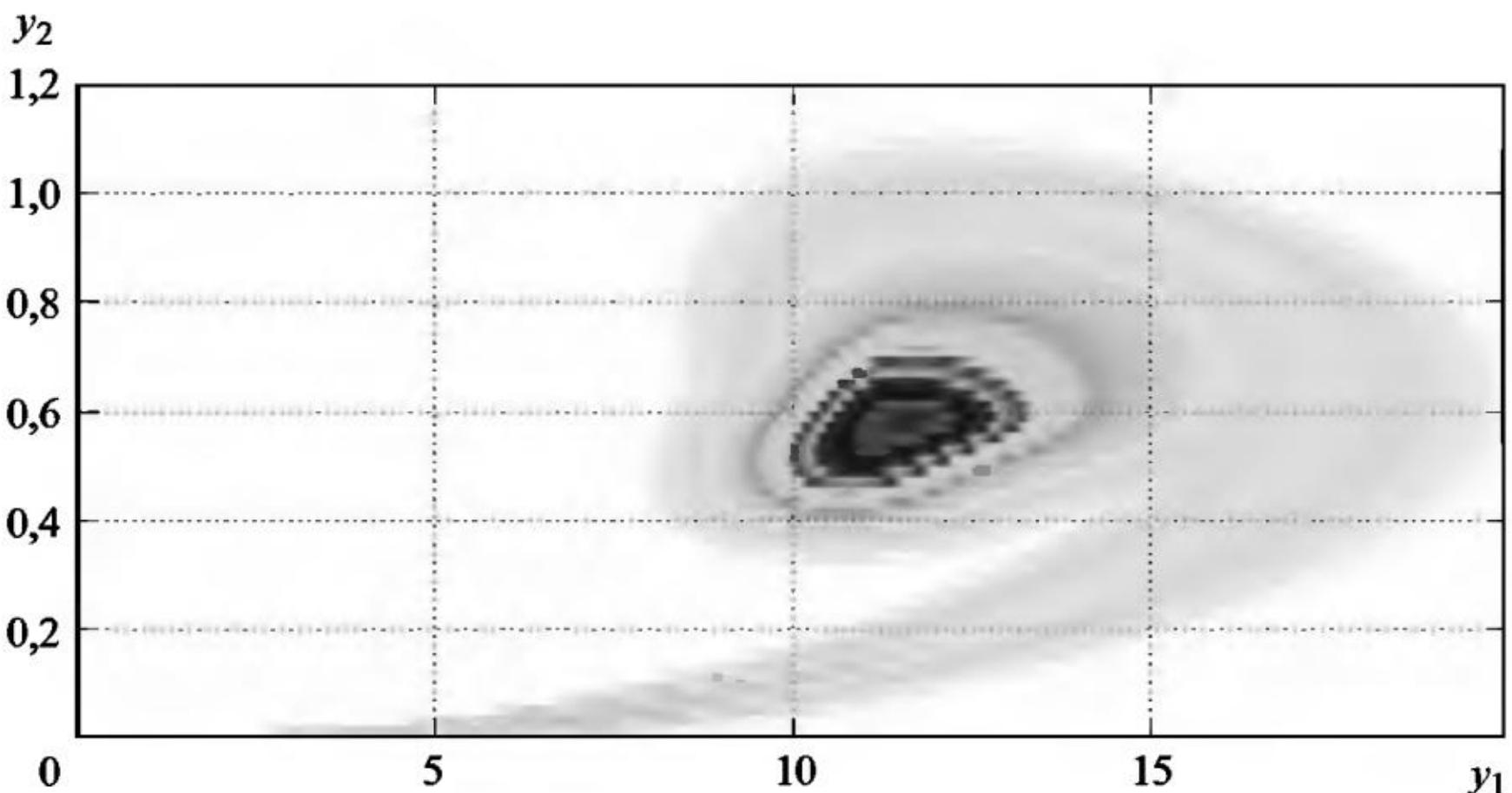


Рис. 13.4

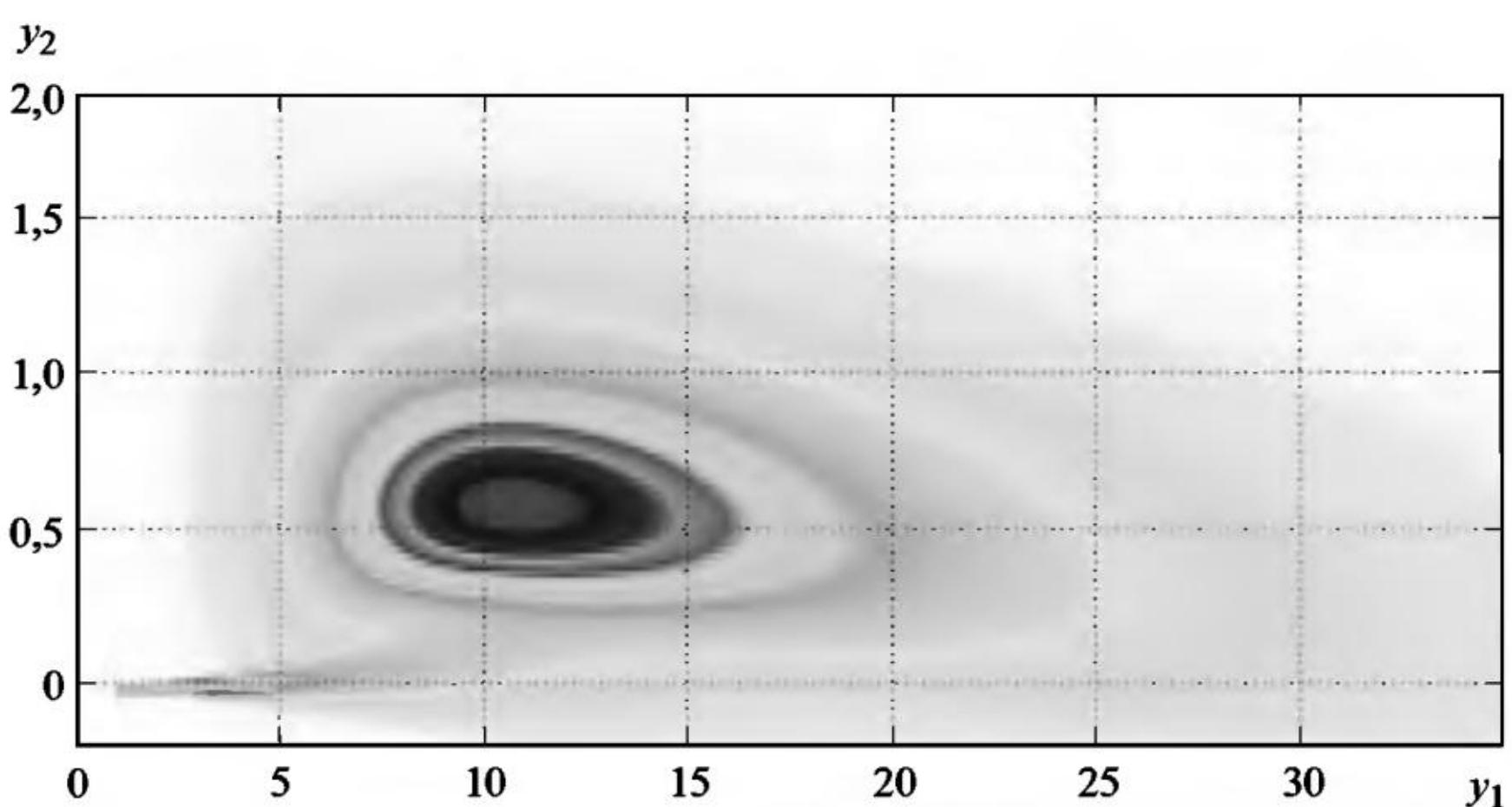


Рис. 13.5

Как видно из этих рисунков, графики ЧФП пары компонент (y_1 , y_2) различаются и по форме и по размеру.

На рис. 13.6 и 13.7 приведены графики интегральной кривой компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.2) без шумов при значениях параметра $a = 10^{-2}$ и $a = 10^{-4}$.

Из графиков на рис. 13.6 и 13.7 видно, что при уменьшении аэродинамической подъемной силы качественно меняется поведение скоростного угла тангажа, т. е. сильный рост меняется на медленное убывание.

На рис. 13.8 и 13.9 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_2 численного решения

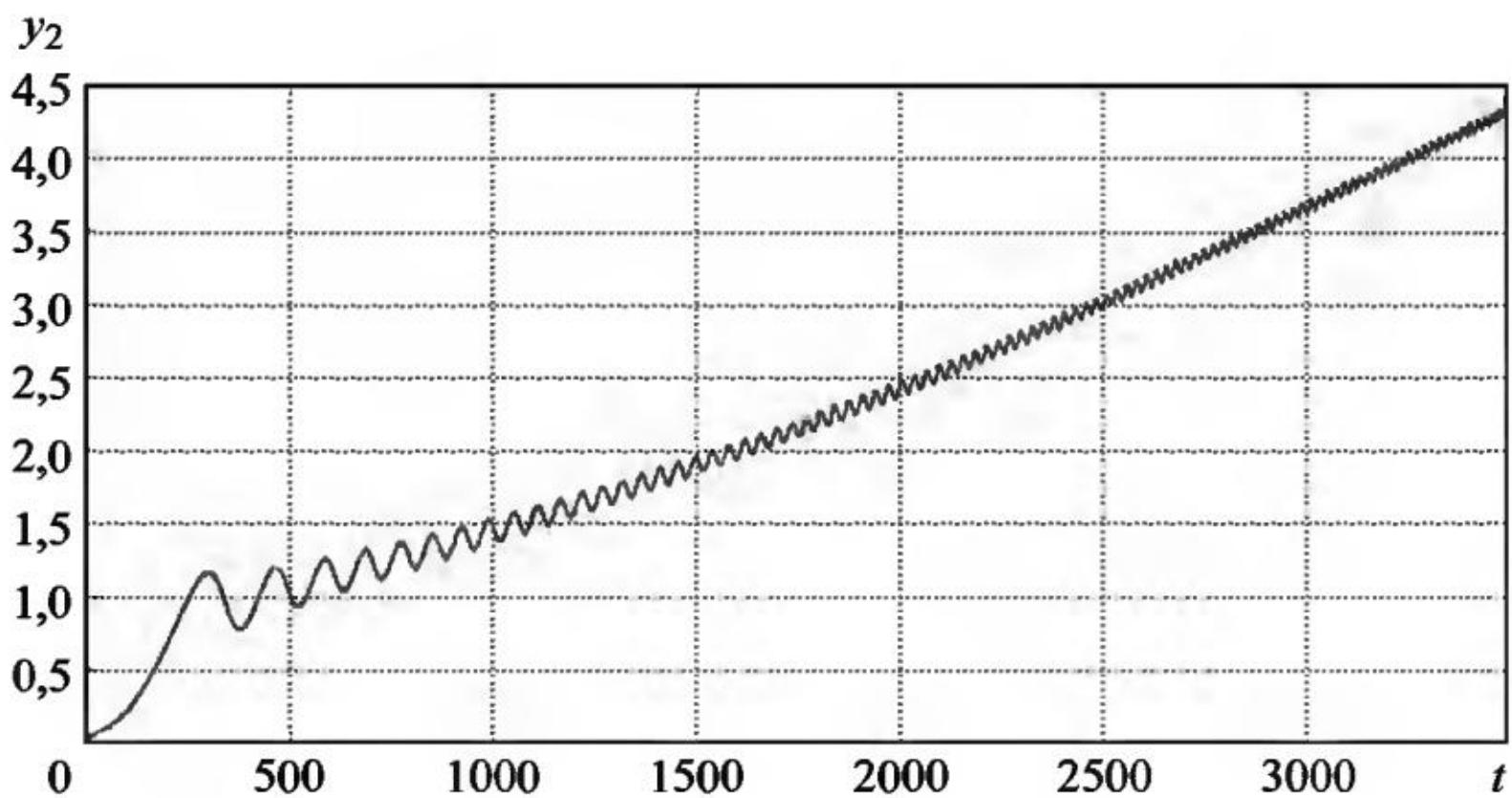


Рис. 13.6

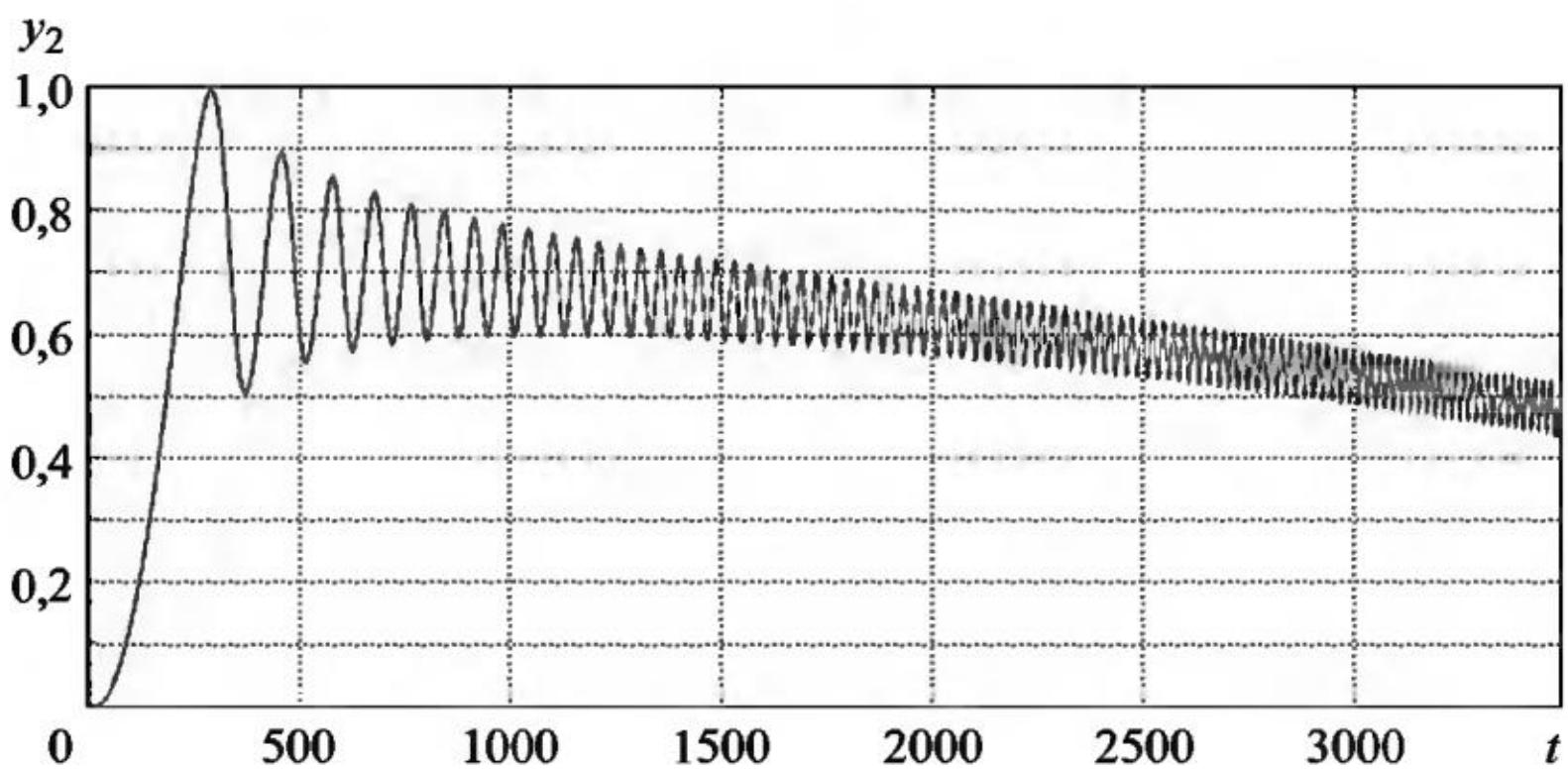


Рис. 13.7

системы СДУ (13.2) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5 \cdot 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

На рис. 13.10 и 13.11 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.2) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-4}$.

Из графиков на рис. 13.8 и 13.10 видно, что оценка математического ожидания компоненты y_2 сильно растет со временем при значении параметра $a = 10^{-2}$ и медленно убывает от достигнутого максимального значения 1 при значении параметра $a = 10^{-4}$. А из графиков на рис. 13.9 и 13.11 видно, что при значении параметра $a = 10^{-2}$ оценка дисперсии компоненты y_2 в начале интервала интегрирования колеблется, потом колебания сменяются на сильный монотонный рост, что принципиально отличается от поведения

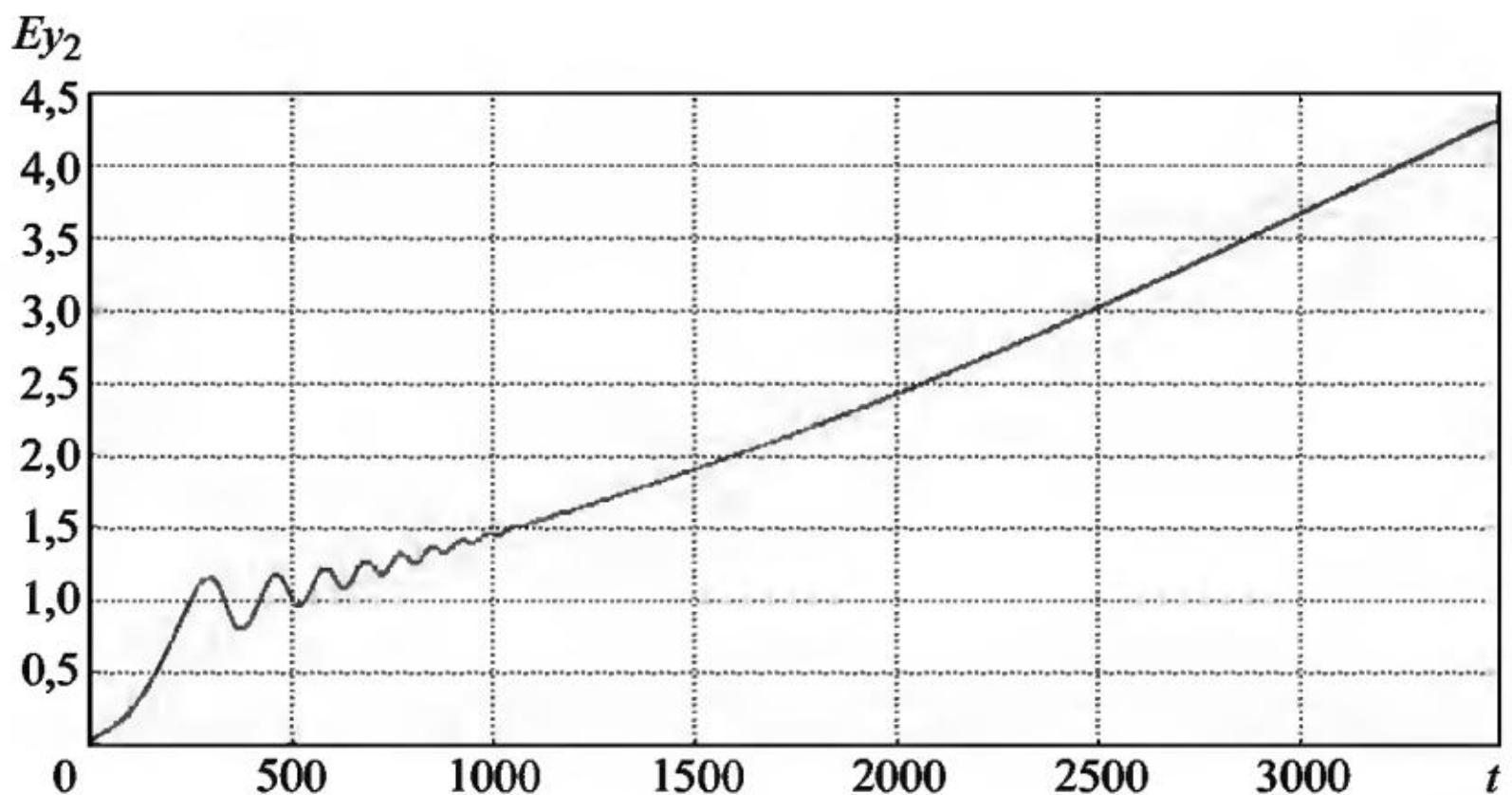


Рис. 13.8

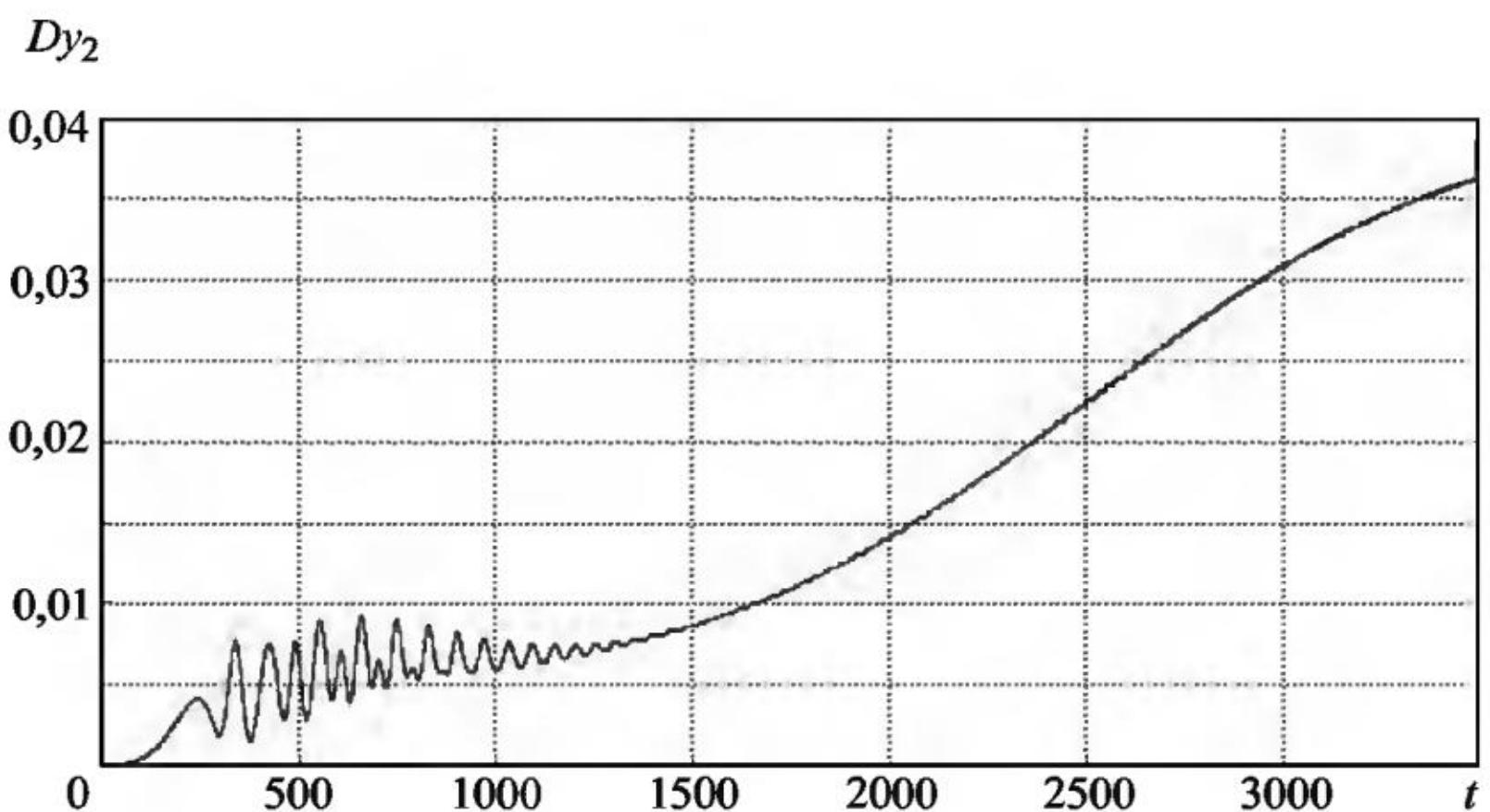


Рис. 13.9

оценки дисперсии компоненты y_2 при значении параметра $a = 10^{-4}$, когда в начале интервала интегрирования также наблюдаются колебания, которые сменяются на стабилизацию на определенном уровне, т. е. выход на стационар на уровне 0,002.

На рис. 13.12 и 13.13 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.2) с шумами большей интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5 \cdot 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-4}$.

Из графиков на рис. 13.10 и 13.12 видно, что при увеличении интенсивности шума оценка математического ожидания компоненты y_2 перестает совершать колебания в начале интервала интегрирования и сначала возрастает до уровня 0,8, а потом медлен-

Ey_2

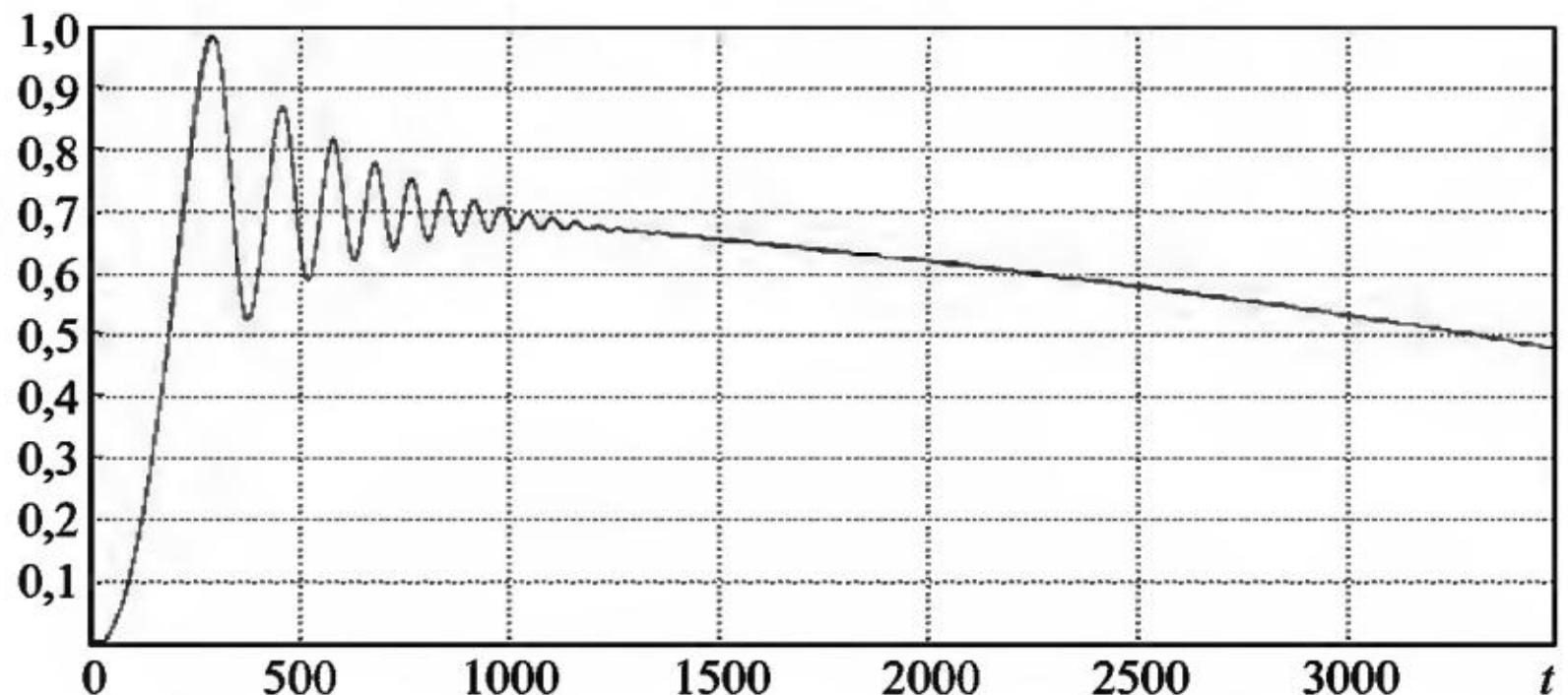


Рис. 13.10

Dy_2

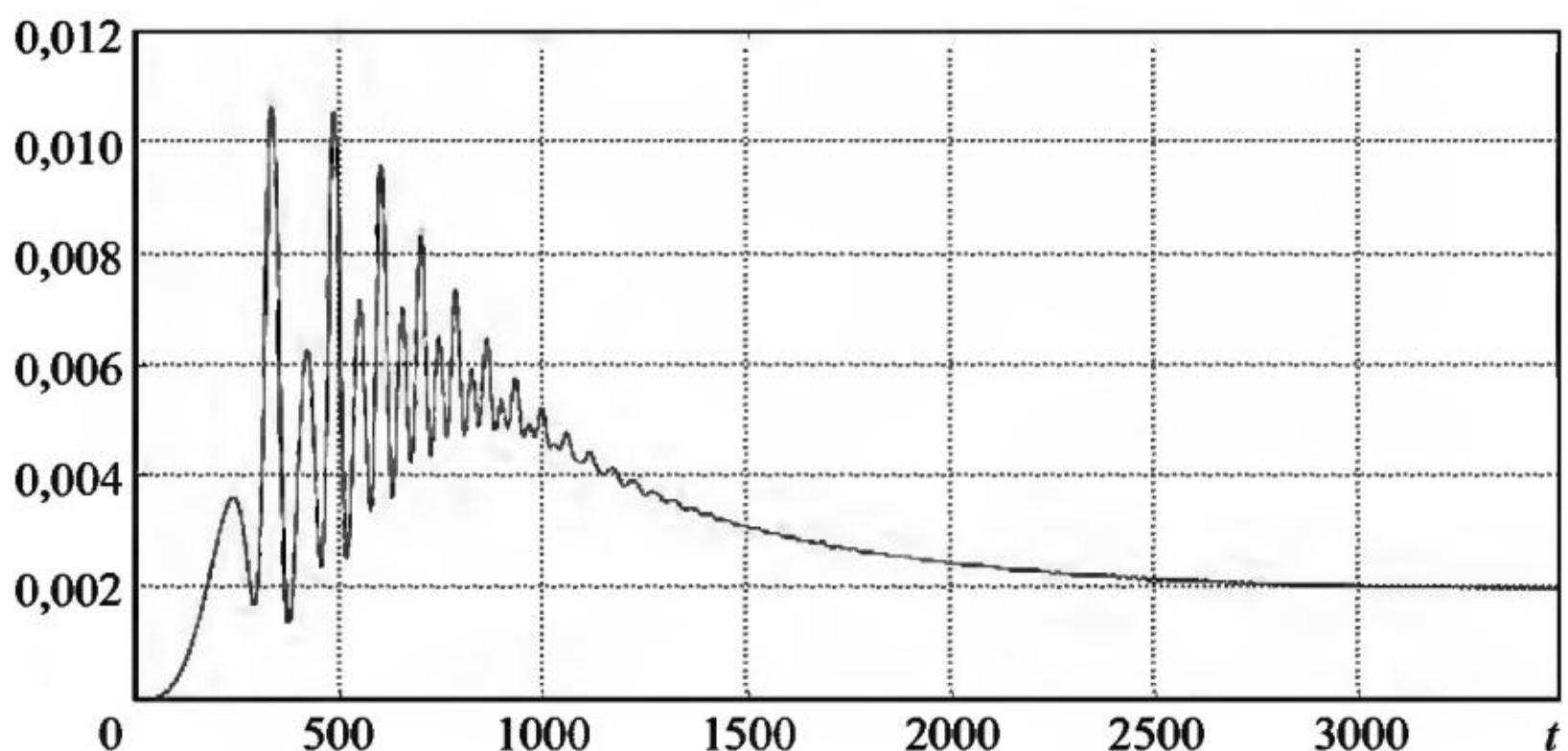


Рис. 13.11

Ey_2

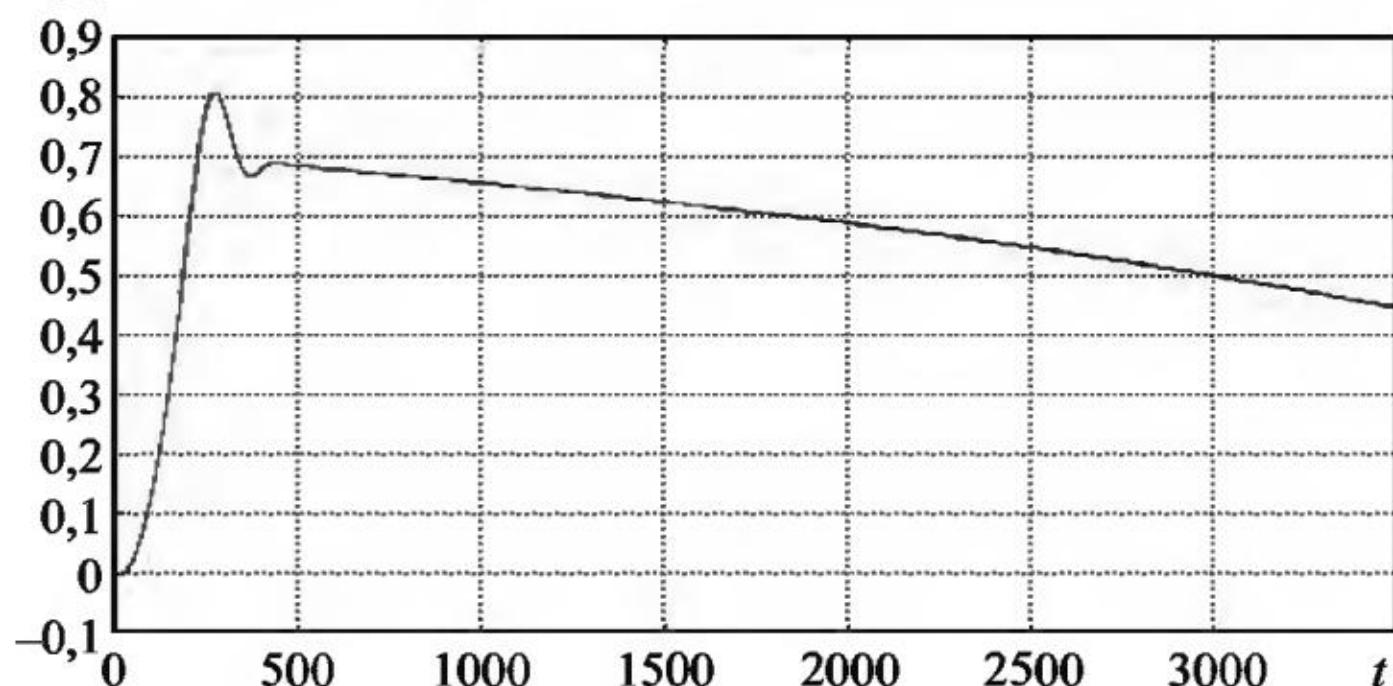


Рис. 13.12

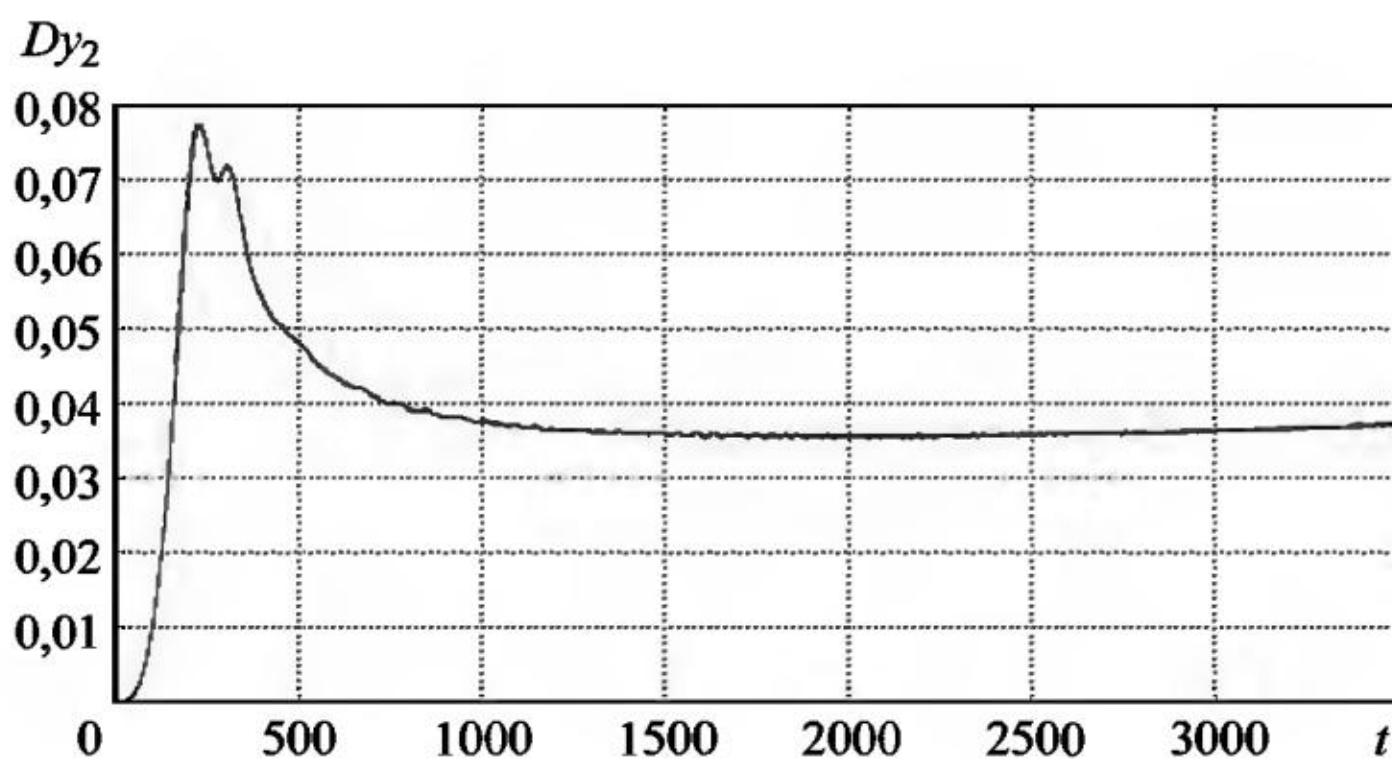


Рис. 13.13

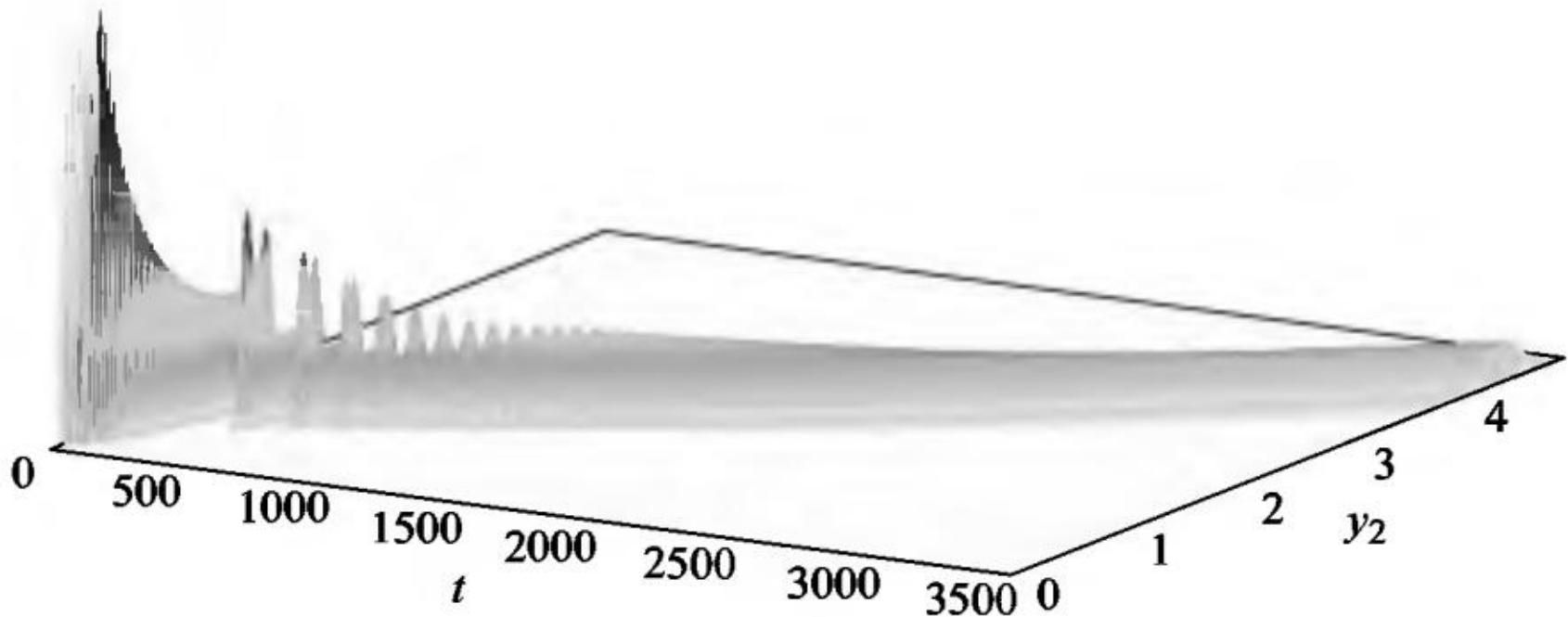


Рис. 13.14

но убывает. А из графиков на рис. 13.11 и 13.13 видно, что при увеличении интенсивности шума оценка дисперсии компоненты y_2 перестает совершать колебания в начале интервала интегрирования и выходит на стационар на уровне 0,039.

На рис. 13.14 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.2) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

На рис. 13.15 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_2 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 3500$ численного решения системы СДУ (13.2) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

На рис. 13.16 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.2) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-4}$.

На рис. 13.17 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_2 в конечной точке интервала интегрирования

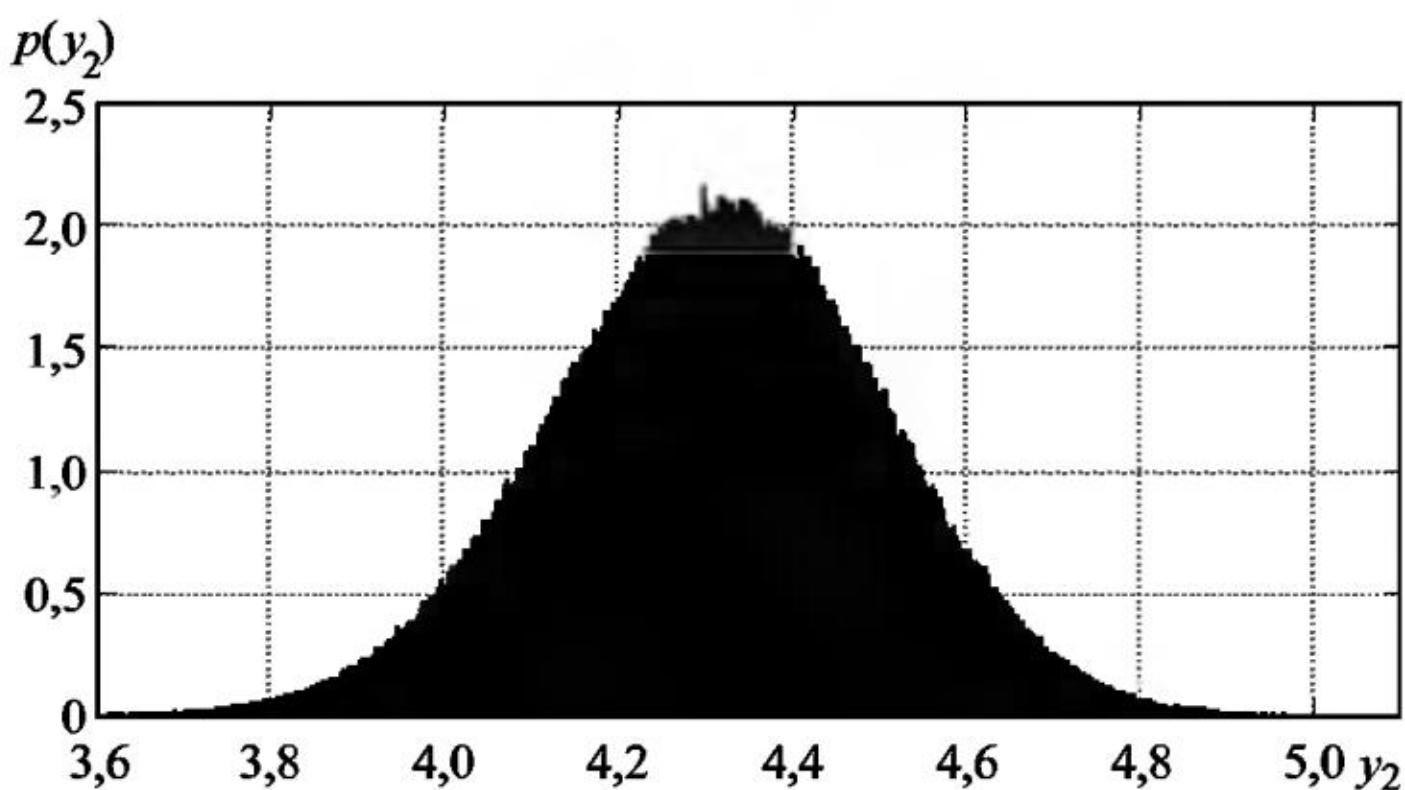


Рис. 13.15

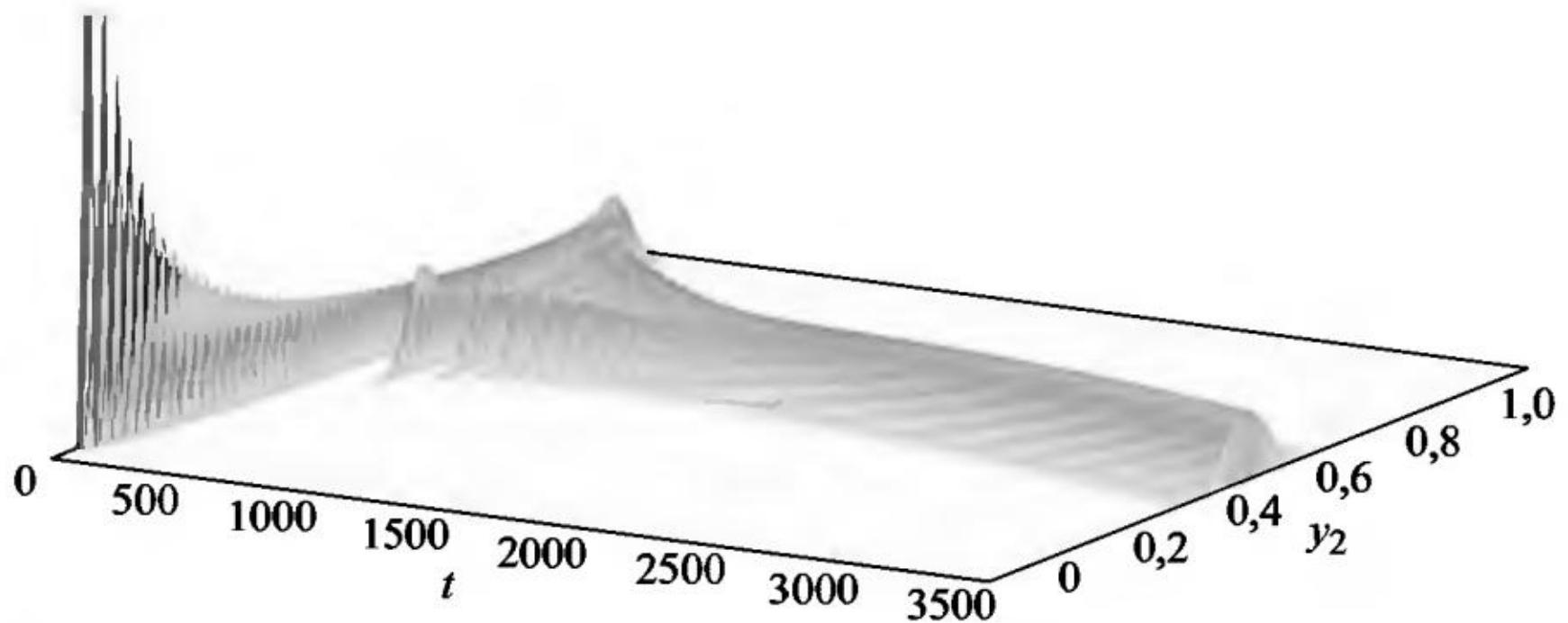


Рис. 13.16

$t_{\text{end}} = 3500$ численного решения системы СДУ (13.2) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-4}$.

На рис. 13.18 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.2) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5 \cdot 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-4}$.

На рис. 13.19 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_2 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 3500$ численного решения системы СДУ (13.2) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5 \cdot 10^{-4}$ при значении параметра $a = 10^{-4}$.

График ЧИК, аналогично графику ЧФП, позволяет увидеть при разных значениях параметра a и одинаковой интенсивности шумов всевозможные отклонения траекторий численного решения СДУ от интегральной кривой без шумов, а также наглядно показывает, как изменяются отклонения при одном и том же значении параметра a и разной интенсивности шумов.

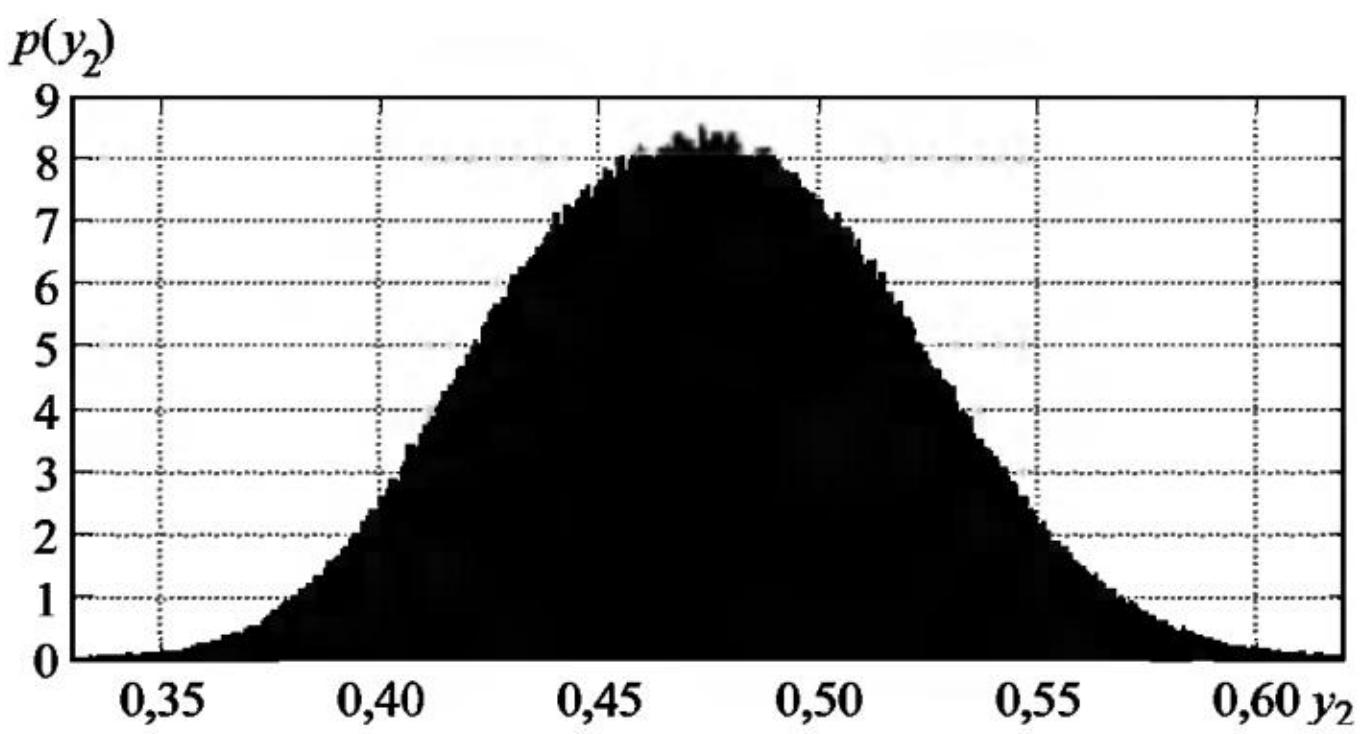


Рис. 13.17

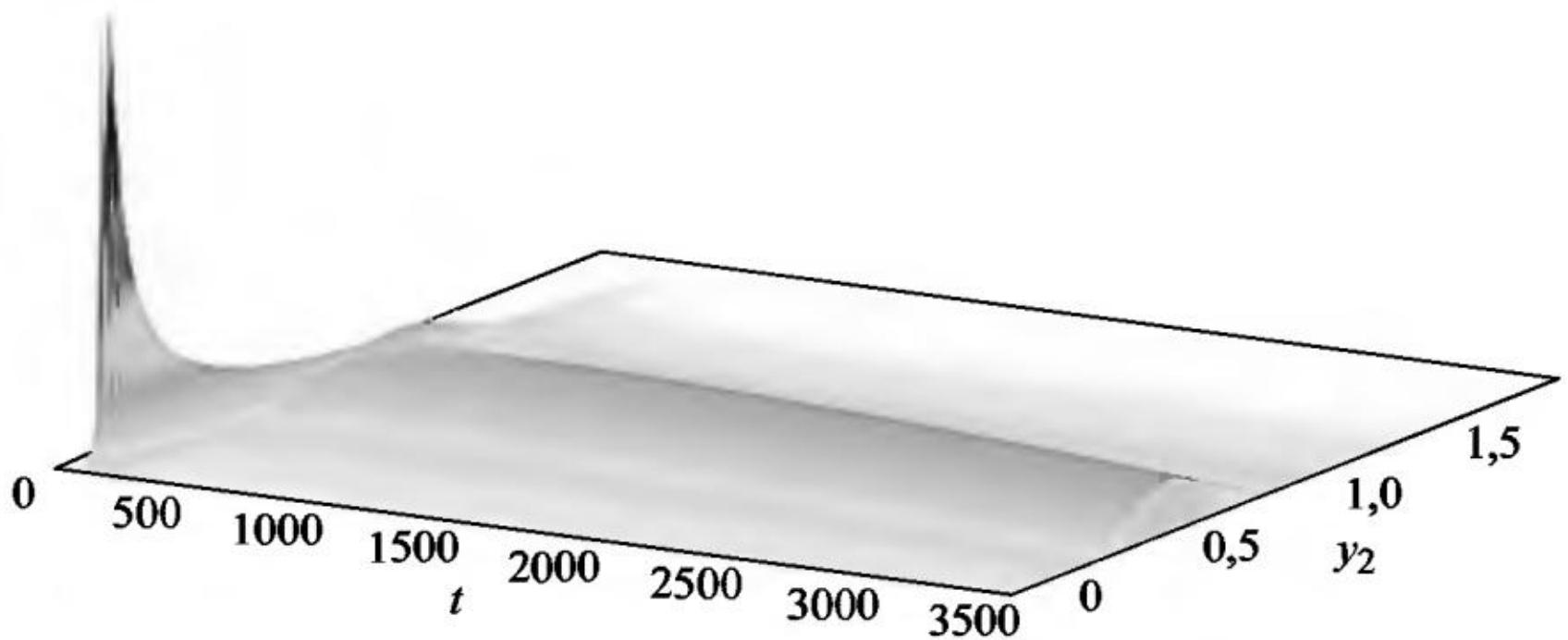


Рис. 13.18

График гистограммы позволяет оценить доверительный интервал для случайной величины $y_2(3500)$ с любой заданной вероятностью.

Пример 13.2. Модель, описывающая вход в атмосферу летательного аппарата, задается с помощью системы ОДУ вида [23]

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -\sigma_x \rho V^2 - g_r \sin(\theta) + g_z \sin(\gamma) \cos(\theta) + \frac{P_x}{m} + \\ & + R \Omega \cos(\phi) (\sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\gamma)), \quad (13.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = & \sigma_y \rho V \cos(\gamma_\alpha) + \left(\frac{V}{R} - \frac{g_r}{V} \right) \cos(\theta) - \frac{g_z}{V} \sin(\gamma) \sin(\theta) + \frac{P_y}{Vm} + \\ & + 2 \Omega \cos(\phi) \cos(\gamma) + \frac{R \Omega^2}{V} \cos(\phi) (\cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\gamma)), \end{aligned}$$

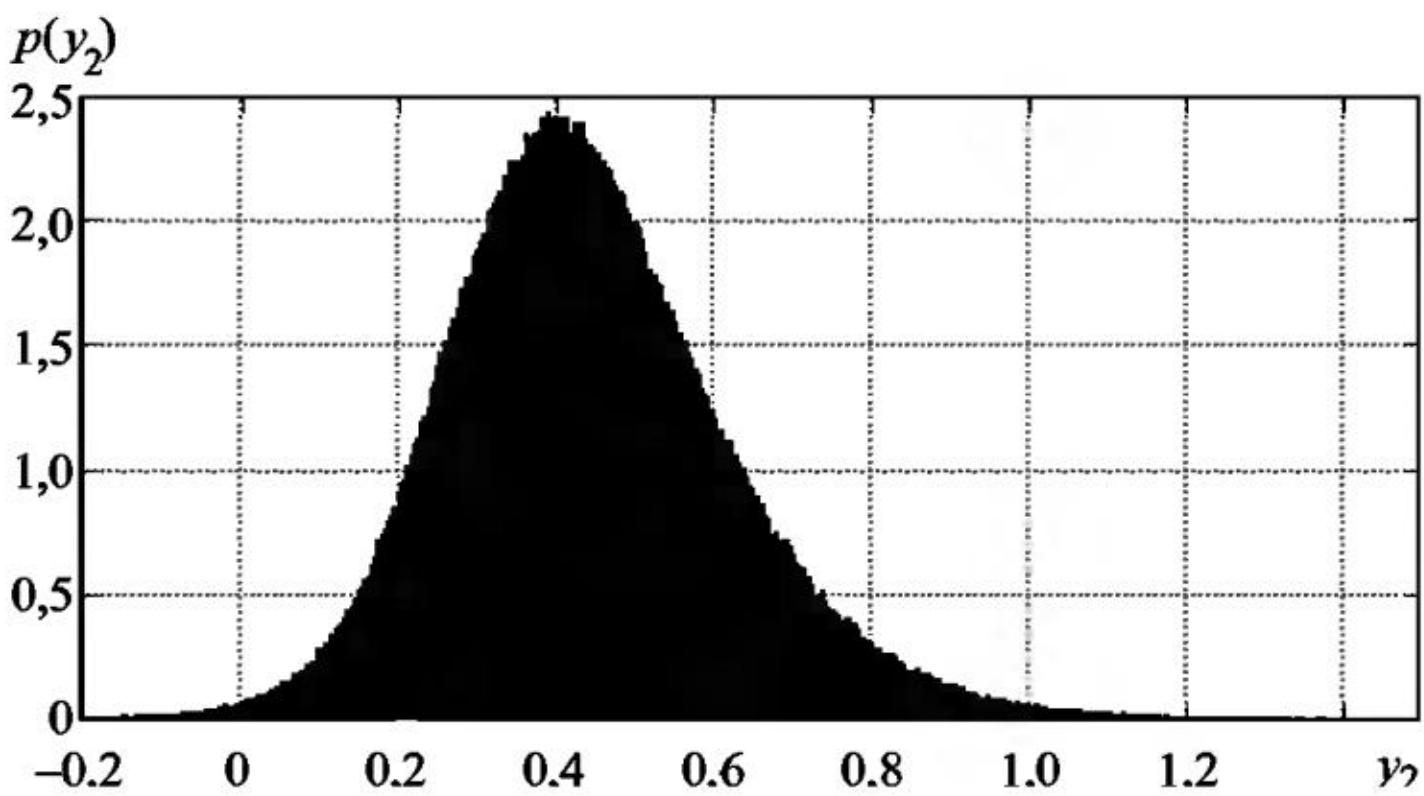


Рис. 13.19

$$\frac{d\aleph}{dt} = -\frac{\sigma_y \rho V}{\cos(\theta)} \sin(\gamma_\alpha) - \frac{V \cos(\theta)}{R} \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \cos(\aleph) + \\ + g_z \frac{\cos(\aleph)}{V \cos(\theta)} - \frac{P_z}{m V \cos(\theta)} -$$

$$-2\Omega \left(\sin(\phi) - \cos(\phi) \sin(\aleph) \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \right) - \frac{R \Omega^2}{V \cos(\theta)} \sin(\phi) \cos(\phi) \cos(\aleph),$$

$$\frac{dR}{dt} = V \sin(\theta),$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V \cos(\theta)}{R} \sin(\aleph),$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{V \cos(\theta)}{R} \frac{\cos(\aleph)}{\cos(\phi)},$$

$$\frac{dm}{dt} = -\beta.$$

Введем обозначения: $y_1 = V$ – скорость ЛА, $y_2 = \theta$ – угол наклона траектории, $y_3 = \aleph$ – угол пути, $y_4 = R$ – радиус-вектор центра масс ЛА (расстояние до центра Земли), $y_5 = \phi$ – географическая широта, $y_6 = \lambda$ – географическая долгота, $y_7 = m$ – масса ЛА, $\rho(R)$ – плотность атмосферы: $\rho(R) = \rho_0 \exp\left(\frac{1}{R_0^2} - \left(\frac{R-R_0}{R_0}\right)^2\right)$, $\Omega = 0,727 \cdot 10^{-4}$

– угловая скорость вращения Земли, $\sigma_x = C_{xa} \frac{S}{m}$, $\sigma_y = C_{ya} \frac{S}{2m}$,
 $g_r = \frac{\gamma_3}{R^2} \left(1 + 0,00162 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 (1 - 3 \sin^2(\phi)) \right)$, $P_x = P_{yg} \beta \cos(\alpha)$,
 $P_y = P_{yg} \beta \sin(\alpha) \cos(\gamma_\alpha)$, $P_z = P_{yg} \beta \sin(\alpha) \sin(\gamma_\alpha)$, γ_α – скоростной
угол крена, $g_z = -0,0162 \gamma_3 \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 \sin(2\phi)$, $\gamma_3 = 398600,4$ – грави-
тационный параметр Земли, α – угол атаки, β – скорость расходо-
вания топлива, g – гравитационная постоянная Земли, S – пло-
щадь. Учитывая внешние и внутренние случайные шумы и задавая
конкретные значения параметров, модель входа в атмосферу ЛА
запишем в виде системы СДУ

$$\begin{aligned}
dy_1 &= \left(-a\rho \frac{y_1^2}{y_7} - 10^{-2} g_r \sin(y_2) - 10^{-2} g_z \sin(y_3) \cos(y_2) + \frac{10^{-4}}{y_7} \right) dt + \\
&\quad + \sigma_1 dw_1(t), \quad y_1(0) = 1, \\
dy_2 &= \left(\frac{10^{-2} \rho y_1}{2y_7} + \left(\frac{y_1}{y_4} - \frac{10^{-2} g_r}{y_1} \right) \cos(y_2) + \frac{10^{-2} g_z}{y_1} \sin(y_3) \sin(y_2) + \frac{10^{-1}}{y_1 y_7} \right) dt + \\
&\quad + \frac{\sigma_2}{y_1 y_7} dw_2(t), \quad y_2(0) = -1, \\
dy_3 &= \left(-\frac{10^{-3} \rho y_1}{2y_7 \cos(y_2)} - \frac{y_1 \cos(y_2)}{y_4} \frac{\sin(y_5)}{\cos(y_5)} \cos(y_3) - \frac{10^{-3} g_z \cos(y_3)}{y_1 \cos(y_2)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{10^{-3}}{y_1 y_7 \cos(y_2)} \right) dt, \quad y_3(0) = 0, \\
dy_4 &= 10^{-1} y_1 \sin(y_2) dt, \quad y_4(0) = 7,5, \\
dy_5 &= \frac{y_1 \cos(y_2)}{y_4} \sin(y_3) dt, \quad y_5(0) = 0, \\
dy_6 &= \frac{y_1 \cos(y_2) \cos(y_3)}{y_4 \cos(y_5)} dt, \quad y_6(0) = 0, \\
dy_7 &= -10^{-3} dt + \sigma_3 dw_3(t), \quad y_7(0) = 1.
\end{aligned} \tag{13.4}$$

В (13.4) заданы

$$\rho(y_4) = \rho_0 \exp\left(\frac{1}{R_0^2} - \left(\frac{y_4 - R_0}{R_0}\right)^2\right),$$

$$g_r = \frac{\gamma_3}{y_4^2} \left(1 + 0,00162 \left(\frac{R_0}{y_4}\right)^2 \left(1 - 3 \sin^2(y_5)\right)\right), \quad g_z = -0,0162 \gamma_3 \left(\frac{R_0}{y_4}\right)^4 \sin(2y_5).$$

При численных расчетах моделировалось $N_{tr} = 10^6$ траекторий с шагом интегрирования $h = 10^{-5}$ на интервале $[0, 100]$. На рис. 13.20 и 13.21 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_4, y_6) численного решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 2 \cdot 10^{-3}$ и $a = 10^{-2}$.

Из рис. 13.20 и 13.21 видно, что в первом случае нет выхода ни одной из компонент решения на фиксированный уровень, во втором случае есть стационарный уровень у обеих компонент.

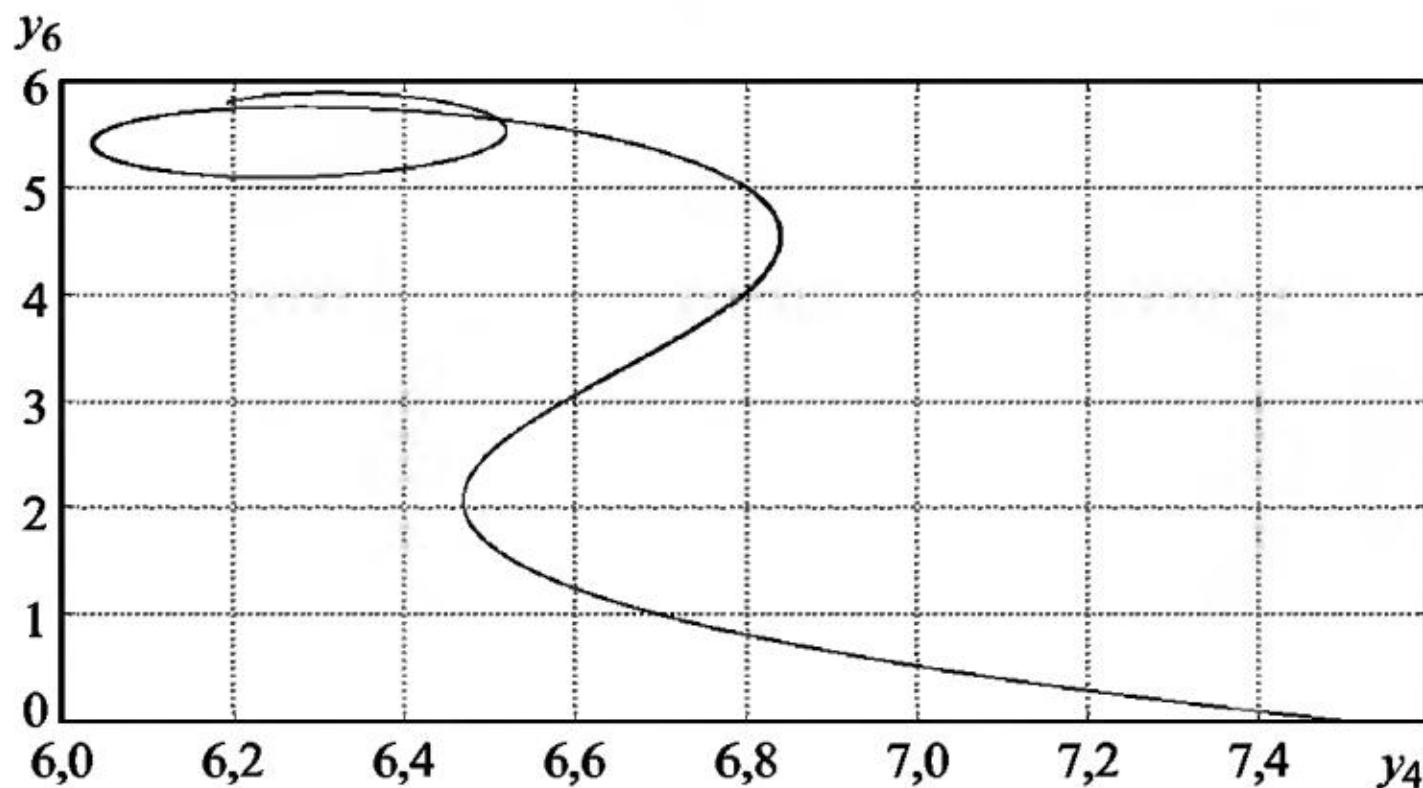


Рис. 13.20

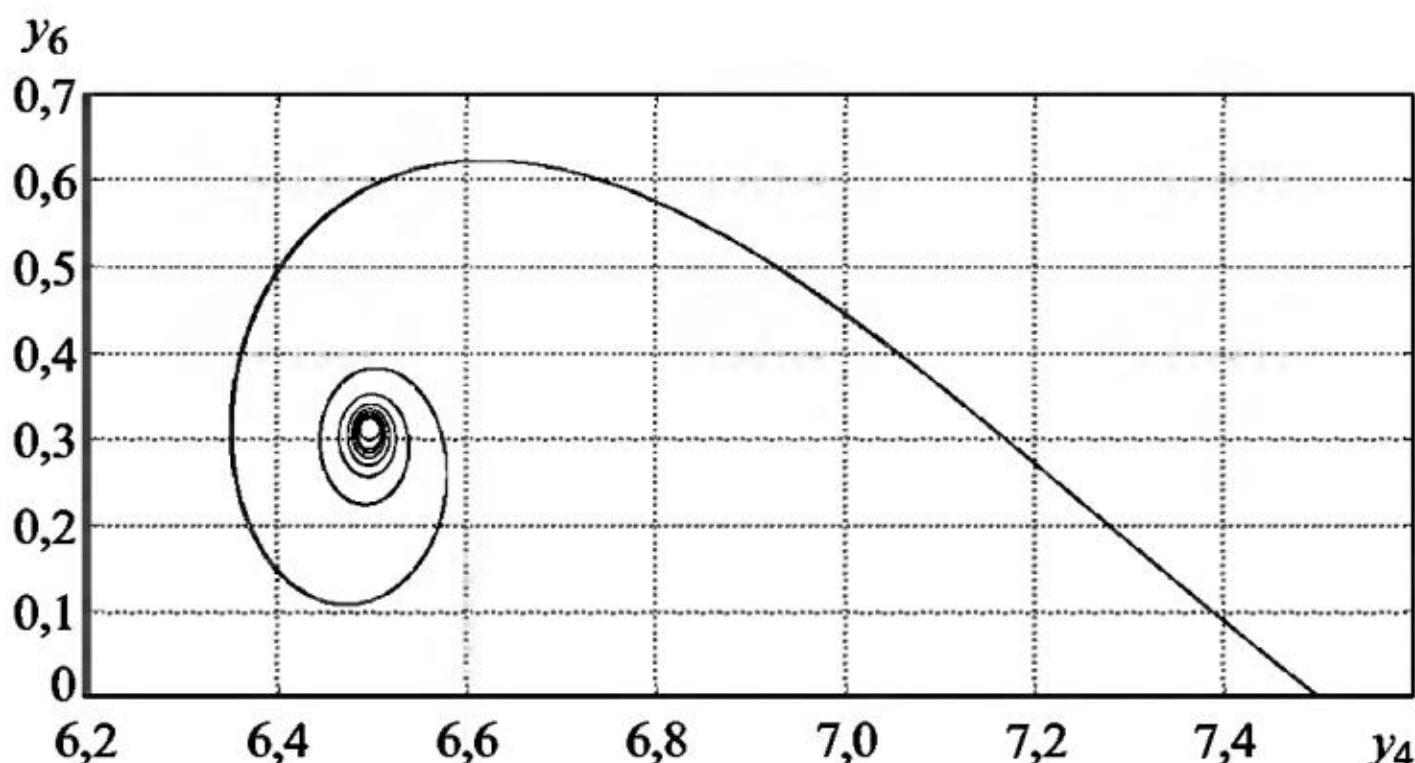


Рис. 13.21

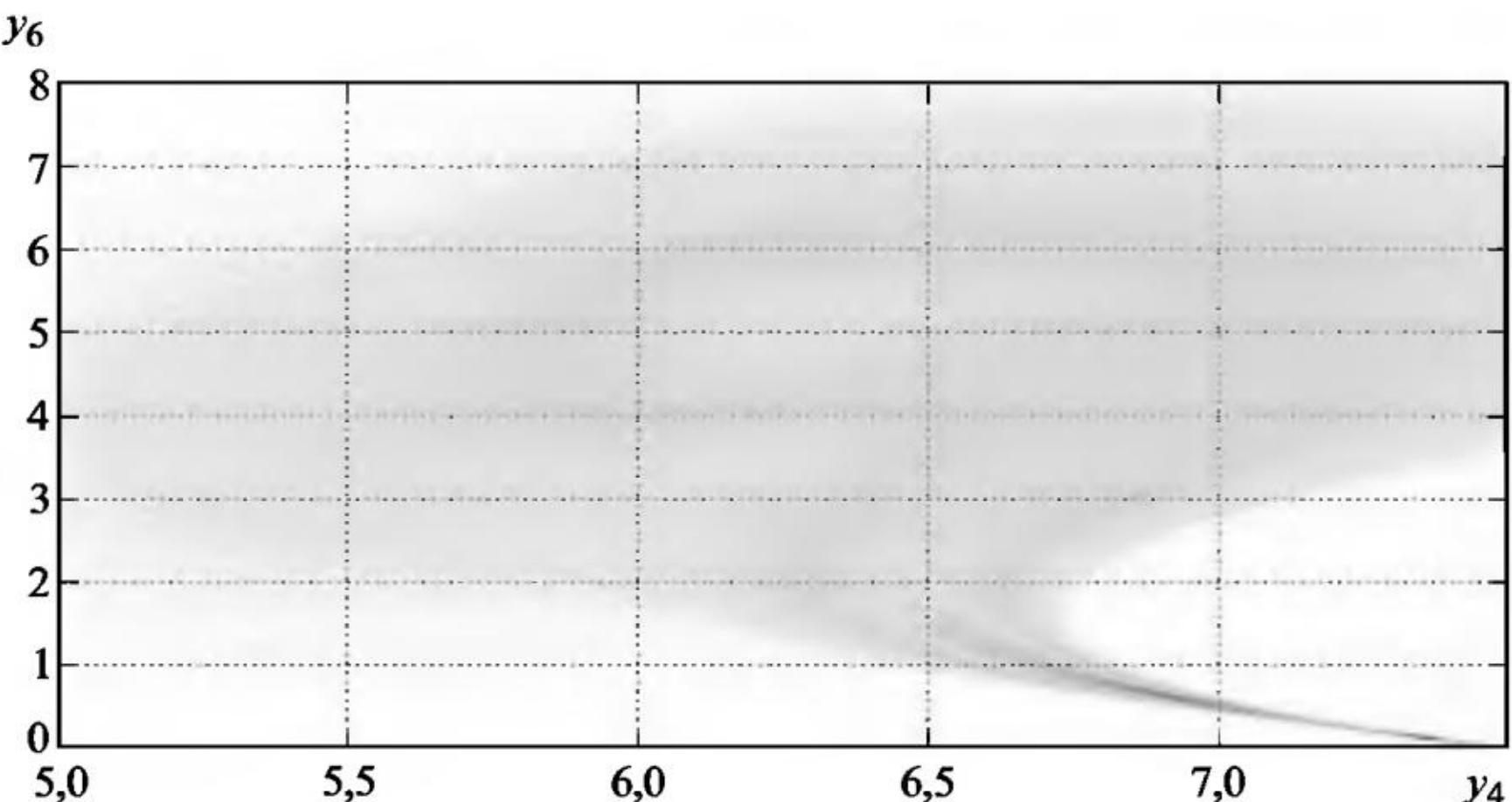


Рис. 13.22

На рис. 13.22 и 13.23 приведены графики ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_4, y_6) численного решения системы СДУ (13.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-2}$ при значениях параметра $a = 2 \cdot 10^{-3}$ и $a = 10^{-2}$.

Из графиков на рис. 13.22 и 13.23 видно, что ЧФП различны между собой и соответствуют своим фазовым траекториям на рис. 13.20 и 13.21.

На рис. 13.24 приведен график ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_4, y_6) численного решения системы СДУ (13.4) с шумами меньшей интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

На рис. 13.25 и 13.26 приведены графики интегральной кривой компоненты y_4 численного решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 2 \cdot 10^{-3}$ и $a = 10^{-2}$.

На рис. 13.27 и 13.28 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_4 численного решения системы СДУ (13.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-2}$ при значении параметра $a = 2 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 13.29 и 13.30 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_4 численного решения системы СДУ (13.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-2}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

На рис. 13.31 и 13.32 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_4 численного решения системы СДУ (13.4) с шумами меньшей интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

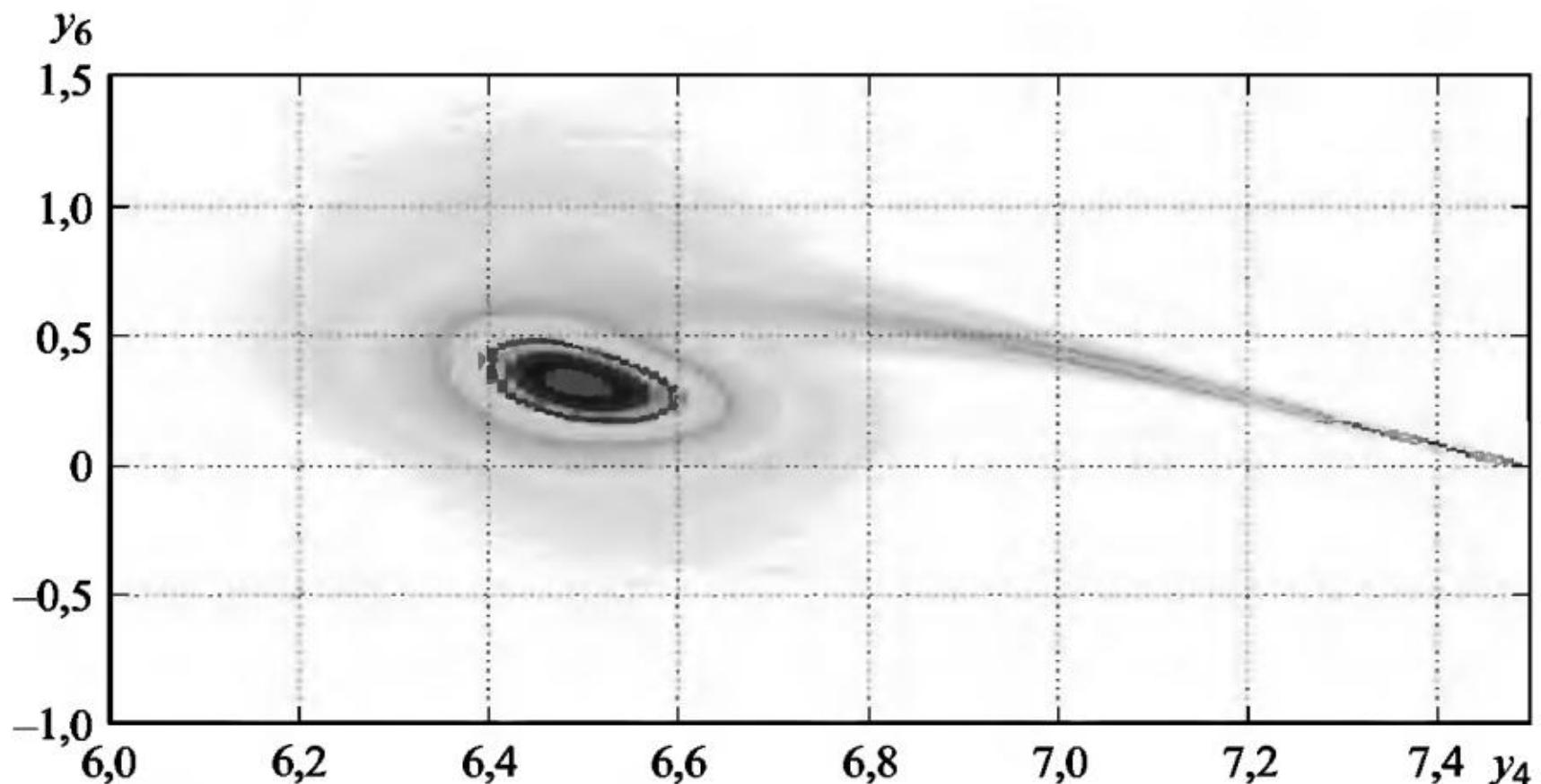


Рис. 13.23

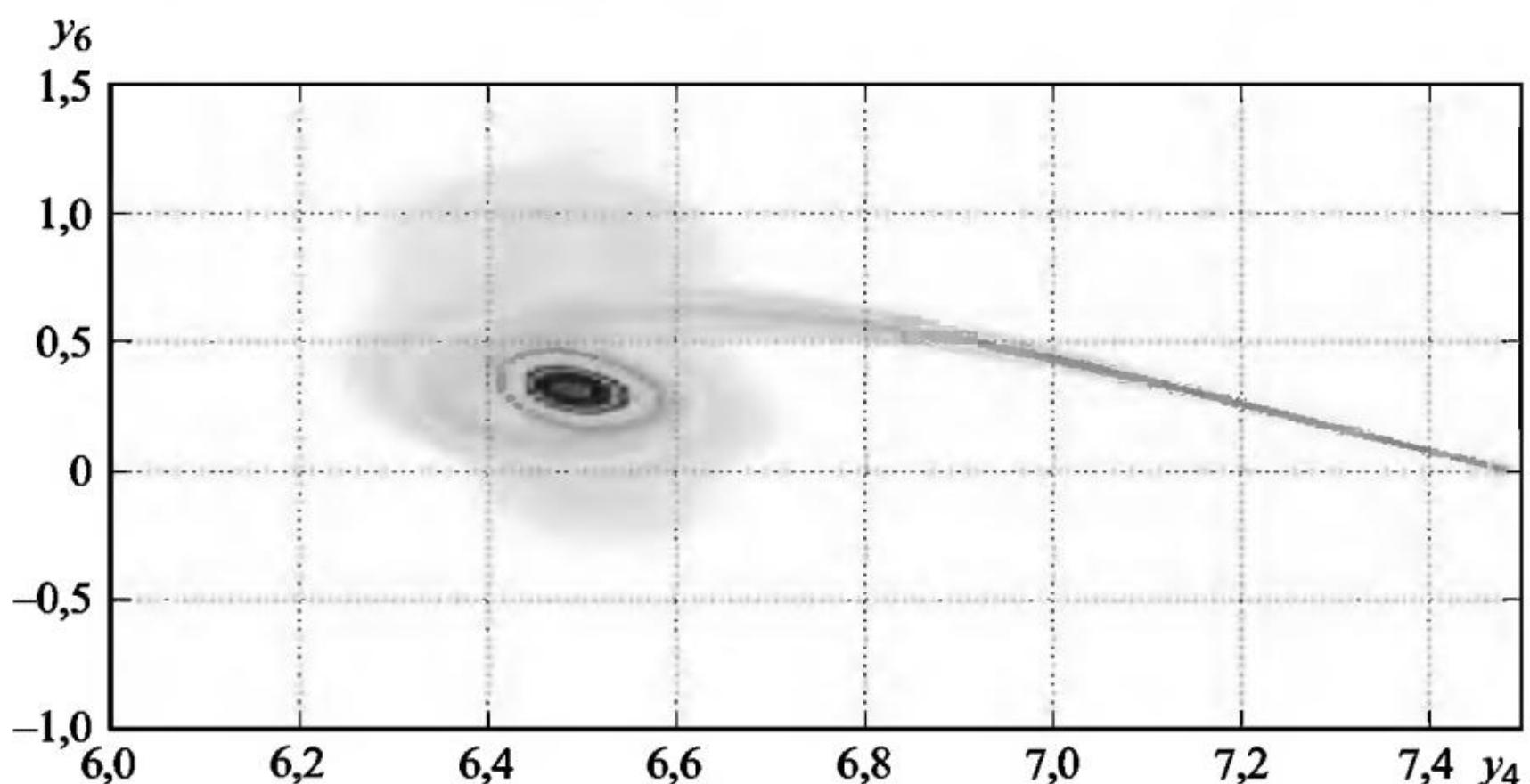


Рис. 13.24

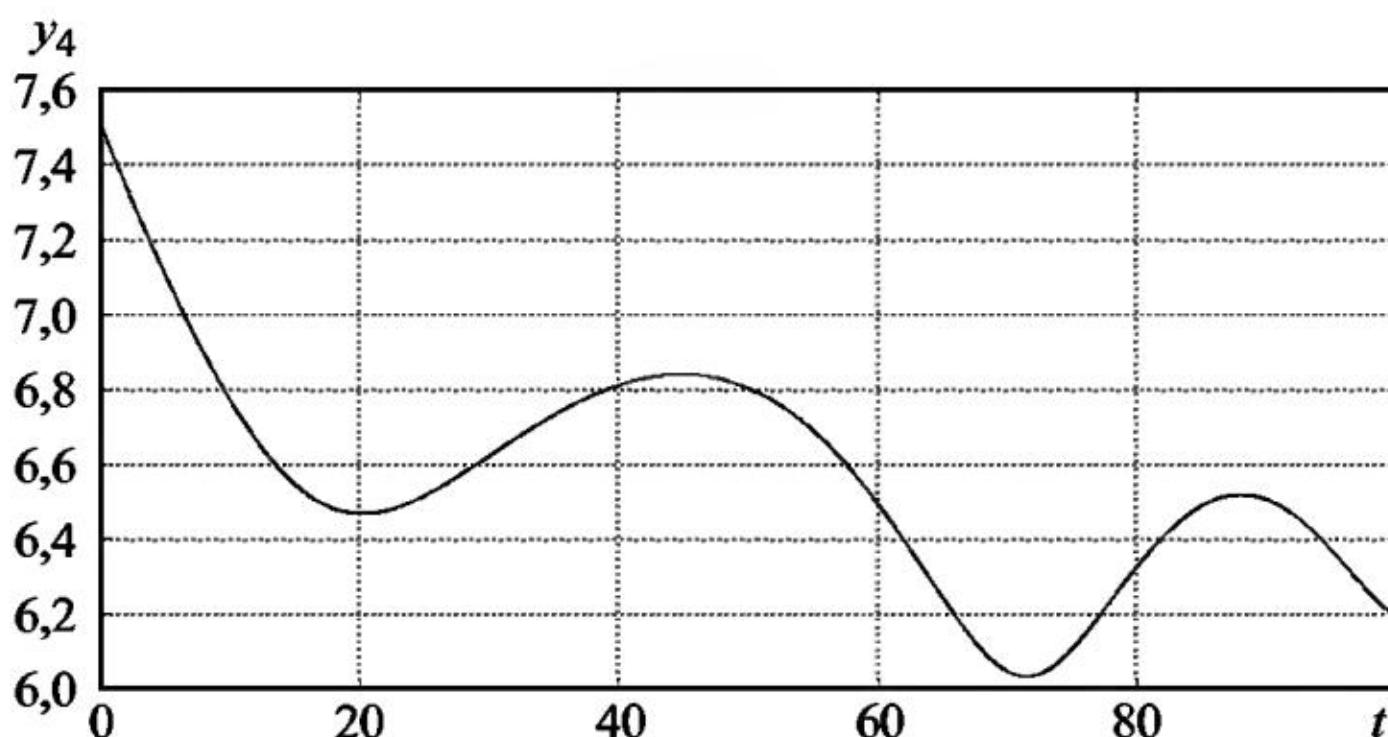


Рис. 13.25

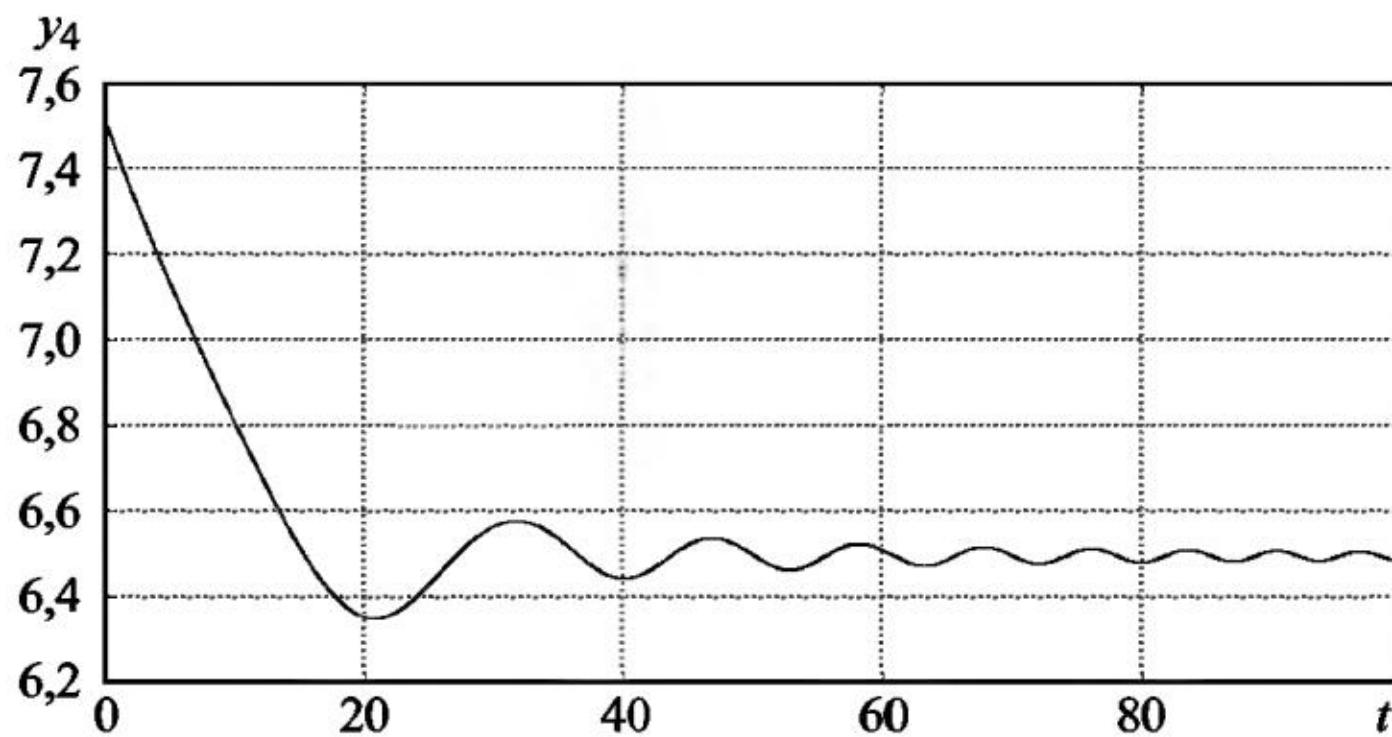


Рис. 13.26

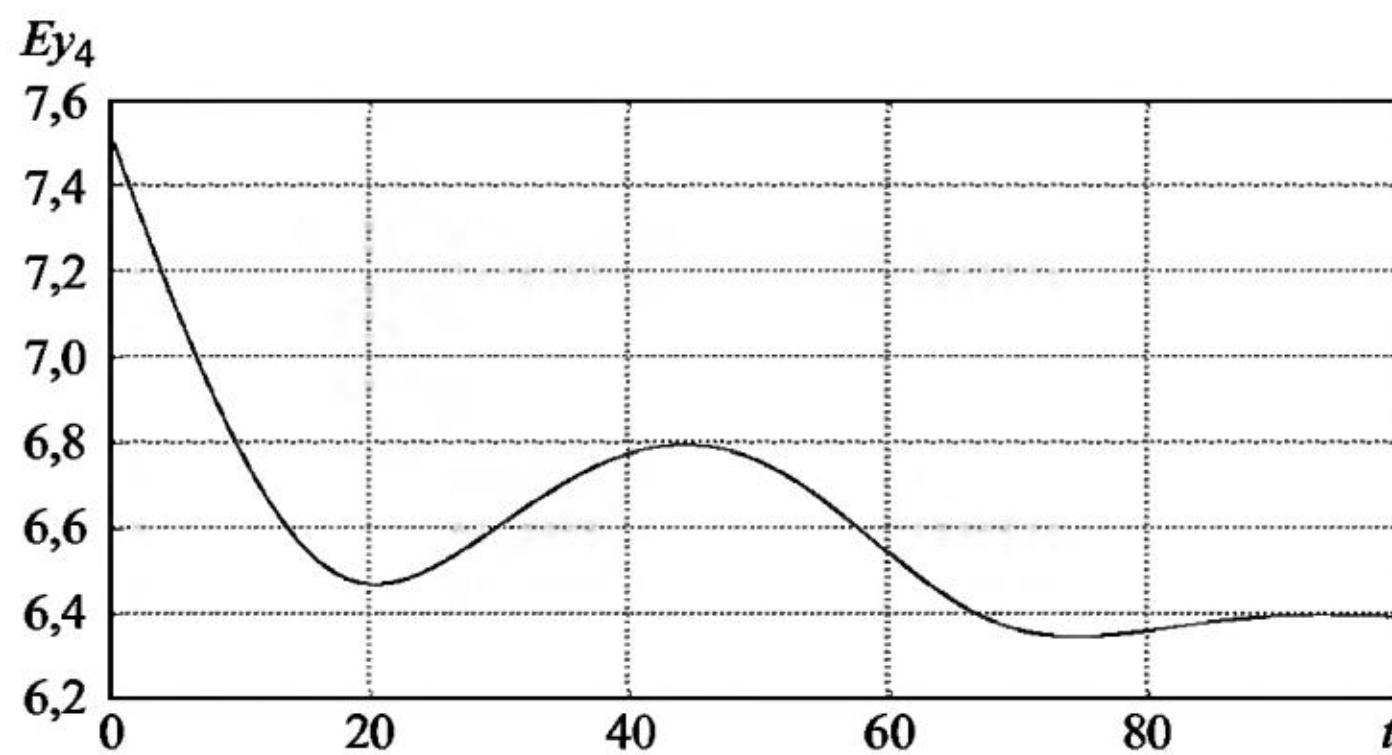


Рис. 13.27

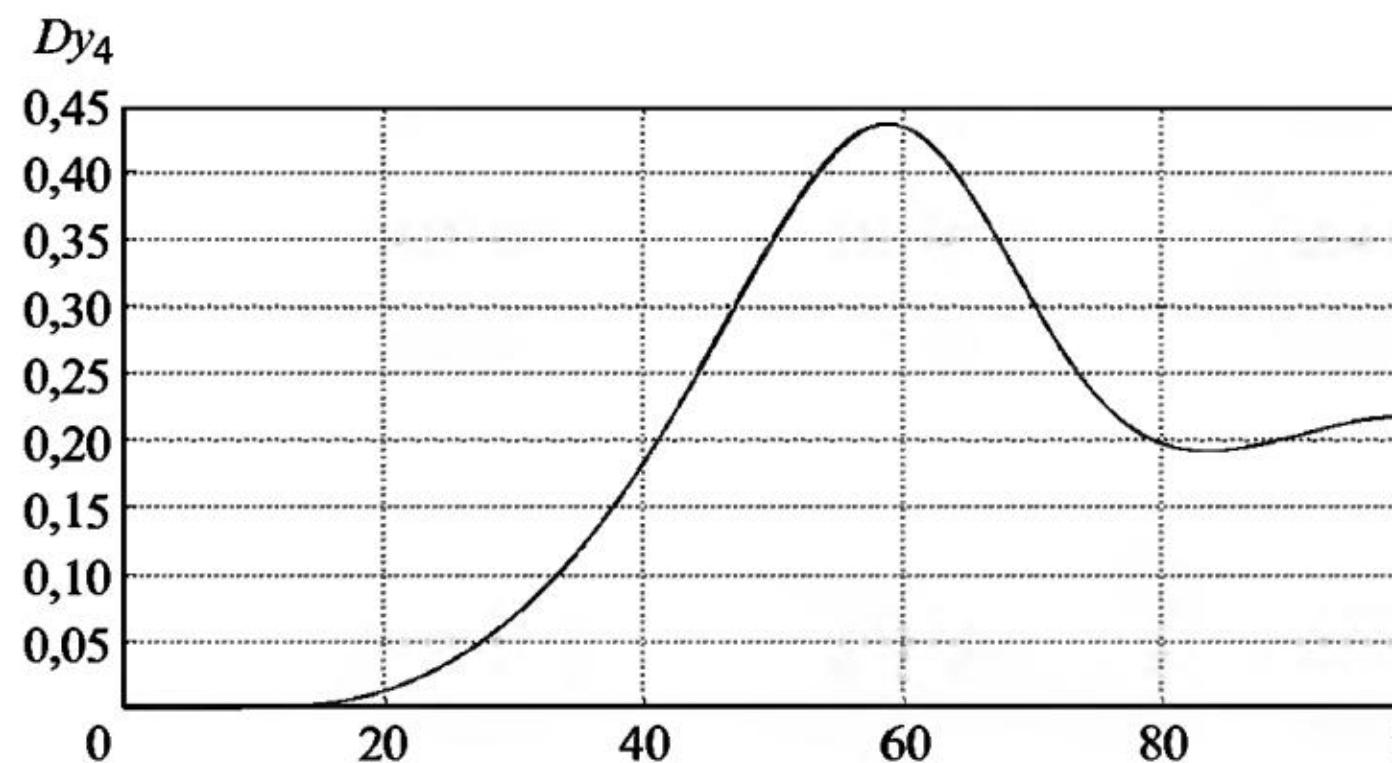


Рис. 13.28

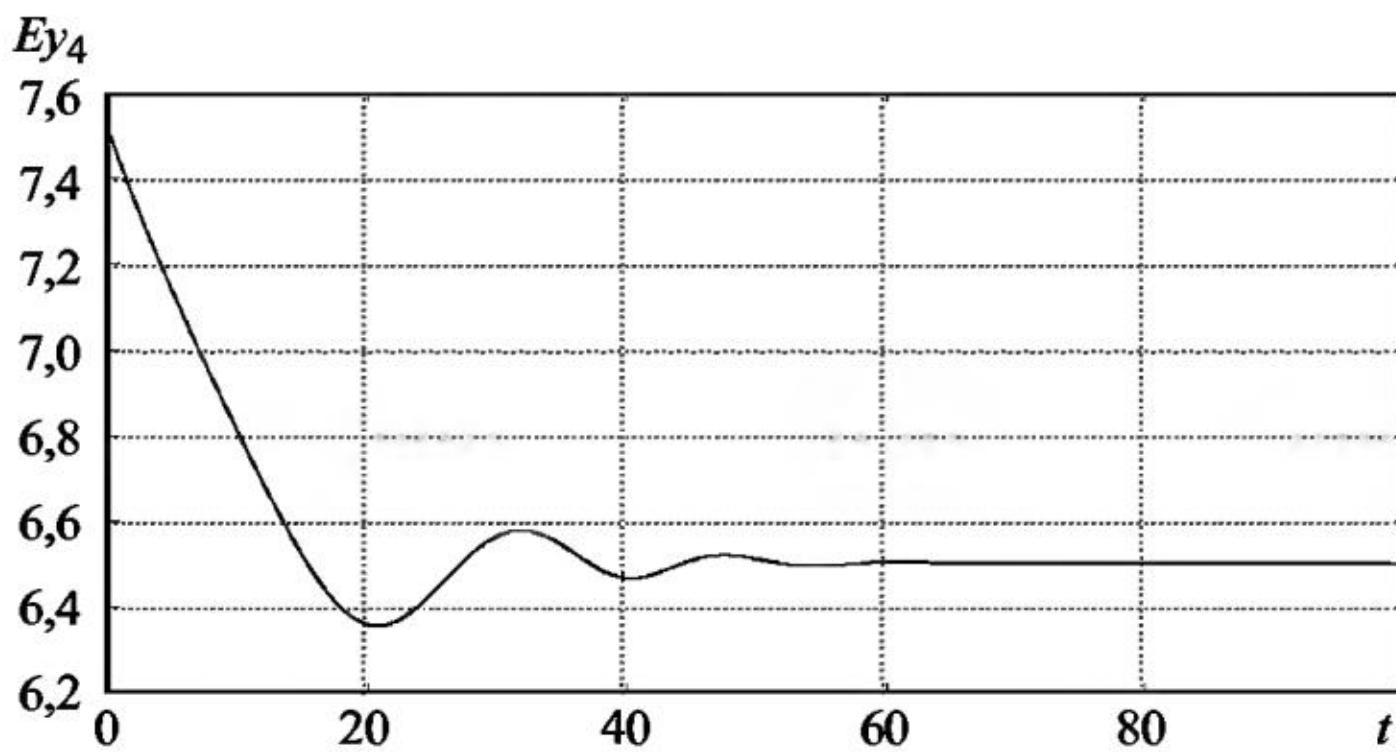


Рис. 13.29

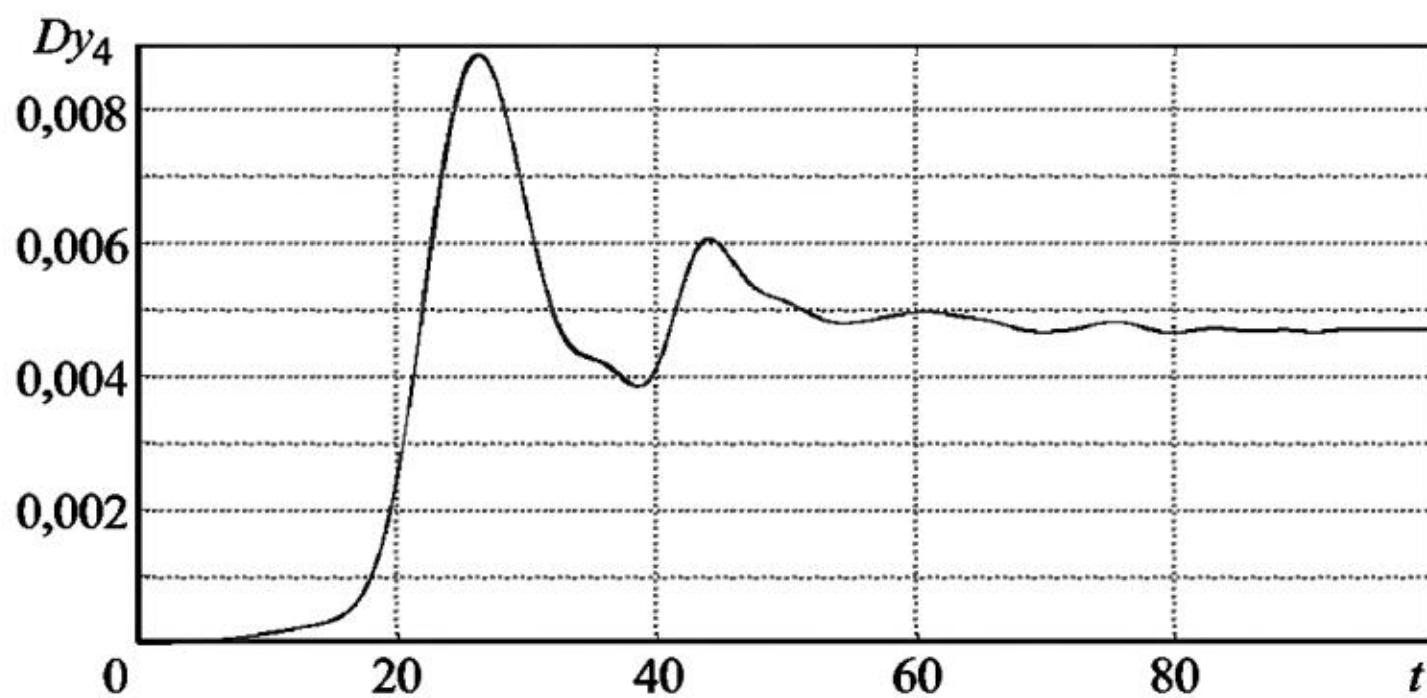


Рис. 13.30

Проведенные расчеты показали, что при различных значениях параметра a и интенсивности шумов оценки математического ожидания и дисперсии компоненты y_4 численного решения системы СДУ всегда выходят на стационарный уровень.

Так как оценка дисперсии компоненты y_4 численного решения системы СДУ (13.4) на интервале $[0, 20]$ близка к нулю, то графики ЧИК далее строятся на интервале $[20, 100]$.

На рис. 13.33 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_4 численного решения системы СДУ (13.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-2}$ при значении параметра $a = 2 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 13.34 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_4 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 100$ численного решения системы СДУ (13.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-2}$ при значении параметра $a = 2 \cdot 10^{-3}$.

Из рис. 13.34 можно заключить о незначительной асимметрии плотности распределения расстояния ракеты до Земли.

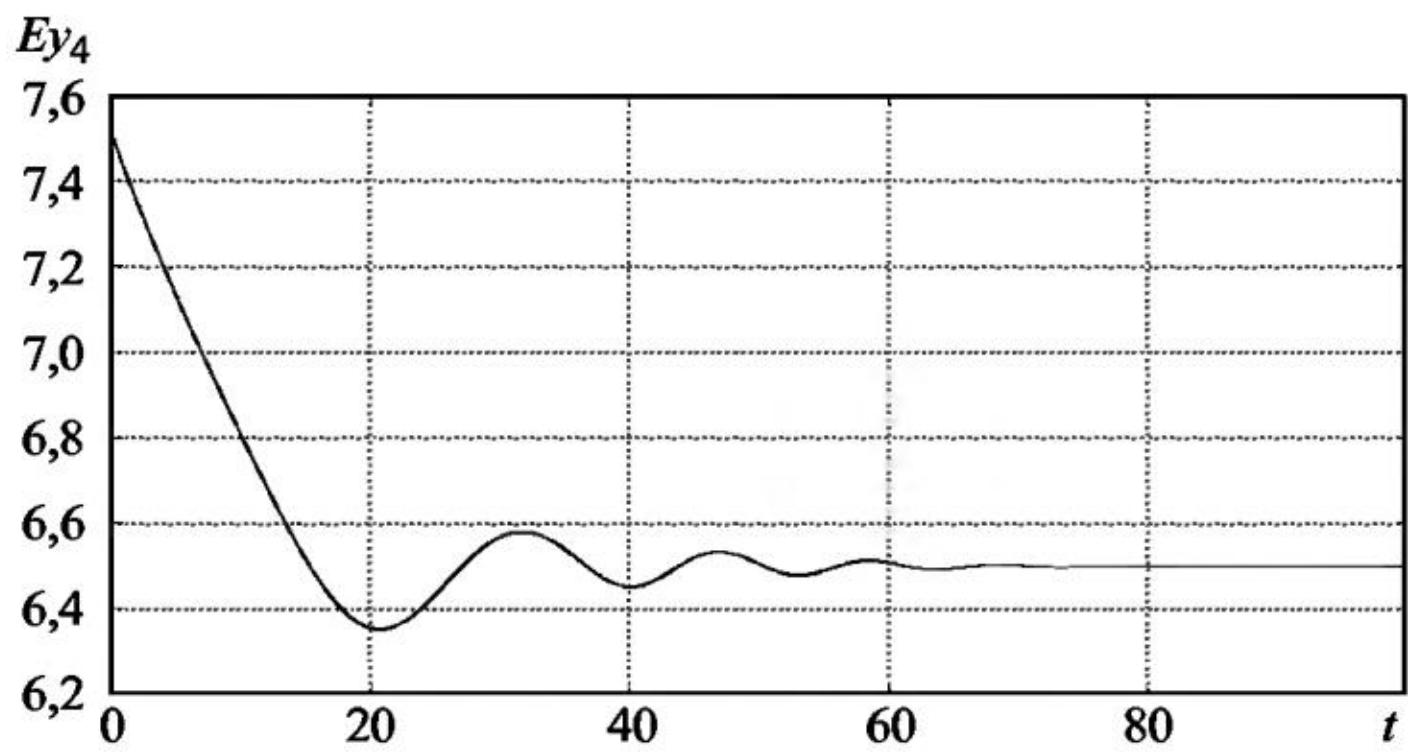


Рис. 13.31

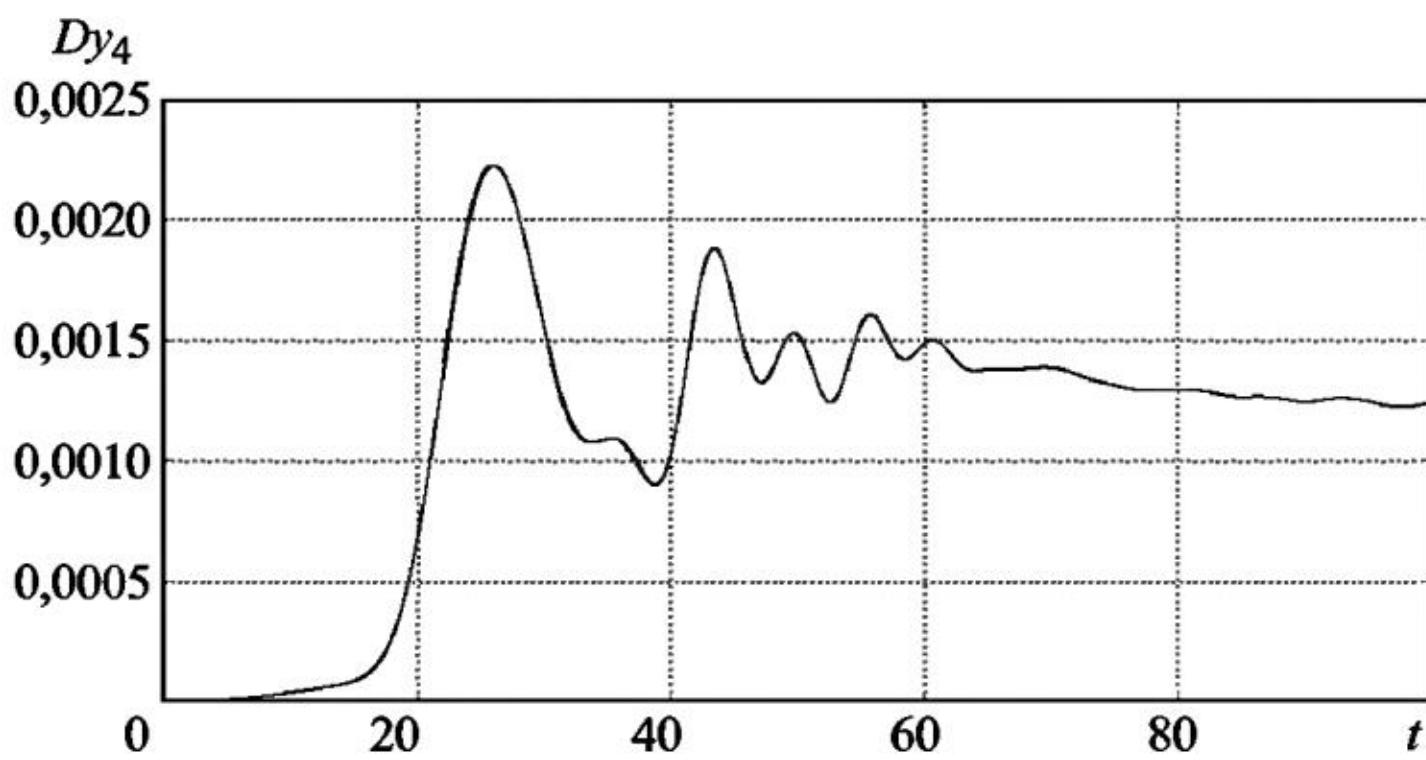


Рис. 13.32

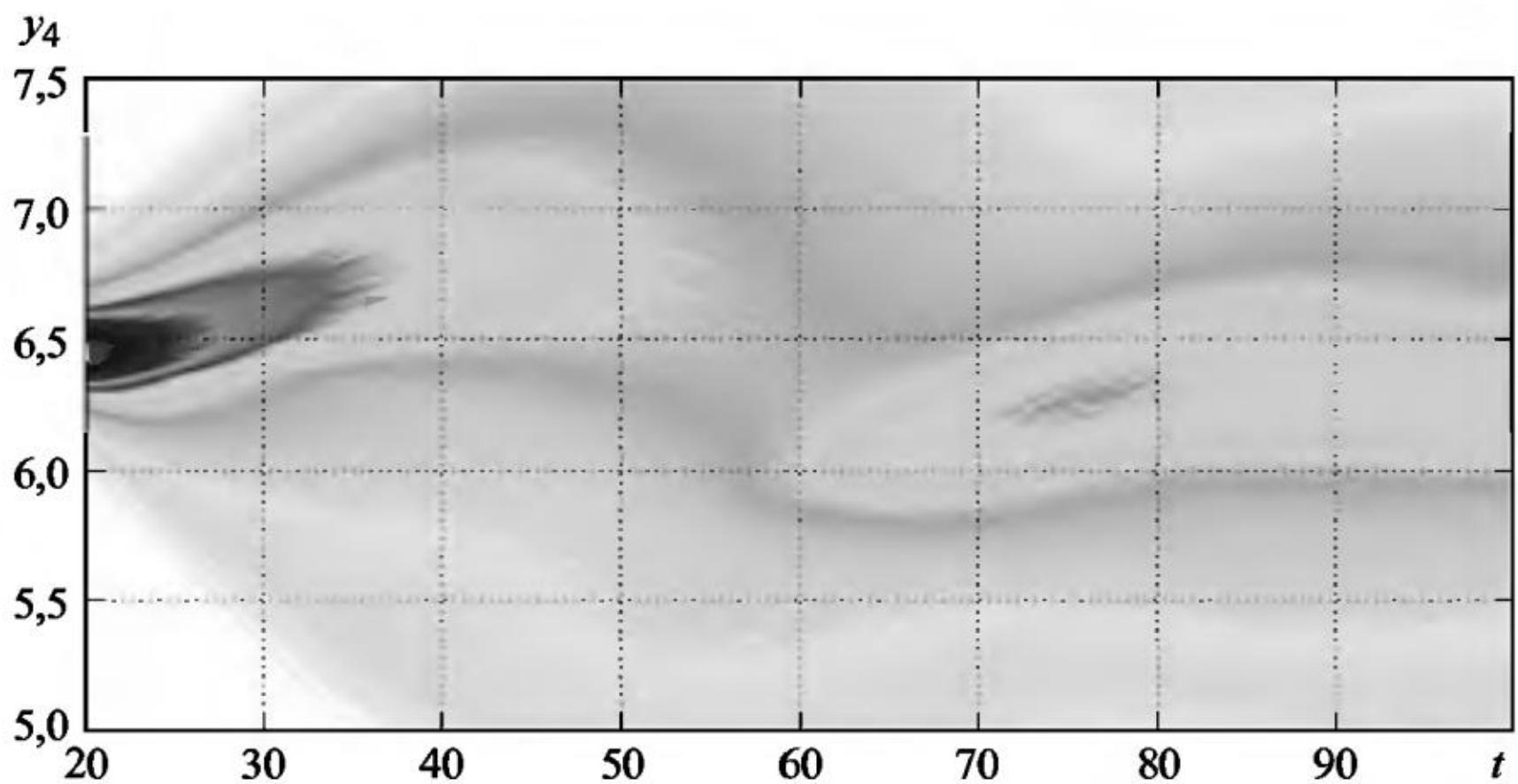


Рис. 13.33

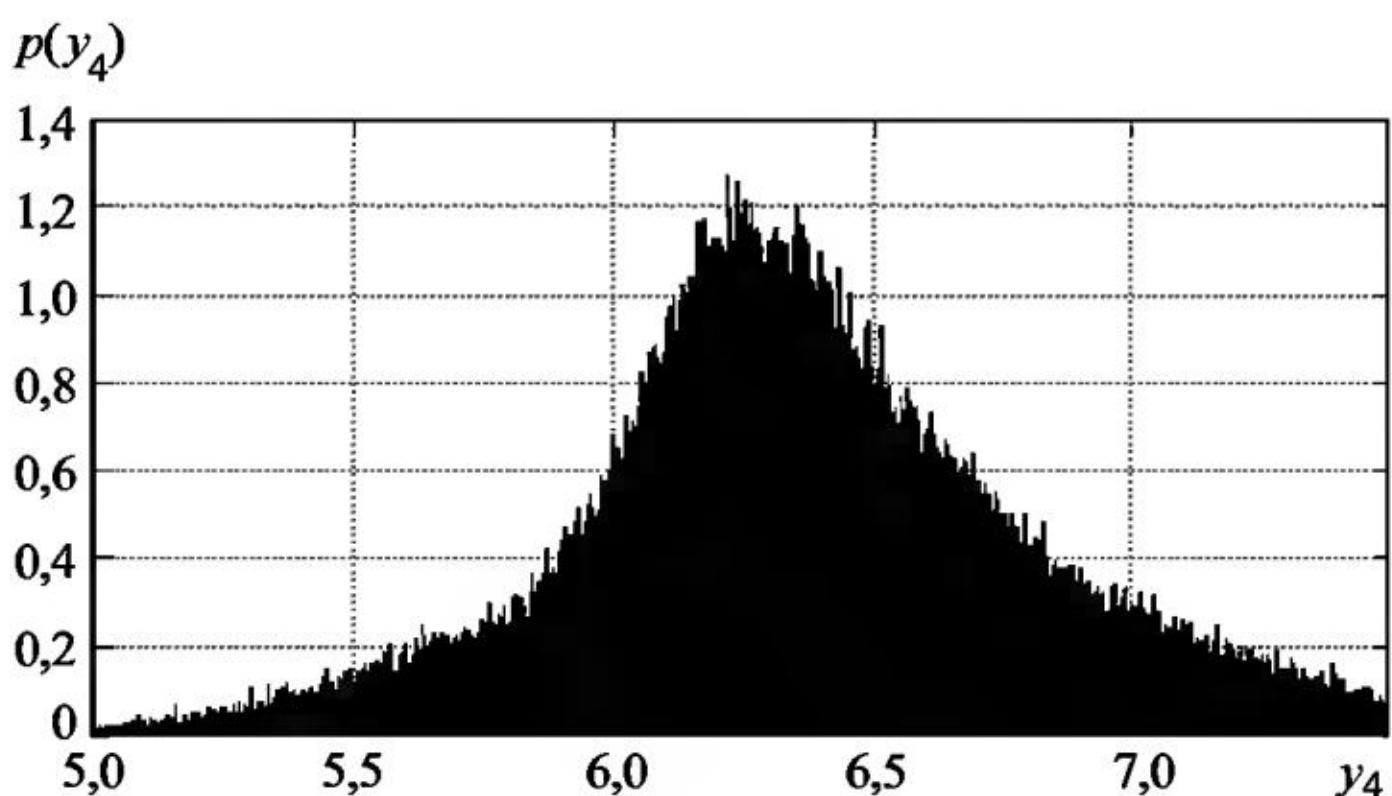


Рис. 13.34

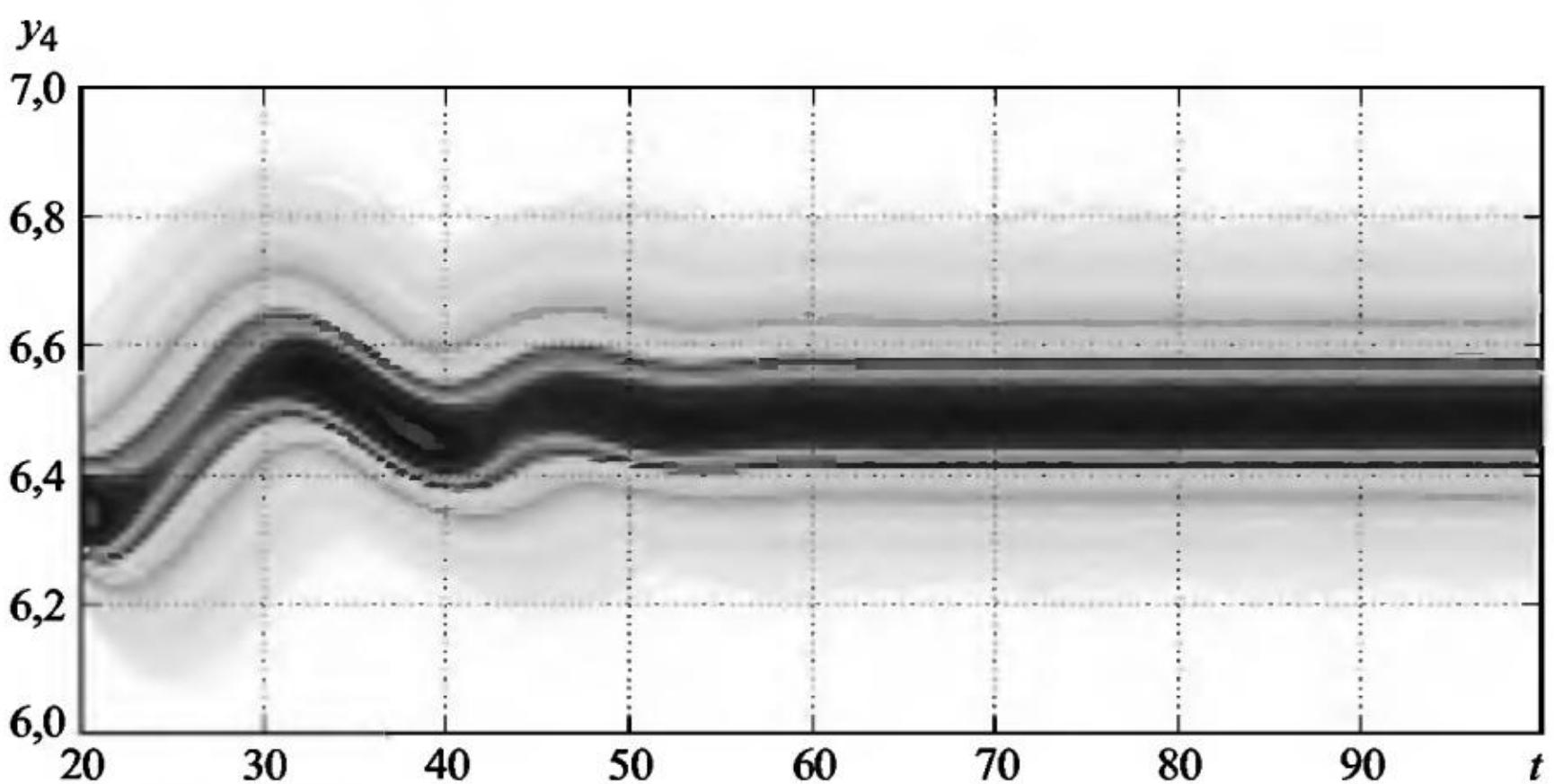


Рис. 13.35

На рис. 13.35 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_4 численного решения системы СДУ (13.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-2}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

На рис. 13.36 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_4 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 100$ численного решения системы СДУ (13.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-2}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

На рис. 13.37 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_4 численного решения системы СДУ (13.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

На рис. 13.38 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_4 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 100$ численного решения системы СДУ (13.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ при значении параметра $a = 10^{-2}$.

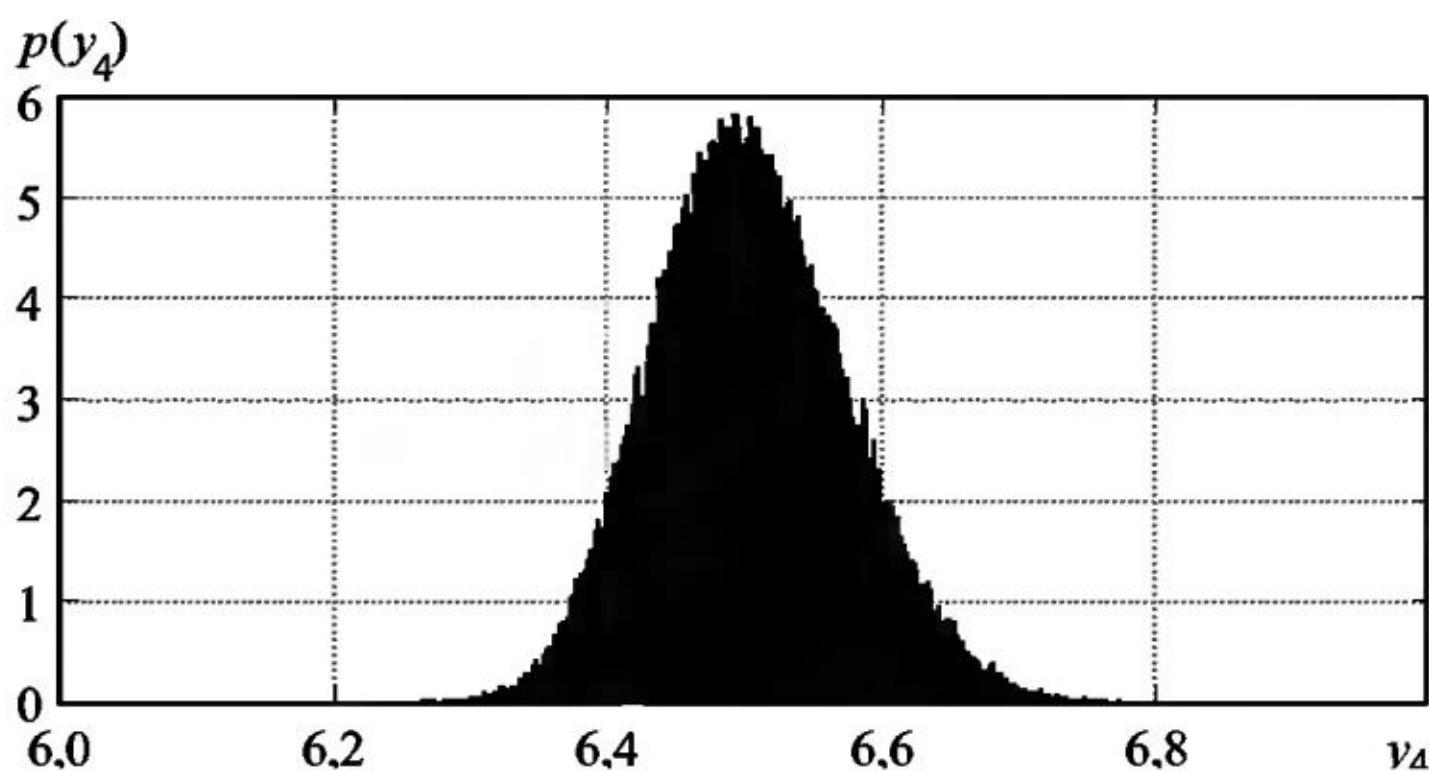


Рис. 13.36

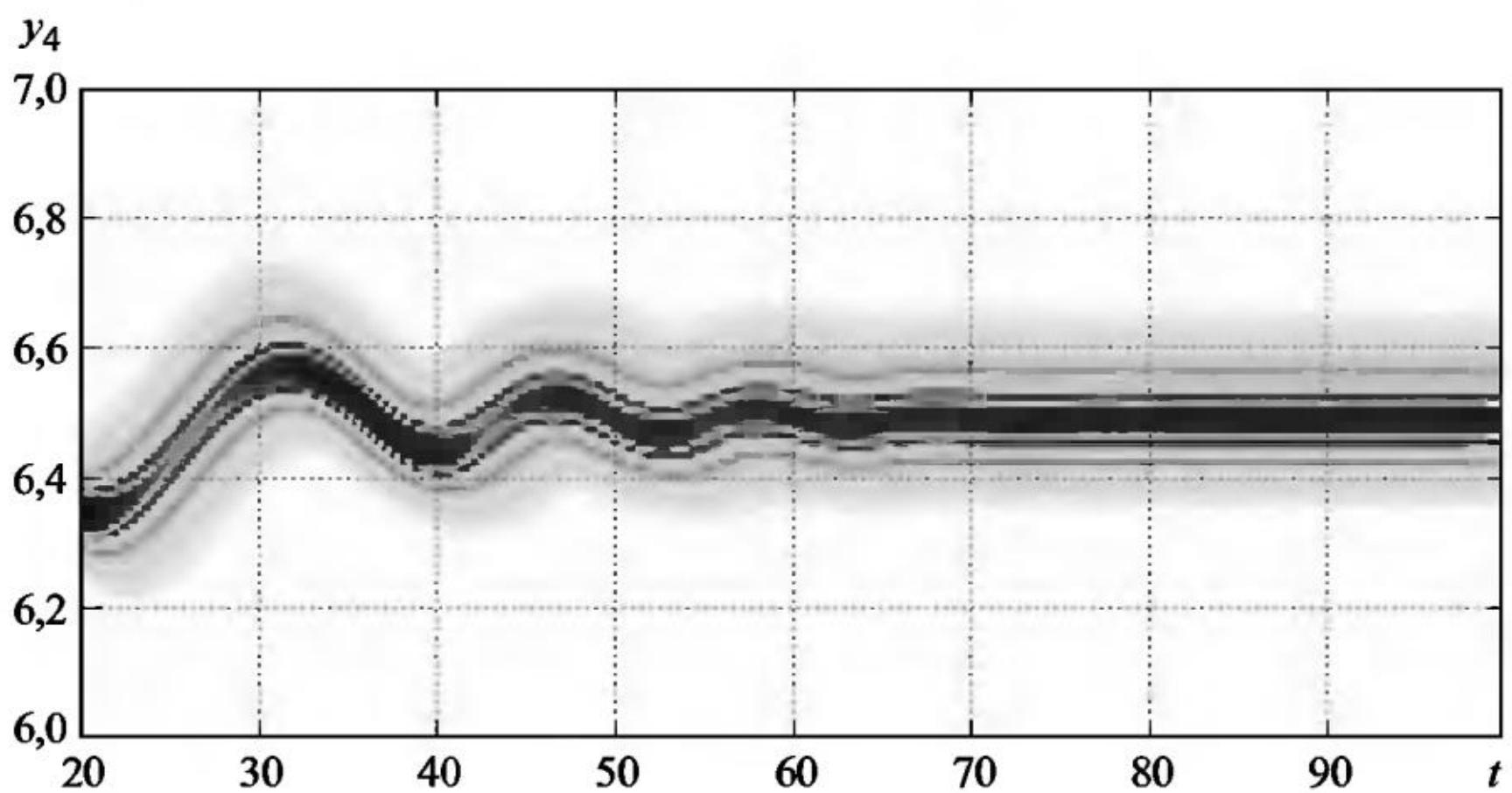


Рис. 13.37

Пример 13.3. Модель движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) по низкой орбите. Орбита, на которую выводится ИСЗ, с течением времени изменяется, это связано с тем, что на спутник действуют, хотя и небольшие, но в течение длительного времени аэродинамические силы, переменное с течением времени гравитационное поле, обусловленное влиянием других небесных тел (кроме Земли) и в первую очередь Луны. При движении ИСЗ по низкой орбите его динамика относительно центра масс в значительной степени определена аэродинамическими силами и моментами. Модель движения ИСЗ по низкой орбите задается с помощью системы ОДУ вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (r_0 + x) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - (r_0 + x) \cos^2(\theta) (\omega_0 + y)^2 = -\frac{\gamma_3}{(r_0 + x)^2}, \quad (13.5)$$

$$(r_0 + x) \frac{d^2\theta}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} \frac{d\theta}{dt} + (r_0 + x) \cos(\theta) \sin(\theta) (\omega_0 + y)^2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left((r_0 + x)^2 \cos^2(\theta) (\omega_0 + y) \right) = 0.$$

Введем обозначения: $y_1 = x$, $y_2 = \frac{dx}{dt}$, $y_3 = \theta$, $y_4 = \frac{d\theta}{dt}$, $y_5 = y$, где (r, ϕ, θ) – сферические координаты спутника, r – расстояние от центра Земли до спутника, r_0 – радиус программной орбиты, $x = r - r_0$, ω_0 – заданная угловая скорость спутника на программной орбите, $y = \frac{d\phi}{dt} - \omega_0$, y_3 – гравитационный параметр Земли. Учитывая внешние случайные шумы и задавая конкретные значения параметров, модель движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) по низкой орбите запишем в виде системы СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= 2, \\ dy_2 &= \left((a+y_1) \left(y_4^2 + \cos^2(y_3) (10^{-3} + y_5)^2 \right) - \frac{1}{(a+y_1)^2} \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_2(0) &= 0,1, \\ dy_3 &= y_4 dt, & y_3(0) &= 0,1, \\ dy_4 &= \left(-2 \frac{y_2 y_4}{a+y_1} - \frac{1}{2} (10^{-3} + y_5)^2 \sin(2y_3) \right) dt + \sigma_2 dw_2(t), & y_4(0) &= 0,1, \\ dy_5 &= \left(-2 \frac{y_2 (10^{-3} + y_5)}{a+y_1} + 2 y_4 (10^{-3} + y_5) \frac{\sin(y_3)}{\cos(y_3)} \right) dt + \sigma_3 dw_3(t), & y_5(0) &= 0,1. \end{aligned} \quad (13.6)$$

При численных расчетах моделировалось $N_{tr} = 10^6$ траекторий с шагом интегрирования $h = 10^{-5}$ на интервале $[0, 200]$. На рис. 13.39 и 13.40 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) численного решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 1$ и $a = 0,1$.

На рис. 13.41 и 13.42 приведены графики ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (13.6) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значениях параметра $a = 1$ и $a = 0,1$.

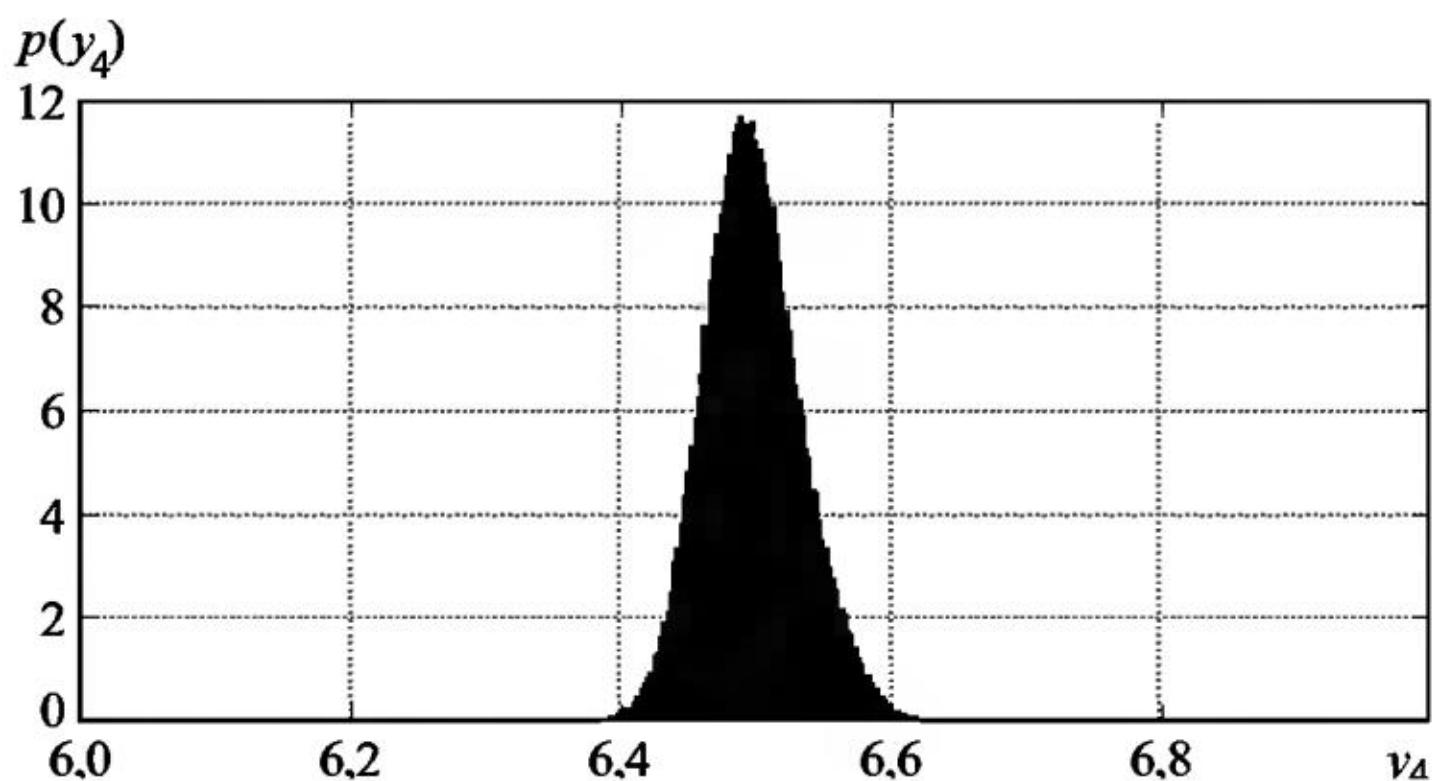


Рис. 13.38

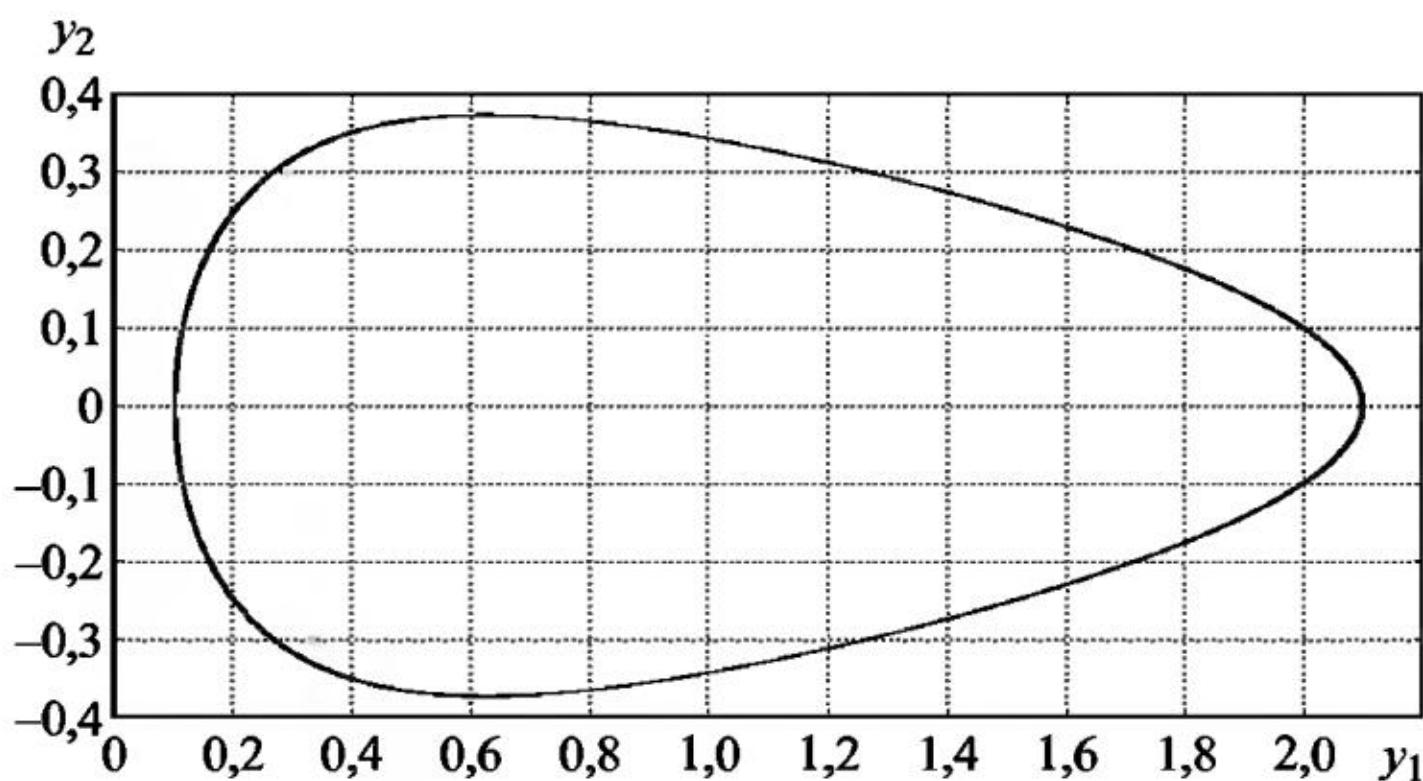


Рис. 13.39

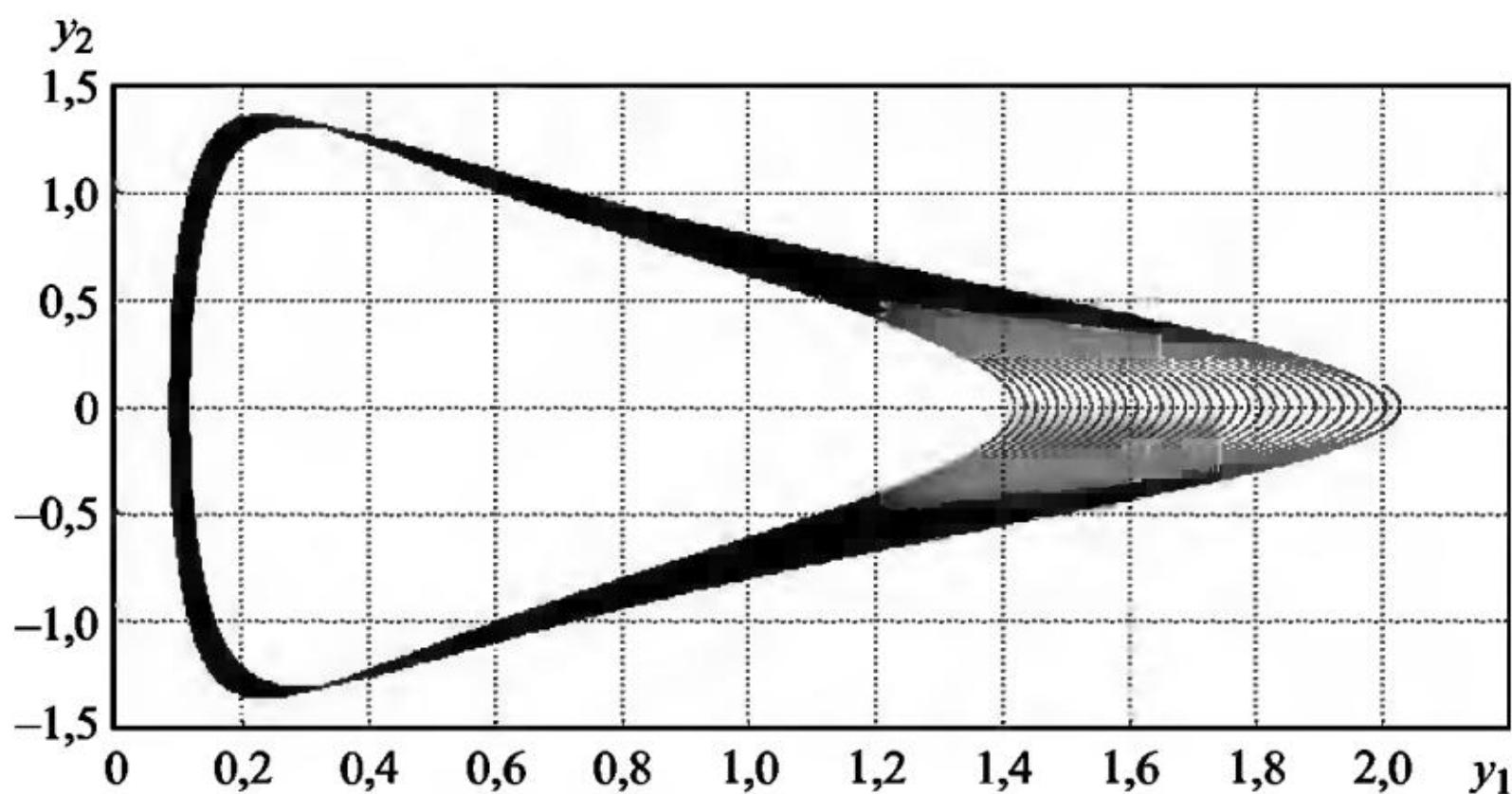


Рис. 13.40

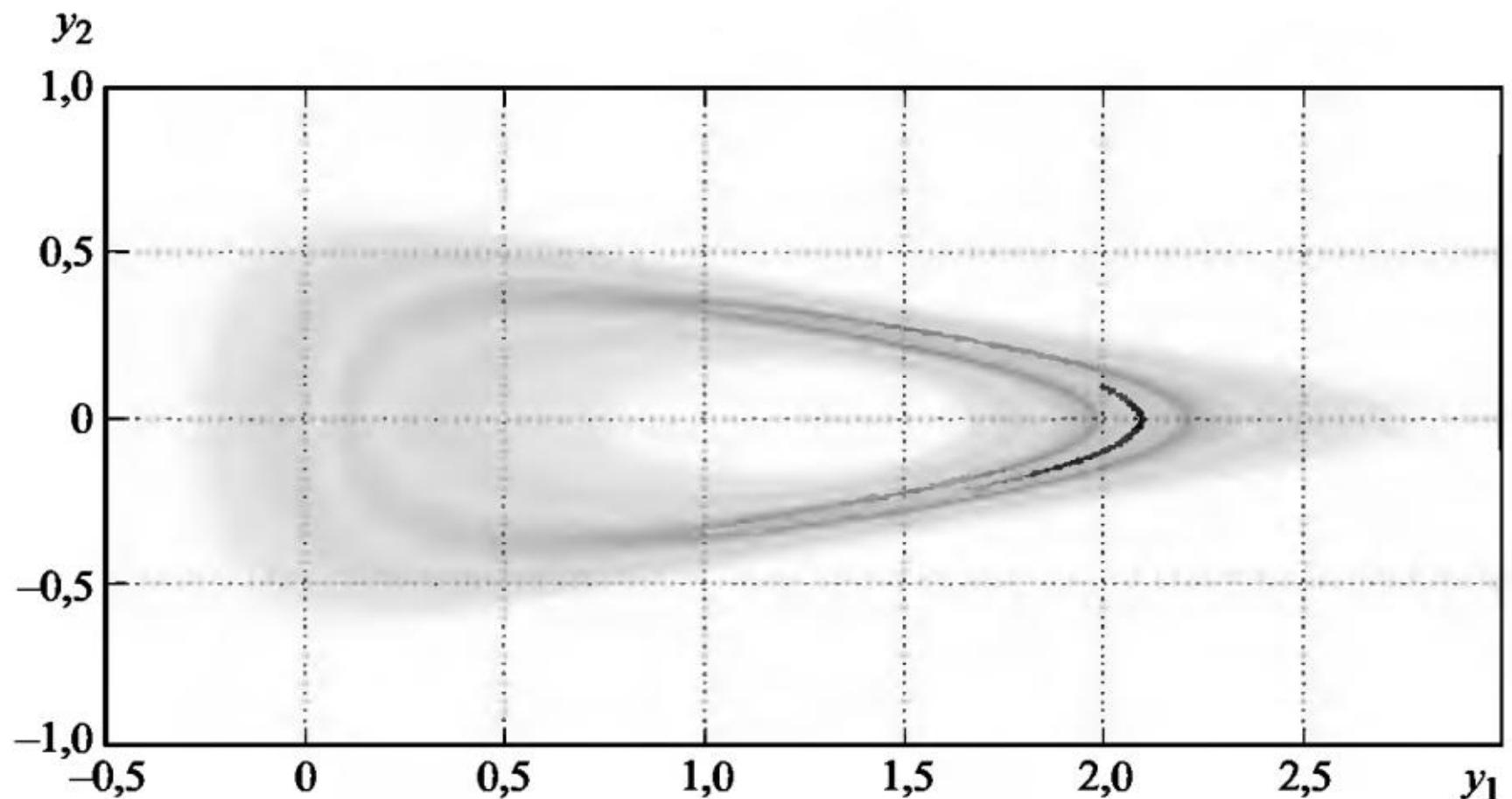


Рис. 13.41

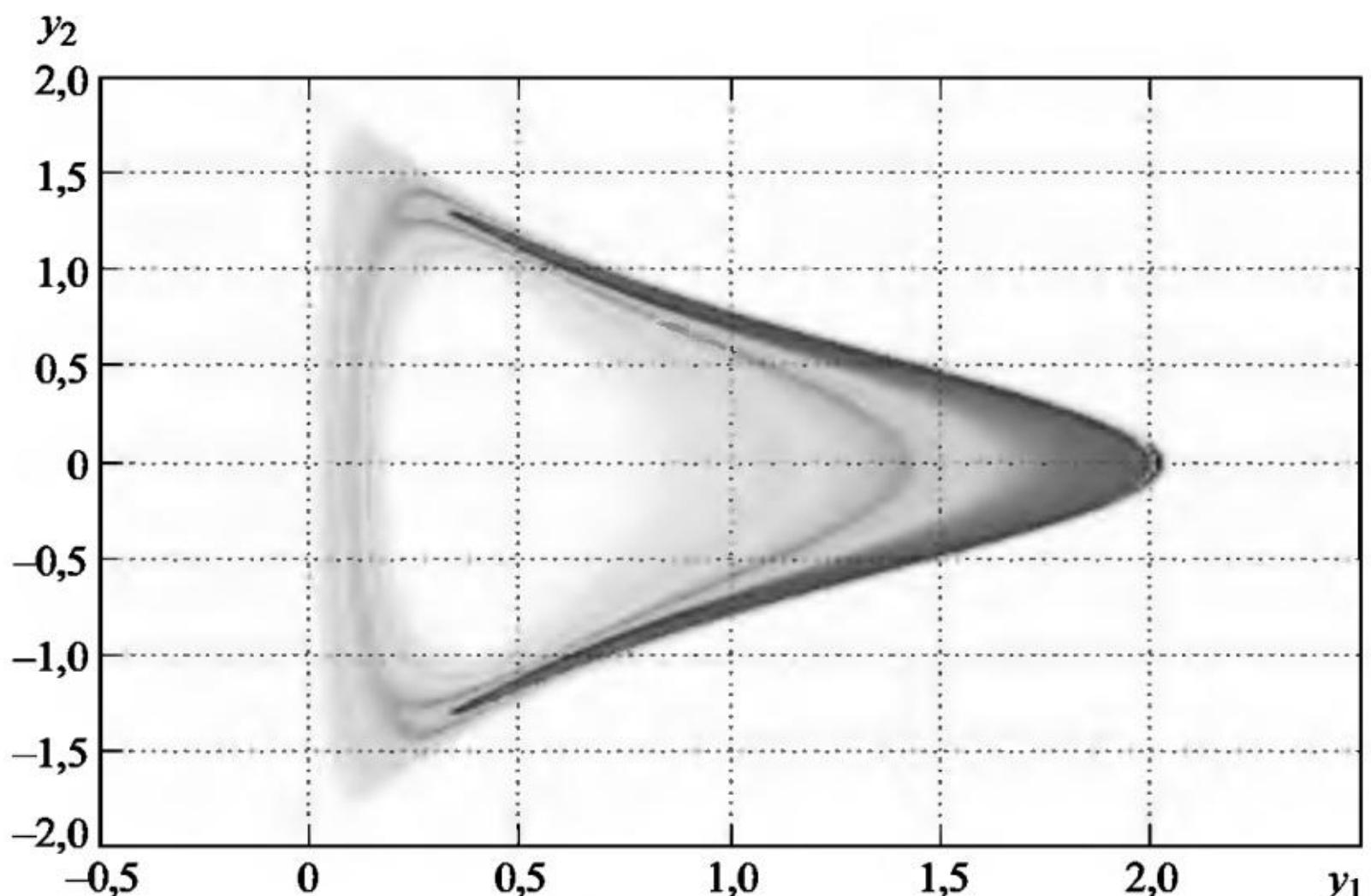


Рис. 13.42

На рис. 13.43 приведен график ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (13.6) с шумами большей интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 3 \cdot 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,1$.

На рис. 13.44 и 13.45 приведены графики интегральной кривой компоненты y_1 численного решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 1$ и $a = 0,1$.

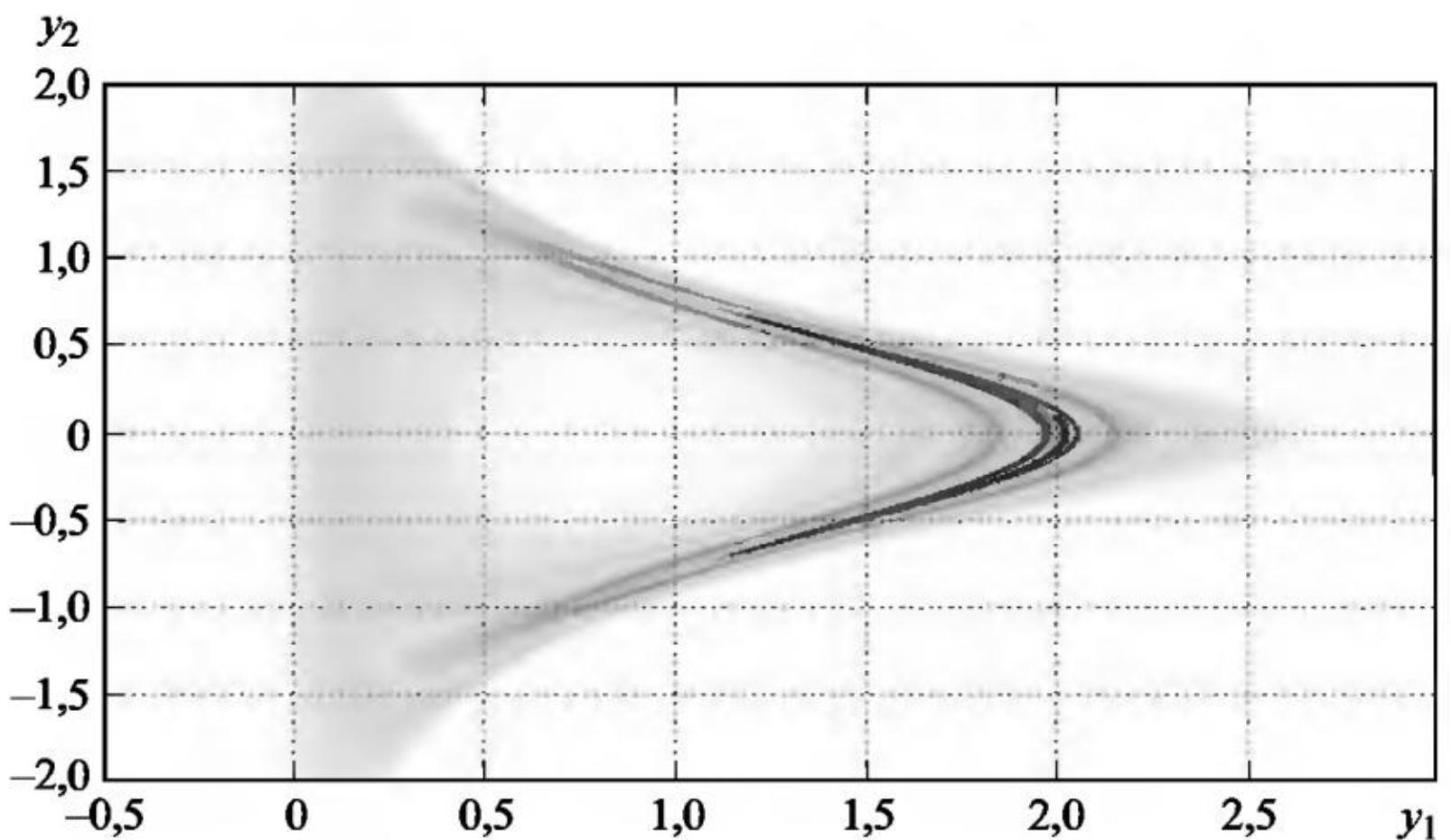


Рис. 13.43

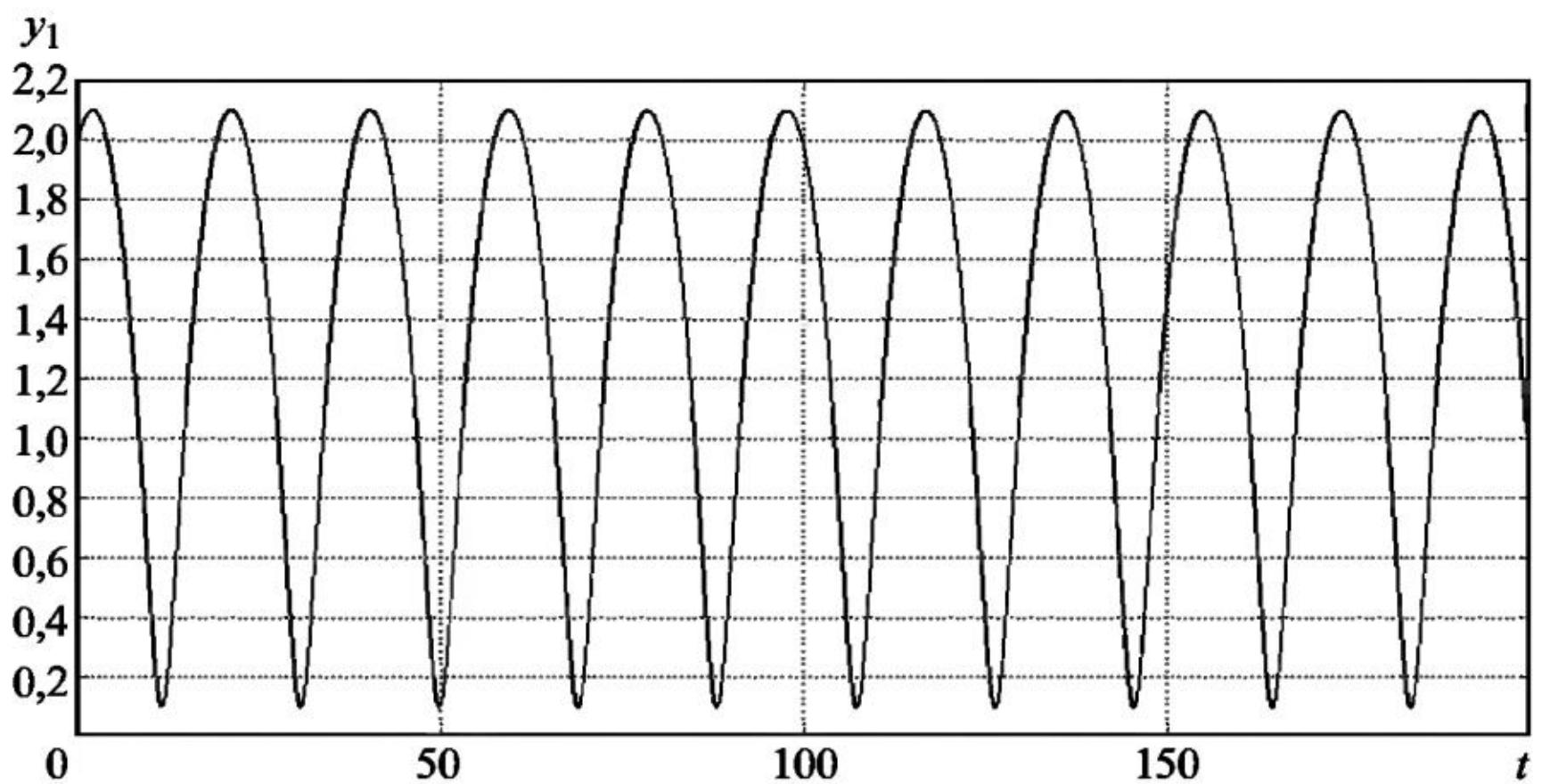


Рис. 13.44

Как видно из рис. 13.44 и 13.45, при уменьшении значения параметра a значительно увеличивается частота колебаний компоненты y_1 и амплитуда колебаний монотонно уменьшается.

На рис. 13.46 и 13.47 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_1 численного решения системы СДУ (13.6) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 1$.

На рис. 13.48 и 13.49 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_1 численного решения

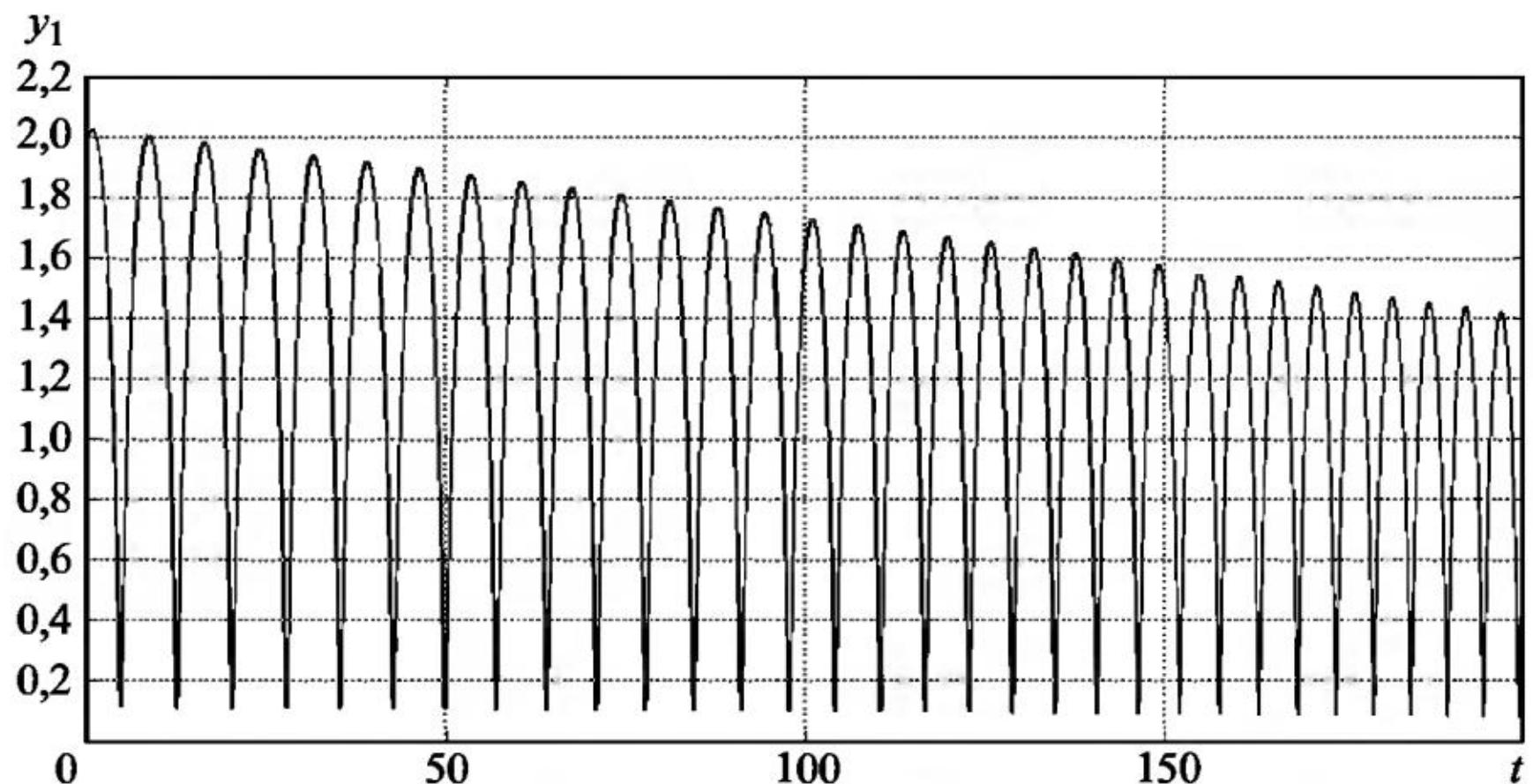


Рис. 13.45

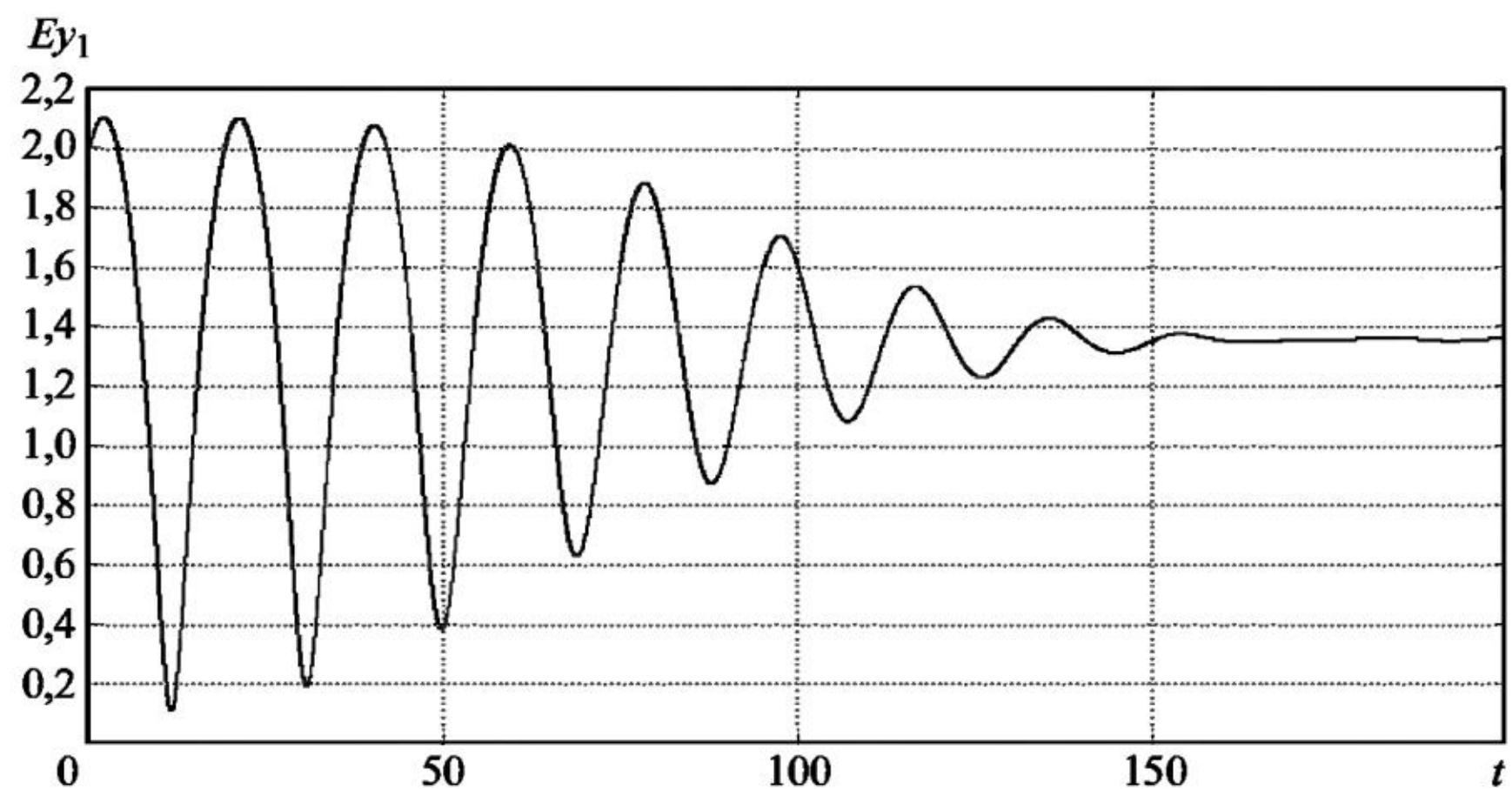


Рис. 13.46

системы СДУ (13.6) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,1$.

На рис. 13.50 и 13.51 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_1 численного решения системы СДУ (13.6) с шумами большей интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,1$.

Как видно из графиков, оценки математического ожидания и дисперсии выходят на стационарные величины только при значении параметра $a = 1$.

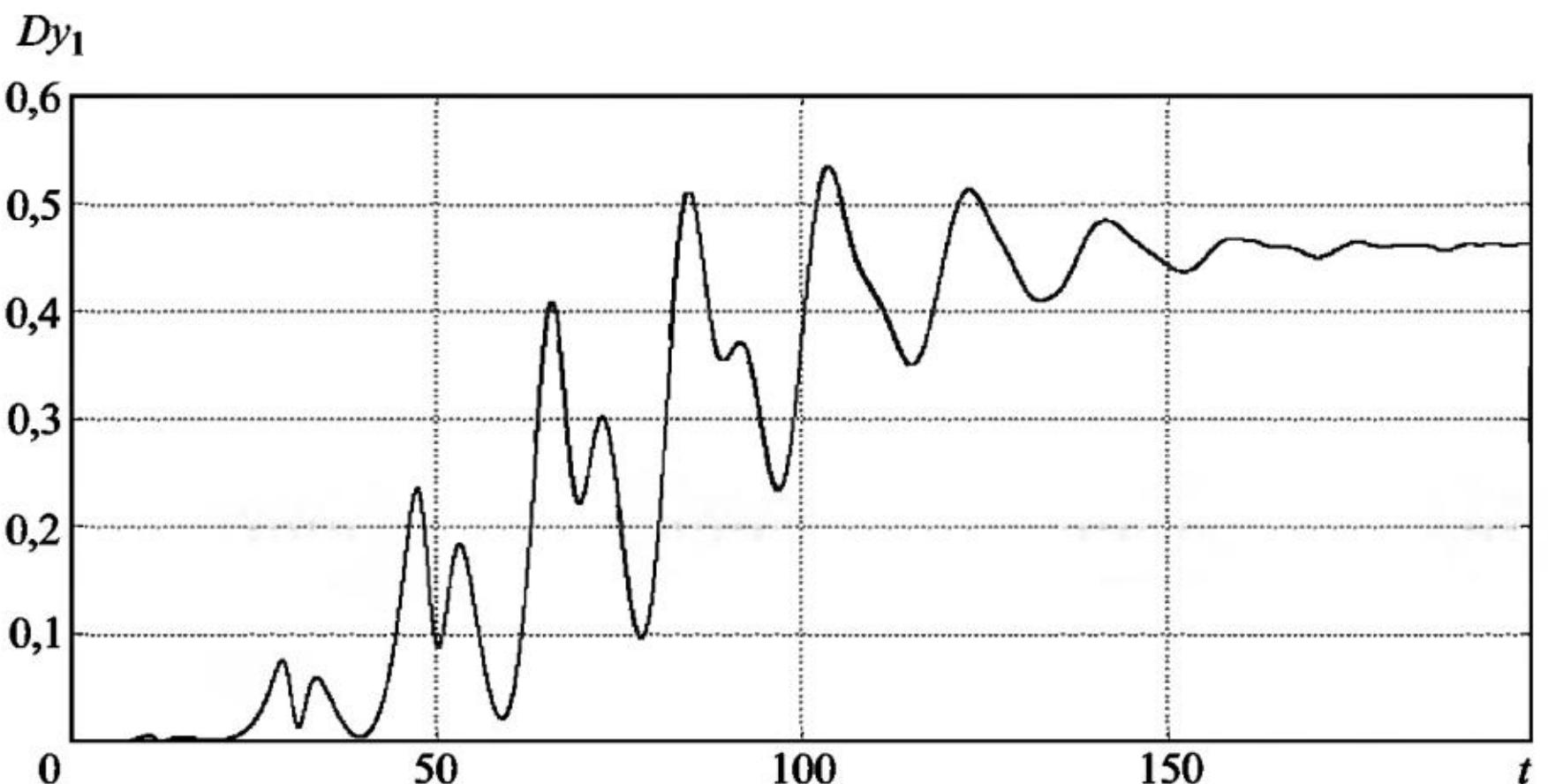


Рис. 13.47

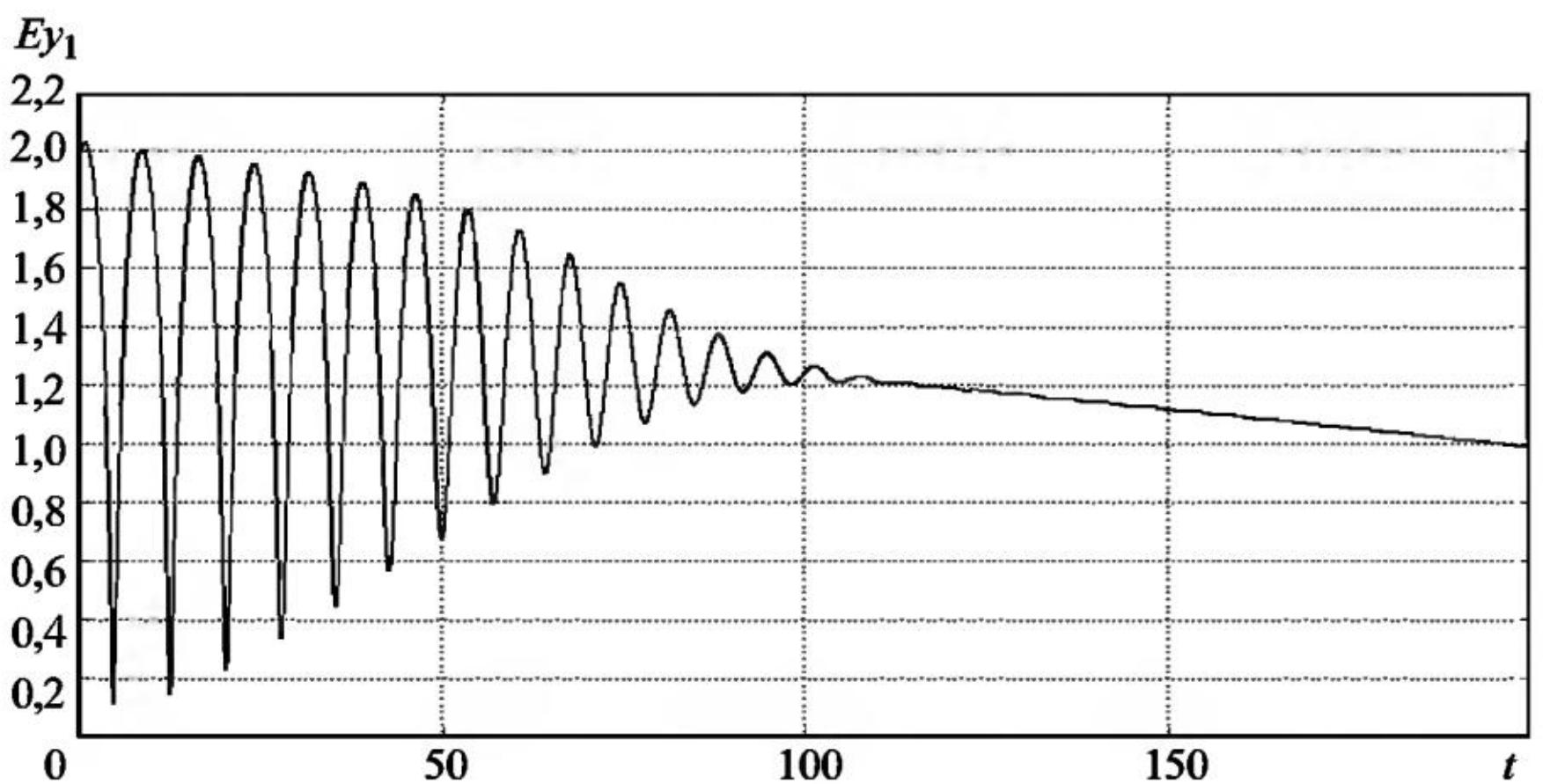


Рис. 13.48

Так как оценка дисперсии компоненты y_1 численного решения системы СДУ (13.6) на интервале $[0, 20]$ близка к нулю, то графики ЧИК далее строятся на интервале $[20, 200]$.

На рис. 13.52 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 численного решения системы СДУ (13.6) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 1$.

На рис. 13.53 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_1 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 200$ численного решения системы СДУ (13.6) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 1$.

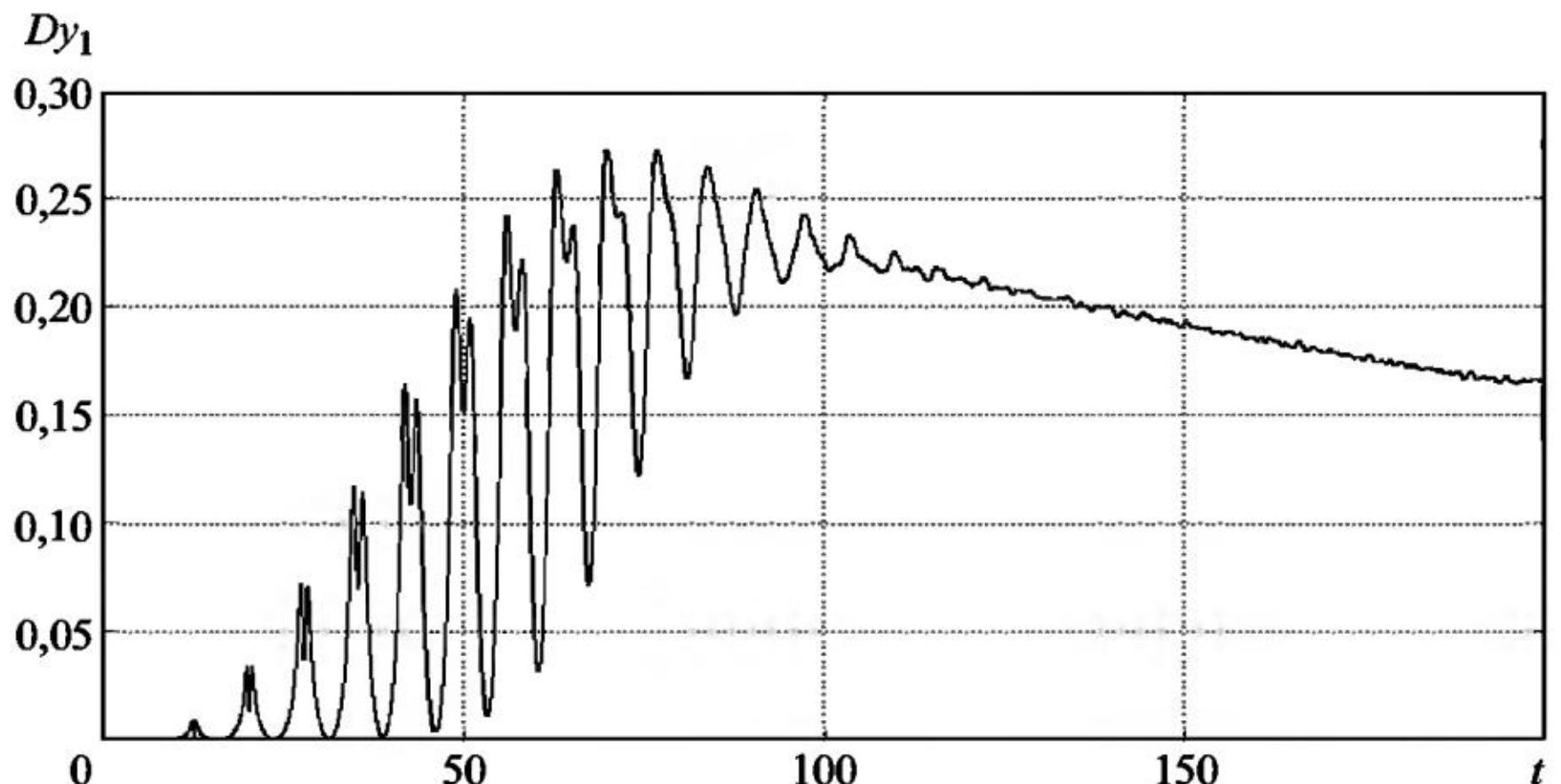


Рис. 13.49

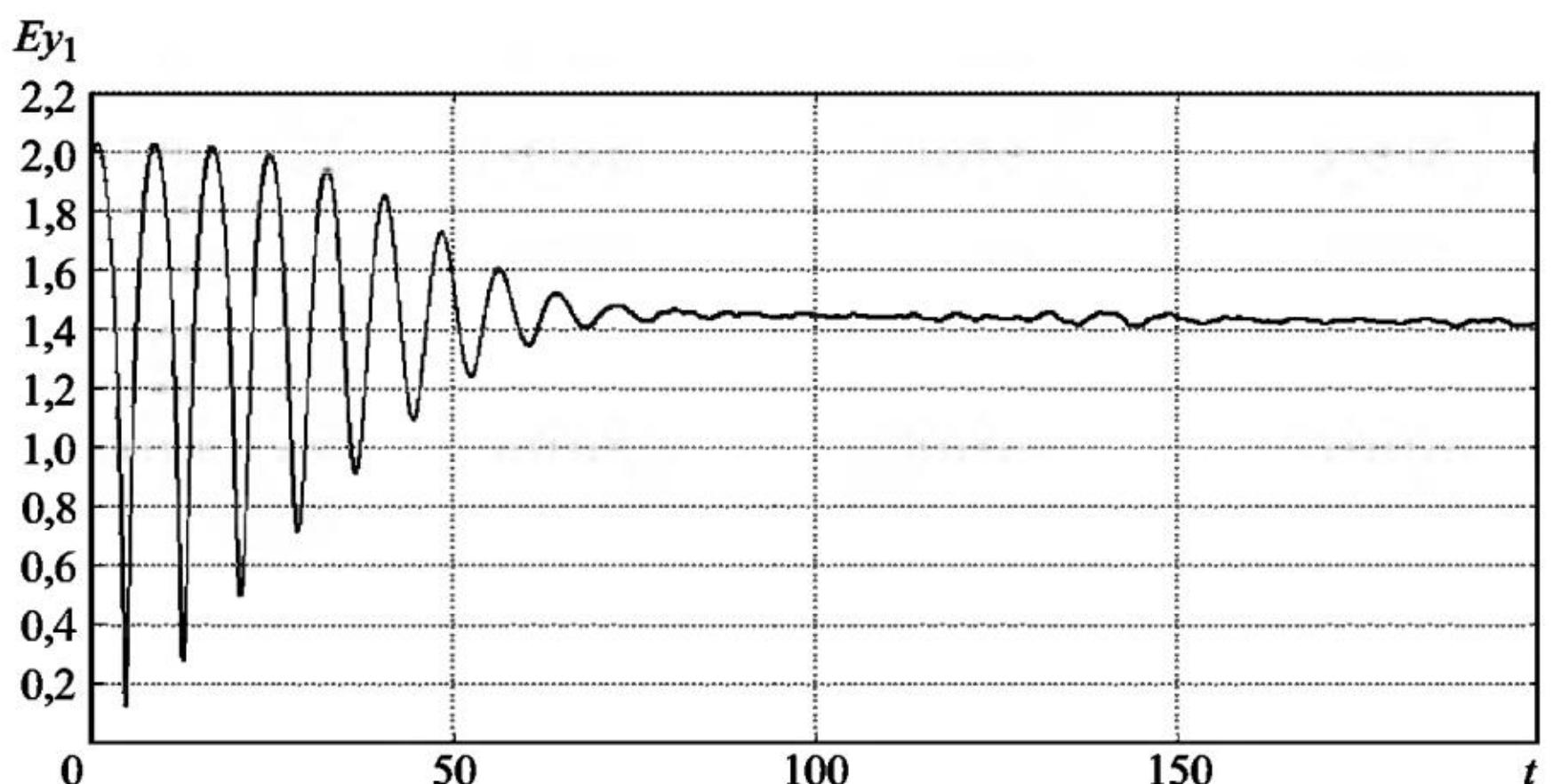


Рис. 13.50

На рис. 13.54 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 численного решения системы СДУ (13.6) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,1$.

На рис. 13.55 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_1 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 200$ численного решения системы СДУ (13.6) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,1$.

На рис. 13.56 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 численного решения системы СДУ (13.6) с шумами большей интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 3 \cdot 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,1$.

Dy_1

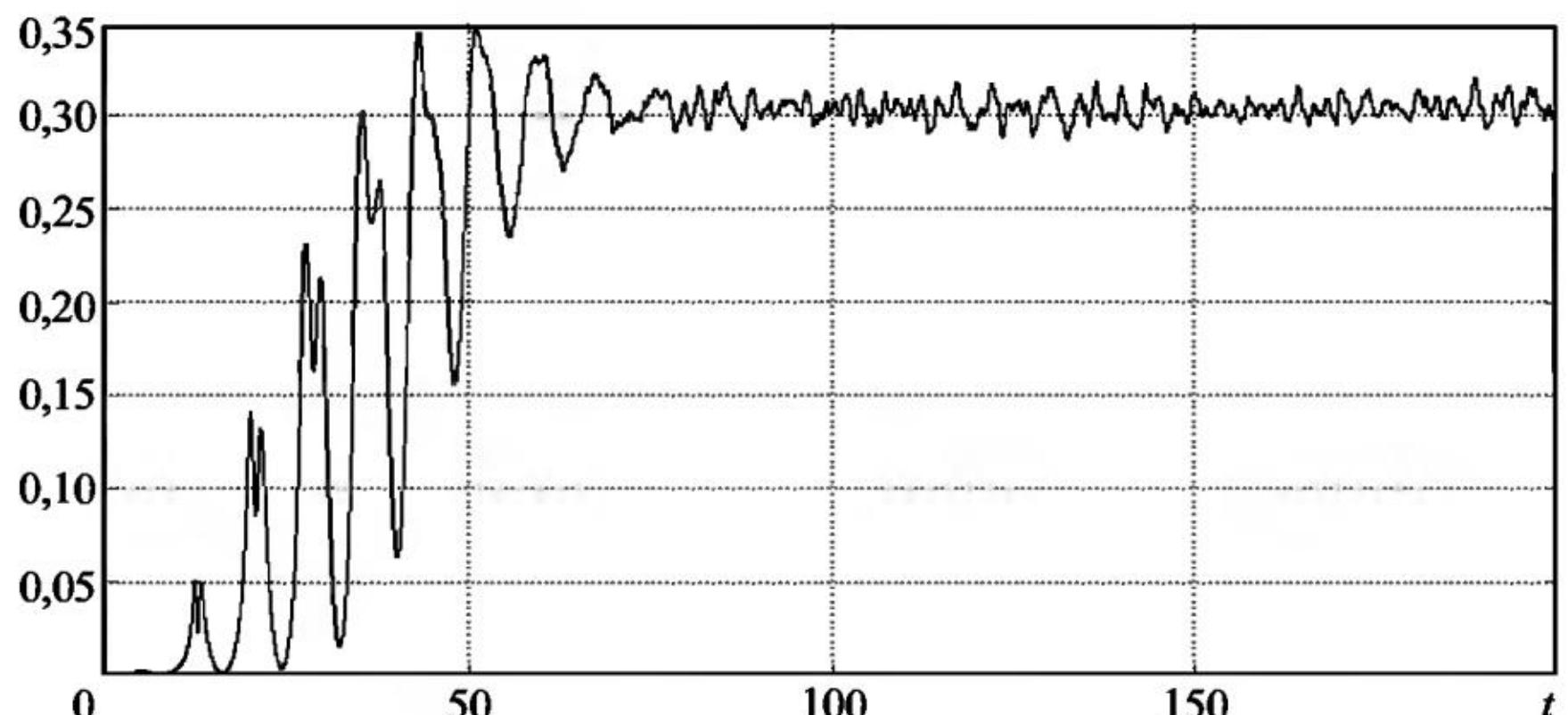


Рис. 13.51

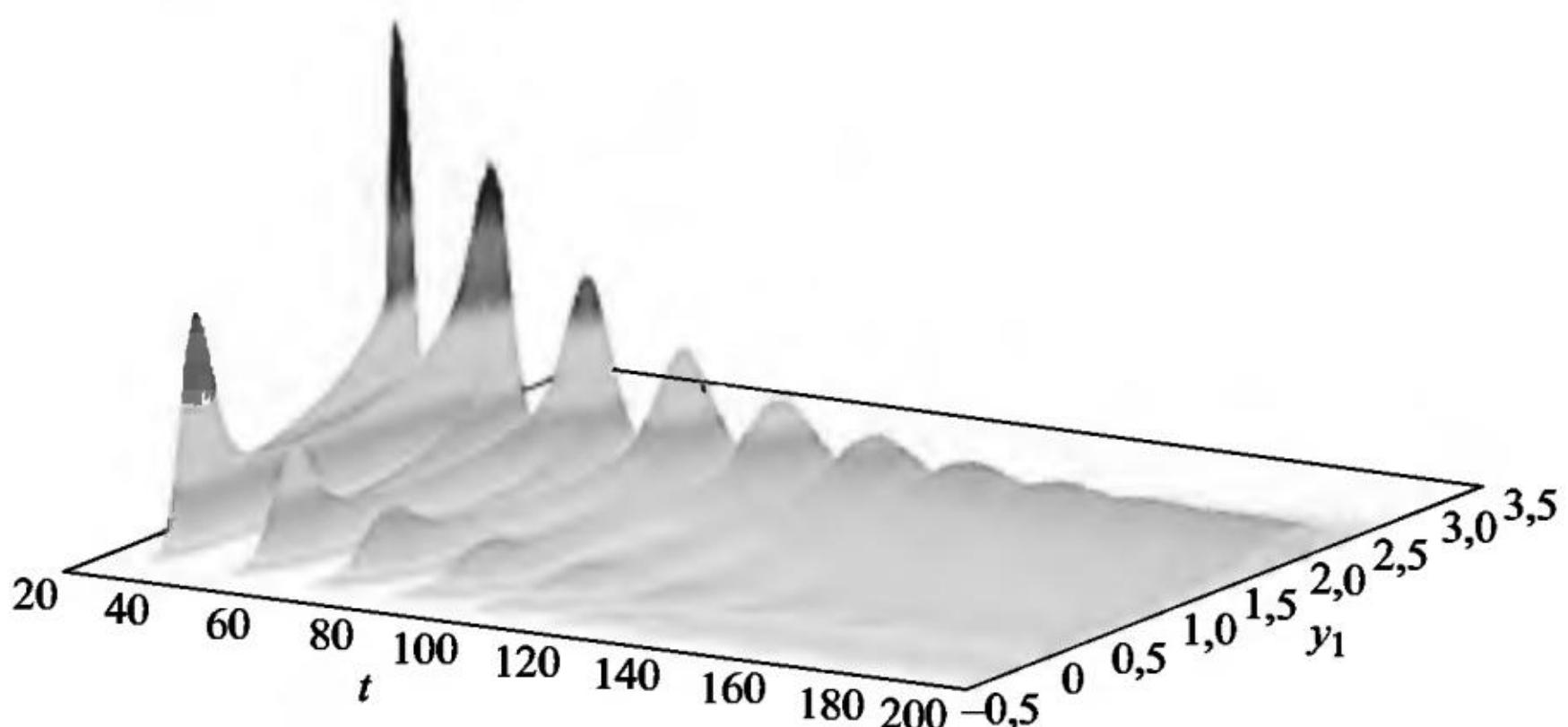


Рис. 13.52

На рис. 13.57 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_1 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 200$ численного решения системы СДУ (13.6) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 3 \cdot 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,1$.

Как видно из рис. 13.57, гистограмма сильно асимметрична и показывает большую вероятность ухода ИСЗ от Земли, чем приближения к ней.

Как видно из графиков ЧИК, колебательный характер случайного процесса $y_1(t)$ со временем исчезает.

Пример 13.4. Вращение ИСЗ на геостационарной орбите относительно центра масс.

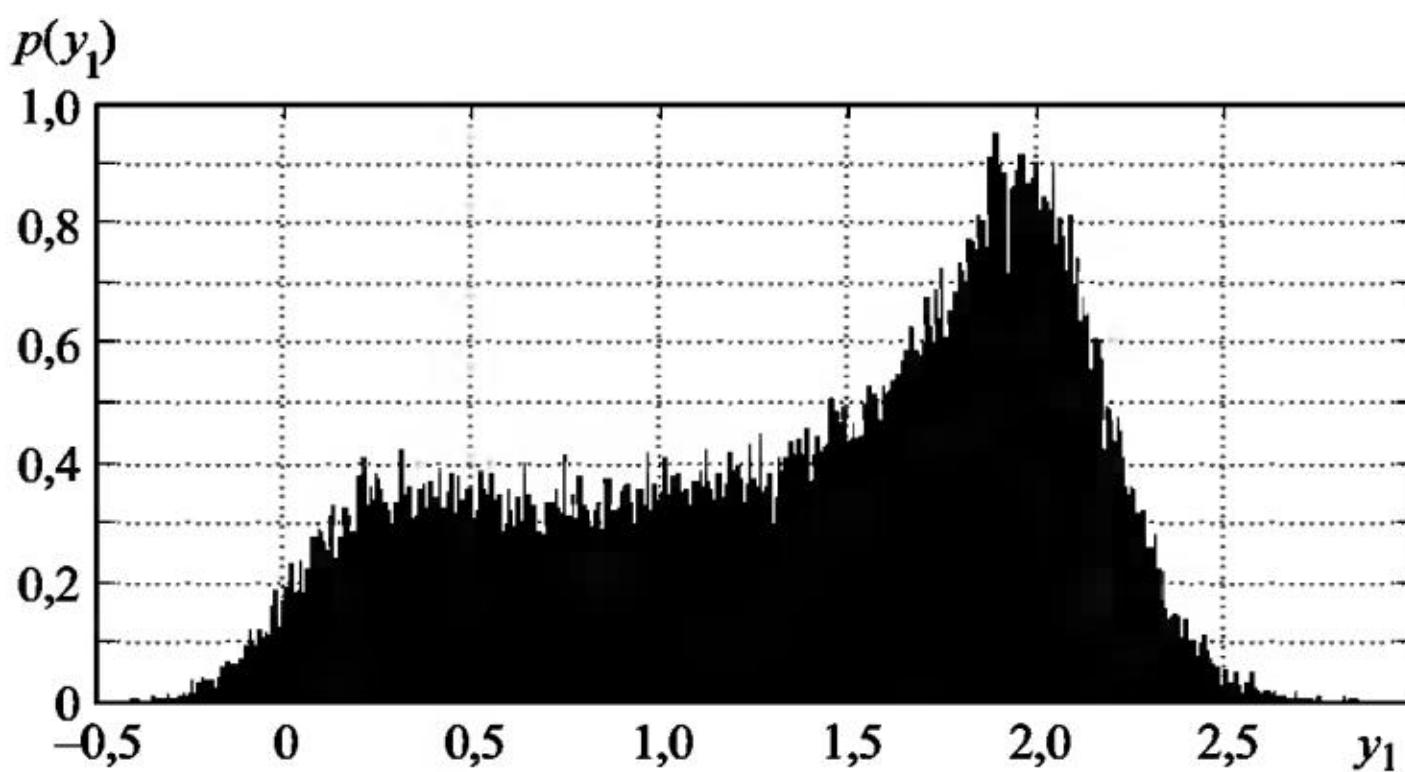


Рис. 13.53

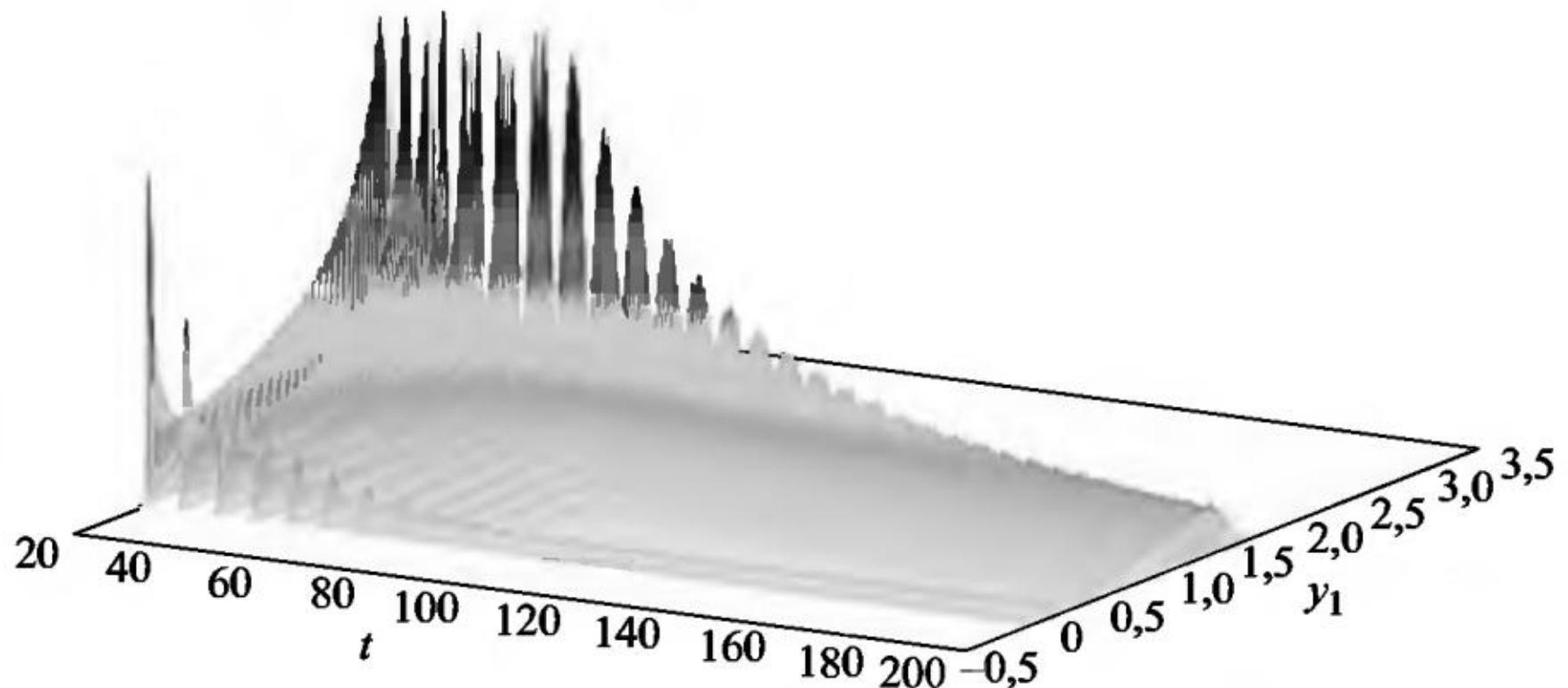


Рис. 13.54

Управление большинством ИСЗ на геостационарной орбите заключается в обеспечении их заданного углового положения относительно заданных ориентиров поворотом вокруг центра масс. В качестве ориентиров могут быть звезды, Солнце или направления в пространстве, подобные местной вертикали. При нахождении ИСЗ на орбите приходится проводить коррекции орбит с помощью реактивных двигателей и восстановление ориентации спутника с помощью гироскопов или двигателей малой тяги. Замкнутую систему уравнений движения ИСЗ относительно центра масс можно записать в виде системы ОДУ [25]

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu)} (\omega_y \cos(\gamma) - \omega_z \sin(\gamma)), \quad (13.7)$$

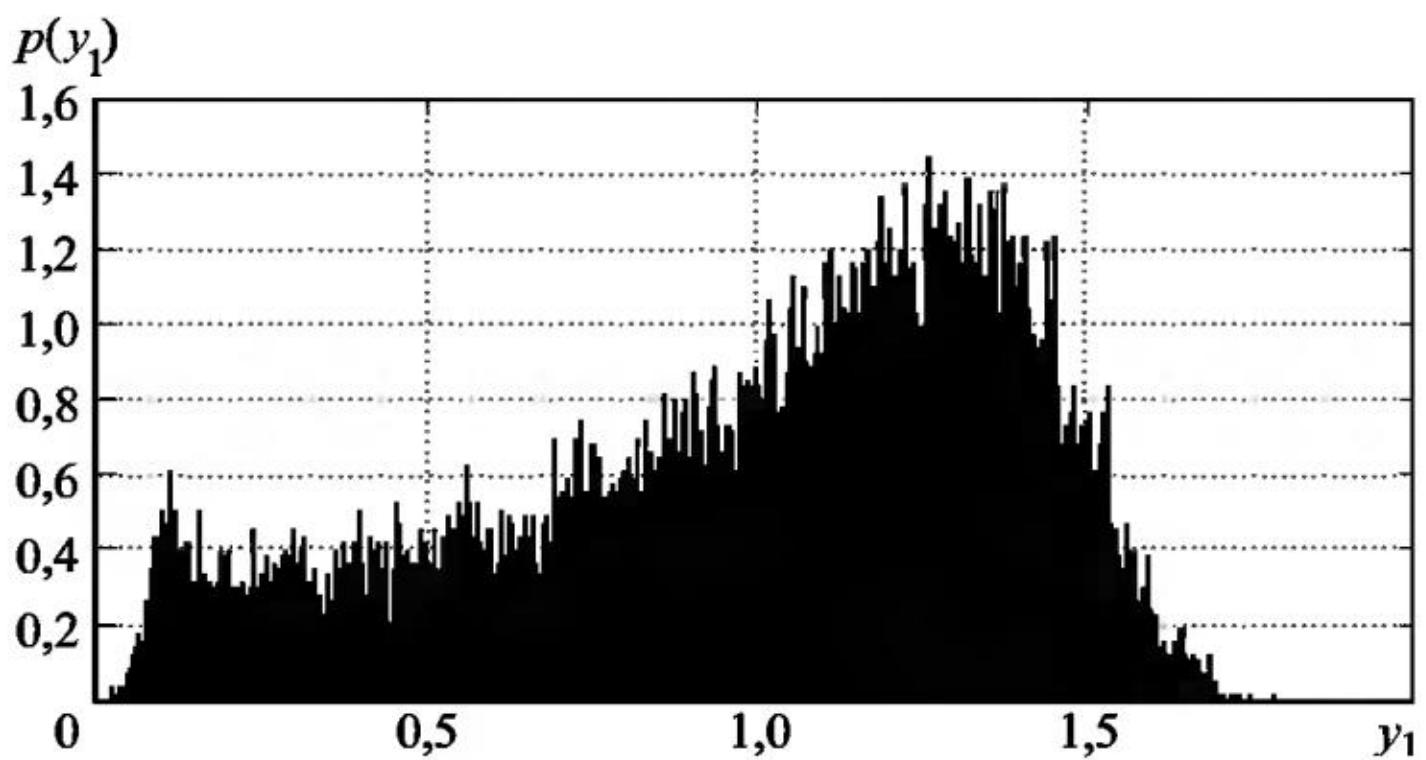


Рис. 13.55

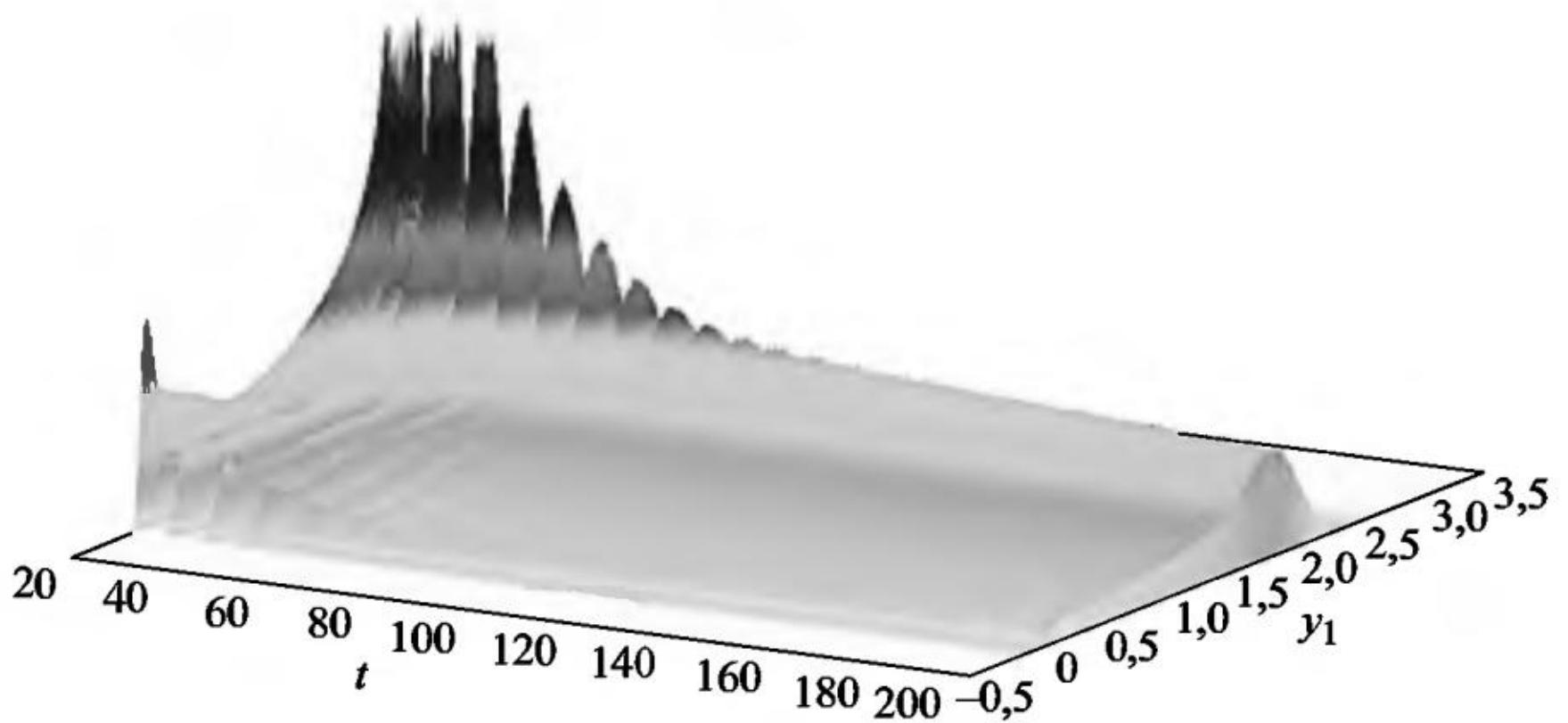


Рис. 13.56

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{1}{\cos(v)} (\omega_y \cos(\gamma) - \omega_z \sin(\gamma)),$$

$$\frac{dv}{dt} = \omega_y \sin(\gamma) + \omega_z \cos(\gamma),$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{1}{I_x} ((I_x - I_z) \omega_y \omega_z + M_{x\theta} - M_x),$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{1}{I_y} ((I_z - I_y) \omega_x \omega_z + M_{y\theta} - M_y),$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{1}{I_z} ((I_x - I_y) \omega_x \omega_y + M_{z\theta} - M_z).$$

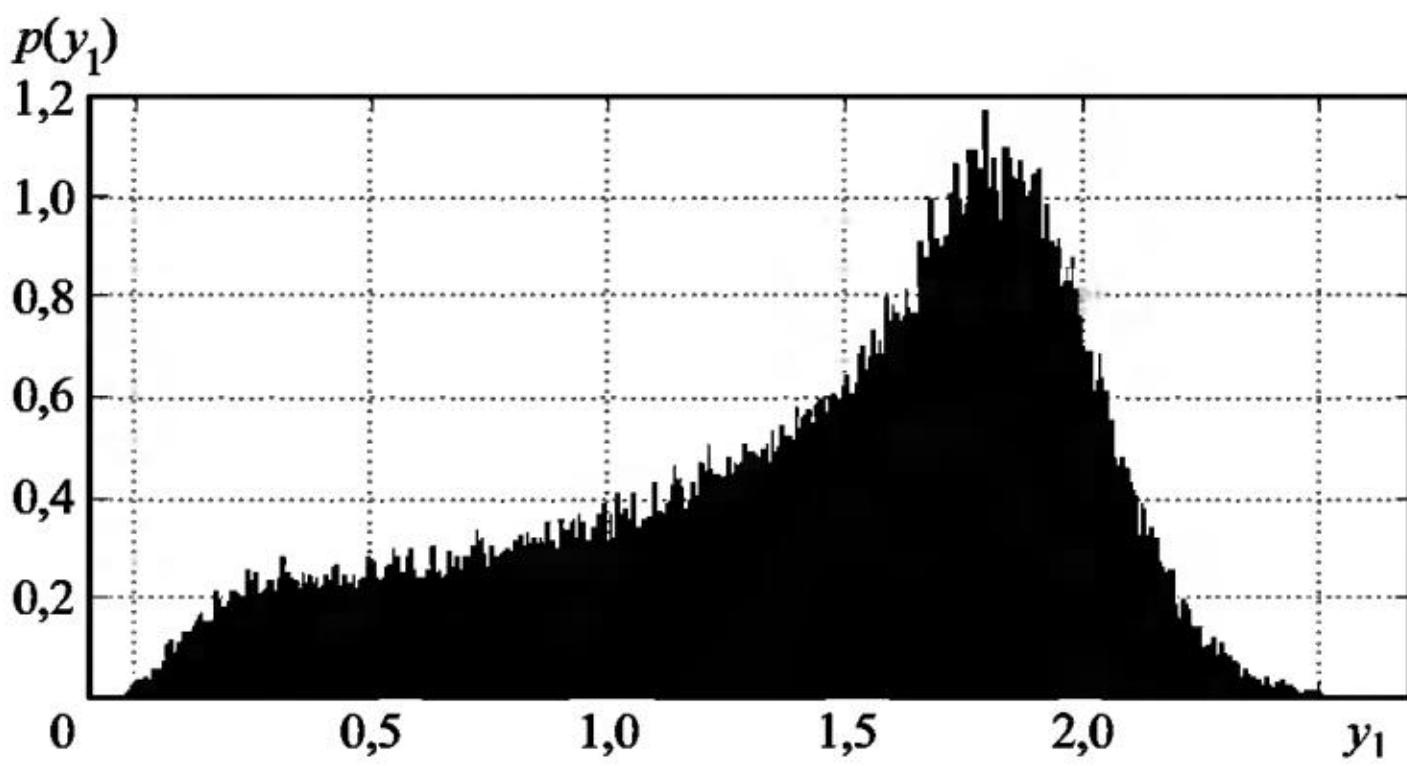


Рис. 13.57

Введем обозначения: $y_1 = \gamma$ – угол крена, $y_2 = \psi$ – угол рыскания, $y_3 = v$ – угол тангажа, $y_4 = \omega_x$, $y_5 = \omega_y$, $y_6 = \omega_z$ – компоненты вектора угловой скорости спутника, M_{x6} , M_{y6} , M_{z6} – компоненты вектора возмущающего момента, $M_x = 2\omega_0^2(I_z - I_y)\sin(2\gamma)$, $M_y = 0,5\omega_0^2(I_z - I_x)\sin(2\psi)$, $M_z = 1,5\omega_0^2(I_x - I_y)\sin(2v)$, I_x , I_y , I_z – главные центральные моменты инерции, ω_0 – орбитальная скорость спутника. Учитывая внешние случайные шумы и задавая конкретные значения параметров, модель вращения ИСЗ на геостационарной орбите относительно центра масс запишем в виде системы СДУ

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= \left(y_4 - \frac{\sin(y_3)}{\cos(y_3)}(y_5 \cos(y_1) - y_6 \sin(y_1)) \right) dt, & y_1(0) &= 10^{-1}, \\
 dy_2 &= \frac{1}{\cos y_3} (y_5 \cos(y_1) - y_6 \sin(y_1)) dt, & y_2(0) &= 10^{-1}, \\
 dy_3 &= (y_5 \sin(y_1) + y_6 \cos(y_1)) dt, & y_3(0) &= 10^{-1}, \\
 dy_4 &= (ay_5 y_6 - 0,1 \sin(2y_1) + 5 \cdot 10^{-4}) dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_4(0) &= 10^{-2}, \\
 dy_5 &= (0,1 y_4 y_6 + 0,45 \sin(2y_2) + 10^{-3}) dt + \sigma_2 dw_2(t), & y_5(0) &= 10^{-2}, \\
 dy_6 &= (0,91 y_4 y_5 - 1,37 \sin(2y_3) + 9,1 \cdot 10^{-4}) dt + \sigma_3 dw_3(t), & y_6(0) &= 10^{-2}.
 \end{aligned} \tag{13.8}$$

При численных расчетах моделировалось $N_{tr} = 10^6$ траекторий с шагом интегрирования $h = 10^{-5}$ на интервале $[0, 40]$.

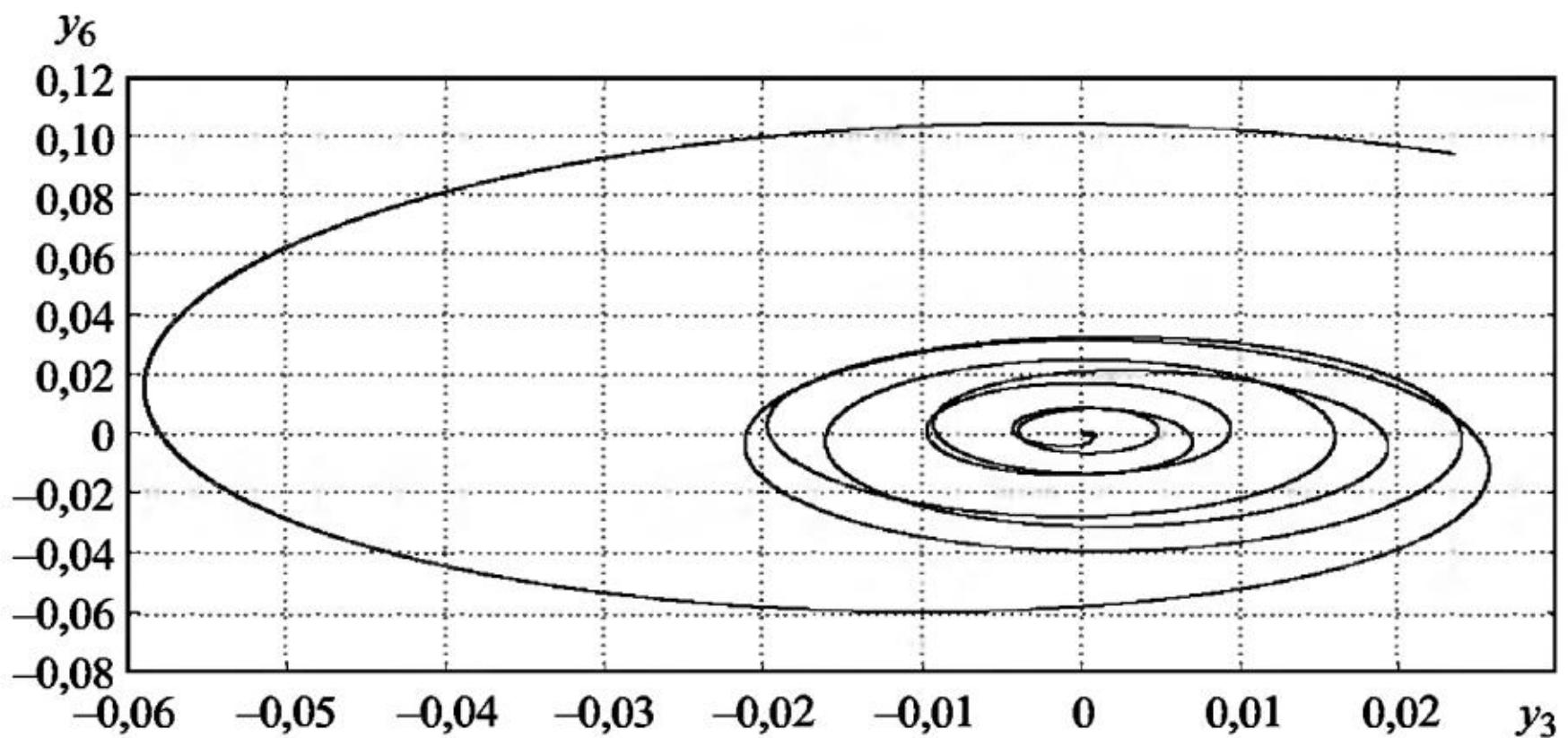


Рис. 13.58

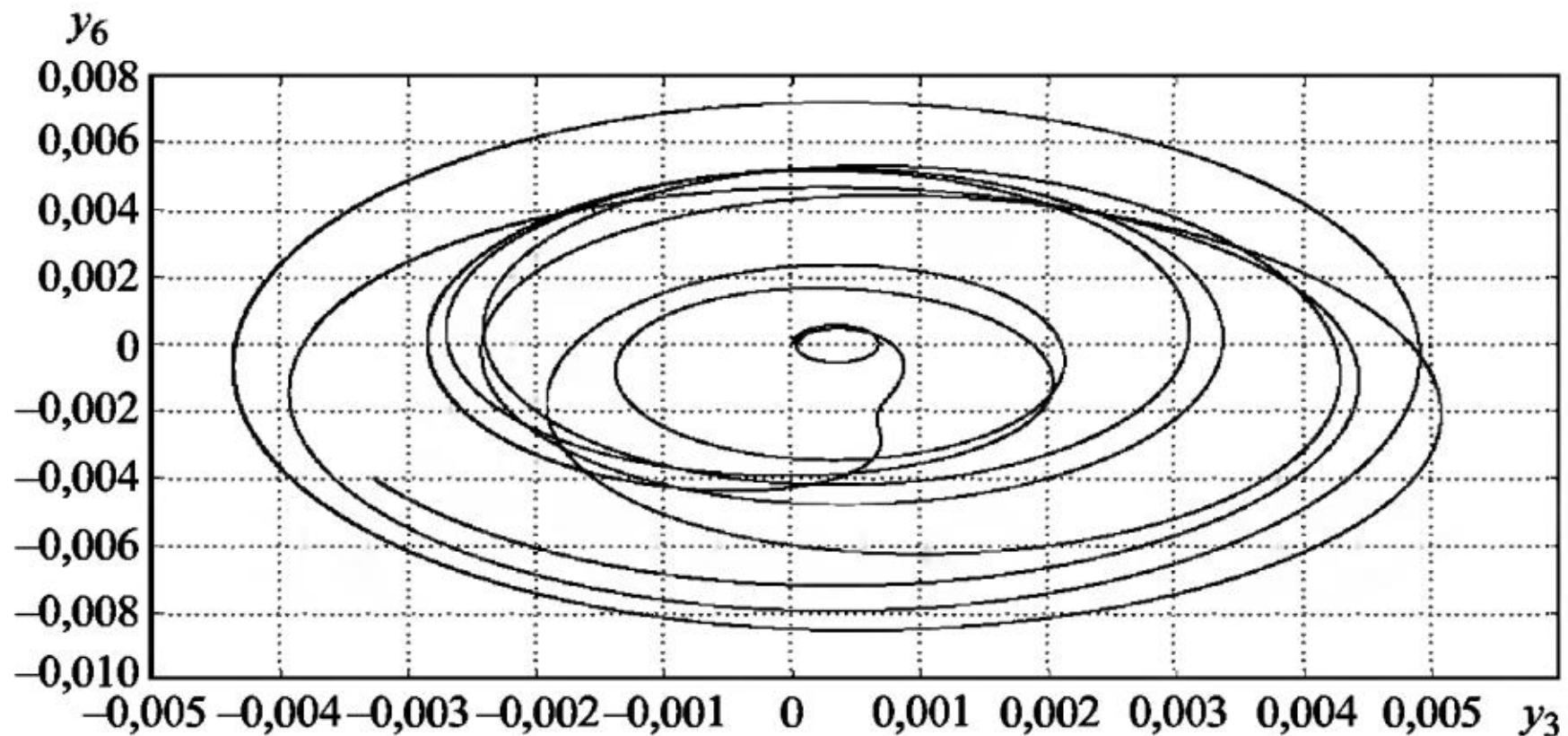


Рис. 13.59

На рис. 13.58 и 13.59 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_3, y_6) численного решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 0,9$ и $a = 0,45$.

На рис. 13.60 и 13.61 приведены графики ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_3, y_6) численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значениях параметра $a = 0,9$ и $a = 0,45$.

На рис. 13.62 приведен график ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_3, y_6) численного решения системы СДУ (13.8) с шумами меньшей интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 0,45$.

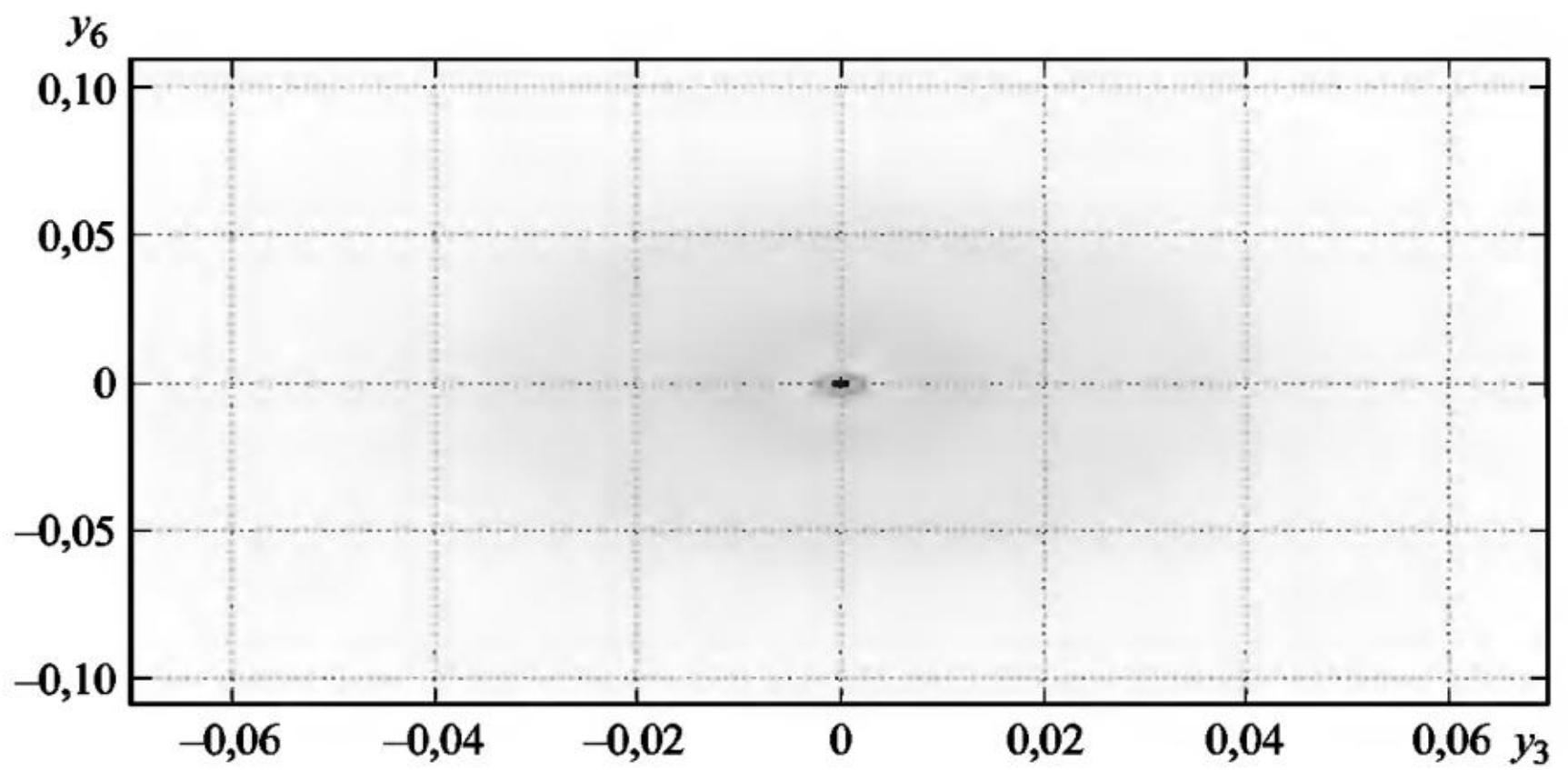


Рис. 13.60

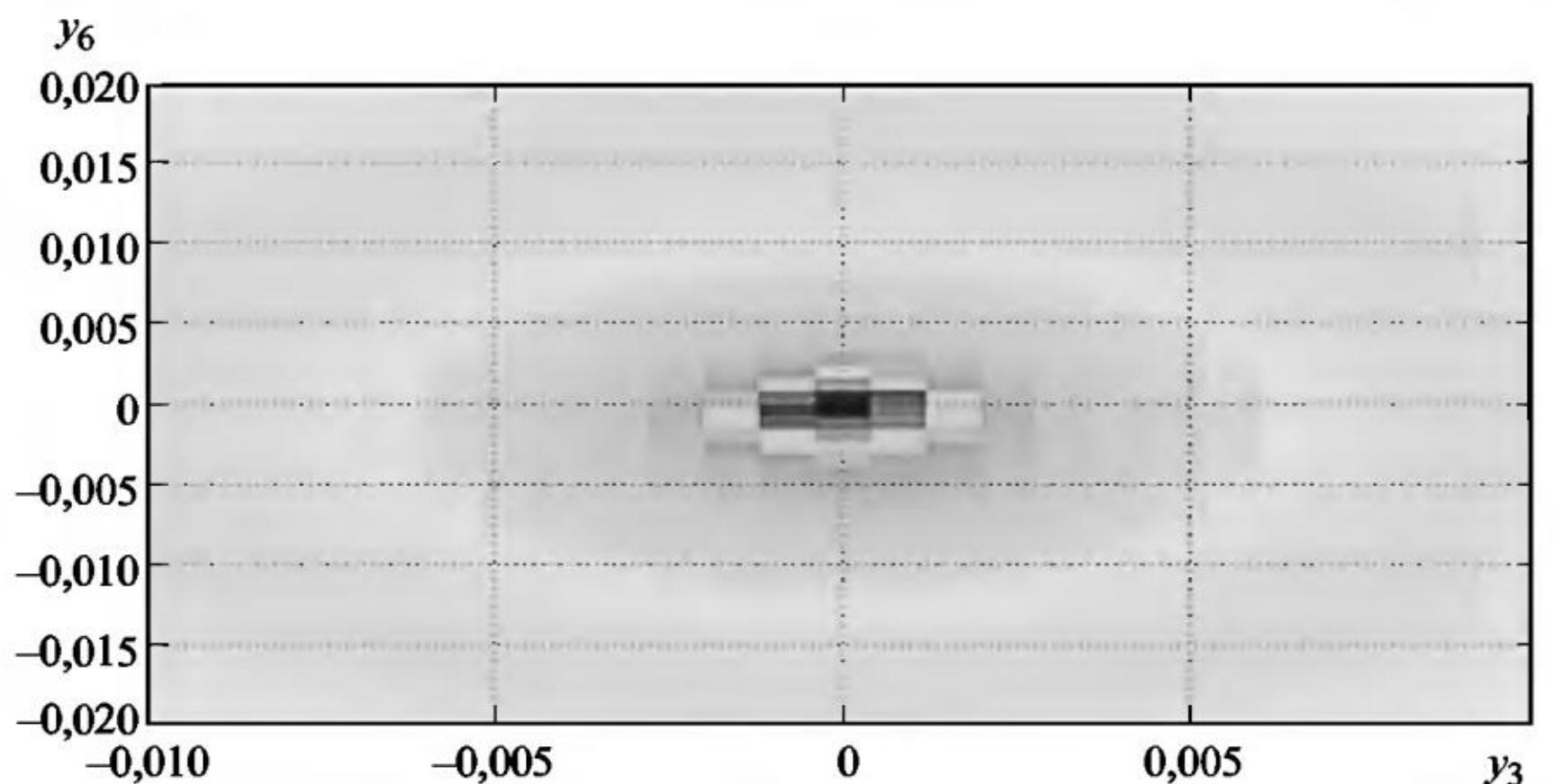


Рис. 13.61

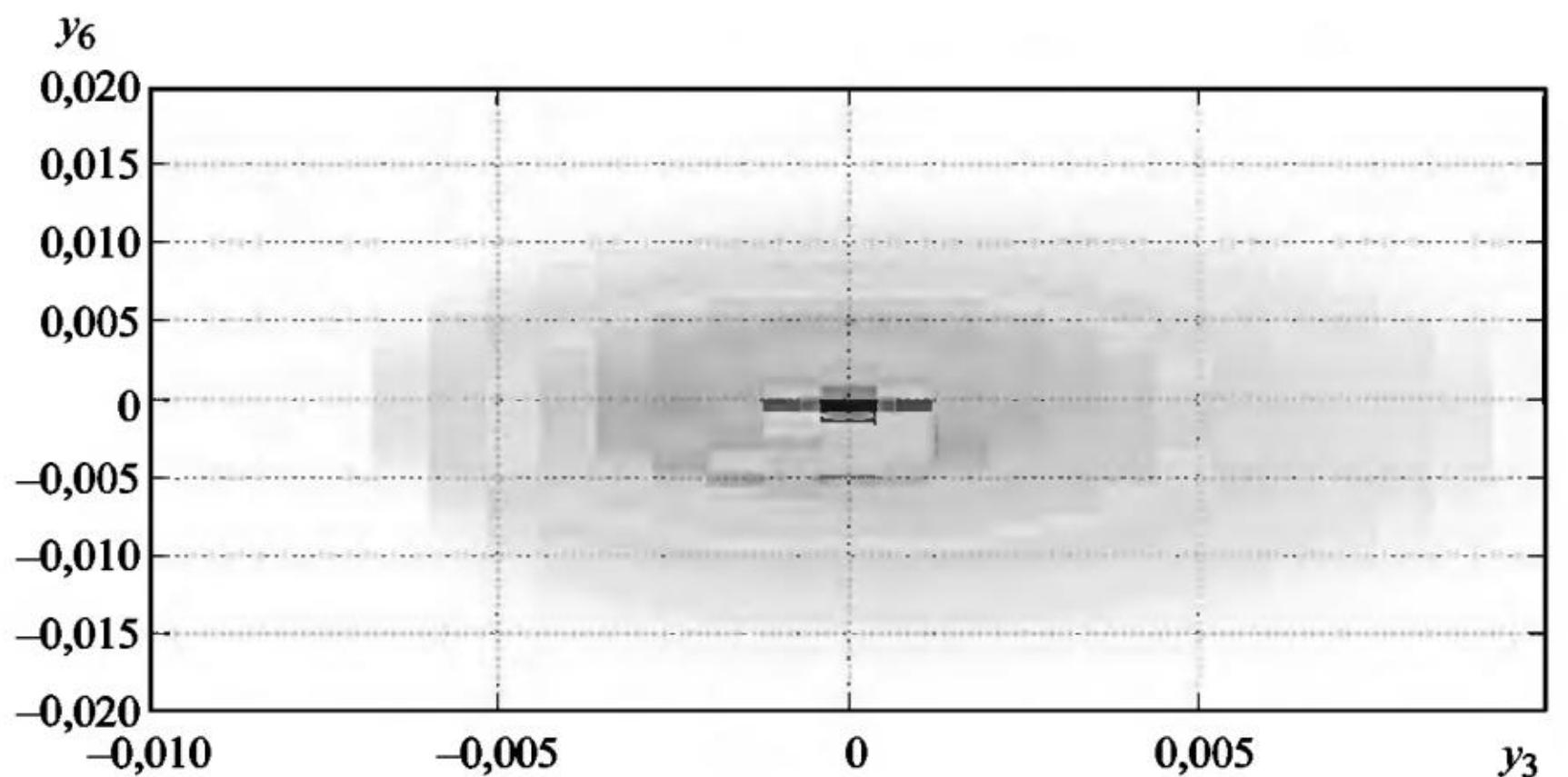


Рис. 13.62

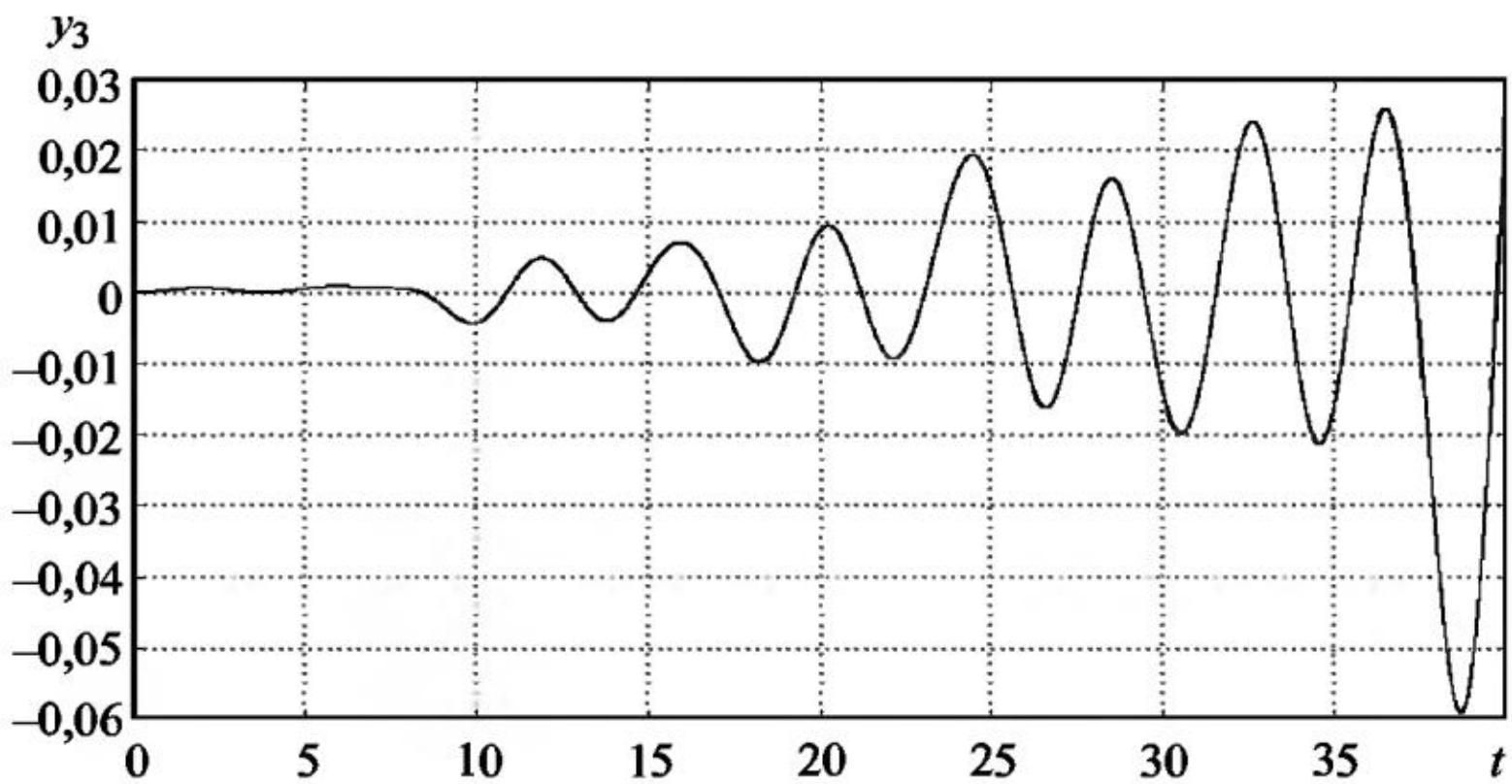


Рис. 13.63

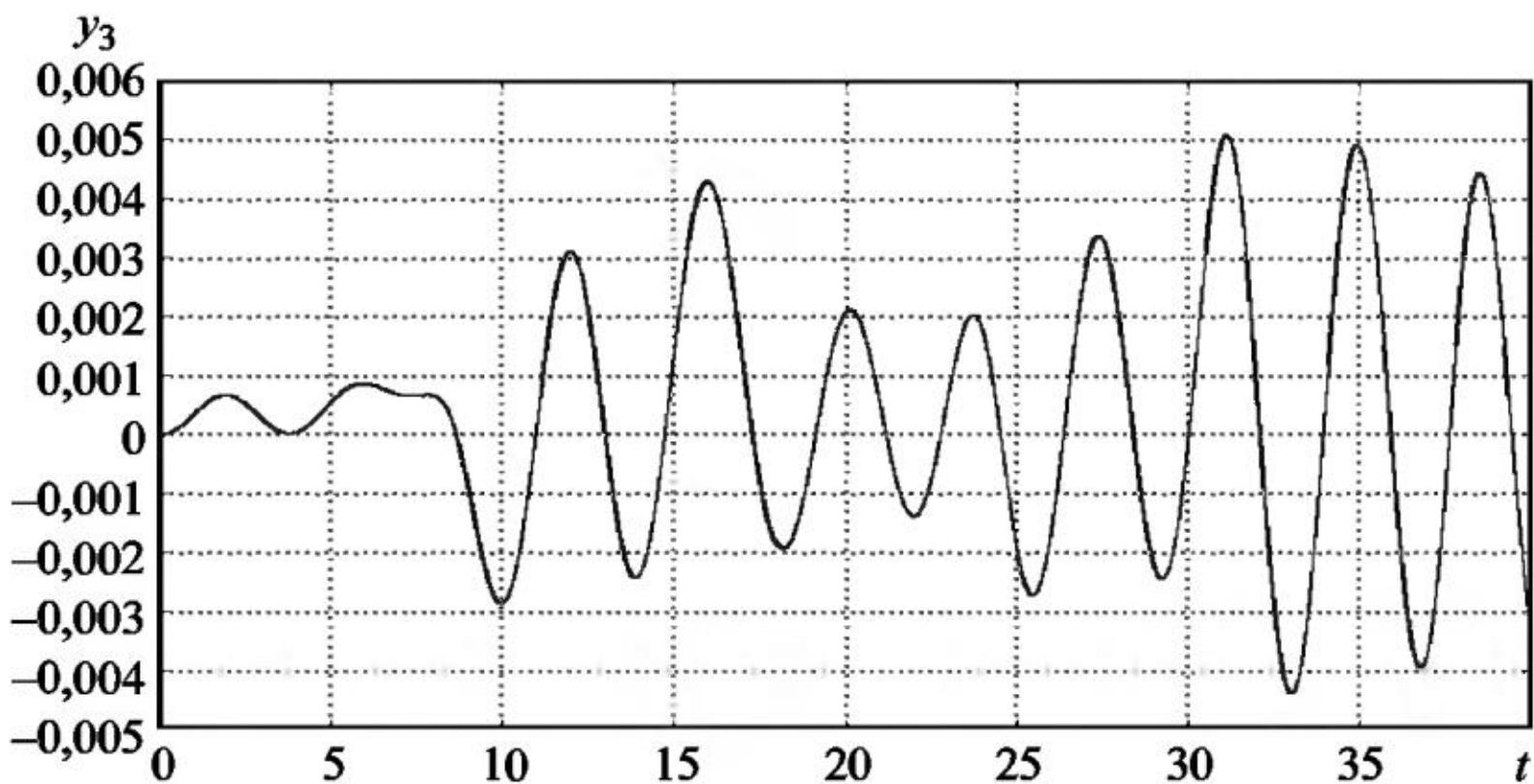


Рис. 13.64

Как видно из графиков ЧФП, при шумах меньшей интенсивности более четко видны основные амплитуды колебаний траекторий процессов ($y_3(t)$, $y_6(t)$).

На рис. 13.63 и 13.64 приведены графики интегральной кривой компоненты y_3 численного решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 0,9$ и $a = 0,45$.

На рис. 13.65 и 13.66 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_3 численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,9$.

На рис. 13.67 и 13.68 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_3 численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,45$.

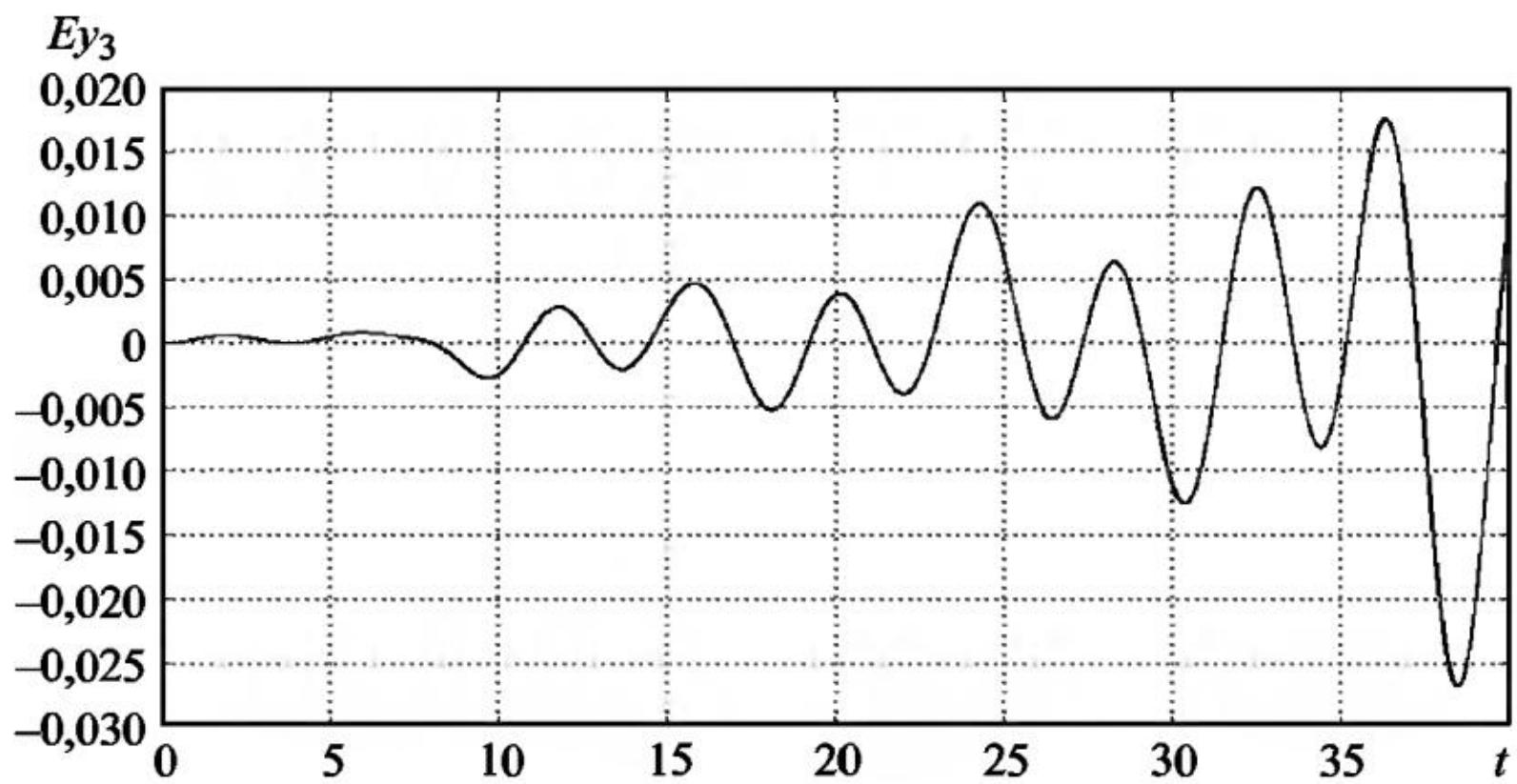


Рис. 13.65

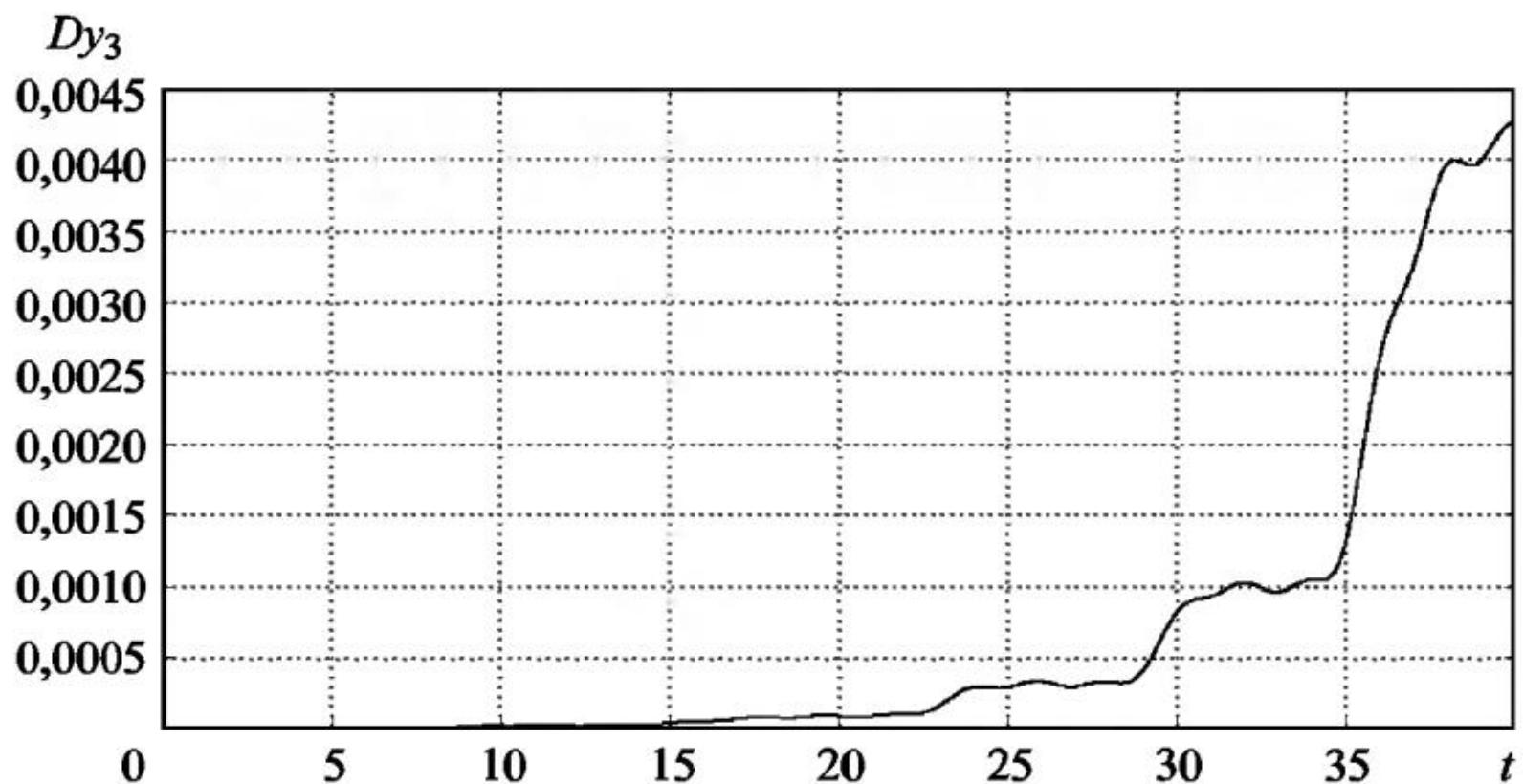


Рис. 13.66

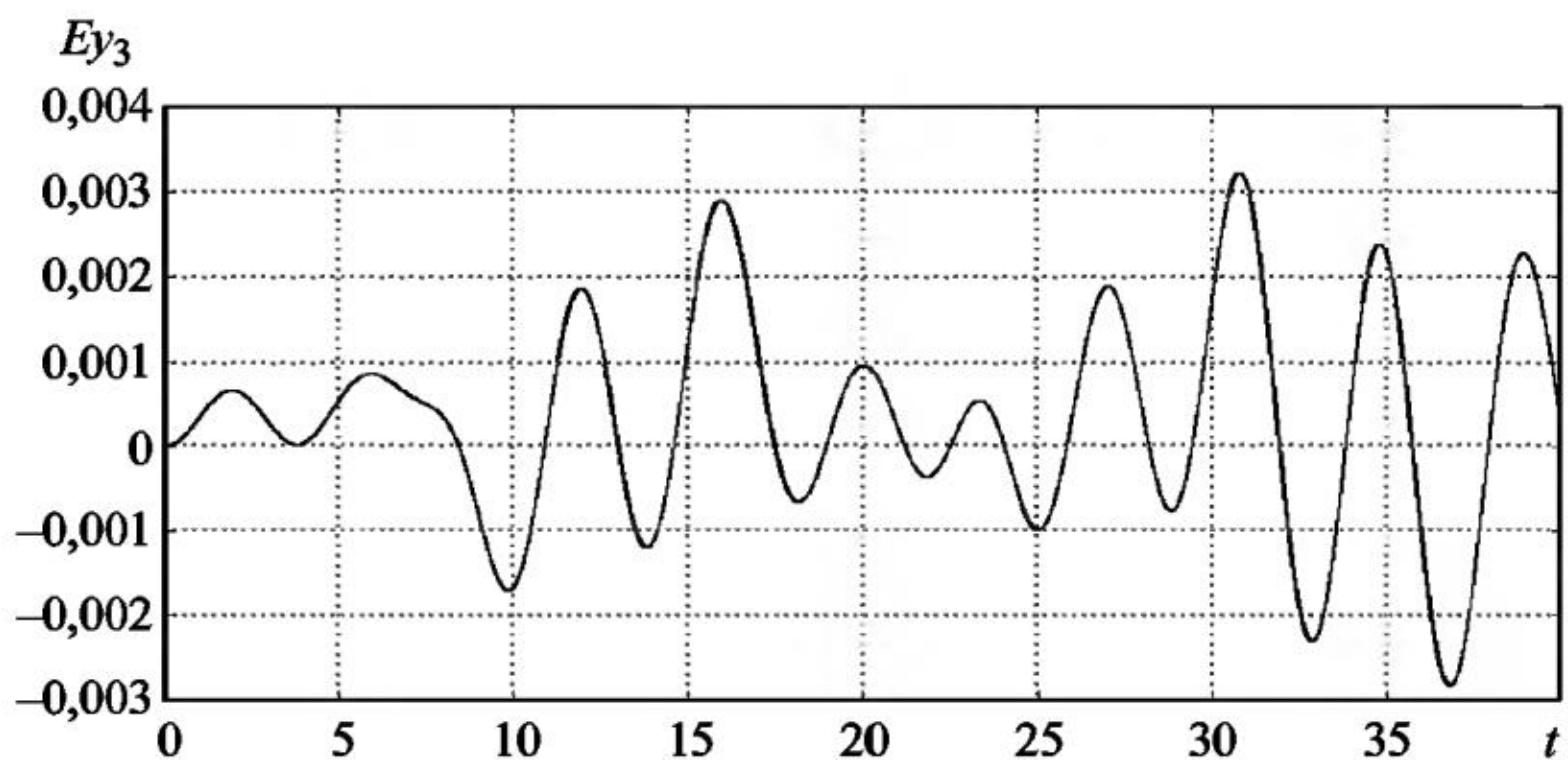


Рис. 13.67

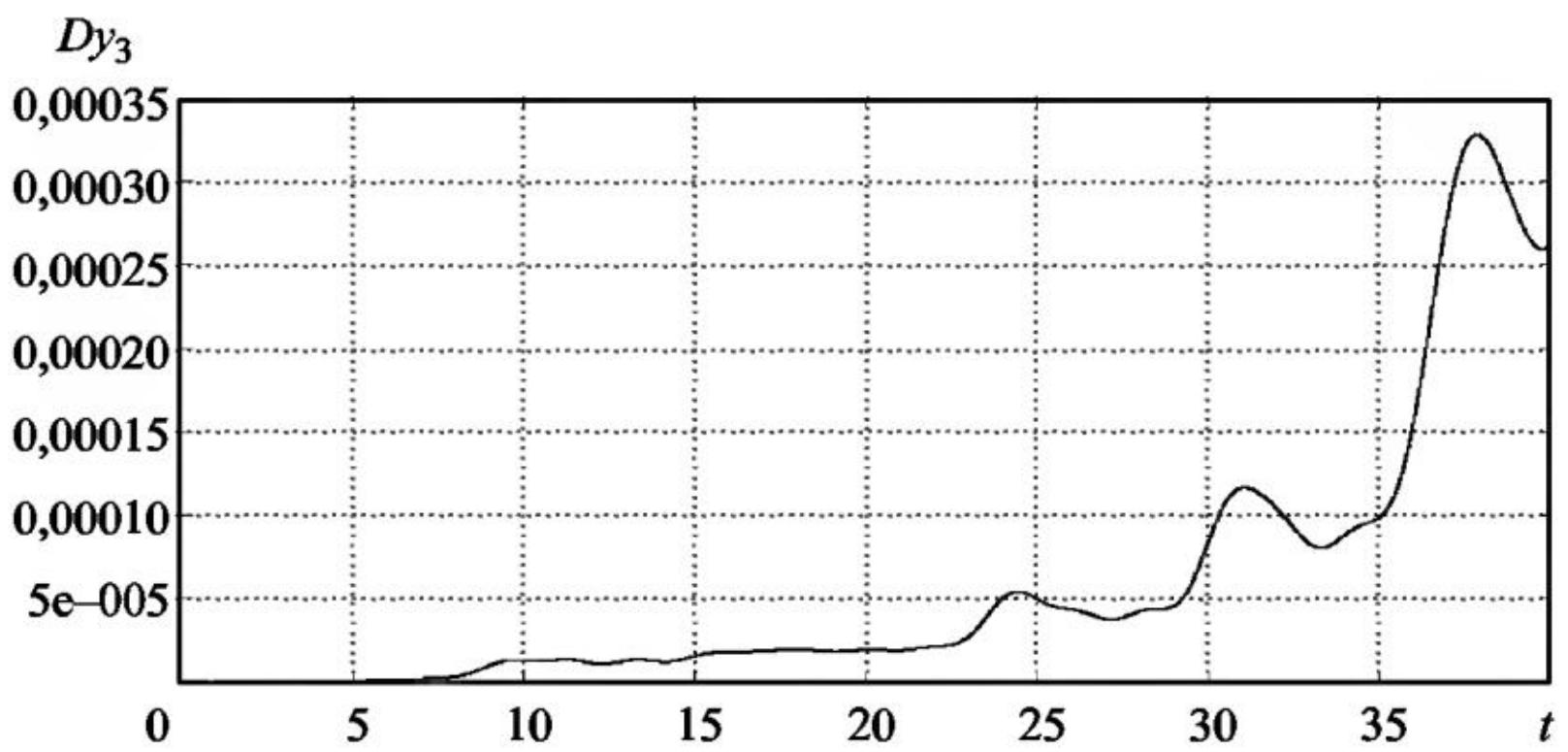


Рис. 13.68

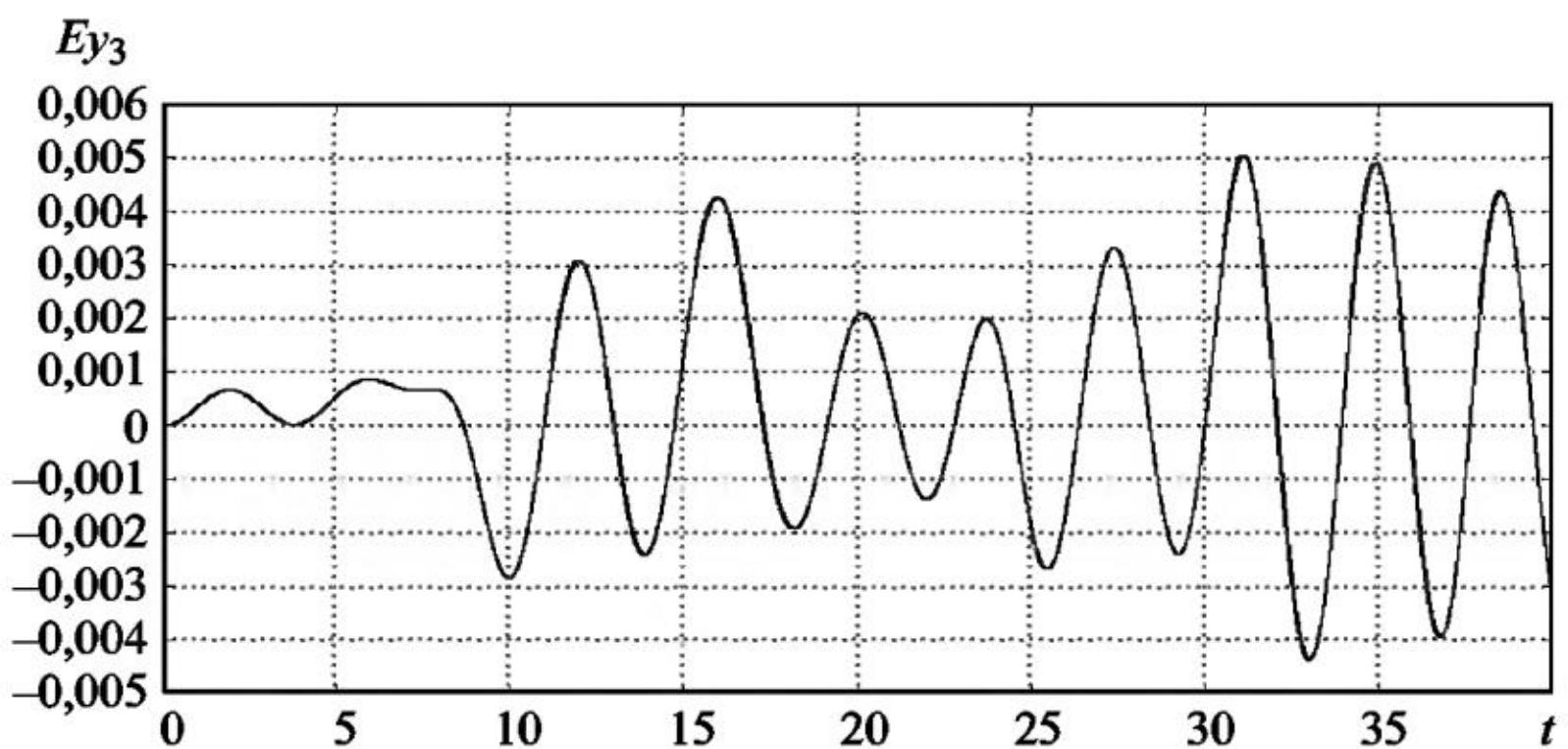


Рис. 13.69

На рис. 13.69 и 13.70 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_3 численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 0,45$.

Из графиков оценки математического ожидания и дисперсии компоненты y_3 (угол тангажа) решения системы СДУ (13.8) нельзя сделать вывод о выходе процесса $y_3(t)$ на стационарный режим.

Так как оценка дисперсии компоненты y_3 численного решения системы СДУ (13.8) на интервале $[0, 25]$ близка к нулю, то графики ЧИК далее строятся на интервале $[25, 40]$.

На рис. 13.71 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_3 численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,9$.

На рис. 13.72 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_3 в конечной точке интервала интегрирования

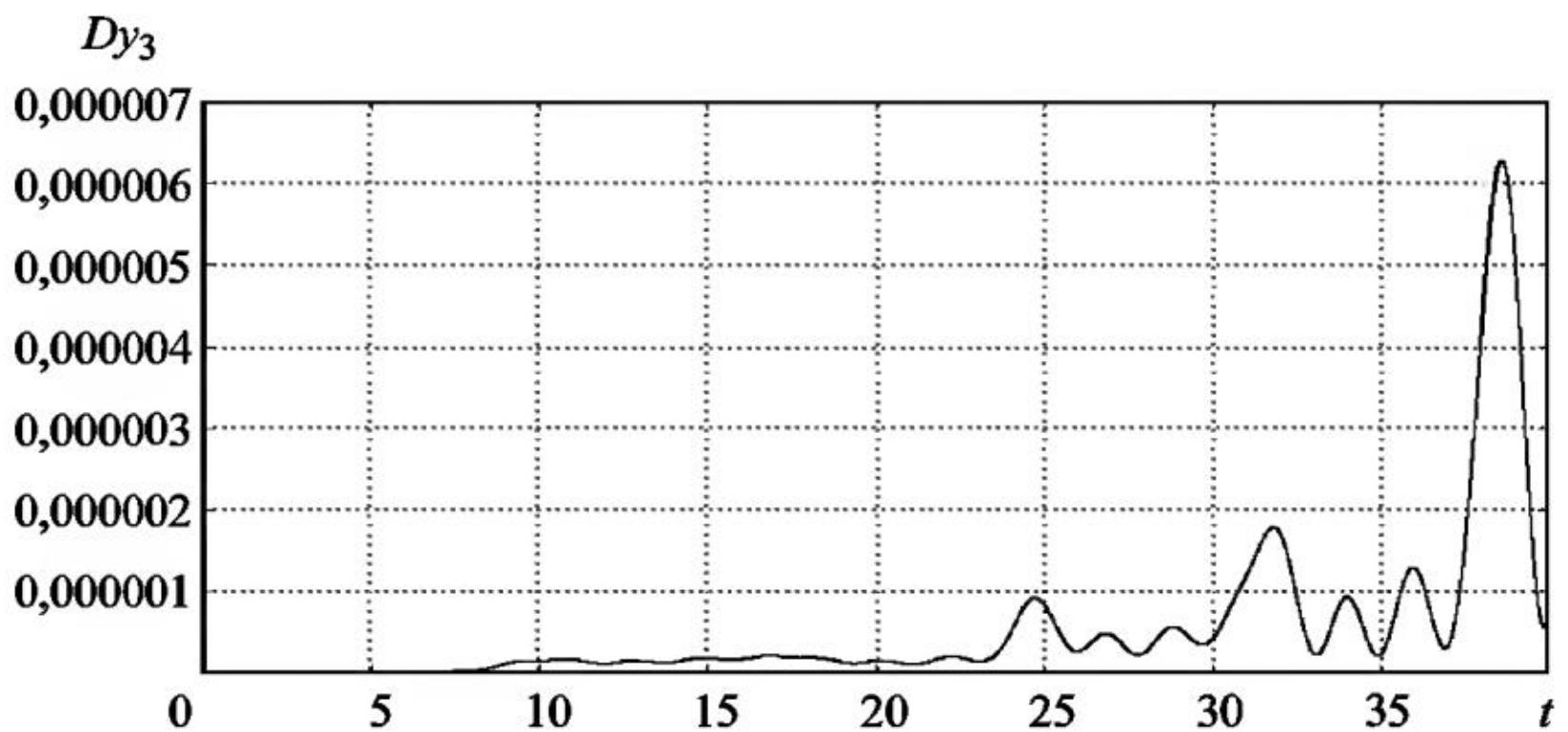


Рис. 13.70

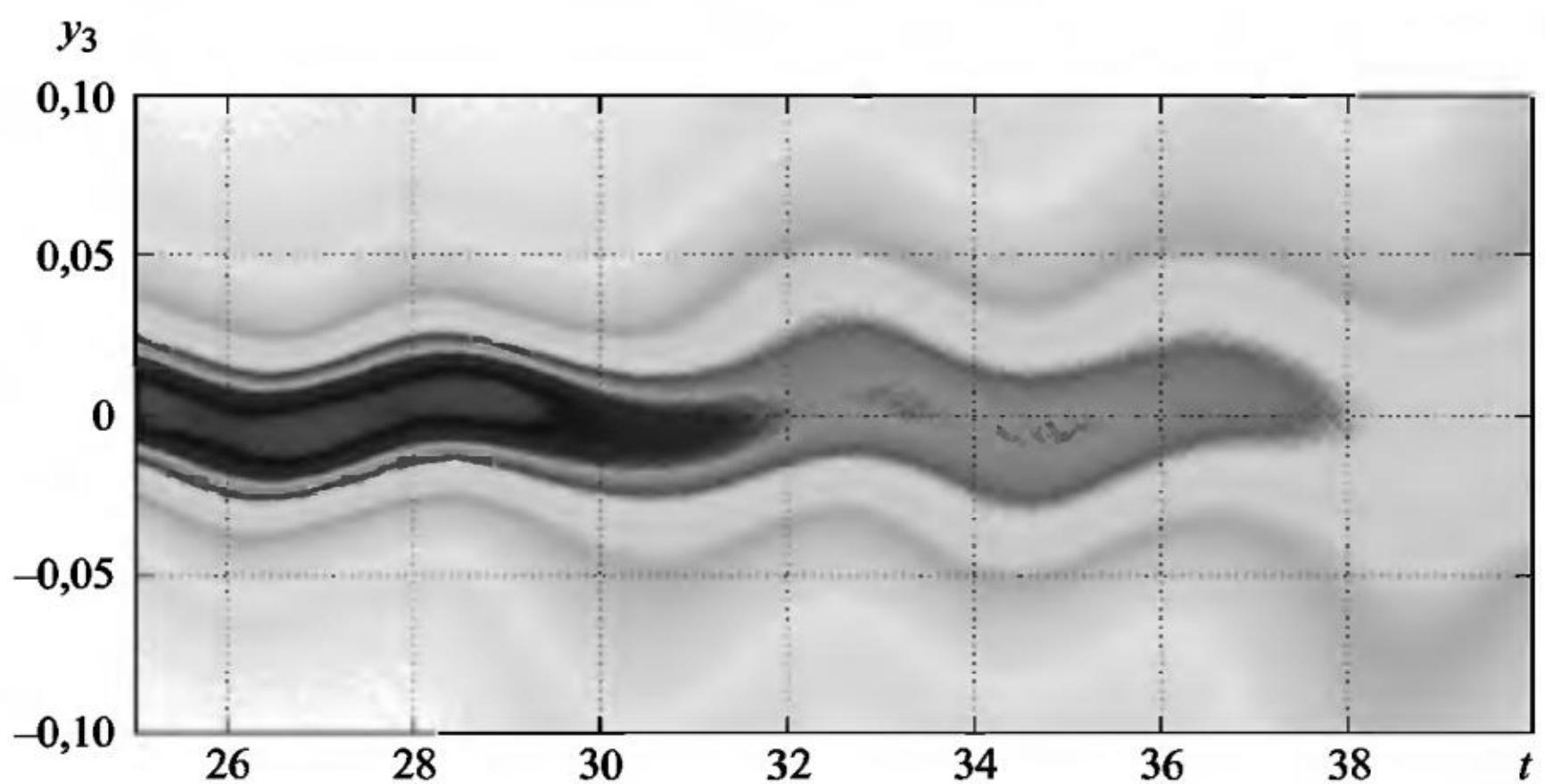


Рис. 13.71

$t_{\text{end}} = 40$ численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,9$.

На рис. 13.73 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_3 численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,45$, показывающий идентичный колебательный характер всех смоделированных траекторий компоненты y_3 численного решения системы СДУ (13.8).

На рис. 13.74 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_3 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 40$ численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-3}$ при значении параметра $a = 0,45$.

Как видно из рис. 13.71 и 13.73, графики для различных значений параметра a различаются и по форме, и по размеру.

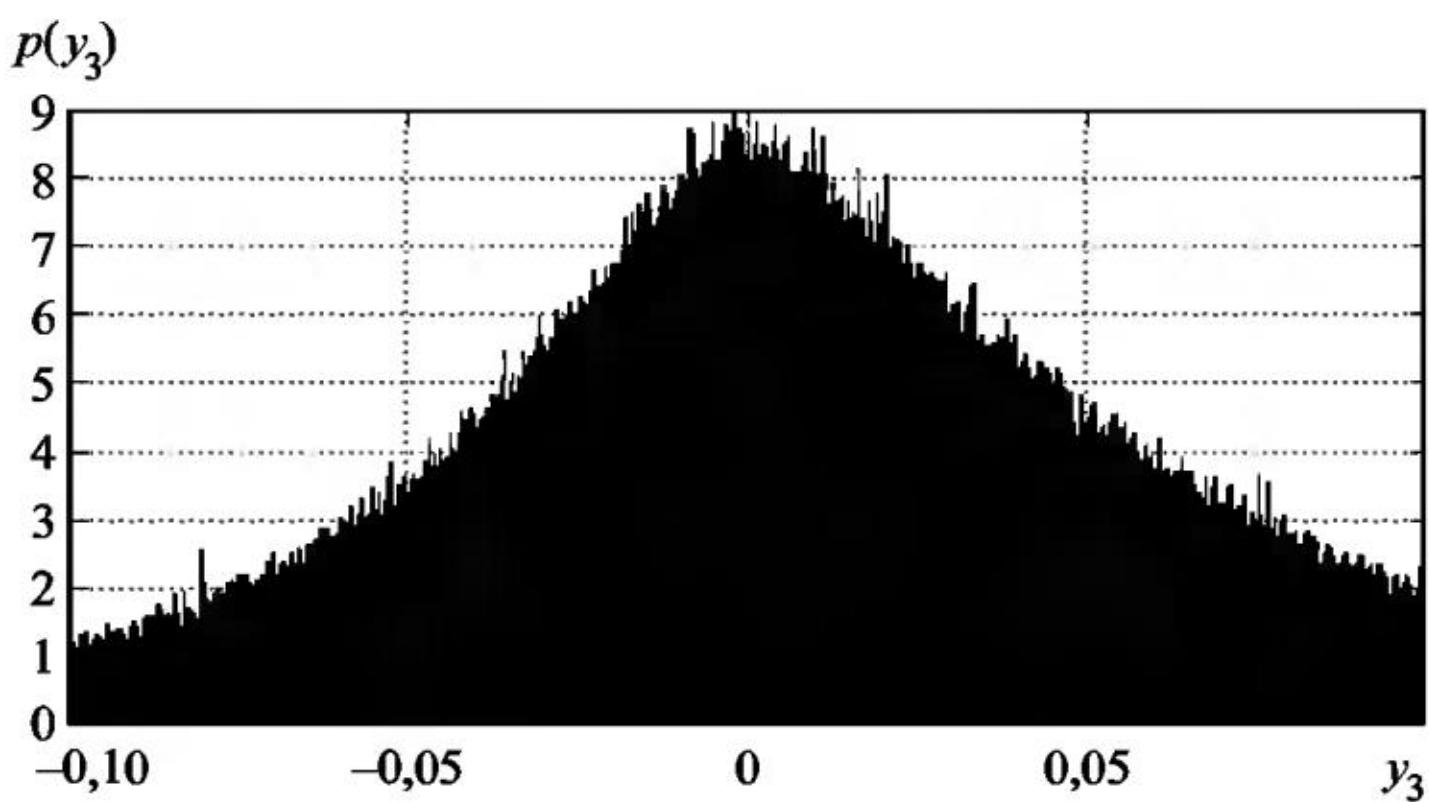


Рис. 13.72

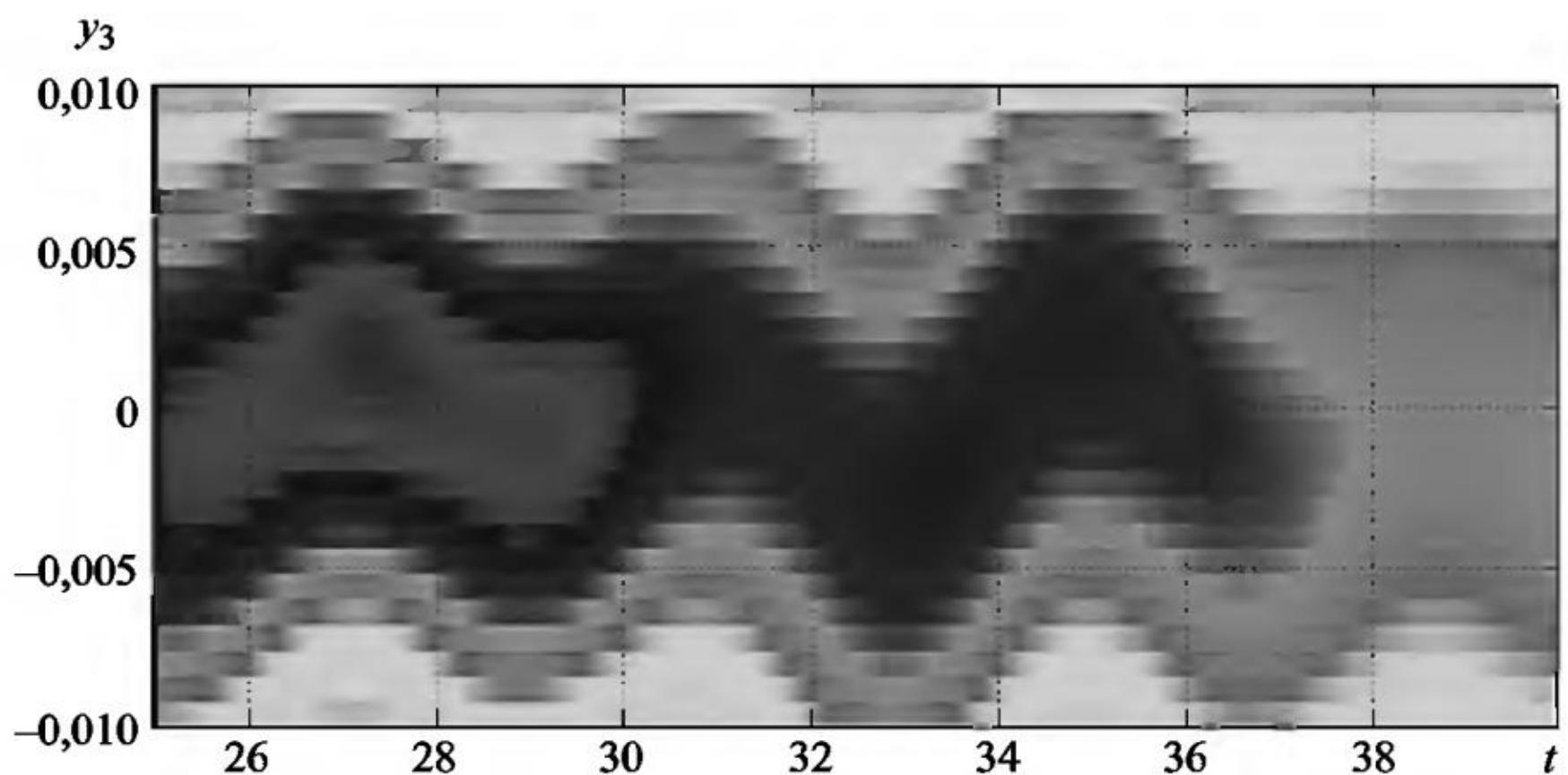


Рис. 13.73

На рис. 13.75 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_3 численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 0,45$.

На рис. 13.76 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_3 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 40$ численного решения системы СДУ (13.8) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 0,45$.

Гистограмма показывает финальный разброс угла тангажа.

Пример 13.5. Модель движения гироскопа. Под гироскопом понимается быстровращающийся относительно оси симметрии ротор, одна из точек которого неподвижна. Для крепления тела в неподвижной точке широко используется внешний карданов подвес, который обеспечивает ротору свободу вращения относитель-

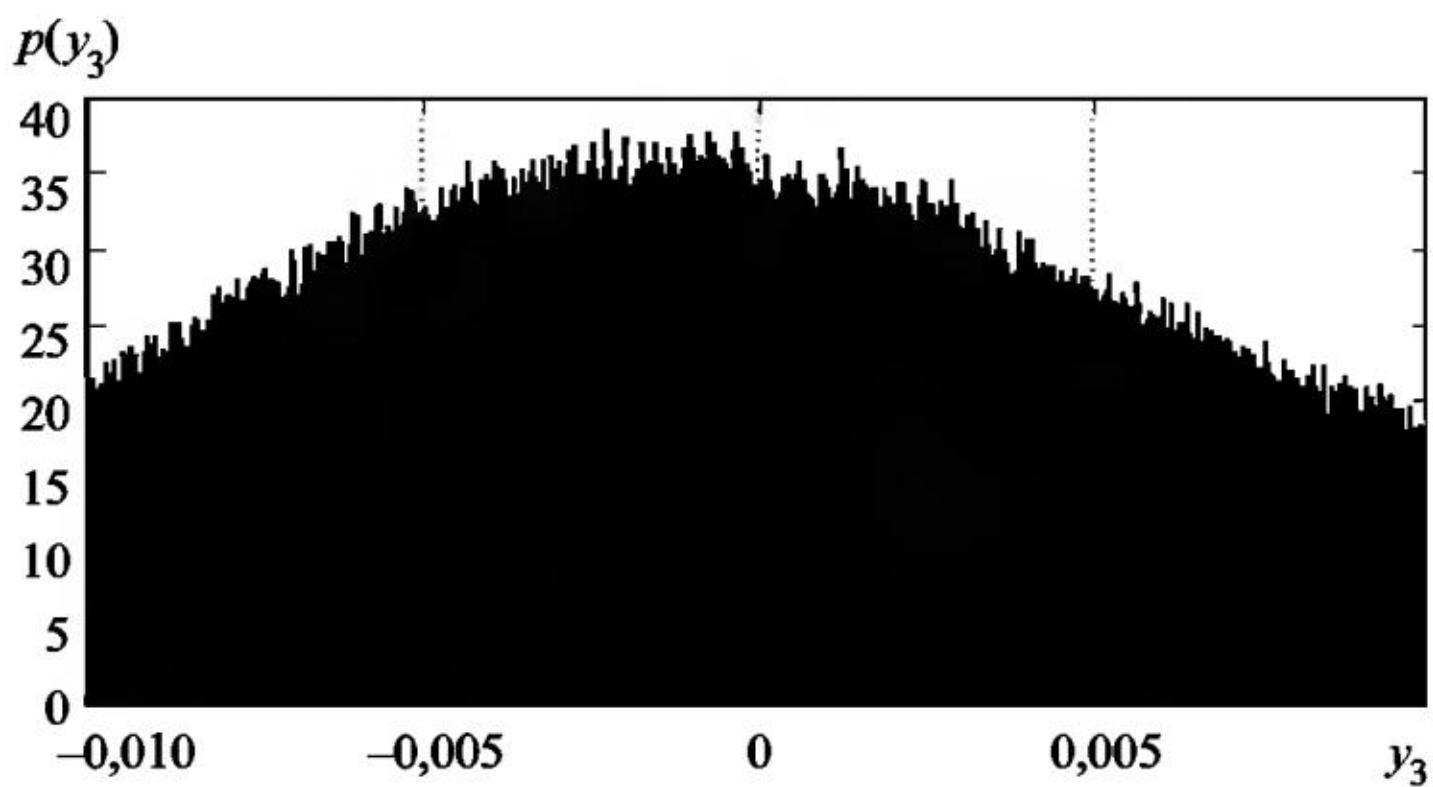


Рис. 13.74

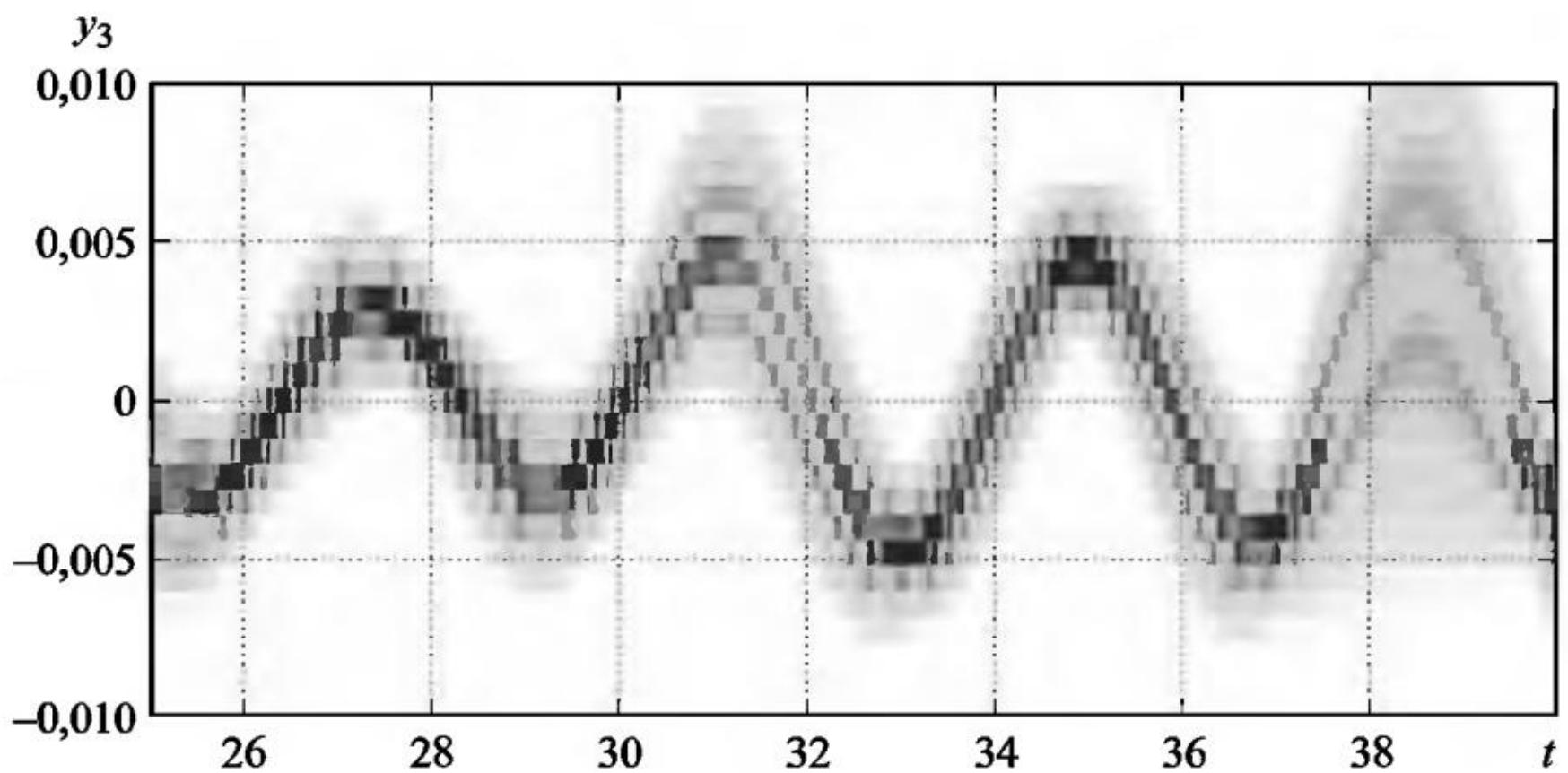


Рис. 13.75

но трех осей (трехстепенной гироскоп). Если внешнюю рамку закрепить, то гироскоп станет двухстепенным. Медленное вращение гироскопа под действием внешнего момента называется прецессией гироскопа. Гироскопический момент – это противодействие, оказываемое быстрорвращающимся ротором телу, пытающемуся изменить направление его оси вращения. Моменты сил трения (как сухого, так и вязкого) существенно влияют на движение гироскопа и действуют в направлении, противоположном угловой скорости соприкасающихся деталей. Движение трехстепенного гироскопа относительно инерциальной системы координат масс можно записать в виде системы ОДУ [26]

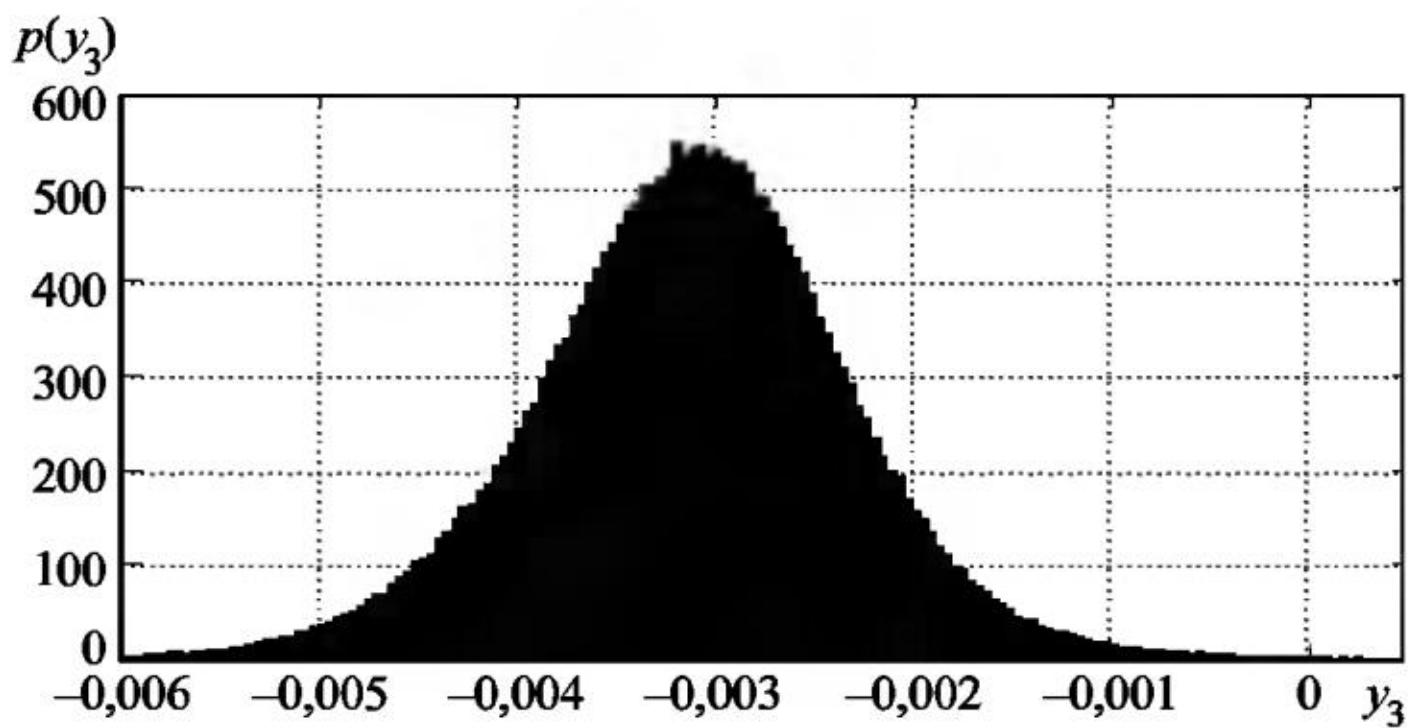


Рис. 13.76

$$A \frac{d^2\alpha}{dt^2} + J_0 \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \sin(\beta) \right) \frac{d\beta}{dt} \cos(\beta) + D \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} \sin(2\beta) + \\ + J_0 \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \sin(\beta) \right) \right) \sin(\beta) = M_{ZH},$$

$$B \frac{d^2\beta}{dt^2} - J_0 \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \sin(\beta) \right) \frac{d\alpha}{dt} \cos(\beta) - 0,5D \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \sin(2\beta) = M_X, \quad (13.9)$$

$$J_0 \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \sin(\beta) \right) \right) = M_{\text{дв}} - M_c.$$

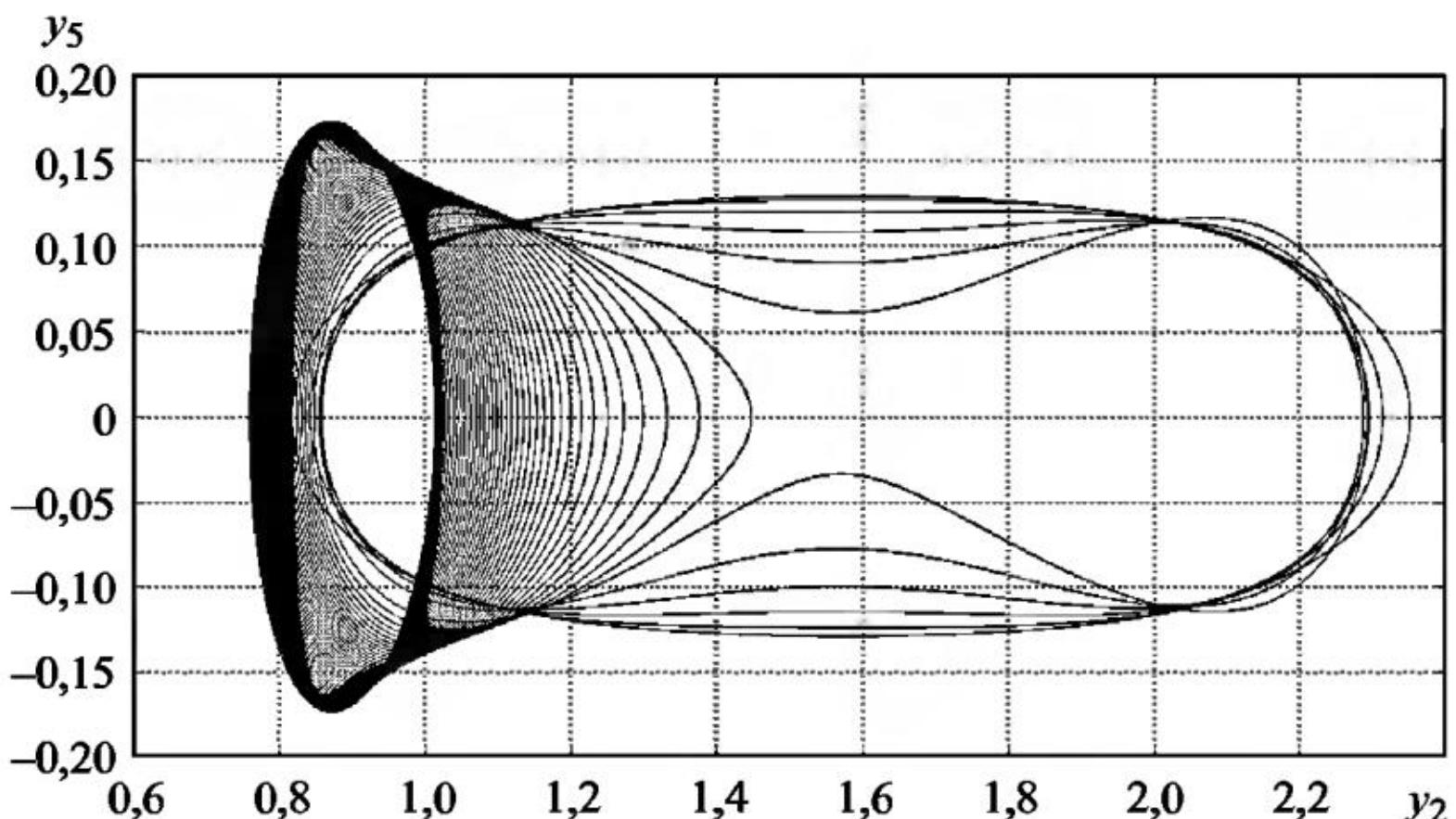


Рис. 13.77

Введем обозначения: $y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$, $y_3 = \varphi$, $y_4 = \frac{d\alpha}{dt}$, $y_5 = \frac{d\beta}{dt}$, $y_6 = \frac{d\varphi}{dt}$, где α , β , φ – углы поворота внешней и внутренней рамок и ротора. $M_{\text{дв}}$ – движущий момент, M_c – момент сопротивления. Учитывая внешние и внутренние случайные шумы и задавая конкретные значения параметров, модель движения гироскопа запишем в виде системы СДУ

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= y_4 dt, & y_1(0) &= 1, \\
 dy_2 &= y_5 dt, & y_2(0) &= 1, \\
 dy_3 &= y_6 dt, & y_3(0) &= 1, \\
 dy_4 &= (-y_5(y_6 + y_4 \sin(y_2)) \cos(y_2) - 0,5 y_5 y_4 \sin(2y_2) - \\
 &\quad - 2 \cdot 10^{-4} \sin(y_2) - 6 \cdot 10^{-4}) dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t), & y_4(0) &= 0,1, \\
 dy_5 &= (y_4(y_6 + y_4 \sin(y_2)) \cos(y_2) + 0,5 y_4^2 \sin(2y_2) + 10^{-4}) dt + \\
 &\quad + \sigma_2 y_2 dw_2(t), & y_5(0) &= 0,1, \\
 dy_6 &= -\left(\frac{dy_4}{dt} \sin(y_2) - y_4 y_5 \cos(y_2) + a\right) dt + \sigma_3 y_3 dw_3(t), & y_6(0) &= 0,1.
 \end{aligned} \tag{13.10}$$

При численных расчетах моделировалось $N_{\text{тр}} = 10^6$ траекторий с шагом интегрирования $h = 10^{-5}$ на интервале $[0, 500]$.

На рис. 13.77 и 13.78 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_2, y_5) численного решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 4 \cdot 10^{-3}$ и $a = 4 \cdot 10^{-4}$.

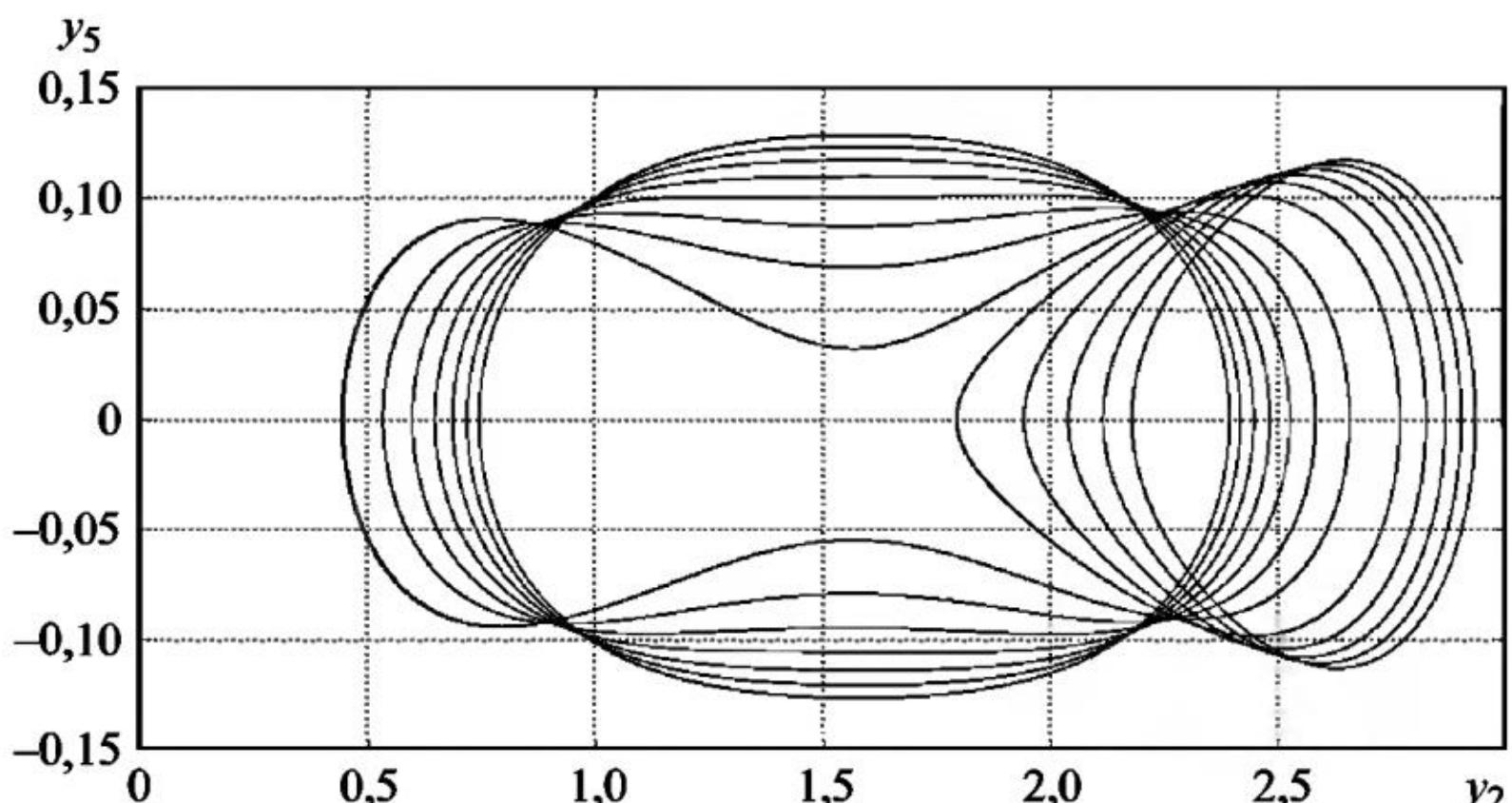


Рис. 13.78

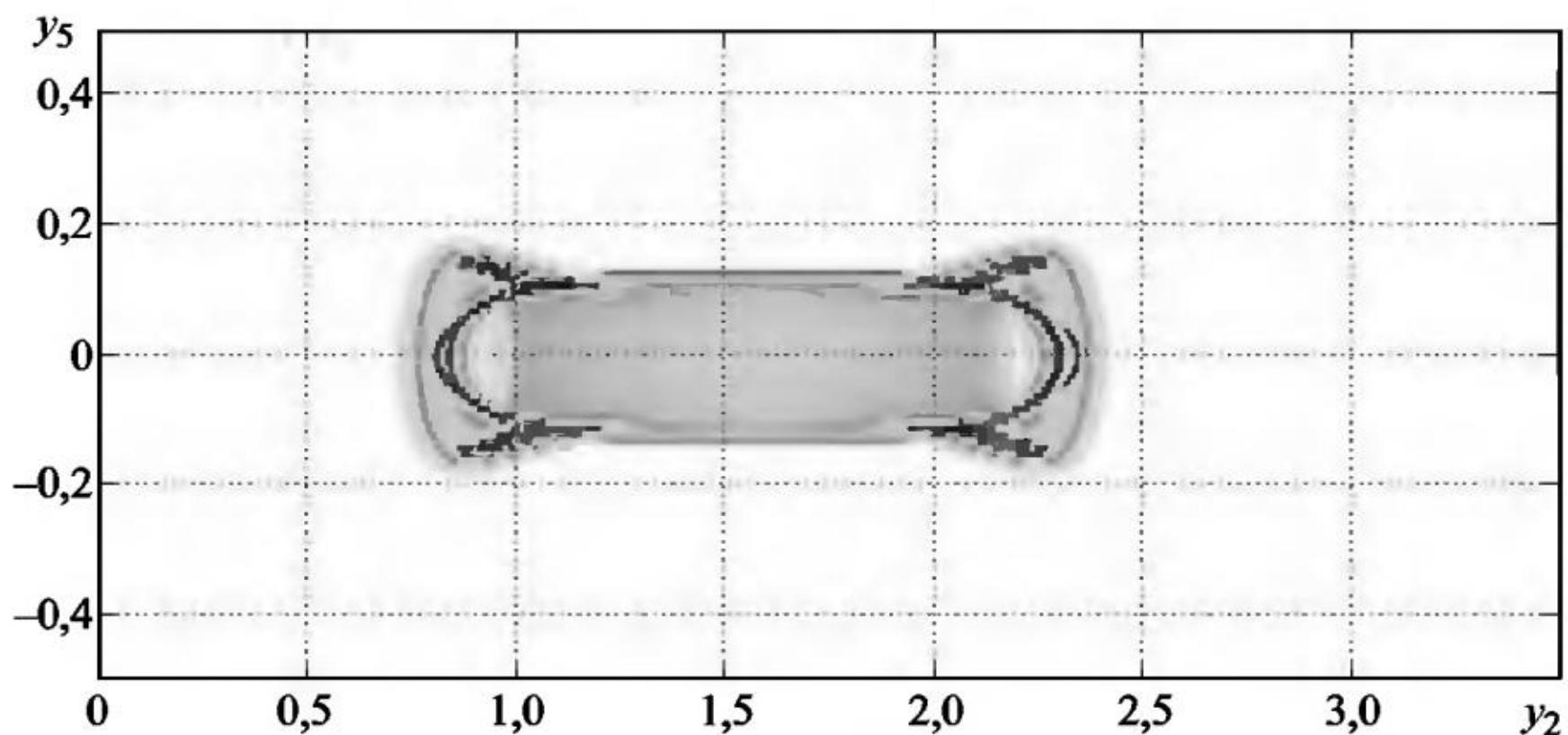


Рис. 13.79

На рис. 13.79 и 13.80 приведены графики ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_2, y_5) численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значениях параметра $a = 4 \cdot 10^{-3}$ и $a = 4 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 13.81 приведен график ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_2, y_5) численного решения системы СДУ (13.10) с шумами меньшей интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-5}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 13.82 и 13.83 приведены графики интегральной кривой компоненты y_2 численного решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 4 \cdot 10^{-3}$ и $a = 4 \cdot 10^{-4}$.

Из графиков на рис. 13.82 и 13.83 виден только один режим колебаний.

На рис. 13.84 и 13.85 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 13.86 и 13.87 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 13.88 и 13.89 приведены графики оценок математического ожидания и дисперсии компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-5}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-4}$.

Как видно из рис. 13.83 и 13.86, графики совершенно различаются между собой.

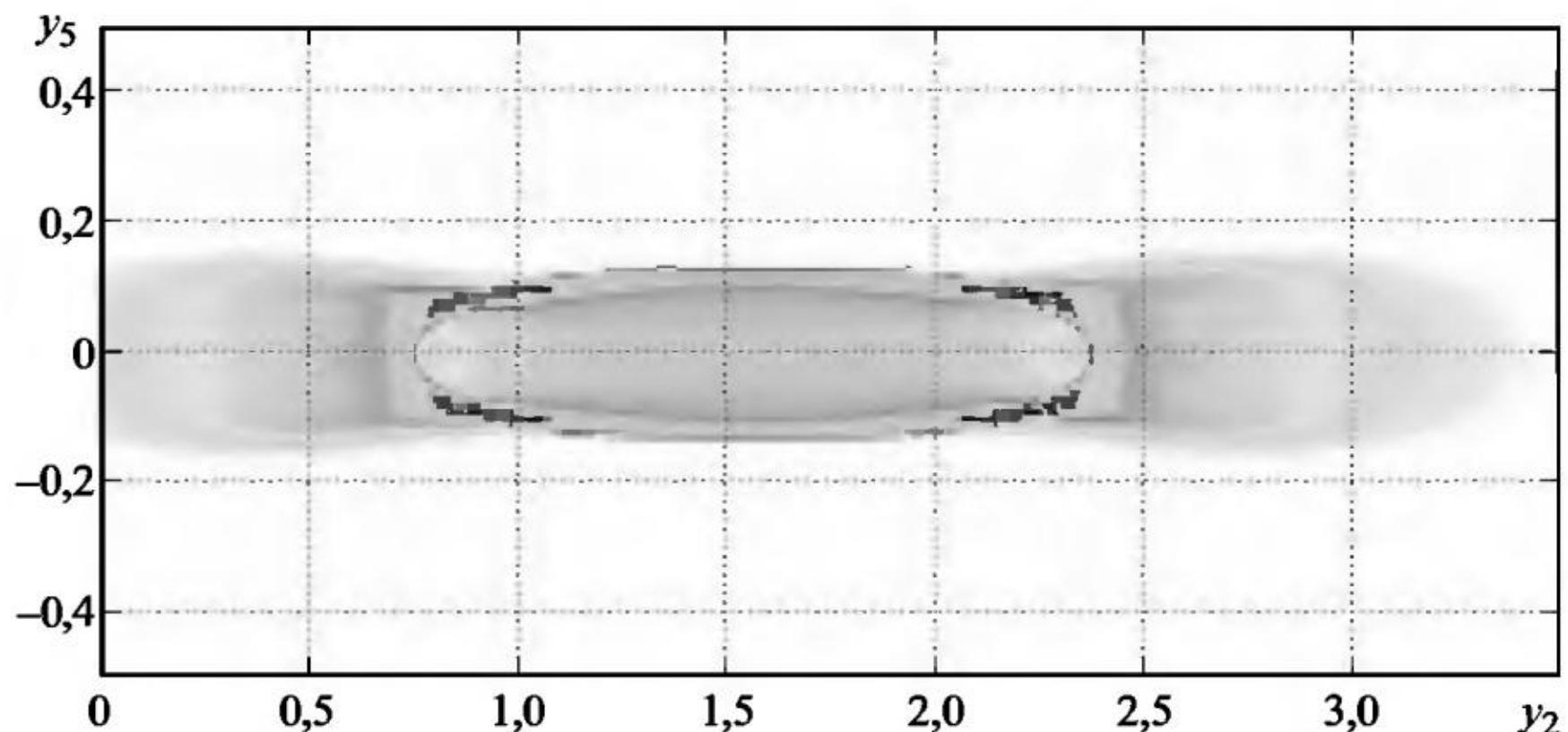


Рис. 13.80

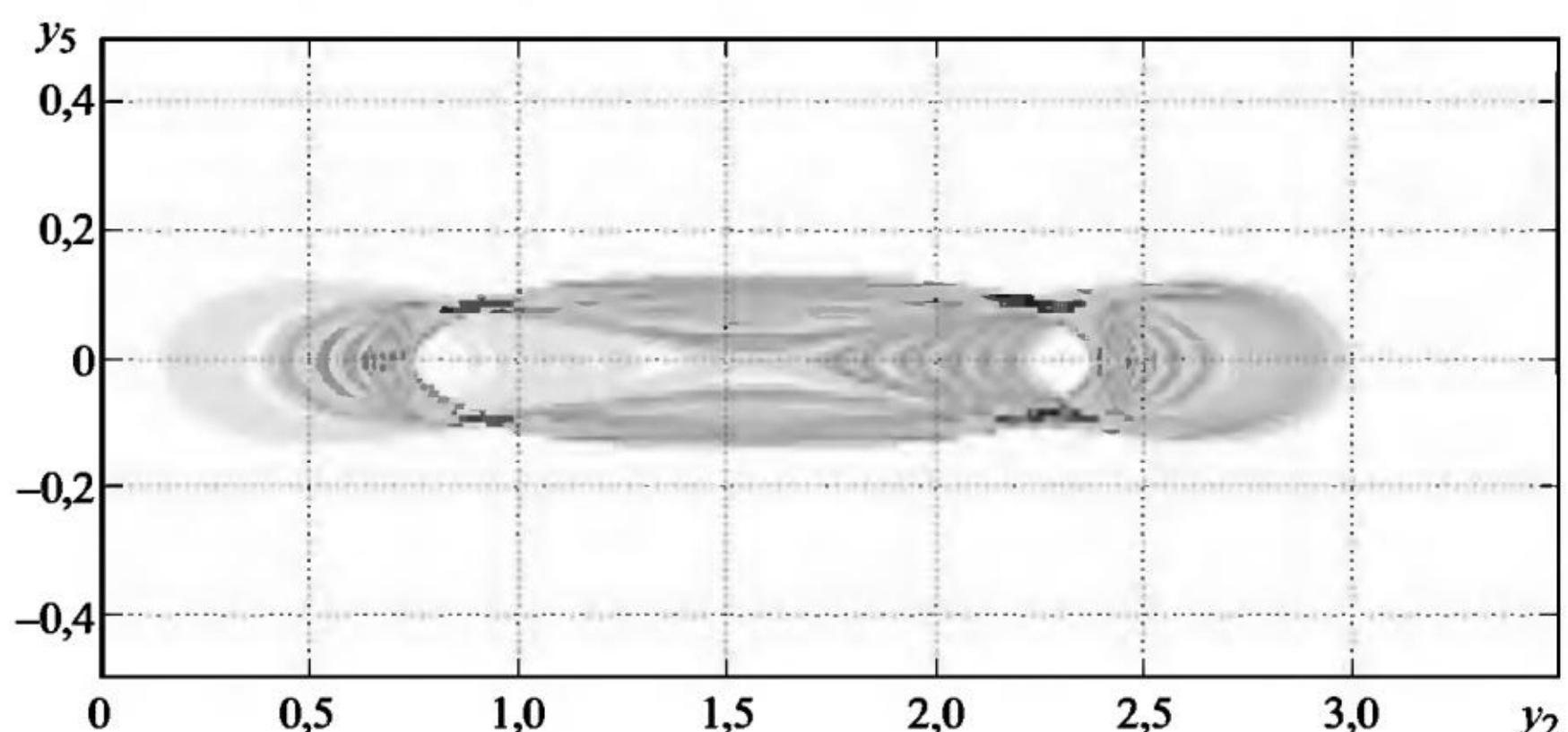


Рис. 13.81

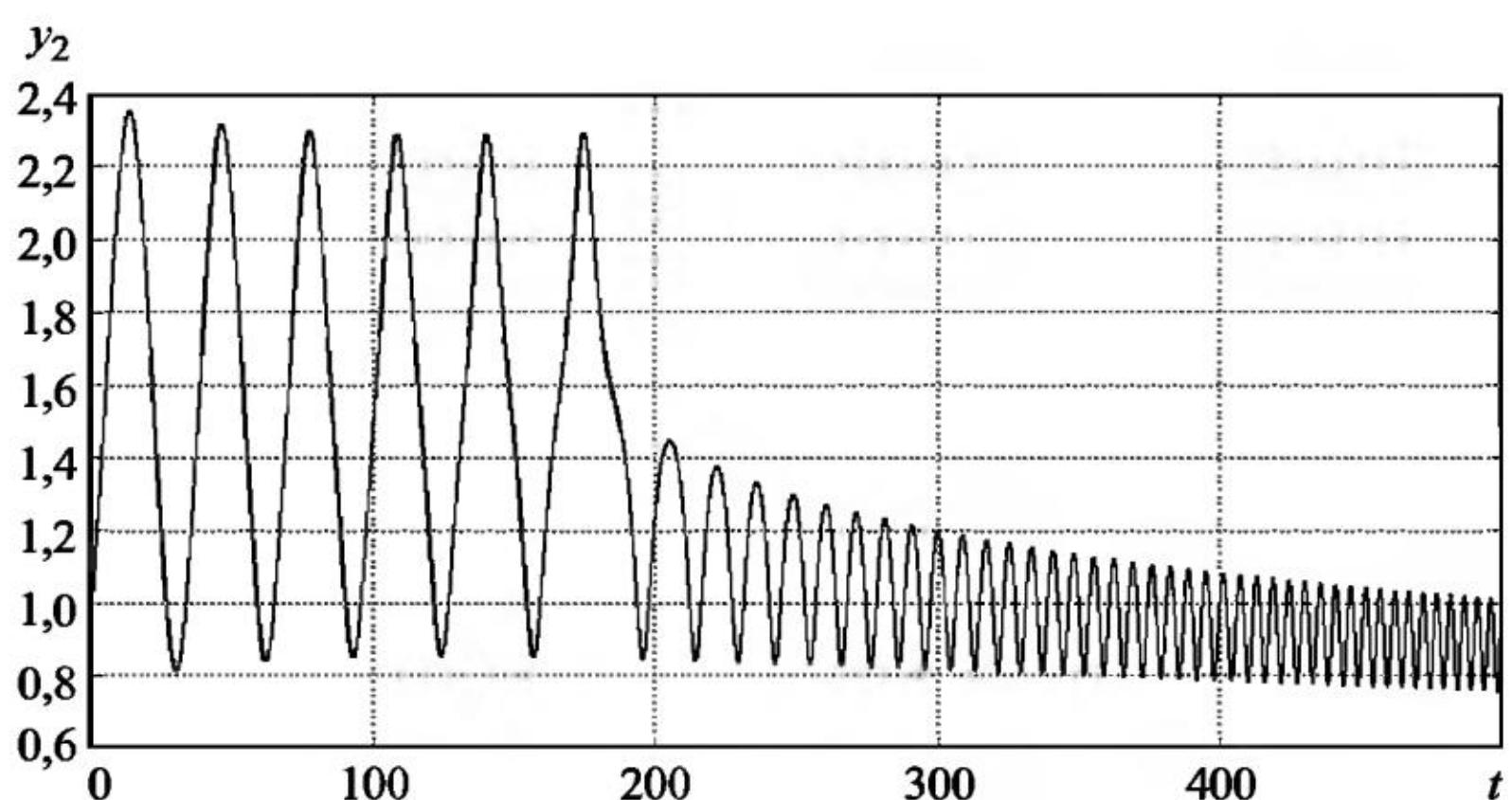


Рис. 13.82

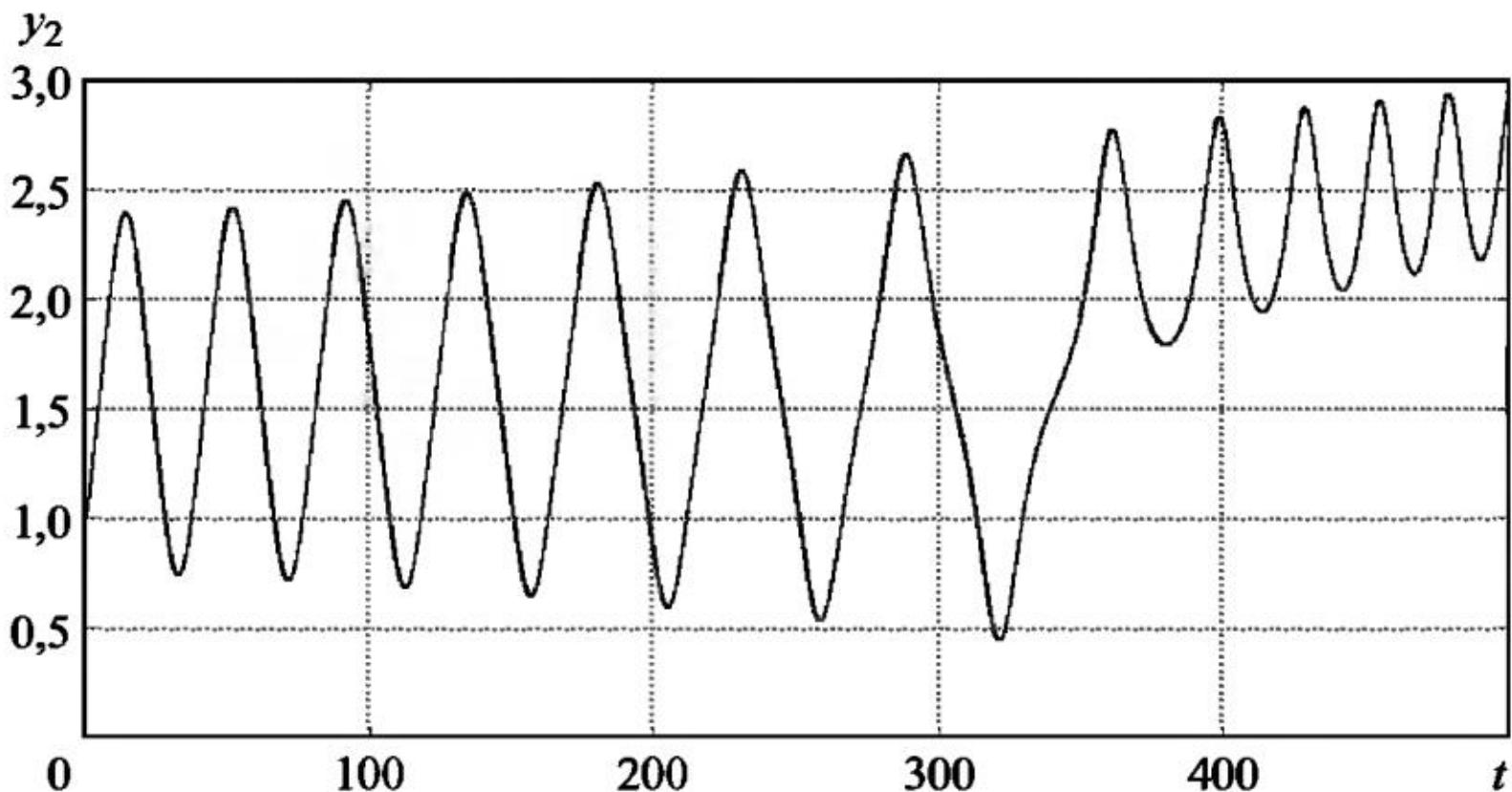


Рис. 13.83

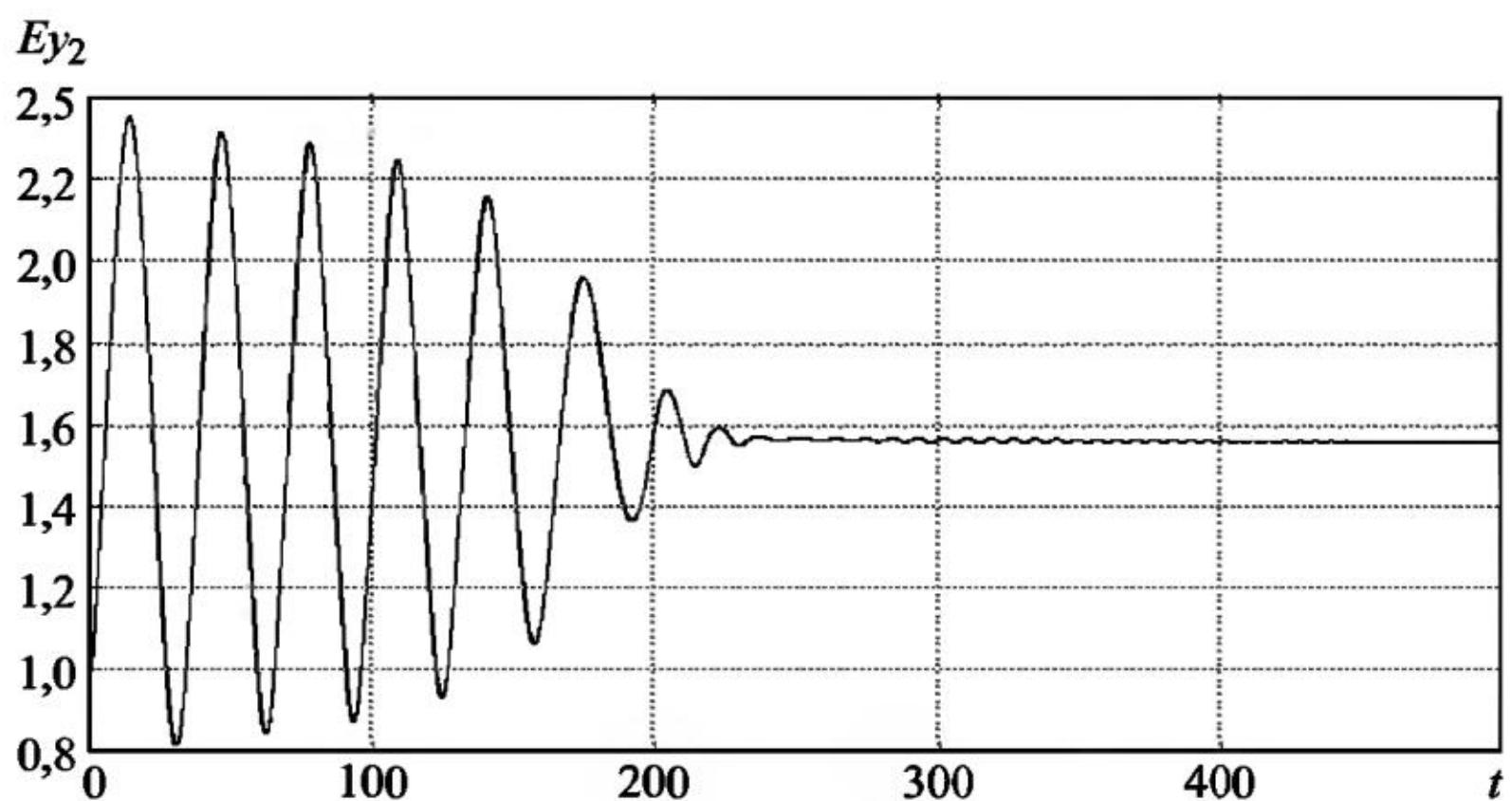


Рис. 13.84

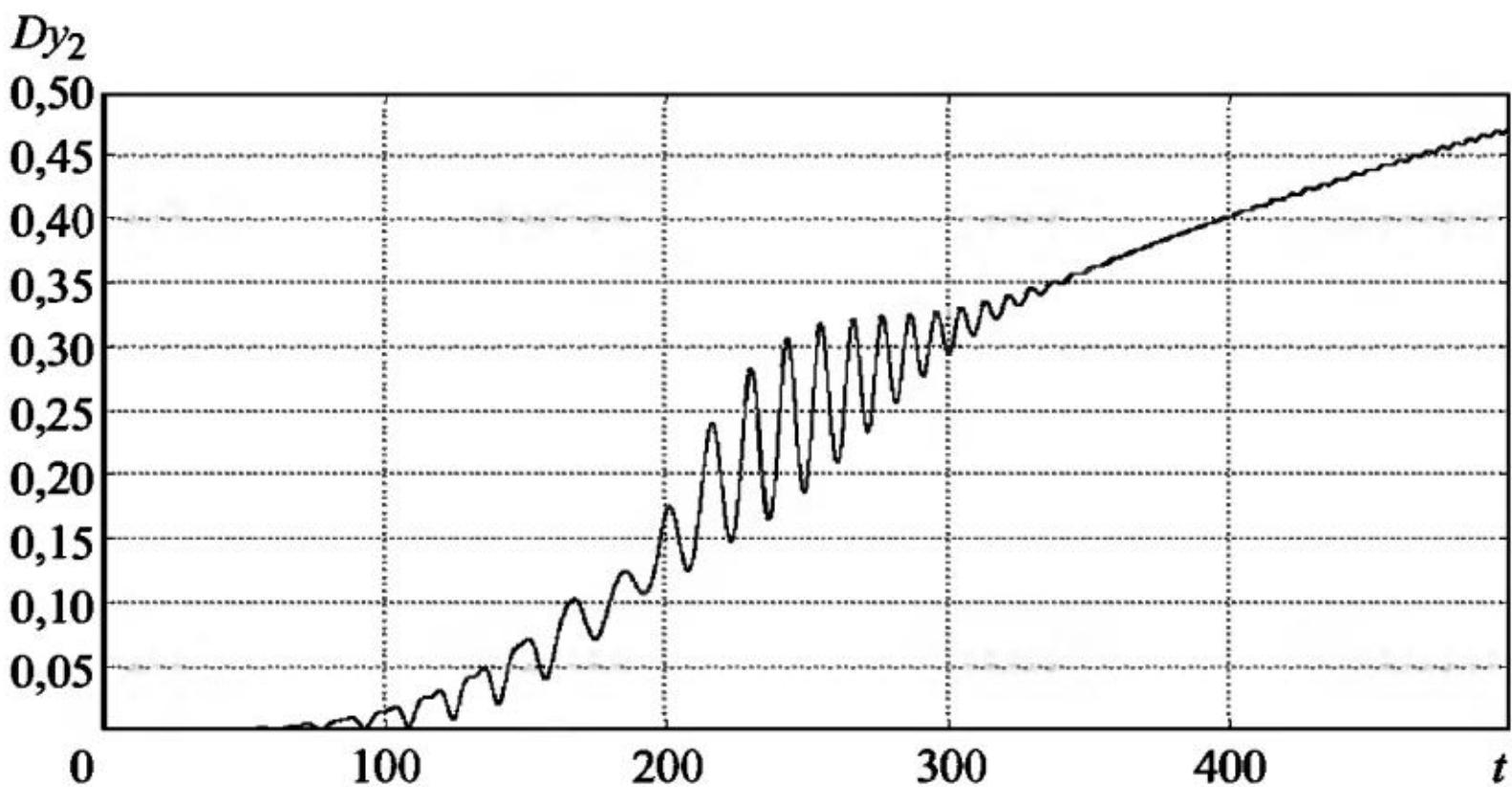


Рис. 13.85

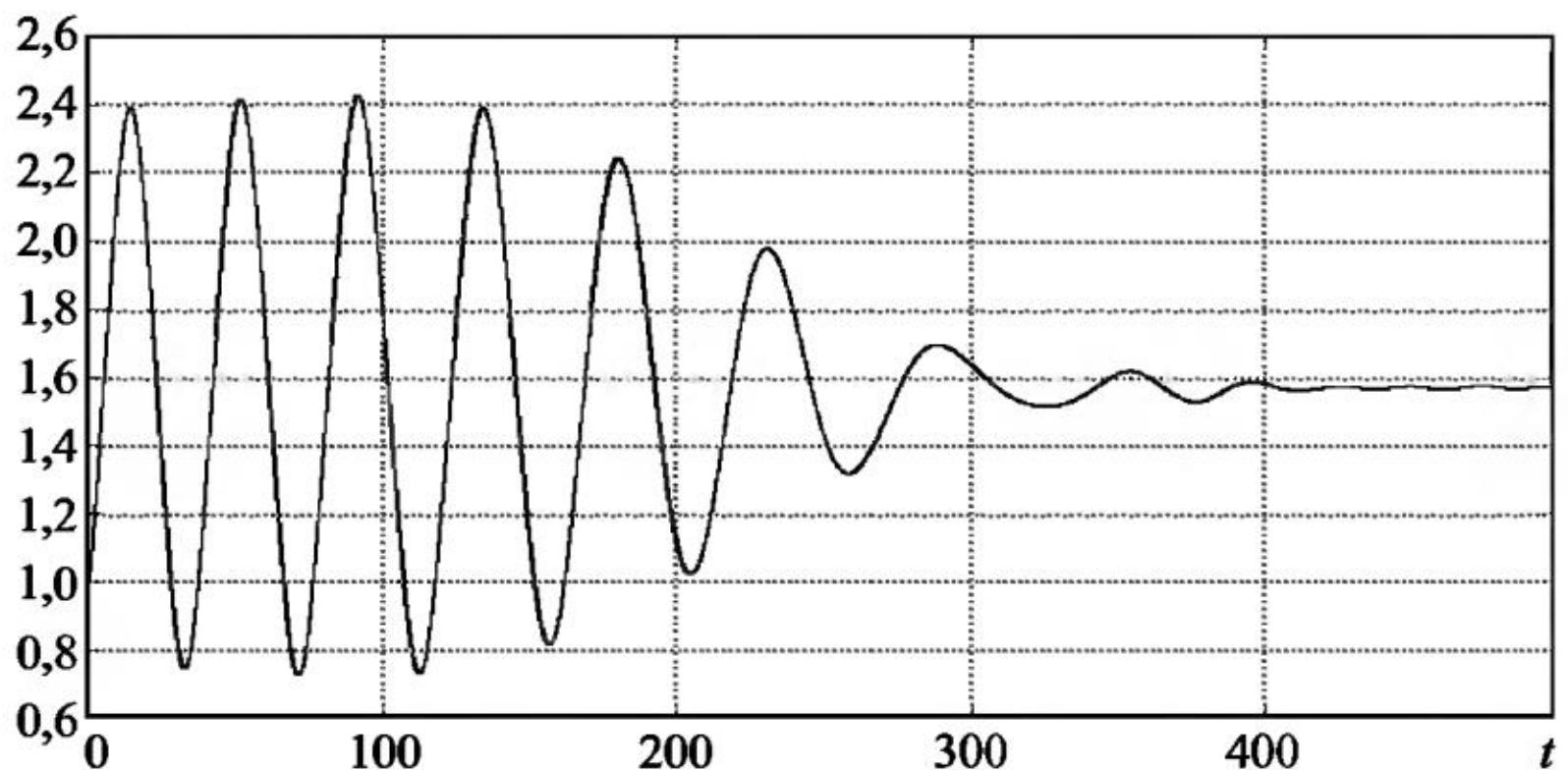
Ey_2 

Рис. 13.86

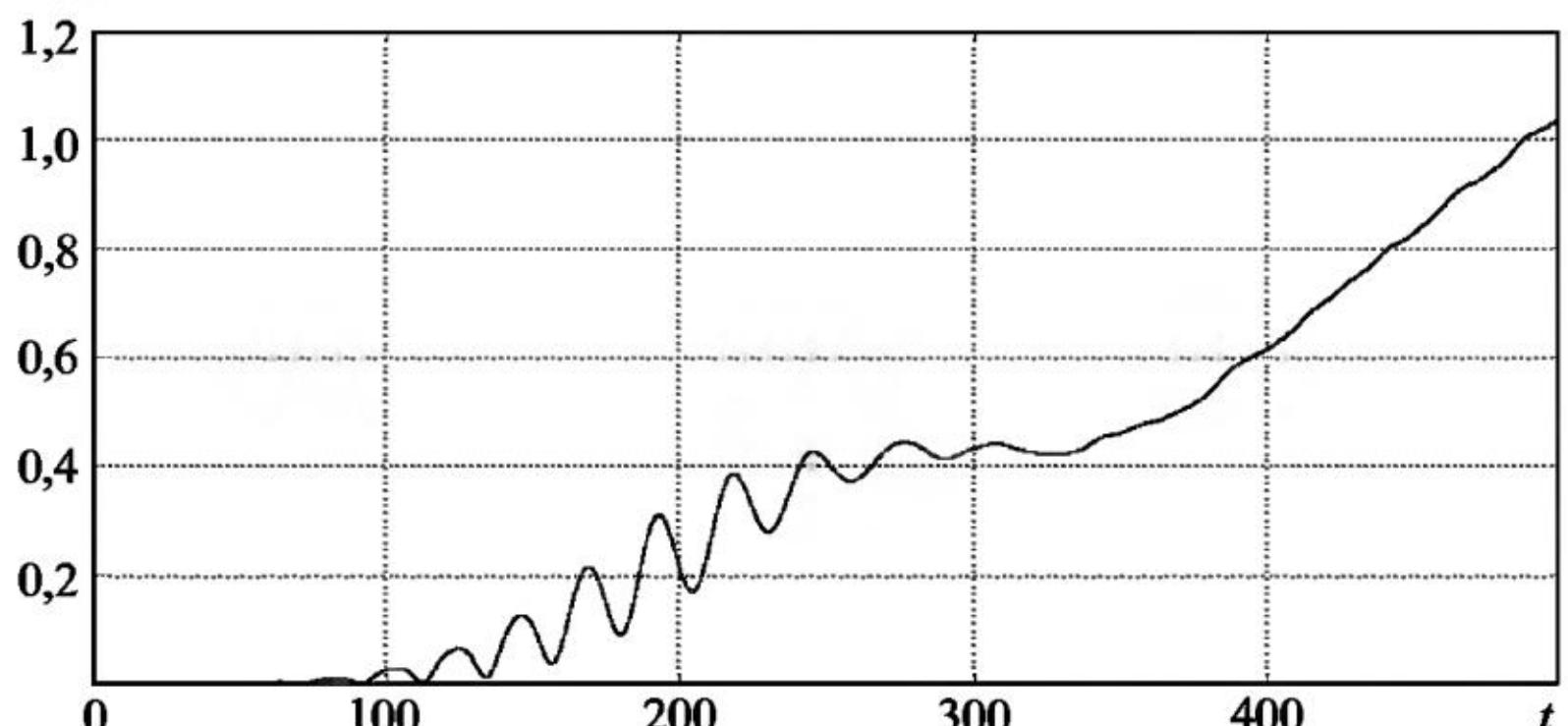
 Dy_2 

Рис. 13.87

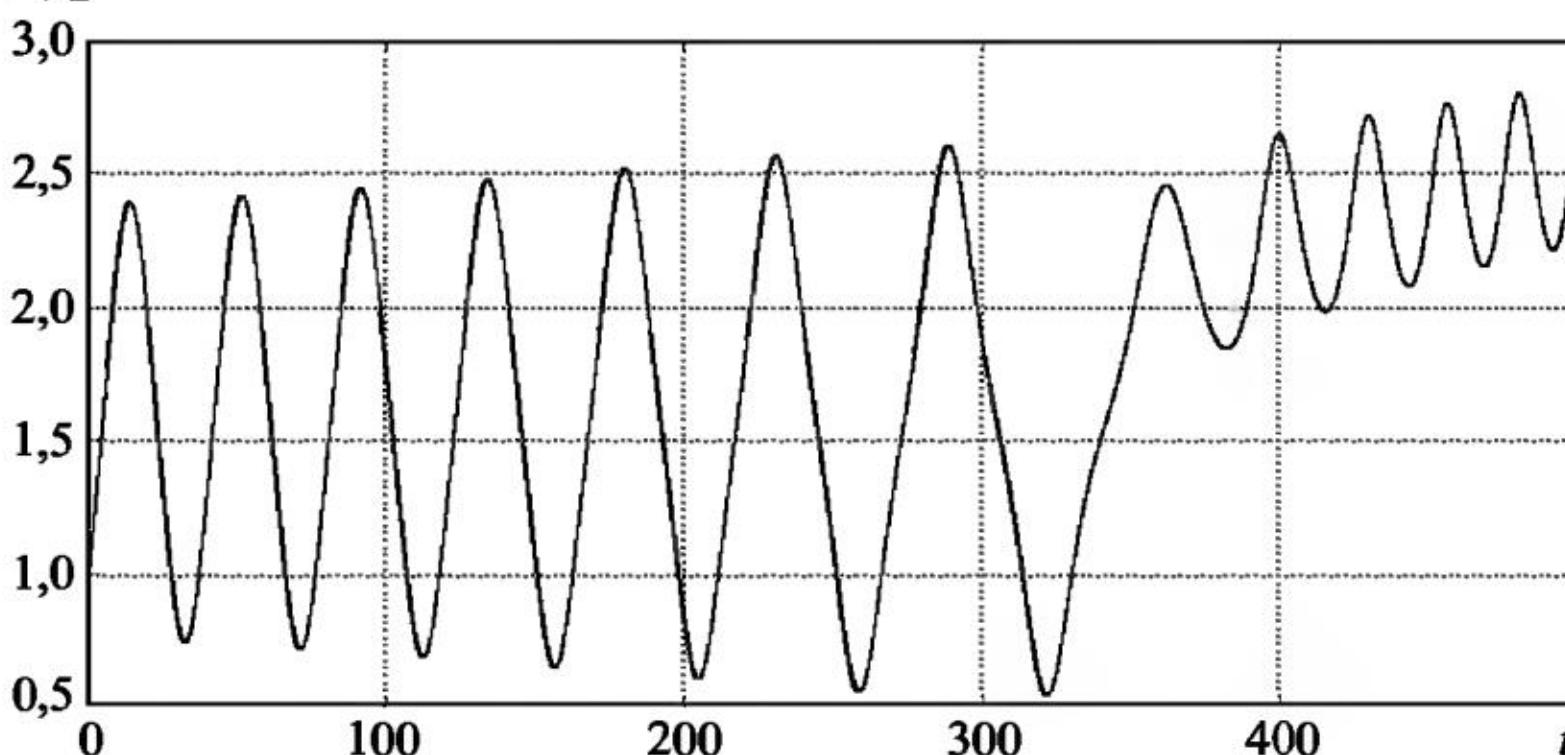
 Ey_2 

Рис. 13.88

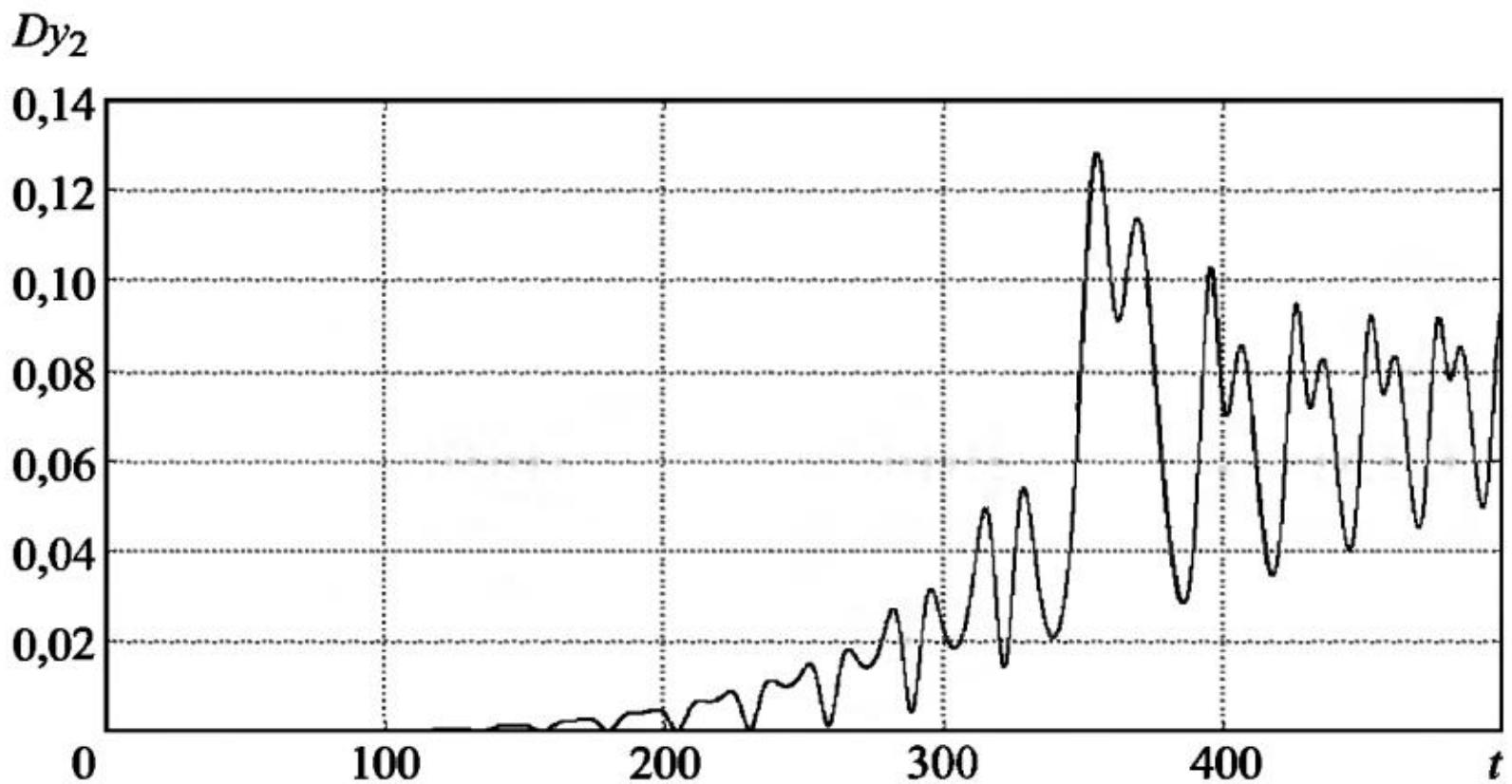


Рис. 13.89

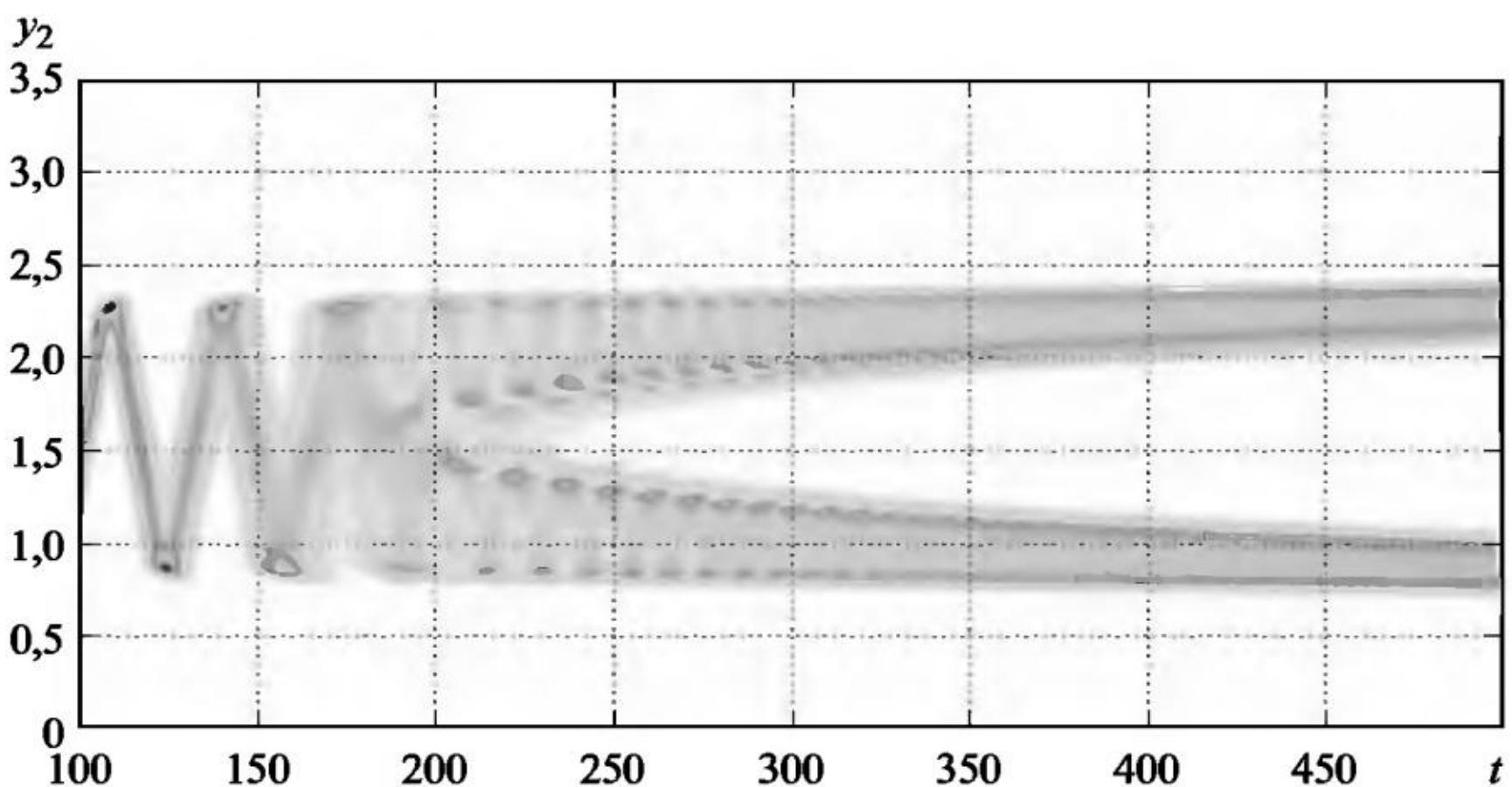


Рис. 13.90

Так как оценка дисперсии компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.10) на интервале $[0, 100]$ близка к нулю, то графики ЧИК далее строятся на интервале $[100, 500]$.

На рис. 13.90 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 13.91 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_2 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 500$ численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 13.92 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интен-

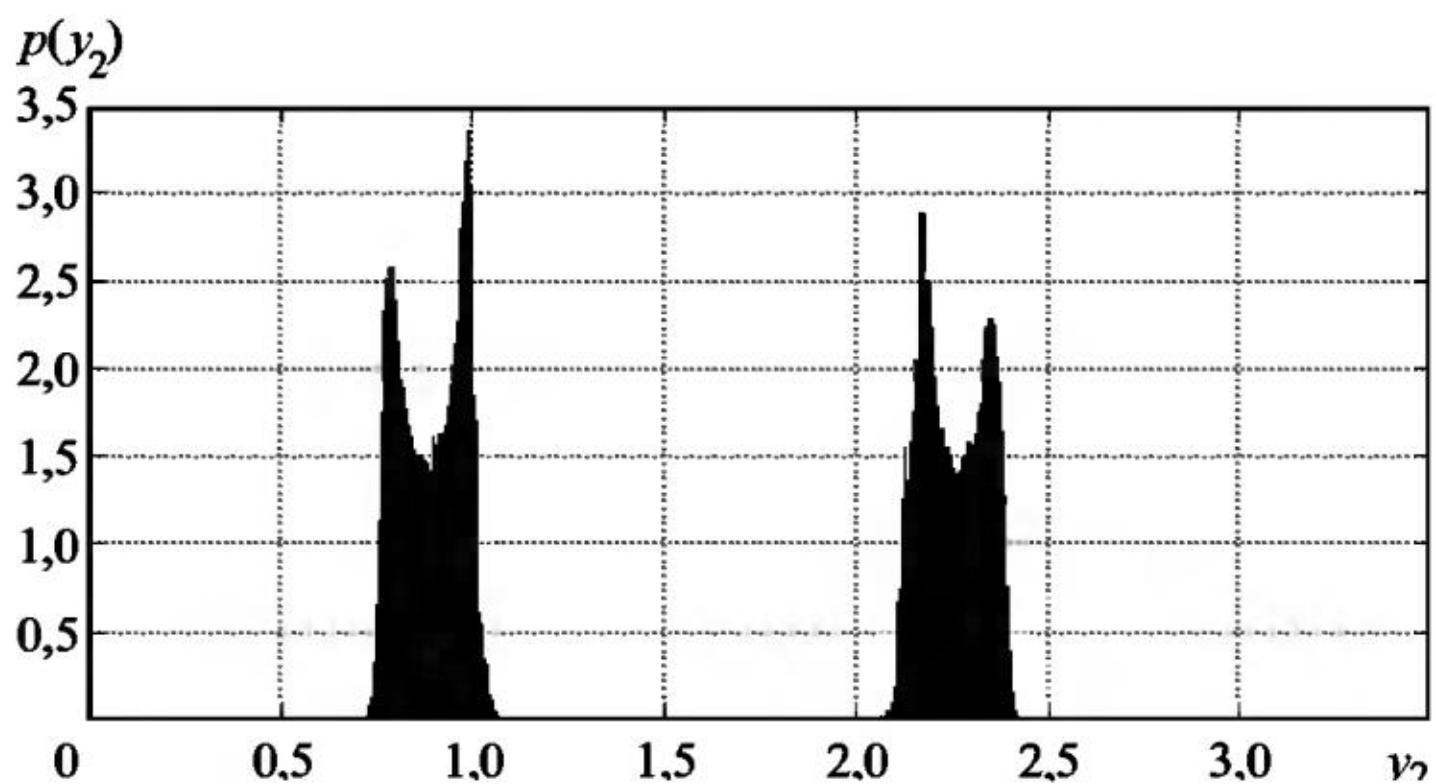


Рис. 13.91

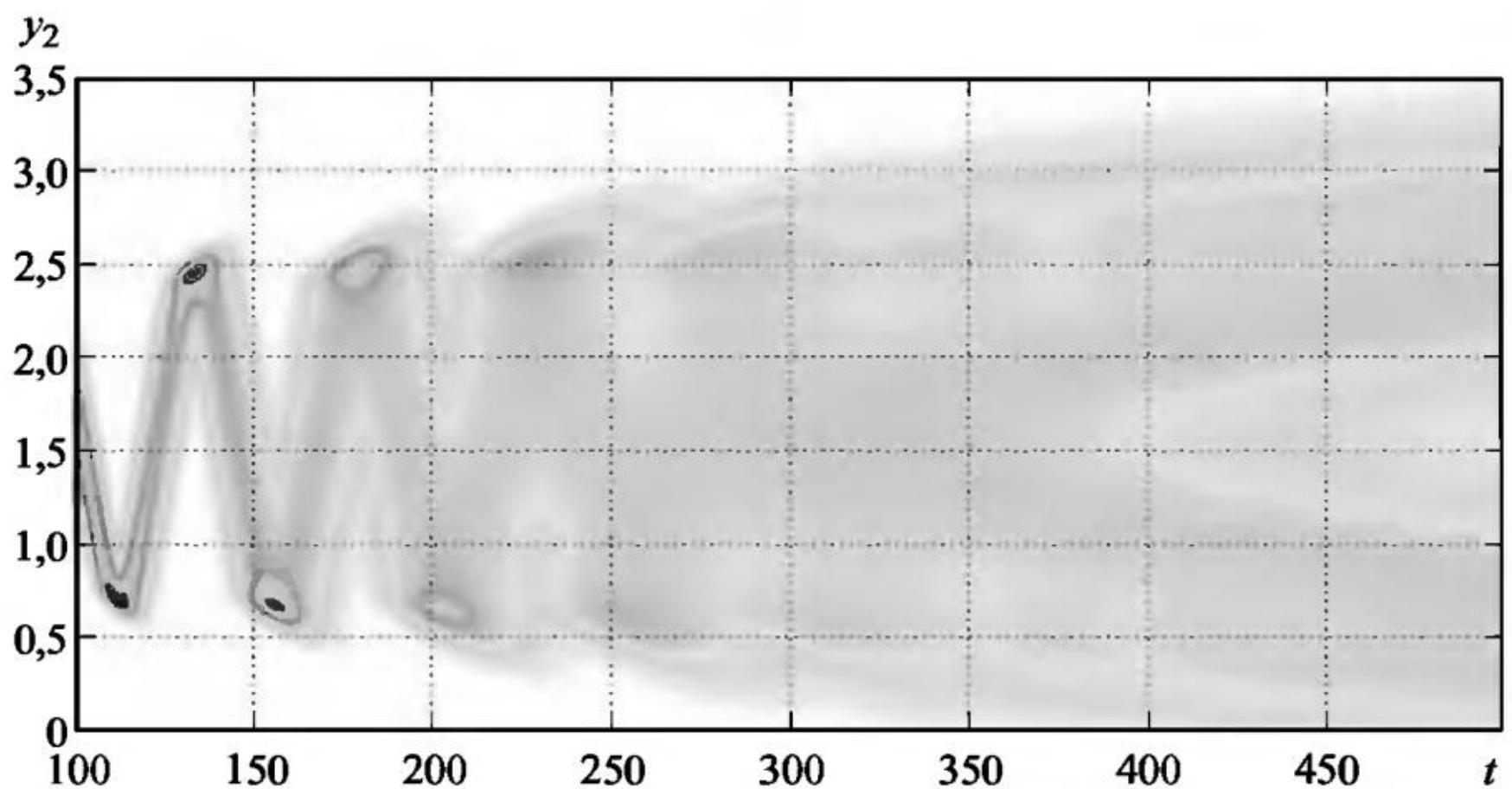


Рис. 13.92

сивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-4}$, из которого видно два режима колебаний угла поворота внутренней рамки гироскопа, тогда как математическое ожидание и одна симулированная траектория не дают полного представления о движении гироскопа.

На рис. 13.93 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_2 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 500$ численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 13.94 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_2 численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-4}$.

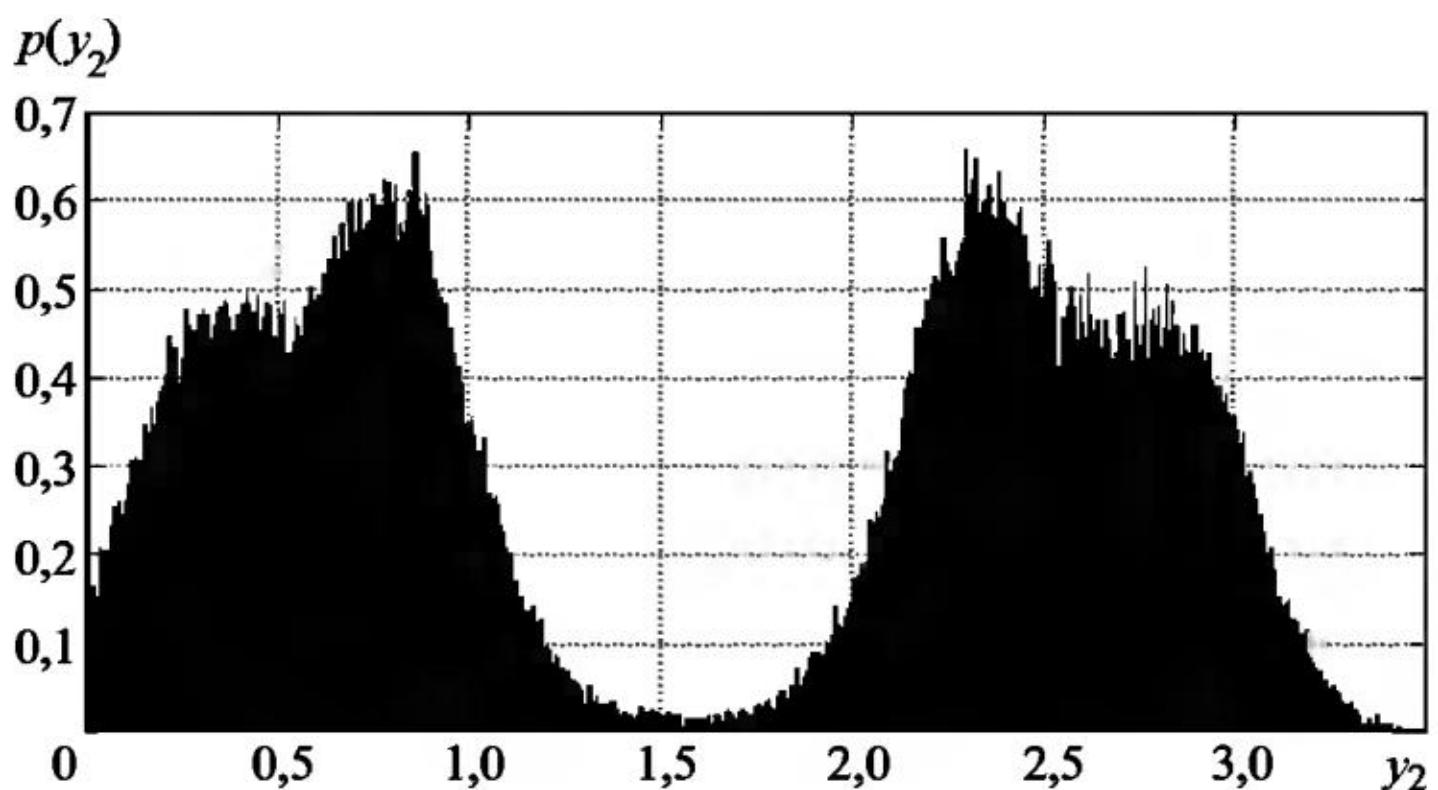


Рис. 13.93

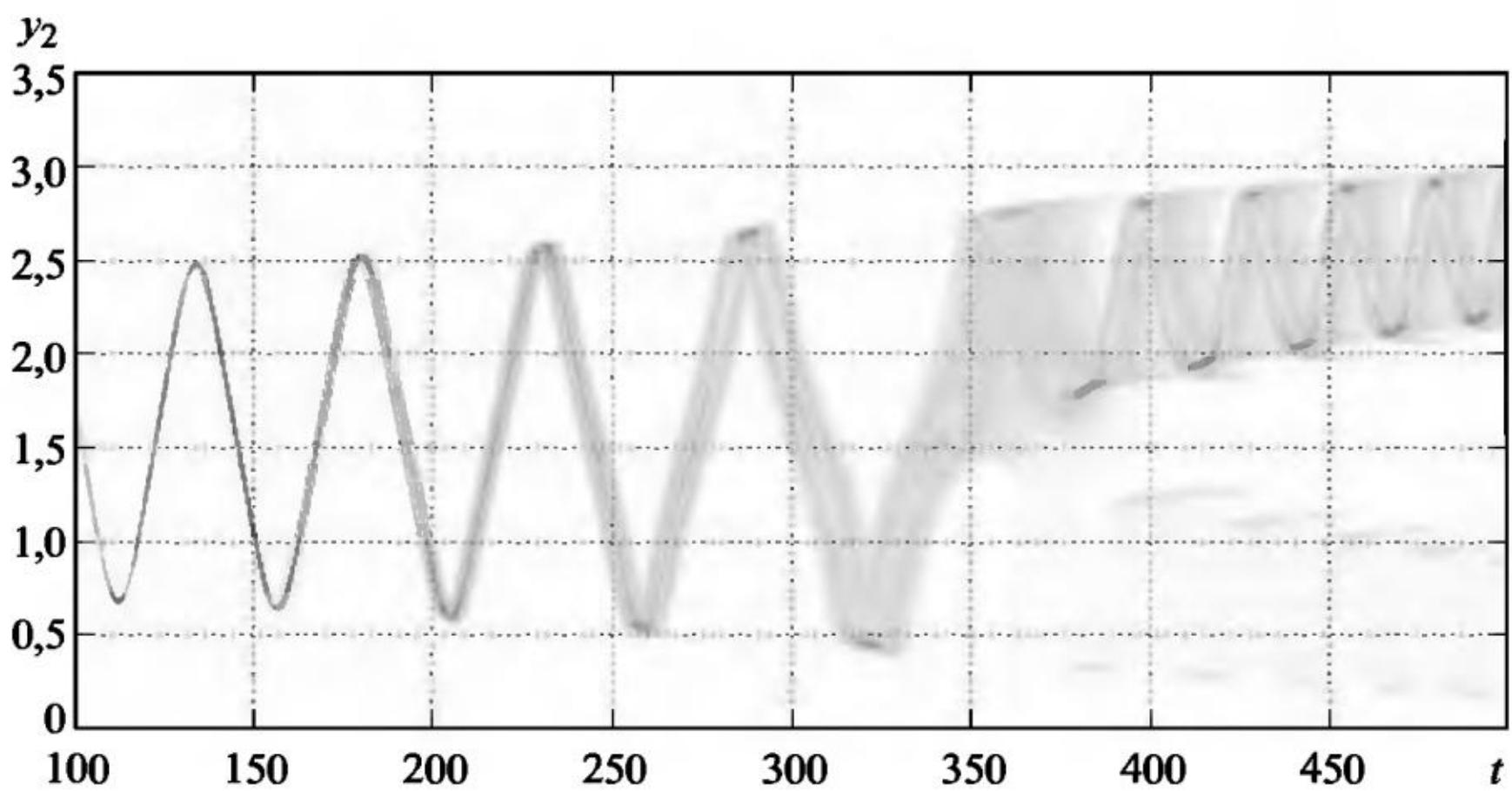


Рис. 13.94

На рис. 13.95 приведена гистограмма плотности вероятности компоненты y_2 в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 500$ численного решения системы СДУ (13.10) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-5}$ при значении параметра $a = 4 \cdot 10^{-4}$.

Анализ графиков ЧИК и ЧФП для всех компонент численных решений систем СДУ, описывающих движения ракеты, спутника и гироскопа, позволяет определить отклонение компонент решений от средних значений, в то время как оценка дисперсии показывает только средний квадрат отклонения, в этом смысле графики ЧИК и ЧФП являются более информативными, а значит, позволяют оценить точность наведения или ориентации ЛА. Расчеты показывают, что изменение интенсивности шумов существенно изменяет движение внутренней рамки гироскопа. Это из-

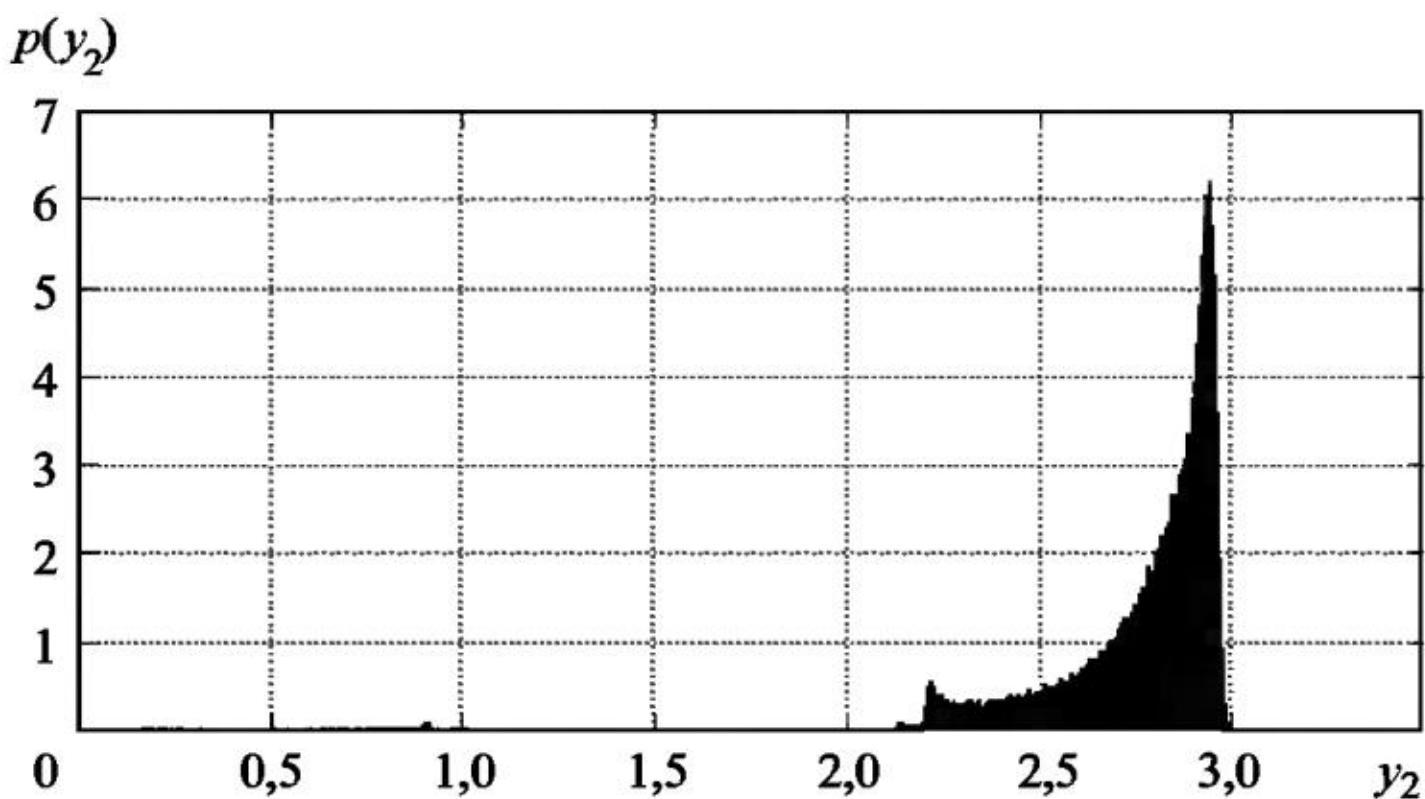


Рис. 13.95

менение можно увидеть только с помощью графиков ЧИК и ЧФП, что еще раз подтверждает необходимость использования подобных частотных графиков при параметрическом анализе нелинейных систем СДУ. Кроме того, они дают возможность при проведении параметрического анализа систем управления ЛА оценить их устойчивость к случайным возмущениям, переходы от одного режима колебаний к другому. Заметим, что если ЧИК после соответствующей нормировки является некоторым аналогом одномерной плотности распределения, то для ЧФП невозможно подобрать вероятностный аналог.

14. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ В ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЯХ

Колебательные реакции – это периодические процессы, характеризующиеся колебаниями концентраций некоторых промежуточных соединений и, соответственно, скоростей превращения. Наблюдаются такие процессы в газовой и жидкой фазах и особенно часто на границе раздела этих фаз с твердой фазой. Причиной возникновения колебаний концентраций является наличие обратных связей между отдельными стадиями сложной реакции: положительных и отрицательных. В настоящее время кинетика колебательных реакций – это бурно развивающаяся отрасль знаний, возникшая на стыке химии, биологии, медицины, физики, математики. Колебательные реакции представляют собой циклические процессы. Циклическим называют процесс, который складывается из многократных повторений одного и того же превращения. На молекулярном уровне цикличность лежит в основе протекания обширного класса химических процессов, в том числе и катализических. Катализом называется ускорение химических реакций в присутствии определенных веществ, многократно химически взаимодействующих с реагентами (исходными веществами), но и не входящих в состав продуктов реакции. Каталитическое действие на реакцию может оказывать какой-либо из ее продуктов. Такое явление получило название автокатализа. Характерная особенность автокаталитической реакции состоит в том, что она идет при переменной, возрастающей в ходе реакции концентрации катализатора. Поэтому скорость автокаталитической реакции в начальный период возрастает и лишь на более глубоких стадиях превращения в результате убыли концентрации исходных веществ рост скорости сменяется падением [27].

Известно уже достаточно большое число химических реакций, в которых наблюдаются колебательные изменения концентраций реагентов: это катализируемые броматные осцилляторы (реакция Белоусова–Жаботинского); не катализируемые броматные осцилляторы; осцилляторы на основе хлорит-ионов; иодатные и пероксидные осцилляторы и т. д. Математическое описание этих процессов оказалось достаточно сложным. Выяснилось, что

одна из простейших химических схем, описывающих колебания в системе двух последовательных автокаталитических реакций, математически тождественна уравнениям, которые итальянский ученый Вольтерра использовал для описания экологических процессов. В настоящее время это известная модель Лотки–Вольтерра [3]. Дифференциальные уравнения химической кинетики являются универсальным способом представления зависимости концентраций веществ от времени и составляют основу ее математического аппарата.

Пример 14.1. Модель Вольтерра размеров популяции = модель химической реакции Жаботинского. Пусть имеется два вида животных, один из которых пожирает другой (хищники и жертвы). При этом относительный прирост в единицу времени численности жертв, живущих изолированно (в отсутствие хищников), равен q_1 , в то время как хищники, отделенные от своих жертв, постепенно умирают с голоду, и относительное падение их численности в единицу времени составляет q_2 . Как только хищники и жертвы начинают обитать в непосредственной близости друг от друга, изменения численности их популяций становятся взаимосвязанными. В этом случае, очевидно, относительный прирост численности жертв будет уже зависеть от размеров популяции хищников и будет уменьшаться с ростом этой популяции. Простейшую стохастическую модель Лотки–Вольтерра зададим в виде системы СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= (y_1 - qy_1y_2)dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t), & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= (qy_1y_2 - 0,4y_2)dt + \sigma_2 y_2 dw_2(t), & y_2(0) &= 1. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Здесь y_1 , y_2 – число жертв и хищников соответственно в момент времени t , q – постоянный коэффициент. Компоненты y_1 и y_2 можно также интерпретировать как безразмерные концентрации двух веществ, участвующих в химической реакции Жаботинского. На рис. 14.1 и 14.2 приведены графики компоненты y_1 и фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) решения сопутствующей системы ОДУ при $q = 0,1$, из которых видим автоколебательный характер решения при так заданном параметре q .

Для сравнения на рис. 14.3 и 14.4 приведены аналогичные графики с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$, которые значительно превосходят по размерам графики на рис. 14.1 и 14.2 и «всплески» числа жертв имеют различную высоту.

Расчеты показывают, что решения системы СДУ (14.1) имеют осциллирующий характер при любых $q > 0,1$. На рис. 14.5 видим рост со временем дисперсии компоненты решения y_1 , тогда

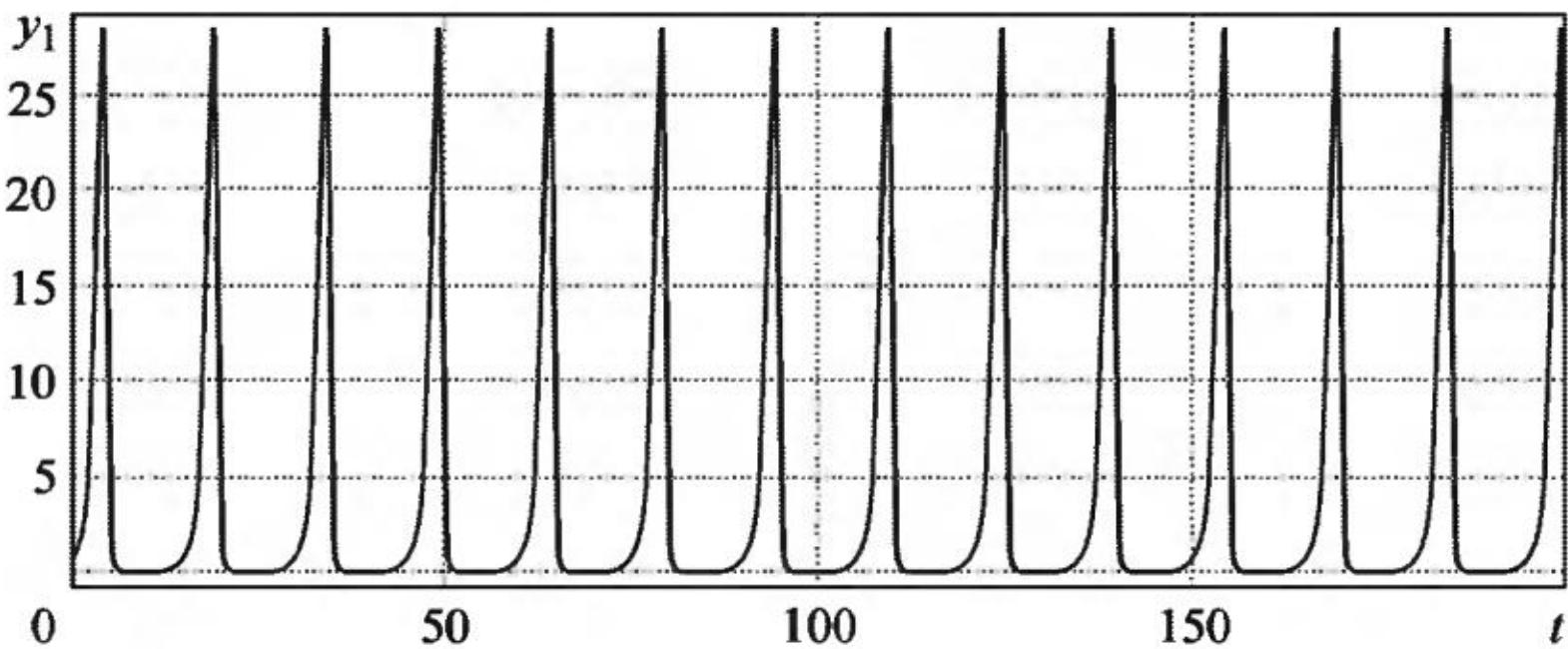


Рис. 14.1

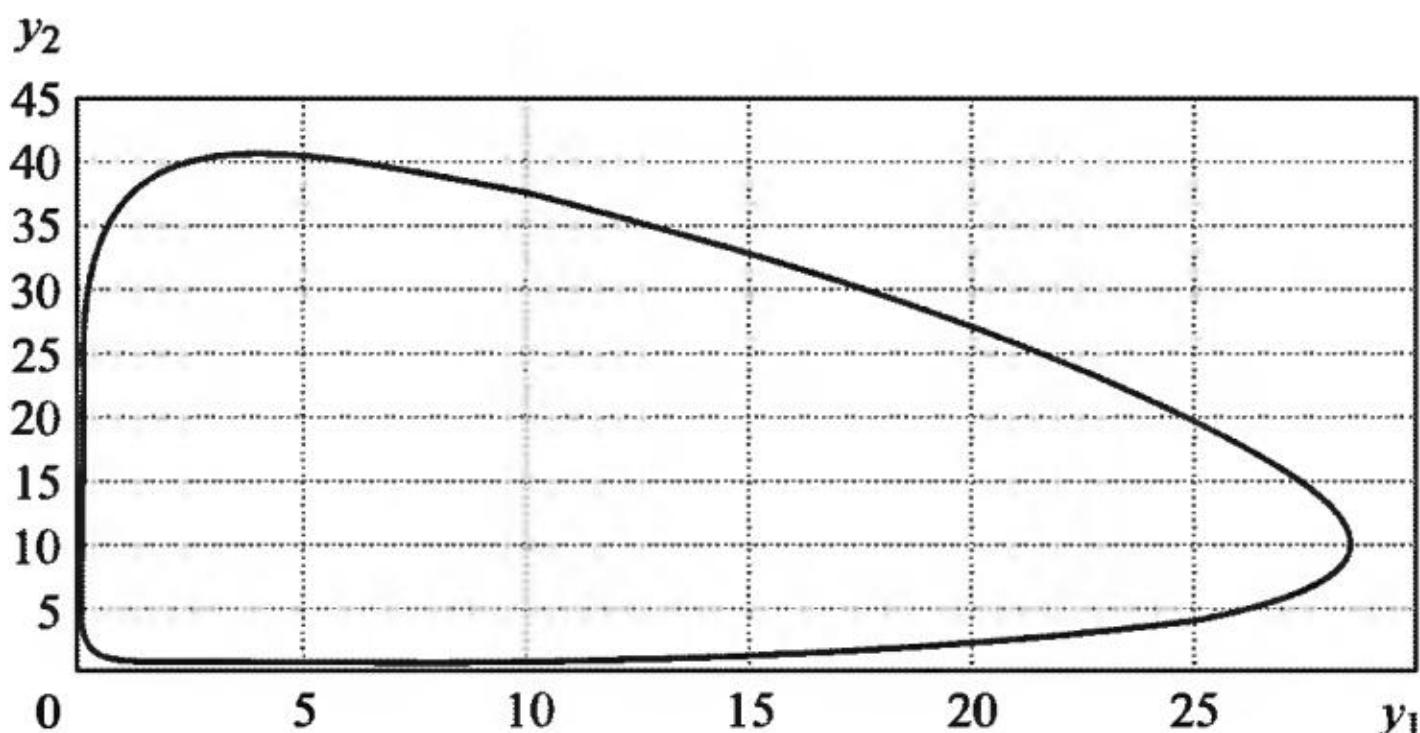


Рис. 14.2

как у сопутствующей системы ОДУ колебания компоненты решения имеют постоянную амплитуду.

На рис. 14.6 дан график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 численного решения системы СДУ (14.1) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$, обобщающий график на рис. 14.3.

График ЧИК совместно с графиком дисперсии дает представление об устойчивости или неустойчивости численного решения СДУ. Так как дисперсия растет, а ЧИК «расползается» – делаем вывод, что решение СДУ (14.1) на более длинном интервале интегрирования будет неустойчивым при заданном параметре шума. Возникает вопрос: откуда в реальности число «овец» может так увеличиваться со временем? Также отметим, что при большем размере шага интегрирования ($h > 10^{-2}$) у численного решения сопутствующей системы ОДУ, а значит и у системы СДУ, отмечается экспоненциальный рост амплитуды колебаний компонент решения, т. е. налицо явление численной неустойчивости явного метода Эйлера. Однако, если рассматривать размер шага интегрирования как параметр дискретной модели, то вопрос об аппрокси-

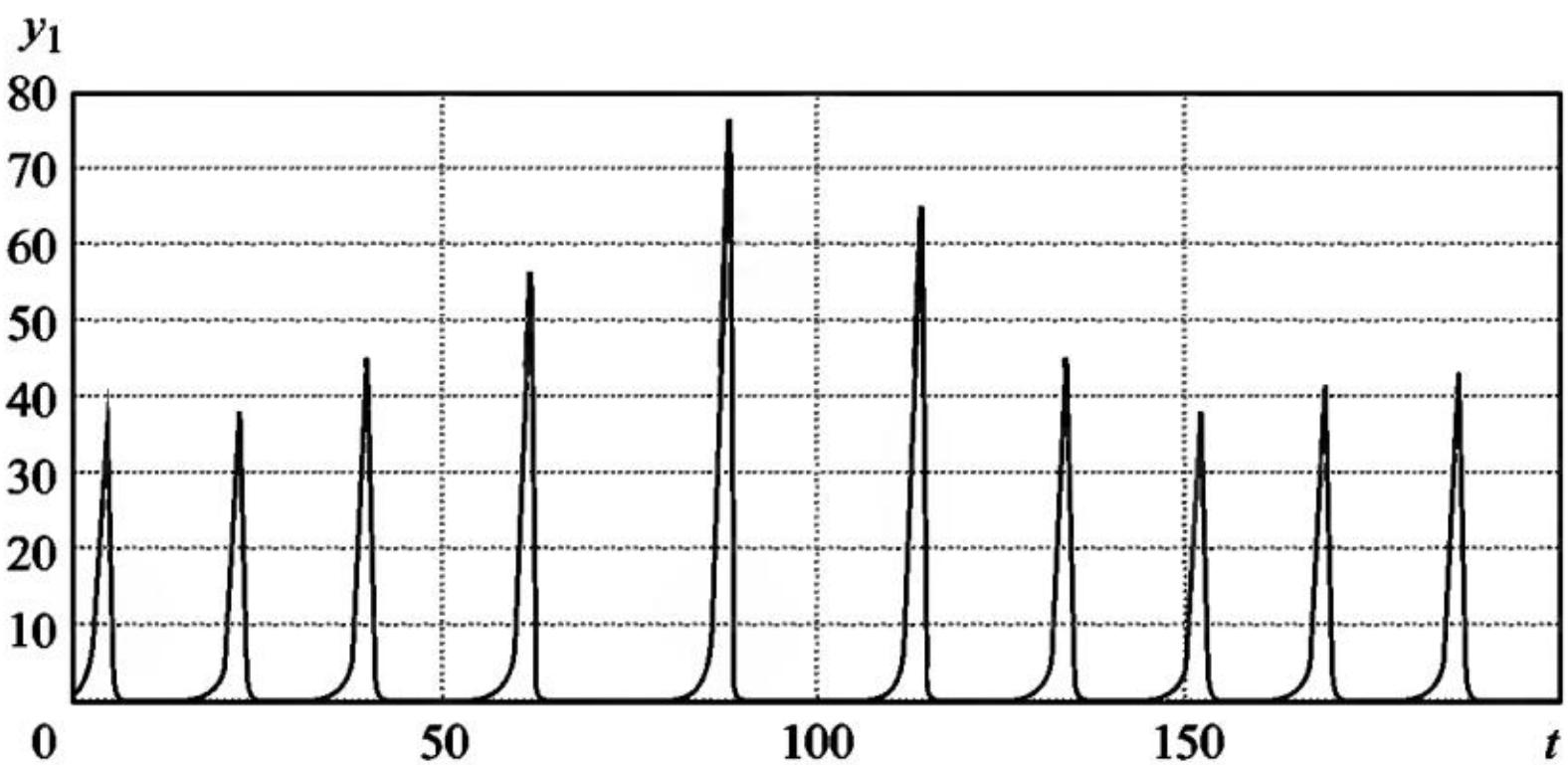


Рис. 14.3

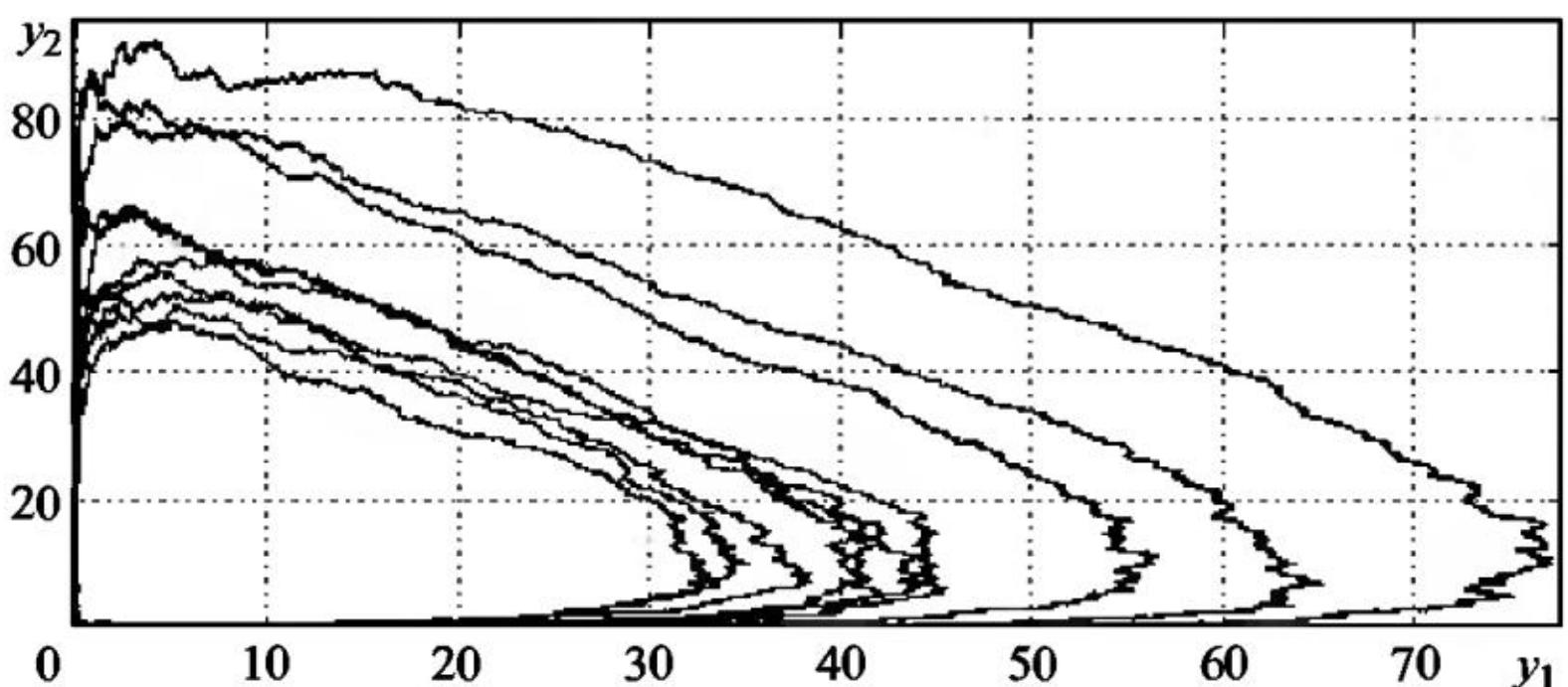


Рис. 14.4

мации непрерывной модели не стоит, а исследуется зависимость дискретной случайной последовательности от всех параметров модели.

График ЧФП (вид сбоку) на рис. 14.7 пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (14.1) при $q=0,1$ обобщает картину фазовой траектории на рис. 14.4 и показывает области концентрации значений пары случайных процессов $(y_1(t), y_2(t))$.

Пример 14.2. Кинетическая стохастическая автоколебательная модель химической реакции задается системой СДУ с внутренними шумами [27]

$$\begin{aligned} dy_1 &= (10 + 0,1y_1 - 10y_2 + 0,1y_1y_2 + ay_1y_3)dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t), & y_1(0) &= 1, \\ dy_2 &= (10 + y_1 + 0,1y_2 + 0,01(y_1^2 + y_2^2) + 0,1y_1y_2 + 0,1y_2y_3)dt, & y_2(0) &= 1, \\ dy_3 &= (0,1y_2 + 0,1y_2y_3 + 0,01y_1y_3)dt + \sigma_2 y_2 dw_2(t), & y_3(0) &= 1, \end{aligned} \quad (14.2)$$

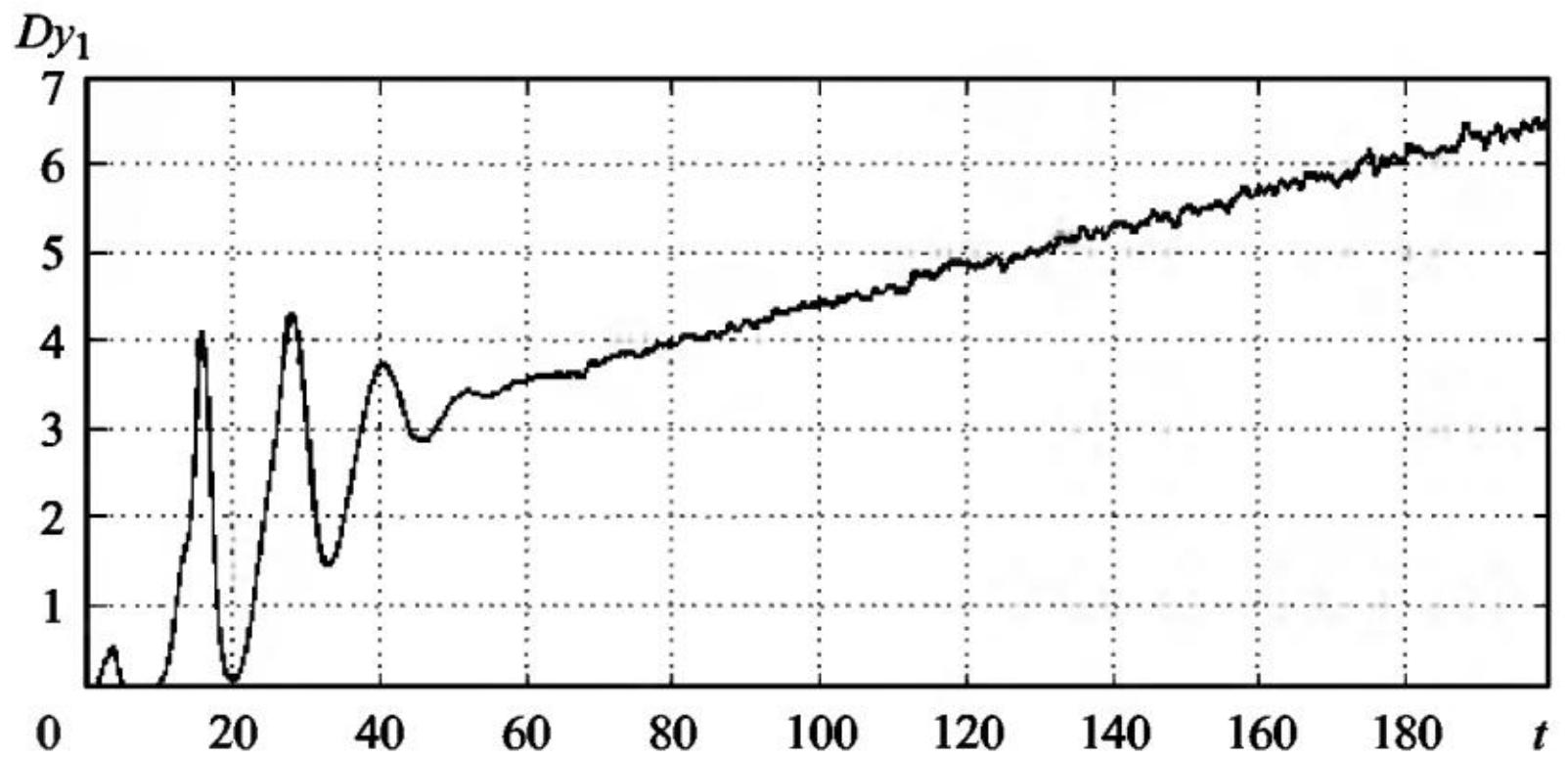


Рис. 14.5

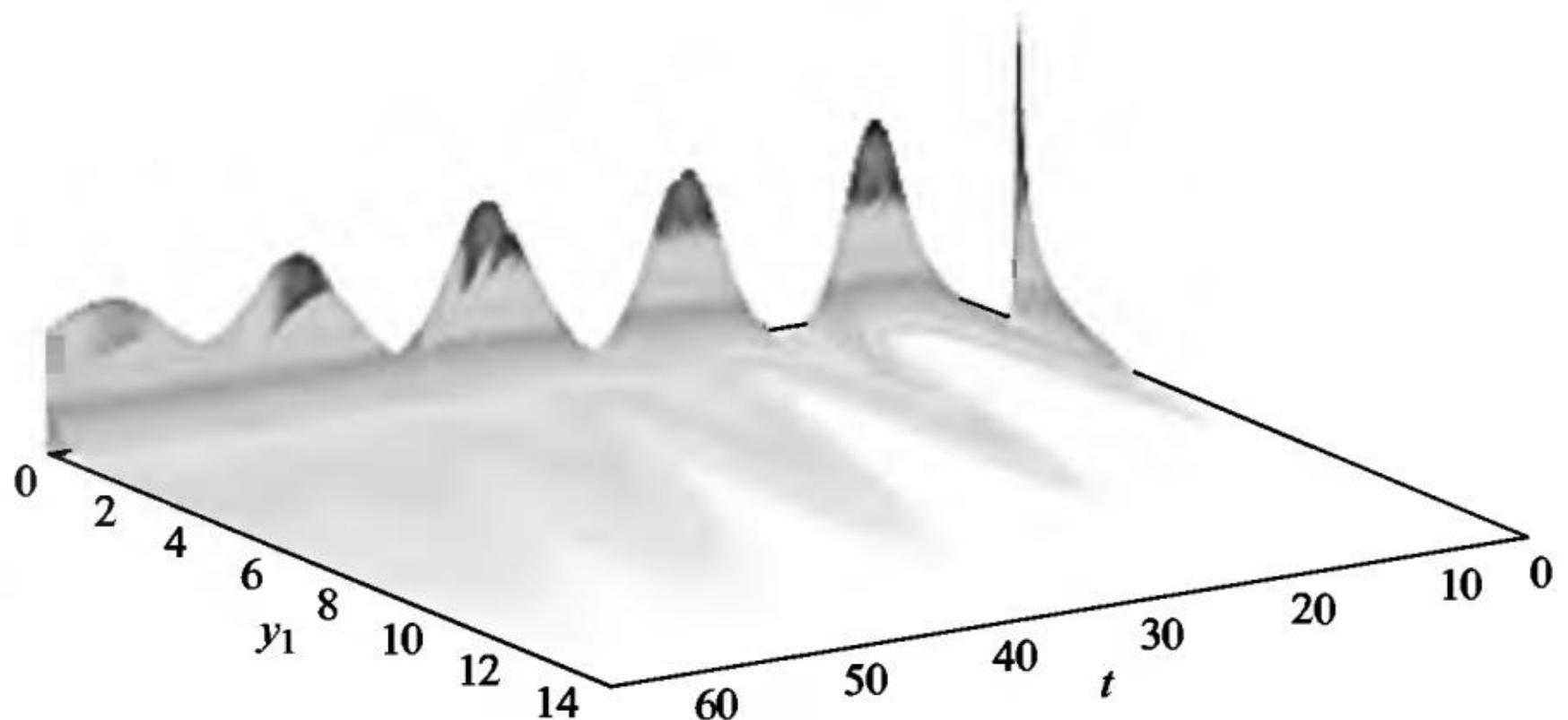


Рис. 14.6

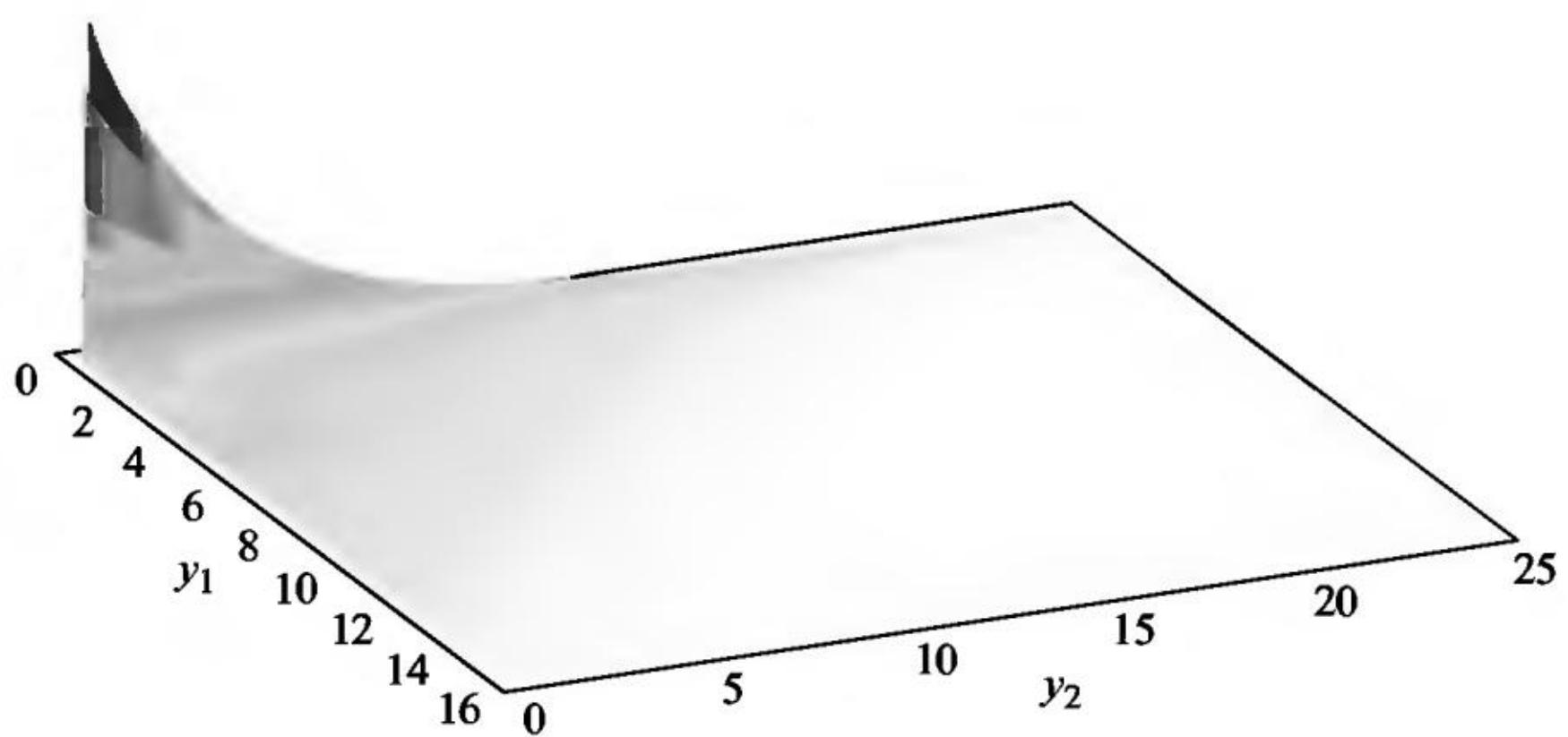


Рис. 14.7

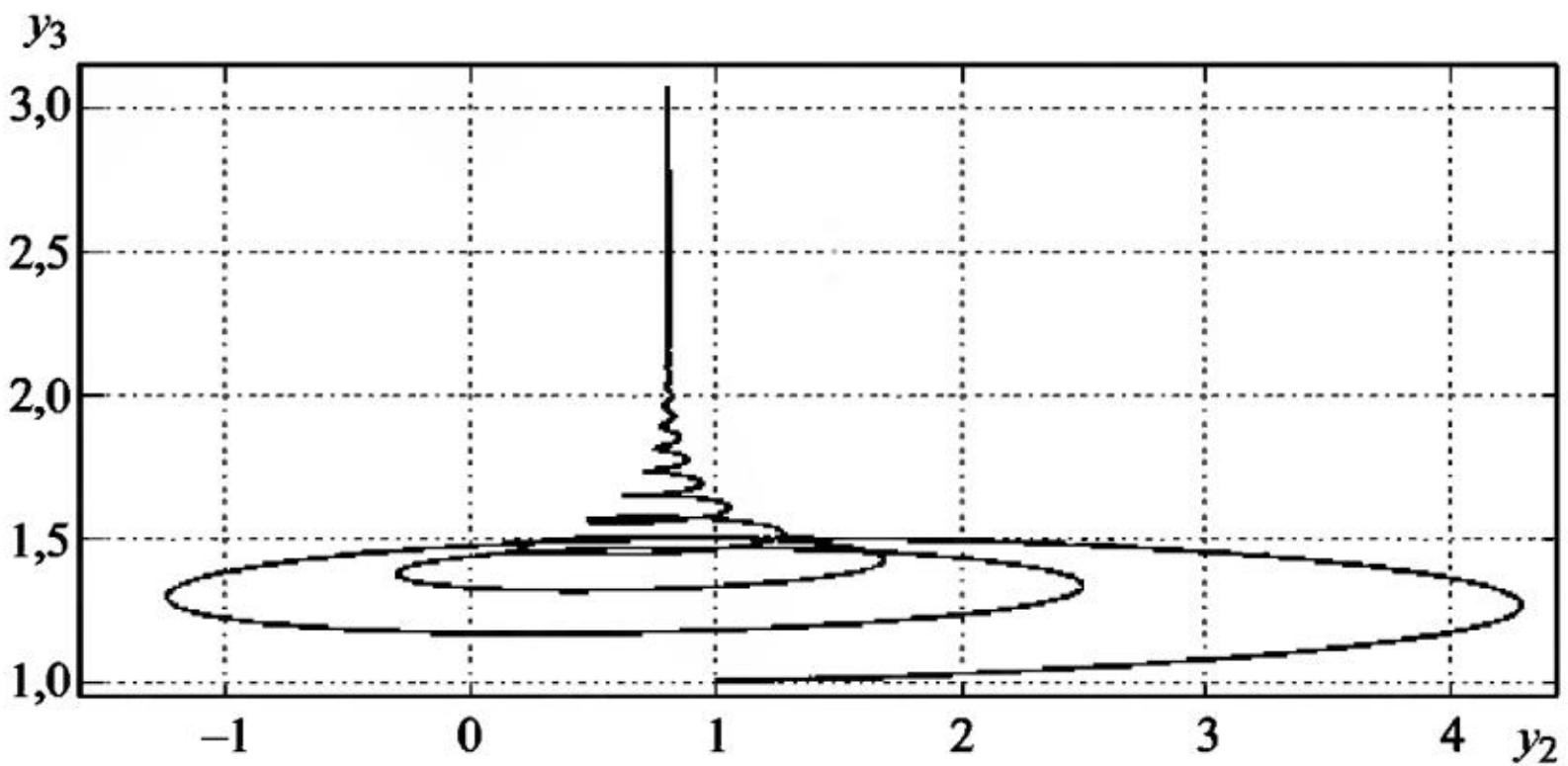


Рис. 14.8

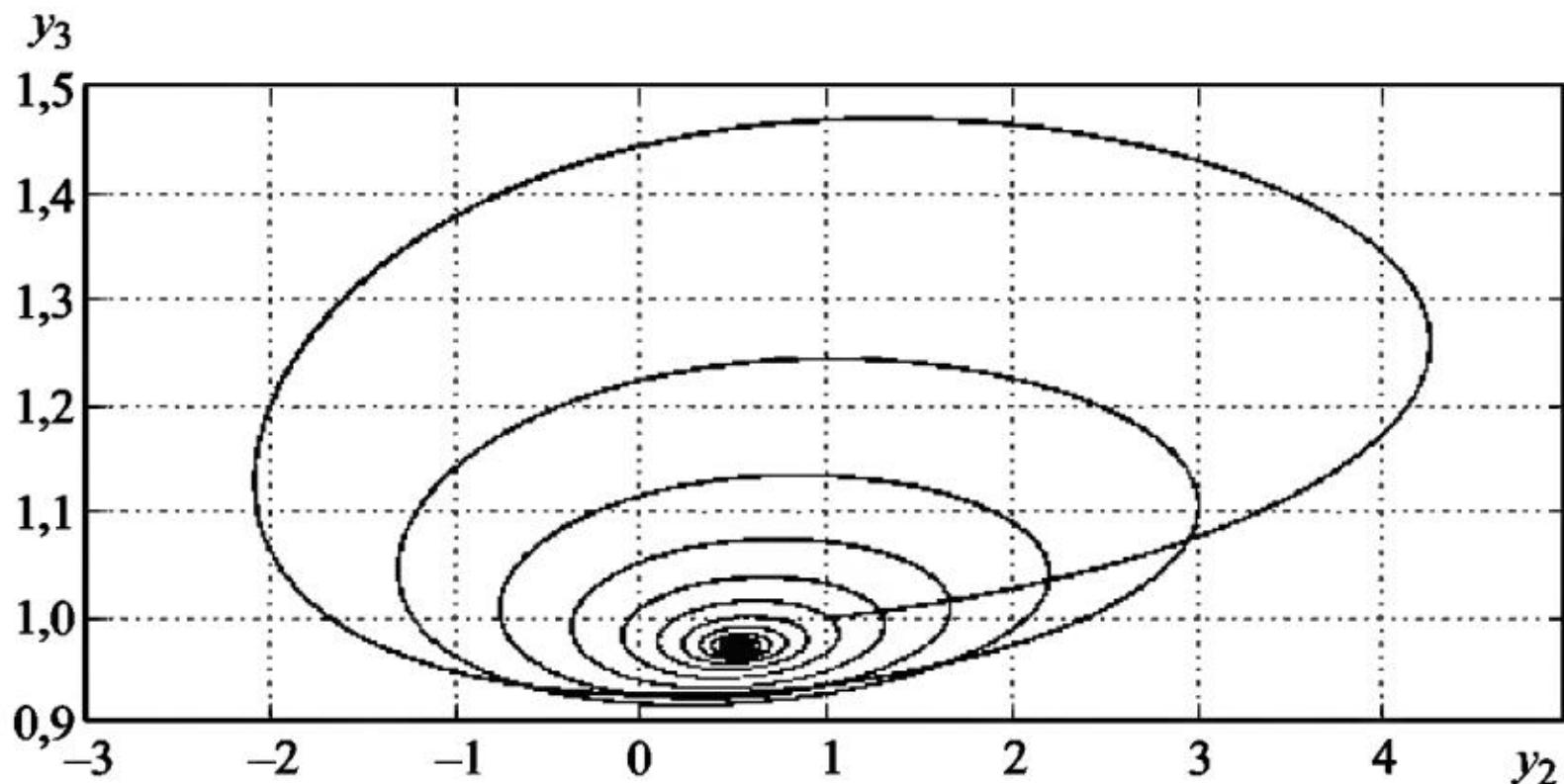


Рис. 14.9

где y_1, y_2, y_3 – концентрации реагентов, участвующих в реакции. На рис. 14.8 и 14.9 даны совершенно различные между собой графики фазовой траектории пары компонент (y_2, y_3) решения сопутствующей системы ОДУ при значениях параметра $a = 0$ и $0,3$. Параметр a определяет силу связи компонент решения y_1 и y_3 .

На рис. 14.10 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_2 численного решения системы СДУ (14.2) при $a = 0$ с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$, из которого видим выход на стационарный режим случайного процесса $y_2(t)$. Расчеты проводились на интервале $[0, 50]$ с шагом интегрирования $h = 10^{-4}$. Моделировалось $N_{\text{tr}} = 10^6$ траекторий решения системы СДУ (14.2).

Из графиков ЧФП (вид сверху и сбоку) на рис. 14.11 и 14.12 пары компонент (y_2, y_3) численного решения системы СДУ (14.2) при $a = 0$ виден сложный характер поведения амплитуд колебаний компонент решения. Координаты пика частот соответствуют наиболее устойчивым уровням концентраций реагентов (y_2, y_3) .

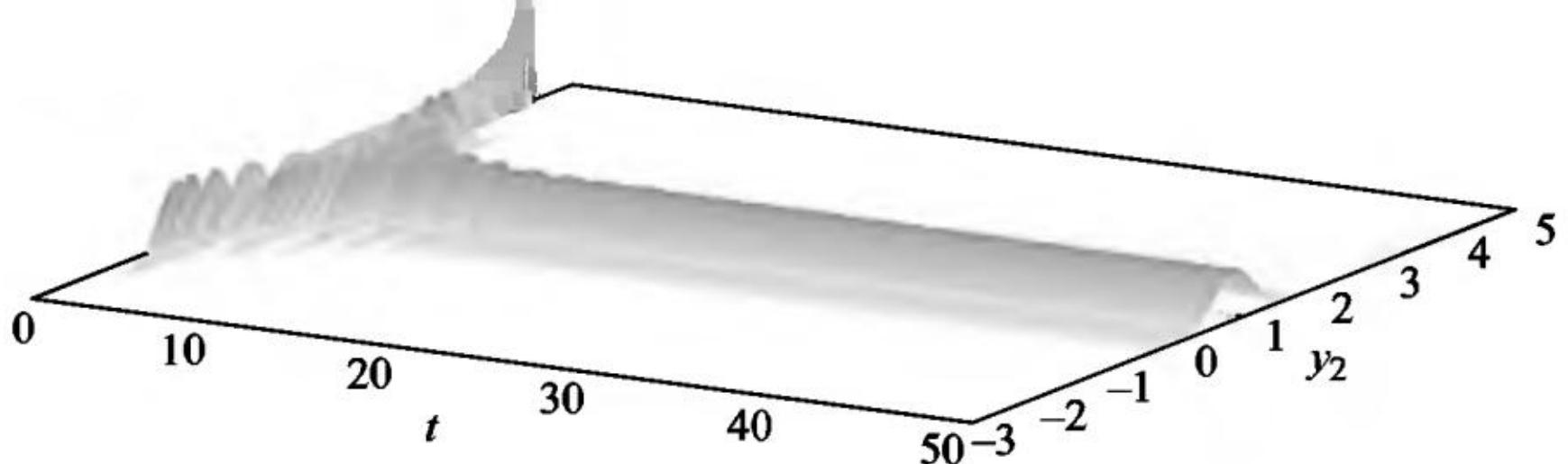


Рис. 14.10

Сравнивая графики на рис. 14.8 и 14.12, можем заключить, что последний обобщает график на рис. 14.8. Это же можно сказать про графики на рис. 14.9 и 14.14.

На рис. 14.13 и 14.14 приведены аналогичные графики ЧИК и ЧФП при $a = 0,3$, которые в отличие от детерминированного случая схожи с графиками на рис. 14.10 и 14.11 соответственно.

Заметим, что при значениях параметра $a = 0$ и $0,3$ компоненты решения системы СДУ (14.2) иногда принимают отрицательные значения, т. е. получаем отрицательные концентрации. Тем не менее, при параметрическом анализе решений систем СДУ приходится моделировать подобные «чудесные» варианты, а это значит, что необходимо корректировать математическую модель и значения вещественных параметров.

Пример 14.3. Кинетическая модель реакции окисления водорода на никеле на металлах платиновой группы при наличии внутренних и внешних случайных возмущений задается системой СДУ с аддитивным и мультипликативным шумами [28]

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= \left(0,2(1-y_1-y_2)^2 - ay_1^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 200\exp(-30y_2)y_1^2y_2 \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), \quad y_1(0) = 0,43, \\
 dy_2 &= \left(8(1-y_1-y_2)^2 - 2\exp(-12y_2+10y_3)y_2 - \right. \\
 &\quad \left. - 100\exp(-30y_2)y_1^2y_2 \right) dt + \sigma_2 y_2 dw_2(t), \quad y_2(0) = 0,2, \\
 dy_3 &= \left(8,837 \cdot 10^{-7} (y_2(1-y_3) - \right. \\
 &\quad \left. - y_3(1-y_1-y_2)) \right) dt + \sigma_3 y_3 dw_3(t), \quad y_3(0) = 0,38225.
 \end{aligned} \tag{14.3}$$

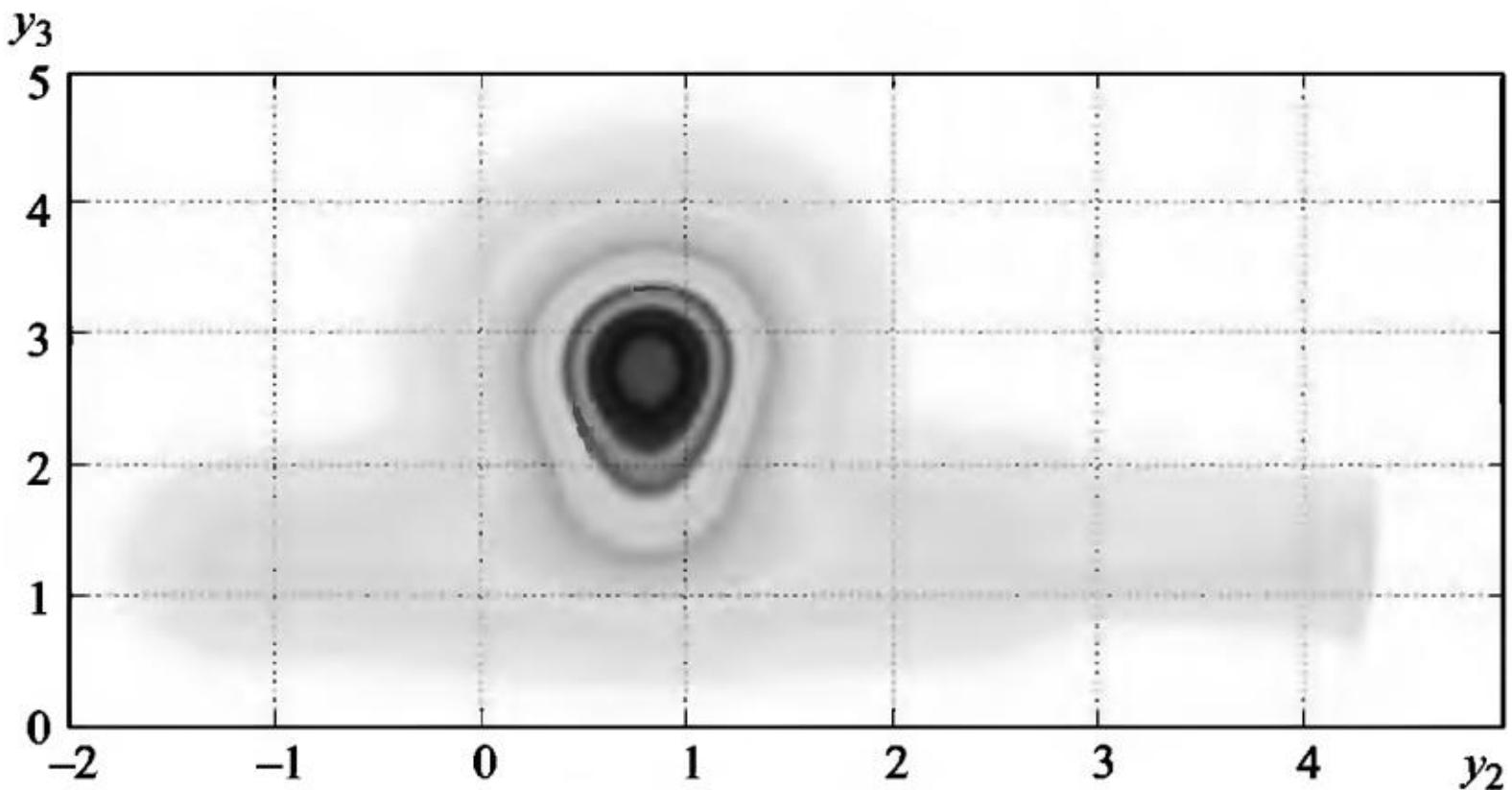


Рис. 14.11

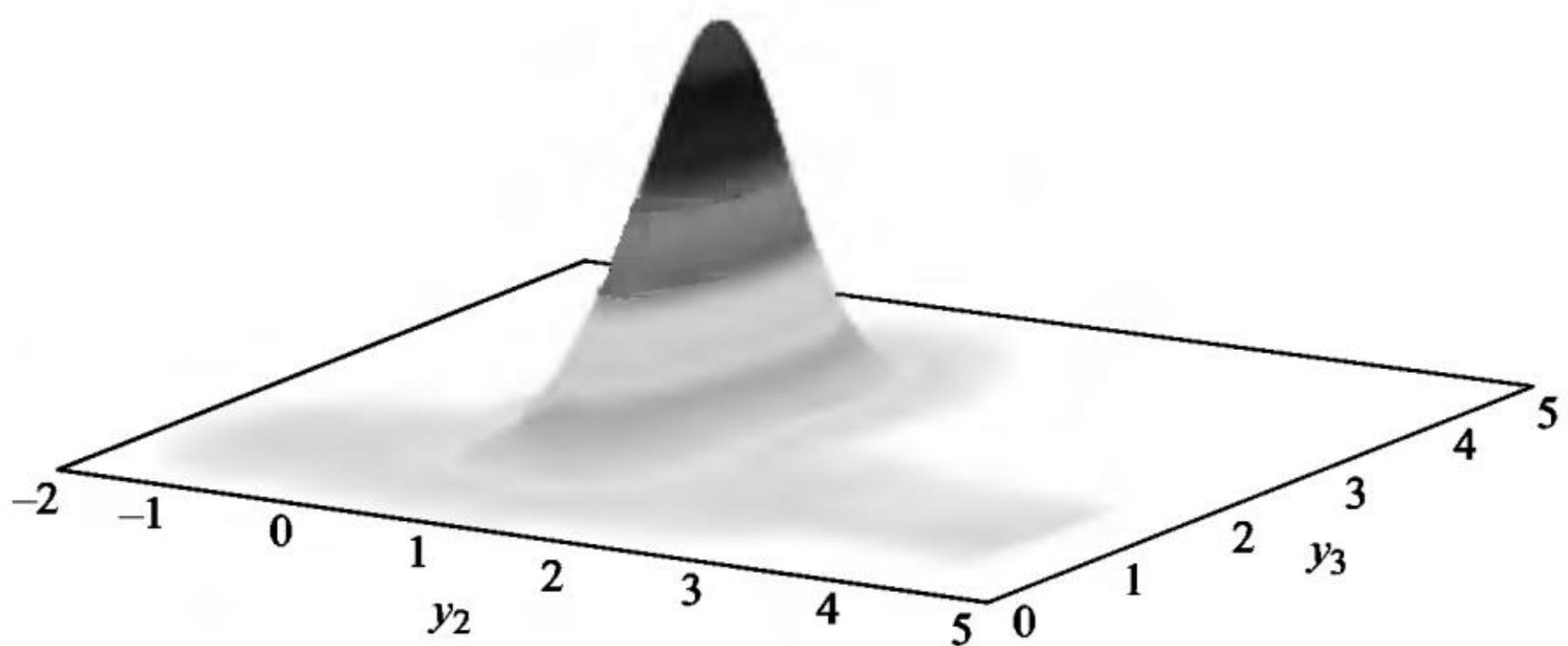


Рис. 14.12

Здесь y_1, y_2, y_3 – безразмерные концентрации водорода, кислорода и кислорода, внедренного в приповерхностный слой металла. На рис. 14.15 и 14.16 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) решения сопутствующей системы ОДУ, рассчитанные при $a = 0,001$ и $a = 0,01$ на интервале $t_{\text{end}} = 500$ с шагом $h = 10^{-6}$, из которых видим автоколебательный характер поведения компонент решения системы ОДУ при так заданных параметрах, причем режимы колебаний для разных a совершенно различны между собой. Заметим, что при значении параметра $a = 0,013$ колебания компонент решения сопутствующей системы ОДУ отсутствуют.

Для более детального изучения стохастической модели (14.3) рассчитаны ЧИК и ЧФП пары компонент (y_1, y_2) с использованием 120 ядер суперкомпьютера при $t_{\text{end}} = 500$, $h = 10^{-6}$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,1$ для $a = 0,001$ и $0,01$. Моделировалось $N_{\text{tr}} = 10^6$ траекторий решения

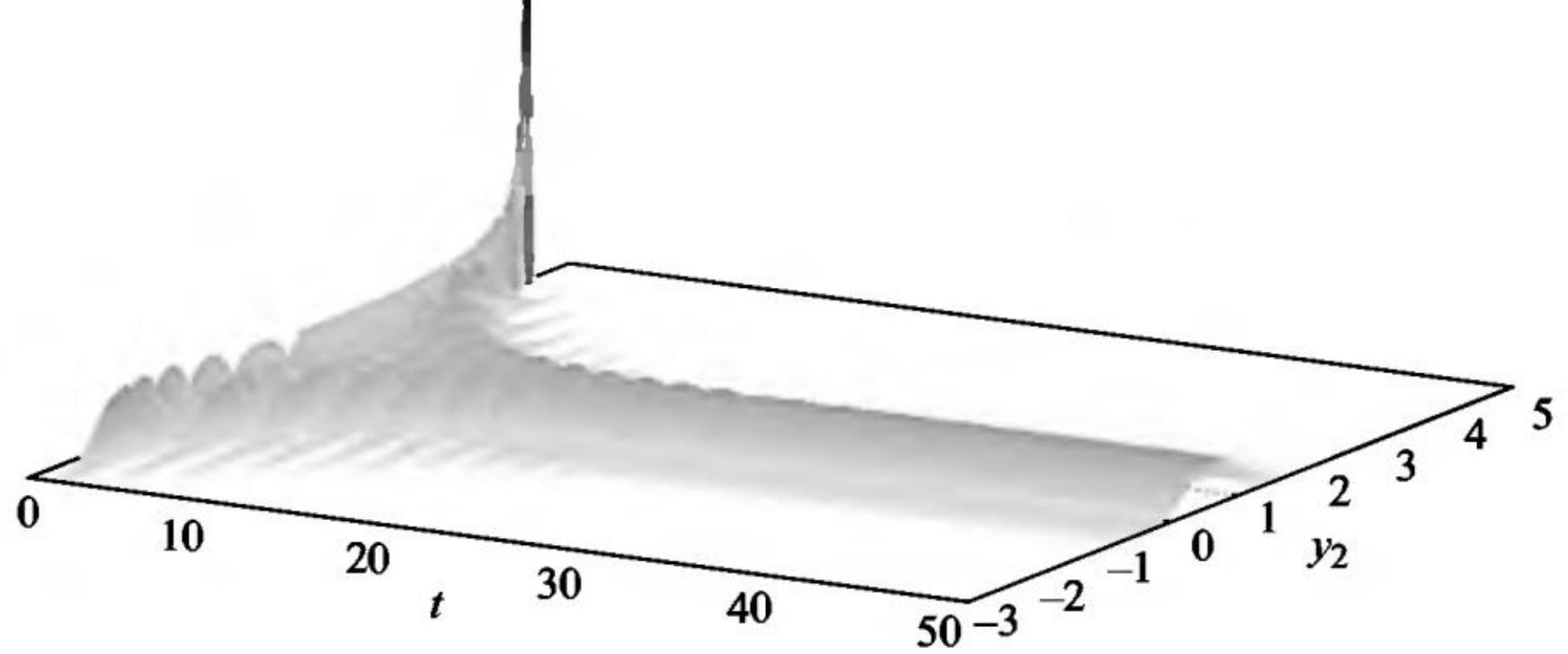


Рис. 14.13

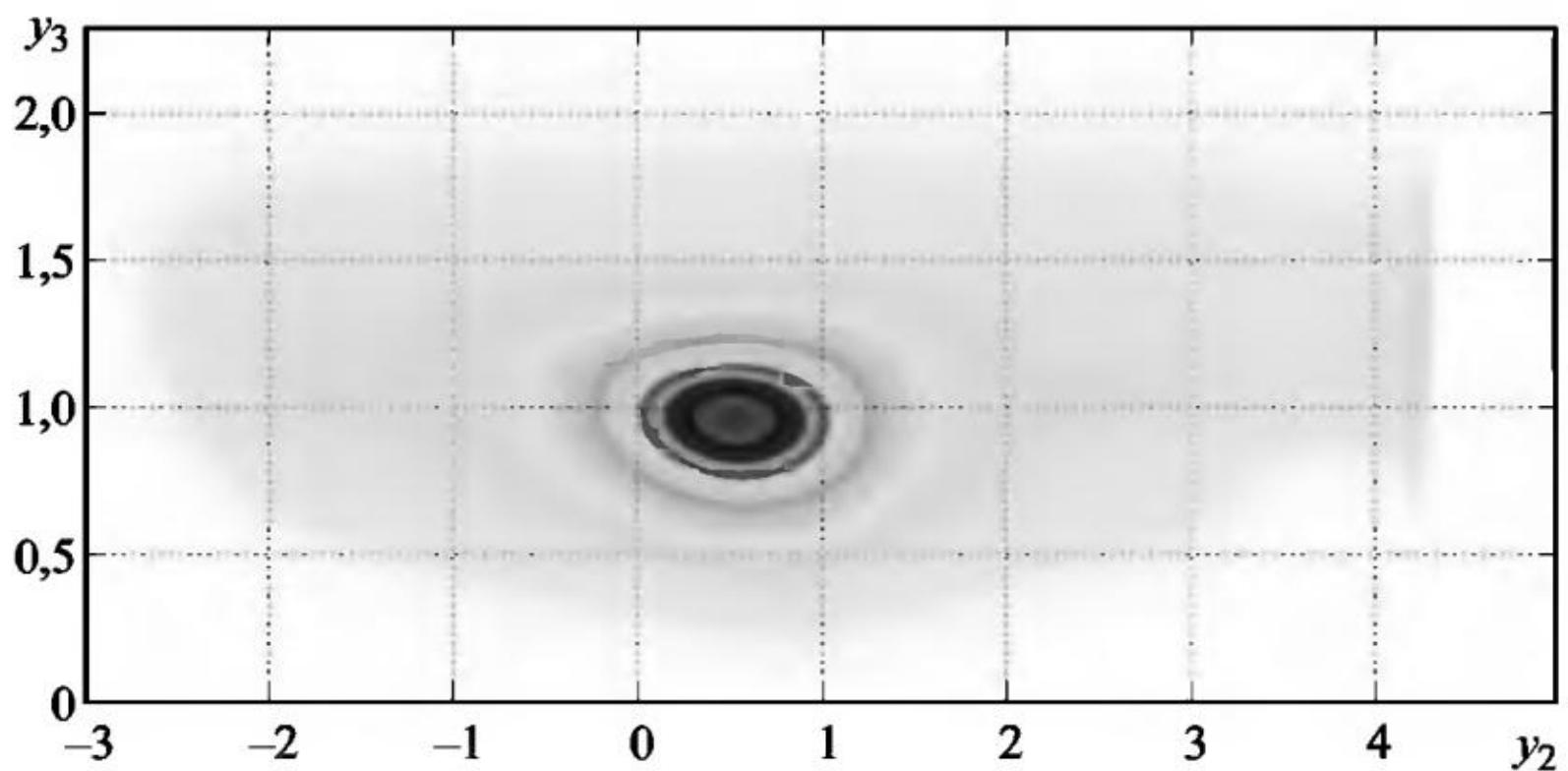


Рис. 14.14

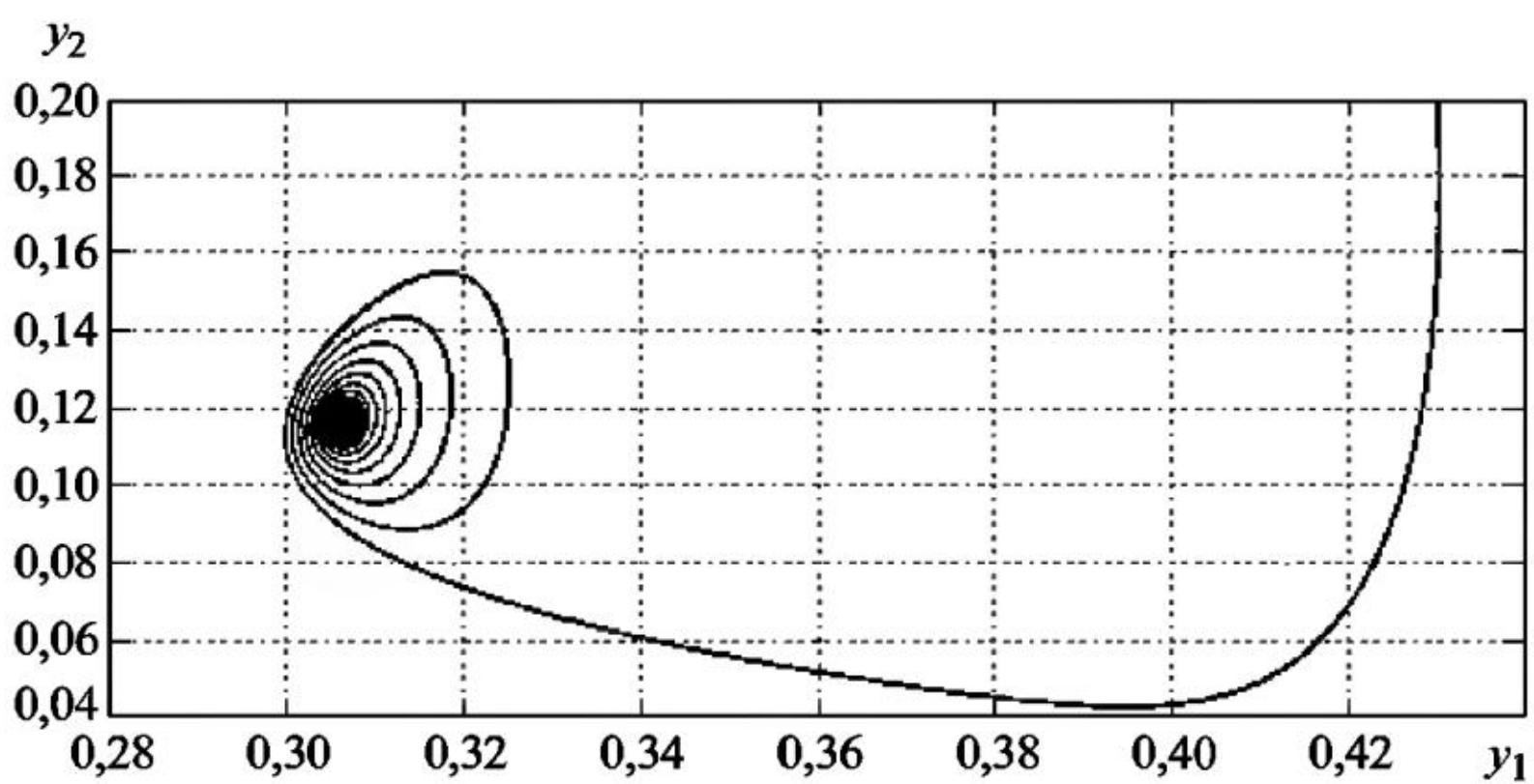


Рис. 14.15

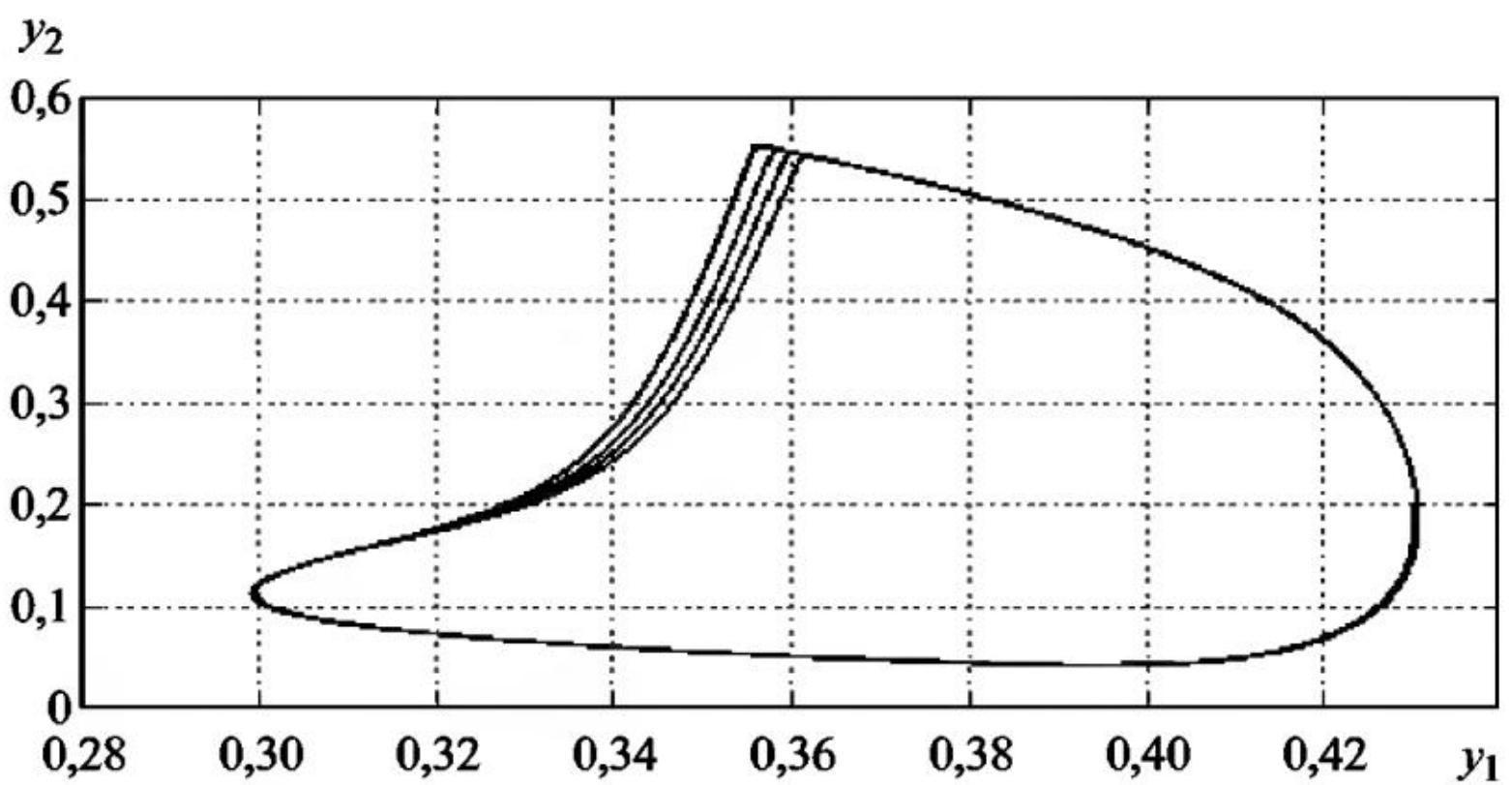


Рис. 14.16

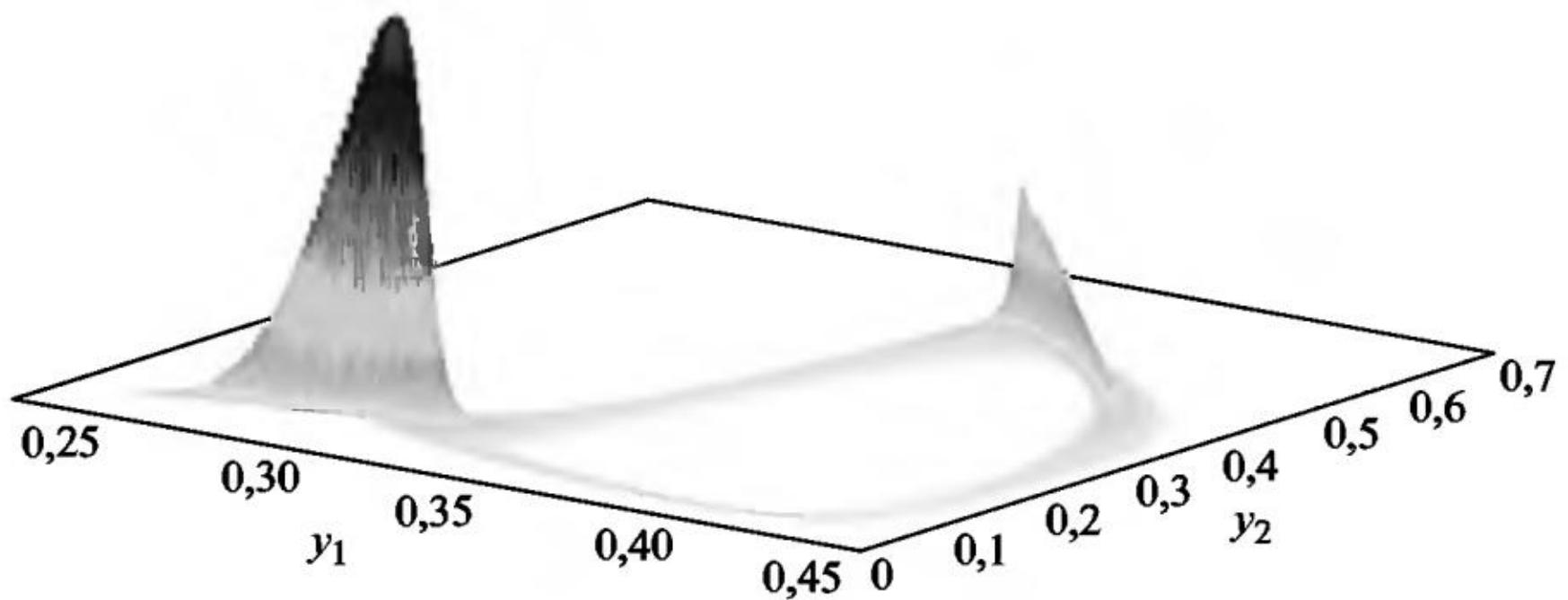


Рис. 14.17

системы СДУ (14.3). Расчет данной задачи является трудоемким, так как среднее время счета одной моделируемой траектории составляет 90 с, что в свою очередь требует обязательного использования параллельных вычислений для достижения приемлемых результатов. На рис. 14.17 и 14.18 приведены графики ЧФП и ЧИК (вид сбоку) при $a = 0,001$, из которых видим две области преимущественных концентраций значений пары компонент (y_1, y_2) и которым соответствуют два «руслы в потоке» на рис. 14.18.

Раздвоение ЧИК на рис. 14.18 на полосы соответствует двум наиболее устойчивым концентрациям компоненты y_1 в процессе реакции.

На рис. 14.19 приведен график ЧФП (вид сбоку) при $a = 0,01$, который похож на график ЧФП на рис. 14.17, что резко контрастирует с различием между собой графиков фазовых траекторий решения сопутствующей системы ОДУ на рис. 14.15 и 14.16. Это значит, что учет в модели химической реакции даже малых слу-

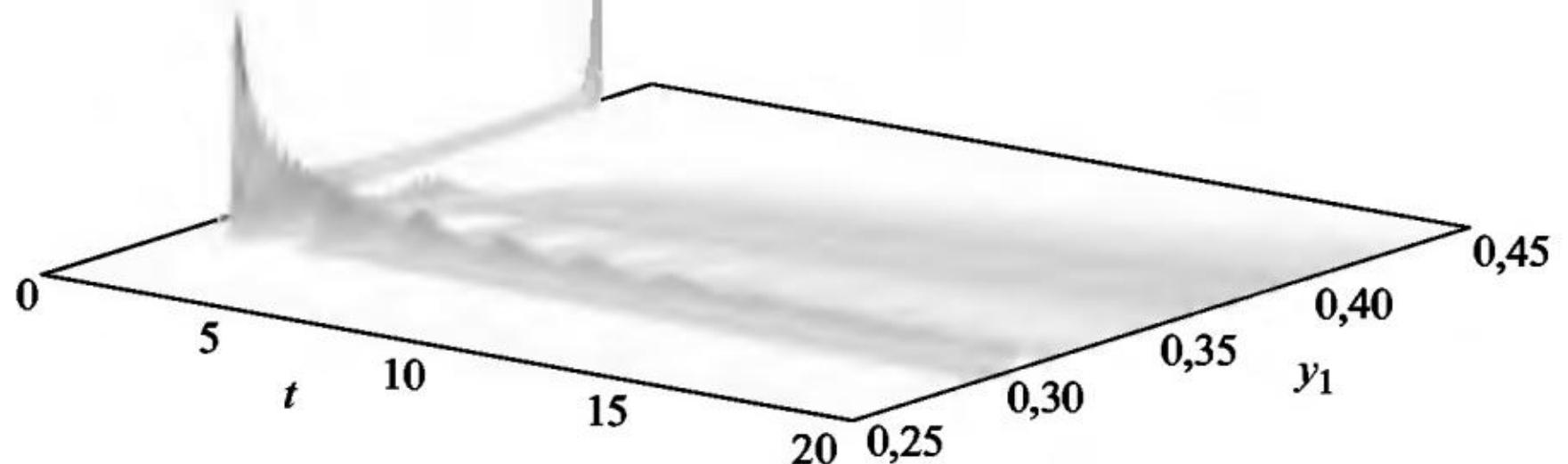


Рис. 14.18

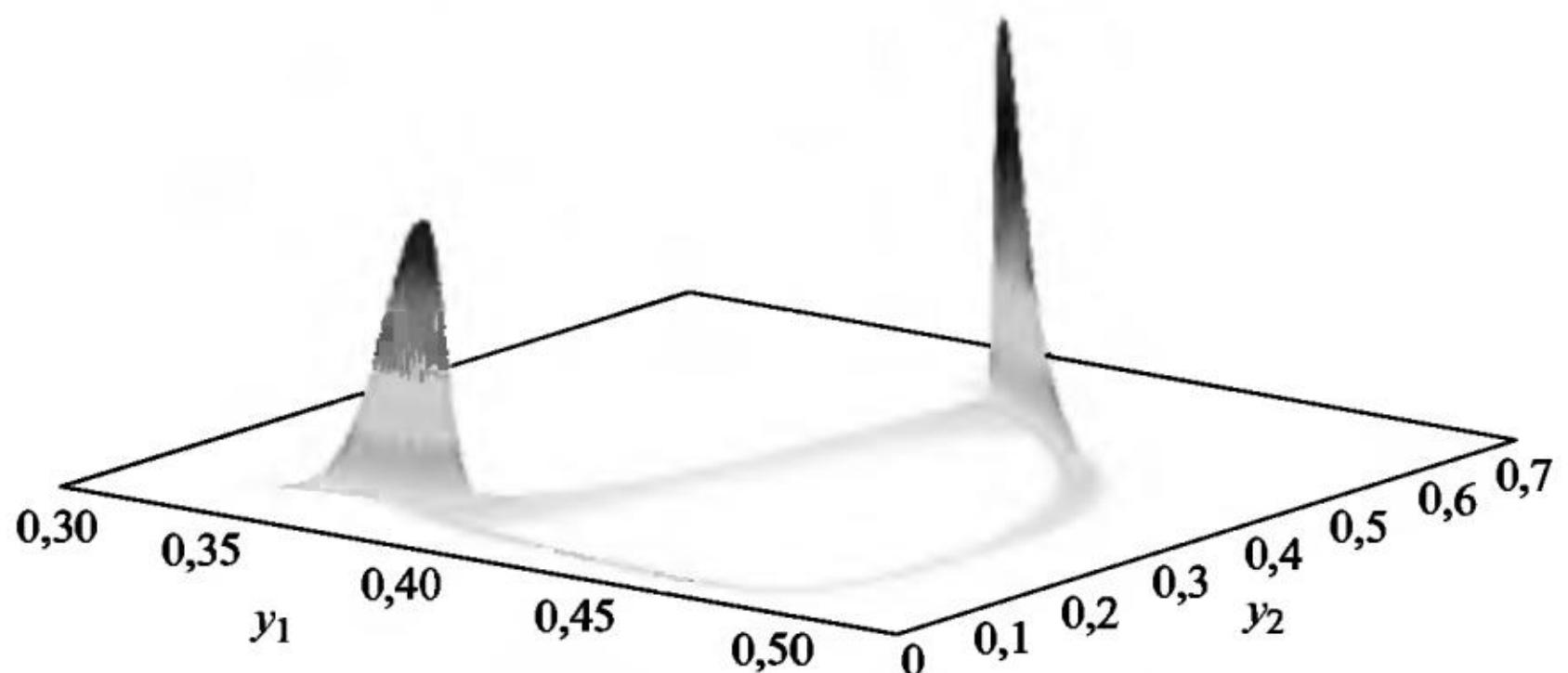


Рис. 14.19

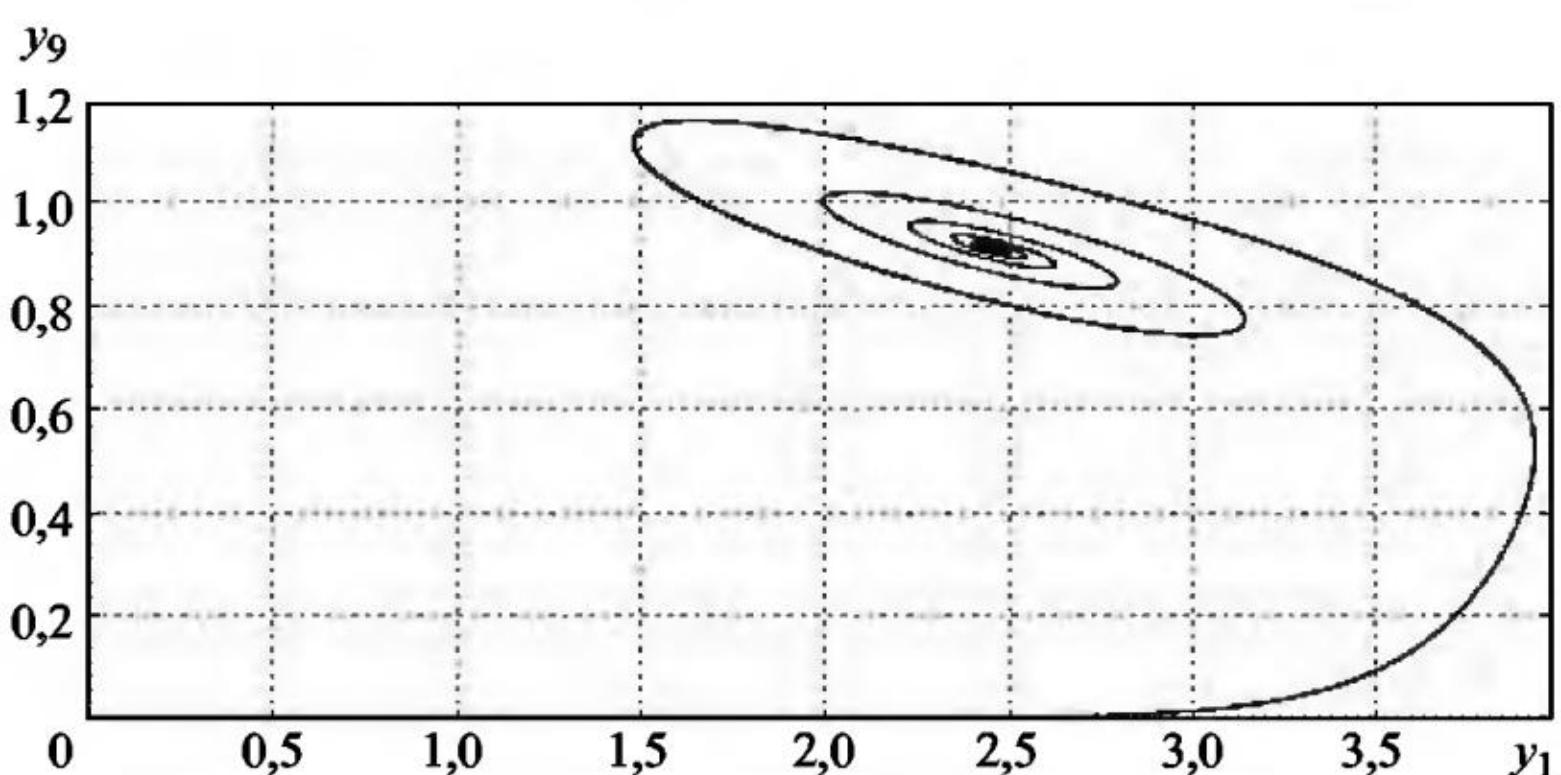


Рис. 14.20

чайных возмущений вызывает всевозможные бифуркационные переходы в решениях.

Пример 14.4. Математическая модель каскада реакторов идеального смещения. В промышленной практике по технологическим соображениям нередко требуется обеспечить полное перемешивание и такую степень завершения процесса, которую в единичном реакторе достигнуть невозможно. В подобных случаях используют цепочку последовательно соединенных реакторов идеального перемешивания, или каскад реакторов [29]. В общем виде математическое описание каскада из девяти реакторов с учетом случайных возмущений можно представить как систему СДУ вида

$$\begin{aligned} dy_1 &= \left(f(y_N) - \frac{N-1}{r_1 \tau_1} y_1 + \frac{N-1}{r_1 \tau_2} y_2 - 0,1 y_1 \right) dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t), \\ dy_i &= \left(\frac{N-1}{r_{i-1} \tau_1} (y_{i-1} - y_i) - \frac{N-1}{r_i \tau_2} (y_i - y_{i+1}) - 0,1 y_i \right) dt, \\ dy_{N-1} &= \left(\frac{N-1}{r_{N-2} \tau_1} (y_{N-2} - y_{N-1}) - \frac{N-1}{r_{N-1} \tau_2} y_{N-1} - 0,1 y_{N-1} \right) dt, \\ dy_N &= \left(\frac{N-1}{r_{N-1} \tau_1} y_{N-1} - 2 y_N \right) dt + \sigma_2 dw_2(t), \end{aligned} \quad (14.4)$$

где $f(y_N) = \frac{5}{1 + y_N^\gamma}$, $r_i = 1 + y_i^{0,2}$, $y_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, N$, $N = 9$.

На рис. 14.20 и 14.21 приведены различающиеся между собой по форме графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_9) решения сопутствующей системы ОДУ для $\gamma = 5$ и $\gamma = 10$, $t_{\text{end}} = 100$.

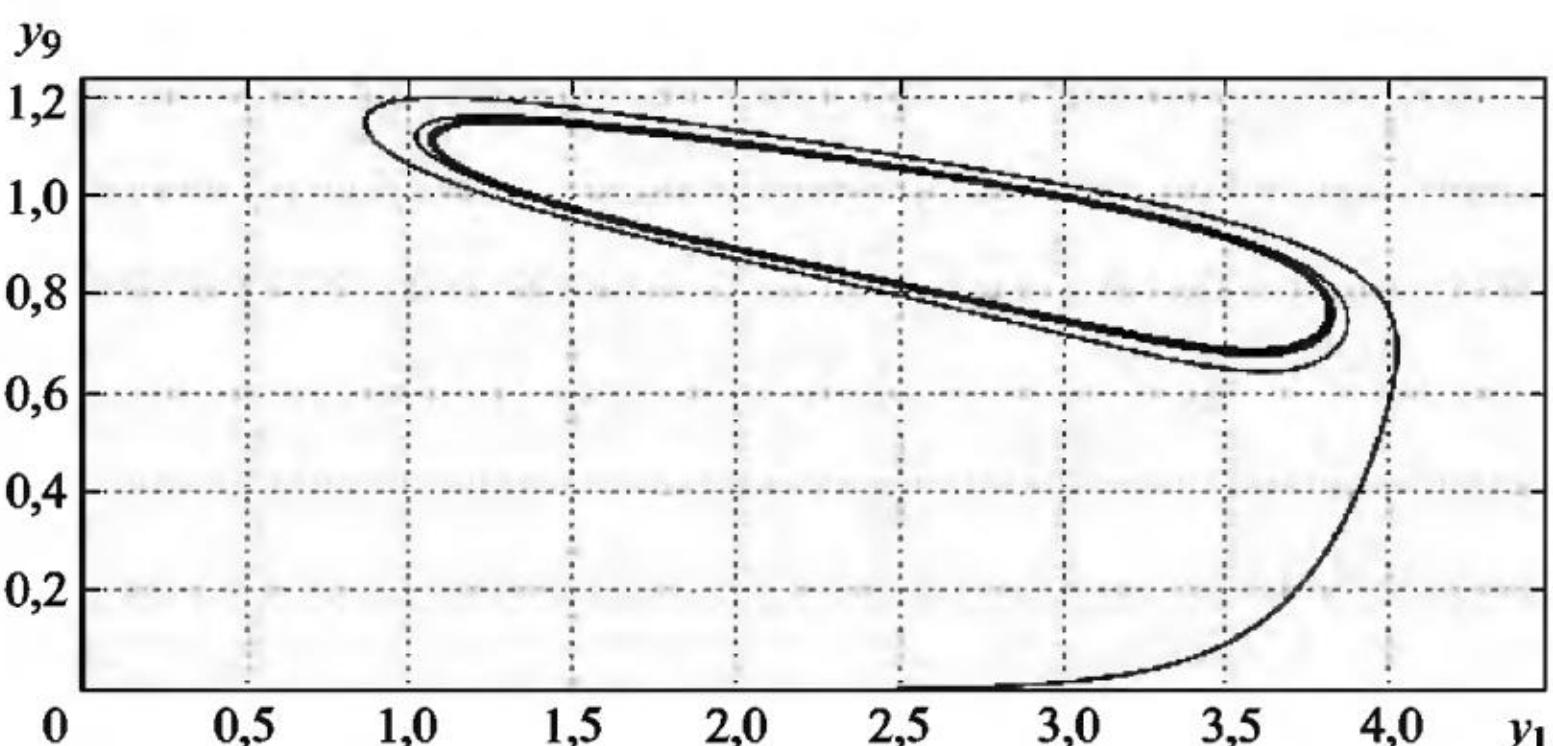


Рис. 14.21

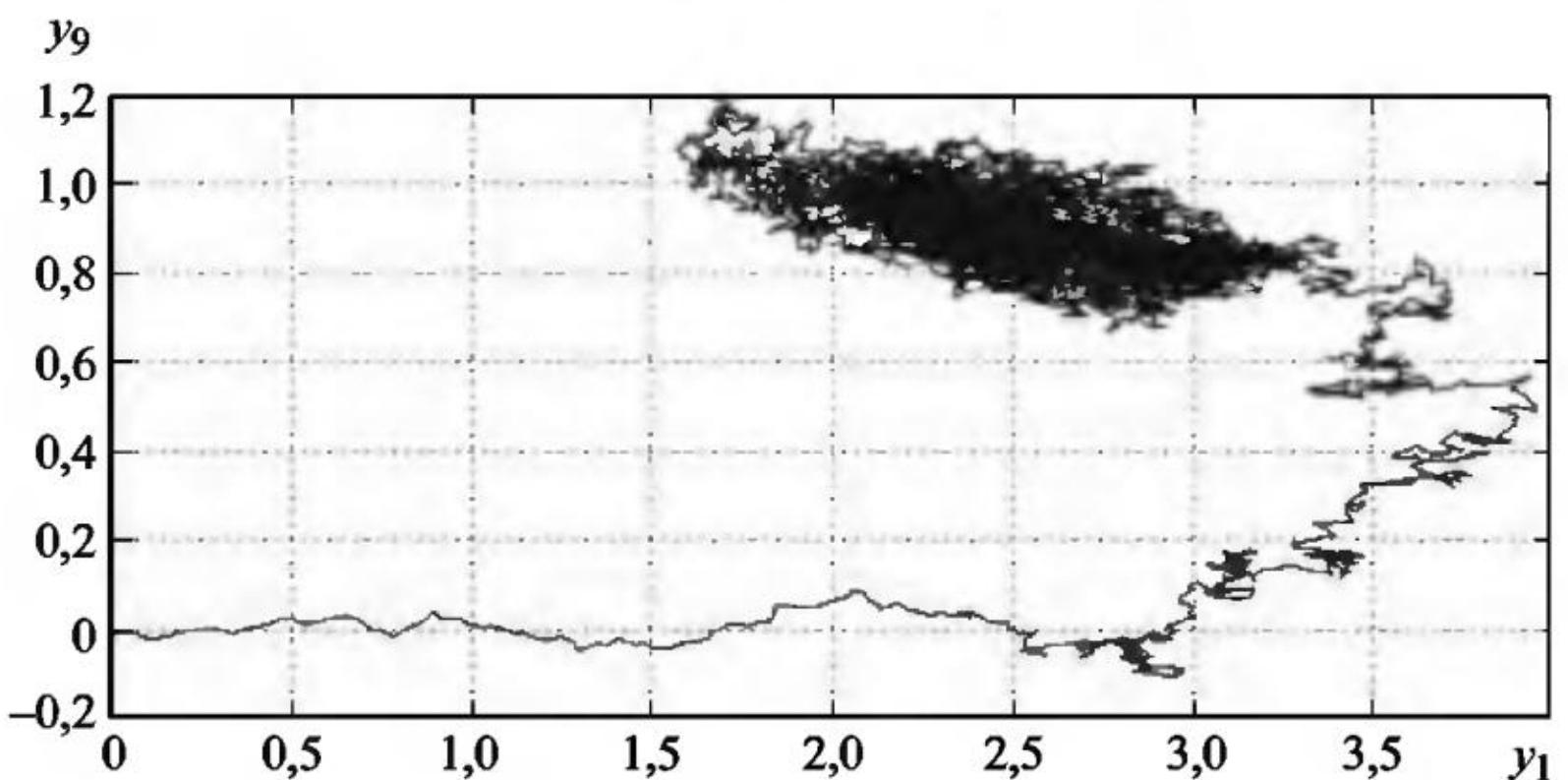


Рис. 14.22

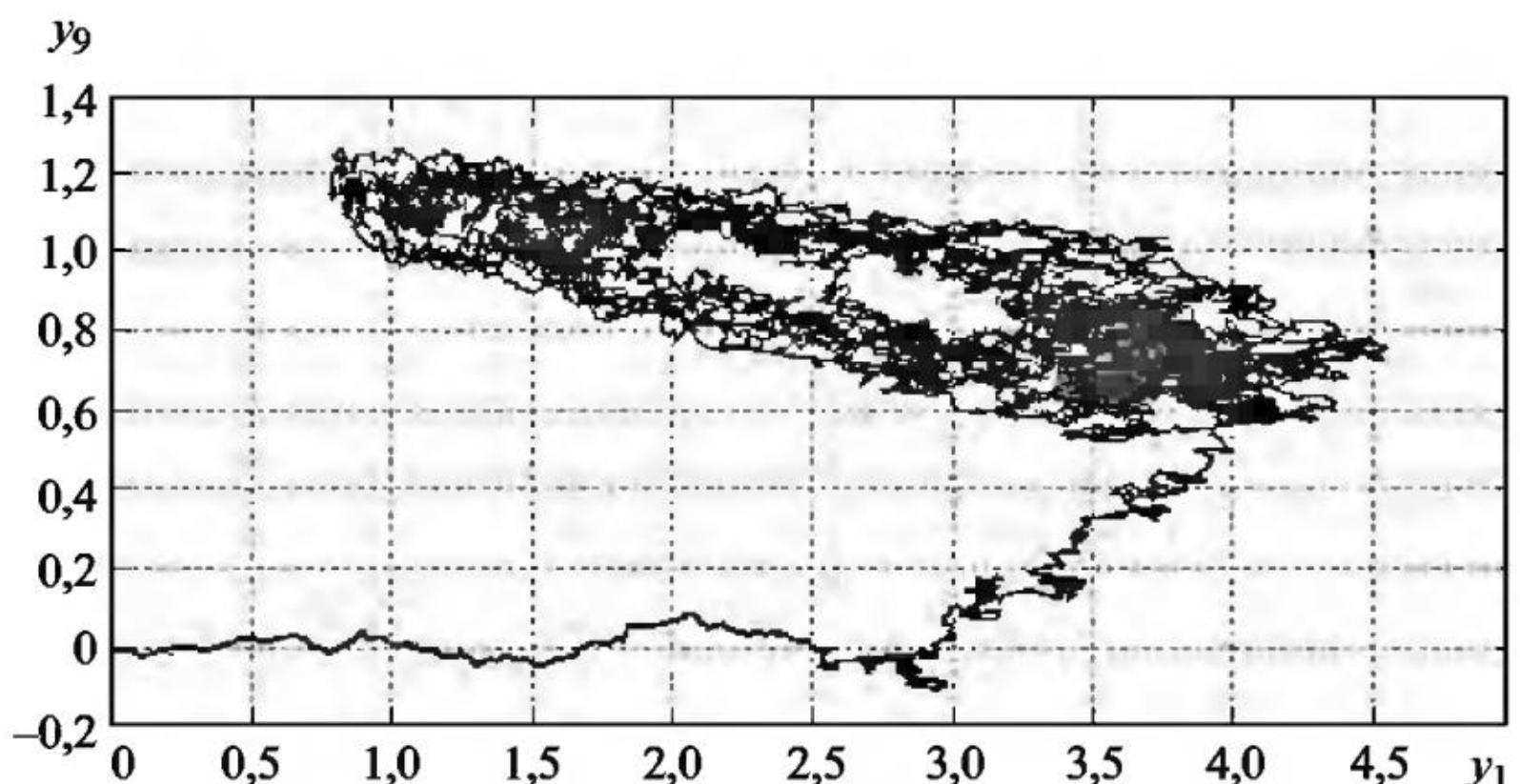


Рис. 14.23

На рис. 14.22 и 14.23 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_9) решения системы СДУ (14.4) с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,01$ при тех же значениях параметра γ , из которых трудно увидеть какую-либо закономерность движения $y_1(t)$ и $y_9(t)$.

На рис. 14.24 дан график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_9) решения системы СДУ (14.4) при $\gamma=5$, который в полной мере определяет характер движения траекторий процессов $y_1(t)$ и $y_9(t)$.

График ЧФП (вид сбоку) на рис. 14.25 пары компонент (y_1, y_9) решения системы СДУ (14.4) при $\gamma = 10$ значительно отличается от графика ЧФП на рис. 14.24 с $\gamma = 5$, хотя бы тем, что вместо одного пика частот появляются два значительных пика, а это со-

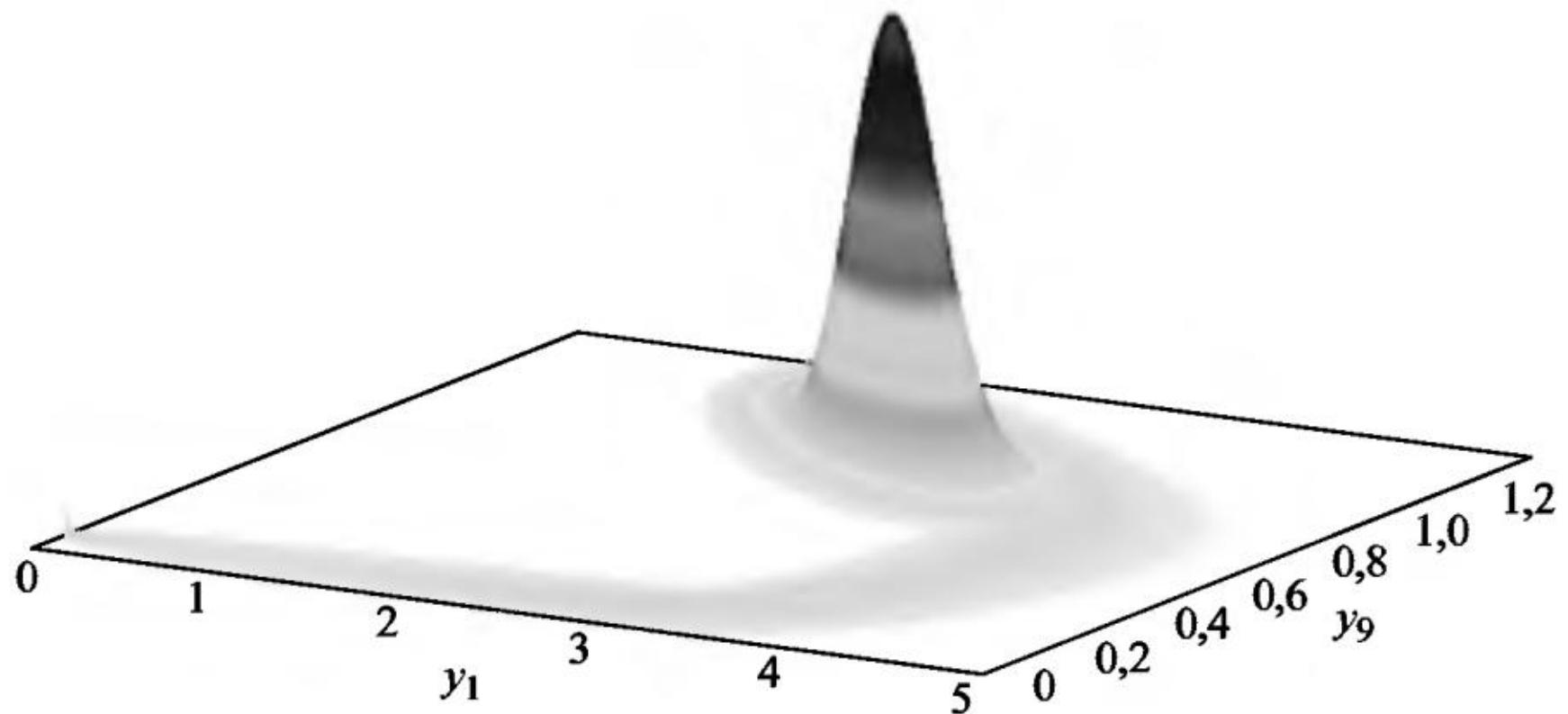


Рис. 14.24

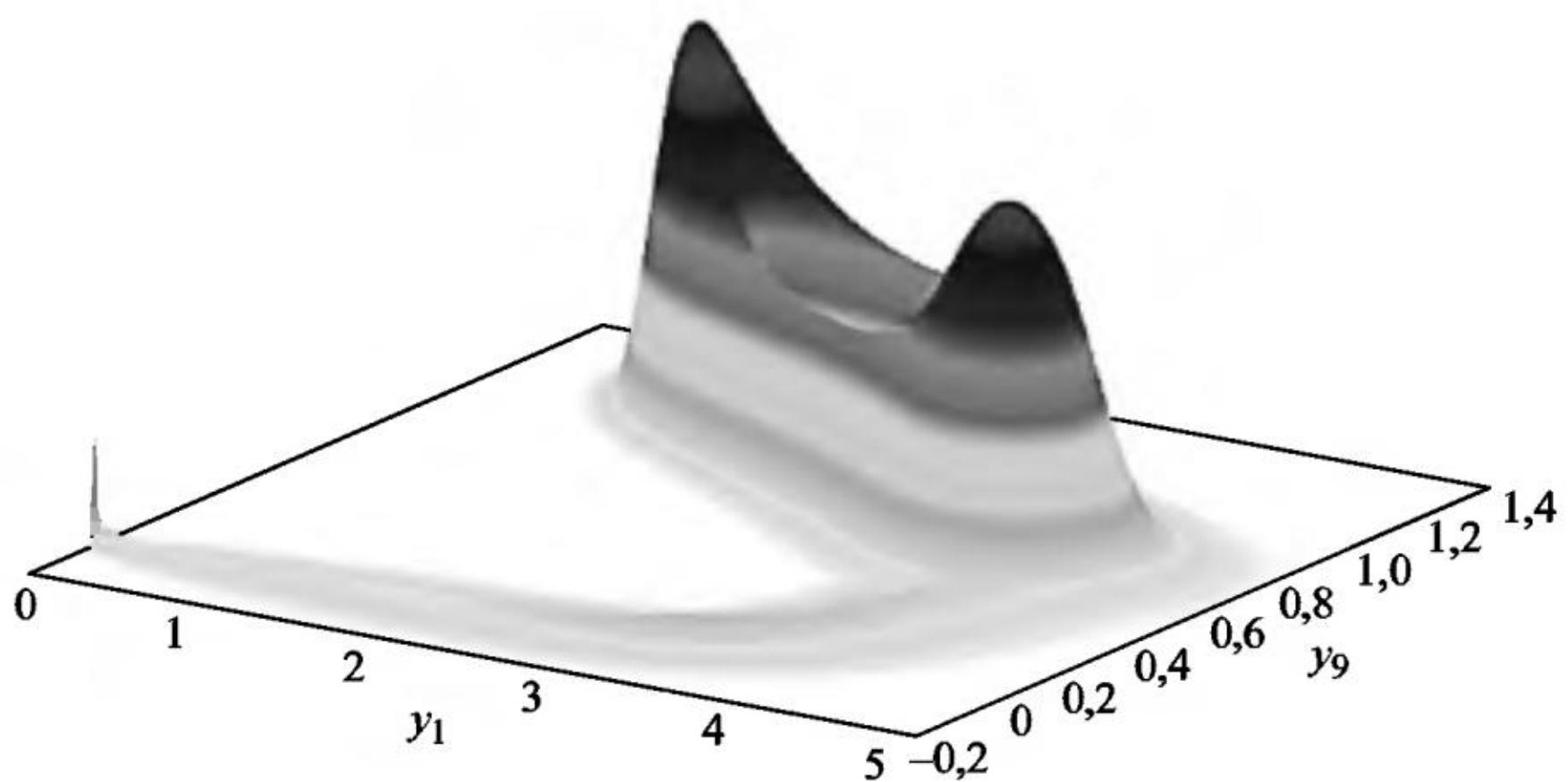


Рис. 14.25

отвечает различию графиков на рис. 14.20 и 14.21. В этом примере эффект влияния случайных возмущений на течение химической реакции противоположен предыдущим примерам 14.2 и 14.3, когда при разных параметрах в функциях сноса систем СДУ графики ЧФП были похожи между собой.

15. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Задача об описании движения электрических зарядов в постоянном неоднородном магнитном поле относится к числу классических задач. Интерес к ней стимулировался в первую очередь активными исследованиями в области управляемого термоядерного синтеза, где требуется найти ответ на вопрос о возможности удержания частиц в магнитных ловушках, имеющих различные конфигурации магнитных полей. Кроме того, данная задача возникает в космической астрофизике при объяснении причины существования радиационных поясов у космических тел, обладающих магнитным полем. При изучении влияния переменного электрического поля на движение заряженных частиц в поле магнитного сферического диполя установлено, что в условиях резонанса даже при сравнительно небольших электрических полях амплитуда колебаний электронов, захваченных полем диполя, может за короткие отрезки времени значительно возрастать [30].

При расчетах активной биологической защиты представляется полезным получить уравнения движения протонов в веществе при наличии магнитного поля, поскольку комбинированные способы защиты могут оказаться оптимальными в тех случаях, когда вес защитных экранов должен быть ограничен сверху.

Пример 15.1. Движение заряженной частицы на плоскости в электрическом поле между двумя зарядами описывается по закону Кулона ОДУ 2-го порядка:

$$m\ddot{\vec{R}} = \frac{qQ_1}{|\vec{R} - \vec{r}_1|^3}(\vec{R} - \vec{r}_1) + \frac{qQ_2}{|\vec{R} - \vec{r}_2|^3}(\vec{R} - \vec{r}_2),$$

или в виде:

$$\begin{cases} \dot{\vec{R}} = \vec{V}, \\ \dot{\vec{V}} = \frac{q}{m} \left(\frac{Q_1}{|\vec{R} - \vec{r}_1|^3}(\vec{R} - \vec{r}_1) + \frac{Q_2}{|\vec{R} - \vec{r}_2|^3}(\vec{R} - \vec{r}_2) \right). \end{cases}$$

Здесь $\vec{R} = (y_1, y_2)$ – координаты частицы, $\vec{r}_1 = (C_{1x}, C_{1y})$ – координаты положения первого заряда, $\vec{r}_2 = (C_{2x}, C_{2y})$ – координаты положения второго заряда, $\vec{V} = (y_3, y_4)$ – скорость движения частицы. Стохастическая модель движения заряженной частицы между двумя электрическими зарядами при $m = 1$, $q = 1$ и при наличии внешних случайных возмущений задается системой СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_3 dt, & y_1(0) &= 0, \\ dy_2 &= y_4 dt, & y_2(0) &= 0, \\ dy_3 &= \left(\frac{Q_1(y_1 - C_{1x})}{x_1} + \frac{Q_2(y_2 - C_{2x})}{x_2} \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_3(0) &= 0, \\ dy_4 &= \left(\frac{Q_1(y_1 - C_{1y})}{x_1} + \frac{Q_2(y_2 - C_{2y})}{x_2} \right) dt + \sigma_2 dw_2(t), & y_4(0) &= 4,3, \end{aligned} \quad (15.1)$$

где $x_i = \left((y_1 - C_{ix})^2 + (y_2 - C_{iy})^2 \right)^{\frac{3}{2}}$, $i = 1, 2$. Расчеты показывают, что при параметрах $Q_1 < 0$, $Q_2 = 0$, $C_{1x} = 5$, $C_{2x} = 0$, $C_{1y} = 0$, $C_{2y} = 10$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ частица движется в притягивающем поле только первого заряда, описывая эллипс. Если взять заряды одного знака, то движение частицы будет инфинитным. При $Q_1 = -50$, $Q_2 = -0,2$, $t_{\text{end}} = 4000$ получим движение по «орбите» с некоторыми возмущениями – вместо одной «орбиты» появляется множество «орбит», а при $Q_1 = -50$, $Q_2 = 0,2$, $t_{\text{end}} = 4000$ траектория движения становится незамкнутой, причем также появляются множество других «орбит».

На рис. 15.1 и 15.2 даны графики фазовой траектории двух пар компонент (y_1, y_2) и (y_1, y_3) численного решения системы СДУ (15.1) при $Q_1 = -55$, $Q_2 = 0$, $C_{1x} = 5$, $C_{2x} = 0$, $C_{1y} = 0$, $C_{2y} = 10$, $t_{\text{end}} = 1000$, рассчитанные с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,01$. Из рис. 15.1 видно, как воздействует даже малый аддитивный шум на решение: вместо одного эллипса, как было бы в детерминированном случае, получаем много новых витков. На рис. 15.2 показана динамика развития скорости y_3 компоненты решения y_1 в зависимости от удаления частицы от стационарного заряда. Чем дальше от заряда, тем меньше скорость частицы.

Расчеты показывают, что графики оценок дисперсии всех компонент решения системы СДУ (15.1) имеют их сильный рост к концу интервала интегрирования. Это значит, что частицы, улетевшие с «орбиты» стационарного заряда, продолжают свое

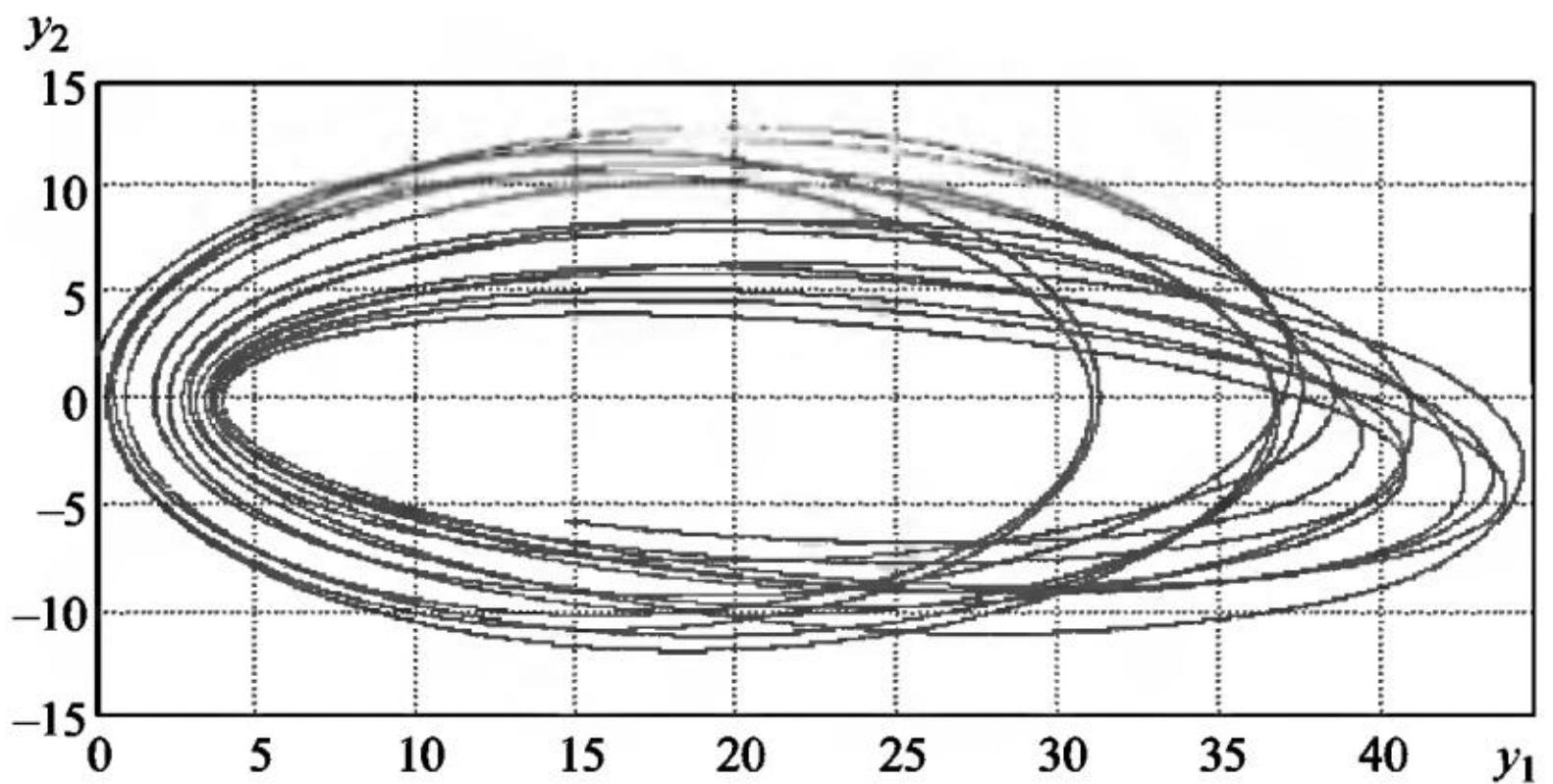


Рис. 15.1

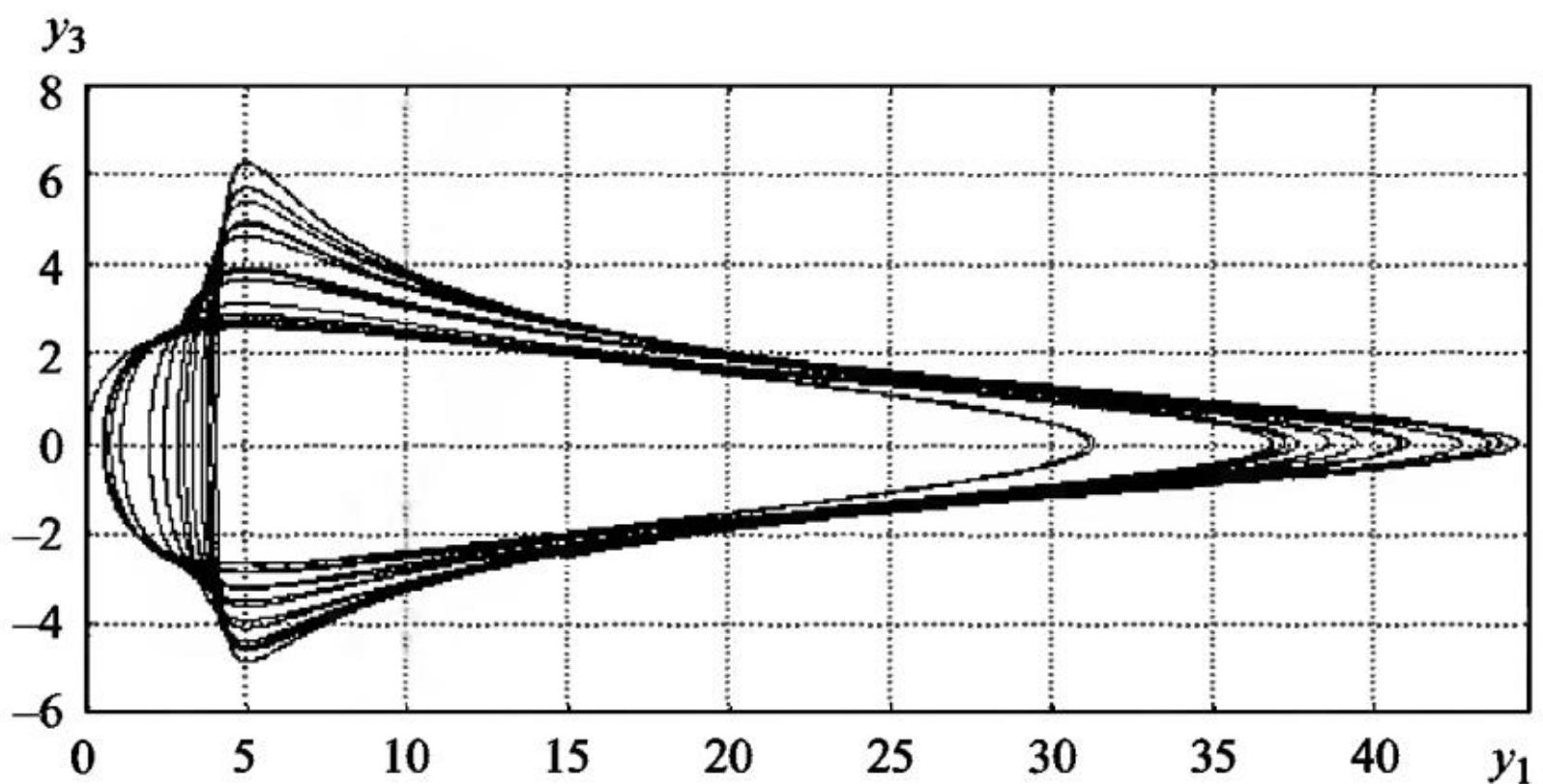


Рис.15.2

движение, ускоряясь под воздействием случайного аддитивного шума.

Далее для расчетов графиков ЧИК и ЧФП было использовано 120 ядер кластера при следующих значениях параметров: $t_{\text{end}} = 1000$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,01$, $h = 10^{-6}$, $N_{\text{tr}} = 10^5$. Расчет данной задачи является трудоемким, так как среднее время счета одной моделируемой траектории составляет 28 с.

На рис. 15.3 приведен график ЧИК (вид сбоку) компоненты y_1 численного решения системы СДУ (15.1), из которого хорошо виден осциллирующий характер решения. Характер осцилляции решения $y_1(t)$ показывает, в какой момент времени частица возвращалась к стационарному заряду. В интервале времени $t \in [35, 60]$ все частицы вернулись к стационарному заряду, хотя в дальнейшем времени некоторые частицы уже перестают возвращаться.

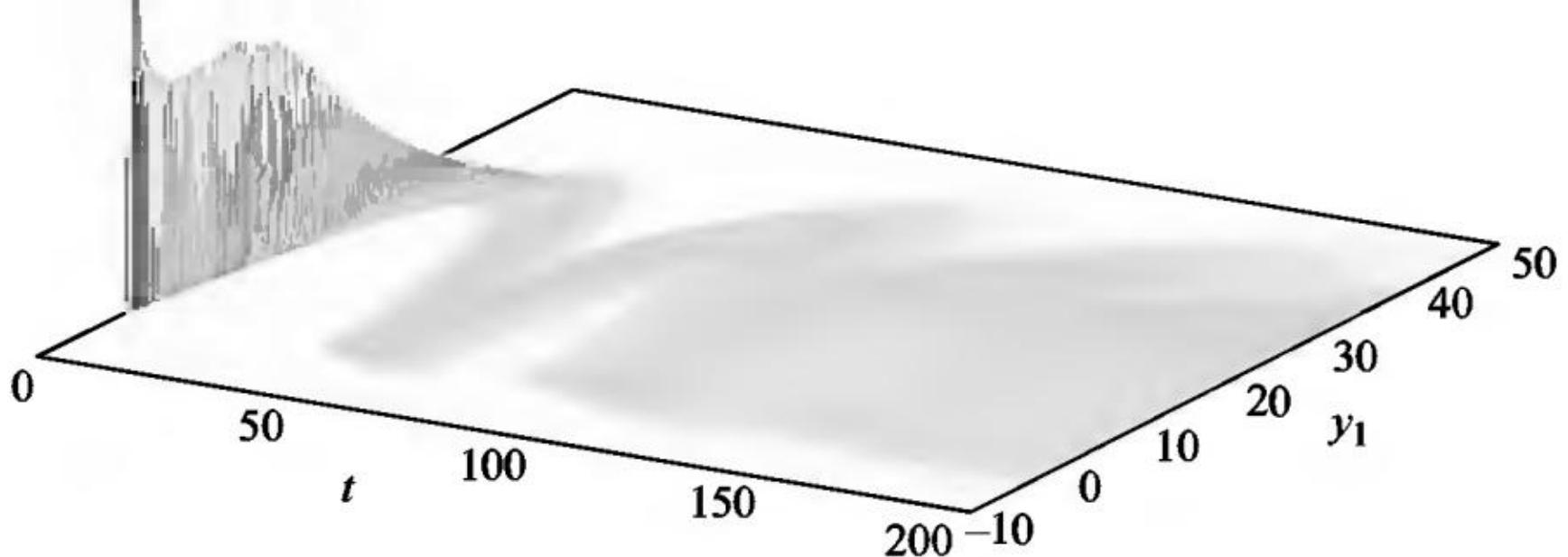


Рис. 15.3

ся – вылетают с «орбиты», что в свою очередь отражает влияние случайного шума на решение.

На рис. 15.4 приведен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (15.1), который полностью соответствует графику на рис. 15.1. На рис. 15.5 приведен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_3) из которого видна зависимость скорости от положения частицы. При $y_1 \in [-40, 5] \cup [60, 100]$ частицы вылетают с «орбиты» стационарного заряда и продолжают дрейфовать в дальнейшем с низкой скоростью. При $y_1(t) = 5$ некоторые частицы, наоборот, двигаются с ускорением, постепенно наращивая скорость под воздействием аддитивного шума. Частицы, движущиеся по «орбите», максимальную скорость приобретают вблизи стационарного заряда.

Пример 15.2. Модель пространственного движения нерелятивистского электрического заряда в постоянном неоднородном магнитном поле напряженностью $\tilde{H}(\tilde{r})$ при заданных начальных условиях $(\tilde{\vec{R}}_0, \tilde{\vec{v}}_0)$ задается системой ОДУ

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\vec{r}}}{dt} = \tilde{\vec{v}}, \\ \frac{d\tilde{\vec{v}}}{dt} = [\tilde{\vec{v}} \times \tilde{\vec{H}}(\tilde{\vec{r}})], \end{cases}$$

где безразмерные начальные условия вычисляются как $\tilde{\vec{R}}_0 = \vec{R}_0 / |\vec{R}_0|$, \vec{R}_0 – начальное положение заряда, $\tilde{\vec{v}}_0 = \vec{v}_0 T_0 / |\vec{R}_0|$, \vec{v}_0 – начальная скорость заряда, T_0 – период движения заряда по окружности в магнитном поле в плоскости, перпендикулярной вектору напряженности, $\tilde{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{R}_0|}$ – текущее положение заряда.

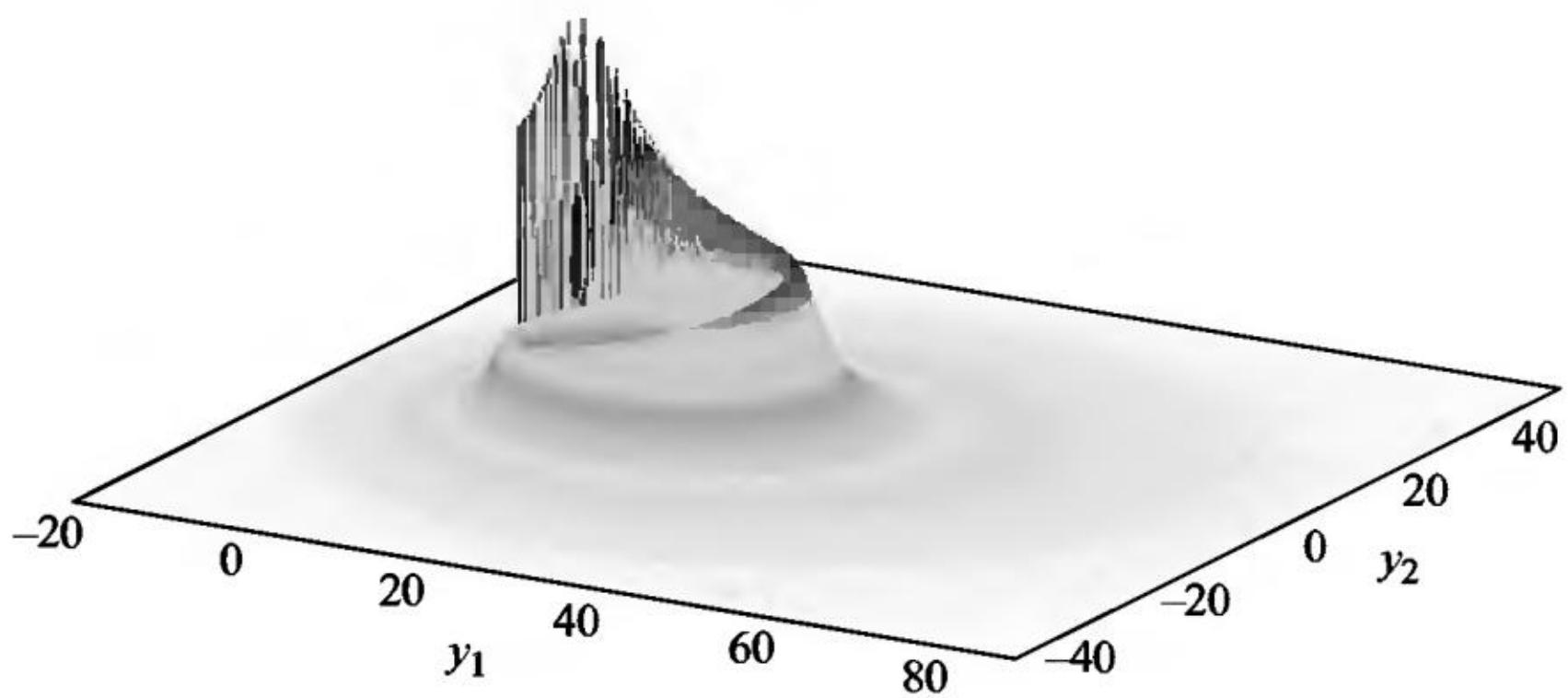


Рис. 15.4

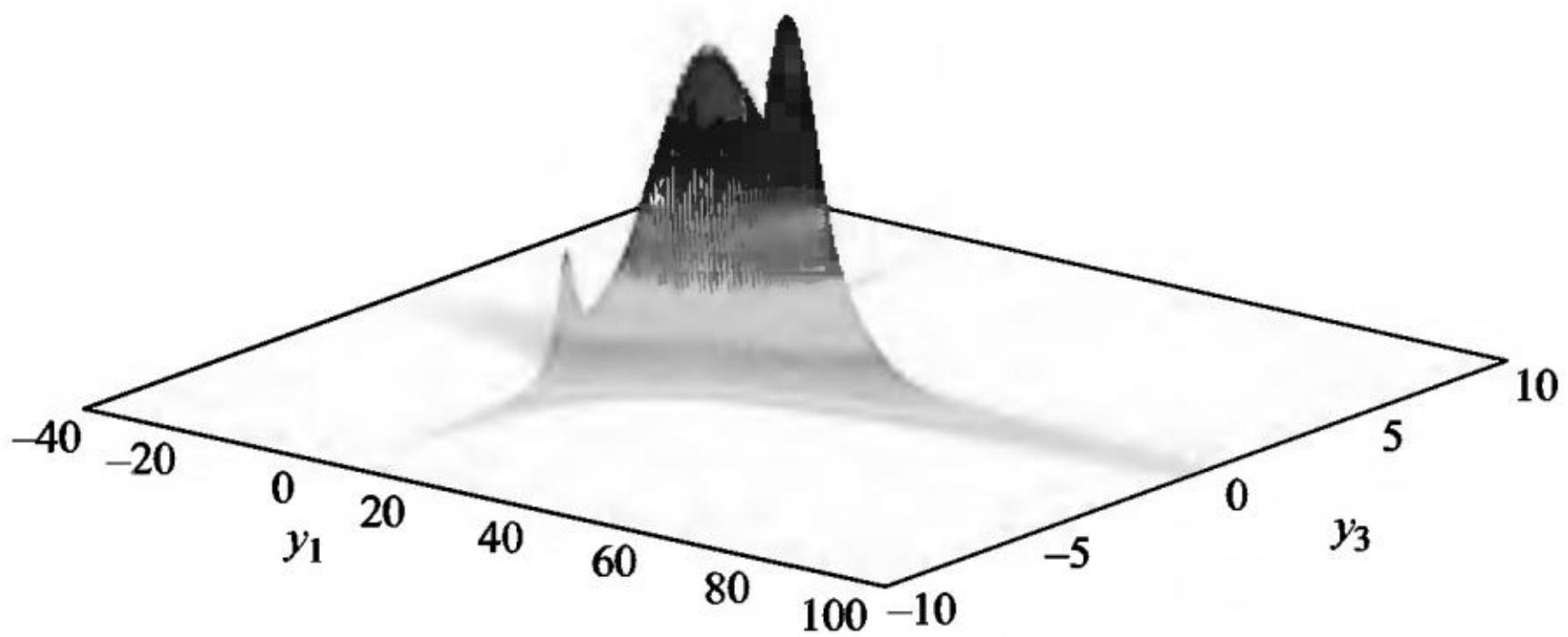


Рис. 15.5

Выражение для безразмерной напряженности магнитного поля имеет следующий вид: $\tilde{H}(\tilde{r}) = \frac{3(\tilde{\mu}\tilde{r})\tilde{r}}{|\tilde{r}|^5} - \frac{\tilde{\mu}}{|\tilde{r}|^3}$, где $\tilde{\mu} = \frac{\bar{\mu}}{|\bar{\mu}|}$ – единичный вектор магнитного момента. Данная модель в виде системы ОДУ описывает движение элементарных частиц, движущихся в магнитных полях, создаваемых космическими объектами. При определенных значениях начальных параметров эта модель может описывать, в том числе, движение протона, находящегося в геомагнитной ловушке Земли [31].

При наличии внутренних и внешних случайных возмущений и при соответствующей замене переменных система ОДУ переписывается в виде системы СДУ

$$\begin{aligned}
dy_1 &= y_4 dt, & y_1(0) &= 0,5, \\
dy_2 &= y_5 dt, & y_2(0) &= 0,4, \\
dy_3 &= y_6 dt, & y_3(0) &= 0,3, \\
dy_4 &= \frac{1}{r^5} \left((3y_3^2 - r^2)y_5 - 3y_2y_3y_6 \right) dt + \sigma_1 dw_1(t), & y_4(0) &= V_1, \\
dy_5 &= \frac{1}{r^5} \left(3y_1y_3y_6 - (3y_3^2 - r^2)y_4 \right) dt + \sigma_2 dw_2(t), & y_5(0) &= V_2, \\
dy_6 &= \frac{1}{r^5} \left(3y_2y_3y_4 - 3y_1y_3y_5 \right) dt + \sigma_3 dw_3(t), & y_6(0) &= V_3.
\end{aligned} \tag{15.2}$$

Здесь y_1, y_2, y_3 – координаты положения заряда в пространстве, $r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $\vec{V}_0 = (V_1, V_2, V_3)$ – безразмерная начальная скорость заряда.

Исследуем возможные режимы движения заряда в зависимости от его начальной скорости. На рис. 15.6 и 15.7 даны графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) решения сопутствующей системы ОДУ при $t_{\text{end}} = 200$ для $\vec{V}_0 = (0,01, 0,02, 0,03)$ и $\vec{V}_0 = (0,1, 0,1, 0,07)$ соответственно. Из графиков хорошо видно, как изменяется характер колебаний при изменении начальной скорости движения заряда в детерминированном случае.

На рис. 15.8 и 15.9 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (15.2) при наличии малого аддитивного шума ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,01$) для тех же значений начальной скорости движения заряда

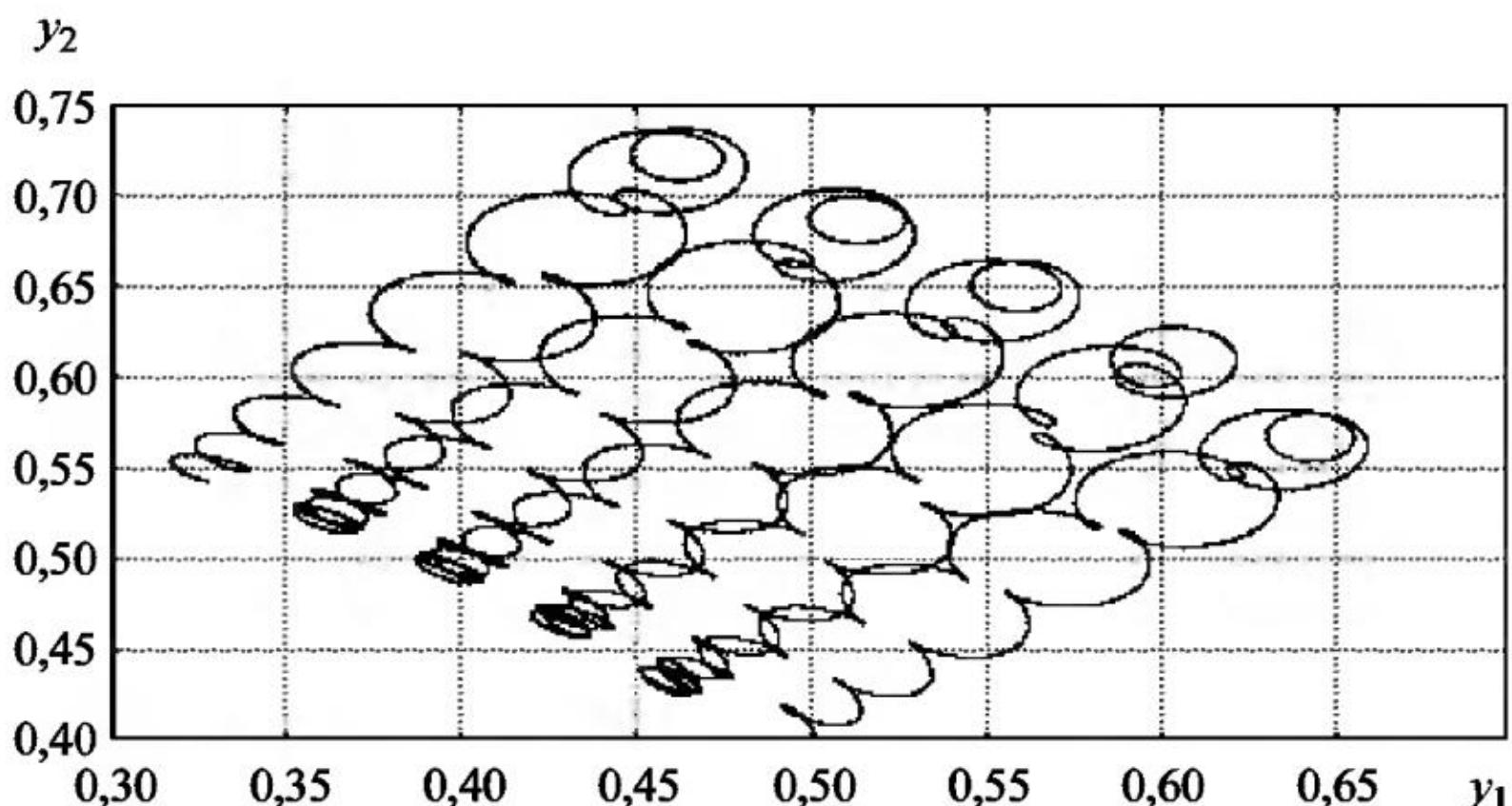


Рис. 15.6

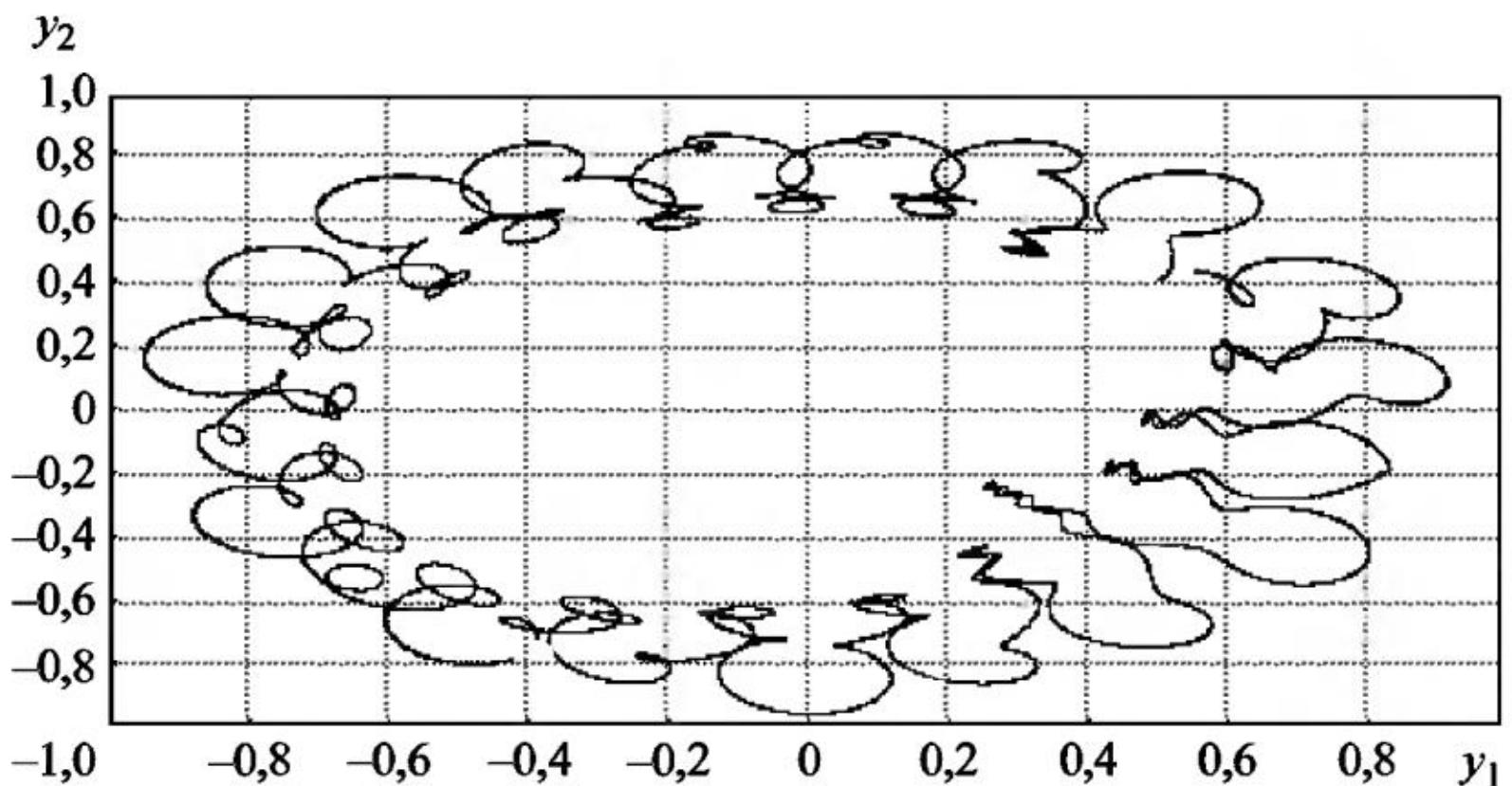


Рис. 15.7

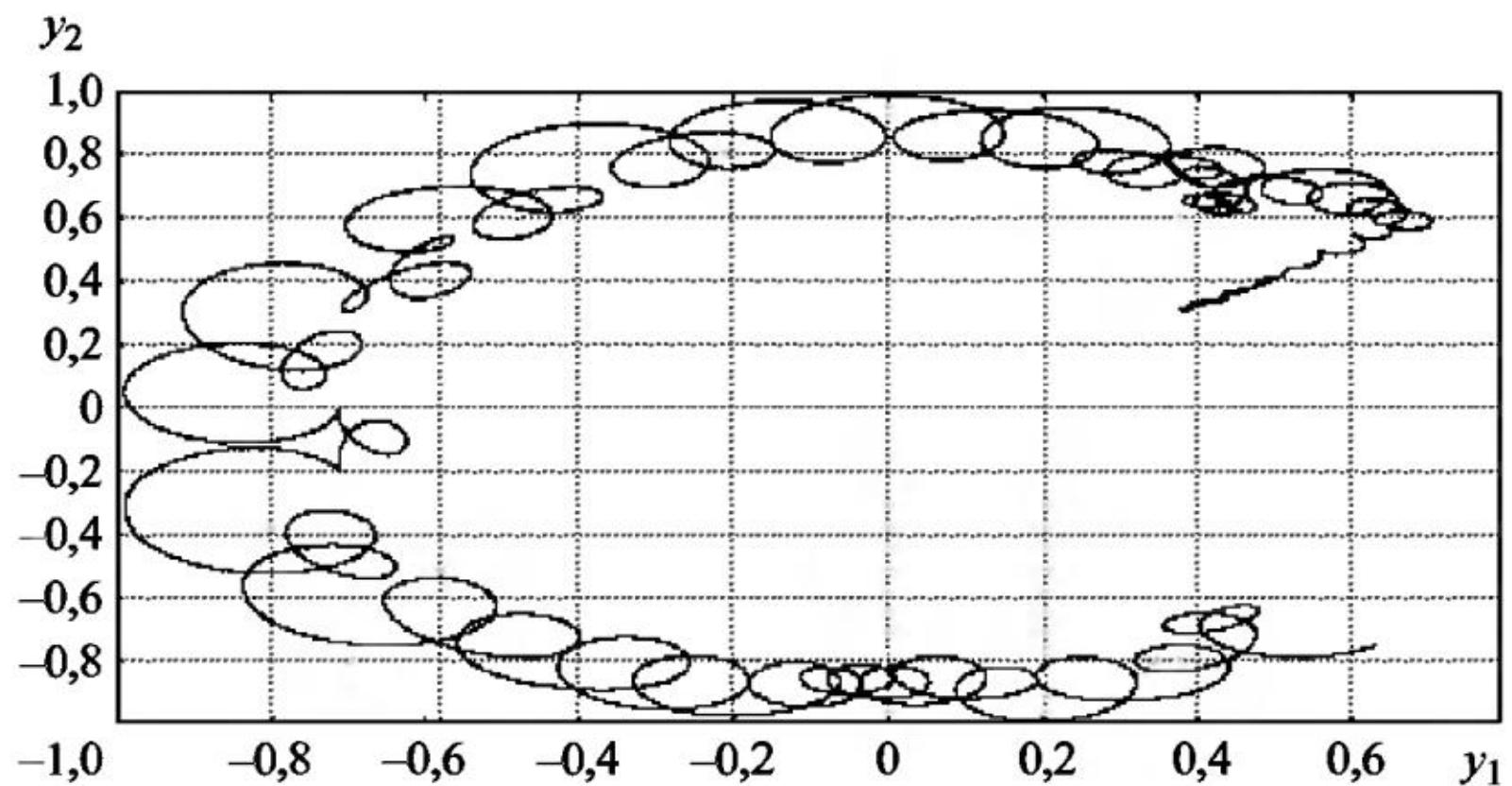


Рис. 15.8

$\vec{V}_0 = (0,01,0,02,0,03)$ и $\vec{V}_0 = (0,1,0,1,0,07)$ соответственно. Режим колебания на рис.15.6 явно отличается от режима колебания на рис. 15.8 – наличие даже малого случайного шума может вызывать переходы из одного режима колебаний в другой. На рис.15.7 и 15.9 происходит изменение амплитуды колебаний заряда – при одном и том же интервале интегрирования в детерминированном случае заряд прошел практически полный оборот и вернулся в начальное положение, тогда как под воздействием случайного аддитивного шума заряд до начального положения не доходит.

Расчеты показывают, что оценка дисперсии $Dy_1(t)$ компоненты решения системы СДУ (15.2) достигает значения 85 к концу интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 200$ при $\vec{V}_0 = (0,01,0,02,0,03)$, тогда как при $\vec{V}_0 = (0,1,0,1,0,07)$ оценка дисперсии достигает значения

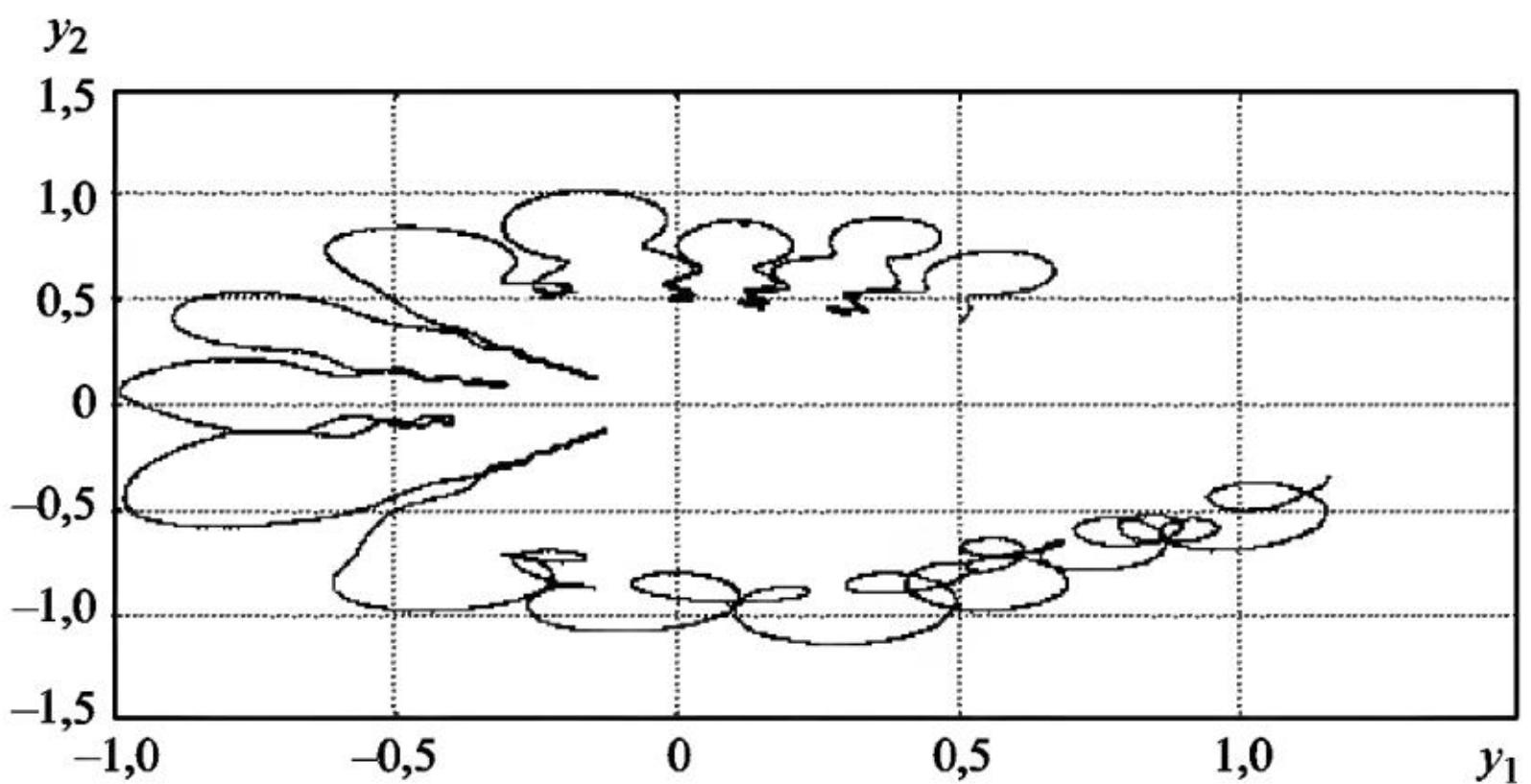


Рис. 15.9

250. Причем в обоих случаях происходит экспоненциальный рост оценки дисперсии на всем интервале интегрирования. Это означает, что наличие даже небольших шумов делает движение заряда неустойчивым, как и в предыдущем примере.

На рис. 15.10 и 15.11 приведены графики ЧИК (вид сбоку) компоненты численного решения y_1 системы СДУ (15.2) при $\vec{V}_0 = (0,01, 0,02, 0,03)$ и $\vec{V}_0 = (0,1, 0,1, 0,07)$ соответственно. Форма графиков показывает несимметричный уход заряда от начального положения. На рис. 15.10 видны моменты времени, при которых изменяется режим колебаний: $t = 60$ и $t = 120$, причем происходит рост амплитуды колебаний компоненты решения y_1 . На рис. 15.11 изменение режима колебаний происходит в моменты времени $t = 10$ и $t = 120$.

На рис. 15.12 и 15.13 приведены графики ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_2) численного решения системы СДУ (15.2) с различными начальными скоростями, из которых легко увидеть преимущественное движение заряда внутри эллипса, причем пик частот приходится на начальное положение заряда.

Для расчетов графиков ЧИК и ЧФП было использовано 120 ядер кластера при следующих значениях параметров: $t_{\text{end}} = 200$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,01$, $h = 10^{-5}$, $N_{\text{tr}} = 10^6$. Среднее время расчета одной траектории 17 с.

Пример 15.3. При прохождении частицы через вещество имеют место различные взаимодействия частицы со средой, в результате чего энергия частицы уменьшается вдоль траектории движения. Для некоторых физических ситуаций главными являются потери энергии на ионизацию атомов защитной среды.

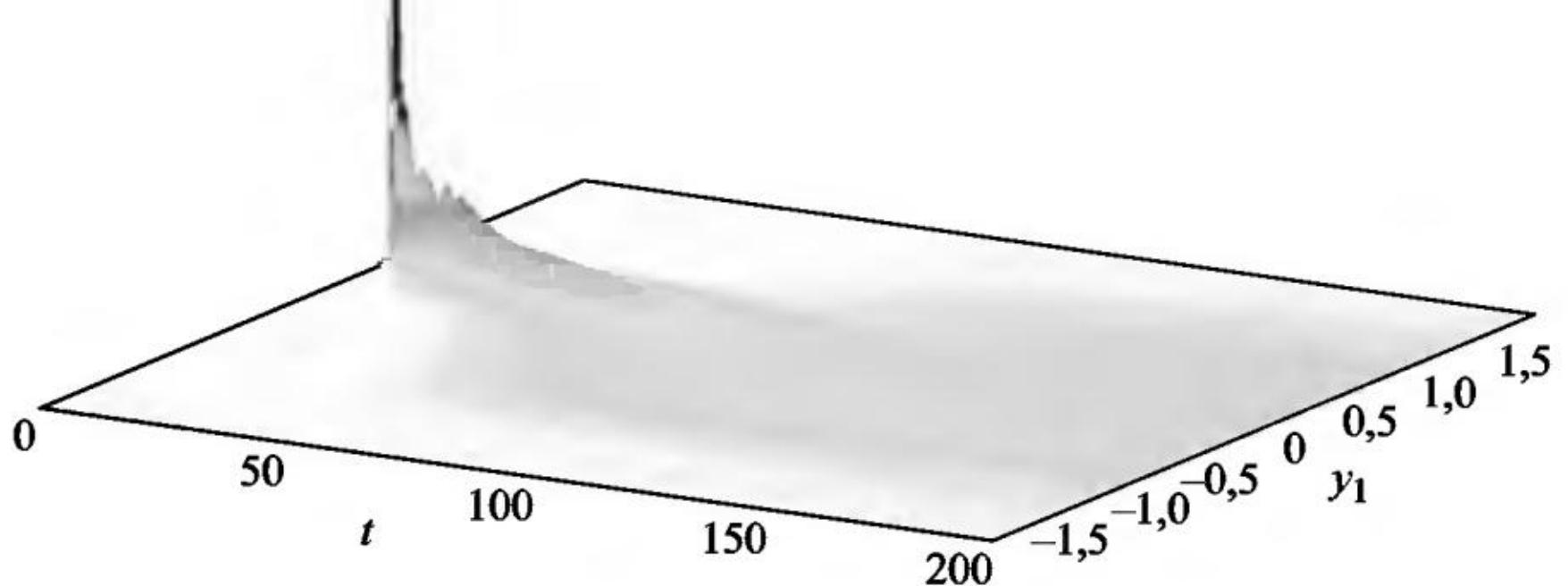


Рис. 15.10

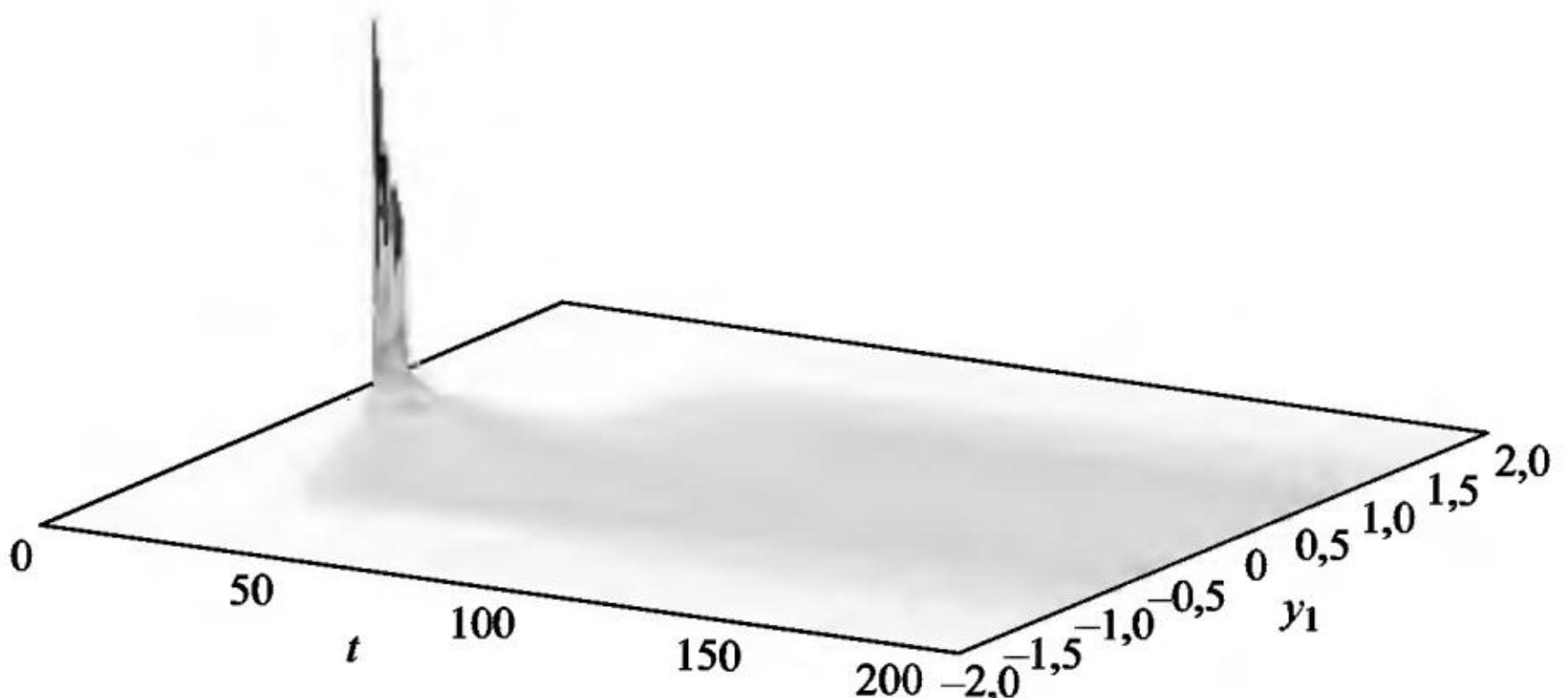


Рис. 15.11

Ионизация – это минимальная энергия, необходимая для отрыва электрона (ионизации) от атома, иона или молекулы, находящихся в основном энергетическом состоянии. Потери этой энергии эквивалентны действию некоторой силы, действующей на частицу в направлении, противоположном вектору скорости. Уравнение движения заряженной частицы в магнитном поле с учетом потерь на ионизацию записывается в виде системы ОДУ вида [31]

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \\ \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{c} [\vec{V} \times \vec{B}(\vec{r})] - \left| \frac{dE}{dl} \right| \frac{\vec{V}}{V}, \end{cases}$$

где E – энергия на ионизацию атомов среды. После ряда математических преобразований модель переписывается для релятивистского случая в следующем виде:

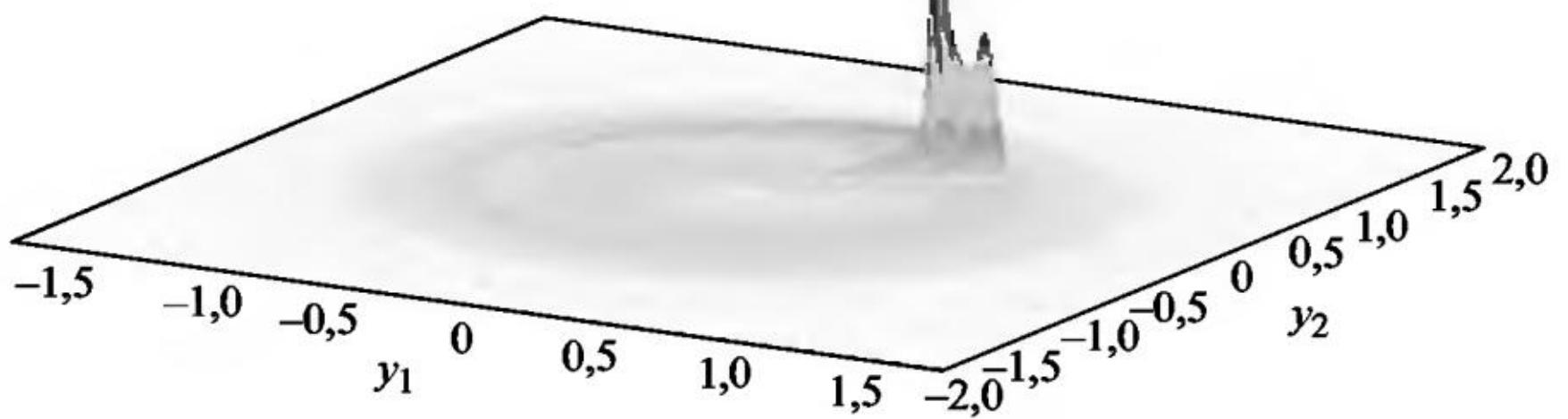


Рис.15.12

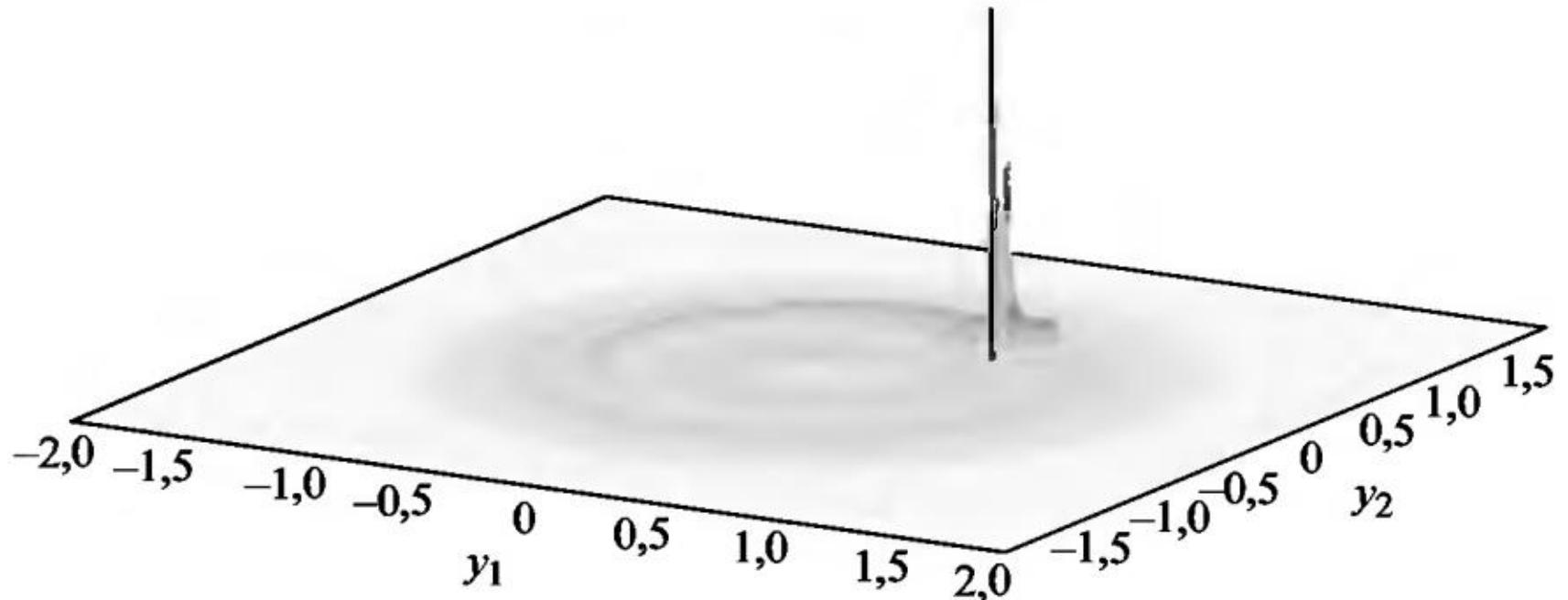


Рис. 15.13

$$m_0 \ddot{y}_1 = \left(\frac{q}{c} B_z \dot{y}_2 - \frac{q}{c} B_y \dot{y}_3 \right) \sqrt{1 - \beta^2} - \Phi(V) \dot{y}_1 \sqrt{(1 - \beta^2)^3},$$

$$m_0 \ddot{y}_2 = \left(\frac{q}{c} B_x \dot{y}_3 - \frac{q}{c} B_z \dot{y}_1 \right) \sqrt{1 - \beta^2} - \Phi(V) \dot{y}_2 \sqrt{(1 - \beta^2)^3},$$

$$m_0 \ddot{y}_3 = \left(\frac{q}{c} B_y \dot{y}_1 - \frac{q}{c} B_x \dot{y}_2 \right) \sqrt{1 - \beta^2} - \Phi(V) \dot{y}_3 \sqrt{(1 - \beta^2)^3},$$

где V – скорость частицы, m_0 – масса покоя частицы, y_i – координаты частицы, q – заряд, $\beta = \frac{V}{c} = \frac{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2}}{c}$, $\Phi(V) = \left| \frac{dE}{dl} \right| \frac{1}{|V|}$, B_x , B_y , B_z – компоненты вектора магнитной индукции. Полагая $\beta = 0$, получим уравнения движения заряженной частицы в веществе при наличии магнитного поля для нерелятивистского случая:

$$m_0 \ddot{y}_1 = \left(\frac{q}{c} B_z \dot{y}_2 - \frac{q}{c} B_y \dot{y}_3 \right) - \Phi(V) \dot{y}_1,$$

$$m_0 \ddot{y}_2 = \left(\frac{q}{c} B_x \dot{y}_3 - \frac{q}{c} B_z \dot{y}_1 \right) - \Phi(V) \dot{y}_2,$$

$$m_0 \ddot{y}_3 = \left(\frac{q}{c} B_y \dot{y}_1 - \frac{q}{c} B_x \dot{y}_2 \right) - \Phi(V) \dot{y}_3.$$

С учетом внутренних и внешних случайных возмущений при заданных числовых значениях параметров магнитной индукции $\vec{B} = (0,1,0,1,3)$ движение заряженной частицы в релятивистском случае задается системой СДУ вида

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_4 dt, & y_1(0) &= 0,5, \\ dy_2 &= y_5 dt, & y_2(0) &= 0,4, \\ dy_3 &= y_6 dt, & y_3(0) &= 0,3, \\ dy_4 &= (3y_5 - 0,1y_6 - \Phi(V)y_4)dt + \sigma_1 y_1 dw_1(t), & y_4(0) &= 0,01, \\ dy_5 &= (0,1y_6 - 3y_4 - \Phi(V)y_5)dt + \sigma_2 dw_2(t), & y_5(0) &= 0,02, \\ dy_6 &= (0,1y_4 - 0,1y_5 - \Phi(V)y_6)dt + \sigma_3 dw_3(t), & y_6(0) &= 0,03, \end{aligned} \quad (15.3)$$

где $\Phi(V) = \frac{1}{V^2} \frac{E_0}{\sqrt{1-V^2}}$. Здесь E_0 – энергия покоя частицы. Исследуем зависимость режимов движения частицы в зависимости от характеристики вещества E_0 . На рис. 15.14 и 15.15 приведены графики одной смоделированной траектории компоненты y_1 решения сопутствующей системы ОДУ при $E_0 = 10^{-5}$ и 10^{-4} соответственно,

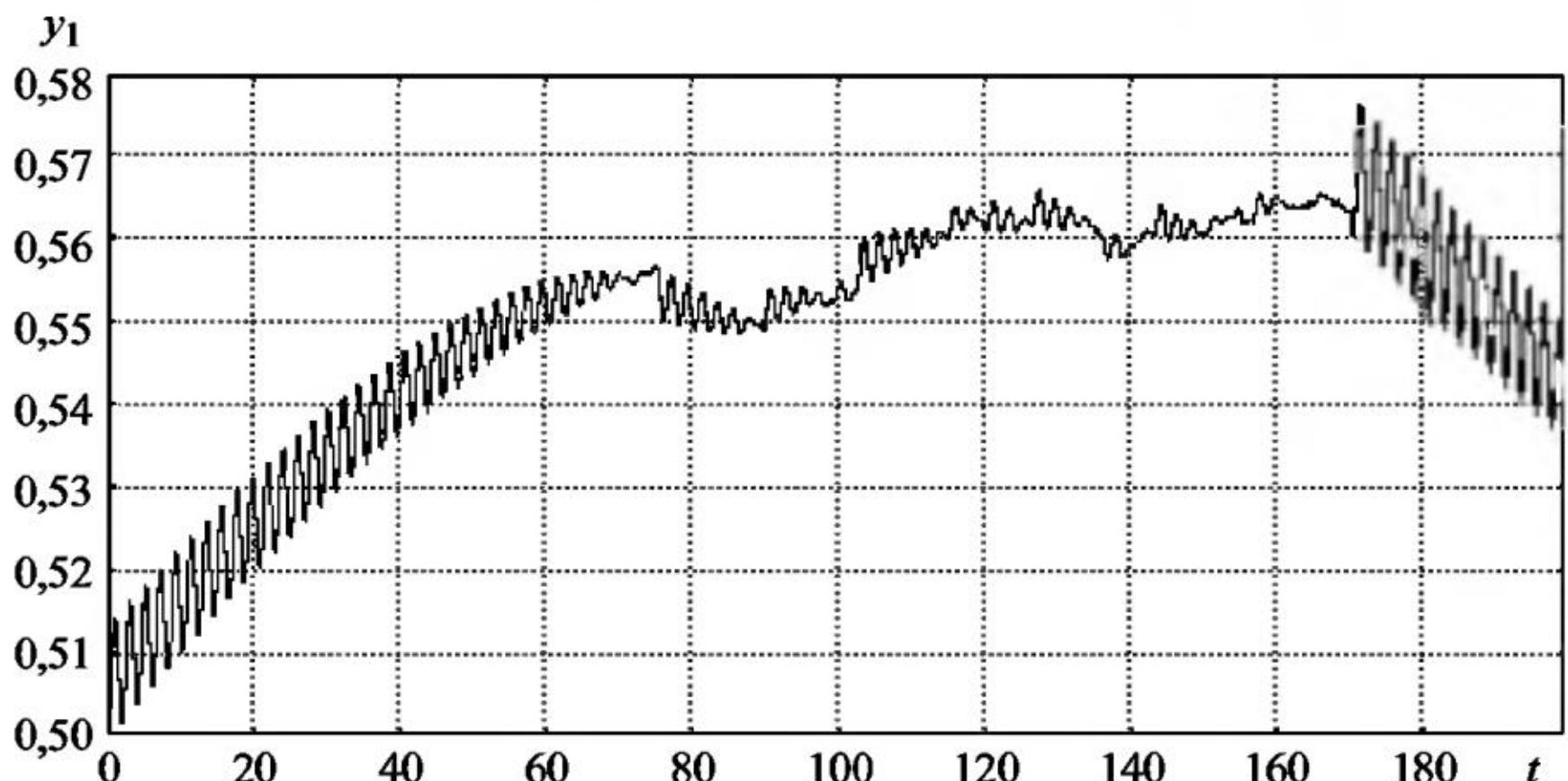


Рис. 15.14

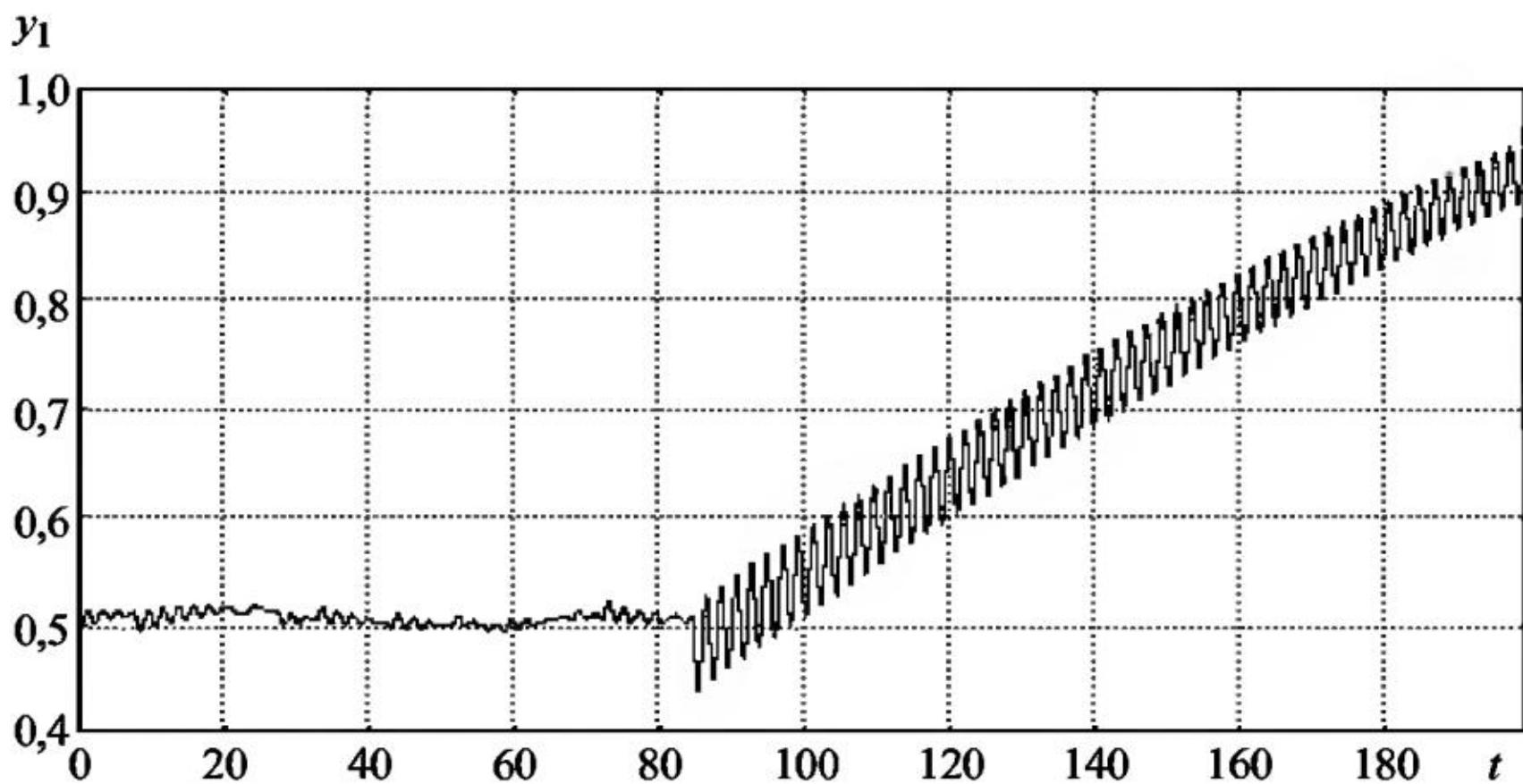


Рис. 15.15

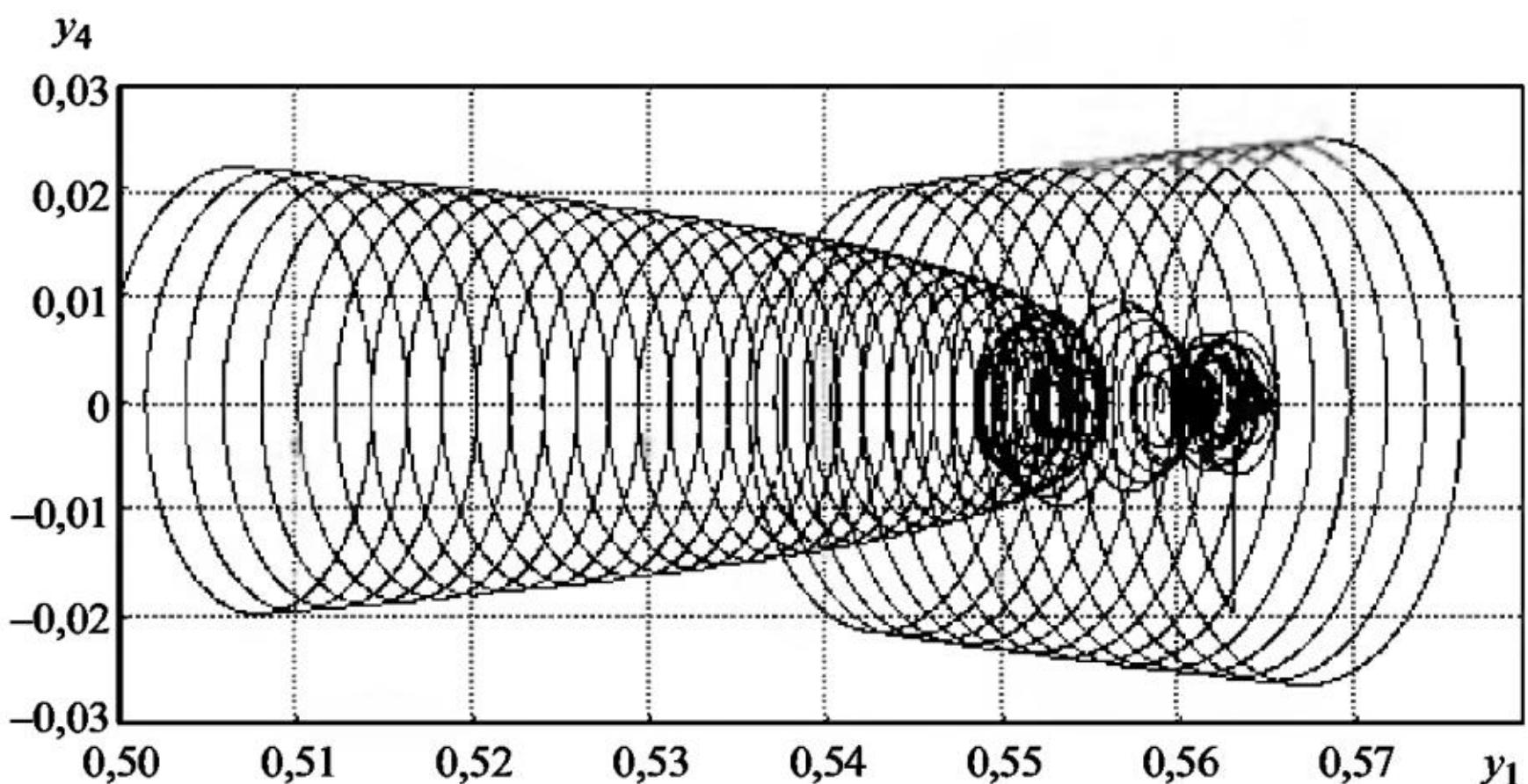


Рис. 15.16

для $t_{\text{end}} = 200$. Из графиков видно изменения характера колебаний заряженной частицы.

На рис. 15.16 и 15.17 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_4) численного решения для тех же значений параметра E_0 . Из графиков видно, как меняется скорость частицы в зависимости от значений компоненты решения y_1 при продвижении по интервалу интегрирования.

Такое резкое изменение характера колебаний вызвано спецификой функции $\phi(V)$, график которой имеет скачки очень большой амплитуды. На рис. 15.18 и 15.19 приведены графики $\phi(V)$ для разных значений параметра $E_0 = 10^{-5}$ и $E_0 = 10^{-4}$, которые показывают,

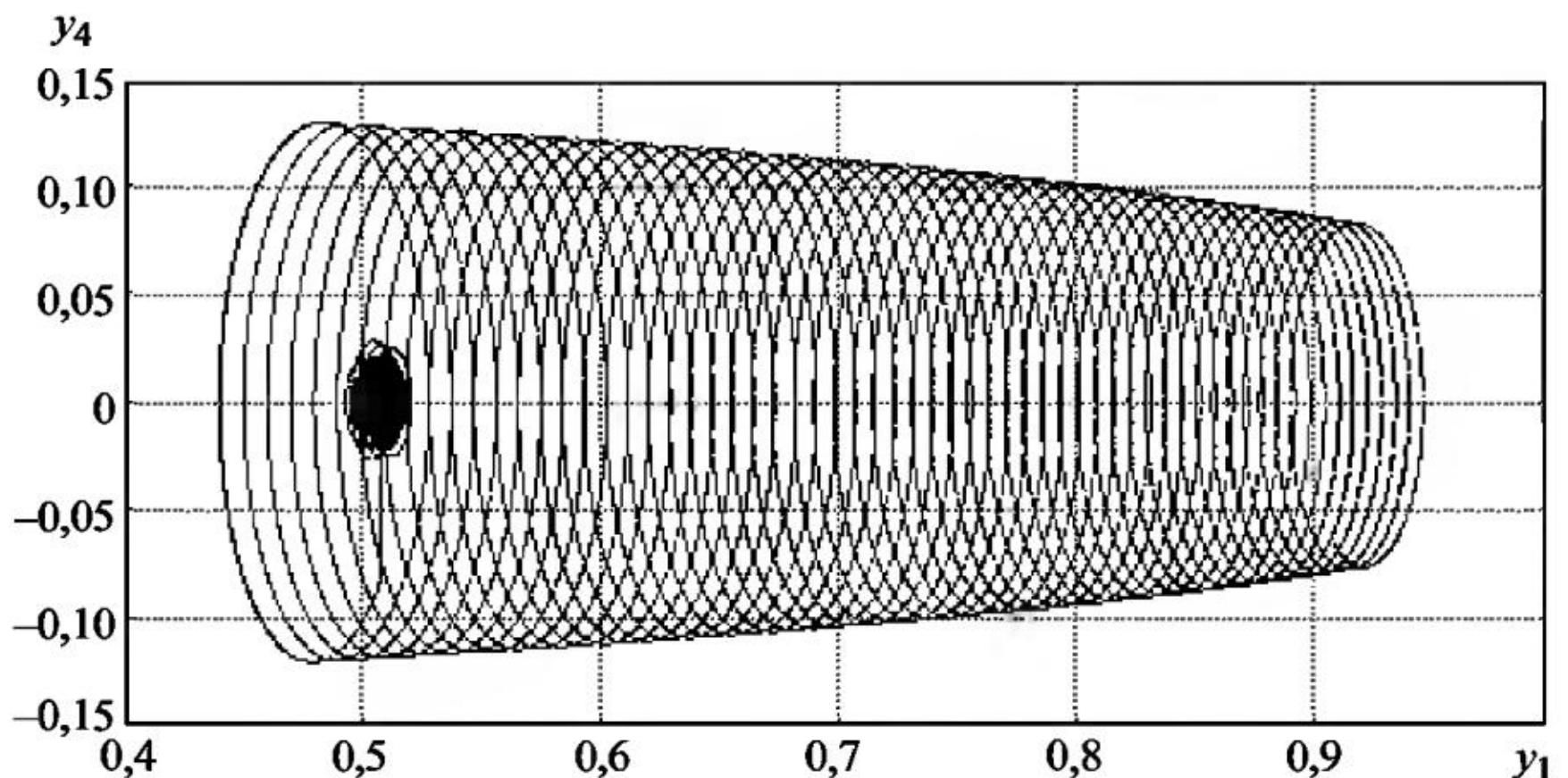


Рис. 15.17

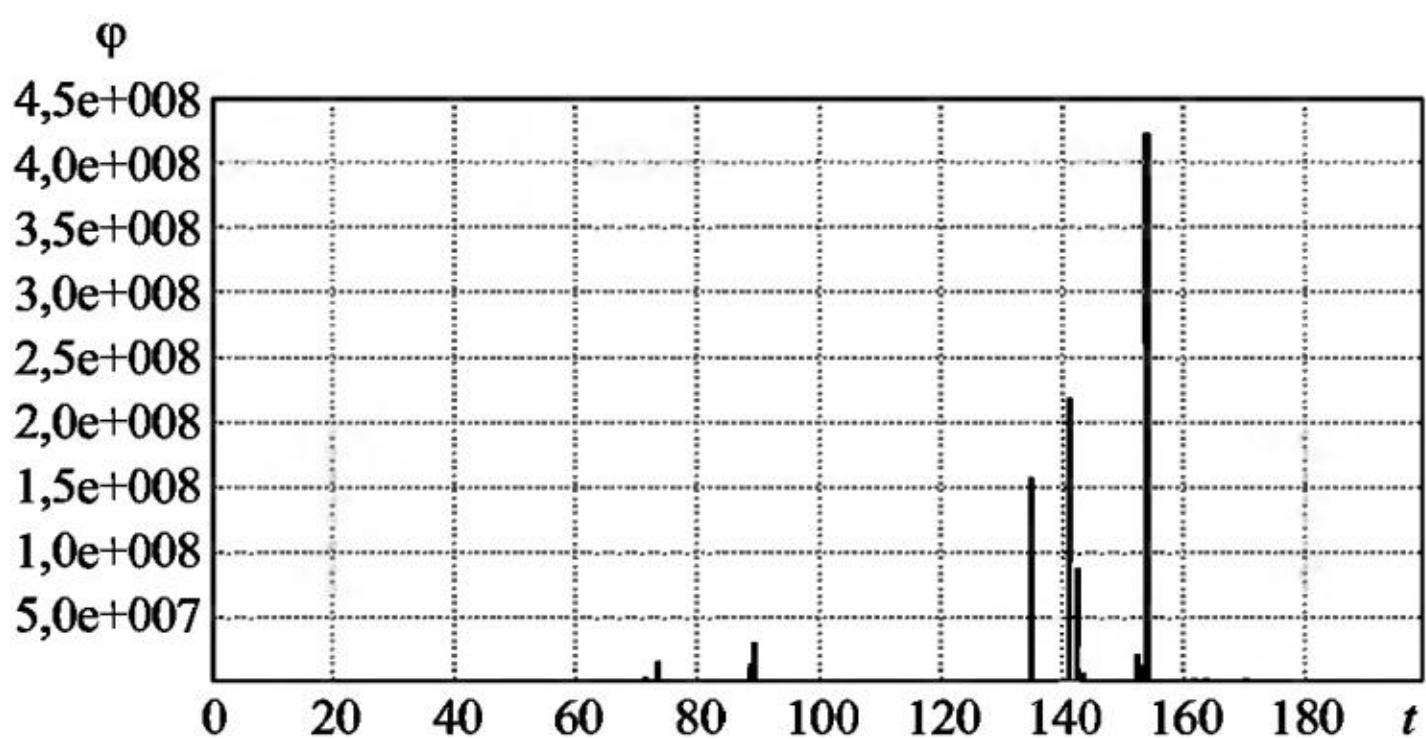


Рис. 15.18

сколько раз изменялась амплитуда колебаний компоненты решения y_1 и в какие моменты времени.

На рис. 15.20 и 15.21 даны графики одной смоделированной траектории компоненты y_1 численного решения системы СДУ (15.3) при тех же значениях параметров модели с шумами интенсивности $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,01$, рассчитанной с шагом $h = 10^{-4}$. Видно, что наличие даже небольших шумов полностью нарушает динамику движения частицы. При $E_0 = 10^{-5}$ (рис. 15.20) в отличие от детерминированного случая (см. рис. 15.14) изменение характера колебаний частицы становится практически незаметным. При $E_0 = 10^{-4}$ (рис. 15.21) видно, как в структуру колебаний вносится хаотичность движения, хотя в отличие от рис. 15.20 все еще четко видны моменты изменения режима колебаний.

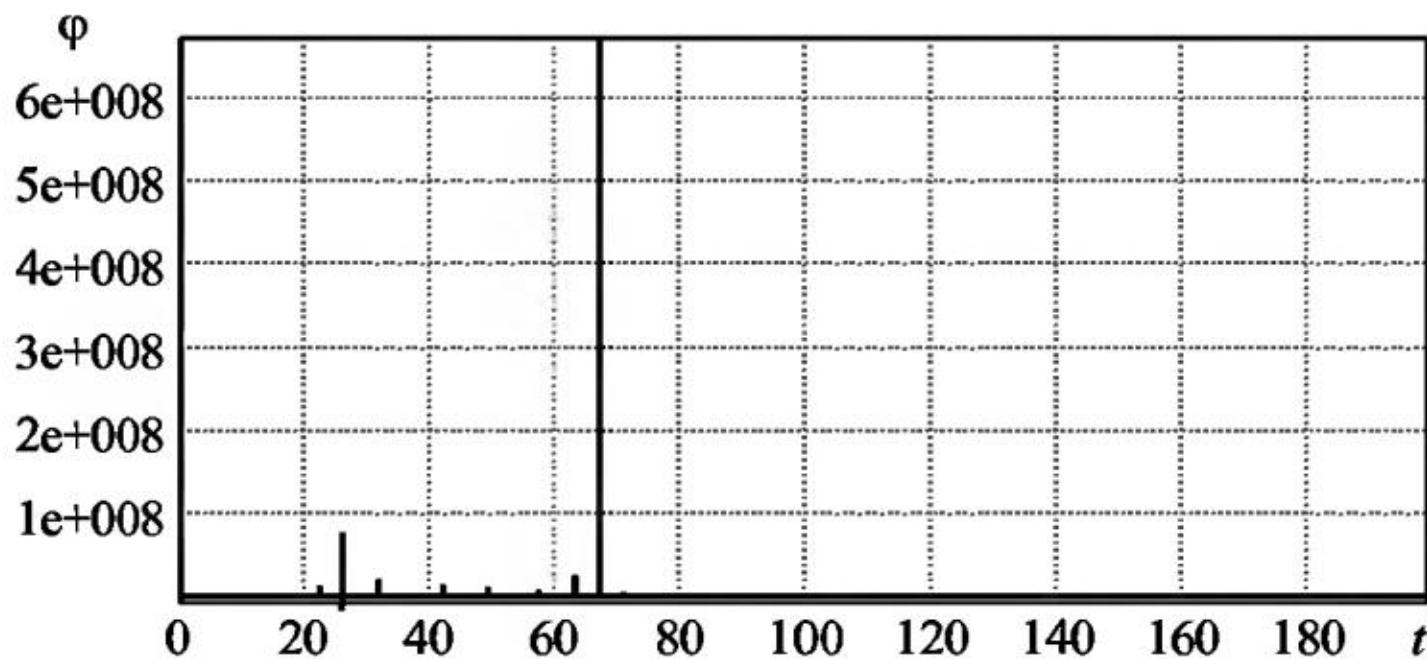


Рис. 15.19

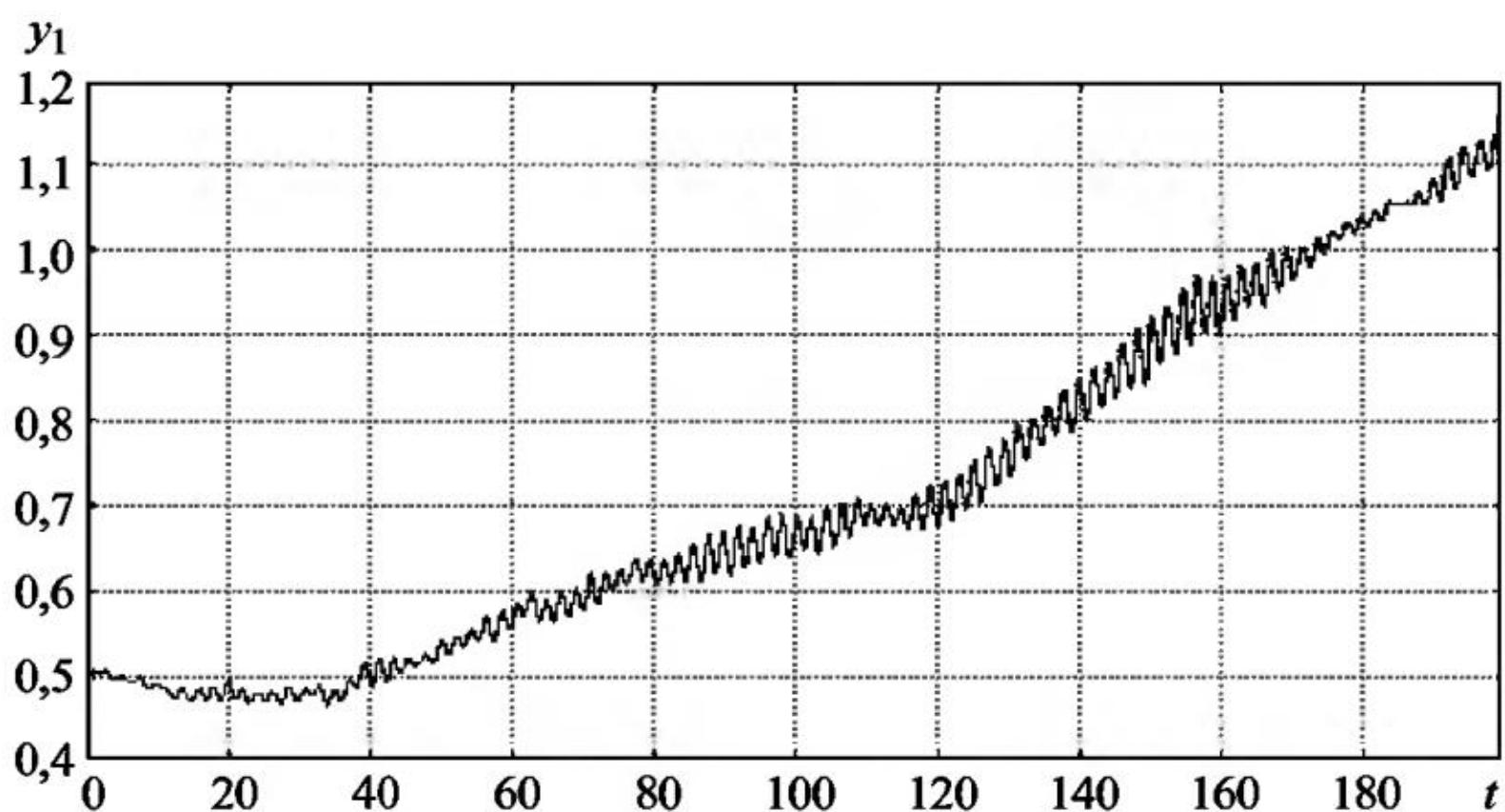


Рис. 15.20

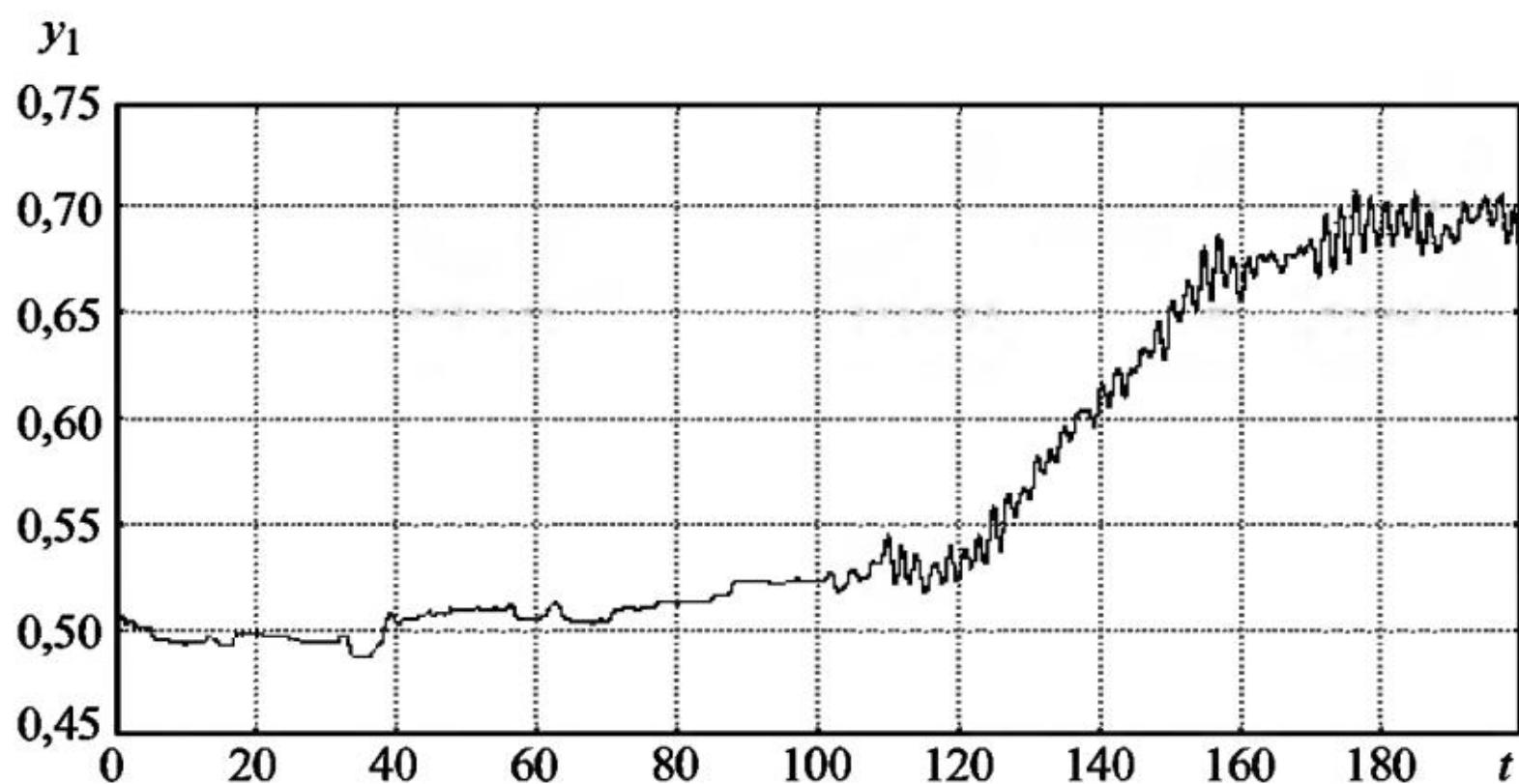


Рис. 15.21

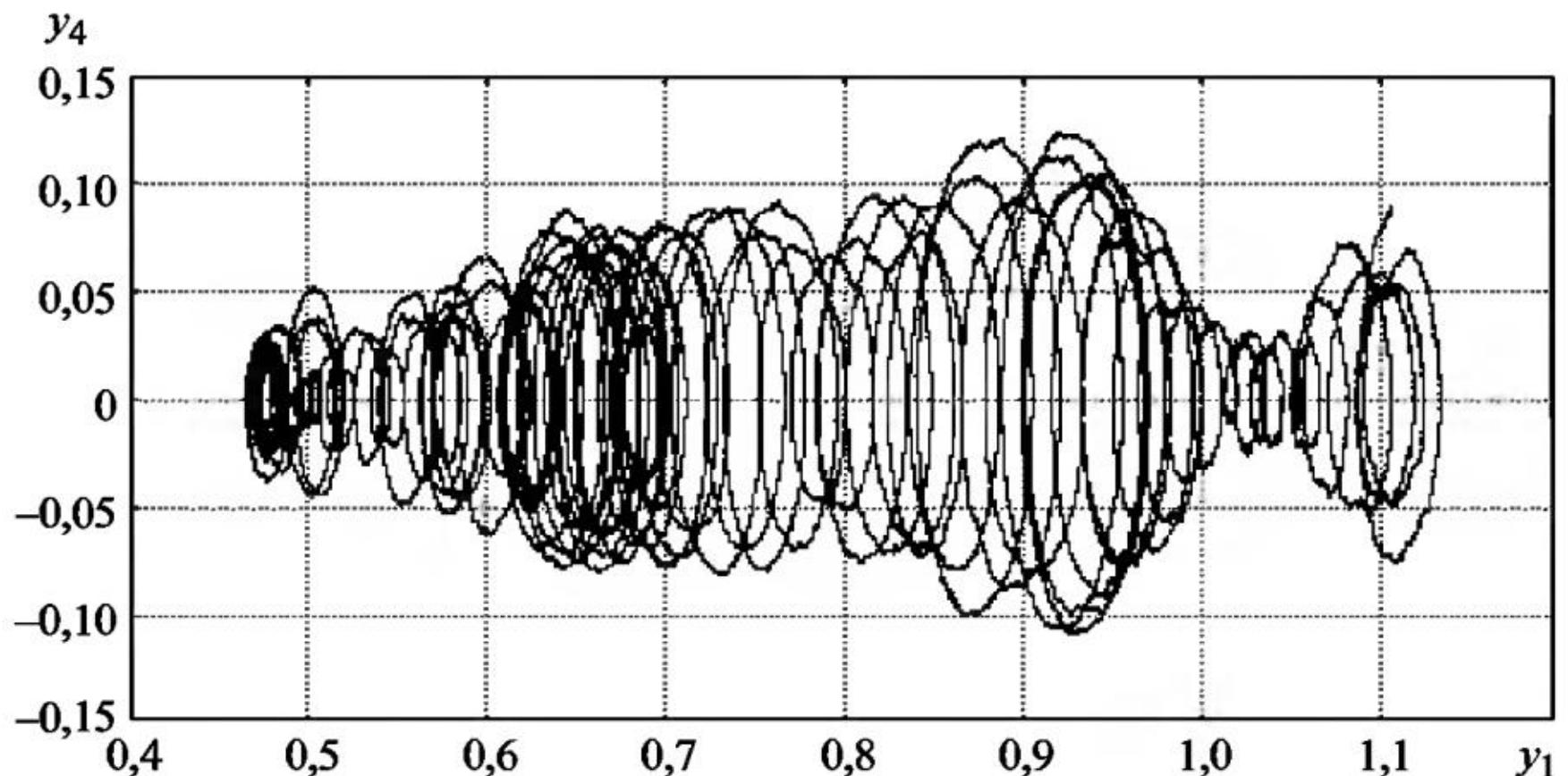


Рис. 15.22

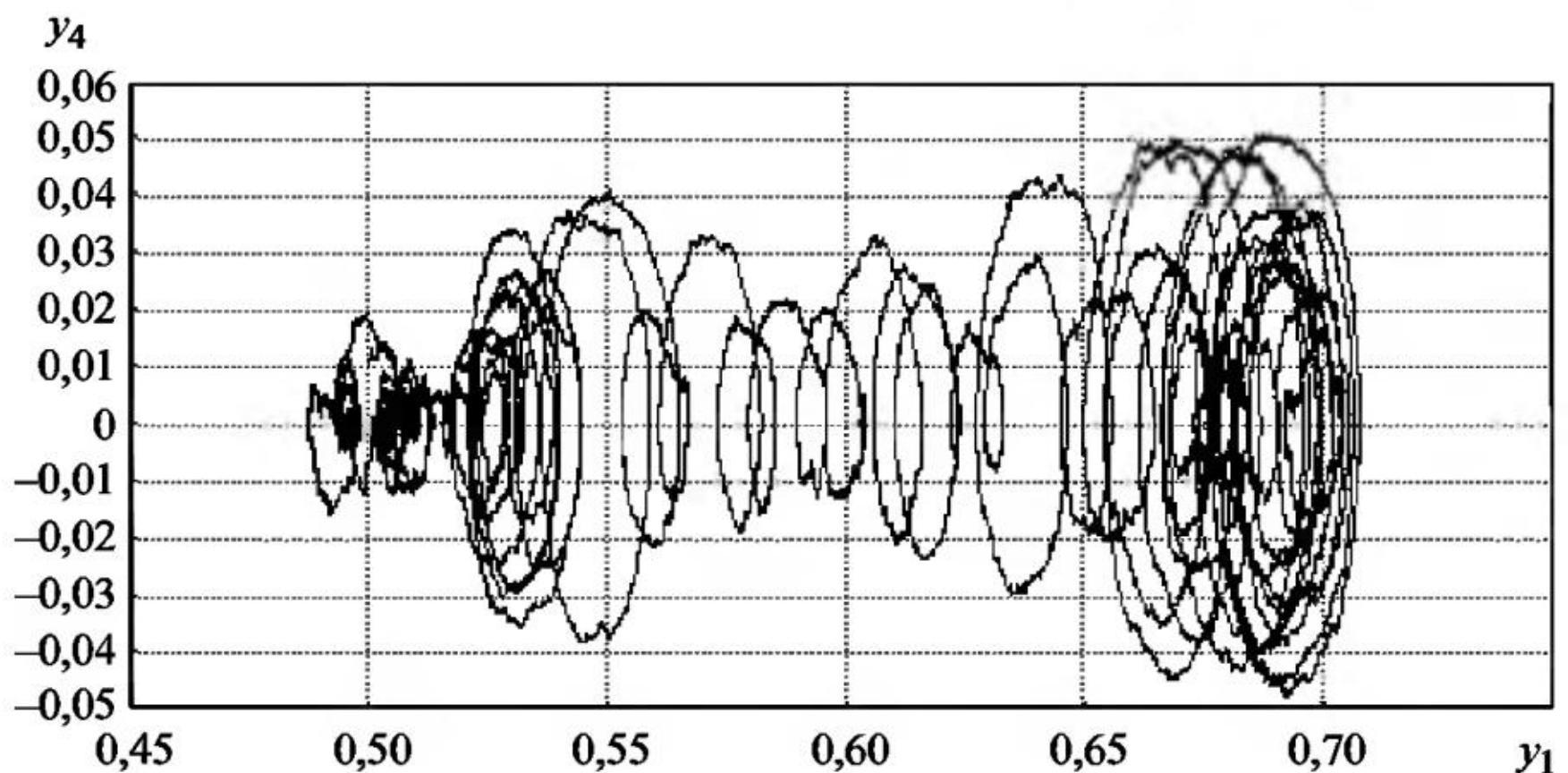


Рис. 15.23

На рис. 15.22 и 15.23 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_1, y_4) численного решения для тех же значений параметра $E_0 = 10^{-5}$ и 10^{-4} . Существенное различие графиков на рис. 15.16 и 15.22 вызвано влиянием на решение аддитивного шума малой интенсивности. Такие же аналогии прослеживаются при сравнении графиков на рис. 15.17 и 15.23.

Графики ЧИК (вид сбоку) на рис. 15.24 и 15.25 при малой дисперсии отражают характер колебаний компоненты y_1 численного решения системы СДУ (15.3) для $E_0 = 10^{-5}$ и 10^{-4} при продвижении вдоль интервала интегрирования, где наблюдается

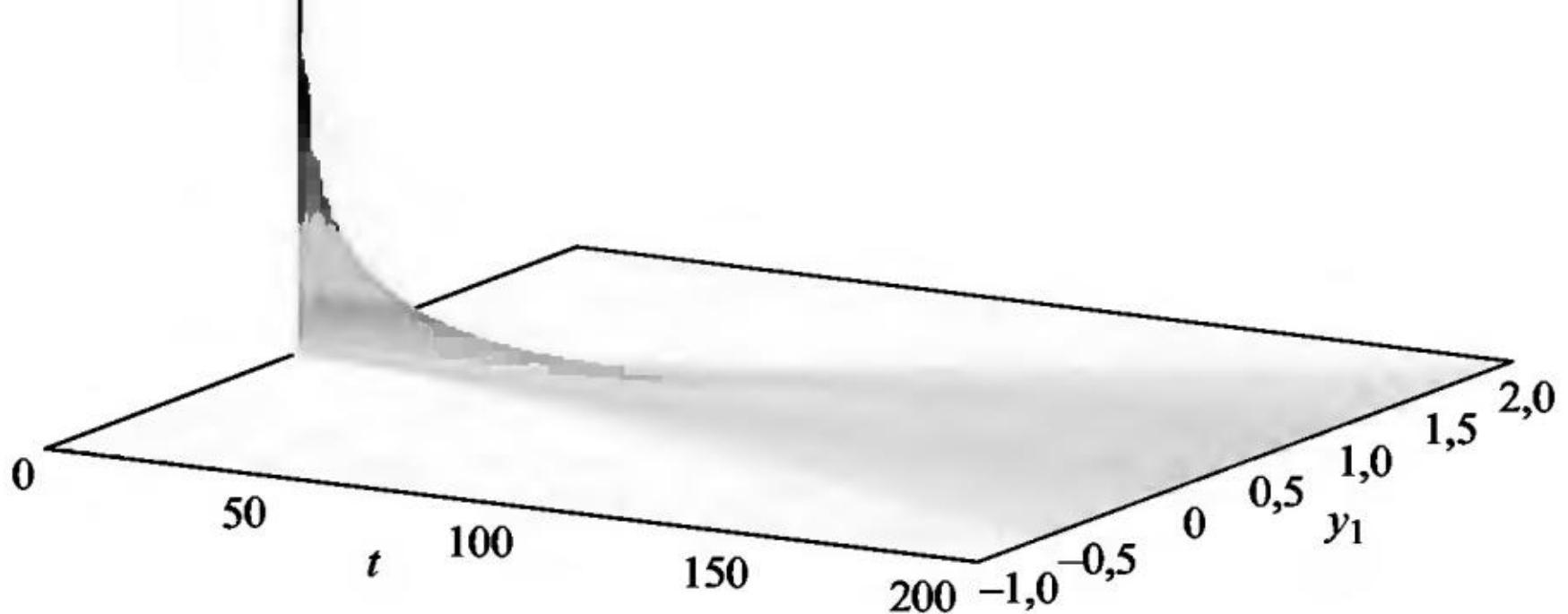


Рис. 15.24

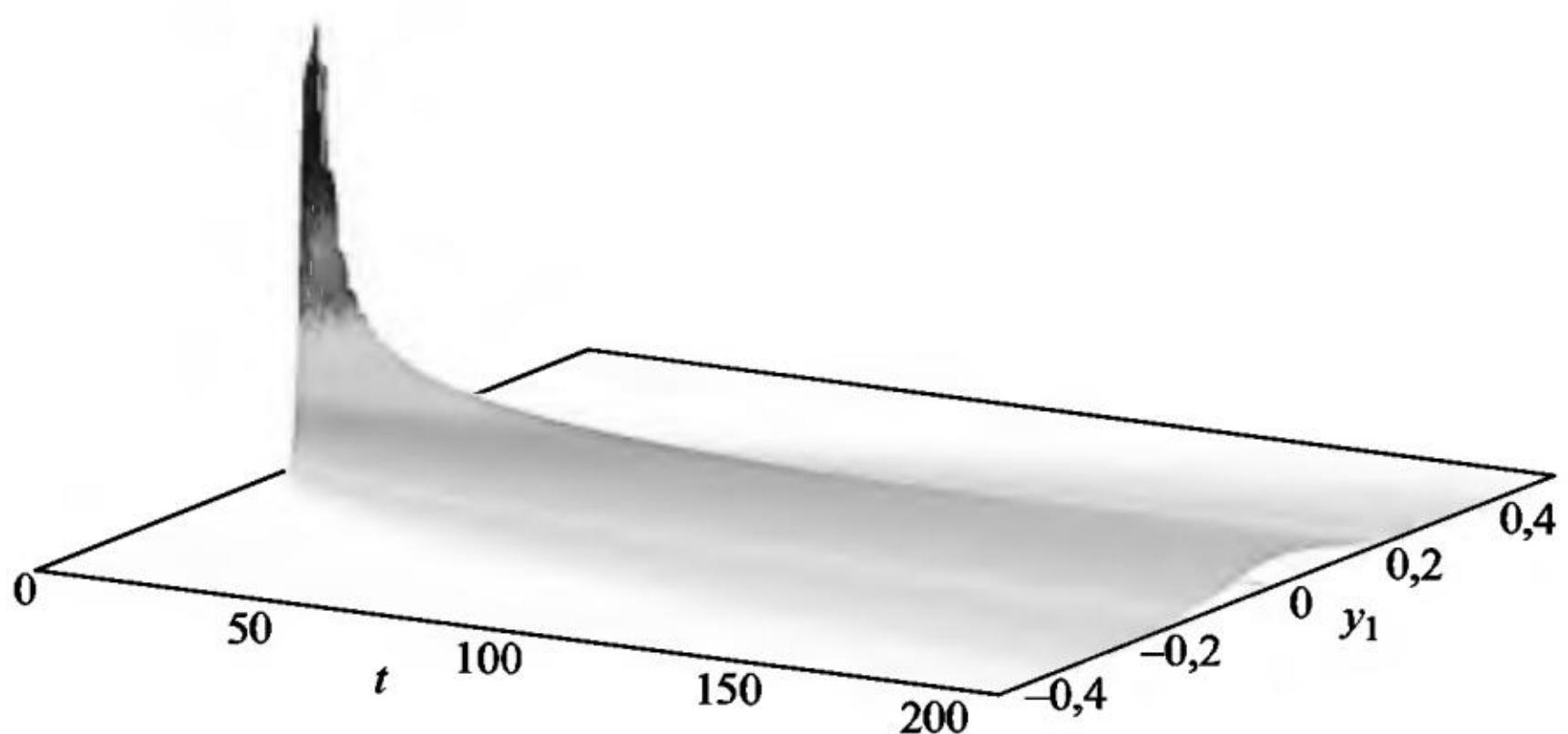


Рис. 15.25

рост амплитуды колебаний. Такой рост по большей части вызван характером поведения функции $\varphi(I)$, тогда как случайный шум оказывает малое воздействие на изменение режима колебаний.

Графики ЧФП на рис. 15.26 и 15.27 (вид сбоку) пары компонент (y_1, y_4) численного решения системы СДУ (15.3) рассчитаны при $E_0 = 10^{-5}$ и $E_0 = 10^{-4}$ соответственно. Из графиков виден характер изменения положения частицы за все время, причем пик графика соответствует начальному положению частицы, а также малой амплитуде колебаний при $t \in [0, 100]$.

Для расчетов графиков ЧИК и ЧФП использовалось 120 ядер кластера при следующих значениях параметров: $t_{\text{end}} = 200$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,01$, $h = 10^{-5}$, $N_{\text{tr}} = 10^6$. Среднее время расчета одной траектории составило 23 с. Оценка дисперсии компоненты y_1 численного решения системы СДУ (15.3) растет со временем, что

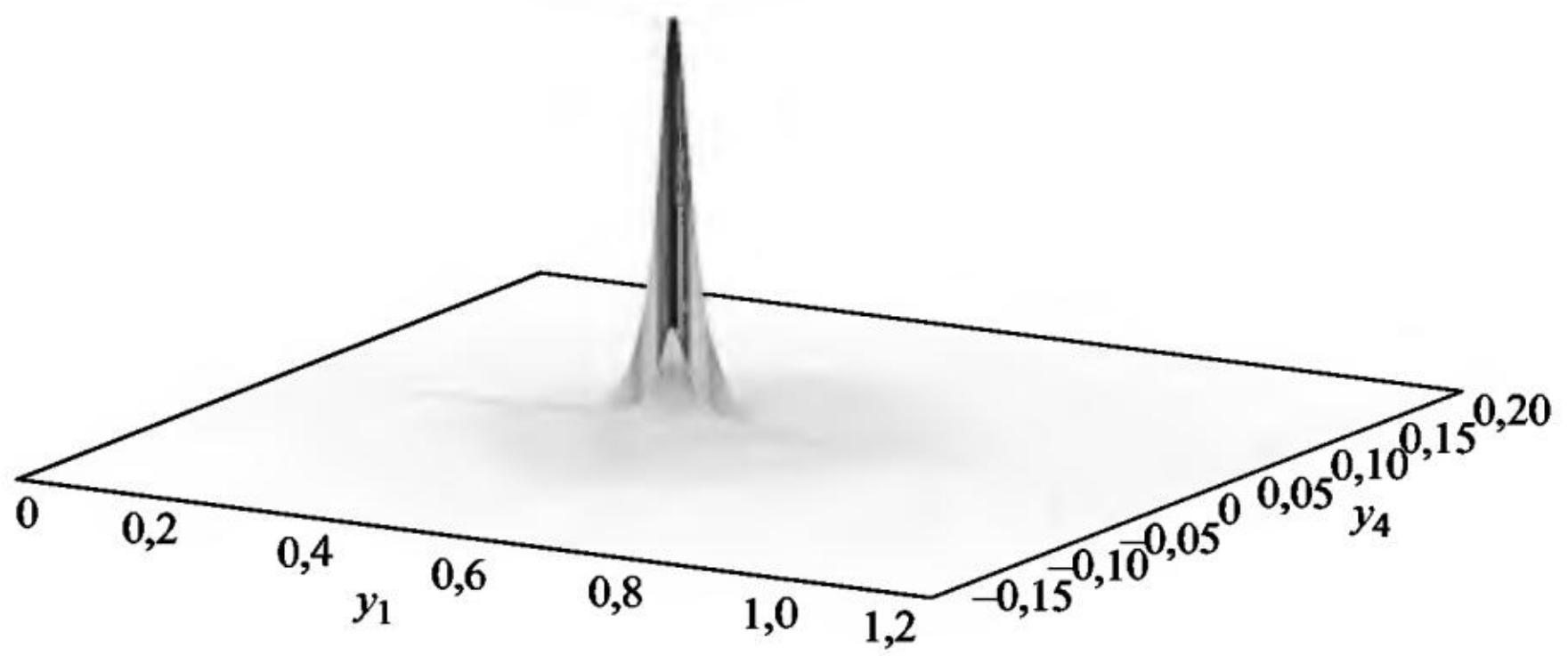


Рис. 15.26

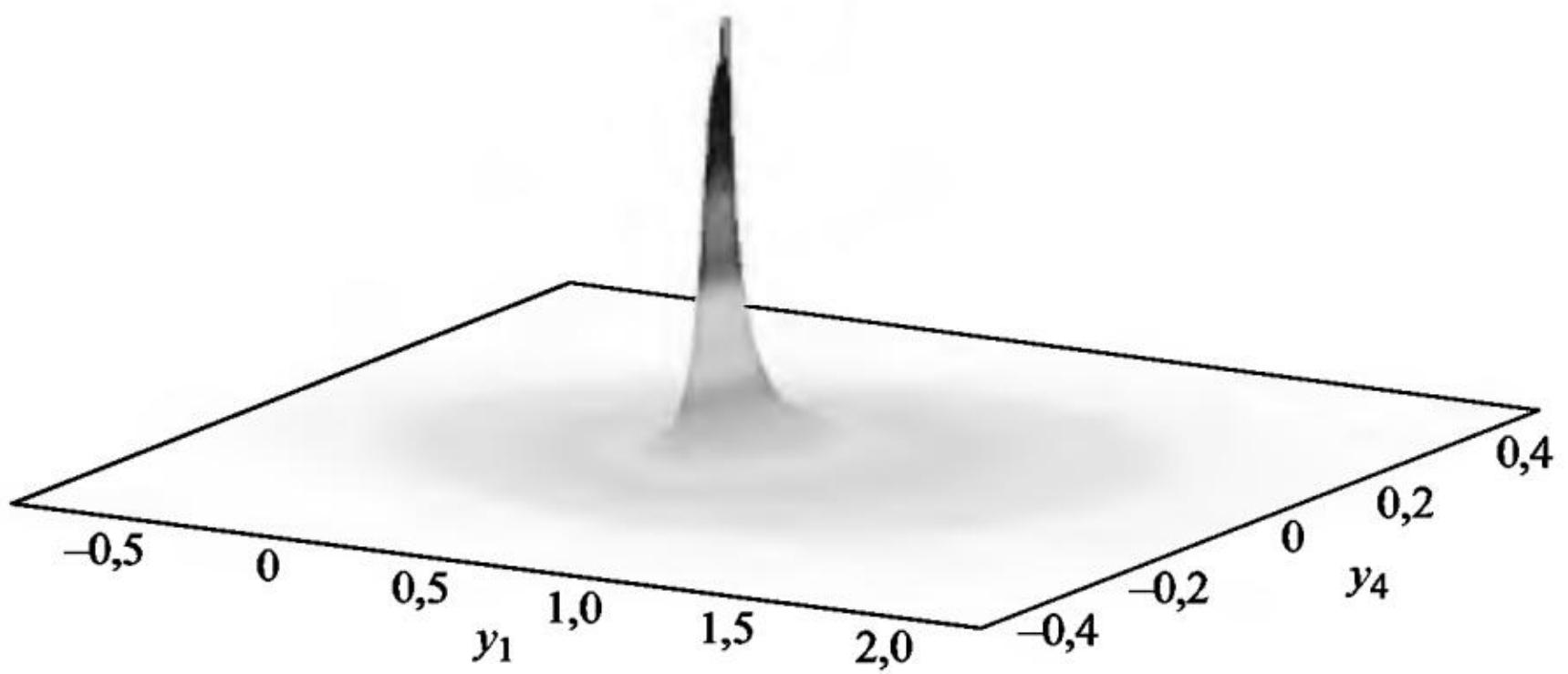


Рис. 15.27

говорит о неустойчивом движении заряженной частицы. Значение оценки дисперсии $Dy_1(t_{\text{end}}) = 0,3$ при $E_0 = 10^{-5}$, при $E_0 = 10^{-4}$ оценка дисперсии $Dy_1(t_{\text{end}}) = 0,05$.

16. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Большинство течений жидкостей и газов в природе (движение воздуха в земной атмосфере, воды в реках и морях, газа в атмосферах Солнца и звезд и в межзвездных туманностях и т. п.), в технических устройствах (в трубах, каналах, струях, в пограничных слоях около движущихся в жидкости или газе твердых тел, в следах за такими телами и т. п.) турбулентны из-за наличия источников энергии и импульса, наличия внешних возмущающих сил или отсутствия сил сопротивления трения в квантовых жидкостях. При процессах горения или химических реакциях на явление турбулентности накладываются множество других физических и химических процессов. Например, эффект конвекции, автоколебаний, гистерезиса. Турбулентность может возникать самопроизвольно, а может в результате действий нескольких внешних сил. Турбулентность можно создать, увеличив число Рейнольдса (увеличить линейную или угловую скорость вращения потока, размер обтекаемого тела, уменьшить коэффициент молекулярной вязкости, увеличить плотность среды), увеличив число Релея (нагреть среду), увеличив число Прандтля (уменьшить вязкость), задав очень сложный вид внешней силы, создав сложные граничные или начальные условия, задав функцию формы границ, облучив среду звуком высокой интенсивности, с помощью химических реакций, например, горения.

К важнейшим свойствам турбулентности относятся:

1. Беспорядочность – все турбулентные течения беспорядочны или случайны.
2. Диффузивность – быстрое перемешивание и рост переноса количества движения, тепла и массы.
3. Большие числа Рейнольдса – турбулентные потоки встречаются лишь при высоких числах Рейнольдса.
4. Трехмерные флуктуации завихренности. Турбулентность – это вихревое и трехмерное движение.
5. Турбулентные течения всегда диссипативны. Вязкостные напряжения сдвига производят работу деформации, увеличивающую внутреннюю энергию жидкости за счет кинетической энергии турбулентности.

6. Турбулентность – это феномен, относящийся к сплошной среде, описываемый уравнениями механики жидкости.

7. Турбулентные течения – это течения. Турбулентность – это не свойство жидкости, а свойство течений жидкости.

Уравнения движения жидкости (уравнения Навье–Стокса – УНС) нелинейны, так как скорость жидкости переносится самой скоростью и эти вихри неустойчивы. Они дробятся на более мелкие вихри, те на более мелкие. Турбулентное течение — явление, заключающееся в том, что при увеличении скорости течения жидкости или газа в среде самопроизвольно образуются многочисленные нелинейные волны и обычные, линейные различных размеров, без наличия внешних, случайных, возмущающих среду сил или при их присутствии. Система уравнений Навье—Стокса (в нее входит и уравнение сохранения массы или уравнение неразрывности) описывает множество турбулентных течений с достаточной для практики точностью. Обычно турбулентность наступает при превышении некоторого критического параметра, например числа Рейнольдса или Релея (в частном случае скорости потока при постоянной плотности и диаметре трубы и/или температуры на внешней границе среды) [12].

Пример 16.1. Семимерная модель турбулентности. На математическом языке турбулентность означает, что решение уравнений в частных производных сохранения импульса и сохранения массы и уравнение энергии представляет собой – при превышении некоторого критического числа Рейнольдса – странный аттрактор. Турбулентное течение с большим числом Рейнольдса называют развитой турбулентностью. При разных граничных условиях оно всегда приводит к созданию одного и того же профиля скоростей. Это свойство независимости параметров от числа Рейнольдса называют автомодельностью течения и наблюдается экспериментально в струях или в пограничном слое [12].

Существует ряд дискретных моделей УНС (простейшей моделью является система уравнений Лоренца), описывающих конвективную турбулентность в слое несжимаемой жидкости. Результаты расчетов для разных моделей сильно различаются, например, переход к хаосу при увеличении числа Рейнольдса происходит либо через удвоения периода колебаний, либо через возникновение и последующее разрушение квазипериодических режимов. Если периодическую внешнюю силу представить в виде ряда Фурье [1]

$$f(\vec{x}) = \sum_k A_k \exp(i\vec{k}\vec{x}),$$

а решение УНС искать в виде

$$U(\vec{x}) = \sum_k \gamma_k \exp(i\vec{k}\vec{x}),$$

то приходим к комплексной системе ОДУ вида

$$\frac{d\gamma}{dt} = -i \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ k_1 + k_2 = k}} (C_{k_1 k_2} \gamma_{k_1} \gamma_{k_2} - a_k \gamma_k + f_k). \quad (16.1)$$

Делая в (16.1) замену $\gamma_{k_1} = ay_1$, $\gamma_{k_2} = -iay_2$, $\gamma_{k_3} = ay_3$, $\gamma_{k_4} = iay_4$, $\gamma_{k_5} = iay_5$, $\gamma_{k_6} = iay_6$, $\gamma_{k_7} = iay_7$, где $a = 10\sqrt{2}$, приходим к семимерной модели УНС, которая при наличии мультипликативного случайного шума записывается в виде системы СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= (-2y_1 + 4\sqrt{5}(y_2y_3 + y_4y_5))dt, & y_{1_0} &= 0, \\ dy_2 &= (-9y_2 + 3\sqrt{5}(y_1y_3 + y_6y_7))dt, & y_{2_0} &= 2, \\ dy_3 &= (-5y_3 + 9y_1y_7 - 7\sqrt{5}y_1y_2 + R)dt + 0,1y_3dw(t), & y_{3_0} &= 0, \\ dy_4 &= (-5y_4 - \sqrt{5}y_1y_5)dt, & y_{4_0} &= -3, \\ dy_5 &= (-y_5 - 3\sqrt{5}y_1y_4)dt, & y_{5_0} &= -9, \\ dy_6 &= (-8y_6 - 4\sqrt{5}y_2y_7)dt, & y_{6_0} &= 0, \\ dy_7 &= (-5y_7 + \sqrt{5}y_2y_6 - 9y_1y_3), & y_{7_0} &= 4. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Расчеты показывают, что у компоненты y_3 решения сопутствующей системы ОДУ при $R = 10$ осцилляции компоненты затухают (ламинарное движение), а частота колебаний при $R = 200$ гораздо выше, чем при $R = 50$ (турбулентное движение).

На рис. 16.1 и 16.2 приведены графики фазовой траектории пары компонент (y_3, y_5) решения сопутствующей системы ОДУ при $R = 50$ и $R = 200$ соответственно, которые сильно различаются между собой.

Расчеты оценки дисперсии $Dy_3(t)$ для значений параметра $R = 50$ и 200 показывают ее выход на стационарный уровень для каждого R .

На рис. 16.3 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_3 решения СДУ (16.2) для $R = 50$. Пик частот в начале интервала

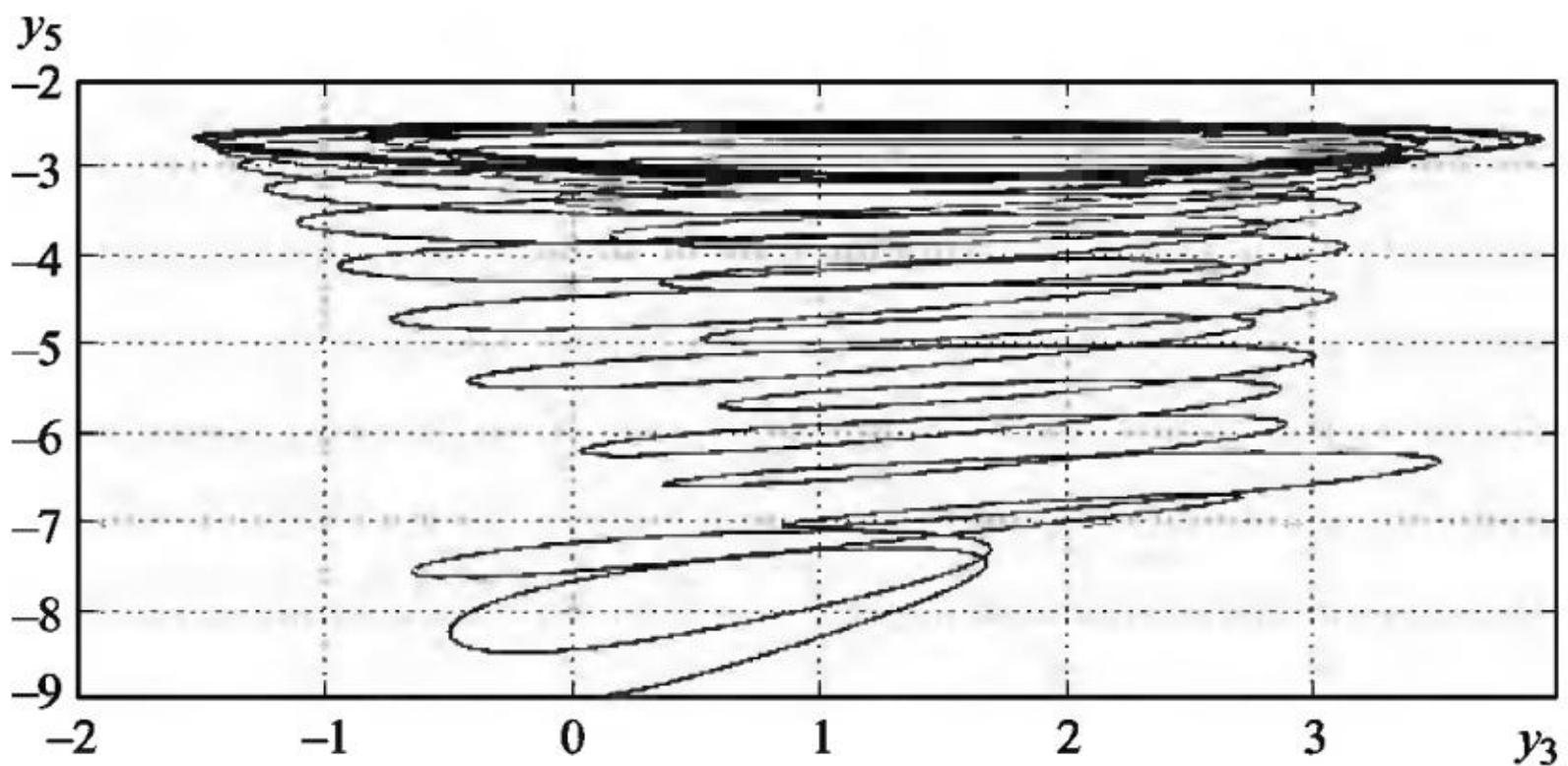


Рис. 16.1

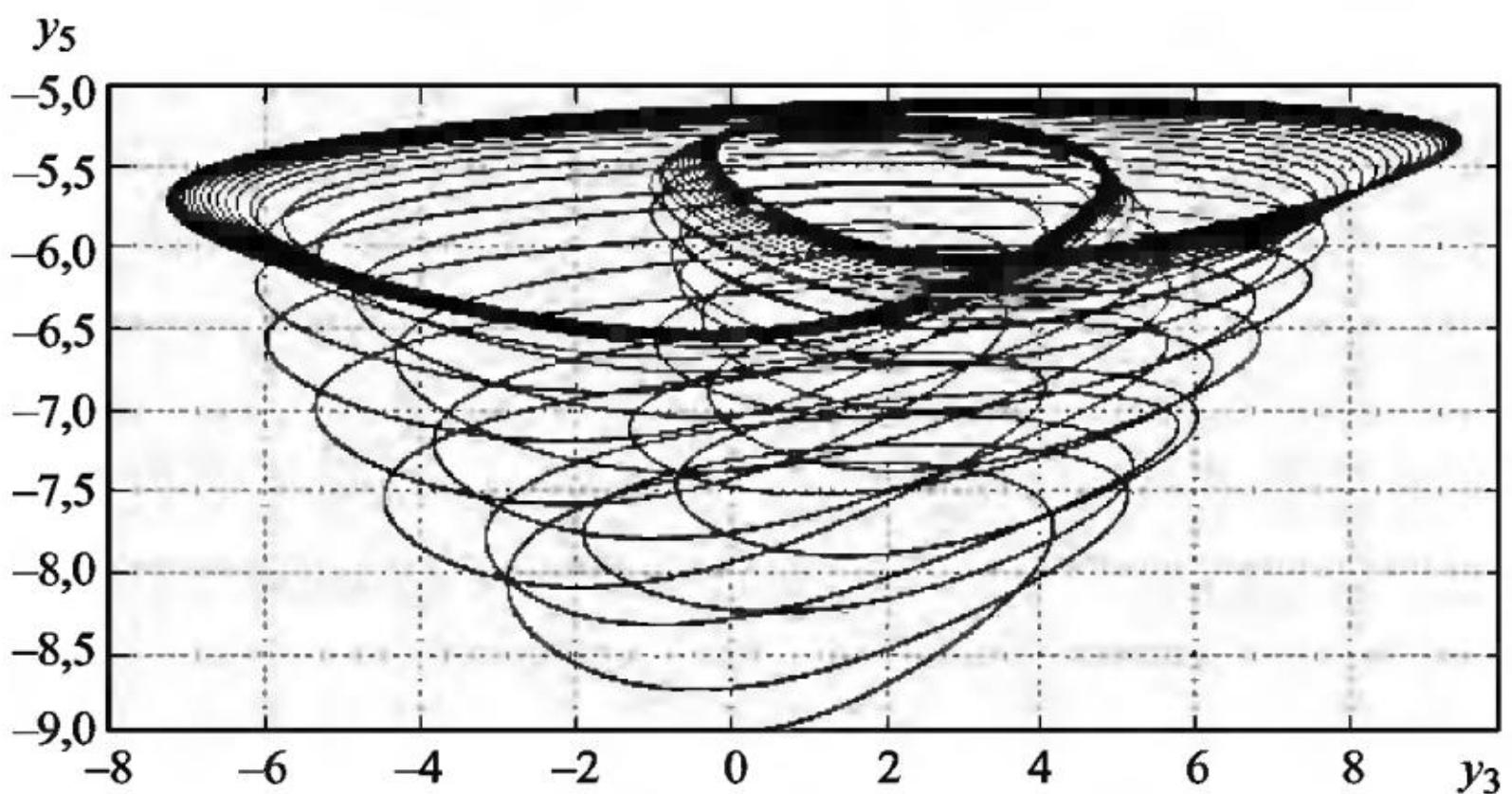


Рис. 16.2

интегрирования находится вблизи начального значения $y_3(0) = 0$, а затем с продвижением по интервалу интегрирования частоты начинают распределяться более равномерно по всем ячейкам сетки ЧИК.

На рис. 16.4 и 16.5 представлены графики ЧФП (вид сверху) пары компонент (y_3, y_5) решения системы СДУ (16.2) при $R = 50$ и 200 соответственно. Расчет ЧФП производился на интервале интегрирования $[0, 100]$ с шагом $h = 10^{-6}$. Моделировалось 10^6 траекторий решения СДУ (16.2). Для построения ЧИК и ЧФП использовалась сетка 100×100 .

Сравнивая графики ЧФП на рисунках 16.4 и 16.5, видим незначительное различие в формах стохастических колебаний для разных значений параметра R , что резко отличается от случая детерминированных колебаний (рис. 16.1 и 16.2).

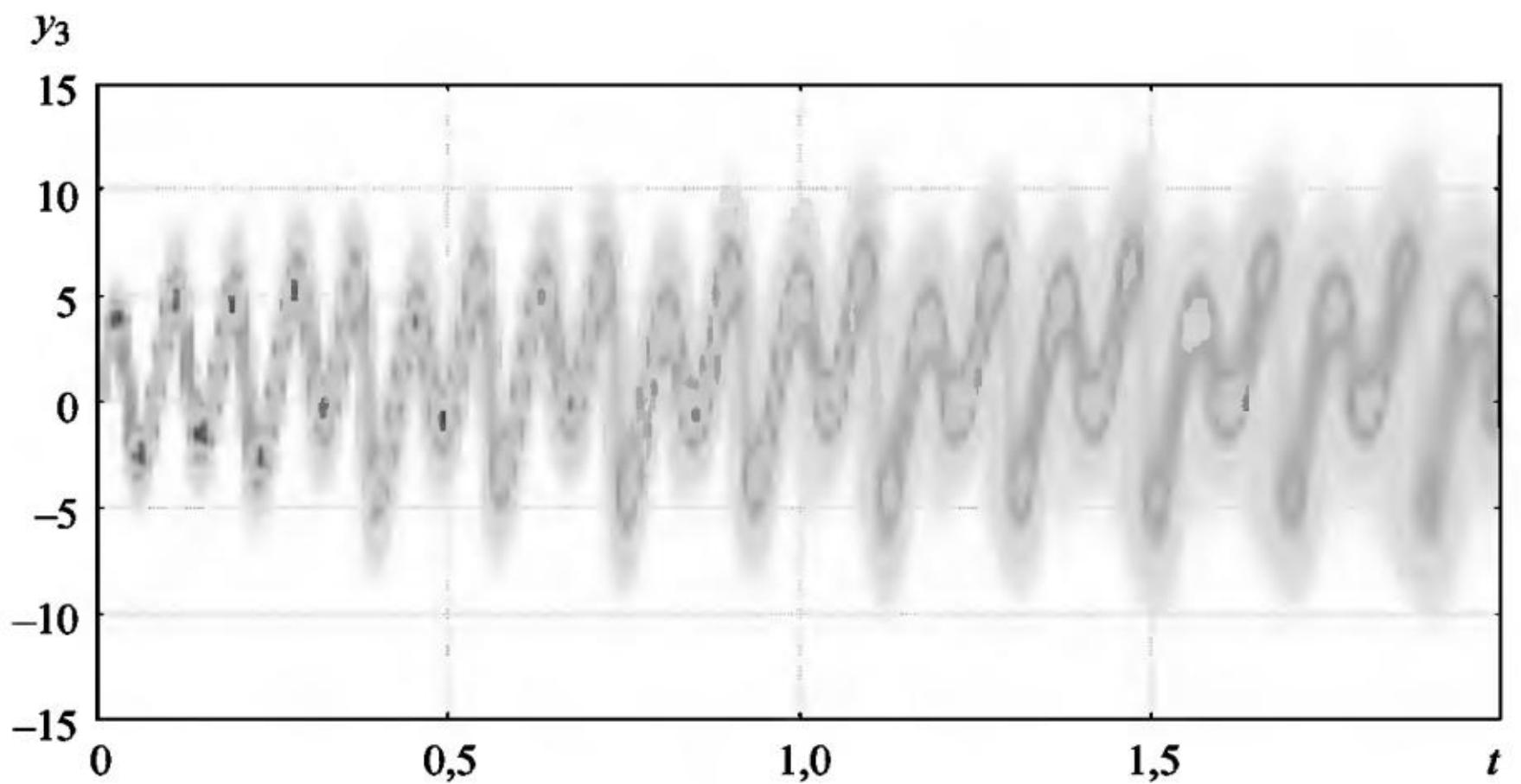


Рис. 16.3

Пример 16.2. Стохастическое параболическое уравнение. Сначала рассмотрим одномерное УНС на интервале $[0, 1]$ с постоянным давлением

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = -V(t, x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} + F(t, x) \quad (16.3)$$

с начальными $V(0, x) = 0$ и краевыми $V(t, 0) = 0,01$, $V(t, 1) = -0,01$, условиями и уравнением движения частицы

$$\frac{d\tilde{X}(t, X)}{dt} = \tilde{V}(t, x), \quad \tilde{X}(0) = X,$$

$$\text{где } \tilde{V}(t, x) = V(t, \tilde{x}_\delta), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_{\text{end}}. \quad (16.4)$$

Здесь \tilde{x}_δ – ближайший к X узел в момент времени t , $\tilde{X}(t, X)$ – положение частицы в момент времени t в отрезке $[0, 1]$, выходящей в момент времени $t=0$ из точки $X \in (0, 1)$. Траектория $\tilde{X}(t, X)$ не может выйти из отрезка $[0, 1]$ для всех t .

Если в уравнении (16.3) провести дискретизацию пространственных производных с шагом h_x , то приедем к большой системе ОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{V}_l(t)}{dt} &= -\tilde{V}_l(t) \frac{\tilde{V}_{l+1}(t) - \tilde{V}_{l-1}(t)}{2h_x} + \frac{1}{R} \frac{\tilde{V}_{l+1}(t) - 2\tilde{V}_l(t) + \tilde{V}_{l-1}(t)}{h_x^2} + F_l(t), \\ \tilde{V}_l(0) &= 0, \end{aligned} \quad (16.5)$$

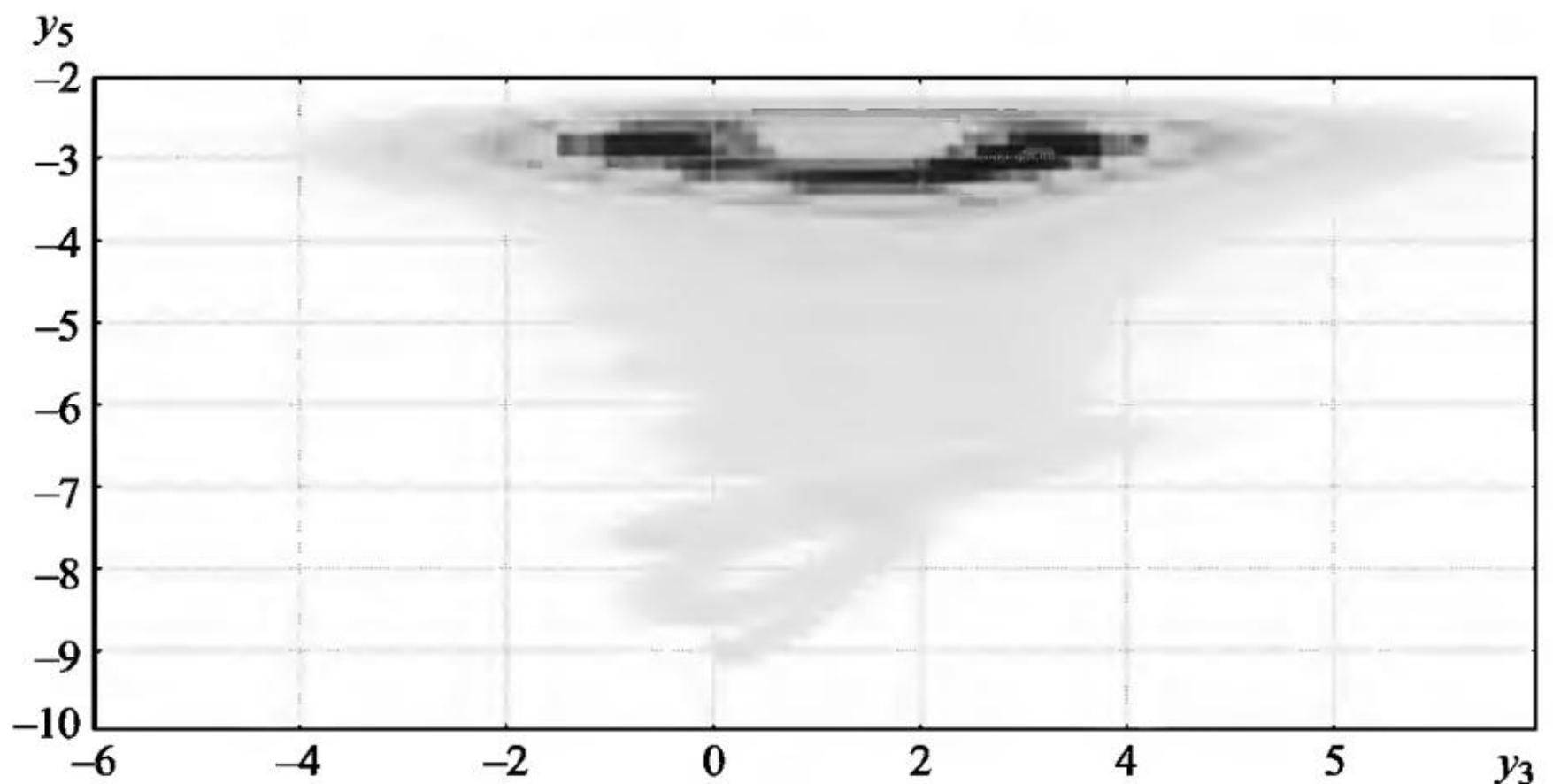


Рис. 16.4

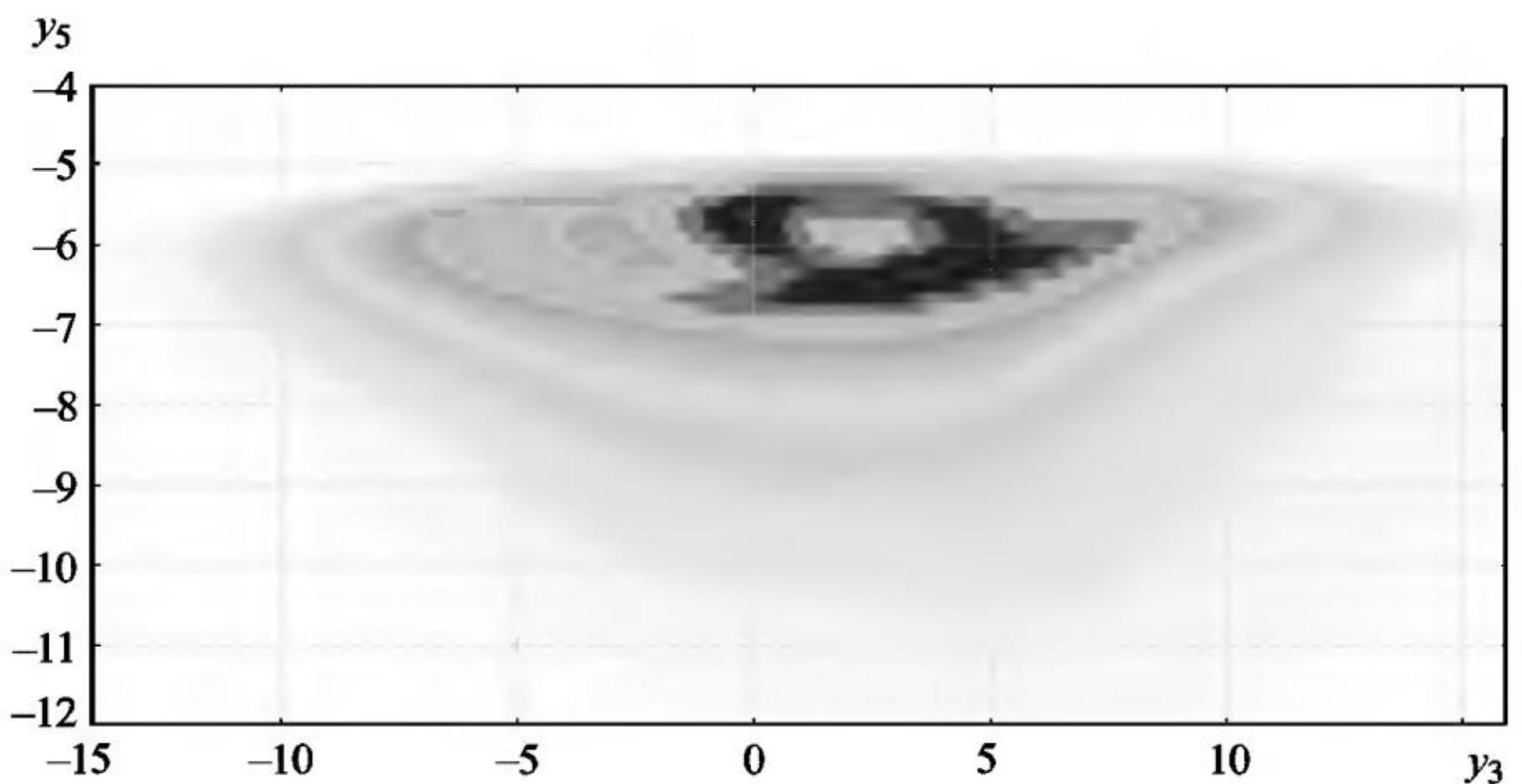


Рис. 16.5

$$\frac{d\tilde{X}_l(t)}{dt} = \tilde{V}_l(t, x), \quad \tilde{X}_l(0) = X_l, \quad l = 1, \dots, L. \quad (16.6)$$

Добавляя в уравнения (16.5) и (16.6) случайные шумы, получим систему СДУ

$$dy_l(t) = \left(-y_l(t) \frac{y_{l+1}(t) - y_{l-1}(t)}{2h_x} + \frac{1}{R} \frac{y_{l+1}(t) - 2y_l(t) + y_{l-1}(t)}{h_x^2} + F_l(t) \right) dt + \sigma_l(y_l) dw_l(t), \quad y_l(0) = 0, \quad (16.7)$$

$$dy_{L+l}(t) = \tilde{y}_l(t)dt, \quad y_{l+L}(0) = 0,01(l-1), \quad l=1, \dots, L. \quad (16.8)$$

Численные расчеты системы СДУ (16.7), (16.8) проводились на интервале интегрирования $[0, 10]$ с шагом по времени $h = 10^{-5}$, с шагом по пространству $h_x = 10^{-2}$, задавались: число Рейнольдса $Re = 100$, возмущающие силы $F_5(t) = 2\sin(2\pi t)$, $F_{95}(t) = 0,5\sin(0,5\pi t)$, значения интенсивности шумов $\sigma_5 = \sigma_{95} = 10^{-1}$ (все остальные силы и интенсивности шумов равны 0). Отметим, что поведение численного решения системы СДУ (16.7) зависит от произведения размера шага по пространству h_x на число Рейнольдса Re , а не отдельно от этих величин.

На рис. 16.6 и 16.7 приведены графики интегральной кривой компонент y_5 и y_{95} численного решения системы СДУ (16.7).

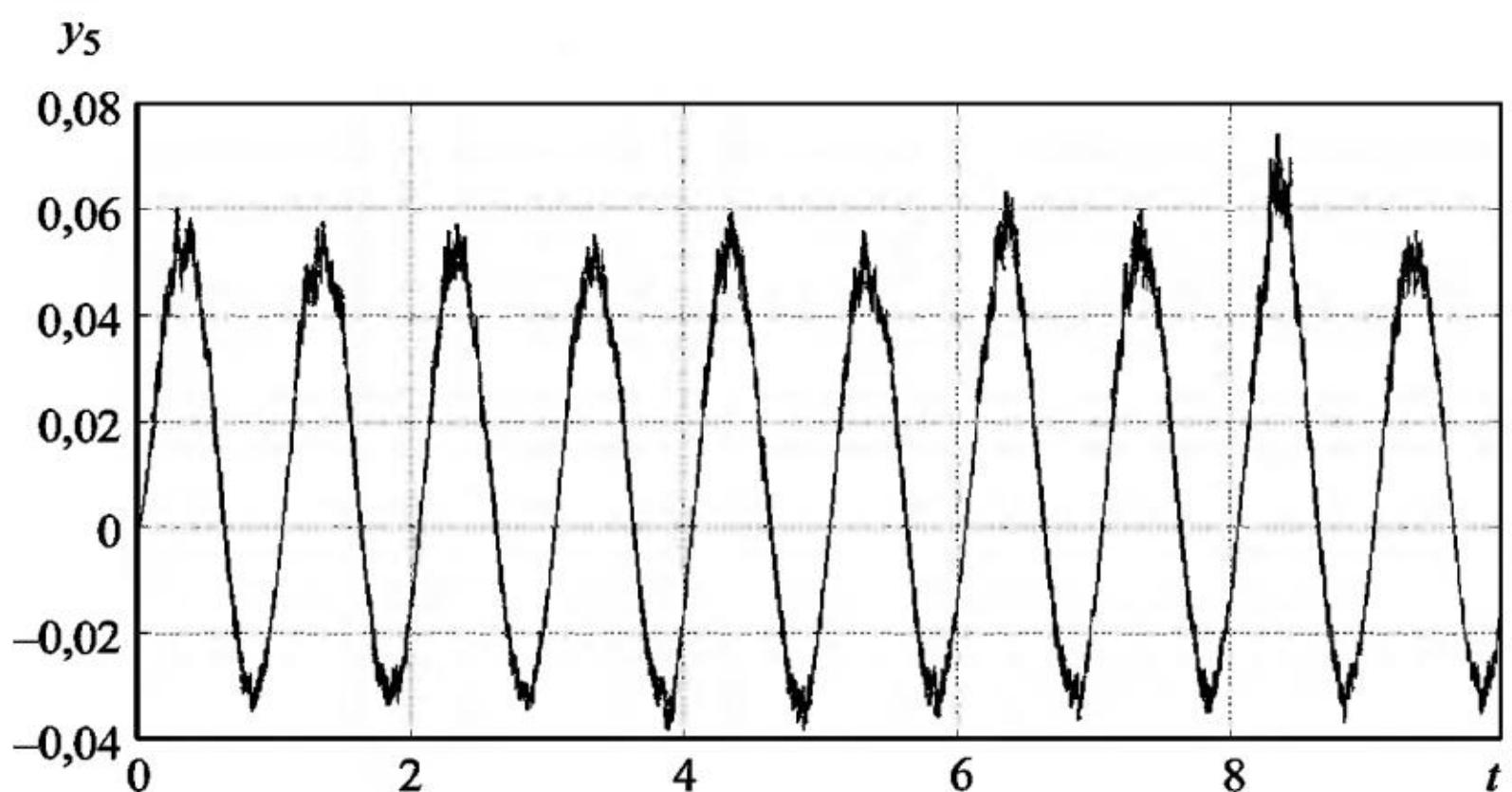


Рис. 16.6

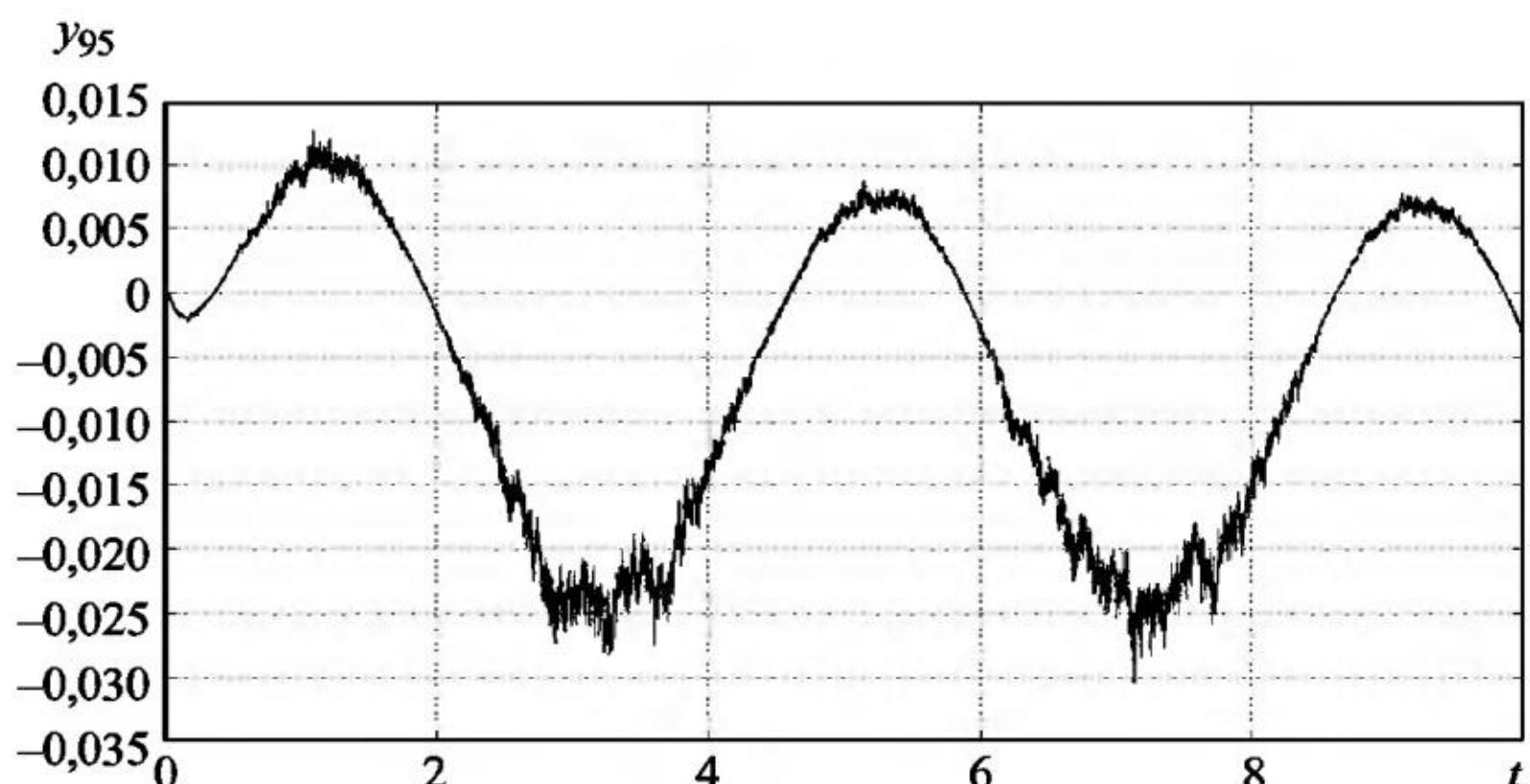


Рис. 16.7

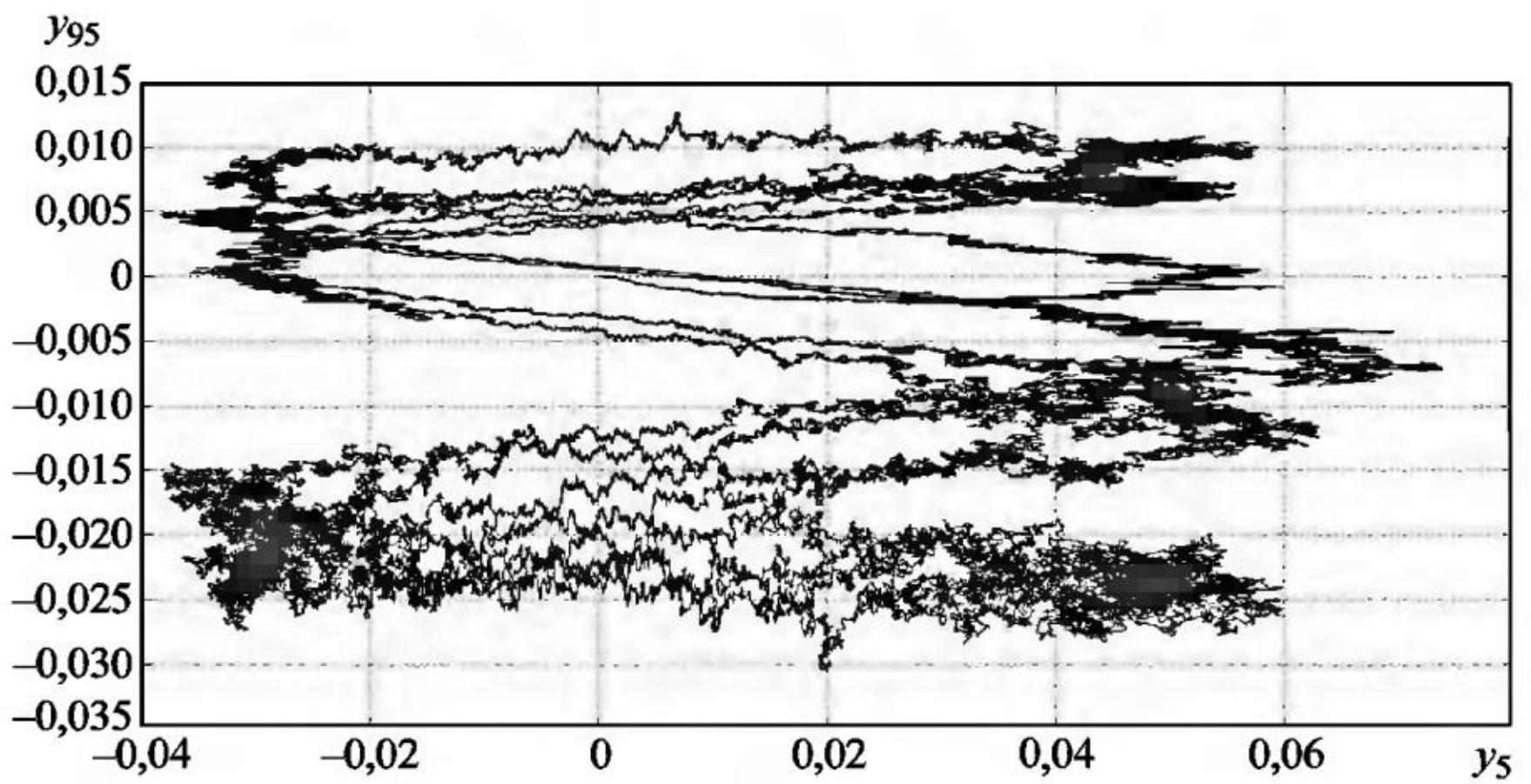


Рис. 16.8

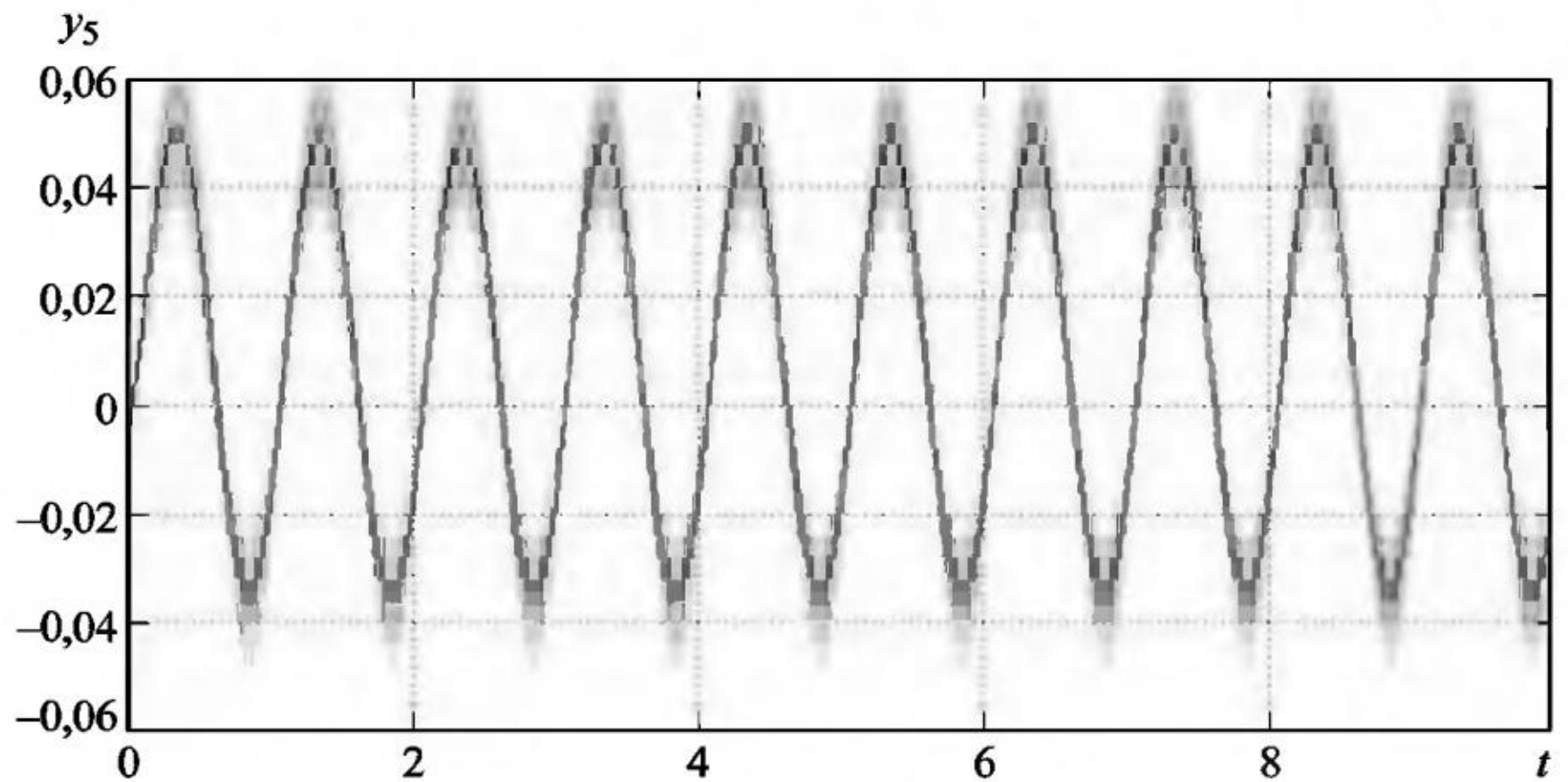


Рис. 16.9

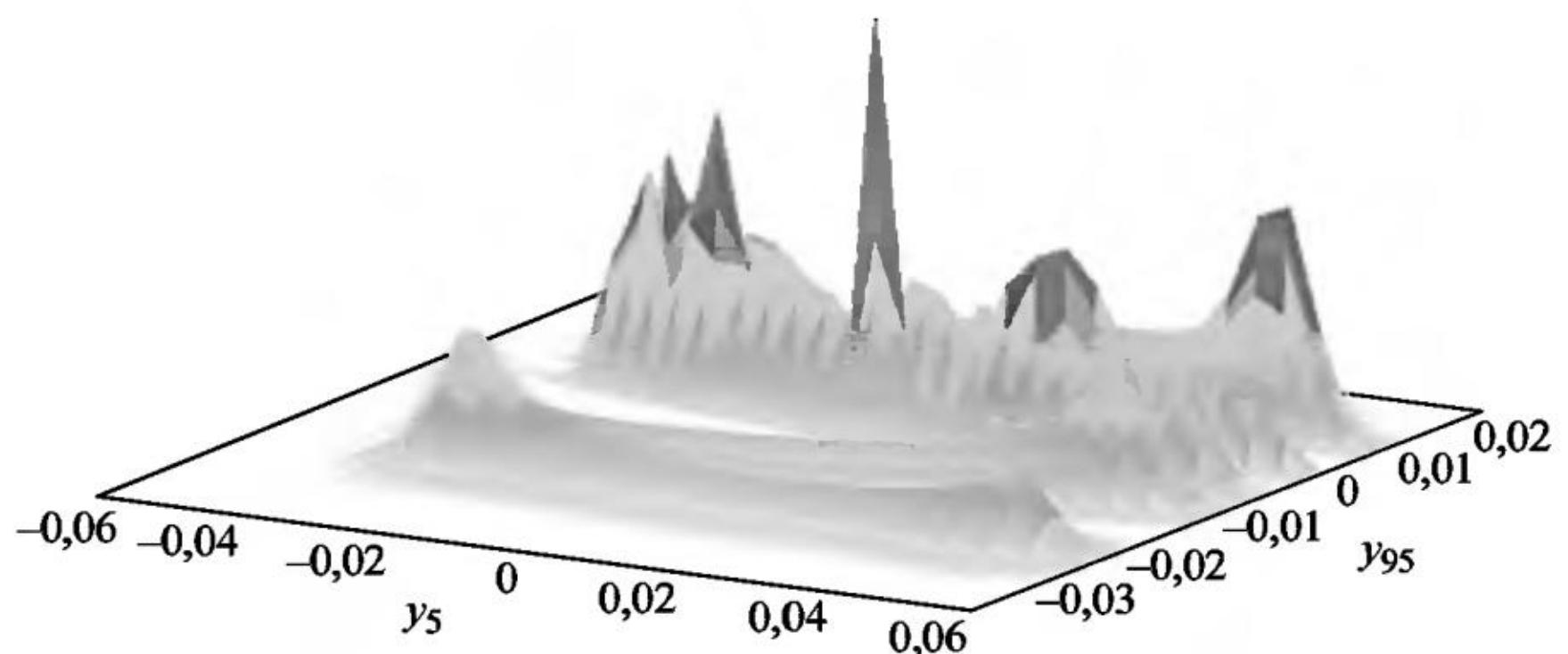


Рис. 16.10

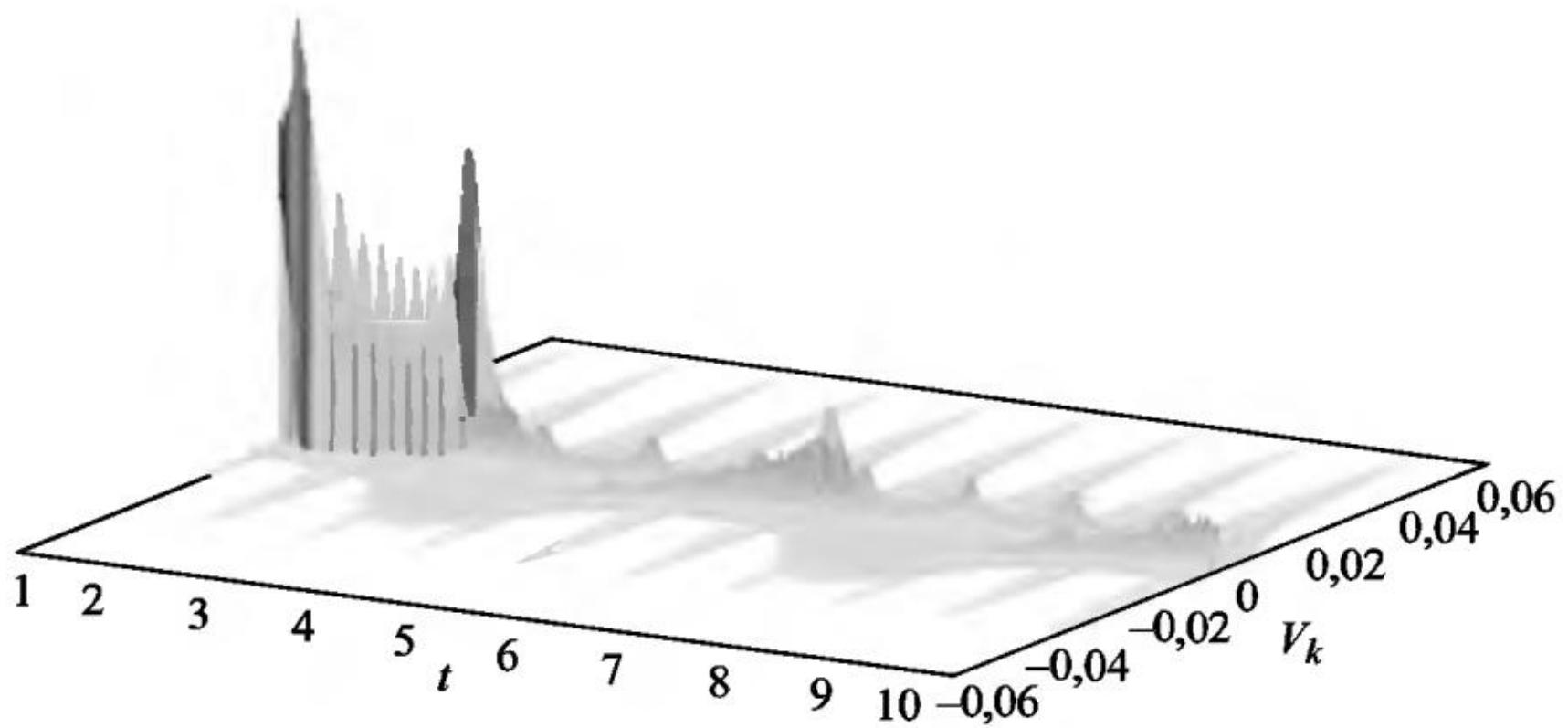


Рис. 16.11

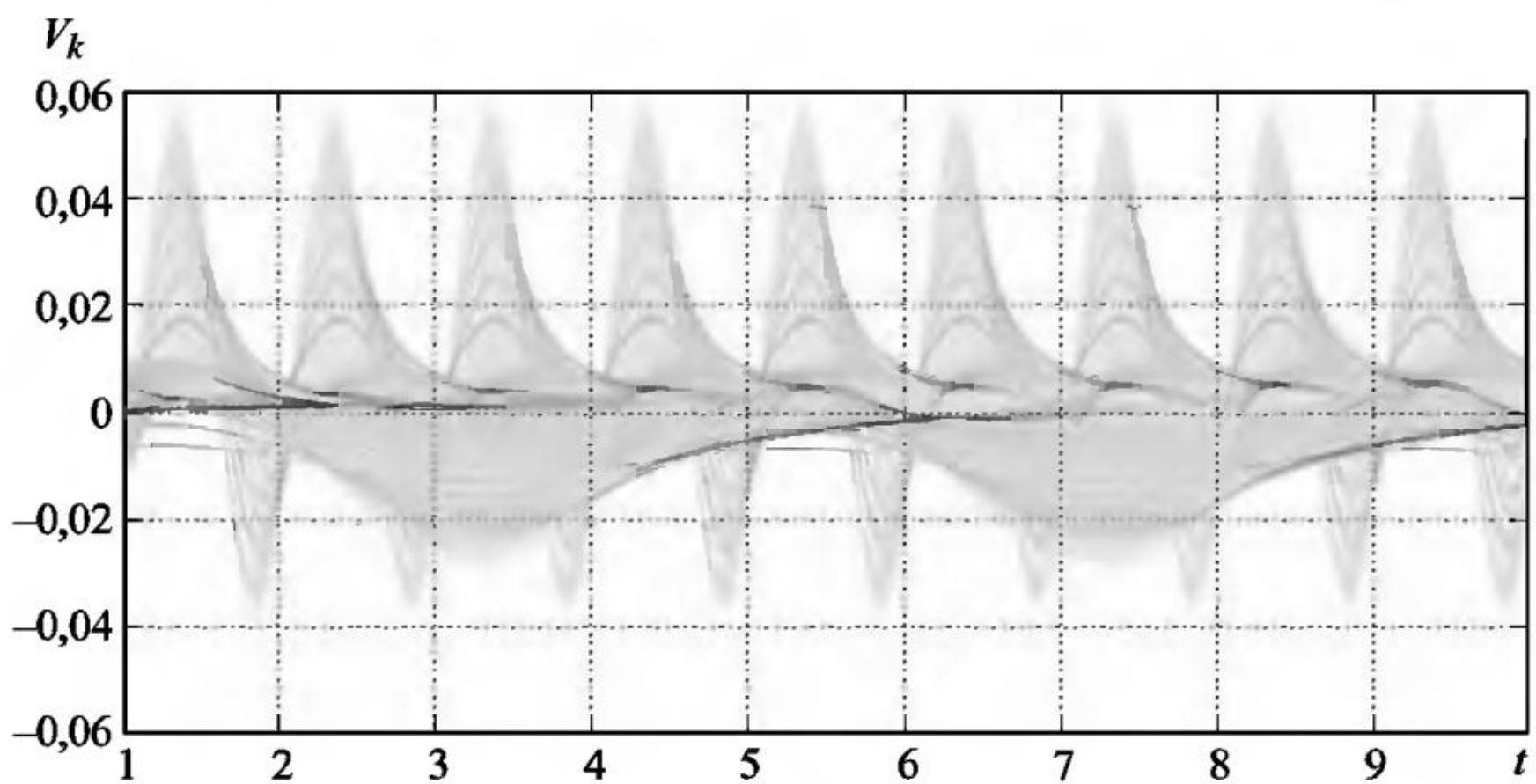


Рис. 16.12

На рис. 16.8 приведен график фазового портрета пары компонент (y_5, y_{95}) численного решения системы СДУ (16.7).

На рис. 16.9 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_5 численного решения системы СДУ (16.7). Моделировалось 10000 траекторий решения. Из графика хорошо виден идентичный характер колебаний всех сформированных траекторий процесса $y_5(t)$.

На рис. 16.10 приведен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_5, y_{95}) численного решения системы СДУ (16.7), обобщающий график на рис. 16.8. Размеры сетки ЧФП в этом примере определяются величинами скоростей частиц.

При необходимости ЧИК и ЧФП могут рассчитываться сразу по нескольким компонентам или парам компонент решений си-

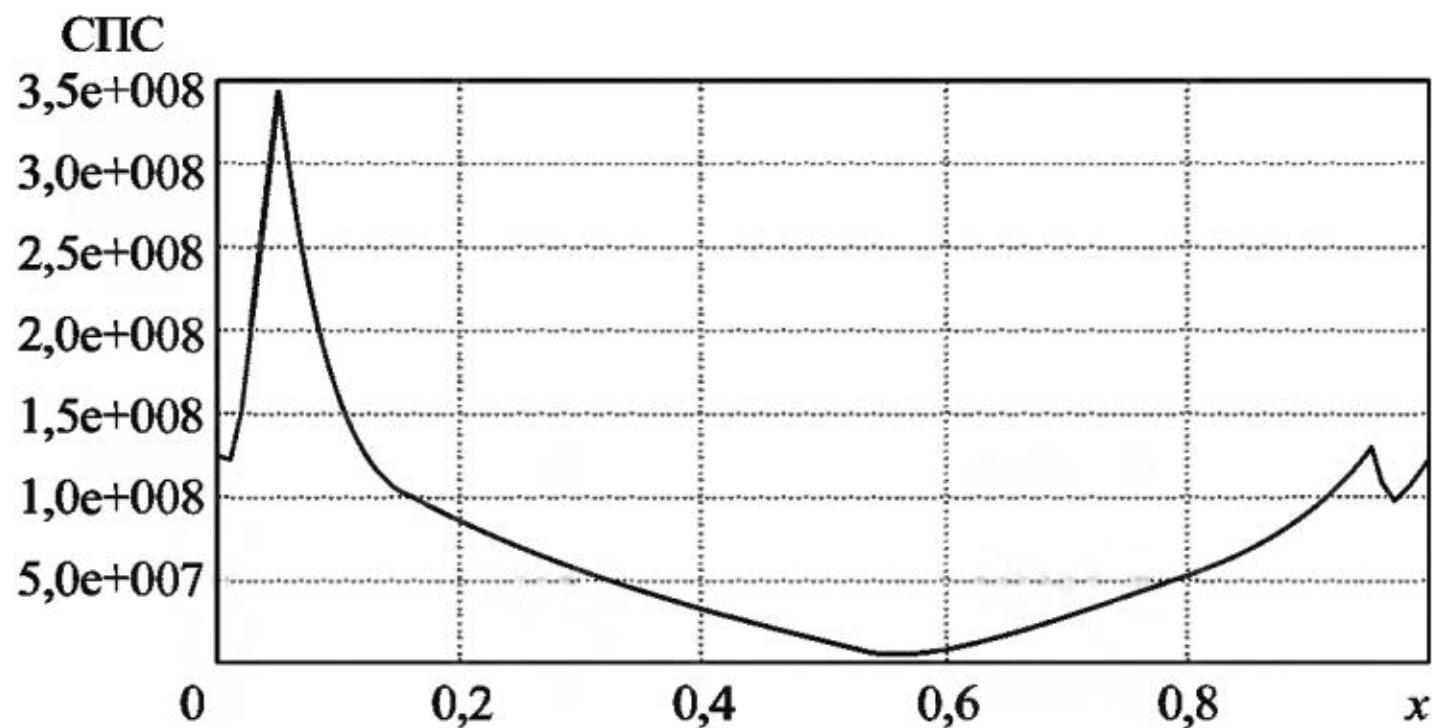


Рис. 16.13

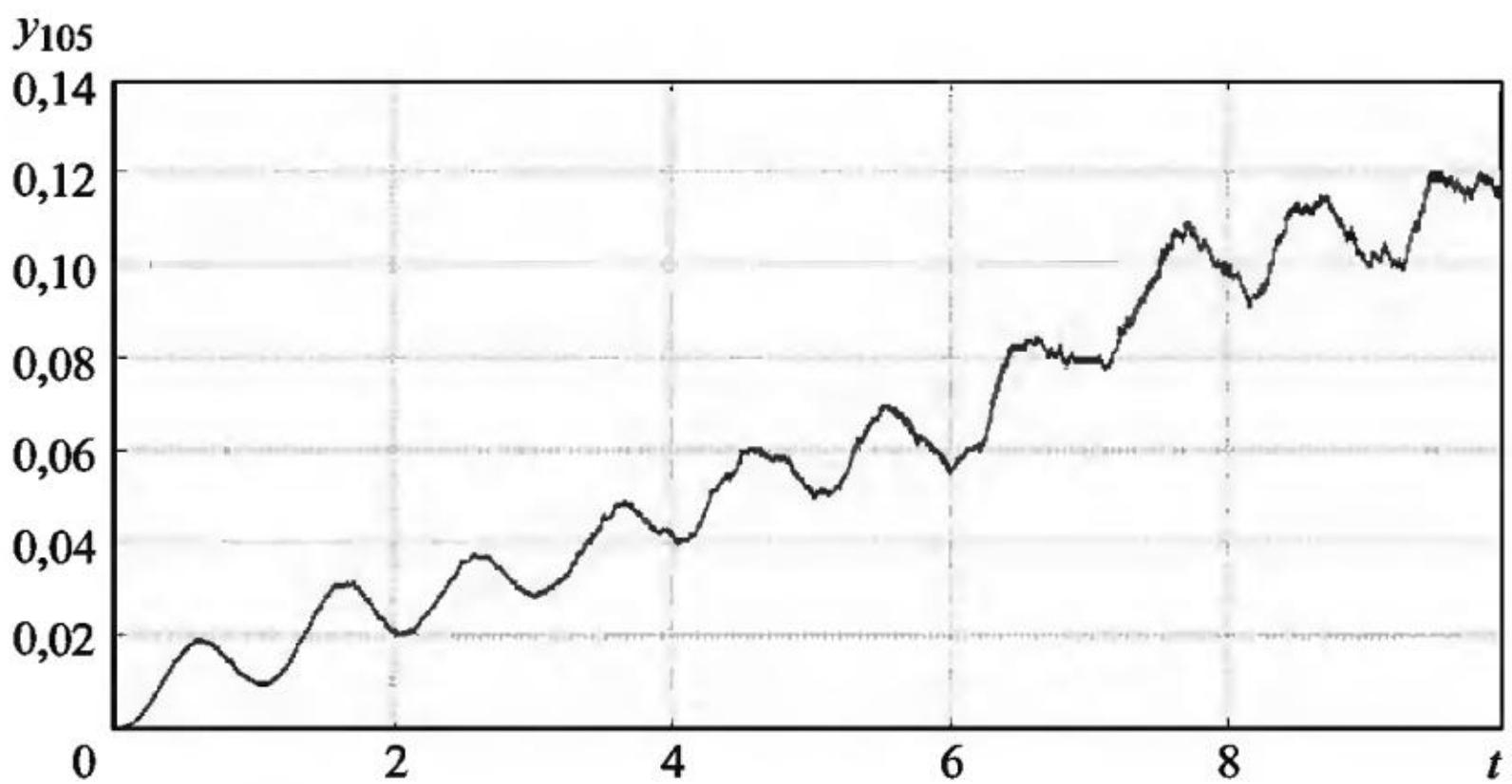


Рис. 16.14

стемы СДУ. На рис. 16.11 и 16.12 приведены графики ЧПС (частотного потока скоростей) (вид сбоку и сверху) всех 100 компонент численного решения системы СДУ (16.7). В отличие от ЧИК, в котором показывается динамика движения одной компоненты решения, ЧПС рассчитывается на статистических данных о динамике всех компонент решения системы СДУ (16.7).

Статистический портрет скоростей (СПС) представляет собой суммы модулей скоростей $V(t)$ во всех узлах сетки на $[0,1]$, причем статистика собирается по всему ансамблю смоделированных траекторий численного решения системы СДУ на каждом временном шаге на всем интервале интегрирования. На рис. 16.13 приведен график СПС численного решения системы СДУ (16.7). Как видим, наибольшие скорости движений частиц наблюдаются вблизи границ отрезка $[0, 1]$.

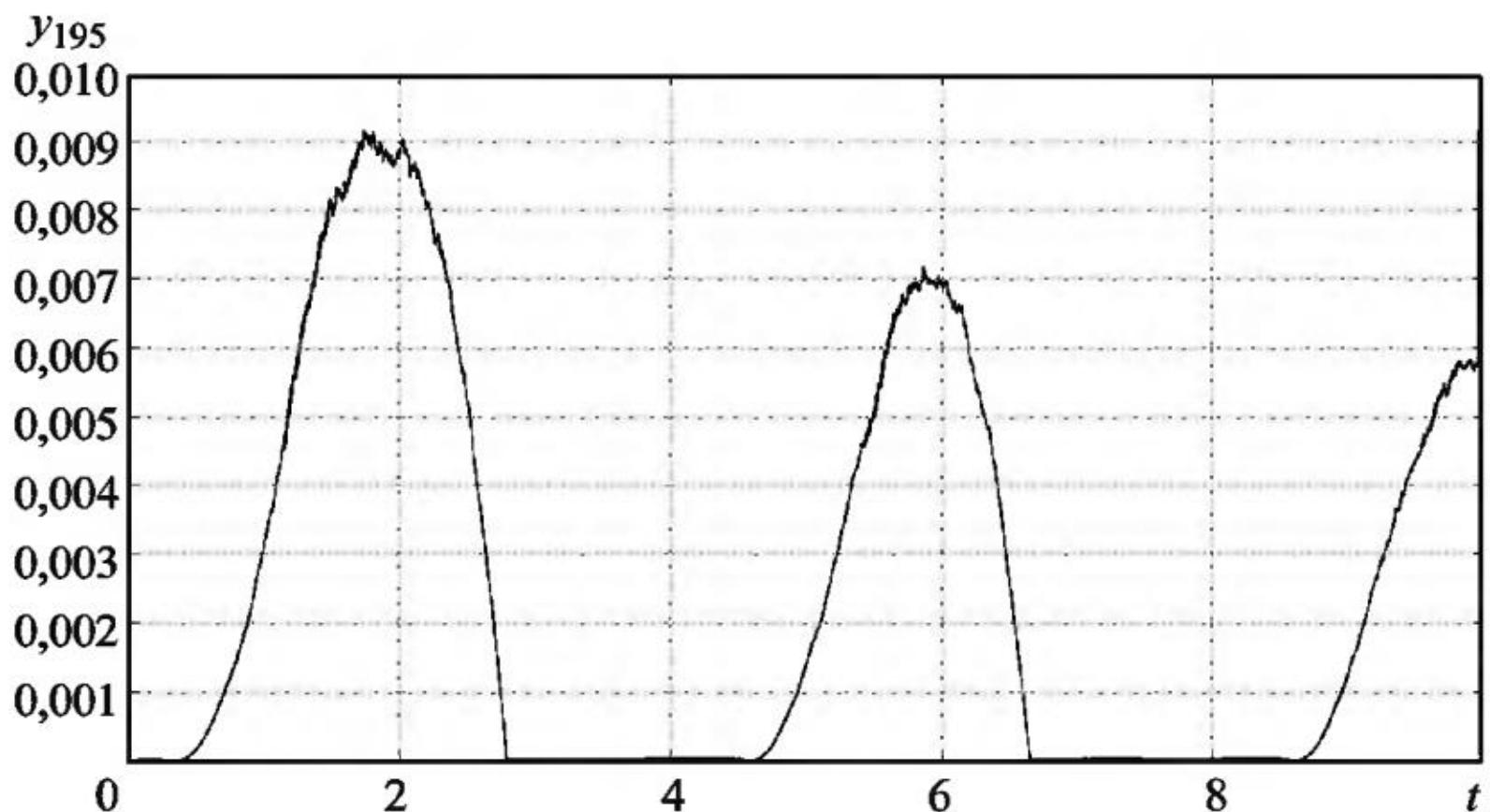


Рис. 16.15

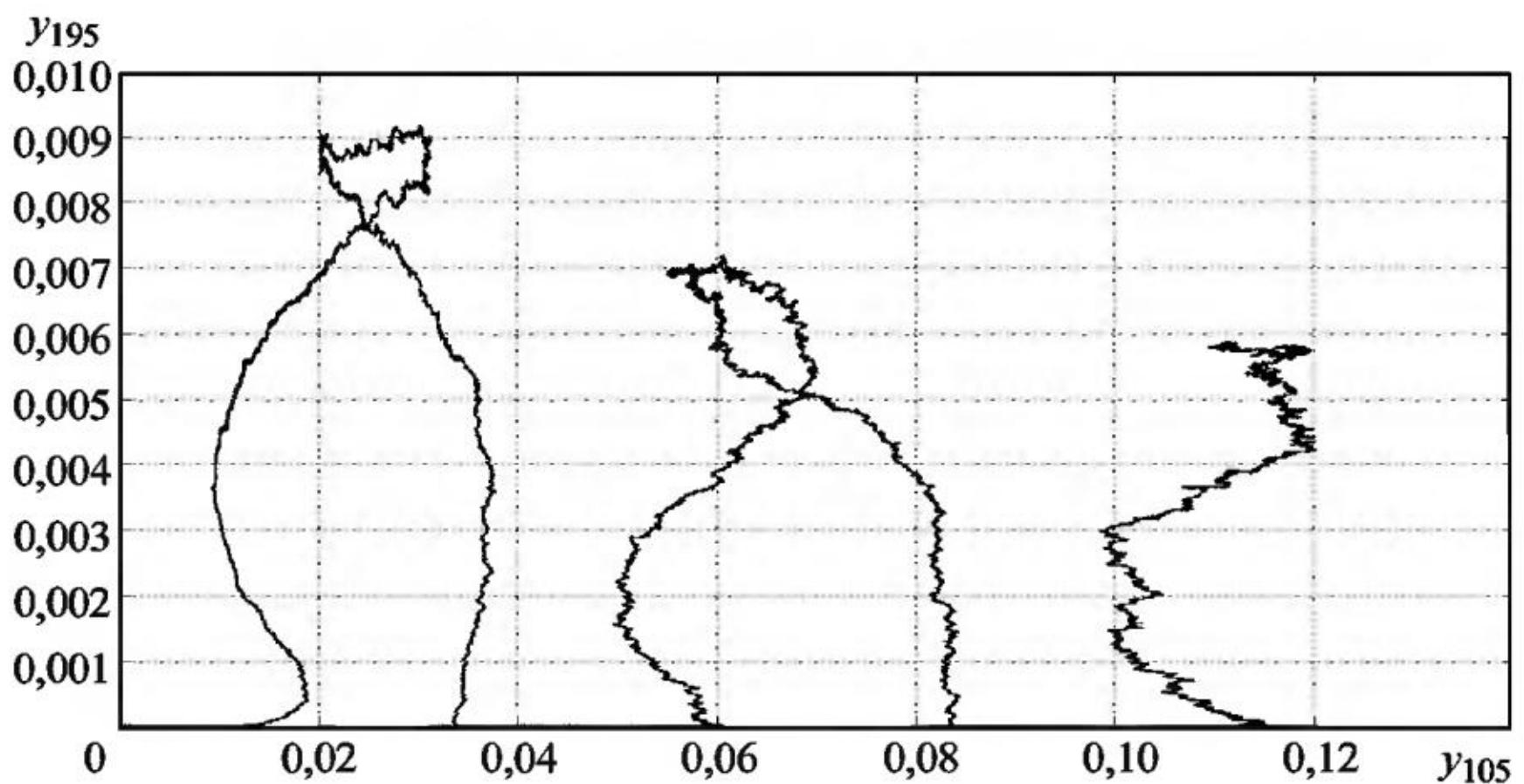


Рис. 16.16

На рис. 16.14 и 16.15 приведены графики интегральной кривой компонент y_{105} и y_{195} численного решения системы СДУ (16.7), (16.8) (компоненты определяют положение частицы внутри отрезка $[0, 1]$, выходящей из узлов $X = 0,05$ и $0,95$). Стоит обратить внимание на то, что частица, находясь в начальный момент времени в точке $X = 0,95$, затем в определенные моменты времени выходит на границу отрезка $[0, 1]$ и находится на ней случайное время.

На рис. 16.16 приведен график фазового портрета пары компонент (y_{105}, y_{195}) численного решения системы СДУ (16.7), (16.8).

На рис. 16.17 приведен график ЧИК (вид сверху) компоненты y_{105} численного решения системы СДУ (16.7), (16.8).

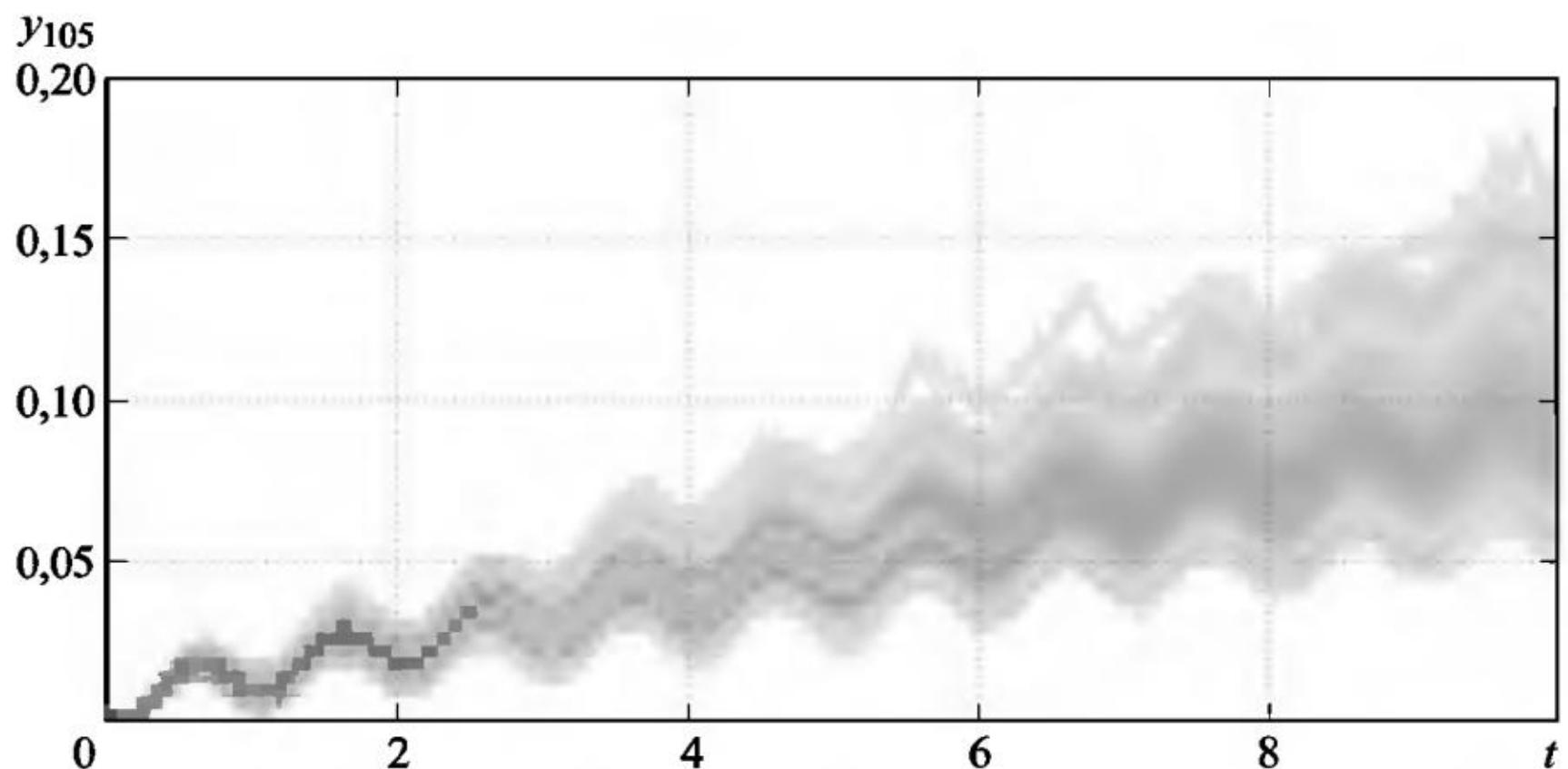


Рис. 16.17

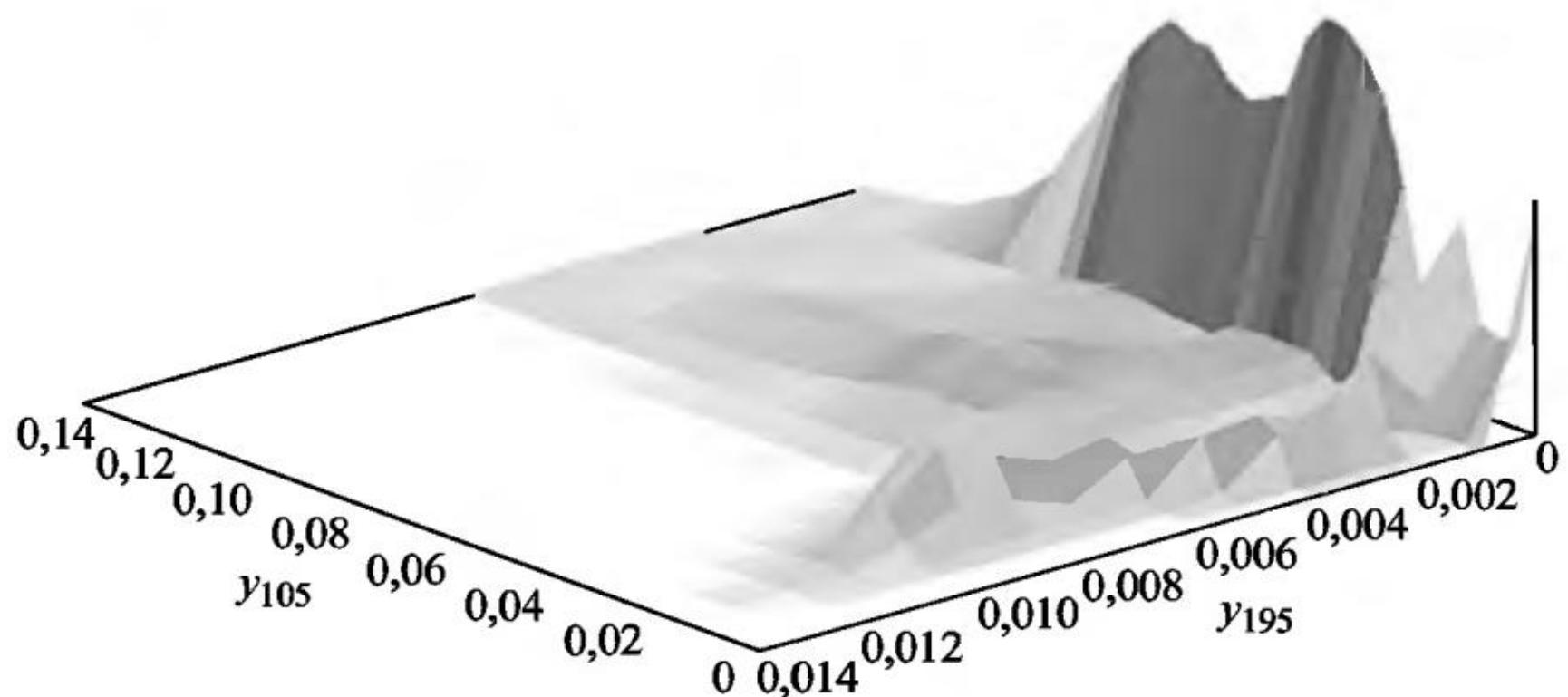


Рис. 16.18

На рис. 16.18 приведен график ЧФП (вид сбоку) пары компонент (y_{105}, y_{195}) численного решения системы СДУ (16.7), (16.8), который соответствует форме фазового портрета на рис. 16.16.

На рис. 16.19 приведен график ЧПЖ (частотный поток жидкости) (вид сверху), рассчитанный по всем 100 компонентам численного решения системы уравнений (16.8).

Вид сверху ясно показывает динамику движения потока частиц на всем интервале интегрирования. Как видим из графика на рис. 16.19, одномерный поток жидкости под влиянием граничных условий и внешних сил сжимается к середине отрезка $[0, 1]$ и осциллирует. Напомним, что наиболее темным местам на графике соответствуют наибольшие частоты нахождения частиц жидкости в ячейках сетки ЧПЖ.

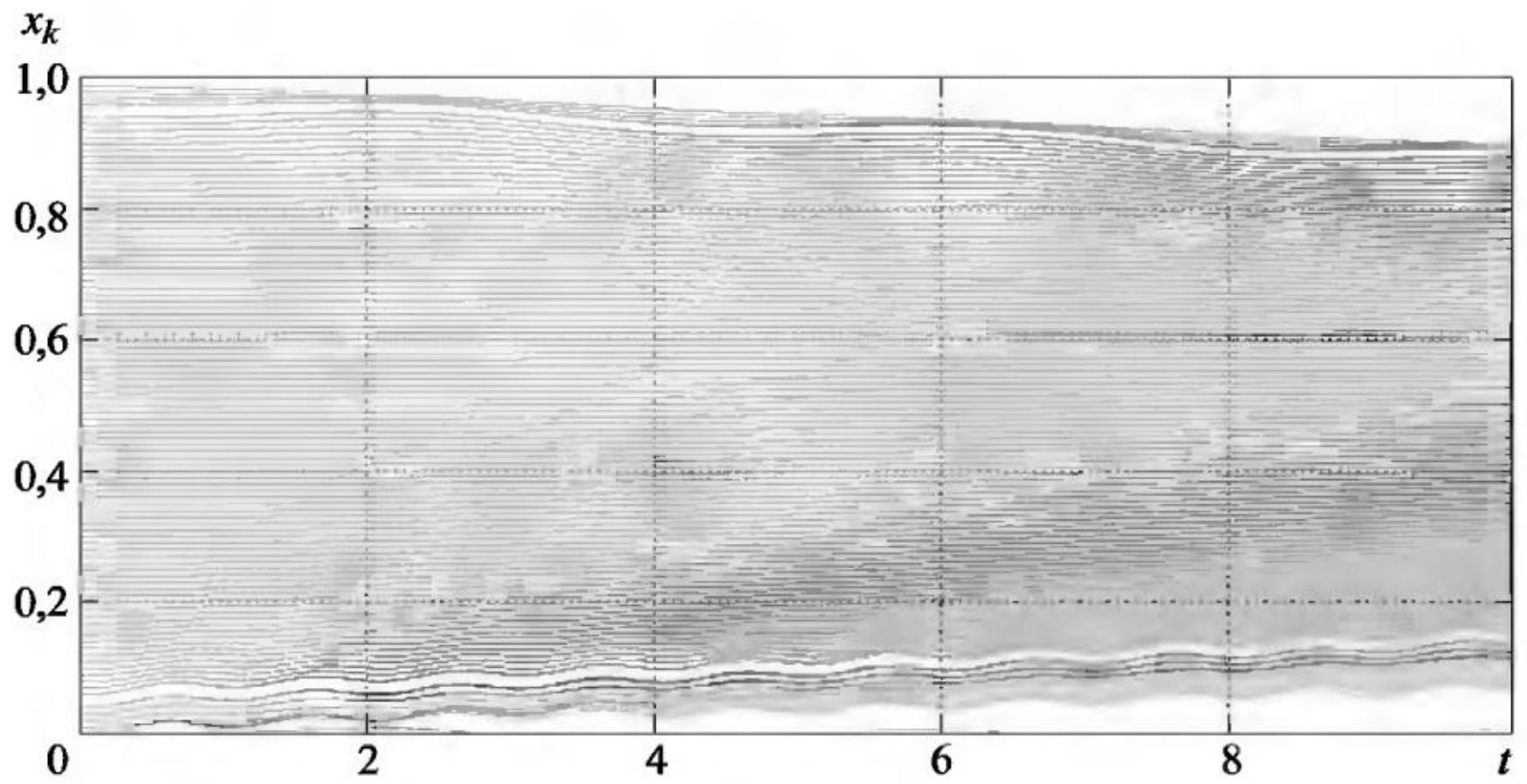


Рис. 16.19

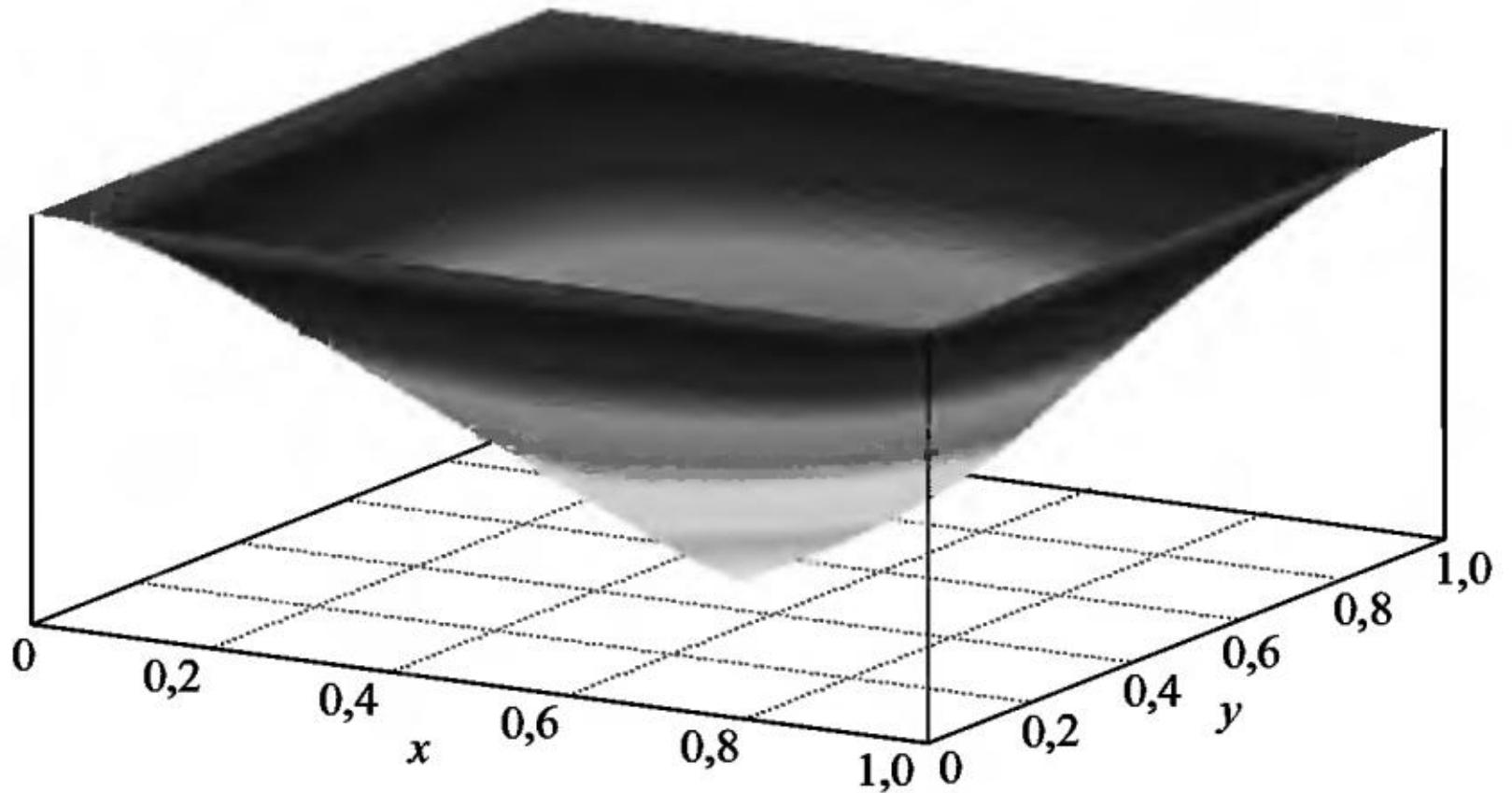


Рис. 16.20

Пример 16.3. Движение жидкости в каверне. Рассмотрим классическую модельную задачу о плоском изотермическом течении вязкой жидкости в прямоугольной полости (каверне) [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) - \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + F_x(t, x, y), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) - \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + F_y(t, x, y). \end{aligned} \quad (16.9)$$

В УНС (16.9) F_x , F_y – это поверхностные и/или объемные силы.

Если в уравнениях (16.9) провести дискретизацию производных по пространственным переменным x и y с шагами h_x и h_y , то придет к системе ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dV_{x,n,m}}{dt} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{V_{x,n+1,m} - 2V_{x,n,m} + V_{x,n-1,m}}{h_x^2} + \frac{V_{x,n,m+1} - 2V_{x,n,m} + V_{x,n,m-1}}{h_y^2} \right) - \\ &- \left(V_{x,n,m} \frac{V_{x,n+1,m} - V_{x,n-1,m}}{2h_x} + V_{y,n,m} \frac{V_{x,n,m+1} - V_{x,n,m-1}}{2h_y} \right) + f_{x,n,m}(t), \\ \frac{dV_{y,n,m}}{dt} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{V_{y,n+1,m} - 2V_{y,n,m} + V_{y,n-1,m}}{h_x^2} + \frac{V_{y,n,m+1} - 2V_{y,n,m} + V_{y,n,m-1}}{h_y^2} \right) - \\ &- \left(V_{x,n,m} \frac{V_{y,n+1,m} - V_{y,n-1,m}}{2h_x} + V_{y,n,m} \frac{V_{y,n,m+1} - V_{y,n,m-1}}{2h_y} \right) + f_{y,n,m}(t). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Здесь $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, M$, и значит, система ОДУ (16.10) содержит $5(N \times M)$ уравнений. Таким образом, при $N = M = 50$ система ОДУ содержит 12500 уравнений. Добавляя в (16.10) случайные шумы, получим систему СДУ

$$\begin{aligned} dV_{x,n,m} &= \Phi_{x,n,m} dt + \sigma_x d\vec{W}_x(t), \\ dV_{y,n,m} &= \Phi_{y,n,m} dt + \sigma_y d\vec{W}_y(t), \end{aligned} \quad (16.11)$$

где $\vec{W}_x(t)$, $\vec{W}_y(t)$ – независимые между собой векторные винеровские процессы с независимыми стандартными компонентами: $\vec{W}_x(t) = (w_{x,1}, \dots, w_{x,k_x})$, $\vec{W}_y(t) = (w_{y,1}, \dots, w_{y,k_y})$. Матрицы интенсивности шумов σ_x , σ_y могут быть как постоянными, так и зависящими от V_x , V_y . Для замыкания системы СДУ следует задать краевые условия для всех V_x , V_y . Для решения задачи Коши необходимо задать начальные условия для $V_{x,n,m}$, $V_{y,n,m}$. Как уже указывалось, система СДУ (16.11) может содержать более 10^4 уравнений, число узлов интегрирования по времени более 10^4 и число моделируемых траекторий более 10^6 , так что расчет численного решения такой системы СДУ возможен только на многопроцессорном суперкомпьютере.

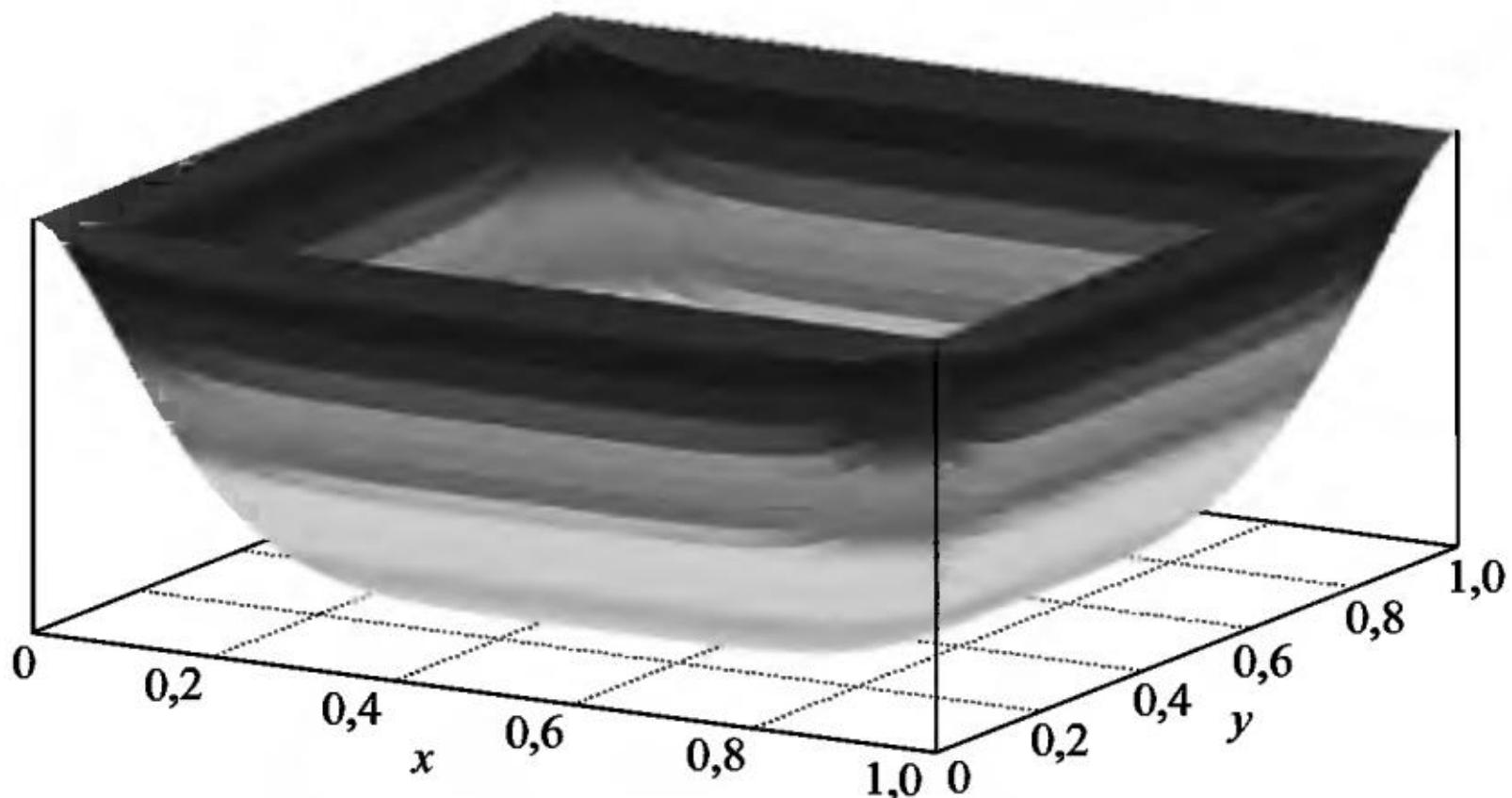


Рис. 16.21

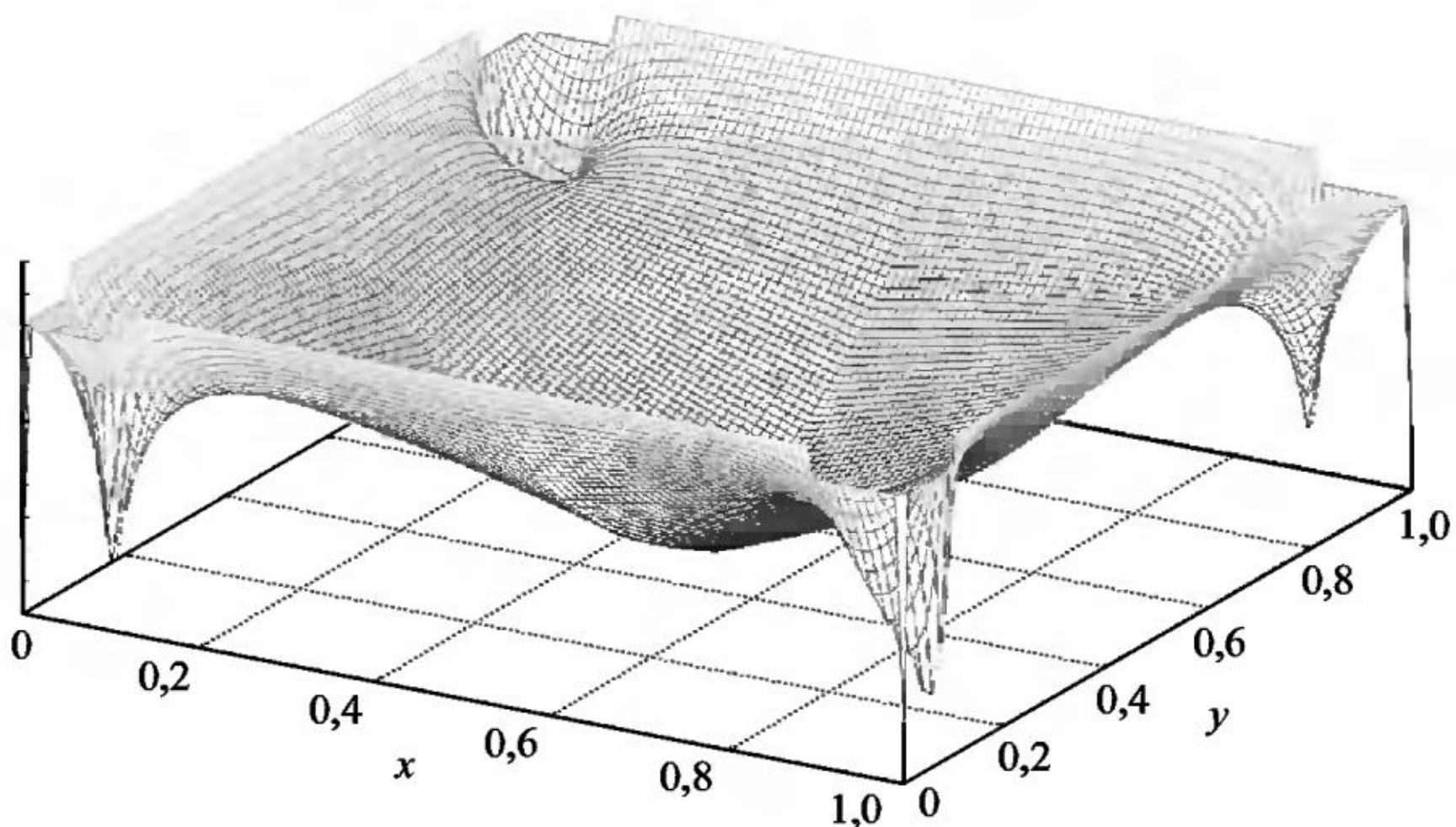


Рис. 16.22

На рис. 16.20 и 16.21 приведены графики СПС (вид сбоку), рассчитанные для разных значений числа Рейнольдса 10 и 100 при $h_x = h_y = 10^{-4}$. При расчетах СПС на сетке 100×100 моделировалось 10^6 траекторий решения системы СДУ (16.11).

На рис. 16.22 дан график СПС при других краевых условиях (нулевые скорости в углах каверны).

В настоящее время вычислительные возможности кластера НКС-30Т не позволяют провести достоверные расчеты двумерных, а тем более трехмерных, стохастических систем УНС.

17. СДУ с пуассоновской составляющей

Задача Коши для K -мерной системы СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими задается в виде [32]

$$\begin{aligned} dy(t) = & f(y, t)dt + \sigma(y, t)dw(t) + \\ & + \int_{R^K} g(y, x) v(dx, dt), \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leq t \leq t_{\text{end}}, \end{aligned} \quad (17.1)$$

где $w(t)$ – M -мерный стандартный винеровский процесс, v – пуассоновская случайная мера, определенная на $R^K \times (0, t_{\text{end}})$ с параметром интенсивности λ , независимая с $w(t)$, $f(y, t)$, $g(y, x)$, $x, y \in R^K$ – K -мерные функции, $\sigma(y, t)$ – $(K \times M)$ -мерная функция. Стохастический интеграл от пуассоновской составляющей в (17.1) определяется как сумма

$$\int_0^t \int_{R^K} g(y(\tau), x) v(dx, d\tau) = \sum_{\tau_k \leq t, \tau_k \in D_q} g(y(\tau_k), q(\tau_k)), \quad (17.2)$$

где D_q – множество моментов скачков, $q(\tau_k)$ – K -мерные векторы величин скачков. Случайные временные интервалы между моментами скачков $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $\tau_0 = 0$, имеют экспоненциальное распределение с плотностью $f_\theta(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

Для численного решения СДУ (17.1) на основе обобщенного явного метода Эйлера используется следующая схема, учитывающая скачки траекторий. Для диффузионной составляющей на интервале $(t_n, t_{n+1}]$ имеем

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) + \sqrt{h}\sigma(y_n, t_n)\xi_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (17.3)$$

где в соответствии с (2.1) h – шаг равномерной временной сетки $\{t_n\}$, ξ_{n+1} – независимые между собой стандартные нормальные случайные векторы с независимыми компонентами. Далее полагается $y_{n+1} = \tilde{y}_{n+1}$ при отсутствии скачков на указанном интервале $(t_n, t_{n+1}]$ или $y_{n+1} = y_{n+1}^{(J_n)}$ при наличии на нем J_n скачков, где $y_{n+1}^{(J_n)}$

вычисляется на основе формулы (17.2). Полагая, что моменты скачков упорядочены по возрастанию, имеем

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_{n+1}^{(i)} + g(y_{n+1}^{(i)}, \eta_{n+1}^{(i)}), \quad i = 0, \dots, J_n - 1, \quad (17.4)$$

где $y_{n+1}^{(0)} = \tilde{y}_{n+1}$, $\eta_{n+1}^{(i)}$ – векторы случайных или неслучайных величин скачков. Для случайной величины скачка задается закон распределения и предполагается ее независимость с θ_k, ξ_{n+1} .

Численная схема (17.3), (17.4) решения системы СДУ (17.1) не требует формирования для каждой моделируемой траектории отдельной временной сетки, включающей в себя моменты скачков $\{\tau_k\}$. Заметим, что в частном случае при наличии в (17.1) только пуассоновской составляющей, т. е. при $f(y, t) \equiv 0$, $\sigma(y, t) \equiv 0$, данная схема определяет точное решение СДУ на заданной временной сетке.

Рассмотрим скалярное линейное СДУ Ито с мультипликативным шумом, являющееся частным случаем системы (17.1):

$$dy(t) = y(t)(\alpha dt + \sigma dw(t) + \int_R g(x) v(dx, dt)), \quad y(0) = y_0 > 0, \quad (17.5)$$

где σ, α – вещественные параметры, $g(x)$ – некоторая функция. Формула (17.2) в данном случае принимает вид

$$\int_0^t y(\tau) \int_R g(x) v(dx, d\tau) = \sum_{\tau_k \leq t, \tau_k \in D_q} y(\tau_k) g(\eta_k), \quad (17.6)$$

где $\{\eta_k\}$ – совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин скачков. Используя известное решение СДУ без пуассоновской составляющей (1.4) и формулу (17.6), точное решение СДУ (17.5) запишем в следующем виде:

$$y(t) = y_0 \exp((\alpha - \sigma^2 / 2)t + \sigma w(t)) \prod_{i=0}^{N_t} (1 + g(\eta_i)), \quad (17.7)$$

где N_t — случайное число скачков на интервале $(0, t]$ (процесс Пуассона) с вероятностью появления k скачков

$$P\{N_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17.8)$$

При $i = 0$ в (17.7) формально задается $g(\eta_0) = 0$.

Для анализа точности оценок моментов решения СДУ (17.7) потребуется общая формула для L -го момента $Ey^L(t)$. Учитывая

взаимную независимость случайных величин $\{\eta_k\}$, N_t и винеровского процесса $y(t)$, с использованием формулы (17.8) получаем

$$\begin{aligned} E y^L(t) &= y_0^L e^{L(\alpha - \sigma^2/2)t} E[e^{L\sigma w(t)}] e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \prod_{i=0}^k E[(1+g(\eta_i))^L] = \\ &= y_0^L \exp[(L\alpha + L(L-1)\sigma^2/2 + \lambda(\mu_L - 1))t], \end{aligned} \quad (17.9)$$

где $\mu_L = E(1+g(\eta))^L$, $Ee^{L\sigma w(t)} = e^{L^2\sigma^2 t/2}$. Далее, задавая моменты $\mu_{gL} = Eg^L(\eta)$, из (17.9) получаем выражения для математического ожидания $m_y(t)$ и дисперсии $Dy(t)$ случайного процесса $y(t)$:

$$m_y(t) = E y(t) = y_0 e^{(\alpha + \lambda \mu_{gL})t}, \quad (17.10)$$

$$Dy(t) = E y^2(t) - m_y^2(t) = m_y^2(t) (e^{(\sigma^2 + \lambda \mu_{gL})t} - 1). \quad (17.11)$$

В формулах (17.10), (17.11) имеем $\mu_{g1} = \mu_1 - 1$, $\mu_{g2} = \mu_2 - 2\mu_1 + 1$, откуда следует, что СДУ (17.5), устойчивое в среднеквадратичном при $\lambda = 0$, $\alpha < \sigma^2/2$, становится неустойчивым при $\alpha > (-\sigma^2 + \lambda(1 - \mu_2))/2$ или $\alpha > \lambda(1 - \mu_1)$.

Оценки математического ожидания $\hat{m}_y(t)$ и дисперсии $\hat{D}_y(t)$ случайного процесса $y(t)$ вычисляются на основе ансамбля из N_{tr} траекторий решения СДУ (17.5) стандартным способом (при вычислении оценки дисперсии используется точное математическое ожидание согласно (17.10)). Точность оценки $\hat{m}_y(t)$ определяется ее среднеквадратичным отклонением

$$\sigma_{\hat{m}_y}(t) = \sqrt{Dy(t)/N_{tr}}, \quad (17.12)$$

где $Dy(t)$ определяется согласно (17.11). При анализе оценки математического ожидания иногда вместо (17.12) удобнее использовать относительную ошибку оценки

$$\varepsilon_{\hat{m}_y}(t) = \sigma_{\hat{m}_y}(t)/m_y(t) = \sqrt{(e^{(\sigma^2 + \lambda \mu_{gL})t} - 1)/N_{tr}},$$

которая не зависит от y_0 , α , μ_{gL} . Из последней формулы можно оценить размер ансамбля траекторий N_{tr} , необходимый для достижения заданной точности оценки $\varepsilon = \varepsilon_{\hat{m}_y}(t_{end})$ в конце интервала интегрирования:

$$N_{tr} \approx (e^{(\sigma^2 + \lambda \mu_{gL})t_{end}} - 1)/\varepsilon^2. \quad (17.13)$$

Моменты процесса (17.7) согласно (17.9) являются положительными функциями (при $y_0 > 0$), однако траектории решения СДУ (17.7) могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, что невозможно при наличии в СДУ только винеровской составляющей. Далее будем рассматривать случай $y(t) > 0$ для всех t , при этом данный случайный процесс будет являться геометрическим броуновским движением со скачками. Для выполнения условия $1 + g(x) > 0$ целесообразно задать в СДУ (17.5) функцию амплитуд скачков в виде $g(x) = e^x - 1$, при этом случайный процесс (17.7) примет вид

$$y(t) = y_0 \exp((\alpha - \sigma^2 / 2)t + \sigma w(t) + \sum_{i=0}^{N_T} \eta_i), \quad \eta_0 = 0. \quad (17.14)$$

При данном выборе функции $g(x)$ из СДУ (17.5) на основе формулы Ито для случайного процесса $z(t) = \ln y(t)$ получается простейшее линейное СДУ

$$dz(t) = (\alpha - \sigma^2 / 2)dt + \sigma dw(t) + \int_R x v(dx, dt), \quad z(0) = \ln y_0.$$

Численные эксперименты в примерах 17.1–17.4 проводились путем статистического моделирования траекторий решения скалярного СДУ (17.5) на основе численной схемы решения (17.3), (17.4), которая применительно к данному СДУ имеет вид

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n (1 + \alpha h + \sigma \sqrt{h} \xi_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (17.15)$$

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_{n+1}^{(i)} \exp(\eta_{n+1}^{(i)}), \quad i = 0, \dots, J_n - 1. \quad (17.16)$$

Как следует из (17.15), (17.16), численное решение СДУ в конце интервала интегрирования t_{end} можно представить в виде

$$y_c(t_{\text{end}}) = \tilde{y}(t_{\text{end}}) \exp\left(\sum_{i=0}^{N_T} \eta_i\right), \quad \eta_0 = 0,$$

где диффузионная составляющая $\tilde{y}(t_{\text{end}})$ вычисляется в соответствии со схемой Эйлера (17.15), если в ней заменить y_n на \tilde{y}_n , $n \geq 1$, а второй сомножитель есть пуассоновская составляющая точного решения (17.14). Поэтому схема (17.15), (17.16) решения СДУ (17.5) имеет тот же порядок сходимости, что и схема Эйлера решения СДУ без пуассоновской составляющей.

При использовании для диффузионной составляющей вместо (17.15) точной рекуррентной формулы

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n \exp((\alpha - \sigma^2 / 2)h + \sigma\sqrt{h}\xi_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (17.17)$$

вся схема решения (17.16), (17.17) данного СДУ также является точной, что позволяет моделировать траектории с произвольно большим размером шага вплоть до $h = t_{\text{end}}$.

Если случайные величины скачков η_k задаются нормальными $\eta_k \in N(m_\eta, \sigma_\eta^2)$, то при этом $\mu_L = Ee^{L\eta_k} = e^{\frac{Lm_\eta + L^2\sigma_\eta^2/2}{\eta}}$ и формулы (17.10), (17.11) принимают вид

$$m_y(t) = y_0 \exp\left(\left(\alpha + \lambda(e^{\frac{m_\eta + \sigma_\eta^2/2}{\eta}} - 1)\right)t\right), \quad (17.18)$$

$$Dy(t) = y_0^2 \exp\left(\left(2\alpha + \sigma^2 + \lambda(e^{\frac{2(m_\eta + \sigma_\eta^2)}{\eta}} - 1)\right)t\right) - m_y^2(t). \quad (17.19)$$

Ниже в примерах 17.1–17.5 везде задается $y_0 = 1$, интервал интегрирования длины $t_{\text{end}} = 10$, в примерах 17.2–17.5 задается $m_\eta = 0$. Математическое ожидание $m_y(t)$ и дисперсия $Dy(t)$ решения СДУ (17.5) вычисляются соответственно по формулам (17.18), (17.19). При моделировании траекторий решения СДУ по точной схеме (17.16), (17.17) полученные оценки математического ожидания и дисперсии решения обозначаются как $\hat{m}_y(t)$ и $\hat{Dy}(t)$, а при моделировании по разностной схеме (17.15), (17.16) – как $\tilde{m}_y(t)$ и $\tilde{Dy}(t)$ соответственно. Среднеквадратичное отклонение оценки математического ожидания $\sigma_{\hat{m}_y}(t)$ вычисляется по формуле (17.12), а вычисление среднеквадратичного отклонения оценки дисперсии $\sigma_{\hat{Dy}}(t)$ основано на формуле для произвольного момента решения СДУ (17.9).

Пример 17.1. Исследуется зависимость точности оценок математического ожидания решения СДУ (17.5) от размера ансамбля моделируемых траекторий в случае, когда в СДУ присутствует только пуассоновская составляющая ($\alpha = \sigma = 0$), $\lambda = 1$, величина скачков постоянная $g(\eta) = 0,3$ (формально $\eta = m_\eta = \ln 1,3$, $\sigma_\eta = 0$). На рис. 17.1 приведены графики одной траектории решения СДУ и двух оценок математического ожидания $\hat{m}_y(t)$. При $N_{\text{tr}} = 100$ в конце интервала интегрирования имеем $\hat{m}_y = 19,0318$, тогда как $m_y = 20,0855$, $\sigma_{\hat{m}_y} = 2,43$. При $N_{\text{tr}} = 10^6$ оценка $\hat{m}_y(t)$ совпадает с точностью до трех значащих цифр со значением $m_y(t)$. В конце интервала интегрирования имеем $\hat{m}_y = 20,0786$, $\sigma_{\hat{m}_y} = 0,0243$. Та-

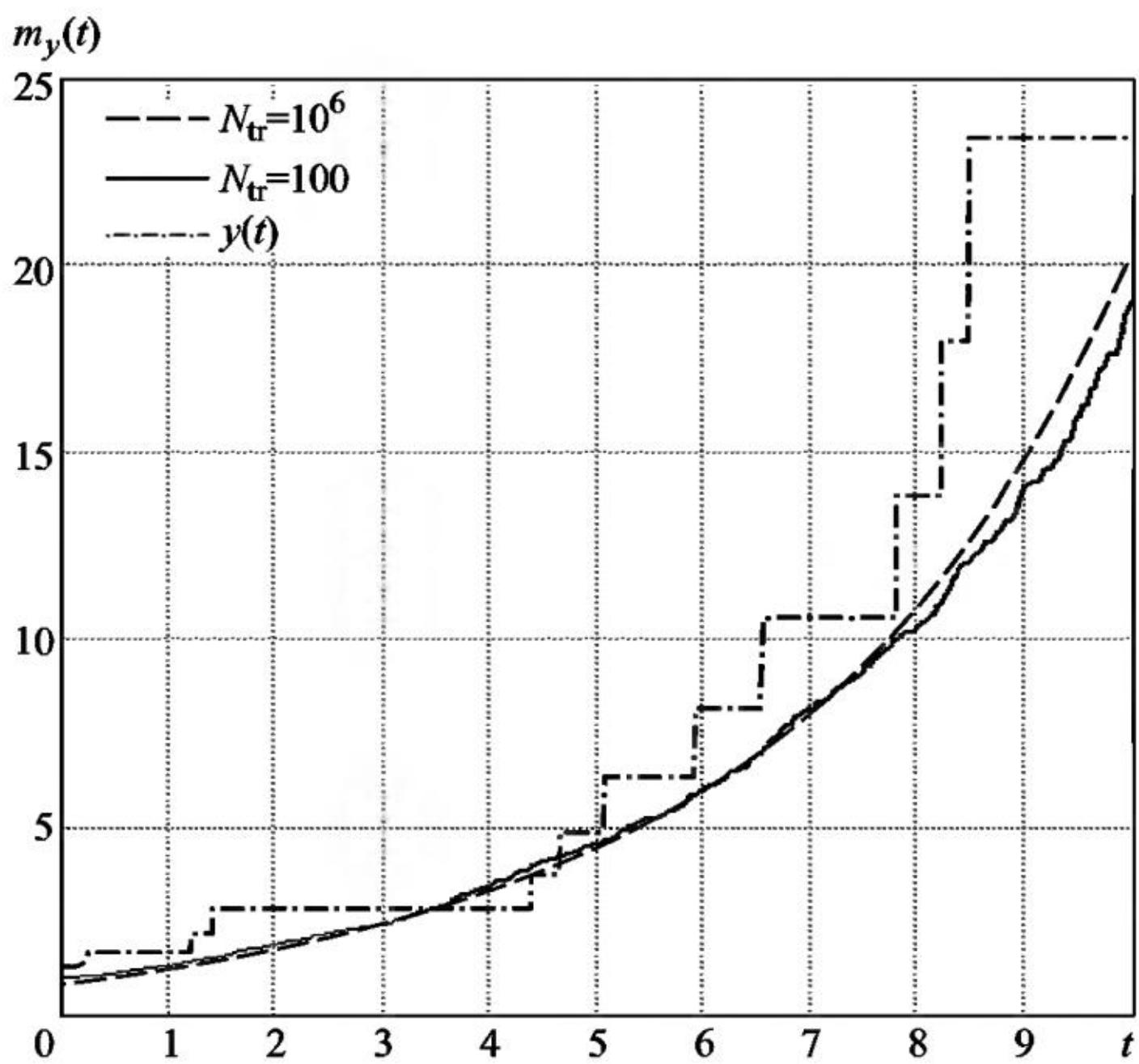


Рис. 17.1

ким образом, уменьшение ошибки оценки в 100 раз потребует, как и следует из формулы (17.12), увеличения размера ансамбля траекторий в 10^4 раз. Для оценки дисперсии при $N_{\text{tr}} = 10^6$ имеем $\hat{D}y = 582,27$, $Dy = 588,85$, $\sigma_{\hat{D}y} = 10,195$. Результаты в конце интервала t_{end} одинаковы при любом размере шага интегрирования.

Пример 17.2. Исследуется зависимость точности оценок математического ожидания и дисперсии решения СДУ (17.5) с винеровской и пуассоновской составляющими от величины шага интегрирования разностной схемы и размера ансамбля моделируемых траекторий. Задавались следующие значения параметров: $\alpha = 0,2$, $\sigma = 0,15$, $\lambda = 1$, $\sigma_\eta = 0,35$. На рис. 17.2 приведены графики одной траектории точного решения СДУ и двух оценок математического ожидания $\tilde{m}_y(t)$ решения СДУ. В варианте с низкой точностью оценки задавались количество шагов $N_h = t_{\text{end}}/h = 100$ и траекторий $N_{\text{tr}} = 100$, в конце интервала интегрирования получено $\tilde{m}_y = 11,143$ при точном значении математического ожидания $m_y = 13,89663$.

В варианте с высокой точностью оценки $N_h = 500$ и $N_{\text{tr}} = 10^4$ график оценки $\tilde{m}_y(t)$ визуально совпадает с графиком точного математического ожидания $m_y(t)$. В конце интервала интегрирования имеем $\tilde{m}_y = 13,930$, оценку по точной схеме $m_y = 13,985$, средне-

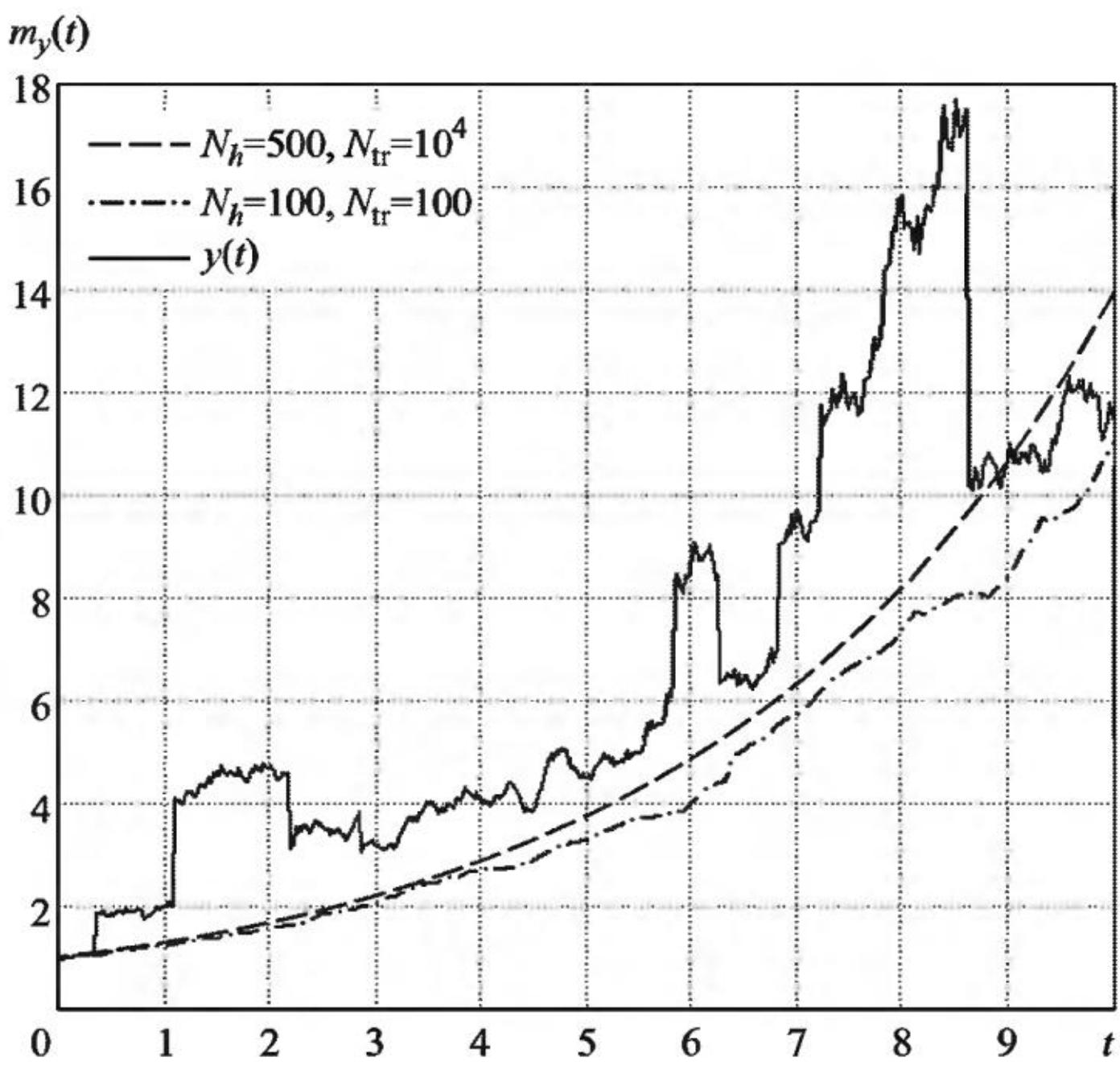


Рис. 17.2

квадратичное отклонение оценки $\sigma_{\hat{m}_y} = 0,301$. Трудоемкость вычислений в варианте с высокой точностью увеличивается по сравнению с вариантом с низкой точностью в 500 раз.

На рис. 17.3 приведены графики оценок дисперсии $\tilde{D}y(t)$ решения СДУ (17.5). При $N_{tr} \leq 10^4$ точность оценки дисперсии остается низкой при любом размере шага интегрирования разностной схемы и даже при замене ее на точную схему решения СДУ. В варианте с высокой точностью оценки при $N_h = 500, N_{tr} = 10^7$ в конце интервала интегрирования имеем $\tilde{D}y = 891,05, \hat{D}y = 900,06, D_y = 904,85, \sigma_{\hat{D}y} = 139,50$. Заметим, что при моделировании по точной схеме с одним шагом $h = t_{end}$ и $N_{tr} = 10^9$ имеем $m_y = 13,89754, \sigma_{\hat{m}_y} = 0,00095, \hat{D}y = 906,26, \sigma_{\hat{D}y} = 13,95$.

Пример 17.3. Исследуется зависимость точности оценок математического ожидания решения СДУ (17.5) от величины параметра λ . Задавались следующие значения параметров СДУ: $\alpha = 0,2, \sigma = 0,15, \sigma_{\eta} = 0,35$, число шагов интегрирования разностной схемы $N_h = 500$. На рис. 17.4 приведены графики оценок $\tilde{m}_y(t)$ для двух значений параметра $\lambda = 1$ и 3. Вариант с $\lambda = 1, N_{tr} = 10^4$ тот же, что и в примере 17.2, относительная ошибка оценки в конце интервала интегрирования $\varepsilon_{\hat{m}_y} = \sigma_{\hat{m}_y}/m_y = 0,0216$. Однако при

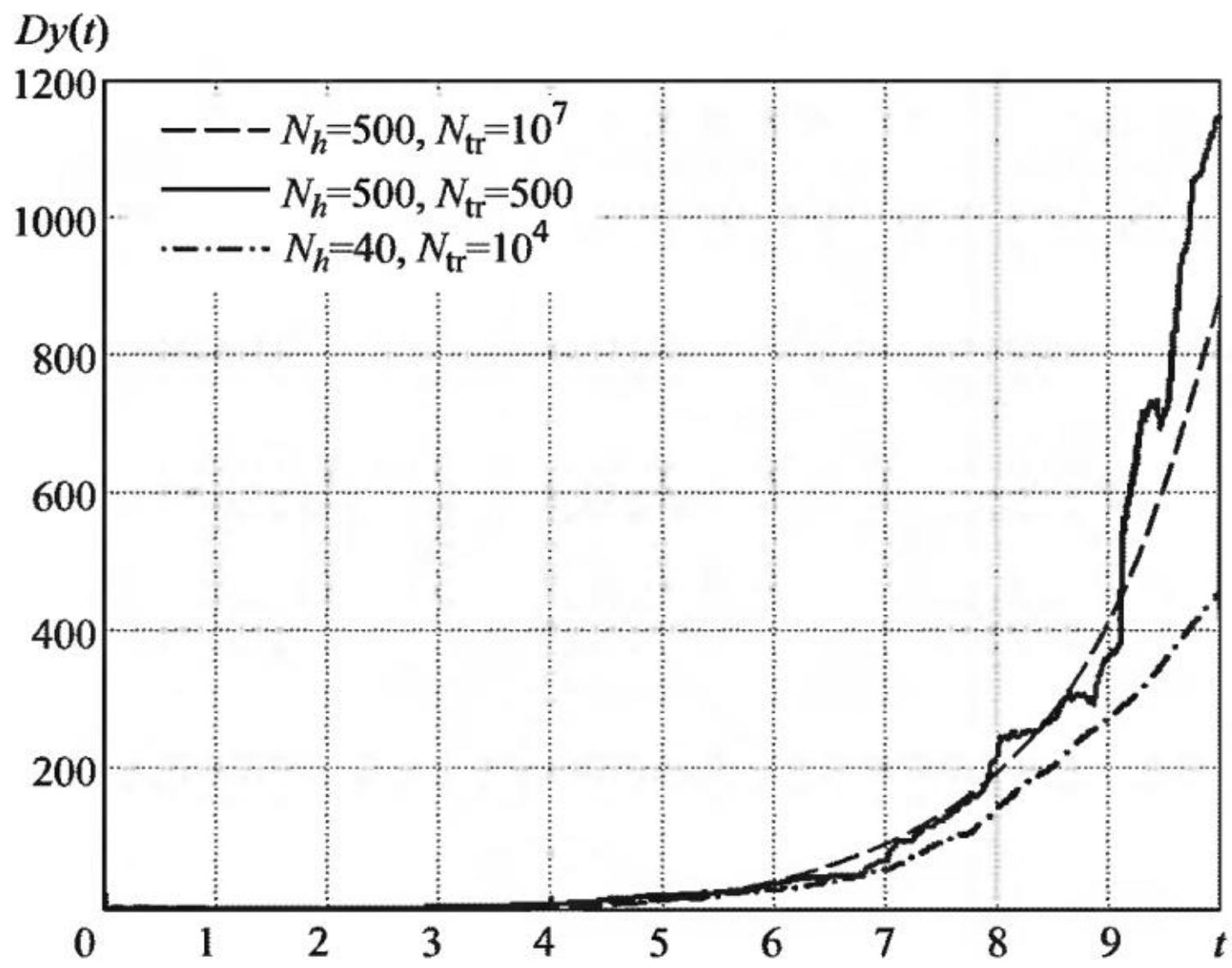


Рис. 17.3

$\lambda = 3$, как видно из рис. 17.4, размер ансамбля траекторий 10^4 уже не обеспечивает такую точность оценки. Она достигается согласно (17.13) при $N_{tr} \approx 2,5 \cdot 10^5$, т. е. при увеличении трудоемкости вычислений в 25 раз. В этом случае в конце интервала интегрирования имеем $\tilde{m}_y = 50,24$ и $\hat{m}_y = 50,44$ при $m_y = 49,15$.

Пример 17.4. Исследуется зависимость точности оценок математического ожидания решения СДУ (17.5) от дисперсии величины скачка σ_η^2 . Значения параметров СДУ: $\alpha = -0,1$, $\sigma = 0,15$, $\lambda = 1$, число шагов интегрирования разностной схемы $N_h = 500$. На рис. 17.5 приведены графики оценок $\tilde{m}_y(t)$ при значениях параметра $\sigma_\eta = 0$ и $\sigma_\eta = 0,5$. При $\sigma_\eta = 0$ в СДУ присутствует только винеровская составляющая и оно является устойчивым в среднеквадратичном смысле. Достаточно высокая точность оценки математического ожидания в этом случае достигается уже при $N_{tr} = 10^3$, в конце интервала интегрирования имеем $\tilde{m}_y = 0,3750$ при $m_y = 0,3679$, относительная ошибка оценки $\varepsilon_{\tilde{m}_y} = 0,0159$. При $\sigma_\eta = 0,5$ решение СДУ (17.5) в соответствии с (17.18), (17.19) становится неустойчивым, а точность оценки, соответствующая предыдущему случаю, достигается согласно (17.13) только при $N_{tr} \approx 2,3 \cdot 10^5$, т. е. при увеличении трудоемкости вычислений в 230 раз. В этом случае в конце интервала интегрирования имеем $\tilde{m}_y = 1,4105$ и $\hat{m}_y = 1,4117$ при $m_y = 1,3930$.

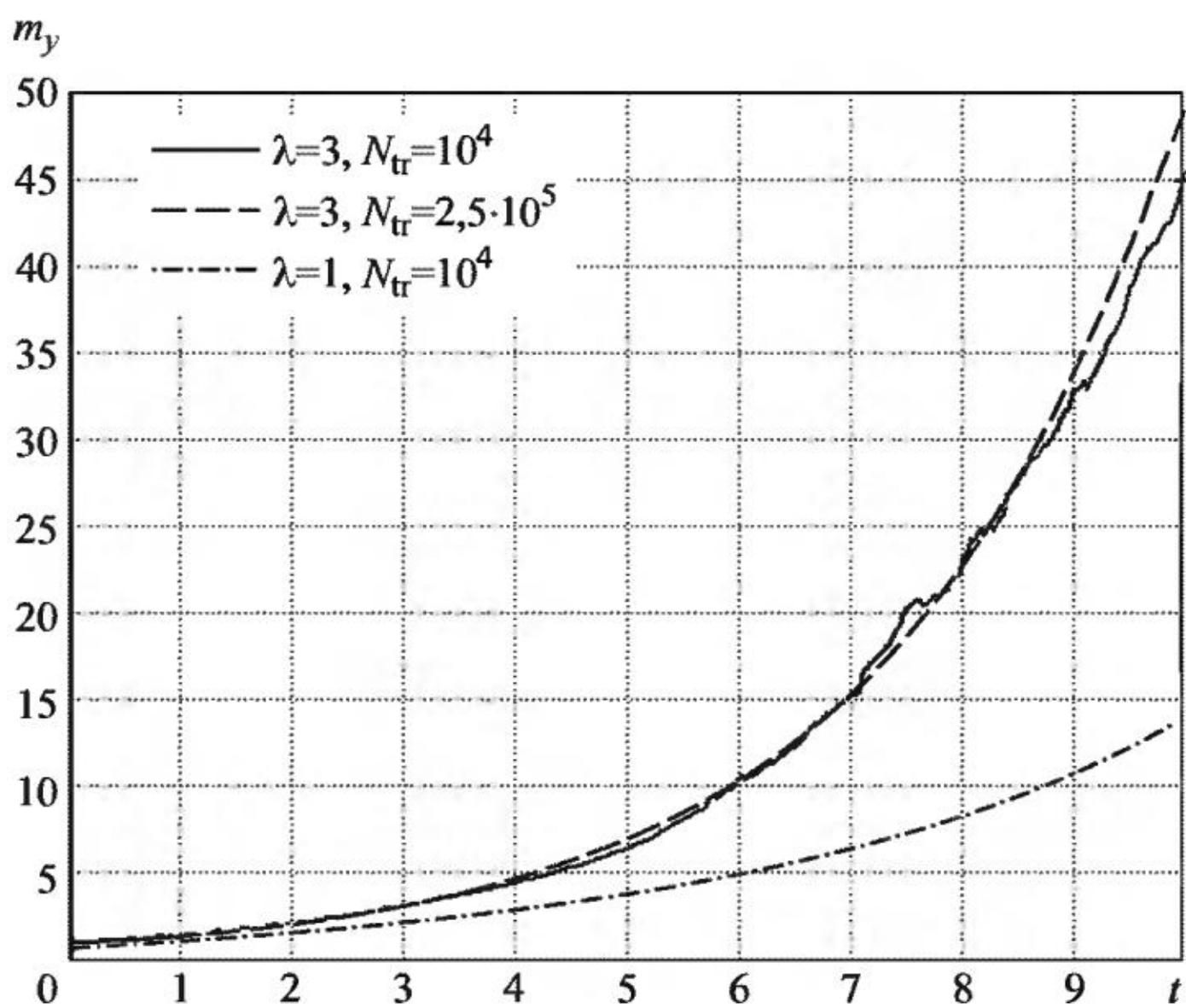


Рис. 17.4

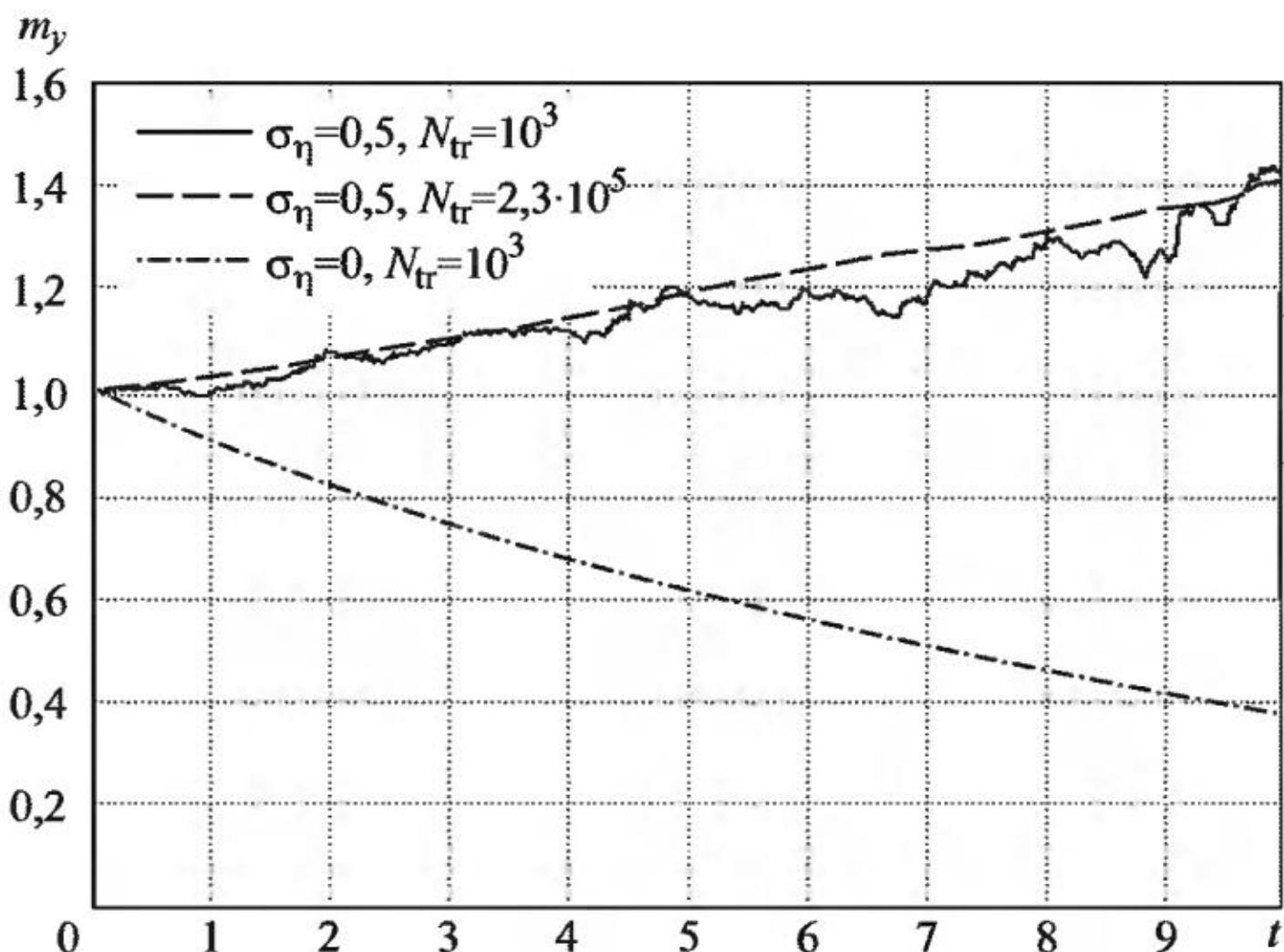


Рис. 17.5

Пример 17.5. Исследуются оценки моментов решения СДУ (17.5) с вынужденными колебаниями:

$$dy(t) = y(t)((\alpha + A \sin \omega t)dt + \sigma dw(t) + \int_R g(x) v(dx, dt)), \quad y(0) = y_0 > 0, \quad (17.20)$$

где $A, \omega > 0$ — амплитуда и частота вынужденных колебаний соответственно. Точное решение СДУ (17.20) можно получить аналогично решению СДУ (17.5):

$$y(t) = y_0 \exp \left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \frac{A}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \sigma w(t) \right) \prod_{i=0}^{N_h} (1 + g(\eta_i)), \quad g(\eta_0) = 0. \quad (17.21)$$

При замене во всех приведенных выше для СДУ (17.5) формулах выражения αt на $\alpha t + (A/\omega)(1 - \cos \omega t)$ все они будут справедливы для СДУ (17.20). В частности, для математического ожидания случайного процесса (17.21) вместо (17.18) получаем

$$\bar{m}_y(t) = y_0 \exp \left(\alpha t + (A/\omega)(1 - \cos \omega t) + \lambda (e^{\frac{\bar{m}_y + \sigma^2/2}{\eta}} - 1)t \right). \quad (17.22)$$

Из (17.22) видно, что величина λ определяет темпы роста $\bar{m}_y(t)$. На рис. 17.6 приведены графики оценок математического ожидания при различных размерах шага интегрирования и ансамбля моделируемых траекторий решения СДУ (17.20) при использовании общей разностной схемы (17.3), (17.4). Значения параметров СДУ: $\alpha = 0,2$, $\sigma = 0,15$, $\lambda = 1$, $\sigma_\eta = 0,35$, $A = 2$, $\omega = 2\pi$. Заметим, что наличие в СДУ колебаний требует для получения точной оценки использования значительно меньшего шага интегрирования метода Эйлера, чем в случае СДУ (17.5), когда достаточная точность оценки достигается уже при $N_h = 200$. На рис. 17.6 почти полное визуальное совпадение графиков оценки $\bar{m}_y(t)$ и точного математического ожидания (17.22) достигается при $N_h = 2 \cdot 10^4$, $N_u = 10^6$, в конце интервала интегрирования имеем $\bar{m}_y = 13,816$, оценку по точной схеме $m_y = 13,887$, точное значение $m_y = 13,897$, среднеквадратичное отклонение оценки $\sigma_{\bar{m}_y} = 0,030$. В этом случае по сравнению с неточной оценкой ($N_h = 10^3$, $N_u = 10^3$) трудоемкость вычислений увеличивается в $2 \cdot 10^4$ раз. При $N_h = 200$ и $N_h = 10^3$ смещение оценок (см. рис. 17.6) мало изменяется с увеличением размера ансамбля моделируемых траекторий.

Проведенные численные эксперименты показали, что наличие в СДУ пуассоновской составляющей, особенно с частыми скачками большой величины, значительно ухудшает точность оценок математического ожидания и дисперсии решения СДУ и требует для достижения удовлетворительной точности оценок уменьшения величины шага интегрирования метода Эйлера и уве-

$m_y(t)$

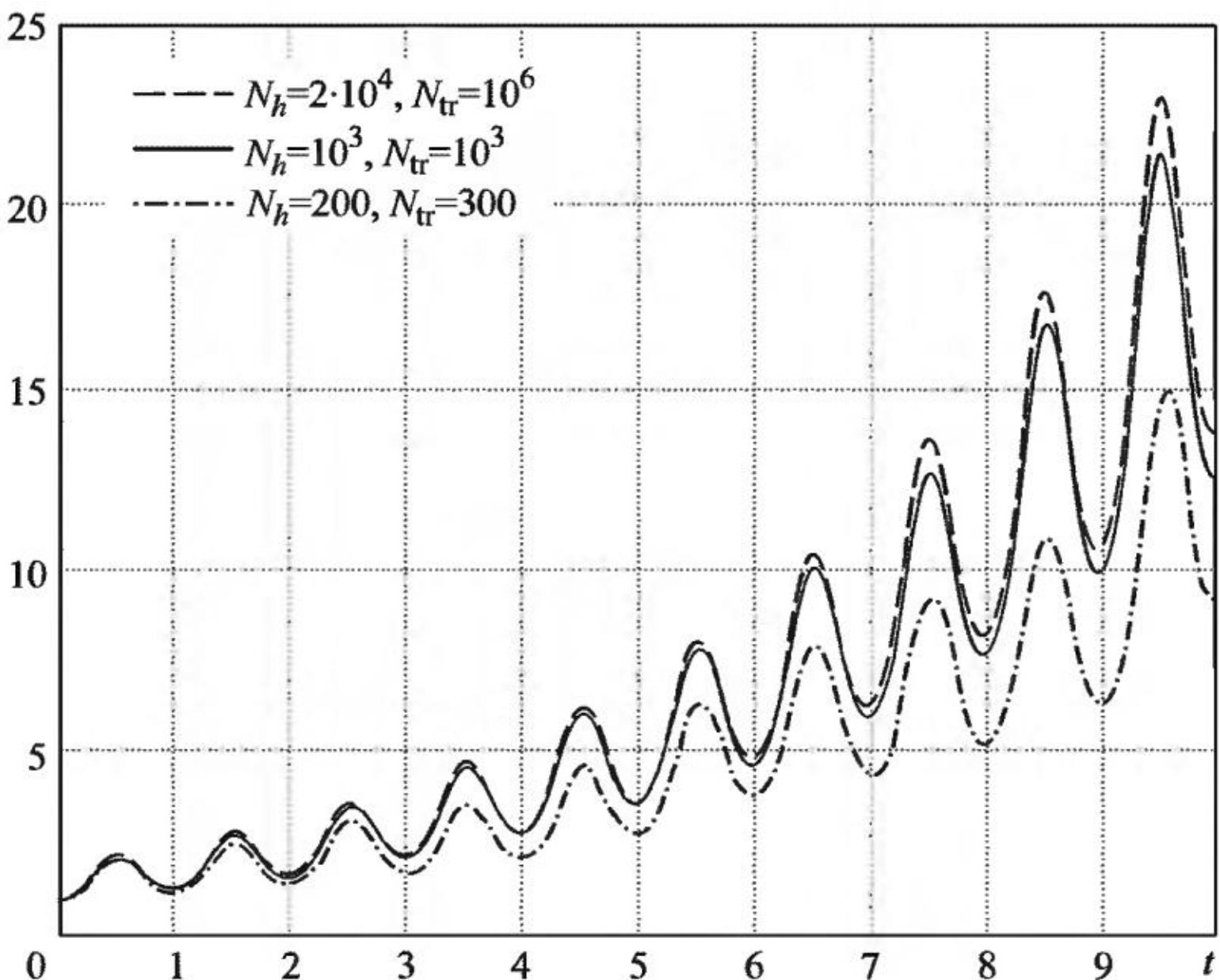


Рис. 17.6

личения размера ансамбля моделируемых траекторий на несколько порядков.

Особый интерес представляет эффект влияния пуассоновской составляющей на режимы колебаний в линейных и нелинейных системах СДУ.

Пример 17.6. Линейную систему СДУ (9.2) (при $\sigma_1 = 0$) с учетом пуассоновской составляющей запишем в виде

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= y_{10}, \\ dy_2 &= -(\omega^2 y_1 + ay_2) dt + \sigma y_1 dw(t) + y_1 \int_R g(x) v(dx, dt), & y_2(0) &= y_{20}, \end{aligned} \tag{17.23}$$

где $g(x) = x$, $y_{10} = 1$, $y_{20} = 0$. Случайные величины скачков η_k задаются нормальными с математическим ожиданием m_η и дисперсией σ_η^2 . Заметим, что при $\sigma_\eta = 0$ имеем пуассоновский процесс со скачками постоянной величины и формально в этом случае будем считать плотность вероятности случайной величины η_k дельта-функцией $f_\eta(x) = \delta(x - m_\eta)$. Математическое ожидание $m_1(t) = E y_1(t)$ первой компоненты решения СДУ (17.23) определяется уравнением свободных колебаний

$$\frac{d^2m_1}{dt^2} + a \frac{dm_1}{dt} + (\omega^2 - \lambda m_\eta) m_1 = 0, \quad m_1(0) = y_{10},$$

где λ – интенсивность скачков. При $\beta^2 = 4(\omega^2 - \lambda m_\eta) - a^2 > 0$ решение данного ОДУ имеет вид

$$m_1(t) = e^{-at/2} \left(y_{10} \cos \frac{\beta t}{2} + \frac{1}{\beta} (2y_{20} + ay_{10}) \sin \frac{\beta t}{2} \right). \quad (17.24)$$

Как следует из (17.24), параметры пуассоновской составляющей влияют, в отличие от винеровской, на математическое ожидание решения СДУ, в частности, на частоту и амплитуду его колебаний. Так, при $a = 0$, $m_\eta > 0$ частота колебаний математического ожидания уменьшается с ростом величины λm_η .

Для нахождения вторых моментов $\gamma_{ij}(t) = E y_i(t) y_j(t)$, $i, j = 1, 2$, требуется, как и в случае СДУ только с винеровской составляющей, решить трехмерную линейную систему ОДУ, подобную (9.3). Точность стандартной оценки математического ожидания $\tilde{m}_1(t)$ без учета ошибки численного метода решения СДУ определяется ее среднеквадратичным отклонением, аналогично рассмотренному выше случаю скалярного линейного СДУ

$$\sigma_{\hat{m}_1}(t) = \sqrt{(\gamma_{11}(t) - m_1^2(t)) / N_{tr}}. \quad (17.25)$$

Статистическое моделирование траекторий решения двумерных систем СДУ вида (17.23) осуществляется на основе общей численной схемы (17.3), (17.4) решения систем СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими на равномерной временной сетке.

Для линейного осциллятора (17.23) в случае $\sigma = 0$, $a = 0$ покажем зависимость точности оценок математического ожидания от величины шага интегрирования. В данном случае выражение для математического ожидания решения СДУ (17.24) принимает вид $m_1(t) = \cos((\omega^2 - \lambda m_\eta)^{1/2} t)$. Значения остальных параметров СДУ: $m_\eta = 1$, $\sigma_\eta = 0,35$, $\omega = 2\pi$, $\lambda = 1,44\pi^2$. При таких значениях параметров период колебаний математического ожидания решения равен 1,25 вместо 1 при отсутствии пуассоновской составляющей. На рис. 17.7 приведены графики двух оценок математического ожидания $\tilde{m}_1(t)$ по одной выборке из 10^4 траекторий при разных значениях h . При $N_h = t_{end}/h = 4000$ (штриховая линия) графики

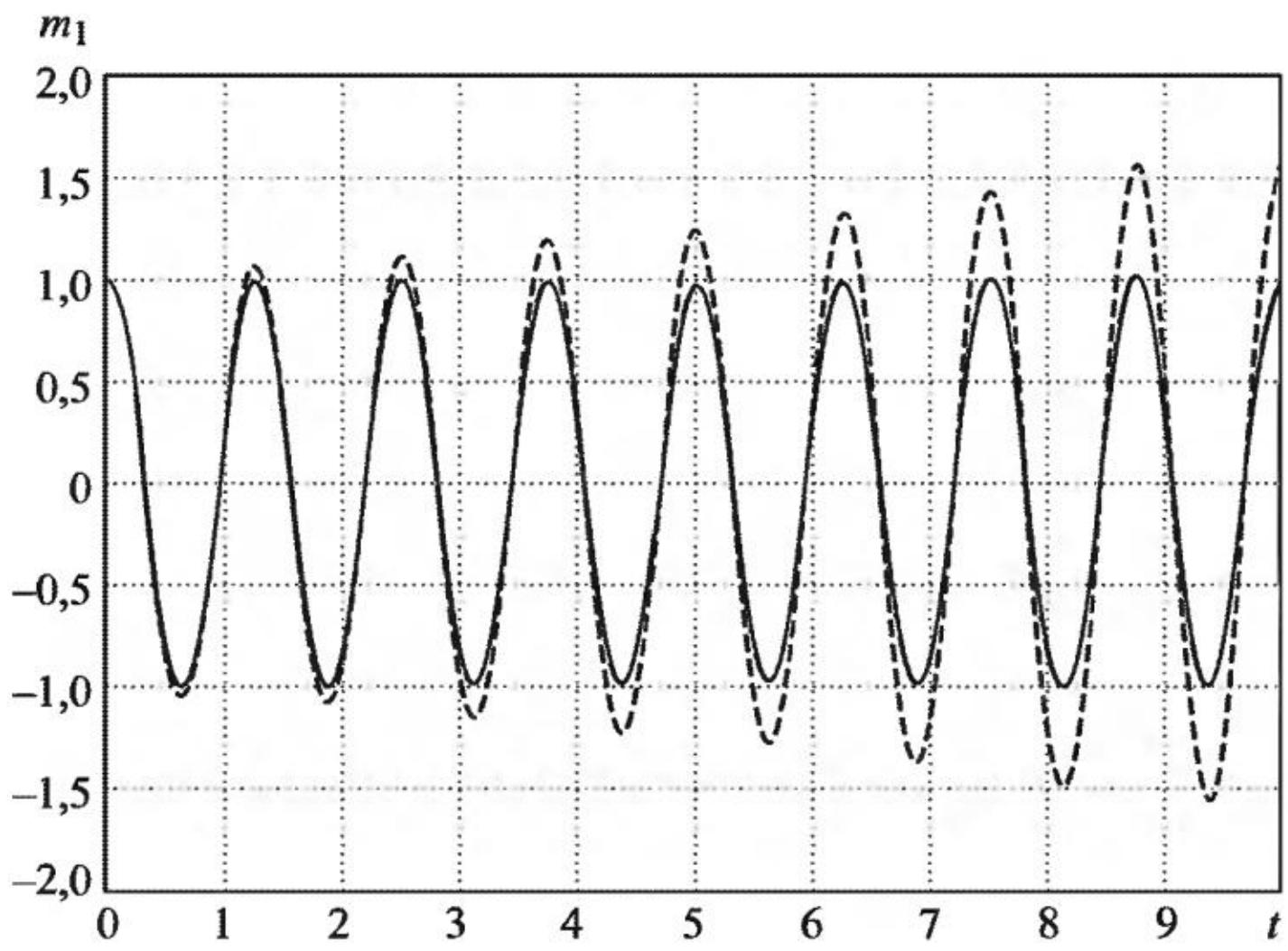


Рис. 17.7

точного математического ожидания и его оценки сильно различаются, а при $N_h = 10^6$ (сплошная линия) – практически совпадают. В последнем случае в конечной точке интервала интегрирования $t_{\text{end}} = 10$ имеем $\tilde{m}_1 = 0,9804$ при точном значении $m_1 = 1$ и согласно (17.25) $\sigma_{\tilde{m}_1} = 0,0329$.

Пример 17.7. Стохастическое нелинейное уравнение Ван-дер-Поля (10.1) с пуассоновской составляющей запишем в виде системы СДУ

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= y_{10}, \\ dy_2 &= \left(ay_2(1-by_1^2) - \omega^2 y_1\right) dt + \sigma y_1 dw(t) + y_1 \int_R xv(dx, dt), & (17.26) \\ & & y_2(0) &= y_{20}, \end{aligned}$$

где $y_{10} = 3$, $y_{20} = 0$. Рассмотрим поведение решения осциллятора Ван-дер-Поля в случае, когда в СДУ (17.26) отсутствует винеровская составляющая ($\sigma = 0$), а величина скачков в пуассоновской составляющей является постоянной: $m_\eta = 0,7$, $\sigma_\eta = 0$. Значения остальных параметров СДУ: $a = 20$, $b = 0,3$, $\omega = 1$, $\lambda = 1$. На рис. 17.8 приведены графики первой компоненты численного решения сопутствующей системы ОДУ $y_{1a}(t)$ (штрихпунктирная линия), одной траектории решения системы СДУ $y_1(t)$ (сплошная линия) и оценки математического ожидания $\tilde{m}_1(t)$ (штриховая линия), рассчитанной при $N_h = 2 \cdot 10^7$, $N_{\text{tr}} = 10^5$ на интервале интегрирования

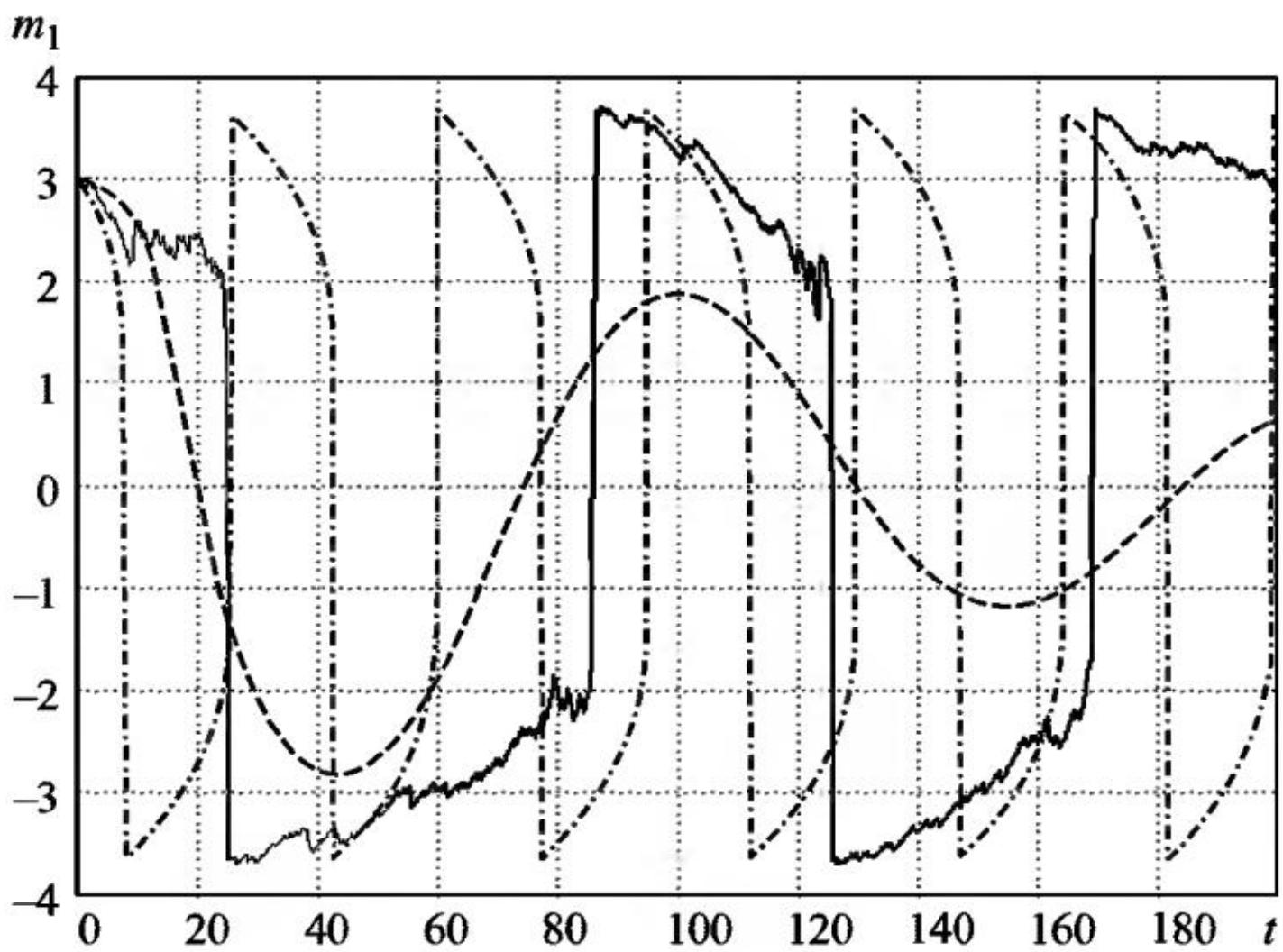


Рис. 17.8

[0, 200]. Как видно из графиков, $y_{1a}(t)$ имеет колебания с постоянными частотой и амплитудой, в то время как траектория $y_1(t)$ – не затухающие колебания со случайной низкой частотой, а математическое ожидание $m_1(t)$ – близкие к гармоническим затухающие колебания с частотой, меньшей, чем у $y_{1a}(t)$. О достаточной точности полученной оценки математического ожидания можно судить по тому, что ее график визуально совпадает с графиком оценки, вычисленной при меньшем числе шагов $N_h = 2 \cdot 10^6$ и меньшем размере ансамбля $N_{tr} = 10^4$.

Пример 17.8. Исследуется зависимость режима колебаний математического ожидания решения осциллятора Ван-дер-Поля от значений параметров пуассоновской составляющей. Второе уравнение системы СДУ (17.26) без винеровской составляющей можно представить в виде

$$dy_2 = \left(ay_2 \left(1 - by_1^2 \right) - \tilde{\omega}^2 y_1 \right) dt + y_1 \int_R x \tilde{v}(dx, dt),$$

где $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \lambda m_\eta$, $\tilde{v}(dx, dt)$ – центрированная мера, так что $E y_1 \int_R x \tilde{v}(dx, dt) = 0$. На рис. 17.9 приведены графики двух оценок математического ожидания $\tilde{m}_1(t)$ по выборке из 10^5 траекторий при $N_h = 2 \cdot 10^7$, $a = 10$, $b = 0,3$, $\sigma_\eta = 0$, $\lambda = 2,5$. Для одного варианта оценки задавались $m_\eta = 0,4$, $\omega = \sqrt{2}$ (штриховая линия), так что решение сопутствующей системы ОДУ на заданном интервале ин-

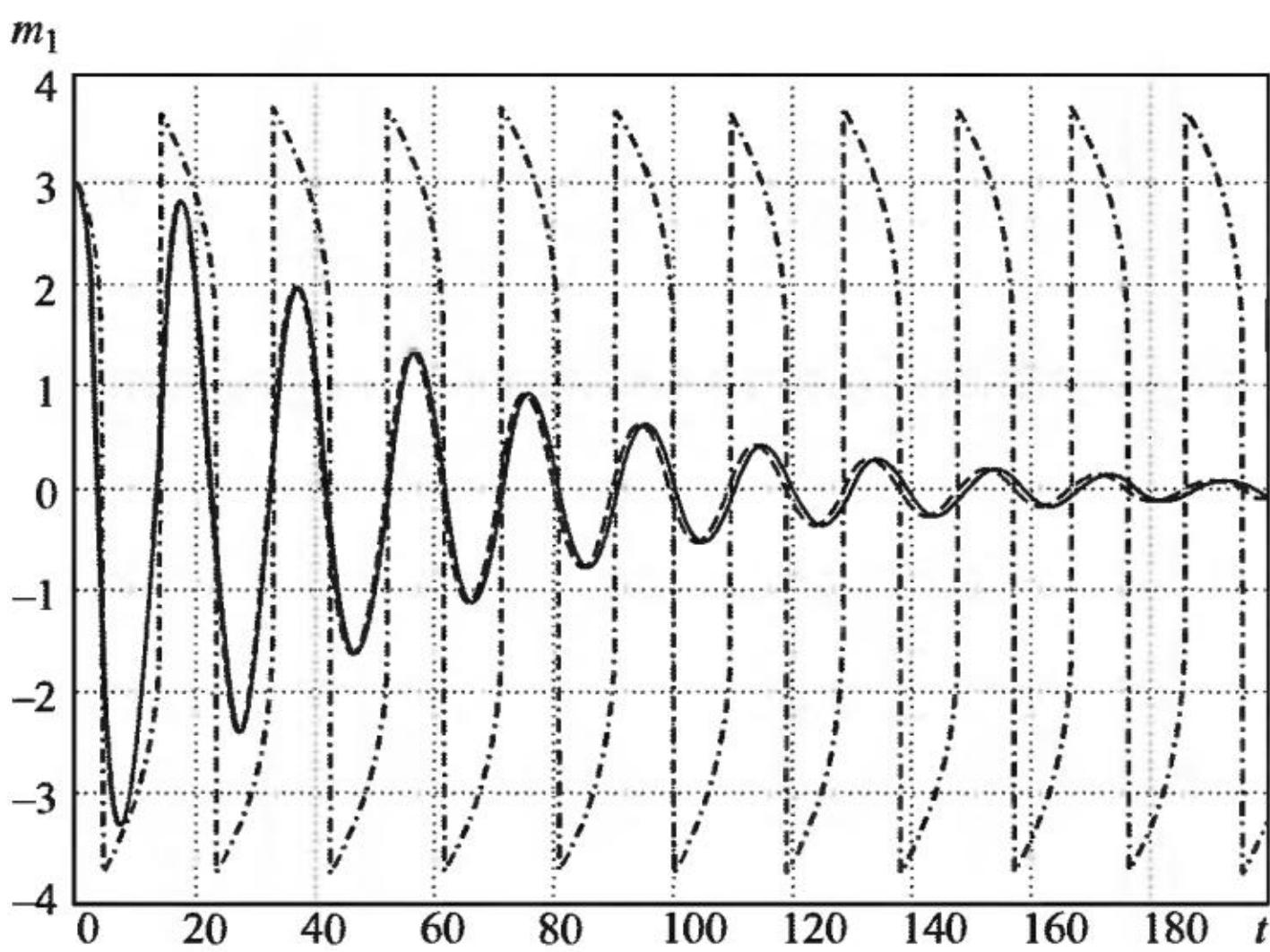


Рис. 17.9

тегрирования включает 19 периодов колебаний. Для второго варианта оценки $m_\eta = -0,4$, $\omega = 0$ (сплошная линия), при этом $y_{1a(t)}=3$, а колебания генерируются только пуассоновской составляющей. Оба графика достаточно близки друг к другу, хотя и не совпадают, а периоды колебаний оценок математического ожидания в обоих случаях соответствуют периоду колебаний решения сопутствующей системы ОДУ при $\tilde{\omega}=1$ (штрихпунктирная линия).

Проведенные численные эксперименты позволяют дополнительно к вышесказанному сделать следующие замечания относительно поведения математического ожидания решения осциллятора Ван-дер-Поля (17.26):

1) при $\lambda m_\eta = \text{const}$ увеличение значения m_η приводит с ростом t к более быстрому затуханию колебаний математического ожидания решения СДУ и ухудшению его оценки;

2) наличие в СДУ винеровской составляющей или пуассоновской составляющей с $\sigma_\eta \neq 0$ также приводит к более быстрому затуханию колебаний математического ожидания его решения, при этом мало влияя на их частоту.

Таким образом, проведенные теоретические и численные исследования показали, что пуассоновская составляющая в СДУ оказывает совершенно другое влияние на поведение траекторий и моментов решения СДУ по сравнению с винеровской составляющей, причем может либо менять частоту и амплитуду колебаний, либо возбуждать колебания, либо, наоборот, подавлять их.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии предложен способ анализа осциллирующих решений СДУ посредством численного статистического моделирования. Использование новых частотных характеристик (ЧИК и ЧФП) позволяет увидеть полную картину поведения всего ансамбля моделируемых траекторий решений СДУ. Причем оказалось, что ЧИК и ЧФП являются визуальными обобщениями интегральной кривой и фазовой траектории решений сопутствующих систем ОДУ, тогда как обычно поведение оценок математических ожиданий компонент решений систем нелинейных СДУ совершенно отлично от них. Включение входных случайных шумов в правую часть системы нелинейных ОДУ может дать информацию об устойчивости или неустойчивости детерминированных решений, если отследить поведение дисперсии или ЧИК любой компоненты решения системы СДУ. Параметрический анализ решений СДУ позволяет выявить различные режимы колебаний траекторий и эффект влияния на них случайных шумов различных типов и интенсивностей.

Численное статистическое моделирование решений СДУ требует значительных вычислительных затрат, поэтому подобные расчеты могут быть осуществлены только на многопроцессорных вычислительных системах (суперкомпьютерах). Для проведения численных экспериментов создан комплекс программ AMIKS, который имеет удобный интерфейс и позволяет вычислителям достаточно просто подготовить задачу к решению и проводить численные расчеты. Библиотека PARMONC, разработанная в авторском коллективе, является базовым компонентом для выполнения длительных вычислений, в ней реализованы длиннопериодные параллельные генераторы псевдослучайных чисел и специальная методика распределенных расчетов, что позволяет, в частности, осуществлять параметрический анализ вероятностных моделей.

Список сокращений

ЛА	– летательный аппарат
ИСЗ	– искусственный спутник Земли
ММК	– метод Монте-Карло
ОДУ	– обыкновенное дифференциальное уравнение
СДУ	– стохастическое дифференциальное уравнение
СПС	– статистический портрет скоростей
УНС	– уравнения Навье–Стокса
ЧИК	– частотная интегральная кривая
ЧПС	– частотный поток скоростей
ЧФП	– частотный фазовый портрет

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М.: Наука, 1966.
3. Колмановский В. Б., Тихонов А. В. Об устойчивости по вероятности системы Лотки–Вольтерра // Дифф. уравнения. 1996. Т. 32, № 11. С. 1480–1487.
4. Артемьев С. С. Численное решение задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд. ВЦ СО РАН, 1993.
5. Диментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
7. Марченко М. А., Михайлов Г. А. Распределенные вычисления по методу Монте-Карло // Автоматика и телемеханика. 2007. Вып. 5. С. 157–170.
8. Marchenko M. A. PARMONC – A Software Library for Massively Parallel Stochastic Simulation // Lecture Notes in Computer Science. 2011. Vol. 6873. P. 302–315.
9. Документация к библиотеке PARMONC на сайте Центра коллективного пользования «Сибирский суперкомпьютерный центр» СО РАН. [Электрон. ресурс]. <http://www2.sssc.ru/SORAN-INTEL/paper/2011/parmonc.pdf>
10. Марченко М. А. PARMONC – библиотека для реализации технологии распределенного численного статистического моделирования на массивно-параллельных вычислительных системах. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016616687, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 17.06.2016 г.
11. Артемьев С. С., Марченко М. А., Иванов А. А., Корнеев В. Д., Смирнов Д. Д. AMIKS – программа для численного анализа стохастических осцилляторов на массивно-параллельных вычислительных системах. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016616439, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 10.06.2016 г.
12. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
13. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах М.: Наука, 1990.
14. Лурье З. Я., Дмитерко В. Н. Динамика системы управления гидротурбиной с пидрегулятором. Сумы: Изд-во СумДУ, 2003.

15. Корнеев В. Д. Параллельное программирование кластеров. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008.
16. Корнеев В. Д. Параллельное программирование в MPI. М; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
17. Snir M., Otto S. W., Huss-Lederman S., Walker D., Dongarra J. MPI: The Complete Reference. Boston: MIT Press, 1996.
18. Перцев Н. В. Математические модели взаимодействующих популяций: Уч. пособие. Омск: Изд-во ОмГУ, 2003.
19. Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.
20. Pieper V., Domine M., Kurth P. Level crossing problems and drift reliability // Mathematical Methods of Operations Research. 1997. Vol. 45, Iss. 3. P. 347–354.
21. Потапов В. И. Визуализация фазовых траекторий динамической системы Рикитаки // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 2. С. 255–265.
22. Лазарев Ю. Н. Управление траекториями космических аппаратов / Самарский научный центр РАН. – Самара. 2007.
23. Лысенко Л. Н. Наведение и навигация баллистических ракет. М.: Изд-во МГТУ, 2007.
24. Аксенов Е. П., Чазов В. В. Модель движения ИСЗ. М.: Наука, 2007.
25. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
26. Лысов А. Н., Винниченко Н. Т., Лысова А. А. Прикладная теория гироскопов. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009.
27. Леванов А. В., Антипенко Э. Е. Введение в химическую кинетику. М.: Изд-во МГУ, 2006.
28. Чумakov Г. А., Слинько М. Г. Кинетическая турбулентность (хаос) скорости реакции взаимодействия водорода с кислородом на металлических катализаторах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 5. С. 1194–1198.
29. Ахмадеев М. Г. Моделирование на ЭВМ объектов управления нефтепереработки и нефтехимии. Уфимский нефтяной институт. Уфа, 1989.
30. Поршнев С. В. Динамическая неустойчивость движения заряженных частиц в постоянном неоднородном магнитном поле // Журн. радиоэлектроники. 2000. № 11. С. 1–8.
31. Разин В. М. Математическая модель процесса движения заряженной частицы в веществе при наличии магнитного поля // Изв. ТПИ, 1976. Т. 294. С. 44–48.
32. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968.

