РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

В. Н. Чугунов

Нормальные и перестановочные теплицевы и ганкелевы матрицы

МОСКВА НАУКА 2017

Посвящается моей маме,
Чугуновой Татьяне Михайловне

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди фундаментальных алгебраических задач особое место занимает проблема собственных значений, заключающаяся в нахождении всех или части собственных значений квадратной матрицы с действительными или комплексными элементами. Ее решение очень хорошо выявляет разницу между классической математикой и практическим численным анализом. Хотя проблема собственных значений имеет простую формулировку и теоретическое ее обоснование известно уже в течение многих лет, нахождение точных решений представляет обширное многообразие нерешенных проблем.

К числу таких актуальных задач относится вопрос об устойчивости решений проблемы собственных значений (см. [7, 9, 10]). Дело в том, что элементы матриц, для которых требуется вычислить спектр, могут определяться прямо из физических экспериментов и, естественно, имеют ошибки, свойственные всем наблюдениям. Поэтому при постановке проблемы собственных значений возникает вопрос о том, как изменяются собственные значения при возмущении элементов матрицы в пределах допустимой погрешности. Рассматриваемая задача в общем случае не обладает свойством устойчивости, о чем говорит множество числовых примеров, когда малые изменения элементов матрицы приводят при вычислениях как к сильным модификациям спектра, так и к превращениям вещественных собственных значений в комплексные [10].

Однако известен класс матриц, для которых задача на собственные значения идеально обусловлена. Это нормальные матрицы. При нахождении их спектра можно гарантировать определенную точность вычисления собственных значений, зависящую от величины изменений элементов матрицы (см. [5]).

Не менее актуальной задачей, возникающей при вычислении собственных значений, является сокращение числа арифметических операций и, как следствие, времени счета. Одно из возможных решений — использование некоторой априорной информации, например коммутирования рассматриваемой матрицы с другой, для которой собственные значения известны или могут быть вычислены значительно быстрее. Данный подход основан на таком важном свойстве перестановочных матриц, как возможность приведения к блочно-треугольному или блочно-диагональному виду посредством одного и того же подобия.

Вместе с этим на практике часто приходится иметь дело с матрицами, имеющими определенную структуру. Относительно некоторых из них хорошо известно, что вычисление спектра таких матриц является крайне неустойчивой задачей. Поэтому, с учетом устойчивости проблемы собственных значений для нормальных матриц и возможности экономии ресурсов при вычислении спектра перестановочных матриц возникает потребность в том, чтобы во множестве матриц с некоторой структурой выделять подмножества матриц, обладающих свойством нормальности или образующих коммутирующие пары. Решению этих задач для некоторых классов структурированных матриц и посвящена данная книга.

Автор сердечно благодарит Х.Д. Икрамова за многолетнюю поддержку и плодотворное обсуждение многих научных вопросов. Хочу сказать слова благодарности моей маме Чугуновой Татьяне Михайловне, которой посвящается этот итог моей двадцатипятилетней творческой деятельности. Выражаю признательность тем, кто меня поддерживал при работе над данной книгой, — Е.Е. Тыртышникову и Е.М. Лебедевой.

Благодарю Российский научный фонд, при финансовой поддержке которого (грант № 14-11-00806) были получены некоторые из представленых результатов, и Российский фонд фундаментальных исследований за выделение средств на издание данной книги (грант № 17-11-00074).

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Теплицевы и ганкелевы матрицы — это два матричных класса, которым посвящено несметное число журнальных публикаций и немало монографий. Некоторые из них (далеко не все!) включены в список литературы предлагаемой книги. Казалось бы, что можно сказать нового об этих матрицах?

Познакомившись с книгой, читатель убедится, что автору удалось-таки обнаружить много нового. Произошло это благодаря тому, что найдены аспекты данной темы, прежде (почти) никем не разрабатывавшиеся. Этими аспектами являются, во-первых, условия, при которых теплицева или ганкелева матрица нормальна, и, во-вторых, условия перестановочности пары матриц, каждая из которых теплицева или ганкелева.

Нормальность и перестановочность суть свойства, важные при численном решении спектральных задач. Хорошо известно, что нормальные матрицы идеально обусловлены по отношению к задаче вычисления собственных значений. Перестановочность же матриц A и B свидетельствует о наличии у них некоторых общих спектральных свойств. Так, если A — матрица с простым спектром, то всякий ее собственный вектор будет собственным и для любой матрицы B, перестановочной с A.

Вот еще один менее очевидный пример пользы, какую можно извлечь из информации о перестановочности. Циркулянты, играющие в книге важную роль, — это матрицы, о которых известно абсолютно все. Весь класс циркулянтов приводится к диагональному виду одним и тем же унитарным подобием, задаваемым матрицей дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Собственные значения любого циркулянта определяются несложным вычислением, а именно применением ДПФ к вектору, составленному из коэффициентов циркулянта. Переставляя в обратном порядке столбцы (или строки) циркулянта A, получаем ганкелеву матрицу B, именуемую ганкелевым циркулянтом. Наконец, сложение A и B дает так называемый

(T+H)-циркулянт $C = A + B$. Как найти собственные значения и векторы матрицы C?

В общем случае даже полное знание спектральных разложений матриц A и B мало помогает в установлении спектральных свойств их суммы $A + B$. С (T+H)-циркулянтами дело обстоит по-другому. И циркулянты, и ганкелевы циркулянты коммутируют с матрицей

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому с D коммутирует и любой (T+H)-циркулянт C. Спектральное разложение матрицы D известно, что позволяет свести вычисление спектра C к тривиальным выкладкам.

Задачи о нормальности и перестановочности теплицевых и ганкелевых матриц разобраны в книге В.Н. Чугунова во всех возможных случаях. Каждый случай исследован с большой тщательностью, и дано исчерпывающее описание его решений.

Надеюсь, что эта интересная книга займет достойное место в литературе о теплицевых и ганкелевых матрицах.

Х.Д. Икрамов

ВВЕДЕНИЕ

При решении задачи на собственные значения вполне естественным является желание гарантировать определенную точность вычисления спектра, зависящую от ошибок задания элементов исходной матрицы. Такая гарантия возможна для нормальных матриц. Вместе с тем при вычислении спектра конкретной матрицы полезно держать в поле зрения множество коммутирующих с ней матриц, имеющих ту же структуру. Это множество может содержать матрицу, чьи собственные значения могут быть вычислены значительно быстрее, что поможет и при решении основной спектральной задачи. Однако проверка нормальности матрицы, как и коммутирования матриц, в общем случае является достаточно дорогостоящей операцией.

На практике часто встречаются задачи, связанные со структурированными матрицами, т.н. матрицами, для которых известны связи между некоторыми элементами. Эти матрицы определяются значительно меньшим числом параметров по сравнению с общим количеством матричных элементов. Проверка нормальности или коммутирования структурированных матриц может оказаться более дешевой, чем в общем случае, за счет получения простых критериев, учитывающих структуру. Наличие небольшого числа параметров сыграло ключевую роль в выводе таких критериев нормальности и коммутирования для отдельных типов матриц специальной структуры.

Основными видами структурированных матриц, рассматриваемых в книге, являются теплицевы и ганкелевы матрицы, строгие определения которых приводятся в первой главе. Также использованы частные их виды, как хорошо известные, так и недавно введенные в публикациях [26, 45].

Матрицы, которые мы теперь называем теплицевыми, были впервые исследованы немецким математиком Отто Теплицем (01.08.1881 – 15.02.1940), проводившим свои разработки в Бонне (см. [56, 57]). Различные вопросы, относящиеся к теплицевым матрицам и их роли в математических проблемах, исследовались многими авторами и нашли свое отражение в многочисленных статьях и хорошо известных монографиях [2, 6, 13, 14, 15, 33]. Последние десятилетия были отмечены активным интересом к численному решению задач с теплицевыми матрицами и "близкими" к ним. Эти задачи связаны с актуальными вычислительными проблемами прикладной электродинамики, акустики, оптики, автоматического регулирования, обработки изображений, дифференциальных и интегральных уравнений, теории вероятностей ([1, 2, 8, 32, 34, 35, 36, 37, 50, 54, 55]). В ряде случаев требовалось получить решение максимально быстро, в других — необходимо было рассматривать матрицы большого порядка и, следовательно, решать сложные вопросы экономного расходования машинной памяти и, конечно, времени.

Второй основной вид структурированных матриц, которым посвящена книга, связан с именем немецкого математика Германа Ганкеля (14.02.1839 – 29.08.1873), работавшего в Эрлангене и Тюбингене (см. [11, 12]). Об этих матрицах некоторые сведения можно почерпнуть из энциклопедии Ф.Р. Гантмахера [3]. Ганкелевы матрицы широко используются в алгебре, теории вероятностей, в анализе и теории функций [6, 14, 33, 38].

При изложении основного материала одним из важных понятий в книге будет "класс матриц". Так мы называем множество матриц, для которых задана дополнительная информация (например, обычная или косая симметрия) либо указан некоторый минимальный набор параметров и рациональные функции от этих параметров, позволяющие вычислить матричные элементы, либо описан алгоритм, посредством которого при заданных начальных данных строится матрица рассматриваемого множества.

Для указанных основных типов структурированных матриц в книге исследуются задачи классификации, связанные с выделением матриц, обладающих свойством нормальности или перестановочности. Все результаты оформлены в виде критериев нормальности или коммутирования в заданных множествах структурированных матриц. При этом критерии представляют собой конечные списки классов матриц, удовлетворяющие двум основным условиям: всякая матрица любого класса является решением рассматриваемой задачи и, обратно, для всякого решения найдется содержащий его класс. Как будет видно, рассматриваемые задачи эквивалентны системам квадратичных уравнений относительно элементов теплицевых матриц. Поэтому для решения исходной задачи нужно определить все случаи, когда эквивалентная ей система разрешима, и в каждом из них найти решения. Наличие и обоснование соответствующего критерия нормальности или перестановочности для конкретной задачи, описывающего *все* классы подходящих матриц, будет свидетельствовать о *полном* решении исследуемого вопроса. Для всех рассмотренных в книге задач представлено полное решение.

Кратко опишем содержание книги. Глава 1 является вводной, в ней приведены основные определения и понятия, используемые в дальнейшем. Сформулирован и доказан ряд вспомогательных утверждений, которые могут понадобиться для понимания материала. Наличие этих фактов избавит читателя от необходимости искать дополнительные источники информации.

Самой простой среди задач классификации нормальных матриц, обладающих определенной структурой, является проблема, получившая в литературе название "нормальная теплицева задача". Она заключается в описании матриц, являющихся теплицевыми и нормальными одновременно. Ее решению посвящена глава 2, где приведены и доказаны критерии нормальности теплицевой матрицы как в вещественном, так и в комплексном случае. Эти критерии представляют собой краткое описание четырех классов нормальных теплицевых вещественных матриц (*классы НТВМ*) и двух классов их комплексных обобщений (*классы НТКМ*).

В отличие от нормальной теплицевой задачи более сложной является "нормальная ганкелева задача", в которой требуется указать все виды комплексных матриц, являющихся одновременно нормальными и ганкелевыми. Подчеркнем, что данная задача имеет смысл лишь в поле комплексных чисел, так как произвольная вещественная ганкелева матрица всегда является нормальной в силу своей симметричности. Получению решения посвящена глава 3. О сложности нормальной ганкелевой задачи красноречиво говорит тот факт, что полное ее решение было получено лишь после более чем десятилетнего исследования. Процесс нахождения требуемых ганкелевых матриц отражен в первом разделе главы. В этой части сформулированы десять классов нормальных ганкелевых матриц (*классы НГМ*). Далее приводится обоснование критерия нормальности.

В последующих главах дается решение более общих проблем, а именно задач о парах коммутирующих матриц, обладающих определенной структурой. Мы начинаем со случая перестановочных теплицевых комплексных матриц (ПТМ). В главе 4 представлены *классы ПТМ*. Вещественное решение данной задачи почти идентично комплексному. В заключение этой главы приводится приложение задачи о коммутировании теплицевых матриц к случаю пары сопряженных матриц. Этот частный случай дает еще один вывод критерия нормальности теплицевых матриц.

В главе 5 приведено решение задачи о коммутировании ганкелевых матриц. В вещественном случае эта проблема тесно связана с нормальной ганкелевой задачей, так как у нормальной ганкелевой матрицы ее вещественная и мнимая компоненты перестановочны. Это дает десять классов пар перестановочных ганкелевых вещественных матриц (*классы ПГВМ*). Далее приводится обобщение на комплексный случай (*классы ПГКМ*).

Заключительная глава 6 содержит решение задачи об описании пар комплексных перестановочных теплицевой и ганкелевой матриц, которое представлено списком *классов ПТГКМ*. Из этого решения был получен вещественный аналог, имеющий свои особенности, изложенные в конце данной главы. Соответствующие классы называем *классами ПТГВМ*.

Таково содержание предлагаемой книги. Этот краткий обзор поможет читателю лучше понять ее структуру.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Данная глава является вводной; в ней дадим основные понятия, сформулируем и докажем некоторые факты, используемые в дальнейшем.

1.1 Основные понятия

Пусть $\mathbf{R}$ — множество действительных, а $\mathbf{C}$ — комплексных чисел. Обозначим через $M_n(\mathbf{R})$ и $M_n(\mathbf{C})$ множества соответственно вещественных и комплексных $n \times n$-матриц. Считаем, что i — стандартное обозначение для мнимой единицы.

Теплицевой называется матрица $T \in M_n(\mathbf{R})$ или $T \in M_n(\mathbf{C})$ вида

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-(n-1)} & t_{-(n-2)} & t_{-(n-3)} & \dots & t_0 \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Всякая теплицева матрица имеет элементы, зависящие лишь от разности столбцового и строчного индексов,

$$\{T\}_{k,m} = t_{m-k}, \qquad k, m = 1, 2, \dots, n,$$

и поэтому однозначно определяется элементами первой строки и первого столбца.

Хорошо известными частными случаями теплицевых матриц являются циркулянты и косые циркулянты. Теплицева матрица (1.1) называется *циркулянтом*, если

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

или поэлементно $\{C\}_{km} = c_{m-k}$ и

$$c_{-j} = c_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Косым циркулянтом называется теплицева матрица (1.1), записанная как

$$S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ -s_{n-1} & s_0 & s_1 & \dots & s_{n-2} \\ -s_{n-2} & -s_{n-1} & s_0 & \dots & s_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & \dots & s_0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

или $\{S\}_{km} = s_{m-k}$ при условии

$$s_{-j} = -s_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Обобщением циркулянтов и косых циркулянтов служат φ-*циркулянты* — теплицевы матрицы вида

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ \varphi t_{n-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ \varphi t_{n-2} & \varphi t_{n-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi t_1 & \varphi t_2 & \varphi t_3 & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

или

$$t_{-j} = \varphi t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $\varphi \in \mathbf{C}$. При $\varphi = 1$ получаем матрицу (1.2); если $\varphi = -1$, то матрица (1.4) превращается в (1.3).

Из определений циркулянта, косого циркулянта и φ-циркулянта следует, что такие матрицы можно однозначно определять, задав только первый столбец либо первую строку.

Новыми частными случаями теплицевых матриц будут разделяющиеся и двухпараметрические циркулянты.

Разделяющимся циркулянтом назовем теплицеву матрицу $T \in M_n(\mathbf{C})$, если в ее алгебраической форме $T = T_1 + iT_2$ слагаемое T_1 является ξ-циркулянтом для некоторого числа $\xi \in \mathbf{R}$, $\xi \neq 0$, а T_2 — ξ^{-1}-циркулянтом.

Теплицеву матрицу вида (1.1) будем называть *двухпараметрическим (или (φ, ψ)-) циркулянтом*, характеризуемым (вещественной) 2×2-матрицей

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

с определителем

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

если выполнены соотношения

$$t_{-j} = \varphi t_{n-j} + \psi \bar{t}_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots n-1, \tag{1.6}$$

где

$$\varphi = \frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}, \qquad \psi = \frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Множество таких матриц будем обозначать символом $\mathcal{C}(\varphi, \psi)$. При $\psi = 0$ формулы (1.6) описывают хорошо известные φ-циркулянты.

При изложении материала будем оперировать такими понятиями, как V-преобразования 1-го и 2-го типов. Пусть фиксирована вещественная невырожденная 2×2-матрица

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Скажем, что к множеству $\mathcal{C}(\varphi, \psi)$ применено *V-преобразование 1-го типа*, если всякая матрица

$$T = T_1 + iT_2, \qquad T \in \mathcal{C}(\varphi, \psi), \tag{1.8}$$

заменена матрицей

$$\widetilde{T} = \widetilde{T}_1 + i\widetilde{T}_2 = (v_{11}T_1 + v_{21}T_2) + i\,(v_{12}T_1 + v_{22}T_2)\,. \tag{1.9}$$

Ниже будет показано, что $\widetilde{T}$ принадлежит множеству $\mathcal{C}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$, характеризуемому матрицей $\widetilde{W} = V^{-1}WV$.

В отличие от V-преобразования 1-го типа *V-преобразование 2-го типа* применяется для пары теплицевых матриц T_1 и T_2. Эта операция заключается в получении пары $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ по правилу

$$\widetilde{T}_1 = v_{11}T_1 + v_{21}T_2, \quad \widetilde{T}_2 = v_{12}T_1 + v_{22}T_2, \tag{1.10}$$

где числа v_{11}, v_{12}, v_{21} и v_{22} образуют невырожденную 2×2-матрицу V вида (1.7). При этом матрица V может быть как вещественной, тогда будем говорить о *вещественном V-преобразовании 2-го типа*, так и комплексной, задающей *комплексное V-преобразование 2-го типа* .

Ганкелевой называется матрица $H \in M_n(\mathbf{R})$ или $H \in M_n(\mathbf{C})$, элементы которой зависят лишь от суммы строчного и столбцового индексов:

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-(n-1)} \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

или

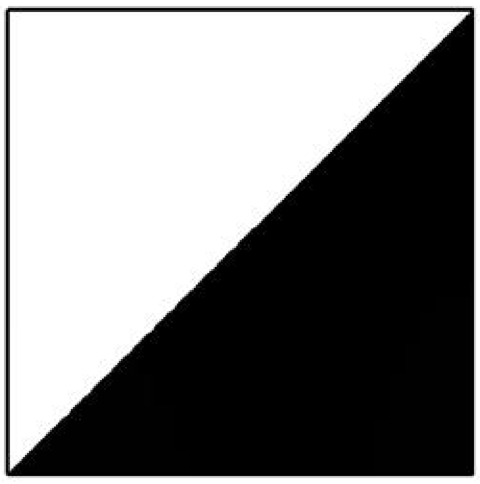
$$\{H\}_{k,m} = h_{n+1-(k+m)}, \qquad k, m = 1, \dots, n.$$

Ганкелева матрица однозначно определяется элементами первой строки и последнего столбца.

Ганкелеву матрицу H назовем *верхнетреугольной*, если

$$\{H\}_{km} = 0 \qquad \text{при} \qquad k + m > n + 1,$$

и *нижнетреугольной* при выполнении условий



$$\{H\}_{km} = 0 \qquad \text{при} \qquad k + m < n + 1.$$

Имеются глубокие аналогии, а также очевидные связи между теплицевыми и ганкелевыми матрицами. Они помогают разобраться в сложных вопросах и задачах, касающихся ганкелевых матриц. Для использования этих связей введем матрицу-перестановку

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

называемую *перъединичной матрицей*, и сопоставим с ганкелевой матрицей $H \in M_n(\mathbf{C})$ теплицеву матрицу

$$T = H\mathcal{P}_n, \tag{1.13}$$

которую будем называть *соответствующей* для рассматриваемой ганкелевой матрицы H. При этом H, в свою очередь, назовем *соответствующей* для T. Нижний индекс у матрицы $\mathcal{P}_n$ вида (1.12) будет обозначать ее порядок. Из соотношения (1.13) и структур теплицевой (1.1) и ганкелевой (1.11) матриц следует, что если рассматривать ганкелеву и соответствующую теплицеву матрицы вместе, то справедливы соотношения

$$h_j = t_j, \qquad j = -(n-1), \dots, n-1.$$

Для произвольных ганкелевых матриц, как и для теплицевых, определены понятия *ганкелева циркулянта*, если

$$h_{-j} = h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

ганкелева косого циркулянта при

$$h_{-j} = -h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и *ганкелева φ-циркулянта*, когда

$$h_{-j} = \varphi h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $\varphi \in \mathbf{C}$. Говоря о *теплицевом* циркулянте, косом циркулянте или φ-циркулянте, будем опускать слово "теплицев".

Напомним теперь некоторые определения, которые будем использовать в дальнейшем. Матрица A называется *персимметричной*, если

$$a_{k,m} = a_{n+1-m,n+1-k}, \tag{1.14}$$

и *центросимметричной* при

$$a_{k,m} = a_{n+1-k,n+1-m}.$$

Для ганкелевой матрицы эти два вида симметрии совпадают и означают симметрию относительно главной антидиагонали $(1, n)$, $(2, n-1)$, ..., $(n, 1)$.

Матрица A называется *симметричной*, если

$$a_{k,m} = a_{m,k},$$

и *кососимметричной*, когда

$$a_{k,m} = -a_{m,k}.$$

Матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$ называется *нормальной*, если

$$AA^\top = A^\top A. \tag{1.15}$$

Аналогично, матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется *нормальной*, если

$$AA^* = A^* A. \tag{1.16}$$

Матрицы $A \in M_n(\mathbf{R})$ и $B \in M_n(\mathbf{R})$ (или $A, B \in M_n(\mathbf{C})$) называются *перестановочными* (или *коммутирующими*), если

$$AB = BA. \tag{1.17}$$

Матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$ или $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется *инволютивной* или просто *инволюцией*, если

$$A^2 = I_n. \tag{1.18}$$

Здесь I_n — стандартное обозначение единичной матрицы порядка n.

Матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$ или $A \in M_n(\mathbf{C})$ вида

$$A = \alpha I_n, \tag{1.19}$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$ или $\alpha \in \mathbf{C}$, называется *скалярной*.

При изложении материала будем использовать несколько видов специальных матриц. Так как они встречаются в разных местах книги, вынесем их определения в данную главу.

Начнем с введения оператора $\mathcal{T}(z)$, который $(n-1)$-мерному вектору $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ ставит в соответствие теплицеву строго верхнетреугольную матрицу T с первой строкой

$$(0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1}).$$

Произвольная теплицева матрица с элементами первой строки $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ и первого столбца $t_0, t_{-1}, t_{-2}, \ldots, t_{-(n-1)}$ представима в виде

$$T = t_0 I_n + \mathcal{T}(x) + (\mathcal{T}(y))^\top,$$

где

$$x = (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),$$
$$y = \left(t_{-1}, t_{-2}, \ldots, t_{-(n-1)}\right).$$

Введем две $(n-1) \times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Матрицу $\mathcal{F}$, определяемую векторами u и v вида

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})^\top, \qquad v = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})^\top,$$

зададим как

$$\mathcal{F}(u, v) = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_{n-1} & v_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

Аналогично определим матрицу $\mathcal{G}$ по векторам x и y вида

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})^\top, \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})^\top.$$

Для этих матриц введем величины

$$\triangle_{km}^{\mathcal{F}} = \det \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ u_m & v_m \end{pmatrix} = u_k v_m - u_m v_k, \tag{1.21}$$

$$\triangle_{km}^{\mathcal{G}} = \det \begin{pmatrix} x_k & y_k \\ x_m & y_m \end{pmatrix} = x_k y_m - x_m y_k. \tag{1.22}$$

Зарезервируем обозначения для специальных матриц. Считаем, что F_n — нормированная матрица дискретного преобразования Фурье:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

где $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ — первообразный корень n-й степени из единицы.

Пусть O_{km} — нулевая матрица размера $k \times m$. Через e_j будем обозначать n-мерный вектор с единицей в j-й позиции и нулями во всех остальных. Введем Q_j, $j = 1, 2$, как $n \times n$-матрицы, задаваемые формулами

$$Q_j = \mathcal{P}_j \oplus \mathcal{P}_{n-j}. \tag{1.24}$$

Определим еще матрицы Q_c и Q_s вида

$$Q_c = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ldots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

$$Q_s = \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Из определений Q_c и Q_s имеем

$$Q_c = Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n. \tag{1.27}$$

Условимся, что $\Re\, a$ означает вещественную часть a, $\Im\, a$ — комплексную часть той же величины.

Для диагональной матрицы

$$D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_{n-1}, d_n) \tag{1.28}$$

определим две специальные диагональные матрицы

$$\widehat{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_n, d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_2), \tag{1.29}$$

$$\widetilde{D} = \operatorname{diag}(d_2, d_1, d_n, d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_3). \tag{1.30}$$

Также будем использовать специальную диагональную матрицу

$$G_\varphi = \operatorname{diag}\left(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1}\right), \quad \psi^n = \varphi. \tag{1.31}$$

Пусть x — вещественный вектор вида

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top, \tag{1.32}$$

тогда под модулем x будем понимать величину $|x|$, определяемую формулой

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{1.33}$$

Для произвольных векторов x и y одинаковой размерности обозначим через (x, y) их скалярное произведение.

Если a — вещественное положительное число, то будем считать, что $\lfloor a \rfloor$ — целая часть a снизу, $\lceil a \rceil$ — целая часть сверху. Зададим параметр l как $l = \lfloor n/2 \rfloor$.

1.2 Вспомогательные факты

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных фактов, которыми будем пользоваться при изложении основного материала.

1.2.1 Матрицы специальных видов

Рассмотрим две введенные выше $(n-1)\times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Докажем для этих матриц важную лемму, которая справедлива как в вещественном, так и в комплексном случае. Эта лемма позаимствована из [4]. Мы приведем свое доказательство.

Лемма 1.2.1. *Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — $(n-1)\times 2$-матрицы вида (1.20),* $\operatorname{rank}\mathcal{F} = \operatorname{rank}\mathcal{G} = 2$. *Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ удовлетворяют условиям*

$$\triangle^{\mathcal{F}}_{km} = \triangle^{\mathcal{G}}_{km}, \qquad k, m = 1, \ldots, n-1, \tag{1.34}$$

тогда и только тогда, когда найдется 2×2-матрица W вида (1.5) с определителем, равным единице, такая, что

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}W. \tag{1.35}$$

Доказательство леммы 1.2.1. Достаточность условия леммы очевидна. Покажем его необходимость. Пусть выполнены соотношения (1.34). Введем обозначения: если $\mathcal{Z}$ — $(n-1)\times 2$-матрица, то $\mathcal{Z}^{(j_1,j_2)}$ — 2×2-подматрица в $\mathcal{Z}$, образованная j_1-й и j_2-й строками; $\mathcal{Z}^{(j_1,j_2,j_3)}$ — 3×2-подматрица в $\mathcal{Z}$, полученная из j_1-й, j_2-й и j_3-й строк. В качестве $\mathcal{Z}$ будем рассматривать $\mathcal{F}$ или $\mathcal{G}$.

Из условия $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 2$ следует, что найдутся числа $k_0, m_0 \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $k_0 \neq m_0$, такие, что

$$\triangle^{\mathcal{F}}_{k_0,m_0} \neq 0. \tag{1.36}$$

Тогда $\triangle^{\mathcal{G}}_{k_0,m_0} \neq 0$. Определим 2×2-матрицу W по правилу

$$W = \left(\mathcal{F}^{(k_0,m_0)}\right)^{-1} \mathcal{G}^{(k_0,m_0)}. \tag{1.37}$$

Из (1.34) и (1.37) следует, что $\det W = 1$. Вычислим $(n-1)\times 2$-матрицу $\mathcal{Q} = \mathcal{F}W$ и докажем, что $\mathcal{G} = \mathcal{Q}$. Доказательство проведем от противного. Пусть $\mathcal{G} \neq \mathcal{Q}$. Обозначим через r_0 номер строки элемента, различного в матрицах $\mathcal{G}$ и $\mathcal{Q}$. Определим две матрицы $\mathcal{J}_1 = \mathcal{G}^{(k_0,m_0,r_0)}$ и $\mathcal{J}_2 = Q^{(k_0,m_0,r_0)}$. Из (1.37) следует, что у $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ первые две строки совпадают, а третьи, по нашему предположению, различны, т.е.

$$\mathcal{J}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{J}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \triangle_{1,3}^{\mathcal{J}} = \triangle_{k_0,r_0}^{\mathcal{F}}, \\ \triangle_{2,3}^{\mathcal{J}} = \triangle_{m_0,r_0}^{\mathcal{F}}, \end{cases} \tag{1.38}$$

где матрица $\mathcal{J}$, равная $\mathcal{J}_1$ или $\mathcal{J}_2$, имеет вид

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ x & y \end{bmatrix}.$$

В силу (1.36)

$$ad - bc \neq 0. \tag{1.39}$$

Запишем (1.38) более подробно:

$$\begin{cases} ay - bx = \triangle_{k_0,r_0}^{\mathcal{F}}, \\ cy - dx = \triangle_{m_0,r_0}^{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Данная линейная система относительно пары (x, y) имеет два различных решения: (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Следовательно, ее определитель

$$-ad + bc = -(ad - bc)$$

должен быть равен нулю. Получаем противоречие с (1.39). Значит, $\mathcal{G} = \mathcal{Q}$. ■

При изложении материала будем пользоваться леммой, связывающей две одноранговые матрицы.

Лемма 1.2.2. *Пусть даны две одноранговые матрицы: $\mathcal{Q} = xy^\top$, $\mathcal{R} = uv^\top$, где x, y, u и v — n-мерные векторы. Тогда из равенства $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$ следует существование такого ненулевого числа α, что $u = \alpha x$, $v = \frac{1}{\alpha} y$.*

Доказательство леммы 1.2.2. Так как $\mathcal{Q}$ — одноранговая матрица, то $x \neq 0$, т.е. существует такой индекс k, что $x_k \neq 0$. Тогда и $u_k \neq 0$; действительно, если $u_k = 0$, то у матрицы $\mathcal{R}$ k-я строка нулевая, а поэтому и у матрицы $\mathcal{Q}$ k-я строка нулевая. Поскольку $x_k \neq 0$, то $y = 0$ и, значит, матрица $\mathcal{Q}$ нулевая, вопреки условию. Положим $\alpha = u_k/x_k$.

Равенство $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$ эквивалентно условиям

$$x_j y_m = u_j v_m, \qquad j, m = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.40}$$

из которых вытекают, в частности, соотношения

$$x_k y_m = u_k v_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что

$$v_m = \frac{1}{\alpha} y_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Выберем m_0 такое, что $y_{m_0} \neq 0$. Тогда $v_{m_0} \neq 0$ и $v_{m_0} = \frac{1}{\alpha} y_{m_0}$. Запишем равенства (1.40) для $m = m_0$ и всех j:

$$x_j y_{m_0} = u_j v_{m_0}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти соотношения означают, что

$$u_j = \alpha x_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

■

1.2.2 Циркулянты

Теперь напомним важные факты относительно циркулянтов, косых циркулянтов и φ-циркулянтов.

Основным утверждением данного раздела является лемма о спектральном разложении циркулянта. Однако прежде чем ее формулировать, установим критерии принадлежности матрицы множествам циркулянтов и косых циркулянтов. Большинство фактов позаимствованы из [2], а также из работы [30], о чем скажут ссылки на источники при формулировании соответствующих утверждений.

Лемма 1.2.3. [2] *Матрица C является циркулянтом тогда и только тогда, когда она перестановочна с матрицей Q_c (см.*

(1.25)):

$$CQ_c = Q_c C. \tag{1.41}$$

Доказательство леммы 1.2.3. Пусть матрица C имеет элементы $\{C\}_{k,m} = c_{km}$. Вычислим значения $\{CQ_c\}_{k,m}$ и $\{Q_cC\}_{k,m}$:

$$\{CQ_c\}_{k,m} = \begin{cases} c_{k,1}, & m = n, \\ c_{k,m+1}, & m \neq n, \end{cases}$$

$$\{Q_cC\}_{k,m} = \begin{cases} c_{n,m}, & k = 1, \\ c_{k-1,m}, & k \neq 1. \end{cases}$$

Заменим (1.41) поэлементными равенствами. Если $m \neq n$ и $k \neq 1$, то полученные соотношения означают, что элементы матрицы C зависят от разности столбцового и строчного индексов $\{C\}_{k,m} = c_{m-k}$. Для $k = 1$ и $m \neq n$ имеем

$$c_{1,m+1} = c_{n,m},$$

что идентично условию

$$c_{-(n-m)} = c_m.$$

Таким образом, условие (1.41) эквивалентно тому, что матрица C является циркулянтом. ■

Другой критерий, выделяющий циркулянты среди всех теплицевых матриц, связан с наличием у циркулянтов собственного вектора специального вида.

Лемма 1.2.4. [30] *Теплицева матрица C является циркулянтом тогда и только тогда, когда вектор g, составленный из одних единиц, является собственным для C.*

Доказательство леммы 1.2.4. Докажем вначале достаточность условия леммы. Пусть теплицева матрица C имеет элементы $\{C\}_{k,m} = c_{m-k}$. Предположим, что выполнено равенство

$$Cg = \lambda g. \tag{1.42}$$

Рассмотрим равенство (1.42) в позициях j и $j+1$:

$$\sum_{p=1}^{n} c_{p-j} = \lambda, \tag{1.43}$$

$$\sum_{p=1}^{n} c_{p-j-1} = \lambda. \tag{1.44}$$

Вычитая (1.44) из (1.43), имеем

$$\sum_{p=1}^{n} c_{p-j-1} - \sum_{p=1}^{n} c_{p-j} = 0.$$

Меняя индекс суммирования p в первой сумме на $r = p - 1$ и полагая $r = p$ во второй сумме, получаем условие

$$\sum_{r=0}^{n-1} c_{r-j} - \sum_{r=1}^{n} c_{r-j} = 0,$$

которое идентично соотношению

$$c_{-j} = c_{n-j}.$$

Это доказывает, что матрица C — циркулянт.

Если C — циркулянт, то условие (1.42) всегда выполнено, так как у циркулянта строчные суммы равны. ■

Лемма 1.2.5. **[2]** *Матрица S является косым циркулянтом тогда и только тогда, когда она перестановочна с матрицей Q_s (см. (1.26)):*

$$SQ_s = Q_sS. \tag{1.45}$$

Доказательство леммы 1.2.5. Пусть матрица S имеет элементы $\{S\}_{k,m} = s_{km}$. Вычислим значения $\{SQ_s\}_{k,m}$ и $\{Q_sS\}_{k,m}$:

$$\{SQ_s\}_{k,m} = \begin{cases} -s_{k,1}, & m = n, \\ s_{k,m+1}, & m \neq n, \end{cases}$$

$$\{Q_sS\}_{k,m} = \begin{cases} -s_{n,m}, & k = 1, \\ s_{k-1,m}, & k \neq 1. \end{cases}$$

Заменяя (1.45) поэлементными равенствами и рассматривая их для $m \neq n$ и $k \neq 1$, заключаем, что элементы матрицы S зависят от разности столбцового и строчного индексов $\{S\}_{k,m} = s_{m-k}$. Для $k = 1$ и $m \neq n$ имеем

$$s_{1,m+1} = -s_{n,m},$$

или

$$s_{-(n-m)} = -s_m.$$

Значит, условие (1.45) эквивалентно тому, что матрица S является косым циркулянтом. ■

Для обоснования леммы о спектральном разложении циркулянта нам понадобится следующий факт.

Лемма 1.2.6. [2] *Нормированная матрица дискретного преобразования Фурье F_n (см. (1.23)) является унитарной.*

Доказательство леммы 1.2.6. Вычислим элемент матрицы $F_n F_n^*$ в позиции (k, m):

$$\{F_n F_n^*\}_{km} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{(k-1)(r-1)} \overline{\varepsilon^{(r-1)(m-1)}} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\varepsilon^{k-m}\right)^{r-1} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ \frac{\varepsilon^{n(k-m)}-1}{n\left(\varepsilon^{k-m}-1\right)} = 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Следовательно, $F_n F_n^* = I_n$. ■

Теперь докажем лемму о спектральном разложении циркулянта.

Лемма 1.2.7. [2] *Для комплексного или вещественного циркулянта C вида (1.2) и порядка n с первым столбцом $c = (c_0, c_{n-1}, \dots, c_1)^\top$ имеет место разложение*

$$C = F_n^* \mathrm{diag}\,(F_n c)\, F_n, \tag{1.46}$$

где F_n — нормированная матрица дискретного преобразования Фурье. Кроме того, для любой диагональной матрицы D матрица $F_n^* D F_n$ является циркулянтом.

Доказательство леммы 1.2.7. Рассмотрим число

$$\lambda(\varepsilon) = c_0 + \varepsilon c_{n-1} + \varepsilon^2 c_{n-2} + \ldots + \varepsilon^{n-1} c_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ \vdots \\ c_1 \end{bmatrix}$$

и будем последовательно умножать его на степени числа ε, учитывая, что $\varepsilon^n = 1$. Если сохранять порядок суммирования по возрастанию степеней ε, то запись в таком виде числа $\varepsilon\lambda(\varepsilon)$ может быть получена сдвигом коэффициентов c_0, c_{n-1}, c_{n-2}, …, c_1 вправо на одну позицию и переносом последнего коэффициента на первое место. Аналогичное правило действует для умножения на ε в более высокой степени. Поэтому справедливы равенства

$$\varepsilon\lambda(\varepsilon) = c_1 + \varepsilon c_0 + \varepsilon^2 c_{n-1} + \ldots + \varepsilon^{n-1} c_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon^2\lambda(\varepsilon) = c_2 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_0 + \ldots + \varepsilon^{n-1} c_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \\ \vdots \\ c_3 \end{bmatrix},$$

и т. д.

Таким образом, имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix} C = \lambda(\varepsilon) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix}.$$

В этих выкладках ε может быть любым корнем n-й степени из единицы. Поэтому полученное равенство выполняется не только для первой, но и для любой строки матрицы F_n. Следовательно,

$$F_nC = \begin{bmatrix} \lambda(1) & & & 0 \\ & \lambda(\varepsilon) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda\left(\varepsilon^{n-1}\right) \end{bmatrix} F_n$$

и элементы диагональной матрицы составляют вектор $F_n c$. В силу леммы 1.2.6 получаем соотношение (1.46).

Возьмем теперь произвольную диагональную матрицу D вида (1.28) и рассмотрим матрицу $A = F_n^* D F_n$. Ее элемент в позиции (k, m) имеет вид

$$\{F_n^* D F_n\}_{km} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \overline{\varepsilon^{(k-1)(r-1)}} d_r \varepsilon^{(r-1)(m-1)} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{(m-k)(r-1)} d_r.$$

Значит, матрица A теплицева. Предположим, что она имеет элементы первой строки $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ и элементы первого столбца (без диагонального) $a_{-1}, \ldots, a_{-(n-1)}$. Тогда

$$a_{-j} = \{F_n^* D F_n\}_{j+1,1} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{-j(r-1)} d_r,$$

$$a_{n-j} = \{F_n^* D F_n\}_{1,n+1-j} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{(n-j)(r-1)} d_r = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{-j(r-1)} d_r.$$

Получаем, что A — циркулянт. ■

Благодаря этой лемме можно ввести еще один способ задания циркулянта. А именно, произвольный циркулянт C однозначно определяется упорядоченным набором чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$, задающих диагональную матрицу $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ в представлении

$$C = F_n^* D F_n. \tag{1.47}$$

Из данной леммы легко получить утверждения о перестановочности двух циркулянтов и циркулянтности произведения циркулянтов.

Лемма 1.2.8. *Циркулянты C_1 и C_2 одинакового порядка n коммутируют.*

Доказательство леммы 1.2.8. Представим циркулянты C_1 и C_2 в виде

$$C_1 = F_n^* D_1 F_n,$$

$$C_2 = F_n^* D_2 F_n,$$

где D_1 и D_2 — диагональные матрицы. Тогда

$$C_1C_2 = F_n^* D_1 F_n F_n^* D_2 F_n = \{\text{по лемме } 1.2.6\} = F_n^* D_1 D_2 F_n =$$

$$= \{\text{диагональные матрицы } D_1 \text{ и } D_2 \text{ коммутируют}\} =$$

$$= F_n^* D_2 D_1 F_n = \{\text{по лемме } 1.2.6\} = F_n^* D_2 F_n F_n^* D_1 F_n = C_2 C_1.$$

■

В дальнейшем мы часто будем использовать лемму 1.2.6, опуская ссылку на нее.

Лемма 1.2.9. *Произведение циркулянтов C_1 и C_2 одинакового порядка n является циркулянтом.*

Доказательство леммы 1.2.9. Представим циркулянты C_1 и C_2 в виде

$$C_1 = F_n^* D_1 F_n,$$

$$C_2 = F_n^* D_2 F_n,$$

где D_1 и D_2 — диагональные матрицы. Пусть $D = D_1 D_2$, тогда

$$C_1C_2 = F_n^* D_1 F_n F_n^* D_2 F_n = F_n^* D_1 D_2 F_n = F_n^* D F_n = C_3.$$

По лемме 1.2.7 матрица C_3 является циркулянтом. ■

Так как сумма двух циркулянтов является циркулянтом и аналогичное утверждение справедливо для произведения (лемма 1.2.9), получаем, что множество циркулянтов замкнуто относительно операций сложения и умножения.

Установим теперь связь между циркулянтами и φ-циркулянтами.

Лемма 1.2.10. [2] *Пусть $\varphi \neq 0$ и ψ — любое число, удовлетворяющее условию $\psi^n = \varphi$. Тогда любой φ-циркулянт T однозначно представим в виде*

$$T = G_\varphi C G_\varphi^{-1}, \tag{1.48}$$

где диагональная матрица G_φ определяется формулой (1.31), а C — циркулянт.

Доказательство леммы 1.2.10. Рассмотрим элемент матрицы $C = G_\varphi^{-1} T G_\varphi$ в позиции (k, m):

$$\{C\}_{km} = \left\{G_\varphi^{-1} T G_\varphi\right\}_{km} =$$

$$= \begin{cases} \psi^{-k+1} t_{m-k} \psi^{m-1} = t_{m-k} \psi^{m-k}, & m > k, \\ \psi^{-k+1} \psi^n t_{n+m-k} \psi^{m-1} = t_{n+m-k} \psi^{n+m-k}, & m < k. \end{cases}$$

Таким образом, исследуемый элемент зависит лишь от разности столбцового и строчного индексов. Значит, C — теплицева матрица: $\{C\}_{km} = c_{m-k}$. Покажем, что матрица C является циркулянтом. Имеем для $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$c_{n-j} = \{C\}_{1,n-j+1} = t_{n-j} \psi^{n-j},$$

$$c_{-j} = \{C\}_{j+1,1} = t_{n-j} \psi^{n-j}.$$

Получаем, что $c_{-j} = c_{n-j}$. Следовательно, C — циркулянт. ■

Комбинируя леммы 1.2.7 и 1.2.10, приходим к утверждению о спектральном разложении φ-циркулянта.

Лемма 1.2.11. [2] *Пусть $\varphi \neq 0$ и ψ — любое число, удовлетворяющее условию $\psi^n = \varphi$. Тогда любой φ-циркулянт T может быть представлен в виде*

$$T = G_\varphi F_n^* D F_n G_\varphi^{-1}, \tag{1.49}$$

где F_n — нормированная матрица дискретного преобразования Фурье, D — диагональная матрица. Наоборот, всякая матрица вида (1.49) является φ-циркулянтом.

Условимся, что если $\varphi = |\varphi| e^{i \arg \varphi}$, то $\psi = |\varphi|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg \varphi}{n}}$ в определении матрицы G формулой (1.31).

Рассмотрим частный случай φ-циркулянтов, а именно косые циркулянты. Для них $\varphi = -1$. Тогда в матрице G_{-1} значение $\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$ и $G_{-1}^{-1} = G_{-1}^*$. Лемма 1.2.11 принимает следующий вид.

Лемма 1.2.12. *Для любого косого циркулянта S порядка n справедливо разложение*

$$S = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^*, \tag{1.50}$$

где F_n — нормированная матрица дискретного преобразования Фурье, D — диагональная матрица.

Для косых циркулянтов справедливы аналоги лемм 1.2.8 и 1.2.9.

Лемма 1.2.13. *Косые циркулянты S_1 и S_2 одинакового порядка n коммутируют.*

Доказательство леммы 1.2.13. Представим косые циркулянты S_1 и S_2 в виде

$$S_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

$$S_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*,$$

где D_1 и D_2 — диагональные матрицы. Тогда

$$S_1 S_2 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* = G_{-1} F_n^* D_1 D_2 F_n G_{-1}^* =$$

$$= \{\text{диагональные матрицы } D_1 \text{ и } D_2 \text{ коммутируют}\} =$$

$$= G_{-1} F_n^* D_2 D_1 F_n G_{-1}^* = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* = S_2 S_1.$$

■

Следующая лемма показывает, что множество косых циркулянтов также замкнуто относительно не только сложения, но и умножения.

Лемма 1.2.14. *Произведение косых циркулянтов S_1 и S_2 одинакового порядка n является косым циркулянтом.*

Доказательство леммы 1.2.14. Запишем косые циркулянты S_1 и S_2 как

$$S_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

$$S_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*,$$

где D_1 и D_2 — диагональные матрицы. Пусть $D = D_1 D_2$, тогда

$$S_1 S_2 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* =$$

$$= G_{-1} F_n^* D_1 D_2 F_n G_{-1}^* = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^* = S_3.$$

По лемме 1.2.12 матрица S_3 является косым циркулянтом. ■

Однако справедливо более общее утверждение.

Лемма 1.2.15. *Произведение произвольных φ-циркулянтов T_1 и T_2 одинакового порядка n является φ-циркулянтом.*

Доказательство леммы 1.2.15. Используя спектральное разложение φ-циркулянтов, представим матрицы T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = G_\varphi F_n^* D_1 F_n G_\varphi^{-1},$$

$$T_2 = G_\varphi F_n^* D_2 F_n G_\varphi^{-1},$$

где D_1 и D_2 — диагональные матрицы. Пусть $D = D_1 D_2$, тогда

$$T_1 T_2 = G_\varphi F_n^* D_1 F_n G_\varphi^{-1} G_\varphi F_n^* D_2 F_n G_\varphi^{-1} =$$

$$= G_\varphi F_n^* D_1 D_2 F_n G_\varphi^{-1} = G_\varphi F_n^* D F_n G_\varphi^{-1} = T_3.$$

По лемме 1.2.11 матрица T_3 является φ-циркулянтом. ■

Теперь установим связь между циркулянтами, косыми циркулянтами и произвольными теплицевыми матрицами.

Лемма 1.2.16. [2] *Любая теплицева матрица T представима в виде*

$$T = C + S, \tag{1.51}$$

где C — циркулянт, S — косой циркулянт и одна из матриц C или S имеет нулевую диагональ.

Доказательство леммы 1.2.16. По условию леммы одна из матриц C или S имеет нулевую диагональ, поэтому диагональ второй матрицы должна совпадать с диагональю T.

Пусть матрица T имеет первой строкой вектор $(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ и первым столбцом — вектор $\left(t_0, t_{-1}, \ldots, t_{-(n-1)}\right)^\top$. Далее, пусть вектор $(c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1})$ будет первой строкой матрицы C, а вектор $(s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_{n-1})$ — первой строкой матрицы S. Напомним, что $c_0 s_0 = 0$. Тогда условие (1.51) равносильно совокупности соотношений

$$t_j = c_j + s_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$t_{-(n-j)} = c_{-(n-j)} + s_{-(n-j)} = c_j - s_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Для $j = 1, 2, \ldots, n-1$ имеем

$$\begin{cases} c_j + s_j = t_j, \\ c_j - s_j = t_{-(n-j)}, \end{cases}$$

откуда однозначно определяем

$$c_j = \frac{t_j + t_{-(n-j)}}{2}, \quad s_j = \frac{t_j - t_{-(n-j)}}{2}.$$

■

Как было показано, циркулянт в (1.47) и косой циркулянт в (1.50) однозначно определяются не только спектром, но и порядком диагональных элементов матрицы D. Исследуем вопрос о том, как меняется этот порядок при транспонировании и применении операции комплексного сопряжения для циркулянтов и косых циркулянтов, доказав предварительно некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1.2.17. *Справедливо равенство*

$$F_n^2 = Q_1,$$

где Q_1 определяется формулой (1.24).

Доказательство леммы 1.2.17. Элемент матрицы F_n^2 в позиции (k, m) равен

$$\{F_n^2\}_{km} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{(k-1)(r-1)}\varepsilon^{(r-1)(m-1)} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{(r-1)(k+m-2)}.$$

Поэтому $\{F_n^2\}_{km} = 1$ при $k = m = 1$ и $m = n + 2 - k$. В остальных позициях $\{F_n^2\}_{km} = 0$. Отсюда получаем равенство $F_n^2 = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_{n-1}$. ■

Лемма 1.2.18. *Пусть циркулянт C имеет разложение*

$$C = F_n^* D F_n,$$

где $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — диагональная матрица. Тогда для $C^\top$ справедливо представление

$$C^\top = F_n^* \widehat{D} F_n \tag{1.52}$$

с диагональной матрицей $\widehat{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_n, d_{n-1}, \ldots, d_3, d_2)$ (см. (1.29)).

Доказательство леммы 1.2.18. Запишем матрицу $C^\top$ в виде

$$C^\top = F_n D F_n^* = F_n^* F_n^2 D \left(F_n^*\right)^2 F_n =$$

$$= \{\text{в силу леммы 1.2.17}\} = F_n^* Q_1 D Q_1 F_n = F_n^* \widehat{D} F_n.$$

■

Лемма 1.2.19. *Пусть циркулянт C имеет разложение*

$$C = F_n^* D F_n,$$

где $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ — диагональная матрица. Тогда для $\overline{C}$ справедливо представление

$$\overline{C} = F_n^* \overline{\widehat{D}} F_n$$

с диагональной матрицей $\widehat{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_n, d_{n-1}, \dots, d_3, d_2)$ (см. (1.29)).

Доказательство леммы 1.2.19. Запишем матрицу $\overline{C}$ как

$$\overline{C} = F_n \overline{D} F_n^* = F_n^* F_n^2 \overline{D} \left(F_n^*\right)^2 F_n =$$

$$= \{\text{в силу леммы 1.2.17}\} = F_n^* Q_1 \overline{D} Q_1 F_n = F_n^* \overline{\widehat{D}} F_n.$$

■

Лемма 1.2.20. *Справедливо соотношение*

$$F_n G_\xi^{-1} G_\xi^* F_n = Q_2, \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad \xi < 0,$$

где Q_2 определяется формулой (1.24).

Доказательство леммы 1.2.20. Представим $\xi = |\xi| e^{i\pi}$, тогда в определении матрицы G_ξ формулой (1.31) величина $\psi = |\xi|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\pi}{n}} = |\xi|^{\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Имеем

$$\left\{F_n G_\xi^{-1} G_\xi^* F_n\right\}_{km} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{(k-1)(r-1)} \frac{1}{|\xi|^{\frac{r-1}{n}}} \varepsilon^{-\frac{r-1}{2}} |\xi|^{\frac{r-1}{n}} \varepsilon^{-\frac{r-1}{2}} \varepsilon^{(r-1)(m-1)} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{(r-1)(k+m-3)}.$$

Эта сумма отлична от нуля, если $k+m=3$ или $k+m=n+3$. Приходим к равенству $F_n G_{\xi}^{-1} G_{\xi}^{*} F_n = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_{n-2}$. ■

Лемма 1.2.21. *Пусть косой циркулянт S имеет разложение*

$$S = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^*,$$

где $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — диагональная матрица. Тогда для $S^\top$ справедливо представление

$$S^\top = G_{-1} F_n^* \widetilde{D} F_n G_{-1}^* \tag{1.53}$$

с диагональной матрицей $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(d_2, d_1, d_n, d_{n-1}, \ldots, d_3)$ (см. (1.30)).

Доказательство леммы 1.2.21. Преобразуем выражение для матрицы $S^\top$:

$$S^\top = G_{-1}^* F_n D F_n^* G_{-1} =$$

$$= G_{-1} F_n^* F_n G_{-1}^* \left(G_{-1}^* F_n D F_n^* G_{-1}\right) G_{-1} F_n^* F_n G_{-1}^* =$$

$$= G_{-1} F_n^* \left(F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n\right) D \left(F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n\right)^* F_n G_{-1}^* =$$

$$= \left\{\text{в силу леммы 1.2.20 и условия } G_{-1}^{-1} = G_{-1}^*\right\} =$$

$$= G_{-1} F_n^* Q_2 D Q_2 F_n G_{-1}^* = G_{-1} F_n^* \widetilde{D} F_n G_{-1}^*.$$

■

Лемма 1.2.22. *Пусть косой циркулянт S имеет разложение*

$$S = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^*,$$

где $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — диагональная матрица. Тогда для $\overline{S}$ справедливо представление

$$\overline{S} = G_{-1} F_n^* \overline{\widetilde{D}} F_n G_{-1}^* \tag{1.54}$$

с диагональной матрицей $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(d_2, d_1, d_n, d_{n-1}, \ldots, d_3)$ (см. (1.30)).

Доказательство леммы 1.2.22. Рассмотрим и модифицируем выражение для матрицы $\overline{S}$:

$$\overline{S} = G_{-1}^* F_n \overline{D} F_n^* G_{-1} =$$

$$= G_{-1}F_n^*F_nG_{-1}^*\left(G_{-1}^*F_n\overline{D}F_n^*G_{-1}\right)G_{-1}F_n^*F_nG_{-1}^* =$$

$$= G_{-1}F_n^*\left(F_n\left(G_{-1}^*\right)^2F_n\right)\overline{D}\left(F_n\left(G_{-1}^*\right)^2F_n\right)^*F_nG_{-1}^* =$$

$$= \left\{\text{в силу леммы 1.2.20 и условия } G_{-1}^{-1} = G_{-1}^*\right\} =$$

$$= G_{-1}F_n^*Q_2\overline{D}Q_2F_nG_{-1}^* = G_{-1}F_n^*\overline{\widetilde{D}}F_nG_{-1}^*.$$

■

Нам понадобятся еще условия на спектр циркулянта или косого циркулянта, обеспечивающие их вещественность или косую симметрию.

Лемма 1.2.23. *Циркулянт C со спектральным разложением (1.47) является вещественной матрицей тогда и только тогда, когда*

$$\begin{array}{ll} \Im\, d_1 = 0, & \\ d_j = \overline{d}_{n+2-j}, & j = 2, 3, \ldots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil. \end{array} \tag{1.55}$$

Доказательство леммы 1.2.23. Запишем условие вещественности циркулянта C, используя спектральное разложение (1.47):

$$F_n^*DF_n = \overline{F_n^*DF_n},$$

или

$$F_n^*DF_n = F_n\overline{D}F_n^*.$$

После умножения слева и справа на F_n приходим к соотношению

$$DF_n^2 = F_n^2\overline{D}.$$

Учитывая лемму 1.2.17, имеем

$$DQ_1 = Q_1\overline{D}. \tag{1.56}$$

Из условия (1.56) получаем соотношения (1.55). ■

Лемма 1.2.24. *Циркулянт C со спектральным разложением (1.47) является кососимметричной матрицей тогда и только тогда, когда*

$$\begin{array}{ll} d_1 = 0, & \\ d_j = -d_{n+2-j}, & j = 2, 3, \ldots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil. \end{array}$$

Доказательство леммы 1.2.24. Запишем условие кососимметричности циркулянта C, используя спектральное разложение (1.47) и лемму 1.2.18:

$$F_n^* D F_n = -F_n^* \widehat{D} F_n,$$

или

$$D = -\widehat{D}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. ■

Лемма 1.2.25. *Пусть S — косой циркулянт, для которого записано спектральное разложение (1.50) с $\varphi = -1$, и пусть $\psi = e^{i\frac{\pi}{n}}$ в определении (1.31). Матрица S является вещественной тогда и только тогда, когда*

$$d_1 = \overline{d}_2, \qquad d_j = \overline{d}_{n+3-j}, \qquad j = 3, \ldots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1. \tag{1.57}$$

Доказательство леммы 1.2.25. Запишем условие вещественности матрицы S, имеющей разложение (1.50):

$$G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^* = G_{-1}^* F_n \overline{D} F_n^* G_{-1}.$$

Умножение слева на $F_n G_{-1}^*$, а справа на $G_{-1}^* F_n$ приводит к равенству

$$D F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n = F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n \overline{D}.$$

Используя лемму 1.2.20 при $\xi = -1$ и соотношение $G_{-1}^{-1} = G_{-1}^*$, имеем

$$F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n = Q_2 = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_{n-2}.$$

Вместе с предыдущим равенством это дает соотношения (1.57). ■

Лемма 1.2.26. *Пусть S — косой циркулянт, для которого записано спектральное разложение (1.50) с $\varphi = -1$, и пусть $\psi = e^{i\frac{\pi}{n}}$ в определении (1.31). Матрица S является кососимметричной тогда и только тогда, когда*

$$d_1 = -d_2, \qquad d_j = -d_{n+3-j}, \qquad j = 3, \ldots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1. \tag{1.58}$$

Доказательство леммы 1.2.26. Запишем условие кососимметричности косого циркулянта S, используя спектральное разложение (1.50):

$$G_{-1}F_n^*DF_nG_{-1}^* = -G_{-1}^*F_nDF_n^*G_{-1}.$$

Умножение слева на $F_nG_{-1}^*$, а справа на $G_{-1}^*F_n$ приводит к равенству

$$DF_n\left(G_{-1}^*\right)^2F_n = -F_n\left(G_{-1}^*\right)^2F_nD.$$

Учитывая лемму 1.2.20 при $\xi = -1$ и соотношение $G_{-1}^{-1} = G_{-1}^*$, имеем

$$F_n\left(G_{-1}^*\right)^2F_n = Q_2 = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_{n-2}.$$

Вместе с предыдущим равенством это дает соотношения (1.58). ■

1.2.3 Теплицевы матрицы

Установим теперь некоторые вспомогательные факты относительно произвольных теплицевых матриц. Начнем с доказательства персимметричности, т.е. выполнения свойства (1.14).

Лемма 1.2.27. *Если T — теплицева матрица, то*

$$\mathcal{P}_nT\mathcal{P}_n = T^\top. \tag{1.59}$$

Доказательство леммы 1.2.27. Рассмотрим элемент матрицы $\mathcal{P}_nT\mathcal{P}_n$ в произвольной позиции (k,m):

$$\{\mathcal{P}_nT\mathcal{P}_n\}_{k,m} = \{T\}_{n+1-k,n+1-m} =$$
$$= t_{(n+1-m)-(n+1-k)} = t_{k-m} = \left\{T^\top\right\}_{k,m}.$$

■

Из леммы 1.2.27 получаем такое следствие:

Следствие 1.2.1. *Если T — теплицева матрица, то*

$$\mathcal{P}_nT = T^\top\mathcal{P}_n. \tag{1.60}$$

Следующий факт, хоть и является вспомогательным, может рассматриваться как важное самостоятельное утверждение.

Лемма 1.2.28. *Пусть $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ — ненулевые кососимметричные теплицевы $n \times n$-матрицы, удовлетворяющие условию*

$$\mathcal{QR} + \mathcal{RQ} = 0. \tag{1.61}$$

Тогда $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ являются одновременно циркулянтами либо косыми циркулянтами. И в том, и в другом случае они делят нуль, т.е. $\mathcal{QR} = \mathcal{RQ} = 0$.

Доказательство леммы 1.2.28. Пусть $\mathcal{Q}$ — теплицева матрица с элементами первой строки q_0, q_1, $\ldots$, q_{n-1} и элементами первого столбца (без диагонального) q_{-1}, $\ldots$, $q_{-(n-1)}$, а $\mathcal{R}$ — теплицева матрица с элементами первой строки r_0, r_1, $\ldots$, r_{n-1} и элементами первого столбца (без диагонального) r_{-1}, $\ldots$, $r_{-(n-1)}$.

Правая часть равенства (1.61), будучи нулевой матрицей, является теплицевой, поэтому и левая часть в (1.61) должна быть теплицевой матрицей, т.е.

$$\{\mathcal{QR} + \mathcal{RQ}\}_{k,m} = \{\mathcal{QR} + \mathcal{RQ}\}_{k+1,m+1}, \qquad k, m = 1, \ldots, n-1,$$

или подробно

$$\sum_{j=1}^{n} \{\mathcal{Q}\}_{k,j} \{\mathcal{R}\}_{j,m} + \sum_{j=1}^{n} \{\mathcal{R}\}_{k,j} \{\mathcal{Q}\}_{j,m} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \{\mathcal{Q}\}_{k+1,j} \{\mathcal{R}\}_{j,m+1} - \sum_{j=1}^{n} \{\mathcal{R}\}_{k+1,j} \{\mathcal{Q}\}_{j,m+1} = 0,$$

что приводит к условию

$$\sum_{j=1}^{n} q_{j-k} r_{m-j} - \sum_{j=1}^{n} q_{j-k-1} r_{m+1-j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} r_{j-k} q_{m-j} - \sum_{j=1}^{n} r_{j-k-1} q_{m+1-j} = 0.$$

Заменив индексы суммирования j на p по правилу: в первой и третьей суммах $p = j$, во второй и четвертой $p = j - 1$, получим соотношение

$$\sum_{p=1}^{n} q_{p-k} r_{m-p} - \sum_{p=0}^{n-1} q_{p-k} r_{m-p} + \sum_{p=1}^{n} r_{p-k} q_{m-p} - \sum_{p=0}^{n-1} r_{p-k} q_{m-p} = 0,$$

которое можно упростить до равенства

$$q_{n-k} r_{-(n-m)} - q_{-k} r_m + r_{n-k} q_{-(n-m)} - r_{-k} q_m = 0.$$

Так как $\mathcal{Q}^\top = -\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}^\top = -\mathcal{R}$, то $q_{-k} = -q_k$, $r_{-k} = -r_k$, поэтому имеем

$$q_{n-k} r_{n-m} - q_k r_m + r_{n-k} q_{n-m} - r_k q_m = 0.$$

Заменим переменную m на $j = n - m$:

$$q_{n-k} r_j - q_k r_{n-j} + r_{n-k} q_j - r_k q_{n-j} = 0,$$

или

$$q_{n-k} r_j - q_{n-j} r_k = q_k r_{n-j} - q_j r_{n-k}, \qquad k, j = 1, \ldots, n-1. \tag{1.62}$$

Введем в рассмотрение две вспомогательные $(n-1)\times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} q_{n-1} & r_1 \\ q_{n-2} & r_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_1 & r_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} q_1 & r_{n-1} \\ q_2 & r_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ q_{n-1} & r_1 \end{bmatrix}.$$

Тогда соотношение (1.62) примет вид

$$\triangle_{kj}^{\mathcal{F}} = \triangle_{kj}^{\mathcal{G}}. \tag{1.63}$$

Поскольку $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ кососимметричны, обе матрицы имеют нулевую диагональ. Поэтому из условий $\mathcal{Q} \neq 0$, $\mathcal{R} \neq 0$ следует, что $\mathcal{F} \neq 0$ и $\mathcal{G} \neq 0$. Значит, возможны лишь два случая: $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 1$ и $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 2$.

Разберем сначала случай $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 1$. Тогда в (1.63) все миноры $\triangle_{kj}^{\mathcal{F}} = 0$, а потому все миноры $\triangle_{kj}^{\mathcal{G}} = 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$, поскольку $\mathcal{G}$ — ненулевая матрица.

Так как $\mathcal{Q} \neq 0$, то первый столбец матрицы $\mathcal{F}$ ненулевой, а потому найдется ненулевое число α такое, что

$$r_j = \alpha q_{n-j}, \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{1.64}$$

Согласно лемме 1.2.16, любая кососимметричная теплицева матрица однозначно представима в виде суммы циркулянта и косого циркулянта, имеющих нулевую диагональ. Положим

$$\mathcal{Q} = C + S, \tag{1.65}$$

где C — циркулянт с первым столбцом 0, c_{-1}, …, $c_{-(n-1)}$ и первой строкой 0, c_1, …, c_{n-1}, а S — косой циркулянт с первым столбцом 0, s_{-1}, …, $s_{-(n-1)}$ и первой строкой $0, s_1, \ldots, s_{n-1}$. В силу кососимметричности $\mathcal{Q}$ имеем

$$C^\top + S^\top = -C - S,$$

или

$$C^\top + C = -\left(S^\top + S\right).$$

Последнее равенство возможно, только если $C^\top = -C$ и $S^\top = -S$.

Покажем, что в этом случае $\mathcal{R} = -\alpha(C - S)$. Действительно, в силу (1.64) и (1.65)

$$r_j = \alpha q_{n-j} = \alpha\left(c_{n-j} + s_{n-j}\right) = \alpha\left(c_{-j} - s_{-j}\right) = -\alpha\left(c_j - s_j\right).$$

Итак,

$$\mathcal{R} = -\alpha(C - S). \tag{1.66}$$

Подставляя (1.65) и (1.66) в (1.61),

$$-\alpha(C - S)(C + S) - \alpha(C + S)(C - S) = 0,$$

приходим к условию

$$C^2 + CS - SC - S^2 + C^2 - CS + SC - S^2 = 0,$$

которое упрощается до равенства

$$C^2 = S^2. \tag{1.67}$$

Поскольку C — циркулянт, по лемме 1.2.9 C^2 — тоже циркулянт. А в силу того, что S — косой циркулянт, то по лемме 1.2.14

S^2 — также косой циркулянт. Поэтому (1.67) означает, что

$$C^2 = S^2 = \xi I_n.$$

По лемме 1.2.4 вектор g, состоящий из одних единиц, является собственным для циркулянта C:

$$Cg = \lambda g.$$

Так как $\mathcal{P}_n g = g$, $\mathcal{P}_n C = -C\mathcal{P}_n$, то

$$\lambda g = \lambda \mathcal{P}_n g = \mathcal{P}_n (\lambda g) = \mathcal{P}_n (Cg) = -C\mathcal{P}_n g = -Cg = -\lambda g.$$

Отсюда выводим, что $\lambda = 0$. Поскольку $I_n g = g$, имеем

$$\xi g = \xi I_n g = C^2 g = 0.$$

Таким образом, $\xi = 0$ и $C^2 = 0$. Из представления $C = F^* D F$ получаем $D^2 = 0$. Отсюда следует, что $C = 0$. Из соотношения (1.67) заключаем, что и $S = 0$, а потому $\mathcal{Q} = 0$ в противоречии с условием, что матрица $\mathcal{Q}$ ненулевая.

Из проведенных рассуждений следует, что возможен лишь случай $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 2$. Тогда в (1.63) существует ненулевой минор $\triangle_{kj}^{\mathcal{F}}$ и, значит, ненулевой минор $\triangle_{kj}^{\mathcal{G}}$; поэтому $\operatorname{rank} \mathcal{G} = 2$. Согласно лемме 1.2.1 найдется 2×2-матрица

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

с определителем, равным единице, такая, что

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} W. \tag{1.68}$$

Заметим, что в данном случае $\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G} = \mathcal{F}$; поэтому, умножив равенство (1.68) слева на $\mathcal{P}_{n-1}$, получим

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} W. \tag{1.69}$$

Из (1.68) и (1.69) имеем

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} W = \mathcal{F} W^2,$$

или

$$\mathcal{F}\left(I_2 - W^2\right) = 0.$$

Введем в рассмотрение матрицу $\mathcal{F}^{(k,m)}$, получающуюся из $\mathcal{F}$ удалением всех строк, кроме k-й и m-й, и запишем последнее соотношение для этих двух строк

$$\mathcal{F}^{(k,m)}\left(I_2 - W^2\right) = 0.$$

Поскольку $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 2$, найдутся числа k_0 и m_0 такие, что $\det\mathcal{F}^{(k_0,m_0)} \neq 0$. Положив $k = k_0$, $m = m_0$, получаем

$$\mathcal{F}^{(k_0,m_0)}\left(I_2 - W^2\right) = 0,$$

откуда следует, что $W^2 = I_2$, т.е. W является инволютивной матрицей. Так как $\det W = 1$, то возможны два случая: $W = I_2$ и $W = -I_2$.

Если $W = I_2$, то $q_{n-k} = q_k = -q_{-k}$, т.е. $\mathcal{Q}$ — косой циркулянт. При $W = -I_2$ имеем $q_{n-k} = -q_k = q_{-k}$, т.е. $\mathcal{Q}$ — циркулянт. Аналогичные выводы справедливы для $\mathcal{R}$. При этом $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ одновременно являются циркулянтами либо косыми циркулянтами. Подстановка в (1.61) и перестановочность циркулянтов (косых циркулянтов) дают соотношение $\mathcal{QR} = 0$. ■

1.2.4 Нормальные матрицы

В заключение данной главы укажем вспомогательный факт, относящийся к нормальным матрицам.

Лемма 1.2.29. *Матрица $A + \alpha I_n$ является нормальной для произвольного числа α тогда и только тогда, когда сама матрица A нормальна.*

Доказательство леммы 1.2.29. Приведем обоснование данной леммы лишь для комплексного случая. В вещественном случае все выкладки аналогичны, различаются лишь заменой сопряжения на транспонирование и удалением знака комплексного сопряжения.

Справедлива цепочка равносильных преобразований:

$$\text{Матрица } A + \alpha I_n - \text{нормальная} \iff$$

$$\iff (A + \alpha I_n)(A + \alpha I_n)^* = (A + \alpha I_n)^*(A + \alpha I_n) \iff$$

$$\Longleftrightarrow (A+\alpha I_n)(A^*+\overline{\alpha} I_n) = (A^*+\overline{\alpha} I_n)(A+\alpha I_n) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow AA^* + \alpha A^* + \overline{\alpha} A + |\alpha|^2 I_n = A^*A + \alpha A^* + \overline{\alpha} A + |\alpha|^2 I_n \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow AA^* = A^*A \Longleftrightarrow \text{Матрица } A - \text{нормальная.}$$

■

Глава 2

НОРМАЛЬНЫЕ ТЕПЛИЦЕВЫ МАТРИЦЫ

В данной главе сформулируем и докажем критерии нормальности теплицевой матрицы в вещественном и комплексном случаях.

2.1 Критерий нормальности вещественной теплицевой матрицы

Задача описания нормальных теплицевых матриц, т.е. матриц вида (1.1) с условием (1.15), впервые была рассмотрена для вещественного случая в 1994-1995 гг. [20, 21]. Х.Д. Икрамов представил следующее ее решение:

Теорема 2.1.1. *Ненулевая теплицева матрица $T \in M_n(\mathbf{R})$ является нормальной тогда и только тогда, когда принадлежит хотя бы одному из следующих классов:*

Класс НТВМ_1. T — симметричная матрица.

Класс НТВМ_2. T — матрица вида $\alpha I_n + K$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, $K^\top = -K$.

Класс НТВМ_3. T — циркулянт.

Класс НТВМ_4. T — косой циркулянт.

Приводимое в разделах 2.1.1—2.1.2 доказательство данного результата основано на первоначальном доказательстве, однако дает более подробное обоснование некоторых вспомогательных фактов. Прежде чем его изложить, упомянем сначала вкратце и о другом опубликованном обосновании теоремы 2.1.1, которое примерно в то же время было представлено В.И. Гельфгатом в работе [16].

В основе доказательства В.И. Гельфгата лежала следующая идея. Представим теплицеву матрицу T в виде суммы циркулянта C и косого циркулянта S, которые, в свою очередь, разложим на симметричные и кососимметричные составляющие

$$T = C + S, \qquad C = C_s + C_a, \qquad S = S_s + S_a.$$

Это позволяет переписать условие нормальности вещественной теплицевой матрицы в терминах коммутаторов:

$$[C_s, S_a] = [C_a, S_s].$$

Очевидно, что все четыре матрицы C_s, C_a, S_s и S_a однозначно определяются своими первыми столбцами, которые обозначим через c_s, c_a, s_s и s_a. Применение некоторых соотношений коммутирования циркулянтов и косых циркулянтов с матрицами специального вида и учет различных типов симметрии (симметричность, кососимметричность, персимметричность) дают возможность перейти к системе относительно этих столбцов:

$$\begin{cases} c_s s_a^\top + s_a c_s^\top = c_a s_s^\top + s_s c_a^\top, \\ C_s s_a = C_a s_s. \end{cases}$$

Умножение первого уравнения полученной системы слева на $c_s^\top$ и справа на s_a, затем умножение слева на $c_a^\top$ и справа на s_s и, наконец, использование симметрий приводят к соотношениям двойственности для компонент векторов c_s, c_a, s_s и s_a (см. (1.32)—(1.33)):

$$\begin{cases} |c_s||s_a| = 0, \\ |c_a||s_s| = 0. \end{cases}$$

Из этих соотношений можно вывести четыре множества нормальных вещественных теплицевых матриц, описываемых теоремой 2.1.1.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2.1.1 из [20, 21].

2.1.1 Доказательство необходимости

2.1.1.1 Обнуление диагонали

Без ограничения общности диагональные элементы матрицы T можно считать нулями. Действительно, если $t_0 \neq 0$, то представим T в виде $T = t_0 I_n + T_0$, где T_0 отличается от T лишь нулем на главной диагонали.

В силу леммы 1.2.29 матрицы T и T_0 или обе нормальны, или обе не являются нормальными. Итак, работая в дальнейшем с матрицей T, считаем ее диагональный элемент t_0 нулевым.

2.1.1.2 Вспомогательные леммы

Для последующего анализа нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Как было показано, всякая теплицева матрица персимметрична (см. (1.59)), т.е. симметрична относительно диагонали $(1, n)$, $(2, n-1)$, ..., $(n, 1)$. Следующий критерий нормальности учитывает свойство персимметрии.

Лемма 2.1.1. *Для того чтобы теплицева матрица T была нормальной, необходима и достаточна персимметричность матрицы $TT^\top$.*

Доказательство леммы 2.1.1. Рассмотрим элемент матрицы $TT^\top$ в позиции (k, m):

$$\left\{TT^\top\right\}_{k,m} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g}\{T\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}t_{g-m} =$$

$$= \{\text{положим } g = n+1-r\} = \sum_{r=1}^{n} t_{n+1-r-k}t_{n+1-r-m} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} t_{(n+1-k)-r}t_{(n+1-m)-r} = \sum_{r=1}^{n} \{T\}_{r,n+1-k}\{T\}_{r,n+1-m} =$$

$$= \left\{T^\top T\right\}_{n+1-k,n+1-m} = \{\text{матрица } T^\top T \text{ симметрична}\} =$$

$$= \left\{T^\top T\right\}_{n+1-m,n+1-k}.$$

Если T — нормальная матрица, то $T^\top T = TT^\top$. Следовательно,

$$\left\{TT^\top\right\}_{k,m} = \left\{T^\top T\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k}.$$

Значит, матрица $TT^\top$ персимметрична.

Пусть, наоборот, известно, что матрица $TT^\top$ персимметрична. Тогда

$$\left\{T^\top T\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \left\{TT^\top\right\}_{k,m} = \left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k}.$$

Отсюда заключаем, что $T^\top T = TT^\top$, т.е. матрица T нормальна. ■

Лемма 2.1.1 позволяет вместо перестановочности матриц T и $T^\top$ проверять свойство персимметрии матрицы $TT^\top$, записанное в виде

$$\left\{TT^\top\right\}_{k,m} = \left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k}. \tag{2.1}$$

Условимся о такой терминологии. Всякие четыре элемента матрицы T вида

$$t_j,\ t_{n-j},\ t_{-j},\ t_{-(n-j)}, \qquad 1 \le j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

будем называть *четверкой*. При $n = 2l$ имеется пара “центральных” элементов t_l и t_{-l}, которые тоже удобно считать *(вырожденной) четверкой*. Четверку, состоящую из нулей, называем *тривиальной*, а в противном случае — *нетривиальной*.

Лемма 2.1.2. *Для нормальной вещественной теплицевой матрицы T справедливо*

$$t_j^2 + t_{n-j}^2 = t_{-j}^2 + t_{-(n-j)}^2, \qquad 1 \le j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \tag{2.2}$$

Если n — четное число, то для $l = n/2$ верно равенство

$$|t_l| = |t_{-l}|. \tag{2.3}$$

Доказательство леммы 2.1.2. Покажем, что данное утверждение является следствием нормальности матрицы T, а точнее следствием персимметричности матрицы $TT^\top$.

Выпишем выражение для диагонального элемента матрицы $TT^\top$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{k,k} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g}\{T\}_{k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}^2 = \sum_{g=1}^{k-1} t_{g-k}^2 + \sum_{g=k+1}^{n} t_{g-k}^2 =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } g = k - r,$$

$$\text{а во второй } g = k + r\} = \sum_{r=1}^{k-1} t_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{n-k} t_r^2.$$

Рассмотрим сначала случай $n = 2l$. Соотношение (2.1) для $k = m = l$ и соответственно $n + 1 - m = n + 1 - k = l + 1$ имеет вид

$$\sum_{r=1}^{l-1} t_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{l} t_r^2 = \sum_{r=1}^{l} t_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{l-1} t_r^2.$$

Отсюда получаем $t_l^2 = t_{-l}^2$, т.е. выполнено равенство (2.3).

Теперь для произвольного n и $j \le \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ рассмотрим равенство (2.1) для $k = m = j + 1$ и соответственно $n + 1 - m = n + 1 - k = n - j$:

$$\sum_{r=1}^{j} t_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{n-j-1} t_r^2 = \sum_{r=1}^{n-j-1} t_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{j} t_r^2.$$

Его можно записать как

$$\sum_{r=j+1}^{n-j-1} t_r^2 = \sum_{r=j+1}^{n-j-1} t_{-r}^2. \tag{2.4}$$

Далее выпишем соотношение (2.1) для $k = m = j$ и соответственно $n + 1 - m = n + 1 - k = n + 1 - j$:

$$\sum_{r=1}^{j-1} t_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{n-j} t_r^2 = \sum_{r=1}^{n-j} t_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{j-1} t_r^2.$$

Оно, в свою очередь, упрощается к виду

$$\sum_{r=j}^{n-j} t_r^2 = \sum_{r=j}^{n-j} t_{-r}^2.$$

Записывая это равенство как

$$t_j^2 + \sum_{r=j+1}^{n-j-1} t_r^2 + t_{n-j}^2 = t_{-j}^2 + \sum_{r=j+1}^{n-j-1} t_{-r}^2 + t_{-(n-j)}^2$$

и учитывая (2.4), получаем (2.2). ■

Лемма 2.1.3. *Для нормальной вещественной теплицевой матрицы T справедливо*

$$t_j t_{n-j} = t_{-j} t_{-(n-j)}, \qquad 1 \le j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \tag{2.5}$$

Доказательство леммы 2.1.3. Покажем, что это утверждение также является следствием персимметричности матрицы $TT^\top$.

Рассмотрим равенство (2.1) для $k = j+1$, $m = n-j+1$, и соответственно $n+1-m = j$, $n+1-k = n-j$. Предварительно вычислим элементы $\left\{TT^\top\right\}_{j+1,n-j+1}$ и $\left\{TT^\top\right\}_{j,n-j}$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{j+1,n-j+1} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{j+1,g}\{T\}_{n-j+1,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-j-1} t_{g-n+j-1} = t_{-j} t_{-(n-j)} + \sum_{g=2}^{n} t_{g-j-1} t_{g-n+j-1} =$$

$$= \{\text{положим в этой сумме } \ g = 1+r\} =$$

$$= t_{-j} t_{-(n-j)} + \sum_{r=1}^{n-1} t_{r-j} t_{r-n+j},$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{j,n-j} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{j,g}\{T\}_{n-j,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-j} t_{g-n+j} = t_{n-j} t_j + \sum_{g=1}^{n-1} t_{g-j} t_{g-n+j} =$$

$$= \{\text{положим в этой сумме } \ g = r\} = t_j t_{n-j} + \sum_{r=1}^{n-1} t_{r-j} t_{r-n+j}.$$

Теперь равенство (2.1) дает нам соотношение (2.5). ■

Из лемм 2.1.2 и 2.1.3 получаем следующее утверждение.

Лемма 2.1.4. *В нормальной вещественной теплицевой матрице T каждая четверка коэффициентов t_j, t_{n-j}, t_{-j} и $t_{-(n-j)}$, $1 \le j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, подчиняется одному из соотношений*

$$
\begin{array}{ll}
1) & t_{-j} = t_j, \quad t_{-(n-j)} = t_{n-j}; \\
2) & t_{-j} = -t_j, \quad t_{-(n-j)} = -t_{n-j}; \\
3) & t_{-j} = t_{n-j}, \quad t_{-(n-j)} = t_j; \\
4) & t_{-j} = -t_{n-j}, \quad t_{-(n-j)} = -t_j.
\end{array}
\tag{2.6}
$$

Доказательство леммы 2.1.4. Из лемм 2.1.2 и 2.1.3 имеем соотношения

$$t_j^2 + t_{n-j}^2 = t_{-j}^2 + t_{-(n-j)}^2, \qquad t_j t_{n-j} = t_{-j} t_{-(n-j)}.$$

Отсюда выводим

$$(t_j + t_{n-j})^2 = \left(t_{-j} + t_{-(n-j)}\right)^2,$$

т.е.

$$t_j + t_{n-j} = \pm\left(t_{-j} + t_{-(n-j)}\right). \tag{2.7}$$

Рассмотрим сначала случай

$$t_j + t_{n-j} = t_{-j} + t_{-(n-j)}.$$

Положим $t_{-j} = t_j + \beta$, тогда $t_{-(n-j)} = t_{n-j} - \beta$. Подстановка этого выражения в (2.2) дает

$$t_j^2 + t_{n-j}^2 = (t_j + \beta)^2 + (t_{n-j} - \beta)^2,$$

или

$$\beta\,(\beta + t_j - t_{n-j}) = 0.$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение относительно β. Корню $\beta = 0$ соответствует случай 1), а корню $\beta = t_{n-j} - t_j$ — случай 3).

Теперь пусть выполняется соотношение

$$t_j + t_{n-j} = -t_{-j} - t_{-(n-j)}.$$

Положим $t_{-j} = -t_j + \beta$, тогда $t_{-(n-j)} = -t_{n-j} - \beta$. Подстановка его в (2.2) дает

$$t_j^2 + t_{n-j}^2 = (t_j - \beta)^2 + (t_{n-j} + \beta)^2,$$

или

$$\beta\,(\beta - t_j + t_{n-j}) = 0.$$

Снова рассматриваем это соотношение как уравнение относительно β. При $\beta = 0$ получаем случай 2), а при $\beta = t_j - t_{n-j}$ — случай 4). ■

Лемма 2.1.5. *Пусть $n = 2l+1$ и для четверок t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1}, $t_{-(n-j_1)}$ и t_{j_2}, t_{n-j_2}, t_{-j_2}, $t_{-(n-j_2)}$ выполнены условия $t_{j_1}^2 \neq t_{n-j_1}^2$ и*

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{j_1}t_{j_2} + t_{n-j_1}t_{n-j_2} = t_{-j_1}t_{-j_2} + t_{-(n-j_1)}t_{-(n-j_2)}, \\ t_{j_1}t_{n-j_2} + t_{n-j_1}t_{j_2} = t_{-j_1}t_{-(n-j_2)} + t_{-(n-j_1)}t_{-j_2}. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Тогда эти четверки удовлетворяют одной и той же паре соотношений из четырех возможных пар (2.6).

Доказательство леммы 2.1.5. Положим $\beta = t_{j_1}$, $\gamma = t_{n-j_1}$. Имеются четыре возможности:

1. $t_{-j_1} = \beta$, $t_{-(n-j_1)} = \gamma$. Соотношения (2.8) принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta\left(t_{j_2} - t_{-j_2}\right) + \gamma\left(t_{n-j_2} - t_{-(n-j_2)}\right) = 0, \\ \gamma\left(t_{j_2} - t_{-j_2}\right) + \beta\left(t_{n-j_2} - t_{-(n-j_2)}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Это система линейных однородных уравнений относительно разностей $t_{j_2} - t_{-j_2}$ и $t_{n-j_2} - t_{-(n-j_2)}$ с ненулевым определителем $\beta^2 - \gamma^2$. Поэтому $t_{-j_2} = t_{j_2}$ и $t_{-(n-j_2)} = t_{n-j_2}$.

2. $t_{-j_1} = \gamma$, $t_{-(n-j_1)} = \beta$. Переписываем (2.8) в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta\left(t_{j_2} - t_{-(n-j_2)}\right) + \gamma\left(t_{n-j_2} - t_{-j_2}\right) = 0, \\ \gamma\left(t_{j_2} - t_{-(n-j_2)}\right) + \beta\left(t_{n-j_2} - t_{-j_2}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Следовательно, $t_{-(n-j_2)} = t_{j_2}$ и $t_{-j_2} = t_{n-j_2}$.

3. $t_{-j_1} = -\beta$, $t_{-(n-j_1)} = -\gamma$. Из (2.8) выводим

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta\left(t_{j_2} + t_{-j_2}\right) + \gamma\left(t_{n-j_2} + t_{-(n-j_2)}\right) = 0, \\ \gamma\left(t_{j_2} + t_{-j_2}\right) + \beta\left(t_{n-j_2} + t_{-(n-j_2)}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда $t_{-j_2} = -t_{j_2}$ и $t_{-(n-j_2)} = -t_{n-j_2}$.

4. $t_{-j_1} = -\gamma$, $t_{-(n-j_1)} = -\beta$. Равенства (2.8) дают

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta\left(t_{j_2} + t_{-(n-j_2)}\right) + \gamma\left(t_{n-j_2} + t_{-j_2}\right) = 0, \\ \gamma\left(t_{j_2} + t_{-(n-j_2)}\right) + \beta\left(t_{n-j_2} + t_{-j_2}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Поэтому $t_{-(n-j_2)} = -t_{j_2}$ и $t_{-j_2} = -t_{n-j_2}$. ■

Замечание 2.1.1. *Если $t_{j_1} = t_{n-j_1}$ и $t_{j_1} \neq 0$, то условия (2.8) равносильны соотношению*

$$t_{j_2} + t_{n-j_2} = \left(t_{-j_2} + t_{-(n-j_2)}\right) sgn\left(t_{j_1} t_{-j_1}\right). \qquad (2.9)$$

Если же $t_{j_1} = -t_{n-j_1}$ и $t_{j_1} \neq 0$, то условия (2.8) равносильны соотношению

$$t_{j_2} - t_{n-j_2} = \left(t_{-j_2} - t_{-(n-j_2)}\right) sgn\left(t_{j_1} t_{-j_1}\right). \qquad (2.10)$$

2.1.1.3 Применение метода математической индукции

Соотношения (2.6) леммы 2.1.4 означают, что локально, в пределах одной четверки, строение нормальной теплицевой матрицы с вещественными элементами совпадает со строением симметричной или кососимметричной матрицы либо циркулянта или косого циркулянта.

Теперь мы покажем, что и глобально, для всей матрицы T, имеются только эти четыре возможности. Обоснование будет проводиться индукцией по числу μ нетривиальных четверок t_j, t_{n-j}, t_{-j}, $t_{-(n-j)}$. Это число назовем *индексом* матрицы T. Ясно, что μ не превосходит $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ (главная диагональ матрицы не играет никакой роли в нашей задаче).

Базисом индукции является случай $\mu = 1$. Для его обоснования служит лемма 2.1.4. Заметим, что если $n = 2l$ и $j = l$, то эта лемма дает соотношение (2.3). Более того, если $\mu = 1$, то соответственно типу соотношения (2.6) получаем симметричную, кососимметричную матрицу, циркулянт или косой циркулянт. Поэтому для теплицевой матрицы T индекса 1 соотношения (2.6) являются необходимыми условиями нормальности. Остается, таким образом, обосновать возможность индуктивного перехода. Для этого покажем, что если в нормальной матрице T индекса μ, $\mu > 1$, заменить нулями элементы нетривиальной четверки, ближайшей к центральной четверке t_l, t_{l+1}, t_{-l}, $t_{-(l+1)}$ (при $n = 2l+1$; если $n = 2l$, то центральной считаем вырожденную четверку t_l, t_{-l}), то получающаяся матрица $\widehat{T}$ индекса $\mu - 1$ по-прежнему нормальная. По индуктивному предположению, $\widehat{T}$ должна принадлежать одному из классов 1)-4). При этом элементы вытесненной четверки и четверок, составляющих $\widehat{T}$, удовлетворяют условиям согласования, обеспечивающим матрице T тот же тип, какой имела $\widehat{T}$.

Для реализации этой программы рассмотрим четыре возможных случая: а) $n = 2l$, средние элементы t_l, t_{-l} ненулевые; б) $n = 2l + 1$, центральная четверка t_l, t_{l+1}, t_{-l}, $t_{-(l+1)}$ нетривиальна; в) $n = 2l$, $t_l = t_{-l} = 0$; г) $n = 2l + 1$, $t_l = t_{l+1} = t_{-l} = t_{-(l+1)} = 0$. Перейдем к разбору этих случаев. Возможность перехода от T к $\widehat{T}$ с сохранением нормальности будет выведена из условия персимметричности матрицы $TT^\top$, записанного для наддиагональных позиций этой матрицы. Рассмотрение поддиагональных позиций излишне в силу симметричности $TT^\top$.

а) $n = 2l$, $t_l \neq 0$, $t_{-l} \neq 0$. Начнем со следующей леммы.

Лемма 2.1.6. *Пусть $k \leq l$, $m > l$. Тогда в соотношении (2.1) слагаемые, содержащие t_l и t_{-l}, взаимно уничтожаются.*

Доказательство леммы 2.1.6. Ясно, что $n+1-m \leq l$, $n+1-k > l$. Выделяя в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_l и t_{-l}, имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{km} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g}\{T\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}t_{g-m} =$$

$$= \{\text{так как } \ k \leq l, \ m > l, \text{ то отделим слагаемые,}$$

$$\text{соответствующие } \ g = k + l, \ g = m - l\} =$$

$$= t_l t_{l+k-m} + t_{-l}t_{-l+m-k} + \sum_{\substack{g=1 \\ g\neq k+l \\ g\neq m-l}}^{n} t_{g-k}t_{g-m} =$$

$$= t_l t_{l+k-m} + t_{-l}t_{-l+m-k} + \ldots,$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{n+1-m,g}\{T\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)}t_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как } n+1-m \le l,\ n+1-k > l,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}$$

$$g = n+1-m+l,\ g = n+1-k-l\} =$$

$$= t_l t_{l+k-m} + t_{-l} t_{-l+m-k} + \sum_{\substack{g=1 \\ g \ne n+1-m+l \\ g \ne n+1-k-l}}^{n} t_{g-(n+1-m)} t_{g-(n+1-k)} =$$

$$= t_l t_{l+k-m} + t_{-l} t_{-l+m-k} + \ldots .$$

Из этих выражений получаем утверждение леммы. ■

Введем обозначения для слагаемых, обозначенных многоточиями в доказательстве леммы:

$$\mathcal{Z}_1^{(k,m)} = \sum_{\substack{g=1 \\ g \ne k+l \\ g \ne m-l}}^{n} t_{g-k} t_{g-m},$$

$$\mathcal{Z}_2^{(k,m)} = \sum_{\substack{g=1 \\ g \ne n+1-m+l \\ g \ne n+1-k-l}}^{n} t_{g-(n+1-m)} t_{g-(n+1-k)}.$$

В частности, при $k = l - j$ и $m = l + 1$ имеем

$$\mathcal{Z}_1^{(l-j,l+1)} = \sum_{\substack{g=1 \\ g \ne n-j \\ g \ne 1}}^{n} t_{g-l+j} t_{g-l-1} =$$

$$= \sum_{g=2}^{n-j-1} t_{g-l+j} t_{g-l-1} + \sum_{g=n-j+1}^{n} t_{g-l+j} t_{g-l-1} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } g = 1 + r,$$

$$\text{а во второй } g = n - j + r\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-j-2} t_{r-l} t_{r-l+j+1} + \sum_{r=1}^{j} t_{r+l} t_{r+l-j-1}$$

и

$$\mathcal{Z}_2^{(l-j,l+1)} = \sum_{\substack{g=1\\ g\neq n\\ g\neq j+1}}^{n} t_{g-l}t_{g-l-j-1} =$$

$$= \sum_{g=1}^{j} t_{g-l}t_{g-l-j-1} + \sum_{g=j+2}^{n-1} t_{g-l}t_{g-l-j-1} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } \ g=r,$$

$$\text{а во второй } \ g=j+1+r\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{j} t_{r-l}t_{r-l-j-1} + \sum_{r=1}^{n-j-2} t_{r-l}t_{r-l+j+1}.$$

В силу леммы 2.1.6 получаем равенство

$$\sum_{r=1}^{j} t_{r+l}t_{r+l-j-1} = \sum_{r=1}^{j} t_{r-l}t_{r-l-j-1}, \tag{2.11}$$

которое будет использовано в дальнейшем.

Аналогично лемме 2.1.6 можно обосновать следующее утверждение.

Лемма 2.1.7. *Если $1 \leq k < m < l$, то соотношение (2.1) эквивалентно равенству*

$$\begin{aligned} t_l\left(t_{l+k-m} + t_{l+m-k}\right) + \ldots = \\ = t_{-l}\left(t_{-l+k-m} + t_{-l}t_{-l+m-k}\right) + \ldots, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где многоточиями обозначены слагаемые, не содержащие t_l и t_{-l}.

Доказательство леммы 2.1.7. Из условий леммы видим, что $n+1-m > l+1$, $n+1-k > l+1$. Указывая в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_l и t_{-l}, имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{km} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g}\{T\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}t_{g-m} =$$

$$= \{\text{так как } \ k<l, \ m<l,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}$$

$$g = k + l,\ g = m + l\} = t_l\left(t_{l+k-m} + t_{l+m-k}\right) + \ldots,$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{n+1-m,g}\{T\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)}t_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как }\ n+1-m > l+1,\ n+1-k > l+1,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}$$

$$g = n+1-m-l,\ g = n+1-k-l\} =$$

$$= t_{-l}\left(t_{-l+k-m} + t_{-l+m-k}\right) + \ldots$$

Требуемое соотношение получается из (2.1). ■

Изучим теперь подробнее соотношения (2.1), отвечающие $m = l$ и значениям k, убывающим от $l-1$ до 1. Положим $k = l-q$, $1 \le q \le l-1$, тогда $n+1-m = l+1$, $n+1-k = l+q+1$. Вычислим элементы $\left\{TT^\top\right\}_{l-q,l}$ и $\left\{TT^\top\right\}_{l+1,l+q+1}$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q,l} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l-q,g}\{T\}_{l,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q}t_{g-l} =$$

$$= \sum_{g=n-q}^{n} t_{g-l+q}t_{g-l} + \sum_{g=1}^{n-q-1} t_{g-l+q}t_{g-l} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме }\ g = n-q+r,$$

$$\text{а во второй }\ g = r\} =$$

$$= \sum_{r=0}^{q} t_{r+l}t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-1} t_{r-l+q}t_{r-l} =$$

$$= t_lt_{l-q} + t_{l+q}t_l + \sum_{r=1}^{q-1} t_{r+l}t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-1} t_{r-l+q}t_{r-l},$$

$$\left\{TT^{\top}\right\}_{l+1,l+q+1} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l+1,g}\{T\}_{l+q+1,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l-1}t_{g-l-q-1} =$$

$$= \sum_{g=1}^{q+1} t_{g-l-1}t_{g-l-q-1} + \sum_{g=q+2}^{n} t_{g-l-1}t_{g-l-q-1} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } \ g = 1 + r,$$

$$\text{а во второй } \ g = q + 1 + r\} =$$

$$= \sum_{r=0}^{q} t_{r-l}t_{r-l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-1} t_{r-l+q}t_{r-l} =$$

$$= t_{-l}t_{-l-q} + t_{-l+q}t_{-l} + \sum_{r=1}^{q-1} t_{r-l}t_{r-l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-1} t_{r-l+q}t_{r-l}.$$

Соотношение (2.1) дает условие

$$t_l t_{l-q} + t_l t_{l+q} + \sum_{r=1}^{q-1} t_{r+l}t_{r+l-q} =$$

$$= t_{-l}t_{-(l-q)} + t_{-l}t_{-(l+q)} + \sum_{r=1}^{q-1} t_{r-l}t_{r-l-q}.$$

Заметим, что равенство (2.11) при $j = q - 1$ принимает вид

$$\sum_{r=1}^{q-1} t_{r+l}t_{r+l-q} = \sum_{r=1}^{q-1} t_{r-l}t_{r-l-q},$$

поэтому

$$t_l\left(t_{l-q} + t_{l+q}\right) = t_{-l}\left(t_{-(l-q)} + t_{-(l+q)}\right).$$

Так как $l - q = k$, то $l + q = n - l + q = n - (l - q) = n - k$. Получаем

$$t_l\left(t_k + t_{n-k}\right) = t_{-l}\left(t_{-k} + t_{-(n-k)}\right). \tag{2.13}$$

Итак, условие нормальности матрицы T эквивалентно следующей совокупности соотношений: а) равенствам (2.1) для $k \leq l$, $m > l$; эти равенства вовсе не зависят от t_l и t_{-l}; б) равенствам (2.13) для $1 \leq k \leq l - 1$; в) равенствам (2.12) для $1 \leq k < m < l$. Теперь ясно, что все эти соотношения выполняются и после замены t_l и t_{-l} нулями. Таким образом, полученная в результате замены матрица $\widehat{T}$ снова нормальна и имеет индекс $\mu - 1$. Поэтому $\widehat{T}$ подчиняется предположению индукции.

Для каждой четверки t_k, t_{n-k}, t_{-k}, $t_{-(n-k)}$ нормальной матрицы T справедливо равенство (2.7):

$$t_k + t_{n-k} = \pm \left(t_{-k} + t_{-(n-k)}\right).$$

Верхний знак соответствует симметричной матрице либо циркулянту, нижний - кососимметричной матрице или косому циркулянту. Отметим, что здесь и в дальнейшем, говоря о кососимметричных матрицах, мы игнорируем главную диагональ. Поскольку для исходной матрицы T числа t_{-l} и t_l ненулевые и связаны соотношением $t_{-l} = \pm t_l$, то из равенств (2.13) следует: при $t_{-l} = t_l$ матрица $\widehat{T}$ симметричная либо циркулянт, и тот же тип имеет T. Если же $t_{-l} = -t_l$, то матрицы T и $\widehat{T}$ обе или кососимметричны, или косые циркулянты.

б) $n = 2l + 1$, центральная четверка t_l, t_{l+1}, t_{-l}, $t_{-(l+1)}$ нетривиальна.

В данном случае аналогами лемм 2.1.6 и 2.1.7 являются следующие утверждения, доказываемые схожим образом.

Лемма 2.1.8. *Если $k \leq l$, $m > l + 1$, то в соотношении (2.1) слагаемые, содержащие t_l, t_{l+1}, t_{-l} и $t_{-(l+1)}$, взаимно уничтожаются.*

Доказательство леммы 2.1.8. Имеем $n+1-m \leq l$, $n+1-k > > l + 1$. Выделяя в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_l, t_{l+1}, t_{-l} и $t_{-(l+1)}$, получаем

$$\left\{TT^{\top}\right\}_{km} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g} \{T\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k} t_{g-m} =$$

$$= \{\text{так как } \ k \leq l, \ m > l + 1,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие } \ g = k + l,$$

$$g = k + l + 1,\ g = m - l,\ g = m - l - 1\} =$$

$$= t_l t_{l+k-m} + t_{l+1} t_{l+1+k-m} + t_{-l} t_{-l+m-k} + t_{-(l+1)} t_{-l-1+m-k} + \dots,$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{n+1-m,g} \{T\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)} t_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как}\ \ n + 1 - m \le l,\ n + 1 - k > l + 1,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}\ \ g = n + 1 - m + l,$$

$$g = n + 1 - m + l + 1,\ g = n + 1 - k - l,$$

$$g = n + 1 - k - l - 1\} =$$

$$= t_l t_{l+k-m} + t_{l+1} t_{l+1+k-m} + t_{-l} t_{-l+m-k} + t_{-(l+1)} t_{-l-1+m-k} + \dots .$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы. ■

Лемма 2.1.9. *Если* $1 \le k < m < l$, *то соотношение (2.1) эквивалентно равенству*

$$\begin{gathered} t_l \left(t_{l+k-m} + t_{l+m-k}\right) + \\ + t_{l+1} \left(t_{l+1+k-m} + t_{l+1+m-k}\right) + \dots = \\ = t_{-l} \left(t_{-l+k-m} + t_{-l+m-k}\right) + \\ + t_{-(l+1)} \left(t_{-l-1+k-m} + t_{-l-1+m-k}\right) + \dots, \end{gathered} \tag{2.14}$$

где многоточиями обозначены слагаемые, не содержащие t_l, t_{l+1}, t_{-l} *и* $t_{-(l+1)}$.

Доказательство леммы 2.1.9. Из условий леммы выводим, что $n + 1 - m > l + 2$, $n + 1 - k > l + 2$. Выделяя в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_l, t_{l+1}, t_{-l} и $t_{-(l+1)}$, имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{km} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g} \{T\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k} t_{g-m} =$$

$$= \{\text{так как}\ \ k < l,\ m < l,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}\ \ g = k + l,$$

$$g = k + l + 1,\ g = m + l,\ g = m + l + 1\} =$$

$$= t_l\,(t_{l+k-m} + t_{l+m-k}) + t_{l+1}\,(t_{l+1+k-m} + t_{l+1+m-k}) + \ldots,$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{n+1-m,g}\{T\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)}t_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как}\ \ n+1-m > l+2,\ n+1-k > l+2,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}\ \ g = n+1-m-l,$$

$$g = n+1-m-l-1,\ g = n+1-k-l,$$

$$g = n+1-k-l-1\} =$$

$$= t_{-l}\,(t_{-l+k-m} + t_{-l+m-k}) +$$

$$+ t_{-(l+1)}\,(t_{-l-1+k-m} + t_{-l-1+m-k}) + \ldots\ .$$

Получаем равенство (2.14). ■

Исследуем теперь соотношения (2.1), отвечающие $m = l$ и $m = l+1$ и значениям k, убывающим от $l-1$ до 1.

Начнем со случая $m = l$. Положим $k = l - q$, $1 \le q \le l-1$, тогда $n+1-m = l+2$ и $n+1-k = l+q+2$. Найдем значения элементов $\left\{TT^\top\right\}_{l-q,l}$ и $\left\{TT^\top\right\}_{l+2,l+q+2}$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q,l} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l-q,g}\{T\}_{l,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q}t_{g-l} =$$

$$= \sum_{g=n-q-1}^{n} t_{g-l+q}t_{g-l} + \sum_{g=1}^{n-q-2} t_{g-l+q}t_{g-l} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме}\ \ g = n-q-1+r,$$

$$\text{а во второй}\ \ g = r\} =$$

$$= \sum_{r=0}^{q+1} t_{r+l}t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-2} t_{r-l+q}t_{r-l} =$$

$$= t_l t_{l-q} + t_{l+q+1} t_{l+1} + \sum_{r=1}^{q} t_{r+l} t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-2} t_{r-l+q} t_{r-l},$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{l+2,l+q+2} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l+2,g} \{T\}_{l+q+2,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l-2} t_{g-l-q-2} =$$

$$= \sum_{g=1}^{q+2} t_{g-l-2} t_{g-l-q-2} + \sum_{g=q+3}^{n} t_{g-l-2} t_{g-l-q-2} =$$

$= \{$положим в первой сумме $g = 1 + r$,

а во второй $g = q + 2 + r\} =$

$$= \sum_{r=0}^{q+1} t_{r-l-1} t_{r-l-q-1} + \sum_{r=1}^{n-q-2} t_{r-l+q} t_{r-l} =$$

$$= t_{-l-1} t_{-l-q-1} + t_{-l+q} t_{-l} + \sum_{r=1}^{q} t_{r-l-1} t_{r-l-q-1} + \sum_{r=1}^{n-q-2} t_{r-l+q} t_{r-l}.$$

Равенство (2.1) принимает вид

$$\begin{gathered} t_l t_{l-q} + t_{l+1} t_{l+q+1} + \sum_{r=1}^{q} t_{r+l} t_{r+l-q} = \\ = t_{-l} t_{-(l-q)} + t_{-(l+1)} t_{-(l+q+1)} + \sum_{r=1}^{q} t_{r-l-1} t_{r-l-q-1}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Чтобы упростить соотношение (2.15), дополнительно рассмотрим условие (2.1) для $k = l-q+1$, $m = l+1$, $n+1-m = l+1$, $n+1-k = l+q+1$. Выпишем нужные элементы матрицы $TT^\top$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q+1,l+1} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l-q+1,g} \{T\}_{l+1,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q-1} t_{g-l-1} =$$

$$= \sum_{g=n-q+1}^{n} t_{g-l+q-1} t_{g-l-1} + \sum_{g=1}^{n-q} t_{g-l+q-1} t_{g-l-1} =$$

$= \{$положим в первой сумме $g = n - q + r$,

а во второй $g = r\} =$

$$= \sum_{r=1}^{q} t_{r+l} t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q} t_{r-l+q-1} t_{r-l-1},$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{l+1,l+q+1} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l+1,g} \{T\}_{l+q+1,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l-1} t_{g-l-q-1} =$$

$$= \sum_{g=1}^{q} t_{g-l-1} t_{g-l-q-1} + \sum_{g=q+1}^{n} t_{g-l-1} t_{g-l-q-1} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } \ g = r,$$

$$\text{а во второй } \ g = q + r\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{q} t_{r-l-1} t_{r-l-q-1} + \sum_{r=1}^{n-q} t_{r-l+q-1} t_{r-l-1}.$$

Приходим к равенству

$$\sum_{r=1}^{q} t_{r+l} t_{r+l-q} = \sum_{r=1}^{q} t_{r-l-1} t_{r-l-q-1},$$

которое превращает (2.15) в соотношение

$$t_l t_{l-q} + t_{l+1} t_{l+q+1} = t_{-l} t_{-(l-q)} + t_{-(l+1)} t_{-(l+q+1)}. \tag{2.16}$$

Теперь рассмотрим случай $m = l + 1$. Снова положим $k = l - q$, $1 \le q \le l - 1$; тогда $n + 1 - m = l + 1$, $n + 1 - k = l + q + 2$. Вычислим элементы $\left\{TT^\top\right\}_{l-q,l+1}$ и $\left\{TT^\top\right\}_{l+1,l+q+2}$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q,l+1} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l-q,g} \{T\}_{l+1,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q} t_{g-l-1} =$$

$$= \sum_{g=n-q}^{n} t_{g-l+q} t_{g-l-1} + \sum_{g=1}^{n-q-1} t_{g-l+q} t_{g-l-1} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } \ g = n - q + r,$$

$$\text{а во второй } \ g = r\} =$$

$$= \sum_{r=0}^{q} t_{r+l+1} t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-1} t_{r-l+q} t_{r-l-1} =$$

$$= t_{l+1} t_{l-q} + t_{l+q+1} t_l + \sum_{r=1}^{q-1} t_{r+l+1} t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-1} t_{r-l+q} t_{r-l-1},$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{l+1,l+q+2} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l+1,g} \{T\}_{l+q+2,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l-1} t_{g-l-q-2} =$$

$$= \sum_{g=1}^{q+1} t_{g-l-1} t_{g-l-q-2} + \sum_{g=q+2}^{n} t_{g-l-1} t_{g-l-q-2} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } \ g = 1 + r,$$

$$\text{а во второй } \ g = q + 1 + r\} =$$

$$= \sum_{r=0}^{q} t_{r-l} t_{r-l-q-1} + \sum_{r=1}^{n-q-1} t_{r-l+q} t_{r-l-1} =$$

$$= t_{-l} t_{-l-q-1} + t_{-l+q} t_{-l-1} + \sum_{r=1}^{q-1} t_{r-l} t_{r-l-q-1} + \sum_{r=1}^{n-q-1} t_{r-l+q} t_{r-l-1}.$$

В результате получаем

$$\begin{gathered} t_l t_{l+q+1} + t_{l+1} t_{l-q} + \sum_{r=1}^{q-1} t_{r+l+1} t_{r+l-q} = \\ = t_{-l} t_{-(l+q+1)} + t_{-(l+1)} t_{-(l-q)} + \sum_{r=1}^{q-1} t_{r-l} t_{r-l-q-1}. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Чтобы упростить равенство (2.17), дополнительно рассмотрим условие (2.1) для $k = l - q + 1$, $m = l + 2$, $n + 1 - m = l$, $n+1-k = l+q+1$. Снова выпишем нужные элементы матрицы $TT^\top$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q+1,l+2} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l-q+1,g} \{T\}_{l+2,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q-1} t_{g-l-2} =$$

$$= \sum_{g=n-q+2}^{n} t_{g-l+q-1}t_{g-l-2} + \sum_{g=1}^{n-q+1} t_{g-l+q-1}t_{g-l-2} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } g = n-q+1+r,$$

$$\text{а во второй } g = r\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} t_{r+l+1}t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q+1} t_{r-l+q-1}t_{r-l-2},$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{l,l+q+1} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l,g}\{T\}_{l+q+1,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l}t_{g-l-q-1} =$$

$$= \sum_{g=1}^{q-1} t_{g-l}t_{g-l-q-1} + \sum_{g=q}^{n} t_{g-l}t_{g-l-q-1} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } g = r,$$

$$\text{а во второй } g = q-1+r\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} t_{r-l}t_{r-l-q-1} + \sum_{r=1}^{n-q+1} t_{r-l+q-1}t_{r-l-2}.$$

В итоге приходим к равенству

$$\sum_{r=1}^{q-1} t_{r+l+1}t_{r+l-q} = \sum_{r=1}^{q-1} t_{r-l}t_{r-l-q-1},$$

которое превращает (2.17) в соотношение

$$t_l t_{l+q+1} + t_{l+1}t_{l-q} = t_{-l}t_{-(l+q+1)} + t_{-(l+1)}t_{-(l-q)}. \tag{2.18}$$

Объединим соотношения (2.16) и (2.18) в систему

$$\begin{cases} t_l t_{l-q} + t_{l+1}t_{l+q+1} = t_{-l}t_{-(l-q)} + t_{-(l+1)}t_{-(l+q+1)}, \\ t_l t_{l+q+1} + t_{l+1}t_{l-q} = t_{-l}t_{-(l+q+1)} + t_{-(l+1)}t_{-(l-q)}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Проведем анализ полученных результатов. Леммы 2.1.8 и 2.1.9 вместе с равенствами (2.19) для значений q от 1 до $l-1$ показывают, что совокупность соотношений (2.1), характеризующая свойство нормальности теплицевой матрицы T, продолжает выполняться и после замены элементов центральной четверки t_l, t_{l+1}, t_{-l}, $t_{-(l+1)}$ нулями. Тем самым теплицева матрица $\widehat{T}$, полученная благодаря такой замене, остается нормальной. По индуктивному предположению, $\widehat{T}$ принадлежит одному из классов 1)-4). Если $t_l^2 \neq t_{l+1}^2$, то, применяя к (2.19) лемму 2.1.5 для $j_1 = l$, заключаем, что к тому же классу относится матрица T. Если $t_l^2 = t_{l+1}^2$, но среди остальных нетривиальных четверок имеется такая, что $t_j^2 \neq t_{n-j}^2$, то t_l, t_{l+1}, t_{-l}, $t_{-(l+1)}$ должна иметь тип, совпадающий с типом t_j, t_{n-j}, t_{-j}, $t_{-(n-j)}$ согласно лемме 2.1.5 для $j_1 = j$ и $j_2 = l$.

Пусть теперь $t_j^2 = t_{n-j}^2$ для всех j. Если $t_l = t_{l+1}$ и $t_j = t_{n-j}$ $(j \neq l)$ или $t_l = -t_{l+1}$ и $t_j = -t_{n-j}$ $(j \neq l)$, то согласование типов $\widehat{T}$ и T осуществляется соответственно условием (2.9) или (2.10) для $j_1 = l$ и $j_2 = j$.

Пусть, наконец, $t_j = t_{n-j}$ $(j \neq l)$, но $t_l = -t_{l+1}$. В этом случае тип матрицы определяется выбором t_l и t_{-l}. Если матрица $\widehat{T}$ является симметричной, то она одновременно является циркулянтом. Выбор $t_{-l} = t_l$ оставляет верным свойство симметричности, тогда как при $t_{-l} = -t_l$ сохраняется свойство матрицы быть циркулянтом. Если же матрица $\widehat{T}$ кососимметрична (без учета диагонали), то она одновременно будет косым циркулянтом. Выбор $t_{-l} = -t_l$ снова оставляет верным свойство косой симметрии, а при $t_{-l} = t_l$ сохраняется свойство быть косым циркулянтом. То же самое можно сказать о случае $t_j = -t_{n-j}$ $(j \neq l)$, но $t_l = t_{l+1}$.

в) $n = 2l$, $t_l = t_{-l} = 0$. Теперь исследуем ситуацию, когда центральная (вырожденная) четверка является нулевой.

Будем считать, что нулевыми также являются еще несколько четверок, ближайших к центральной:

$$t_{l-j} = t_{l+j} = t_{-(l-j)} = t_{-(l+j)} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1. \quad (2.20)$$

Четверка t_{l-p}, t_{l+p}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p)}$, $p \geq 1$, нетривиальна.

Как и в предыдущих случаях, начнем с двух лемм.

Лемма 2.1.10. *Если $k \leq l-p$, $m > l+p$, то в соотношении (2.1) слагаемые, содержащие t_{l-p}, t_{l+p}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p)}$, взаимно уничтожаются.*

Доказательство леммы 2.1.10. Ясно, что $n+1-m \leq l-p$, $n+1-k > l+p$. Удерживая в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_{l-p}, t_{l+p}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p)}$, имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{km} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{k,g}\{T\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}t_{g-m} =$$

$$= \{\text{так как } \ k \leq l-p, \ m > l+p,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие } \ g = k+l-p,$$

$$g = k+l+p, \ g = m-l+p, \ g = m-l-p\} =$$

$$= t_{l-p}t_{l-p+k-m} + t_{l+p}t_{l+p+k-m} +$$

$$+ t_{-(l-p)}t_{-l+p+m-k} + t_{-(l+p)}t_{-l-p+m-k} + \ldots,$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{n+1-m,g}\{T\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)}t_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как } \ n+1-m \leq l-p, \ n+1-k > l+p,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие } \ g = n+1-m+l-p,$$

$$g = n+1-m+l+p, \ g = n+1-k-l+p,$$

$$g = n+1-k-l-p\} =$$

$$= t_{l-p}t_{l-p+k-m} + t_{l+p}t_{l+p+k-m} +$$

$$+ t_{-(l-p)}t_{-l+p+m-k} + t_{-(l+p)}t_{-l-p+m-k} + \ldots \ .$$

$\blacksquare$

Лемма 2.1.11. *Если $1 \le k < m < l - p$, то соотношение (2.1) эквивалентно равенству*

$$t_{l-p}\left(t_{l-p+k-m} + t_{l-p+m-k}\right) + t_{l+p}\left(t_{l+p+k-m} + t_{l+p+m-k}\right) + \ldots = \\ = t_{-(l-p)}\left(t_{-l+p+k-m} + t_{-l+p+m-k}\right) + \\ + t_{-(l+p)}\left(t_{-l-p+k-m} + t_{-l-p+m-k}\right) + \ldots,$$

где многоточиями обозначены слагаемые, не содержащие t_{l-p}, t_{l+p}, $t_{-(l-p)}$ и $t_{-(l+p)}$.

Доказательство леммы 2.1.11. Из условий леммы выводим, что $n + 1 - m > l + p + 1$, $n + 1 - k > l + p + 1$. Указывая в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_{l-p}, t_{l+p}, $t_{-(l-p)}$ и $t_{-(l+p)}$, имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{km} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g}\{T\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}t_{g-m} =$$

$$= \{\text{так как } \ k < l - p, \ m < l - p,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}$$

$$g = k + l - p, \ g = k + l + p,$$

$$g = m + l - p, \ g = m + l + p\} =$$

$$= t_{l-p}\left(t_{l-p+k-m} + t_{l-p+m-k}\right) +$$

$$+ t_{l+p}\left(t_{l+p+k-m} + t_{l+p+m-k}\right) + \ldots,$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{n+1-m,g}\{T\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)}t_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как } \ n + 1 - m > l + p + 1, \ n + 1 - k > l + p + 1,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}$$

$$g = n + 1 - m - l + p,$$

$$g = n + 1 - m - l - p, \ g = n + 1 - k - l + p,$$

$$g = n + 1 - k - l - p\} =$$

$$= t_{-(l-p)}\left(t_{-l+p+k-m} + t_{-l+p+m-k}\right) +$$

$$+t_{-(l+p)}\left(t_{-l-p+k-m}+t_{-l-p+m-k}\right)+\ldots.$$

■

В силу (2.20) соотношения (2.1) для $m=l-p+1, l-p+$ $+2, \ldots, l+p-1$ выполняются автоматически. Проведем анализ соотношений (2.1), отвечающих значениям $m=l-p$ и $m=l+p$ и значениям k, убывающим от $l-p-1$ до 1.

Пусть сначала $m=l-p$. Положим $k=l-q$, $p+1 \leq q \leq l-1$; тогда $n+1-m=l+p+1$, $n+1-k=l+q+1$. Вычислим элемент $\left\{T T^{\top}\right\}_{l-q, l-p}$:

$$\left\{T T^{\top}\right\}_{l-q, l-p}=\sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l-q, g}\{T\}_{l-p, g}=\sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q} t_{g-l+p}=$$

$$=t_{l+q} t_{l+p}+\sum_{g=n-2 p+1}^{n-1} t_{g-l+q} t_{g-l+p}+\sum_{g=n-q+p}^{n-2 p} t_{g-l+q} t_{g-l+p}+$$

$$+\sum_{g=n-q-p+1}^{n-q+p-1} t_{g-l+q} t_{g-l+p}+t_{l-p} t_{l-q}+\sum_{g=1}^{n-q-p-1} t_{g-l+q} t_{g-l+p}=$$

$$=\{\text{положим в первой сумме } g=n-2p+r,$$

$$\text{во второй } g=n-q+p-1+r,$$

$$\text{в третьей } g=n-q-p+r \text{ и в четвертой } g=r\}=$$

$$=t_{l+p} t_{l+q}+\sum_{r=1}^{2 p-1} t_{r+l-2 p+q} t_{r+l-p}+\sum_{r=1}^{q-3 p+1} t_{r+l+p-1} t_{r+l+2 p-q-1}+$$

$$+\sum_{r=1}^{2 p-1} t_{r+l-p} t_{r+l-q}+t_{l-p} t_{l-q}+\sum_{r=1}^{n-q-p-1} t_{r-l+q} t_{r-l+p}.$$

В силу (2.20) первая и третья суммы нулевые, поэтому

$$\left\{T T^{\top}\right\}_{l-q, l-p}=t_{l+p} t_{l+q}+\sum_{r=1}^{q-3 p+1} t_{r+l+p-1} t_{r+l+2 p-q-1}+$$

$$+t_{l-p}t_{l-q}+\sum_{r=1}^{n-q-p-1} t_{r-l+q}t_{r-l+p}.$$

Теперь найдем элемент $\left\{TT^\top\right\}_{l+p+1,l+q+1}$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{l+p+1,l+q+1}=\sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l+p+1,g}\{T\}_{l+q+1,g}=$$

$$=\sum_{g=1}^{n} t_{g-l-p-1}t_{g-l-q-1}=$$

$$=t_{-l-p}t_{-l-q}+\sum_{g=2}^{2p} t_{g-l-p-1}t_{g-l-q-1}+\sum_{g=2p+1}^{q-p+1} t_{g-l-p-1}t_{g-l-q-1}+$$

$$+\sum_{g=q-p+2}^{q+p} t_{g-l-p-1}t_{g-l-q-1}+t_{-l+q}t_{-l+p}+$$

$$+\sum_{g=q+p+2}^{n} t_{g-l-p-1}t_{g-l-q-1}=$$

$=\{$положим в первой сумме $g=1+r$,

во второй $g=2p+r$,

в третьей $g=q-p+1+r$

и в четвертой $g=q+p+1+r\}=$

$$=t_{-(l+p)}t_{-(l+q)}+\sum_{r=1}^{2p-1} t_{r-l-p}t_{r-l-q}+\sum_{r=1}^{q-3p+1} t_{r-l+p-1}t_{r-l+2p-q-1}+$$

$$+\sum_{r=1}^{2p-1} t_{r-l-2p+q}t_{r-l-p}+t_{-(l-p)}t_{-(l-q)}+\sum_{r=1}^{n-q-p-1} t_{r-l+q}t_{r-l+p}.$$

Вследствие (2.20) имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{l+p+1,l+q+1}=t_{-(l+p)}t_{-(l+q)}+\sum_{r=1}^{q-3p+1} t_{r-l+p-1}t_{r-l+2p-q-1}+$$

$$+t_{-(l-p)}t_{-(l-q)}+\sum_{r=1}^{n-q-p-1} t_{r-l+q}t_{r-l+p}.$$

Условие $\{TT^\top\}_{l-q,l-p} = \{TT^\top\}_{l+p+1,l+q+1}$ приобретает вид

$$t_{l-p}t_{l-q} + t_{l+p}t_{l+q} + \sum_{r=1}^{q-3p+1} t_{r+l+p-1}t_{r+l+2p-q-1} =$$

$$= t_{-(l-p)}t_{-(l-q)} + t_{-(l+p)}t_{-(l+q)} + \sum_{r=1}^{q-3p+1} t_{r-l+p-1}t_{r-l+2p-q-1}.$$

Чтобы упростить это соотношение, рассмотрим равенство (2.11), которое с учетом (2.20) запишем как

$$\sum_{g=p}^{j-p+1} t_{l+g}t_{l-j-1+g} = \sum_{g=p}^{j-p+1} t_{-l+g}t_{-l-j-1+g}.$$

Подстановка $g = p - 1 + r$ дает

$$\sum_{r=1}^{j-2p+2} t_{r+l+p-1}t_{r+l-j-1+p-1} = \sum_{r=1}^{j-2p+2} t_{r-l+p-1}t_{r-l-j-1+p-1}.$$

При $j = q - p - 1$ имеем

$$\sum_{r=1}^{q-3p+1} t_{r+l+p-1}t_{r+l+2p-q-1} = \sum_{r=1}^{q-3p+1} t_{r-l+p-1}t_{r-l+2p-q-1}.$$

Теперь равенство $\{TT^\top\}_{l-q,l-p} = \{TT^\top\}_{l+p+1,l+q+1}$ превращается в условие

$$t_{l-p}t_{l-q} + t_{l+p}t_{l+q} = t_{-(l-p)}t_{-(l-q)} + t_{-(l+p)}t_{-(l+q)}. \tag{2.21}$$

Далее рассмотрим случай $m = l+p$. Снова положим $k = l-q$, $p+1 \le q \le l-1$; тогда $n+1-m = l-p+1$, $n+1-k = l+q+1$. Найдем элемент $\{TT^\top\}_{l-q,l+p}$:

$$\{TT^\top\}_{l-q,l+p} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l-q,g}\{T\}_{l+p,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q}t_{g-l-p} =$$

$$= t_{l+q}t_{l-p} + \sum_{g=n-q+p+1}^{n-1} t_{g-l+q}t_{g-l-p} +$$

$$+t_{l+p}t_{l-q}+\sum_{g=n-q-p+1}^{n-q+p-1} t_{g-l+q}t_{g-l+p}+$$

$$+\sum_{g=2p}^{n-q-p} t_{g-l+q}t_{g-l-p}+\sum_{g=1}^{2p-1} t_{g-l+q}t_{g-l-p}=$$

$=\{$положим в первой сумме $g=n-q+p+r$,

во второй $g=n-q-p+r$,

в третьей $g=2p-1+r$ и в четвертой $g=r\}=$

$$=t_{l-p}t_{l+q}+\sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p}t_{r+l-q}+t_{l+p}t_{l-q}+\sum_{r=1}^{2p-1} t_{r+l-p}t_{r+l-q}+$$

$$+\sum_{r=1}^{n-q-3p+1} t_{r-l+2p+q-1}t_{r-l+p-1}+\sum_{r=1}^{2p-1} t_{r-l+q}t_{r-l-p}.$$

Условие (2.20) дает

$$\left\{TT^{\top}\right\}_{l-q,l+p}=t_{l-p}t_{l+q}+\sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p}t_{r+l-q}+$$

$$+t_{l+p}t_{l-q}+\sum_{r=1}^{n-q-3p+1} t_{r-l+2p+q-1}t_{r-l+p-1}.$$

Теперь вычислим элемент $\{TT^{\top}\}_{l-p+1,l+q+1}$:

$$\left\{TT^{\top}\right\}_{l-p+1,l+q+1}=\sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l-p+1,g}\{T\}_{l+q+1,g}=$$

$$=\sum_{g=1}^{n} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-1}=$$

$$=t_{-l+p}t_{-l-q}+\sum_{g=2}^{q-p} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-1}+$$

$$+t_{-l+q}t_{-l-p}+\sum_{g=q-p+2}^{q+p} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-1}+$$

$$+\sum_{g=q+p+1}^{n-2p+1} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-1}+\sum_{g=n-2p+2}^{n} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-1}=$$

$$=\{\text{положим в первой сумме } \ g=1+r,$$

$$\text{во второй } \ g=q-p+1+r,$$

$$\text{в третьей } \ g=q+p+r$$

$$\text{и в четвертой } \ g=n-2p+1+r\}=$$

$$=t_{-(l-p)}t_{-(l+q)}+\sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p}t_{r-l-q}+t_{-(l+p)}t_{-(l-q)}+\sum_{r=1}^{2p-1} t_{r-l+q}t_{r-l-p}+$$

$$+\sum_{r=1}^{n-q-3p+1} t_{r-l+2p+q-1}t_{r-l+p-1}+\sum_{r=1}^{2p-1} t_{r+l-p}t_{r+l-2p-q}.$$

В силу (2.20)

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-p+1,l+q+1}=t_{-(l-p)}t_{-(l+q)}+\sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p}t_{r-l-q}+$$

$$+t_{-(l+p)}t_{-(l-q)}+\sum_{r=1}^{n-q-3p+1} t_{r-l+2p+q-1}t_{r-l+p-1}.$$

Условие $\{TT^\top\}_{l-q,l+p}=\{TT^\top\}_{l-p+1,l+q+1}$ приобретает вид

$$\begin{gathered}t_{l-p}t_{l+q}+\sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p}t_{r+l-q}+t_{l+p}t_{l-q}=\\=t_{-(l-p)}t_{-(l+q)}+\sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p}t_{r-l-q}+t_{-(l+p)}t_{-(l-q)}.\end{gathered}\tag{2.22}$$

Для упрощения этого равенства рассмотрим соотношение (2.1) для $k=l-q+1$, $m=l+p+1$ и соответственно $n+1-m=l-p$, $n+1-k=l+q$. Предварительно найдем нужные нам элементы $\left\{TT^\top\right\}_{l-q+1,l+p+1}$ и $\left\{TT^\top\right\}_{l-p,l+q}$. Имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q+1,l+p+1} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l-q+1,g}\{T\}_{l+p+1,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q-1}t_{g-l-p-1} =$$

$$= \sum_{g=n-q+p+2}^{n} t_{g-l+q-1}t_{g-l-p-1} + \sum_{g=1}^{n-q+p+1} t_{g-l+q-1}t_{g-l-p-1} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме} \;\; g = n-q+p+1+r,$$

$$\text{а во второй} \;\; g = r\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p}t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q+p+1} t_{r-l+q-1}t_{r-l-p-1},$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-p,l+q} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l-p,g}\{T\}_{l+q,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+p}t_{g-l-q} =$$

$$= \sum_{g=1}^{q-p-1} t_{g-l+p}t_{g-l-q} + \sum_{g=q-p}^{n} t_{g-l+p}t_{g-l-q} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме} \;\; g = r,$$

$$\text{а во второй} \;\; g = q-p-1+r\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p}t_{r-l-q} + \sum_{r=1}^{n-q+p+1} t_{r-l+q-1}t_{r-l-p-1}.$$

Получаем условие

$$\sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p}t_{r+l-q} = \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p}t_{r-l-q},$$

которое превращает (2.22) в соотношение

$$t_{l-p}t_{l+q} + t_{l+p}t_{l-q} = t_{-(l-p)}t_{-(l+q)} + t_{-(l+p)}t_{-(l-q)}. \qquad (2.23)$$

Снова объединим соотношения (2.21) и (2.23) в систему

$$\begin{cases} t_{l-p}t_{l-q} + t_{l+p}t_{l+q} = t_{-(l-p)}t_{-(l-q)} + t_{-(l+p)}t_{-(l+q)}, \\ t_{l-p}t_{l+q} + t_{l+p}t_{l-q} = t_{-(l-p)}t_{-(l+q)} + t_{-(l+p)}t_{-(l-q)}. \end{cases} \qquad (2.24)$$

Проанализируем полученные результаты. Леммы 2.1.10 и 2.1.11 вместе с равенствами (2.24) для значений q от $p+1$ до $l-1$ показывают, что совокупность соотношений (2.1), характеризующая свойство нормальности теплицевой матрицы T, продолжает выполняться и после замены элементов четверки t_{l-p}, t_{l+p}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p)}$ нулями. Тем самым теплицева матрица $\widehat{T}$, полученная благодаря такой замене, остается нормальной. По индуктивному предположению, $\widehat{T}$ принадлежит одному из классов 1)-4). Если $t_{l-p}^2 \neq t_{l+p}^2$, то, применяя к (2.24) лемму 2.1.5 для $j_1 = l-p$, получаем, что к тому же классу относится матрица T. Если $t_{l-p}^2 = t_{l+p}^2$, но среди остальных нетривиальных четверок имеется такая, что $t_j^2 \neq t_{n-j}^2$, то четверка t_{l-p}, t_{l+p}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p)}$ должна иметь тип, совпадающий с типом четверки t_j, t_{n-j}, t_{-j}, $t_{-(n-j)}$ согласно лемме 2.1.5 для $j_1 = j$ и $j_2 = l-p$.

Пусть теперь $t_j^2 = t_{n-j}^2$ для всех j. Если $t_{l-p} = t_{l+p}$ и $t_j = t_{n-j}$ $(j \neq l-p)$ или $t_{l-p} = -t_{l+p}$ и $t_j = -t_{n-j}$ $(j \neq l-p)$, то согласование типов $\widehat{T}$ и T осуществляется соответственно условием (2.9) или (2.10) для $j_1 = l-p$ и $j_2 = j$.

Пусть, наконец, $t_j = t_{n-j}$ $(j \neq l-p)$, но $t_{l-p} = -t_{l+p}$. В этом случае тип матрицы определяется выбором t_{l-p} и $t_{-(l-p)}$. Если матрица $\widehat{T}$ является симметричной, то она одновременно является циркулянтом. Выбор $t_{-(l-p)} = t_{l-p}$ оставляет верным свойство симметричности, а при $t_{-(l-p)} = -t_{l-p}$ сохраняется свойство матрицы быть циркулянтом. Если же матрица $\widehat{T}$ кососимметрична (без учета диагонали), то она одновременно будет косым циркулянтом. Выбор $t_{-(l-p)} = -t_{l-p}$ снова оставляет верным свойство кососимметричности, а выбор $t_{-(l-p)} = t_{l-p}$

сохраняет свойство быть косым циркулянтом. То же самое можно сказать о случае $t_j = -t_{n-j}$ $(j \neq l-p)$, но $t_{l-p} = t_{l+p}$.

г) $n = 2l+1$, $t_l = t_{l+1} = t_{-l} = t_{-(l+1)} = 0$.

Как и в предыдущем случае, будем считать, что нулевыми могут быть еще несколько четверок, ближайших к центральной:

$$t_{l-j} = t_{l+j+1} = t_{-(l-j)} = t_{-(l+j+1)} = 0, \;\; j = 0, 1, \ldots, p-1. \quad (2.25)$$

Четверка t_{l-p}, t_{l+p+1}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p+1)}$, $p \geq 1$, нетривиальна.

Снова докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 2.1.12. *Если $k \leq l-p$, $m > l+p+1$, то в соотношении (2.1) слагаемые, содержащие t_{l-p}, t_{l+p+1}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p+1)}$, взаимно уничтожаются.*

Доказательство леммы 2.1.12. Ясно, что $n+1-m \leq l-p$ и $n+1-k > l+p+1$. Удерживая в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_{l-p}, t_{l+p+1}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p+1)}$, имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{km} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g} \{T\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k} t_{g-m} =$$

$$= \{\text{так как } \; k \leq l-p, \; m > l+p+1,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие } \; g = k+l-p,$$

$$g = k+l+p+1, \; g = m-l+p, \; g = m-l-p-1\} =$$

$$= t_{l-p} t_{l-p+k-m} + t_{l+p+1} t_{l+p+1+k-m} +$$

$$+ t_{-(l-p)} t_{-l+p+m-k} + t_{-(l+p+1)} t_{-l-p-1+m-k} + \ldots,$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{n+1-m,g} \{T\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)} t_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как } \; n+1-m \leq l-p, \; n+1-k > l+p+1,$$

то отделим слагаемые, соответствующие $g = n+1-m+l-p$,

$$g = n+1-m+l+p+1,\ g = n+1-k-l+p,$$

$$g = n-k-l-p\} =$$

$$= t_{l-p}t_{l-p+k-m} + t_{l+p+1}t_{l+p+1+k-m} +$$

$$+ t_{-(l-p)}t_{-l+p+m-k} + t_{-(l+p+1)}t_{-l-p-1+m-k} + \ldots\ .$$

Теперь утверждение леммы очевидно. ■

Лемма 2.1.13. *Если $1 \le k < m < l-p$, то соотношение (2.1) эквивалентно равенству*

$$\begin{gathered} t_{l-p}\left(t_{l-p+k-m} + t_{l-p+m-k}\right) + \\ + t_{l+p+1}\left(t_{l+p+1+k-m} + t_{l+p+1+m-k}\right) + \ldots = \\ = t_{-(l-p)}\left(t_{-l+p+k-m} + t_{-l+p+m-k}\right) + \\ + t_{-(l+p+1)}\left(t_{-l-p-1+k-m} + t_{-l-p-1+m-k}\right) + \ldots, \end{gathered}$$

где многоточиями обозначены слагаемые, не содержащие t_{l-p}, t_{l+p+1}, $t_{-(l-p)}$ и $t_{-(l+p+1)}$.

Доказательство леммы 2.1.13. Из условий леммы выводим, что $n+1-m > l+p+2$, $n+1-k > l+p+2$. Указывая в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_{l-p}, t_{l+p+1}, $t_{-(l-p)}$ и $t_{-(l+p+1)}$, имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{km} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{k,g}\{T\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}t_{g-m} =$$

$$= \{\text{так как } k < l-p,\ m < l-p,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие } g = k+l-p,$$

$$g = k+l+p+1,\ g = m+l-p,\ g = m+l+p+1\} =$$

$$= t_{l-p}\left(t_{l-p+k-m} + t_{l-p+m-k}\right) +$$

$$+ t_{l+p+1}\left(t_{l+p+1+k-m} + t_{l+p+1+m-k}\right) + \ldots,$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{n+1-m,g}\{T\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)} t_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как } \; n+1-m > l+p+2, \; n+1-k > l+p+2,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие } \; g = n+1-m-l+p,$$

$$g = n-m-l-p, \; g = n+1-k-l+p,$$

$$g = n-k-l-p\} =$$

$$= t_{-(l-p)} \left(t_{-l+p+k-m} + t_{-l+p+m-k}\right) +$$

$$+ t_{-(l+p+1)} \left(t_{-l-p-1+k-m} + t_{-l-p-1+m-k}\right) + \ldots \qquad \blacksquare$$

В силу (2.20) соотношения (2.1) для $m = l-p+1, \; l-p+$ $+2, \ldots, l+p$ выполняются автоматически. По аналогии с предыдущими случаями проанализируем соотношения (2.1), отвечающие значениям $m = l-p$ и $m = l+p+1$ и значениям k, убывающим от $l-p-1$ до 1.

Пусть сначала $m = l-p$. Положим $k = l-q$, $p+1 \leq q \leq l-1$; тогда $n+1-m = l+p+2$, $n+1-k = l+q+2$. Вычислим элемент $\left\{TT^{\top}\right\}_{l-q,l-p}$:

$$\left\{TT^{\top}\right\}_{l-q,l-p} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l-q,g} \{T\}_{l-p,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q} t_{g-l+p} =$$

$$= t_{l+q+1} t_{l+p+1} + \sum_{g=n-2p}^{n-1} t_{g-l+q} t_{g-l+p} + \sum_{g=n-q+p}^{n-2p-1} t_{g-l+q} t_{g-l+p} +$$

$$+ \sum_{g=n-q-p}^{n-q+p-1} t_{g-l+q} t_{g-l+p} + t_{l-p} t_{l-q} + \sum_{g=1}^{n-q-p-2} t_{g-l+q} t_{g-l+p} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } \; g = n-2p-1+r,$$

$$\text{во второй } \; g = n-q+p-1+r,$$

$$\text{в третьей } \; g = n-q-p-1+r \text{ и в четвертой } \; g = r\} =$$

$$= t_{l+p+1} t_{l+q+1} + \sum_{r=1}^{2p} t_{r+l-2p+q} t_{r+l-p} + \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r+l+p} t_{r+l+2p-q} +$$

$$+\sum_{r=1}^{2p} t_{r+l-p}t_{r+l-q} + t_{l-p}t_{l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-p-2} t_{r-l+q}t_{r-l+p}.$$

В силу (2.25) первая и третья суммы нулевые:

$$\left\{TT^{\top}\right\}_{l-q,l-p} = t_{l+p+1}t_{l+q+1} + \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r+l+p}t_{r+l+2p-q} +$$

$$+t_{l-p}t_{l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-p-2} t_{r-l+q}t_{r-l+p}.$$

Теперь найдем элемент $\{TT^{\top}\}_{l+p+2,l+q+2}$:

$$\left\{TT^{\top}\right\}_{l+p+2,l+q+2} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l+p+2,g}\{T\}_{l+q+2,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-l-p-2}t_{g-l-q-2} =$$

$$= t_{-l-p-1}t_{-l-q-1} + \sum_{g=2}^{2p+1} t_{g-l-p-2}t_{g-l-q-2} +$$

$$+ \sum_{g=2p+2}^{q-p+1} t_{g-l-p-2}t_{g-l-q-2} + \sum_{g=q-p+2}^{q+p+1} t_{g-l-p-2}t_{g-l-q-2} +$$

$$+t_{-(l-q)}t_{-(l-p)} + \sum_{g=q+p+3}^{n} t_{g-l-p-2}t_{g-l-q-2} =$$

$= \{$положим в первой сумме $g = 1+r$, во второй $g = 2p+1+r$, в третьей $g = q-p+1+r$ и в четвертой $g = q+p+2+r\} =$

$$= t_{-(l+p+1)}t_{-(l+q+1)} + \sum_{r=1}^{2p} t_{r-l-p-1}t_{r-l-q-1} + \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r-l+p-1}t_{r-l+2p-q-1} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2p} t_{r-l-2p+q-1}t_{r-l-p-1} + t_{-(l-p)}t_{-(l-q)} + \sum_{r=1}^{n-q-p-2} t_{r-l+q}t_{r-l+p}.$$

Условие (2.25) дает

$$\left\{TT^{\top}\right\}_{l+p+2,l+q+2} =$$

$$= t_{-(l+p+1)}t_{-(l+q+1)} + \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r-l+p-1}t_{r-l+2p-q-1}+$$

$$+t_{-(l-p)}t_{-(l-q)} + \sum_{r=1}^{n-q-p-2} t_{r-l+q}t_{r-l+p}.$$

Равенство (2.1) для $k = l - q$ и $m = l - p$ приобретает вид

$$\begin{gathered} t_{l+p+1}t_{l+q+1} + \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r+l+p}t_{r+l+2p-q}+ \\ +t_{l-p}t_{l-q} = t_{-(l+p+1)}t_{-(l+q+1)}+ \\ + \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r-l+p-1}t_{r-l+2p-q-1} + t_{-(l-p)}t_{-(l-q)}. \end{gathered} \tag{2.26}$$

Чтобы упростить это равенство, рассмотрим соотношение (2.1) для $k = l - q + 1$, $m = l - p + 1$, $n + 1 - m = l + p + 1$ и $n + 1 - k = l + q + 1$. Имеем

$$\left\{TT^{\top}\right\}_{l-q+1,l-p+1} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l-q+1,g}\{T\}_{l-p+1,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q-1}t_{g-l+p-1} =$$

$$= \sum_{g=n-2p+1}^{n} t_{g-l+q-1}t_{g-l+p-1} + \sum_{g=n-q+p+1}^{n-2p} t_{g-l+q-1}t_{g-l+p-1}+$$

$$+ \sum_{g=n-q-p+1}^{n-q+p} t_{g-l+q-1}t_{g-l+p-1} + \sum_{g=1}^{n-q-p} t_{g-l+q-1}t_{g-l+p-1} =$$

$= \{$положим в первой сумме $g = n - 2p + r$,

во второй $g = n - q + p + r$,

в третьей $g = n - q - p + r$ и в четвертой $g = r\} =$

$$= \sum_{r=1}^{2p} t_{r+l-2p+q} t_{r+l-p} + \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r+l+p} t_{r+l+2p-q} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2p} t_{r+l-p} t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-p} t_{r-l+q-1} t_{r-l+p-1}.$$

В силу (2.25) получаем

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q+1,l-p+1} = \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r+l+p} t_{r+l+2p-q} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-q-p} t_{r-l+q-1} t_{r-l+p-1}.$$

Аналогично,

$$\left\{TT^\top\right\}_{l+p+1,l+q+1} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l+p+1,g} \{T\}_{l+q+1,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-l-p-1} t_{g-l-q-1} =$$

$$= \sum_{g=1}^{2p} t_{g-l-p-1} t_{g-l-q-1} + \sum_{g=2p+1}^{q-p} t_{g-l-p-1} t_{g-l-q-1} +$$

$$+ \sum_{g=q-p+1}^{q+p} t_{g-l-p-1} t_{g-l-q-1} + \sum_{g=q+p+1}^{n} t_{g-l-p-1} t_{g-l-q-1} =$$

$= \{$положим в первой сумме $g = r$, во второй $g = 2p + r$,

в третьей $g = q - p + r$ и в четвертой $g = q + p + r\} =$

$$= \sum_{r=1}^{2p} t_{r-l-p-1} t_{r-l-q-1} + \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r-l+p-1} t_{r-l+2p-q-1} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2p} t_{r-l-2p+q-1} t_{r-l-p-1} + \sum_{r=1}^{n-q-p} t_{r-l+q-1} t_{r-l+p-1}.$$

В силу (2.25),

$$\left\{TT^\top\right\}_{l+p+1,l+q+1} =$$

$$= \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r-l+p-1}t_{r-l+2p-q-1} + \sum_{r=1}^{n-q-p} t_{r-l+q-1}t_{r-l+p-1}.$$

В результате приходим к равенству

$$\sum_{r=1}^{q-3p} t_{r+l+p}t_{r+l+2p-q} = \sum_{r=1}^{q-3p} t_{r-l+p-1}t_{r-l+2p-q-1},$$

которое превращает (2.26) в соотношение

$$\begin{gathered} t_{l-p}t_{l-q} + t_{l+p+1}t_{l+q+1} = \\ = t_{-(l-p)}t_{-(l-q)} + t_{-(l+p+1)}t_{-(l+q+1)}. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Теперь исследуем условие (2.1) для $k = l-q$, $p+1 \le q \le l-1$, $m = l+p+1$; тогда $n+1-m = l-p+1$, $n+1-k = l+q+2$. Вычислим элемент $\left\{TT^\top\right\}_{l-q,l+p+1}$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q,l+p+1} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{l-q,g}\{T\}_{l+p+1,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q}t_{g-l-p-1} =$$

$$= t_{l+q+1}t_{l-p} + \sum_{g=n-q+p+1}^{n-1} t_{g-l+q}t_{g-l-p-1} +$$

$$+ t_{l+p+1}t_{l-q} + \sum_{g=n-q-p}^{n-q+p-1} t_{g-l+q}t_{g-l-p-1} +$$

$$+ \sum_{g=2p+1}^{n-q-p-1} t_{g-l+q}t_{g-l-p-1} + \sum_{g=1}^{2p} t_{g-l+q}t_{g-l-p-1} =$$

$= \{$положим в первой сумме $g = n-q+p+r$,

во второй $g = n-q-p-1+r$,

в третьей $g = 2p+r$ и в четвертой $g = r\} =$

$$= t_{l-p}t_{l+q+1} + \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p+1}t_{r+l-q} +$$

$$+ t_{l+p+1}t_{l-q} + \sum_{r=1}^{2p} t_{r+l-p}t_{r+l-2p-q-1} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-q-3p-1} t_{r-l+2p+q}t_{r-l+p-1} + \sum_{r=1}^{2p} t_{r-l+q}t_{r-l-p-1}.$$

Вследствие (2.25) получаем

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q,l+p+1} = t_{l-p}t_{l+q+1} + \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p+1}t_{r+l-q} +$$

$$+ t_{l+p+1}t_{l-q} + \sum_{r=1}^{n-q-3p-1} t_{r-l+2p+q}t_{r-l+p-1}.$$

Теперь найдем элемент $\left\{TT^\top\right\}_{l-p+1,l+q+2}$:

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-p+1,l+q+2} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l-p+1,g}\{T\}_{l+q+2,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-2} =$$

$$= t_{-l+p}t_{-l-q-1} + \sum_{g=2}^{q-p} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-2} +$$

$$+ t_{-l+q}t_{-l-p-1} + \sum_{g=q-p+2}^{q+p+1} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-2} +$$

$$+ \sum_{g=q+p+2}^{n-2p} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-2} + \sum_{g=n-2p+1}^{n} t_{g-l+p-1}t_{g-l-q-2} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } g = 1 + r,$$

$$\text{во второй } g = q - p + 1 + r,$$

$$\text{в третьей } \; g = q + p + 1 + r$$

$$\text{и в четвертой } \; g = n - 2p + r\} =$$

$$= t_{-(l-p)}t_{-(l+q+1)} + \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p}t_{r-l-q-1} +$$

$$+ t_{-(l+p+1)}t_{-(l-q)} + \sum_{r=1}^{2p} t_{r-l+q}t_{r-l-p-1} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-q-3p-1} t_{r-l+2p+q}t_{r-l+p-1} + \sum_{r=1}^{2p} t_{r+l-p}t_{r+l-2p-q-1}.$$

В силу (2.25) вторая и четвертая суммы обращаются в нуль, поэтому

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-p+1,l+q+2} = t_{-(l-p)}t_{-(l+q+1)} + \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p}t_{r-l-q-1} +$$

$$+ t_{-(l+p+1)}t_{-(l-q)} + \sum_{r=1}^{n-q-3p-1} t_{r-l+2p+q}t_{r-l+p-1}.$$

Условие (2.1) для $k = l - q$, $p + 1 \le q \le l - 1$, $m = l + p + 1$, приобретает вид

$$\begin{gathered} t_{l-p}t_{l+q+1} + \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p+1}t_{r+l-q} + \\ + t_{l+p+1}t_{l-q} = t_{-(l-p)}t_{-(l+q+1)} + \\ + \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p}t_{r-l-q-1} + t_{-(l+p+1)}t_{-(l-q)}. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Чтобы упростить равенство (2.28), рассмотрим соотношение (2.1) для $k = l - q + 1$, $m = l + p + 2$, $n + 1 - m = l - p$, $n + 1 - k = l + q + 1$. Имеем

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-q+1,l+p+2} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l-q+1,g}\{T\}_{l+p+2,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+q-1}t_{g-l-p-2} =$$

$$= \sum_{g=n-q+p+2}^{n} t_{g-l+q-1} t_{g-l-p-2} + \sum_{g=1}^{n-q+p+1} t_{g-l+q-1} t_{g-l-p-2} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } g = n-q+p+1+r, \text{ а во второй } g = r\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p+1} t_{r+l-q} + \sum_{r=1}^{n-q+p+1} t_{r-l+q-1} t_{r-l-p-2},$$

$$\left\{TT^\top\right\}_{l-p,l+q+1} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{l-p,g} \{T\}_{l+q+1,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-l+p} t_{g-l-q-1} =$$

$$= \sum_{g=1}^{q-p-1} t_{g-l+p} t_{g-l-q-1} + \sum_{g=q-p}^{n} t_{g-l+p} t_{g-l-q-1} =$$

$$= \{\text{положим в первой сумме } g = r, \text{ а во второй } g = q-p-1+r\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p} t_{r-l-q-1} + \sum_{r=1}^{n-q+p+1} t_{r-l+q-1} t_{r-l-p-2}.$$

Приходим к равенству

$$\sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r+l+p+1} t_{r+l-q} = \sum_{r=1}^{q-p-1} t_{r-l+p} t_{r-l-q-1},$$

которое превращает (2.28) в условие

$$t_{l-p} t_{l+q+1} + t_{l+p+1} t_{l-q} = t_{-(l-p)} t_{-(l+q+1)} + t_{-(l+p+1)} t_{-(l-q)}. \quad (2.29)$$

Объединим соотношения (2.27) и (2.29) в систему

$$\begin{cases} t_{l-p} t_{l-q} + t_{l+p+1} t_{l+q+1} = \\ \qquad\qquad = t_{-(l-p)} t_{-(l-q)} + t_{-(l+p+1)} t_{-(l+q+1)}, \\ t_{l-p} t_{l+q+1} + t_{l+p+1} t_{l-q} = \\ \qquad\qquad = t_{-(l-p)} t_{-(l+q+1)} + t_{-(l-p)} t_{-(l-q)}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Подведем итоги. Леммы 2.1.12 и 2.1.13 вместе с равенствами (2.30) для значений q от $p+1$ до $l-1$ показывают, что совокупность соотношений (2.1), характеризующая свойство нормальности теплицевой матрицы T, продолжает выполняться и после замены элементов четверки t_{l-p}, t_{l+p+1}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p+1)}$ нулями. Тем самым теплицева матрица $\widehat{T}$, полученная благодаря такой замене, остается нормальной. По индуктивному предположению, $\widehat{T}$ принадлежит одному из классов 1)-4). Если $t_{l-p}^2 \neq t_{l+p+1}^2$, то, применяя к (2.30) лемму 2.1.5 для $j_1 = l-p$, заключаем, что к тому же классу относится матрица T. Если $t_{l-p}^2 = t_{l+p+1}^2$, но среди остальных нетривиальных четверок имеется такая, что $t_j^2 \neq t_{n-j}^2$, то четверка t_{l-p}, t_{l+p+1}, $t_{-(l-p)}$, $t_{-(l+p+1)}$ должна иметь тип, совпадающий с типом четверки t_j, t_{n-j}, t_{-j}, $t_{-(n-j)}$ согласно лемме 2.1.5 для $j_1 = j$ и $j_2 = l-p$.

Пусть теперь $t_j^2 = t_{n-j}^2$ для всех j. Если $t_{l-p} = t_{l+p+1}$ и $t_j = t_{n-j}$ $(j \neq l-p)$ или $t_{l-p} = -t_{l+p+1}$ и $t_j = -t_{n-j}$ $(j \neq l-p)$, то согласование типов $\widehat{T}$ и T осуществляется соответственно условием (2.9) или (2.10) для $j_1 = l-p$ и $j_2 = j$.

Пусть, наконец, $t_j = t_{n-j}$ $(j \neq l-p)$, но $t_{l-p} = -t_{l+p+1}$. В этом случае тип матрицы определяется выбором t_{l-p} и $t_{-(l-p)}$. Если матрица $\widehat{T}$ является симметричной, то она одновременно является циркулянтом. Выбор $t_{-(l-p)} = t_{l-p}$ оставляет верным свойство симметричности, а при $t_{-(l-p)} = -t_{l-p}$ сохраняется свойство матрицы быть циркулянтом. Если же матрица $\widehat{T}$ кососимметрична (без учета диагонали), то она одновременно будет косым циркулянтом. Выбор $t_{-(l-p)} = -t_{l-p}$ снова оставляет верным свойство кососимметричности, а при $t_{-(l-p)} = t_{l-p}$ сохраняется свойство быть косым циркулянтом. То же самое можно сказать о случае $t_j = -t_{n-j}$ $(j \neq l-p)$, но $t_{l-p} = t_{l+p+1}$. Разбор ситуации г) закончен, вместе с тем полностью завершено доказательство необходимости.

2.1.2 Доказательство достаточности

В этом разделе мы покажем, что симметричные матрицы, линейные многочлены от кососимметричных матриц, циркулянты и косые циркулянты с вещественными элементами являются нормальными матрицами. Для первых двух типов это очевидно.

Если матрица T является циркулянтом, то и $T^\top$ — циркулянт. Так как два циркулянта одинакового порядка коммутируют (см. лемму 1.2.8), то это доказывает нормальность матрицы T. Аналогично обосновывается нормальность косого циркулянта, используя лемму 1.2.13. Тем самым достаточность доказана.

2.2 Критерий нормальности комплексной теплицевой матрицы

Технику, разработанную в [20, 21] при доказательстве теоремы 2.1.1, впоследствии удалось распространить на комплексный случай, сформулировав и доказав в [23] классификационную теорему, аналогичную теореме 2.1.1.

Теорема 2.2.1. *Ненулевая теплицева матрица $T \in M_n(\mathbf{C})$ является нормальной тогда и только тогда, когда принадлежит хотя бы одному из следующих классов:*

Класс НТКМ_1. T — матрица вида $\alpha I_n + \beta R$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, R — эрмитова теплицева матрица.

Класс НТКМ_2. T представляет собой φ-циркулянт для некоторого числа $\varphi \in \mathbf{C}$, $|\varphi| = 1$.

Несложно видеть, что для вещественных матриц эта теорема дает те же матричные классы, что и теорема 2.1.1. Идея доказательства теоремы 2.2.1 в [23] та же, что и в [20, 21]. Имеются однако небольшие различия, связанные с переходом к комплексным значениям матричных элементов.

Задача об описании нормальных теплицевых матриц, поставленная и решенная в [23], привлекла немалое внимание в алгебраической литературе. На протяжении десяти лет был предложен ряд ее решений, отличающихся от первоначального.

В 1996 г. Д. Р. Фареник, М. Крупник, Н. Крупник и В. Ю. Ли опубликовали свое доказательство теоремы 2.2.1 (см. [51]).

Основными объектами этого доказательства являются пары симметрично расположенных диагоналей. Для матрицы (1.1) и подмножества $\{m_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$ будем говорить, что множество пар диагоналей матрицы T с номерами m_j является *косвязанным* (с аргументом θ), если $t_{-m_j} = \bar{t}_{m_j} e^{i\theta}$, и *контросвязанным* (с аргументом θ) при $t_{-m_j} = t_{n-m_j} e^{i\theta}$. Вот главные этапы обоснования теоремы 2.2.1 в [51]. Сначала авторы доказывают, что каждые две пары диагоналей с номерами j и $n-j$, $1 \le j \le l$, (в случае $n = 2l+1$) и каждые три пары диагоналей с номерами $l-k$, l, $l+k$, $1 \le k \le l-1$, (в случае $n = 2l$), будут либо косвязанными, либо контросвязанными, либо одновременно ко- и контросвязанными. Затем устанавливается, что существует единый аргумент θ такой, что все пары диагоналей либо косвязаны, либо контросвязаны, либо одновременно ко- и контросвязаны с этим аргументом θ.

Еще одно решение предложил Ито (см. [53]). Сущность его подхода состоит в формировании из элементов исходной матрицы специальных теплицевых матриц размеров 3×3, 4×4 и 5×5 и детальном анализе этих матриц. Отождествим теплицеву матрицу T с вектором вида $[t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1};\ t_{-1},\ t_{-2},\ \ldots,\ t_{-(n-1)}]$. Условимся, что для произвольного набора натуральных чисел $\{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_m\} \subseteq \{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$ символ $[j_1, j_2, \ldots, j_m]$ обозначает теплицеву $(m+1)\times(m+1)$-матрицу с нулевой диагональю, ассоциированную с вектором $[t_{j_1},\ t_{j_2},\ \ldots,\ t_{j_m};\ t_{-j_1},\ t_{-j_2},\ \ldots,\ t_{-j_m}]$.

Доказательство, предложенное Ито, состоит из нескольких основных этапов. Предполагается, что диагональный элемент без ограничения общности можно считать нулевым. Сначала показывается, что из нормальности матрицы T вытекает нормальность теплицевых матриц пятого порядка вида

$$[m, k, n-k, n-m] \qquad \left(1 \le m < k < \frac{n}{2}\right), \tag{2.31}$$

а также матриц четвертого и третьего порядков вида

$$\left[m, \frac{n}{2}, n-m\right] \qquad \left(1 \le m < \frac{n}{2},\ n = 2l\right), \tag{2.32}$$

$$[m, n-m] \qquad \left(1 \le m < k < \frac{n}{2}\right).$$

Далее устанавливается классификация нормальных теплицевых матриц порядков 2, 3, 4 и 5, выделяющая матрицы типа I (соответствуют классу *HTKM_1*) и типа II (аналог класса *HTKM_2*). Затем для произвольного нечетного n, используя нормальность матриц $[1, k, n-k, n-1]$ $\left(1 < k < \frac{n}{2}\right)$ и, значит, их принадлежность классам I или II, показывается рассуждением от противного, что все эти матрицы имеют одинаковый тип. Завершается доказательство аналогичным исследованием для $n = 2l$. При этом также используются нормальные теплицевы матрицы четвертого порядка вида (2.32) в силу вырождаемости набора индексов (2.31) при $k = l$. В итоге оказывается, что нормальные теплицевы матрицы могут иметь только тип I или тип II.

Описание нормальных теплицевых матриц может быть также получено как частный случай более общей задачи, рассмотренной в [52]. В этой работе сформулированы необходимые и достаточные условия на теплицевы матрицы A, B, C и D, обеспечивающие теплицевость матрицы $AB - CD$ или выполнение равенства $AB - CD = 0$. Гу и Паттен, авторы [52], выполняют в полученных условиях для равенства $AB - CD = 0$ подстановку $A = T$, $B = T^*$, $C = T^*$ и $D = T$, приходя тем самым к нормальной теплицевой задаче. Условия принимают вид матричного равенства

$$aa^* - \widetilde{\alpha}\widetilde{\alpha}^* = \alpha\alpha^* - \widetilde{a}\widetilde{a}^*,$$

где

$$a = (0,\ t_{-1},\ \ldots,\ t_{-(n-1)})^\top$$

и

$$\alpha = (0,\ \bar{t}_1,\ \ldots,\ \bar{t}_{n-1})^\top.$$

Знак тильды над символом вектора $x = (0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})^\top$ означает замену его вектором

$$\widetilde{x} = (0, \overline{x}_{n-1},\ \ldots,\ \overline{x}_1)^\top.$$

Полученное матричное равенство анализируется в двух возможных случаях: векторы a и $\widetilde{\alpha}$ линейно зависимы, т.е. $a = \lambda\widetilde{\alpha}$; векторы a и $\widetilde{\alpha}$ линейно независимы. В первом случае авторы показывают, что $|\lambda| = 1$, а матрица T принадлежит классу *НТКМ_2*. Во втором случае оказывается, что a и α коллинеарны: $a = \bar{\lambda}\alpha$, где снова $|\lambda| = 1$. В этом случае матрица T принадлежит классу *НТКМ_1*.

Однако самое короткое доказательство теорем 2.1.1 и 2.2.1 было получено в 2002 году в работе А. Аримото [44]. В обосновании вещественного случая по элементам матрицы T из формулы (1.1) строятся четыре алгебраических многочлена:

$$s(x) = t_1x + t_2x^2 + \ldots + t_{n-1}x^{n-1},$$
$$\widetilde{s}(x) = t_{n-1}x + t_{n-2}x^2 + \ldots + t_1x^{n-1},$$
$$q(x) = t_{-1}x + t_{-2}x^2 + \ldots + t_{-(n-1)}x^{n-1},$$
$$\widetilde{q}(x) = t_{-(n-1)}x + t_{-(n-2)}x^2 + \ldots + t_{-1}x^{n-1}.$$

Без ограничения общности считается, что $t_0 = 0$. Из условия нормальности матрицы T выводится следующая связь между построенными многочленами:

$$\left(s^2(x) - q^2(x)\right)\left(\widetilde{s}^{\,2}(x) - \widetilde{q}^{\,2}(x)\right) = 0.$$

Из нее получаются четыре типа соотношений между внедиагональными элементами матрицы T: 1) $s(x) = q(x) \Longrightarrow$ матрица T — симметричная; 2) $s(x) = -q(x) \Longrightarrow T$ — кососимметричная; 3) $\widetilde{s}(x) = \widetilde{q}(x) \Longrightarrow T$ — циркулянт; 4) $\widetilde{s}(x) = -\widetilde{q}(x) \Longrightarrow T$ — косой циркулянт.

При доказательстве комплексного критерия Аримото строит два тригонометрических многочлена

$$s(x) = t_1e^{ix} + t_2e^{2ix} + \ldots + t_{n-1}e^{(n-1)ix},$$
$$q(x) = t_{-1}e^{-ix} + t_{-2}e^{-2ix} + \ldots + t_{-(n-1)}e^{-(n-1)ix}.$$

Из условия нормальности матрицы T выводится существование числа x_0 такого, что $q(x_0) \neq 0$, и двух констант α и β, подчиняющихся условиям $|\alpha| = |\beta| = 1$, для которых справедливо равенство

$$\left\{s(x) - q(x)\alpha e^{ni(x-x_0)}\right\}\left\{\overline{s}(x) - q(x)\overline{\alpha\beta}\right\} = 0.$$

Это равенство возможно в двух случаях: 1) $q(x) = \alpha_0 \overline{s}(x)$, $\alpha_0 = \alpha\beta$; При этом T является линейным многочленом с комплексными коэффициентами от некоторой эрмитовой матрицы; 2) $\beta_0 s(x) = q(x)e^{nix}$, где $\beta_0 = \overline{\alpha}e^{nix_0}$; в этом случае T есть β_0-циркулянт.

Несмотря на наличие различных подходов к доказательству теоремы 2.2.1, мы приведем доказательство из [39].

2.2.1 Доказательство необходимости

2.2.1.1 Обнуление диагонали

В комплексном случае, как так же и в вещественном, диагональные элементы матрицы T без ограничения общности можно считать нулями. Действительно, если $t_0 \neq 0$, то T можно представить в виде $T = t_0 I_n + T_0$, где T_0 отличается от T лишь нулем на главной диагонали.

В силу леммы 1.2.29 матрицы T и T_0 или обе нормальны, или обе не являются нормальными. Итак, работая в дальнейшем с матрицей T, считаем ее диагональный элемент t_0 нулевым.

2.2.1.2 Вспомогательные леммы

Элементы матрицы T будем записывать в показательной форме

$$t_j = \rho_j e^{i\widetilde{\varphi}_j}, \tag{2.33}$$

где $\rho_j = |t_j|$, $\widetilde{\varphi}_j = \arg t_j$, $\rho_j \geq 0$, $\widetilde{\varphi}_j \in [0, 2\pi)$, $j = -(n-1)$, ..., $n-1$. Считаем, что если аргумент некоторого комплексного числа a, получающегося в результате преобразований, выходит из множества $[0, 2\pi)$, то добавляя к аргументу или вычитая из него величину 2π, заменяем число a на равное ему $\tilde{a}$, но уже имеющее аргумент из требуемого промежутка.

Всякая теплицева матрица персимметрична, т.е. симметрична относительно антидиагонали $(1, n)$, $(2, n-1)$, ..., $(n, 1)$. Следующий критерий нормальности в комплексном случае учитывает свойство персимметрии.

Лемма 2.2.1. *Для того чтобы теплицева матрица T была нормальной, необходима и достаточна персимметричность матрицы TT^*.*

Доказательство леммы 2.2.1.

$$\{TT^*\}_{k,m} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g} \left\{\overline{T}\right\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}\bar{t}_{g-m} =$$

$$= \{\text{положим } \ g = n+1-r\} = \sum_{r=1}^{n} t_{n+1-r-k}\bar{t}_{n+1-r-m} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} t_{(n+1-k)-r}\bar{t}_{(n+1-m)-r} = \sum_{r=1}^{n} \{T\}_{r,n+1-k} \left\{\overline{T}\right\}_{r,n+1-m} =$$

$$= \overline{\sum_{r=1}^{n} \left\{\overline{T}\right\}_{r,n+1-k} \{T\}_{r,n+1-m}} = \overline{\{T^*T\}_{n+1-k,n+1-m}} =$$

$$= \{(T^*T)^*\}_{n+1-m,n+1-k} = \{\text{матрица } T^*T \text{ — эрмитова}\} =$$

$$= \{T^*T\}_{n+1-m,n+1-k}\,.$$

Пусть матрица T нормальна, т.е. $T^*T = TT^*$. Следовательно,

$$\{TT^*\}_{k,m} = \{T^*T\}_{n+1-m,n+1-k} = \{TT^*\}_{n+1-m,n+1-k}\,.$$

Таким образом, TT^* — персимметричная матрица.

Пусть теперь матрица TT^* персимметрична. Тогда

$$\{T^*T\}_{n+1-m,n+1-k} = \{TT^*\}_{k,m} = \{TT^*\}_{n+1-m,n+1-k}\,.$$

Отсюда выводим $T^*T = TT^*$. Следовательно, матрица T нормальная. ■

Лемма 2.2.1 позволяет вместо перестановочности матриц T и T^* проверять свойство персимметрии матрицы TT^*, записанное в виде

$$\{TT^*\}_{k,m} = \{TT^*\}_{n+1-m,n+1-k}\,. \tag{2.34}$$

Понятие четверки, введенное для вещественных теплицевых матриц, будет использоваться и в комплексном случае.

Лемма 2.2.2. *Для комплексной нормальной и теплицевой матрицы T справедливо*

$$\rho_j^2 + \rho_{n-j}^2 = \rho_{-j}^2 + \rho_{-(n-j)}^2, \qquad 1 \le j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \tag{2.35}$$

Если n — четное число, то для $l = n/2$ верно равенство

$$\rho_l = \rho_{-l}. \tag{2.36}$$

Доказательство леммы 2.2.2. Покажем, что данное утверждение является следствием нормальности матрицы T, а точнее следствием персимметричности матрицы TT^*.

Выпишем выражение для диагонального элемента матрицы TT^*:

$$\{TT^*\}_{k,k} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g} \left\{\overline{T}\right\}_{k,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}\bar{t}_{g-k} =$$

$$= \sum_{g=1}^{k-1} t_{g-k}\bar{t}_{g-k} + \sum_{g=k+1}^{n} t_{g-k}\bar{t}_{g-k} =$$

$= \{$положим в первой сумме $g = k-r$, а во второй $g = k+r\} =$

$$= \sum_{r=1}^{k-1} t_{-r}\bar{t}_{-r} + \sum_{r=1}^{n-k} t_r\bar{t}_r = \sum_{r=1}^{k-1} \rho_{-r}^2 + \sum_{j=1}^{n-k} \rho_r^2.$$

Рассмотрим сначала случай $n = 2l$. Соотношение (2.34) для $k = m = l$ и, соответственно, $n+1-m = n+1-k = l+1$ имеет вид

$$\sum_{r=1}^{l-1} \rho_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{l} \rho_r^2 = \sum_{r=1}^{l} \rho_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{l-1} \rho_r^2.$$

Отсюда получаем $\rho_l = \rho_{-l}$, т.е. равенство (2.36).

Теперь для произвольного n и $j \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ рассмотрим равенство (2.34) при $k = m = j+1$ и, соответственно, $n+1-m = n+1-k = n-j$:

$$\sum_{r=1}^{j} \rho_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{n-j-1} \rho_r^2 = \sum_{r=1}^{n-j-1} \rho_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{j} \rho_r^2.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\sum_{r=j+1}^{n-j-1} \rho_r^2 = \sum_{r=j+1}^{n-j-1} \rho_{-r}^2. \tag{2.37}$$

Далее выпишем соотношение (2.34) для $k = m = j$ и, соответственно, $n+1-m = n+1-k = n+1-j$:

$$\sum_{r=1}^{j-1} \rho_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{n-j} \rho_r^2 = \sum_{r=1}^{n-j} \rho_{-r}^2 + \sum_{r=1}^{j-1} \rho_r^2.$$

Его, в свою очередь, можно упростить к виду

$$\sum_{r=j}^{n-j} \rho_r^2 = \sum_{r=j}^{n-j} \rho_{-r}^2.$$

Записывая это равенство как

$$\rho_j^2 + \sum_{r=j+1}^{n-j-1} \rho_r^2 + \rho_{n-j}^2 = \rho_{-j}^2 + \sum_{r=j+1}^{n-j-1} \rho_{-r}^2 + \rho_{-(n-j)}^2$$

и учитывая (2.37), получаем (2.35). ■

Лемма 2.2.3. *Для комплексной нормальной и теплицевой матрицы T справедливо*

$$t_j \bar{t}_{n-j} = t_{-(n-j)} \bar{t}_{-j}, \qquad 1 \le j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \tag{2.38}$$

Доказательство леммы 2.2.3. Покажем, что это утверждение также является следствием персимметричности матрицы TT^*.

Рассмотрим равенство (2.34) для $k = j+1$, $m = n-j+1$ и, соответственно, $n+1-m = j$, $n+1-k = n-j$. Предварительно вычислим элементы $\{TT^*\}_{j+1,n-j+1}$ и $\{TT^*\}_{j,n-j}$:

$$\{TT^*\}_{j+1,n-j+1} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{j+1,g} \{\overline{T}\}_{n-j+1,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-j-1} \bar{t}_{g-n+j-1} = t_{-j} \bar{t}_{-(n-j)} + \sum_{g=2}^{n} t_{g-j-1} \bar{t}_{g-n+j-1} =$$

$$= \{\text{положим в этой сумме } \ g = 1 + r\} =$$

$$= t_{-j}\bar{t}_{-(n-j)} + \sum_{r=1}^{n-1} t_{r-j}\bar{t}_{r-n+j},$$

$$\{TT^*\}_{j,n-j} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{j,g} \left\{\overline{T}\right\}_{n-j,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-j}\bar{t}_{g-n+j} = t_{n-j}\bar{t}_j + \sum_{g=1}^{n-1} t_{g-j}\bar{t}_{g-n+j} =$$

$$= \{\text{положим в этой сумме } \ g = r\} = t_{n-j}\bar{t}_j + \sum_{r=1}^{n-1} t_{r-j}\bar{t}_{r-n+j}.$$

Теперь равенство (2.34) дает соотношение (2.38). ■

Из лемм 2.2.2 и 2.2.3 выводим следующее утверждение.

Лемма 2.2.4. *В комплексной нормальной и теплицевой матрице T каждая четверка коэффициентов t_j, t_{n-j}, t_{-j} и $t_{-(n-j)}$, $1 \le j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, подчиняется одному из соотношений*

$$1)\quad t_{-j} = \bar{t}_j, \quad t_{-(n-j)} = \bar{t}_{n-j};$$
$$2)\quad t_{-j} = \varphi_j t_{n-j}, \quad t_{-(n-j)} = \varphi_j t_j, \quad \varphi_j \in \mathbf{C}.$$

Доказательство леммы 2.2.4. Если в четверке t_j, t_{n-j}, t_{-j}, $t_{-(n-j)}$ числа t_j и t_{n-j} равны нулю, то эта четверка тривиальна. Если равно нулю одно из чисел t_j, t_{n-j}, то ровно одно из чисел t_{-j}, $t_{-(n-j)}$ также равно нулю. Если все числа в четверке ненулевые, то с учетом полярного представления (2.33) выводим из (2.38) соотношения

$$\rho_j\rho_{n-j} = \rho_{-j}\rho_{-(n-j)}, \tag{2.39}$$
$$\widetilde{\varphi}_j - \widetilde{\varphi}_{n-j} = -\widetilde{\varphi}_{-j} + \widetilde{\varphi}_{-(n-j)}.$$

Равенства (2.35) и (2.39) вместе означают, что

$$\rho_j = \rho_{-j}, \qquad \rho_{n-j} = \rho_{-(n-j)} \tag{2.40}$$

либо

$$\rho_j = \rho_{-(n-j)}, \qquad \rho_{n-j} = \rho_{-j}. \tag{2.41}$$

Положим

$$\psi_j = \widetilde{\varphi}_j + \widetilde{\varphi}_{-j} = \widetilde{\varphi}_{n-j} + \widetilde{\varphi}_{-(n-j)}.$$

Если $\psi_j = 0$, то в случае (2.40)

$$t_j = \bar{t}_{-j}, \qquad t_{n-j} = \bar{t}_{-(n-j)}, \tag{2.42}$$

т. е. локально, внутри четверки $t_j,\ t_{n-j},\ t_{-j},\ t_{-(n-j)}$, матрица T эрмитова. При $\psi_j \neq 0$ имеем

$$t_j = e^{i\psi_j}\bar{t}_{-j}, \qquad t_{n-j} = e^{i\psi_j}\bar{t}_{-(n-j)}, \tag{2.43}$$

что локально соответствует матричному соотношению $T = e^{i\psi_j}T^*$, описывающему матрицы, коллинеарные эрмитовым.

Для случая (2.41) определим величину

$$\theta_j = \widetilde{\varphi}_j - \widetilde{\varphi}_{-(n-j)} = \widetilde{\varphi}_{n-j} - \widetilde{\varphi}_{-j}.$$

Если $\theta_j = 0$, то

$$t_j = t_{-(n-j)}, \qquad t_{n-j} = t_{-j}, \tag{2.44}$$

т.е. локально T ведет себя как обычный циркулянт. При $\theta_j \neq 0$ получаем

$$t_{-(n-j)} = t_j e^{-i\theta_j}, \qquad t_{-j} = t_{n-j}e^{-i\theta_j}, \tag{2.45}$$

что совпадает с локальным поведением φ-циркулянта, где $\varphi = \varphi_j = e^{-i\theta_j}$. ■

2.2.1.3 Базовое утверждение

В этом разделе докажем важное утверждение, используемое в дальнейшем. Напомним, что индексом матрицы T мы называем число μ нетривиальных четверок $t_j,\ t_{n-j},\ t_{-j},\ t_{-(n-j)}$.

Утверждение 2.2.2. *Пусть T — нормальная матрица индекса μ, и пусть $w \in \mathbf{N}$, $1 \leq w \leq \mu - 1$. Тогда нормальной будет и матрица $\widehat{T}$, получающаяся из T заменой нулями центральной четверки и $w-1$ нетривиальных четверок, ближайших к центральной, или же, если центральная четверка тривиальна, получающаяся заменой нулями w нетривиальных четверок, ближайших к центральной.*

Доказательство утверждения 2.2.2. Доказательство будем вести индукцией по w.

Базис индукции: $w = 1$. Нам надо показать, что при замене нулями элементов центральной или ближайшей к ней нетривиальной четверки матрица сохраняет нормальность.

При переходе от T к $\widehat{T}$ возможны следующие случаи:

а) $n = 2l$, t_l и t_{-l} ненулевые;

б) $n = 2l + 1$, центральная четверка нетривиальна;

в) $n = 2l$, $t_l = t_{-l} = 0$;

г) $n = 2l + 1$, $t_l = t_{l+1} = t_{-l} = t_{-(l+1)} = 0$.

Последовательно проанализируем эти ситуации. Возможность перехода от T к $\widehat{T}$ с сохранением нормальности будет выведена из условия персимметричности матрицы TT^*, записанного для наддиагональных позиций этой матрицы. Рассмотрение поддиагональных позиций излишне в силу эрмитовости TT^*.

а) $n = 2l$, t_l и t_{-l} ненулевые.

Для дальнейшего анализа нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 2.2.5. *Пусть $k \le l$, $m > l$. Тогда в соотношении (2.34) слагаемые, содержащие t_l и t_{-l}, взаимно уничтожаются.*

Доказательство леммы 2.2.5. Ясно, что $n+1-m \le l$, $n+1-k > l$. Выделяя в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_l и t_{-l}, имеем

$$\{TT^*\}_{km} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{k,g} \left\{\overline{T}\right\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}\overline{t}_{g-m} =$$

$$= \{\text{т.к. } \ k \le l, \ m > l, \text{ то отделим слагаемые,}$$

$$\text{соответствующие } \ g = k + l, \ g = m - l\} =$$

$$= t_l\overline{t}_{l+k-m} + \overline{t}_{-l}t_{-l+m-k} + \sum_{\substack{g=1 \\ g\ne k+l \\ g\ne m-l}}^{n} t_{g-k}\overline{t}_{g-m} =$$

$$= t_l\overline{t}_{l+k-m} + \overline{t}_{-l}t_{-l+m-k} + \ldots,$$

$$\{TT^*\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{n+1-m,g}\left\{\overline{T}\right\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)}\overline{t}_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как } \ n+1-m \leq l, \ n+1-k > l,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}$$

$$g = n+1-m+l, \ g = n+1-k-l\} =$$

$$= t_l\overline{t}_{l+k-m} + \overline{t}_{-l}t_{-l+m-k} + \sum_{\substack{g=1 \\ g\neq n+1-m+l \\ g\neq n+1-k-l}}^{n} t_{g-(n+1-m)}\overline{t}_{g-(n+1-k)} =$$

$$= t_l\overline{t}_{l+k-m} + \overline{t}_{-l}t_{-l+m-k} + \ldots.$$

Сравнение этих выражений доказывает утверждение леммы. ■

Лемма 2.2.6. *Если* $1 \leq k < m < l$, *то соотношение (2.34) эквивалентно равенству*

$$\begin{gathered} t_l\overline{t}_{l+k-m} + t_{l+m-k}\overline{t}_l + \ldots = \\ = t_{-l}\overline{t}_{-l+k-m} + t_{-l+m-k}\overline{t}_{-l} + \ldots, \end{gathered} \tag{2.46}$$

где многоточиями обозначены слагаемые, не содержащие t_l *и* t_{-l}.

Доказательство леммы 2.2.6. Из условий леммы выводим, что $n+1-m > l+1$, $n+1-k > l+1$. Удерживая в приводимых ниже суммах лишь слагаемые, содержащие t_l и t_{-l}, имеем

$$\{TT^*\}_{km} = \sum_{g=1}^{n}\{T\}_{k,g}\left\{\overline{T}\right\}_{m,g} = \sum_{g=1}^{n} t_{g-k}\overline{t}_{g-m} =$$

$$= \{\text{так как } \ k < l, \ m < l, \ \text{то отделим слагаемые,}$$

$$\text{соответствующие } \ g = k+l, \ g = m+l\} =$$

$$= t_l\overline{t}_{l+k-m} + \overline{t}_l t_{l+m-k} + \ldots,$$

$$\{TT^*\}_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{g=1}^{n} \{T\}_{n+1-m,g} \left\{\overline{T}\right\}_{n+1-k,g} =$$

$$= \sum_{g=1}^{n} t_{g-(n+1-m)} \overline{t}_{g-(n+1-k)} =$$

$$= \{\text{так как } \ n+1-m > l+1, \ n+1-k > l+1,$$

$$\text{то отделим слагаемые, соответствующие}$$

$$g = n+1-m-l, \ g = n+1-k-l\} =$$

$$= t_{-l}\overline{t}_{-l+k-m} + \overline{t}_{-l}t_{-l+m-k} + \ldots$$

Требуемое соотношение получается из (2.34). ■

Теперь, рассматривая равенства (2.34), отвечающие $m = l$ и значениям k, убывающим от $l-1$ до 1, мы последовательно докажем соотношения

$$t_l\overline{t}_k + t_{n-k}\overline{t}_l = t_{-l}\overline{t}_{-(n-k)} + t_{-k}\overline{t}_{-l}, \qquad k = l-1, l-2, \ldots, 1. \quad (2.47)$$

Пусть $k = l-1$, $m = l$, тогда $n+1-m = l+1$, $n+1-k = l+2$. Рассмотрим строки матрицы T с номерами $l-1$, l, $l+1$, $l+2$:

$$\begin{array}{c} \\ l-1 \\ l \\ l+1 \\ l+2 \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
t_{-(l-2)} & t_{-(l-3)} & t_{-(l-4)} & \cdots & t_{l-1} & t_l & t_{l+1} \\
t_{-(l-1)} & t_{-(l-2)} & t_{-(l-3)} & \cdots & t_{l-2} & t_{l-1} & t_l \\
t_{-l} & t_{-(l-1)} & t_{-(l-2)} & \cdots & t_{l-3} & t_{l-2} & t_{l-1} \\
t_{-(l+1)} & t_{-l} & t_{-(l-1)} & \cdots & t_{l-4} & t_{l-3} & t_{l-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}.$$

В равенстве (2.34) бóльшая часть слагаемых сокращается. После сокращения получаем

$$t_l\overline{t}_{l-1} + t_{l+1}\overline{t}_l = t_{-l}\overline{t}_{-(l+1)} + t_{-(l-1)}\overline{t}_{-l}.$$

Это и есть равенство (2.47) для $k = l-1$.

Пусть теперь $k = l-2$ и $m = l$; тогда $n+1-m = l+1$, $n+1-k = l+3$. Рассмотрим строки матрицы T с номерами

$l-2$, l, $l+1$, $l+3$:

$$
\begin{array}{c}
\\ l-2 \\ \\ l \\ l+1 \\ \\ l+3 \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
t_{-(l-3)} & t_{-(l-4)} & t_{-(l-5)} & t_{-(l-6)} & \dots & t_{l-1} & t_l & t_{l+1} & t_{l+2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
t_{-(l-1)} & t_{-(l-2)} & t_{-(l-3)} & t_{-(l-4)} & \dots & t_{l-3} & t_{l-2} & t_{l-1} & t_l \\
t_{-l} & t_{-(l-1)} & t_{-(l-2)} & t_{-(l-3)} & \dots & t_{l-4} & t_{l-3} & t_{l-2} & t_{l-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
t_{-(l+2)} & t_{-(l+1)} & t_{-l} & t_{-(l-1)} & \dots & t_{l-6} & t_{l-5} & t_{l-4} & t_{l-3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{bmatrix}
$$

Здесь тоже в равенстве (2.34) большинство слагаемых сокращается. После сокращений имеем

$$
t_l\bar{t}_{l-2} + t_{l+1}\bar{t}_{l-1} + t_{l+2}\bar{t}_l =
$$
$$
= t_{-l}\bar{t}_{-(l+2)} + t_{-(l-1)}\bar{t}_{-(l+1)} + t_{-(l-2)}\bar{t}_{-l}.
$$

Это не совсем то, что хотим получить. Но, используя равенство (2.38) при $j = l+1$, т.е.

$$
t_{l+1}\bar{t}_{l-1} = t_{-(l-1)}\bar{t}_{-(l+1)},
$$

получаем то, что нужно:

$$
t_l\bar{t}_{l-2} + t_{l+2}\bar{t}_l = t_{-l}\bar{t}_{-(l+2)} + t_{-(l-2)}\bar{t}_{-l}.
$$

Таким же образом, рассматривая пары, соответствующие $m = l$ и последовательным значениям $k = l-3, \dots, 1$, получаем равенство (2.47) для остальных значений k.

Итак, свойство нормальности теплицевой матрицы T оказывается эквивалентным следующей совокупности условий: 1) равенствам (2.34) для $k \le l$, $m > l$; эти равенства вовсе не зависят от t_l и t_{-l}; 2) равенствам (2.47) для $1 \le k \le l-1$ и $m = l$; 3) равенствам (2.46) для $1 \le k < m < l$. Ясно, что все эти равенства выполняются и после замены t_l и t_{-l} нулями. Полученная матрица $\widehat{T}$ индекса $\mu - 1$ снова нормальна.

б) $n = 2l+1$, центральная четверка нетривиальна.

Аналогично лемме 2.2.5 здесь имеет место

Лемма 2.2.7. *Если $k \le l$, $m > l+1$, то в соотношении (2.34) слагаемые, содержащие t_l, t_{l+1}, t_{-l} и $t_{-(l+1)}$, взаимно уничтожаются.*

Доказательство леммы 2.2.7 аналогично доказательству леммы 2.2.5.

Далее рассмотрим пары равенств (2.34), отвечающих соответственно $m = l + 1$ и $m = l$ при одном и том же значении k, убывающем от $l - 1$ до 1. Выпишем строки матрицы T с номерами $l - 2, l - 1, \ldots, l + 4$:

$$\begin{array}{c}
\\ l-2 \\ l-1 \\ l \\ l+1 \\ l+2 \\ l+3 \\ l+4 \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
t_{-(l-3)} & t_{-(l-4)} & t_{-(l-5)} & t_{-(l-6)} & \ldots & t_l & t_{l+1} & t_{l+2} & t_{l+3} \\
t_{-(l-2)} & t_{-(l-3)} & t_{-(l-4)} & t_{-(l-5)} & \ldots & t_{l-1} & t_l & t_{l+1} & t_{l+2} \\
t_{-(l-1)} & t_{-(l-2)} & t_{-(l-3)} & t_{-(l-4)} & \ldots & t_{l-2} & t_{l-1} & t_l & t_{l+1} \\
t_{-l} & t_{-(l-1)} & t_{-(l-2)} & t_{-(l-3)} & \ldots & t_{l-3} & t_{l-2} & t_{l-1} & t_l \\
t_{-(l+1)} & t_{-l} & t_{-(l-1)} & t_{-(l-2)} & \ldots & t_{l-4} & t_{l-3} & t_{l-2} & t_{l-1} \\
t_{-(l+2)} & t_{-(l+1)} & t_{-l} & t_{-(l-1)} & \ldots & t_{l-5} & t_{l-4} & t_{l-3} & t_{l-2} \\
t_{-(l+3)} & t_{-(l+2)} & t_{-(l+1)} & t_{-l} & \ldots & t_{l-6} & t_{l-5} & t_{l-4} & t_{l-3} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right]$$

При $k = l-1$ и $m = l+1$ имеем $n+1-m = l+1$, $n+1-k = l+3$, а при $m = l$ получаем $n + 1 - m = l + 2$. Равенства (2.34) с учетом (2.38) для $j = l$ приобретают вид

$$t_{l+2}\overline{t}_l + t_{l+1}\overline{t}_{l-1} = t_{-l}\overline{t}_{-(l+2)} + t_{-(l-1)}\overline{t}_{-(l+1)} \tag{2.48}$$

и

$$t_{l+2}\overline{t}_{l+1} + t_l\overline{t}_{l-1} = t_{-(l+1)}\overline{t}_{-(l+2)} + t_{-(l-1)}\overline{t}_{-l}. \tag{2.49}$$

При $k = l-2$ и $m = l+1$ получаем $n+1-m = l+1$, $n+1-k = l+4$, а для $m = l$ имеем $n + 1 - m = l + 2$. В этом случае равенства (2.34) с учетом (2.38) для $j = l + 2$ и (2.48) можно записать как

$$t_{l+3}\overline{t}_l + t_{l+1}\overline{t}_{l-2} = t_{-l}\overline{t}_{-(l+3)} + t_{-(l-2)}\overline{t}_{-(l+1)} \tag{2.50}$$

и

$$t_{l+3}\overline{t}_{l+1} + t_l\overline{t}_{l-2} = t_{-(l+1)}\overline{t}_{-(l+3)} + t_{-(l-2)}\overline{t}_{-l}. \tag{2.51}$$

Аналогичным образом доказывается, что и для остальных значений k $(1 \le k \le l-3)$ выполняются пары соотношений типа (2.48)—(2.49) и (2.50)—(2.51):

$$t_{n-k}\overline{t}_l + t_{l+1}\overline{t}_k = t_{-l}\overline{t}_{-(n-k)} + t_{-k}\overline{t}_{-(l+1)} \tag{2.52}$$

и

$$t_{n-k}\overline{t}_{l+1} + t_l\overline{t}_k = t_{-(l+1)}\overline{t}_{-(n-k)} + t_{-k}\overline{t}_{-l}. \tag{2.53}$$

Аналогом леммы 2.2.6 является в этом случае

Лемма 2.2.8. *Если $1 \leq k < m < l$, то соотношение (2.34) эквивалентно равенству*

$$t_l\overline{t}_{l+k-m} + t_{l+m-k}\overline{t}_l + t_{l+1}\overline{t}_{l+1+k-m}+$$
$$+t_{l+1+m-k}\overline{t}_{l+1} + \ldots = t_{-l}\overline{t}_{-l+k-m} + t_{-l+m-k}\overline{t}_{-l}+$$
$$+t_{-(l+1)}\overline{t}_{-l-1+k-m} + t_{-l-1+m-k}\overline{t}_{-l-1} + \ldots$$

Обозначенные многоточиями члены не содержат t_l, t_{l+1}, t_{-l}, $t_{-(l+1)}$.

Итак, леммы 2.2.7 и 2.2.8 вместе с системами (2.52)—(2.53) для значений k от 1 до $l-1$ показывают, что совокупность соотношений (2.34), характеризующая свойство нормальности теплицевой матрицы T, продолжает выполняться и после замены элементов центральной четверки нулями. Тем самым, теплицева матрица $\widehat{T}$, полученная благодаря такой замене, остается нормальной.

в) $n = 2l$, $t_l = t_{-l} = 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда нетривиальна четверка $t_{l-1}, t_{l+1}, t_{-(l-1)}, t_{-(l+1)}$, которую временно считаем основной, а затем дадим краткий комментарий, относящийся к матрицам с бóльшим расстоянием нетривиальных четверок от центральной.

Как и в случаях а) и б), сформулируем две леммы.

Лемма 2.2.9. *Если $k \leq l-1$, $m > l+1$, то в соотношении (2.34) слагаемые, содержащие t_{l-1}, t_{l+1}, $t_{-(l-1)}$ и $t_{-(l+1)}$, взаимно уничтожаются.*

Поскольку $t_l = t_{-l} = 0$, равенства (2.34) для $m = l$ и $1 \leq \leq k \leq l-1$ выполняются автоматически. Рассматривая теперь пары равенств (2.34), соответствующие $m = l-1$ и $m = l+1$ при одном и том же значении k, убывающем от $l-2$ до 1, приведем их к виду

$$t_{l-1}\overline{t}_k + t_{n-k}\overline{t}_{l+1} = t_{-k}\overline{t}_{-(l-1)} + t_{-(l+1)}\overline{t}_{-(n-k)} \tag{2.54}$$

и

$$t_{l+1}\overline{t}_k + t_{n-k}\overline{t}_{l-1} = t_{-k}\overline{t}_{-(l+1)} + t_{-(l-1)}\overline{t}_{-(n-k)}. \tag{2.55}$$

Лемма 2.2.10. *Если $1 \le k < m < l-1$, то соотношение (2.34) эквивалентно равенству*

$$t_{l-1}\bar{t}_{l-1+k-m} + t_{l-1+m-k}\bar{t}_{l-1} +$$
$$+ t_{l+1}\bar{t}_{l+1+k-m} + t_{l+1+m-k}\bar{t}_{l+1} + \ldots =$$
$$= t_{-(l-1)}\bar{t}_{-l+1+k-m} + t_{-l+1+m-k}\bar{t}_{-(l-1)} +$$
$$+ t_{-(l+1)}\bar{t}_{-l-1+k-m} + t_{-l-1+m-k}\bar{t}_{-(l+1)} + \ldots .$$

В слагаемых, обозначенных многоточиями, не содержатся t_{l-1}, t_{l+1}, $t_{-(l-1)}$, $t_{-(l+1)}$.

Леммы 2.2.9 и 2.2.10 вместе с соотношениями (2.54)—(2.55) позволяют утверждать, что матрица $\widehat{T}$, получаемая из T заменой чисел t_{l-1}, t_{l+1}, $t_{-(l-1)}$ и $t_{-(l+1)}$ нулями, нормальна.

Если наряду с числами t_l и t_{-l} равны нулю элементы четверки t_{l-1}, t_{l+1}, $t_{-(l-1)}$ и $t_{-(l+1)}$, то соотношения (2.54)—(2.55) выполняются автоматически. Считая теперь основной нетривиальную четверку t_{l-2}, t_{l+2}, $t_{-(l-2)}$ и $t_{-(l+2)}$, можем показать по образцу леммы 2.2.9, что при $k \le l-2$, $m > l+2$ в равенстве (2.34) слагаемые, содержащие элементы этой четверки, взаимно уничтожаются. Рассматривая затем (2.34) для $m = l-2$ и $m = l+2$ при k, убывающем от $l-3$ до 1, устанавливаем аналоги равенств (2.54)—(2.55). Доказав, наконец, аналог леммы 2.2.10, мы сможем перейти к матрице индекса $\mu - 1$, заменяя элементы основной четверки нулями. Далее рассуждение завершается по установленному выше шаблону.

Подобным же образом оформляется доказательство при любом расстоянии основной четверки от центральной.

г) $n = 2l+1$, $t_l = t_{l+1} = t_{-l} = t_{-(l+1)} = 0$.

В этом последнем варианте с очевидными изменениями повторяем схему предыдущего раздела. Прежде всего, замечаем, что равенства (2.34), соответствующие $m = l$ и $m = l+1$, выполняются автоматически. Предположим, что основной теперь является четверка t_{l-1}, t_{l+2}, $t_{-(l-1)}$ и $t_{-(l+2)}$. Рассматривая равенства (2.34) для значений индексов $k \le l-1$, $m > l+2$,

$k + m < n$, убеждаемся, что в них слагаемые, содержащие элементы основной четверки, взаимно уничтожаются. Полагая в (2.34) $m = l - 1$ и $m = l + 2$ и меняя индекс k от $l - 2$ до 1, получим пары соотношений типа (2.54)—(2.55). Доказав затем утверждение, аналогичное лемме 2.2.10, можем применить стандартное завершение.

Если четверка t_{l-1}, t_{l+2}, $t_{-(l-1)}$ и $t_{-(l+2)}$ нулевая, то равенства (2.34) автоматически удовлетворяются для $m = l - 1$ и $m = l + 2$. Считая основной следующую от центра четверку t_{l-2}, t_{l+3}, $t_{-(l-2)}$ и $t_{-(l+3)}$, привлекаем равенства (2.34) при $m = l - 2$ и $m = l + 3$ для вывода формул типа (2.54)—(2.55). Опираясь затем на аналоги лемм 2.2.9 и 2.2.10, завершаем доказательство. Так же проводится доказательство и при бóльшем расстоянии основной четверки от центральной.

Итак, предыдущими рассуждениями установлен базис индукции, с помощью которой ведется доказательство утверждения 2.2.2.

Доказательство индуктивного перехода построим следующим образом. Полагая утверждение 2.2.2 верным для $w = w_0$, покажем его справедливость для $w = w_0 + 1$.

Пусть $\widehat{T}$ получается из T обнулением элементов $w_0 + 1$ нетривиальных четверок, ближайших к центральной. В случае нетривиальности центральной четверки обнуляются помимо нее w_0 ближайших четверок. В то же время будем рассматривать и матрицу $\widetilde{T}$, которая строится по тому же правилу, что и $\widehat{T}$, но соответствует на единицу меньшему значению $w = w_0$. Из описания матрицы $\widetilde{T}$ следует, что $\widehat{T}$ получается из $\widetilde{T}$ обнулением элементов лишь одной нетривиальной четверки, ближайшей к центральной. Рассмотрим последовательность матриц

$$T \Longrightarrow \widetilde{T} \Longrightarrow \widehat{T}.$$

Если T нормальна, то по индуктивному предположению матрица $\widetilde{T}$ также нормальна. Применяя базисное утверждение индукции, выводим нормальность $\widehat{T}$ из нормальности $\widetilde{T}$. Тем самым индуктивный переход обоснован, а вместе с ним и утверждение 2.2.2.

2.2.1.4 Типы четверок и соответствующие множества матриц

В предыдущих разделах было показано, что если матрица T нормальна, то любая четверка t_j, t_{n-j}, t_{-j}, $t_{-(n-j)}$ удовлетворяет соотношениям (2.42) или (2.43) либо соотношениям (2.44) или (2.45). Для упрощения дальнейшего анализа перепишем эти соотношения в виде

$$t_{-j} = \sigma_j \bar{t}_j, \quad t_{-(n-j)} = \sigma_j \bar{t}_{n-j}, \qquad \text{где } \sigma_j \in \mathbf{C},\ |\sigma_j| = 1 \quad (2.56)$$

(при $\sigma_j = 1$ получаем (2.42), а при $\sigma_j = e^{i\psi_j}$ получаем (2.43); таким образом, запись (2.56) эквивалентна соотношениям (2.42)–(2.43)),

$$t_{-j} = \varphi_j t_{n-j}, \quad t_{-(n-j)} = \varphi_j t_j, \qquad \text{где } \varphi_j \in \mathbf{C},\ |\varphi_j| = 1 \quad (2.57)$$

(при $\varphi_j = 1$ отсюда получаем (2.44)). Назовем четверки, удовлетворяющие соотношениям (2.56) и (2.57), соответственно четверками типа **A** и типа **B**.

Таким образом, в нормальной матрице любая четверка имеет тип **A** или **B**. Чтобы полностью доказать необходимость теоремы 2.2.1, надо показать, что в нормальной теплицевой матрице все четверки имеют тип **A** и в соотношениях (2.56) параметр σ_j не зависит от j (т.е. одинаков для всех четверок) или что все четверки имеют тип **B** и в соотношениях (2.57) φ_j не зависит от j. Условимся о следующей терминологии: четверки, которые имеют тип **A**, но не имеют типа **B** — это четверки типа I; четверки, которые имеют тип **B**, но не имеют типа **A** — это четверки типа II; четверки, которые имеют одновременно тип **A** и тип **B** — это четверки типа I—II.

Вот пример четверки типа I—II:

$$t_j = t, \qquad t_{-j} = \sigma\bar{t}, \qquad t_{-(n-j)} = \varphi t, \qquad t_{n-j} = \sigma\overline{\varphi t}.$$

Действительно,

$$t_{-j} = \sigma\bar{t} = \sigma\bar{t}_j,$$

$$t_{-(n-j)} = \varphi t = \sigma\bar{\sigma}\varphi t = \sigma\overline{\overline{\sigma\varphi t}} = \sigma\bar{t}_{n-j}.$$

Поскольку соотношения (2.56) выполняются, это четверка типа **A**. С другой стороны,

$$t_{-j} = \sigma\overline{t} = \varphi\sigma\overline{\varphi t} = \varphi t_{n-j},$$

$$t_{-(n-j)} = \varphi t = \varphi t_j.$$

Так как выполнены соотношения (2.57), то это четверка типа **B**. Согласно введенной выше терминологии, это четверка типа I—II.

Начиная с этого места в доказательстве необходимости, будем считать, что матрица T обладает только двумя свойствами: 1) T — теплицева; 2) для любой четверки t_j, t_{n-j}, t_{-j}, $t_{-(n-j)}$ выполнено хотя бы одно из соотношений (2.56) и (2.57).

Для дальнейшего исследования будем характеризовать матрицу T набором из трех чисел $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Эти числа определим следующим правилом. Пусть $\widetilde{\gamma}_1$ есть число нетривиальных четверок типа Iв матрице T. Аналогичные числа для четверок типа I—IIи типа IIобозначим через $\widetilde{\gamma}_2$ и $\widetilde{\gamma}_3$. Тогда числа $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются формулой

$$\gamma_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \widetilde{\gamma}_k > 0, \\ 0, & \text{если } \widetilde{\gamma}_k = 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3.$$

Так как каждое из чисел γ_k может принимать лишь два значения, то всего различных наборов γ может быть только 7, а именно:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Набор $\gamma = (0, 0, 0)$ отсутствует, потому что в этом случае $\widetilde{\gamma}_1 = \widetilde{\gamma}_2 = \widetilde{\gamma}_3 = 0$, т.е. T вообще не имеет нетривиальных четверок и, следовательно, является нулевой матрицей, что исключено условиями теоремы.

В дальнейшем будем многократно ссылаться на две специальные пары соотношений:

$$\begin{cases} \rho_j = \rho_{n-j}, \\ \widetilde{\varphi}_j - \widetilde{\varphi}_{-(n-j)} = \widetilde{\theta}_1, \end{cases} \tag{2.58}$$

$$\begin{cases} \rho_j = \rho_{-j}, \\ \widetilde{\varphi}_j + \widetilde{\varphi}_{-j} = \widetilde{\theta}_2, \end{cases} \tag{2.59}$$

(здесь $\widetilde{\varphi}_j = \arg t_j$, $\rho_j = |t_j|$, $j = -(n-1), \ldots, (n-1)$).

Последующее доказательство необходимости строится с использованием теоретико-множественных соображений.

Введем следующие 26 множеств, элементами которых являются теплицевы матрицы с четверками типа I, либо II, либо **I—II**:

$$M = \{\ T \mid T^*T = TT^*\ \};$$

$$L_1 = \{\ T \mid \gamma = (0,0,1)\ \};$$

$$L_1' = \{\ T \in L_1 \mid \forall\ j\ \varphi_j = \varphi \text{ в } (2.57)\ \};$$

$$L_1'' = \{\ T \in L_1 \mid \exists\, j \neq k \text{ такие, что } \varphi_j \neq \varphi_k \text{ в } (2.57);$$

$$\forall\ j \text{ верно } (2.59),\ \text{ где } \widetilde{\theta}_2 \text{ не зависит от } j\ \};$$

$$L_1''' = L_1 \setminus (L_1' \cup L_1'');$$

$$L_2 = \{\ T \mid \gamma = (0,1,0)\ \};$$

$$L_2' = \{\ T \in L_2 \mid \forall\ j\ \varphi_j = \varphi \text{ в } (2.57)\ \};$$

$$L_2'' = \{\ T \in L_2 \mid \exists\, j \neq k \text{ такие, что } \varphi_j \neq \varphi_k \text{ в } (2.57);$$

$$\forall\ j \text{ верно } (2.59),\ \text{ где } \widetilde{\theta}_2 \text{ не зависит от } j\ \};$$

$$L_2''' = L_2 \setminus \left(L_2' \cup L_2''\right);$$

$$L_3 = \{\ T \mid \gamma = (0,1,1)\ \};$$

$$L_3' = \{\ T \in L_3 \mid \forall\ j\ \varphi_j = \varphi \text{ в } (2.57)\ \};$$

$$L_3'' = \{\, T \in L_3 \mid \exists\, j \neq k \text{ такие, что } \varphi_j \neq \varphi_k \text{ в } (2.57);$$

$$\forall\, j \text{ верно } (2.59), \text{ где } \widetilde{\theta}_2 \text{ не зависит от } j \,\};$$

$$L_3''' = L_3 \setminus (L_3' \cup L_3'');$$

$$L_4 = \{\, T \mid \gamma = (1,0,0) \,\};$$

$$L_4' = \{\, T \in L_4 \mid \forall\, j \ \sigma_j = \sigma \text{ в } (2.56) \,\};$$

$$L_4'' = \{\, T \in L_4 \mid \exists\, j \neq k \text{ такие, что } \sigma_j \neq \sigma_k \text{ в } (2.56);$$

$$\forall\, j \text{ верно } (2.58), \text{ где } \widetilde{\theta}_1 \text{ не зависит от } j \,\};$$

$$L_4''' = L_4 \setminus (L_4' \cup L_4'');$$

$$L_5 = \{\, T \mid \gamma = (1,0,1) \,\};$$

$$L_6 = \{\, T \mid \gamma = (1,1,0) \,\};$$

$$L_6' = \{\, T \in L_6 \mid \forall\, j \ \sigma_j = \sigma \text{ в } (2.56) \,\};$$

$$L_6'' = \{\, T \in L_6 \mid \exists\, j \neq k \text{ такие, что } \sigma_j \neq \sigma_k \text{ в } (2.56);$$

$$\forall\, j \text{ верно } (2.58), \text{ где } \widetilde{\theta}_1 \text{ не зависит от } j \,\};$$

$$L_6''' = L_6 \setminus (L_6' \cup L_6'');$$

$$L_7 = \{\, T \mid \gamma = (1,1,1) \,\};$$

$$L_{\text{эрм}} = L_1'' \cup L_2'' \cup L_3'' \cup L_4' \cup L_6';$$

$$L_{\text{ц}} = L_1' \cup L_2' \cup L_3' \cup L_4'' \cup L_6'';$$

$$L = L_1''' \cup L_2''' \cup L_3''' \cup L_4''' \cup L_5 \cup L_6''' \cup L_7.$$

Замечания: 1) Множество L_2 можно было бы разбить по-другому:

$$L_2' = \{\, T \in L_2 \mid \forall\, j \ \sigma_j = \sigma \text{ в } (2.56) \,\};$$

$$L_2'' = \{\, T \in L_2 \mid \exists\, j \neq k \text{ такие, что } \sigma_j \neq \sigma_k \text{ в } (2.56);$$

$$\forall\, j \text{ верно } (2.58),\ \text{где } \widetilde{\theta}_1 \text{ не зависит от } j\ \};$$

$$L_2''' = L_2 \setminus (L_2' \cup L_2'').$$

Но и в этом случае доказательство можно провести по схеме, которая будет изложена для указанного выше разбиения множества L_2.

2) Если матрица $T \in L_j$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ и имеет лишь одну нетривиальную четверку, то считаем, что $T \in L_j'$.

Как указано выше, всякая четверка нормальной теплицевой матрицы T имеет тип I, либо II, либо I—II; поэтому справедливо вложение

$$M \subset L_{\text{эрм}} \cup L_{\text{ц}} \cup L.$$

2.2.1.5 Анализ построенных множеств

В этом разделе мы сначала установим следующий факт: $M \cap L = 0$. Для этого докажем 7 равенств:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } M \cap L_1''' = 0,\\
&\text{б) } M \cap L_2''' = 0,\\
&\text{в) } M \cap L_3''' = 0,\\
&\text{г) } M \cap L_4''' = 0,\\
&\text{д) } M \cap L_5 = 0,\\
&\text{е) } M \cap L_6''' = 0,\\
&\text{з) } M \cap L_7 = 0.
\end{aligned}$$

Разбор начнем со случая з): $M \cap L_7 = 0$. Доказываем рассуждением от противного. Пусть з) неверно, т.е. существует нормальная теплицева матрица T, для которой $\gamma = (1, 1, 1)$. В силу того, что $\gamma_1 = 1$, $\gamma_3 = 1$, найдутся две нетривиальные четверки, одна из которых имеет тип **A**, но не имеет типа **B** (обозначим ее t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1}, $t_{-(n-j_1)}$), а другая имеет тип **B**, но не тип **A** (пусть это будет четверка t_{j_2}, t_{n-j_2}, t_{-j_2}, $t_{-(n-j_2)}$). Выберем большее из чисел j_1 и j_2; без ограничения общности можно считать, что $j_1 > j_2$. По матрице T построим матрицу T_1, обнуляя нетривиальные четверки t_j, t_{n-j}, t_{-j}, $t_{-(n-j)}$ для $j_1 <$

$j < [n/2]$, т.е. у матрицы T_1 четверка $t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1}$ и $t_{-(n-j_1)}$ — это нетривиальная четверка, ближайшая к центральной. В силу утверждения 2.2.2 из нормальности матрицы T следует нормальность T_1. Запишем формулу, аналогичную (2.54), считая основной четверку $t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1}$ и $t_{-(n-j_1)}$ и полагая $k = j_2$:

$$t_{j_1}\bar{t}_{j_2} + t_{n-j_2}\bar{t}_{n-j_1} = t_{-j_2}\bar{t}_{-j_1} + t_{-(n-j_1)}\bar{t}_{-(n-j_2)}. \qquad (2.60)$$

Это равенство верно вследствие нормальности матрицы T_1. При $n = 2l$, $j_1 = l$ получаем (2.47). Поэтому, исследуя (2.60), мы охватим все случаи. Четверка t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1} и $t_{-(n-j_1)}$ имеет тип **A**:

$$t_{-j_1} = \sigma\bar{t}_{j_1}, \qquad t_{-(n-j_1)} = \sigma\bar{t}_{n-j_1}. \qquad (2.61)$$

Четверка $t_{j_2}, t_{n-j_2}, t_{-j_2}$ и $t_{-(n-j_2)}$ имеет тип **B**:

$$t_{-j_2} = \varphi t_{n-j_2}, \qquad t_{-(n-j_2)} = \varphi t_{j_2}. \qquad (2.62)$$

Четверка t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1} и $t_{-(n-j_1)}$ не имеет типа **B**, поэтому верно хотя бы одно из соотношений

$$t_{-j_1} \neq \varphi t_{n-j_1}, \qquad t_{-(n-j_1)} \neq \varphi t_{j_1}.$$

Предположим, что верно первое неравенство (если верно второе, действуем аналогично). Введем величину

$$q_1 = \bar{t}_{-j_1} - \bar{\varphi}\,\bar{t}_{n-j_1} \neq 0.$$

Четверка t_{j_2}, t_{n-j_2}, t_{-j_2} и $t_{-(n-j_2)}$ не имеет типа **A**, поэтому верно хотя бы одно из соотношений

$$t_{-j_2} \neq \sigma\bar{t}_{j_2}, \qquad t_{-(n-j_2)} \neq \sigma\bar{t}_{n-j_2}.$$

Предположим, что $t_{-(n-j_2)} \neq \sigma\bar{t}_{n-j_2}$ (если верно первое неравенство, действуем аналогично). Введем величину

$$q_2 = \varphi\left(t_{n-j_2} - \sigma\bar{t}_{-(n-j_2)}\right) \neq 0.$$

Умножим равенство (2.60) на число $\frac{1}{q_1}$:

$$\frac{1}{q_1}\left(\, t_{j_1}\bar{t}_{j_2} + t_{n-j_2}\bar{t}_{n-j_1} - t_{-j_2}\bar{t}_{-j_1} - t_{-(n-j_1)}\bar{t}_{-(n-j_2)}\,\right) = 0.$$

Используя (2.61), получаем

$$\frac{1}{q_1}\left(\, t_{j_1}\left(\bar t_{j_2}-\bar\sigma t_{-j_2}\right)+\bar t_{n-j_1}\left(t_{n-j_2}-\sigma\bar t_{-(n-j_2)}\right)\,\right)=0.$$

Вследствие равенств (2.62) можем переписать это соотношение как

$$\frac{1}{q_1}\left(\, t_{j_1}\left(\bar t_{j_2}-\bar\sigma\varphi t_{n-j_2}\right)+\bar t_{n-j_1}\left(t_{n-j_2}-\sigma\bar\varphi\,\bar t_{j_2}\right)\,\right)=0.$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\frac{1}{q_1}\left(\, t_{n-j_2}\left(\bar t_{n-j_1}-\bar\sigma\varphi t_{j_1}\right)+\bar t_{j_2}\left(t_{j_1}-\sigma\bar\varphi\,\bar t_{n-j_1}\right)\,\right)=0$$

и снова используем (2.61):

$$\frac{1}{q_1}\left(\, t_{n-j_2}\left(\bar t_{n-j_1}-\varphi\bar t_{-j_1}\right)+\bar t_{j_2}\sigma\left(\bar t_{-j_1}-\bar\varphi\,\bar t_{n-j_1}\right)\,\right)=0,$$

или

$$\frac{1}{q_1}\left(\, \bar t_{j_2}\sigma\left(\bar t_{-j_1}-\bar\varphi\,\bar t_{n-j_1}\right)-t_{n-j_2}\varphi\left(\bar t_{-j_1}-\bar\varphi\,\bar t_{n-j_1}\right)\,\right)=0.$$

Вспоминая, что $q_1=\bar t_{-j_1}-\bar\varphi\,\bar t_{n-j_1}$, получаем

$$\bar t_{j_2}\sigma-\varphi t_{n-j_2}=0,$$

или

$$\varphi\left(t_{n-j_2}-\sigma\bar\varphi\,\bar t_{j_2}\right)=0.$$

Подставим сюда равенство $t_{-(n-j_2)}=\varphi t_{j_2}$ из (2.62):

$$\varphi\left(t_{n-j_2}-\sigma\bar t_{-(n-j_2)}\right)=0.$$

Мы пришли к противоречию с условием $q_2\neq 0$. Следовательно, не существует теплицевой нормальной матрицы T, для которой $\gamma=(1,1,1)$. Поэтому $M\cap L_7=0$.

Заметим, что в этих рассуждениях мы не использовали условие $\gamma_2=1$. Следовательно, то же доказательство устанавливает, что не существует теплицевой нормальной матрицы T, для которой $\gamma=(1,0,1)$. Поэтому $M\cap L_5=0$.

Теперь мы покажем, что $M\cap L_4'''=0$. Снова рассуждаем от противного. Пусть это не так, т.е. существует теплицева нормальная матрица T, для которой $\gamma=(1,0,0)$, найдется пара

$j \neq k$ такая, что $\sigma_j \neq \sigma_k$, и нарушено условие, что для любого j выполнено (2.58), где $\widetilde{\theta}_1$ не зависит от j. Отсюда следует, что найдутся две нетривиальные четверки, имеющие тип **A**, но в соотношении (2.56) $\sigma = \sigma_{j_1}$ для одной четверки и $\sigma = \sigma_{j_2}$ для другой, причем $\sigma_{j_1} \neq \sigma_{j_2}$. Выпишем эти четверки:

$$t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1}, t_{-(n-j_1)}, \quad \sigma = \sigma_{j_1},$$

$$t_{j_2}, t_{n-j_2}, t_{-j_2}, t_{-(n-j_2)}, \quad \sigma = \sigma_{j_2}.$$

По матрице T построим матрицу T_1 таким же образом, как в доказательстве соотношения $M \cap L_7 = 0$. Нормальность матрицы T_1 следует из утверждения 2.2.2. Запишем формулы, аналогичные (2.54) и (2.55), считая основной четверку $t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1}, t_{-(n-j_1)}$ и полагая $k = j_2$:

$$\begin{cases} t_{j_1}\bar{t}_{j_2} + t_{n-j_2}\bar{t}_{n-j_1} = t_{-j_2}\bar{t}_{-j_1} + t_{-(n-j_1)}\bar{t}_{-(n-j_2)}, \\ t_{n-j_1}\bar{t}_{j_2} + t_{n-j_2}\bar{t}_{j_1} = t_{-j_2}\bar{t}_{-(n-j_1)} + t_{-j_1}\bar{t}_{-(n-j_2)}. \end{cases} \tag{2.63}$$

В рассматриваемом случае соотношения (2.56) имеют вид

$$t_{-j_1} = \sigma_{j_1}\bar{t}_{j_1}, \qquad t_{-(n-j_1)} = \sigma_{j_1}\bar{t}_{n-j_1} \tag{2.64}$$

для четверки t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1}, $t_{-(n-j_1)}$ и вид

$$t_{-j_2} = \sigma_{j_2}\bar{t}_{j_2}, \qquad t_{-(n-j_2)} = \sigma_{j_2}\bar{t}_{n-j_2} \tag{2.65}$$

для четверки t_{j_2}, t_{n-j_2}, t_{-j_2}, $t_{-(n-j_2)}$. Подставим эти равенства в систему (2.63):

$$\begin{cases} t_{j_1}\bar{t}_{j_2} + \bar{t}_{n-j_1}t_{n-j_2} = \bar{\sigma}_{j_1}t_{j_1}\sigma_{j_2}\bar{t}_{j_2} + \sigma_{j_1}\bar{t}_{n-j_1}\bar{\sigma}_{j_2}t_{n-j_2}, \\ t_{n-j_1}\bar{t}_{j_2} + \bar{t}_{j_1}t_{n-j_2} = \bar{\sigma}_{j_1}t_{n-j_1}\sigma_{j_2}\bar{t}_{j_2} + \sigma_{j_1}\bar{t}_{j_1}\bar{\sigma}_{j_2}t_{n-j_2}. \end{cases}$$

После перегруппировки имеем

$$\begin{cases} (1-\bar{\sigma}_{j_1}\sigma_{j_2})\,t_{j_1}\bar{t}_{j_2} + (1-\sigma_{j_1}\bar{\sigma}_{j_2})\,\bar{t}_{n-j_1}t_{n-j_2} = 0, \\ (1-\bar{\sigma}_{j_1}\sigma_{j_2})\,t_{n-j_1}\bar{t}_{j_2} + (1-\sigma_{j_1}\bar{\sigma}_{j_2})\,\bar{t}_{j_1}t_{n-j_2} = 0. \end{cases}$$

Записывая соотношения (2.64) и (2.65) в виде

$$t_{n-j_1} = \sigma_{j_1}\bar{t}_{-(n-j_1)}, \qquad t_{n-j_2} = \sigma_{j_2}\bar{t}_{-(n-j_2)},$$

получаем

$$\begin{cases} (1-\bar{\sigma}_{j_1}\sigma_{j_2})\,t_{j_1}\bar{t}_{j_2} + (1-\sigma_{j_1}\bar{\sigma}_{j_2})\,\bar{\sigma}_{j_1}t_{-(n-j_1)}\sigma_{j_2}\bar{t}_{-(n-j_2)} = 0, \\ (1-\bar{\sigma}_{j_1}\sigma_{j_2})\,\sigma_{j_1}\bar{t}_{-(n-j_1)}\bar{t}_{j_2} + (1-\sigma_{j_1}\bar{\sigma}_{j_2})\,\bar{t}_{j_1}\sigma_{j_2}\bar{t}_{-(n-j_2)} = 0. \end{cases}$$

Умножая первое равенство на σ_{j_1}, находим

$$\begin{cases} (\sigma_{j_1} - \sigma_{j_2})\left(t_{j_1}\overline{t}_{j_2} - t_{-(n-j_1)}\overline{t}_{-(n-j_2)}\right) = 0, \\ (\sigma_{j_1} - \sigma_{j_2})\left(\overline{t}_{-(n-j_1)}\overline{t}_{j_2} - \overline{t}_{j_1}\overline{t}_{-(n-j_2)}\right) = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\sigma_{j_1} \neq \sigma_{j_2}$, то

$$\begin{cases} t_{j_1}\overline{t}_{j_2} - t_{-(n-j_1)}\overline{t}_{-(n-j_2)} = 0, \\ \overline{t}_{-(n-j_1)}\overline{t}_{j_2} - \overline{t}_{j_1}\overline{t}_{-(n-j_2)} = 0. \end{cases} \tag{2.66}$$

Будем рассматривать (2.66) как систему линейных однородных уравнений относительно $\overline{t}_{j_2}$ и $\overline{t}_{-(n-j_2)}$ с коэффициентами t_{j_1}, $-t_{-(n-j_1)}$, $\overline{t}_{-(n-j_1)}$, $-\overline{t}_{j_1}$. Четверки t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1}, $t_{-(n-j_1)}$ и t_{j_2}, t_{n-j_2}, t_{-j_2}, $t_{-(n-j_2)}$ нетривиальны, поэтому нас интересует нетривиальное решение этой системы. Для его существования необходимо и достаточно равенство нулю определителя матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} t_{j_1} & -t_{-(n-j_1)} \\ \overline{t}_{-(n-j_1)} & -\overline{t}_{j_1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим, что

$$\rho_{j_1} = \rho_{-(n-j_1)}.$$

Но из (2.64) следует

$$\rho_{-(n-j_1)} = \rho_{n-j_1}.$$

Поэтому

$$\rho_{j_1} = \rho_{n-j_1}. \tag{2.67}$$

Переписав первое из равенств (2.66) в виде

$$t_{j_1}\overline{t}_{j_2} = t_{-(n-j_1)}\overline{t}_{-(n-j_2)}, \tag{2.68}$$

выпишем соответствующее соотношение для модулей:

$$\rho_{j_1}\rho_{j_2} = \rho_{-(n-j_1)}\rho_{-(n-j_2)}.$$

Но $\rho_{j_1} = \rho_{-(n-j_1)}$ и $\rho_{j_1} \neq 0$, так как иначе $\rho_{j_1} = \rho_{n-j_1} = 0$ и, значит, четверка t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1} и $t_{-(n-j_1)}$ тривиальна. Поэтому

$$\rho_{j_2} = \rho_{-(n-j_2)}.$$

Из (2.65) видим, что $\rho_{n-j_2} = \rho_{-(n-j_2)}$, а потому

$$\rho_{j_2} = \rho_{n-j_2}. \tag{2.69}$$

Для аргументов из (2.68) получаем соотношение

$$\widetilde{\varphi}_{j_1} - \widetilde{\varphi}_{j_2} = \widetilde{\varphi}_{-(n-j_1)} - \widetilde{\varphi}_{-(n-j_2)},$$

или

$$\widetilde{\varphi}_{j_1} - \widetilde{\varphi}_{-(n-j_1)} = \widetilde{\varphi}_{j_2} - \widetilde{\varphi}_{-(n-j_2)}. \tag{2.70}$$

Соотношения (2.67), (2.69) и (2.70) составляют систему

$$\begin{cases} \rho_{j_1} = \rho_{n-j_1}, \\ \rho_{j_2} = \rho_{n-j_2}, \\ \widetilde{\varphi}_{j_1} - \widetilde{\varphi}_{-(n-j_1)} = \widetilde{\varphi}_{j_2} - \widetilde{\varphi}_{-(n-j_2)}. \end{cases} \tag{2.71}$$

Рассмотрим вектор

$$\widehat{\sigma} = \left(\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \ldots, \widehat{\sigma}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\right),$$

где

$$\widehat{\sigma}_j = \begin{cases} 0, & \text{если четверка } t_j,\ t_{n-j},\ t_{-j},\ t_{-(n-j)} \text{ тривиальна}, \\ \sigma_j & \text{из представления (2.56), в противном случае.} \end{cases}$$

Это можно сделать, поскольку всякая нетривиальная четверка имеет тип **A**.

Зафиксируем два натуральных числа q_1, q_2 ($1 \le q_k \le \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, $k = 1, 2$) таких, что $\widehat{\sigma}_{q_1} \ne 0$, $\widehat{\sigma}_{q_2} \ne 0$ и $\widehat{\sigma}_{q_1} \ne \widehat{\sigma}_{q_2}$. Введем два целочисленных множества

$$\mathbf{Z}_1 = \{z \in \mathbf{Z} |\ 1 \le z \le \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil,\ \widehat{\sigma}_z \ne \widehat{\sigma}_{q_1}\},$$

$$\mathbf{Z}_2 = \{z \in \mathbf{Z} |\ 1 \le z \le \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil,\ \widehat{\sigma}_z \ne \widehat{\sigma}_{q_2}\}.$$

Система (2.71) была получена для любых двух нетривиальных четверок с $\sigma_{j_1} \ne \sigma_{j_2}$. В частности, она верна для $j_1 = q_1$ и $j_2 \in \mathbf{Z}_1$. Выпишем эту систему

$$\begin{cases} \rho_{q_1} = \rho_{n-q_1}, \\ \rho_{j_2} = \rho_{n-j_2}, \\ \widetilde{\varphi}_{q_1} - \widetilde{\varphi}_{-(n-q_1)} = \widetilde{\varphi}_{j_2} - \widetilde{\varphi}_{-(n-j_2)}, \end{cases} \qquad \forall\ j_2 \in \mathbf{Z}_1.$$

Положим $\widetilde{\varphi}_{q_1} - \widetilde{\varphi}_{-(n-q_1)} = \widetilde{\theta}_1$. Имеем

$$\begin{cases} \rho_{j_2} = \rho_{n-j_2}, \\ \widetilde{\varphi}_{j_2} - \widetilde{\varphi}_{-(n-j_2)} = \widetilde{\theta}_1, \end{cases} \qquad \forall\, j_2 \in \mathbf{Z}_1. \tag{2.72}$$

Так как $\sigma_{q_2} \neq \sigma_{q_1}$, то $q_2 \in \mathbf{Z}_1$, а потому $\widetilde{\varphi}_{q_2} - \widetilde{\varphi}_{-(n-q_2)} = \widetilde{\theta}_1$.

Выпишем теперь систему (2.71) для $j_1 = q_2$ и $j_2 \in \mathbf{Z}_2$:

$$\begin{cases} \rho_{q_2} = \rho_{n-q_2}, \\ \rho_{j_2} = \rho_{n-j_2}, \\ \widetilde{\varphi}_{q_2} - \widetilde{\varphi}_{-(n-q_2)} = \widetilde{\varphi}_{j_2} - \widetilde{\varphi}_{-(n-j_2)}. \end{cases}$$

По доказанному, $\widetilde{\varphi}_{q_2} - \widetilde{\varphi}_{-(n-q_2)} = \widetilde{\theta}_1$. Таким образом,

$$\begin{cases} \rho_{j_2} = \rho_{n-j_2}, \\ \widetilde{\varphi}_{j_2} - \widetilde{\varphi}_{-(n-j_2)} = \widetilde{\theta}_1, \end{cases} \qquad \forall j_2 \in \mathbf{Z}_2. \tag{2.73}$$

Из соотношений (2.72) и (2.73) следует, что для всех j верны равенства

$$\begin{cases} \rho_j = \rho_{n-j}, \\ \widetilde{\varphi}_j - \widetilde{\varphi}_{-(n-j)} = \widetilde{\theta}_1, \end{cases}$$

где $\widetilde{\theta}_1$ не зависит от j. Это противоречит предположению, что для матрицы T условие (2.58) не выполнено. Следовательно, $M \cap L_4''' = 0$.

В этом рассуждении мы использовали условие, что любая нетривиальная четверка имеет тип **A**, но не исключали той возможности, что некоторые из таких четверок могут одновременно иметь тип **B**. Поэтому доказательство остается справедливым, если часть четверок относятся к типу I, а другая часть — к типу I—II. Это означает, что $M \cap L_6''' = 0$.

Выведем теперь равенство $M \cap L_1''' = 0$. План доказательства тот же, что и при выводе равенства $M \cap L_4''' = 0$. Снова рассуждаем от противного. Пусть $M \cap L_1''' \neq 0$, т.е существует теплицева нормальная матрица T, для которой $\gamma = (0,0,1)$, найдется пара $j \neq k$ такая, что $\varphi_j \neq \varphi_k$, и нарушено условие, что для любого j выполнено (2.59), где $\widetilde{\theta}_2$ не зависит от j. Отсюда следует, что найдутся две нетривиальные четверки, имеющие тип **B**, которым в соотношениях (2.57) соответствуют различные числа φ:

$$t_{j_1}, t_{n-j_1}, t_{-j_1}, t_{-(n-j_1)},\ \varphi = \varphi_{j_1},$$

$$t_{j_2}, t_{n-j_2}, t_{-j_2}, t_{-(n-j_2)},\ \varphi = \varphi_{j_2}.$$

По аналогии с предыдущими случаями строим нормальную матрицу T_1 (ее нормальность следует из утверждения 2.2.2). Выпишем для обеих четверок соотношения (2.57):

$$t_{-j_1} = \varphi_{j_1} t_{n-j_1}, \qquad t_{-(n-j_1)} = \varphi_{j_1} t_{j_1}; \tag{2.74}$$

$$t_{-j_2} = \varphi_{j_2} t_{n-j_2}, \qquad t_{-(n-j_2)} = \varphi_{j_2} t_{j_2}. \tag{2.75}$$

Подставим эти выражения в систему (2.63):

$$\begin{cases} t_{j_1}\overline{t}_{j_2} + t_{n-j_2}\overline{t}_{n-j_1} = \overline{\varphi}_{j_1}\overline{t}_{n-j_1}\varphi_{j_2}t_{n-j_2} + \varphi_{j_1}t_{j_1}\overline{\varphi}_{j_2}\overline{t}_{j_2}, \\ t_{n-j_1}\overline{t}_{j_2} + t_{n-j_2}\overline{t}_{j_1} = \overline{\varphi}_{j_1}\overline{t}_{j_1}\varphi_{j_2}t_{n-j_2} + \varphi_{j_1}t_{n-j_1}\overline{\varphi}_{j_2}\overline{t}_{j_2}. \end{cases}$$

После перегруппировки имеем

$$\begin{cases} \left(1 - \varphi_{j_1}\overline{\varphi}_{j_2}\right) t_{j_1}\overline{t}_{j_2} + \left(1 - \overline{\varphi}_{j_1}\varphi_{j_2}\right) \overline{t}_{n-j_1}t_{n-j_2} = 0, \\ \left(1 - \overline{\varphi}_{j_1}\varphi_{j_2}\right) \overline{t}_{j_1}t_{n-j_2} + \left(1 - \varphi_{j_1}\overline{\varphi}_{j_2}\right) t_{n-j_1}\overline{t}_{j_2} = 0. \end{cases}$$

Записывая соотношения (2.74) и (2.75) в виде

$$t_{n-j_1} = \overline{\varphi}_{j_1} t_{-j_1}, \qquad t_{n-j_2} = \overline{\varphi}_{j_2} t_{-j_2},$$

получаем

$$\begin{cases} \left(1 - \varphi_{j_1}\overline{\varphi}_{j_2}\right) t_{j_1}\overline{t}_{j_2} + \left(1 - \overline{\varphi}_{j_1}\varphi_{j_2}\right) \varphi_{j_1}\overline{t}_{-j_1}\overline{\varphi}_{j_2}t_{-j_2} = 0, \\ \left(1 - \overline{\varphi}_{j_1}\varphi_{j_2}\right) \overline{t}_{j_1}\overline{\varphi}_{j_2}t_{-j_2} + \left(1 - \varphi_{j_1}\overline{\varphi}_{j_2}\right) \overline{\varphi}_{j_1}t_{-j_1}\overline{t}_{j_2} = 0. \end{cases}$$

Умножим первое равенство на φ_{j_2}, а во втором перейдем к комплексно сопряженным величинам:

$$\begin{cases} \left(\varphi_{j_2} - \varphi_{j_1}\right) \left(t_{j_1}\overline{t}_{j_2} - \overline{t}_{-j_1}t_{-j_2}\right) = 0, \\ \left(\varphi_{j_2} - \varphi_{j_1}\right) \left(t_{j_1}\overline{t}_{-j_2} - \overline{t}_{-j_1}t_{j_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi_{j_1} \neq \varphi_{j_2}$, имеем

$$\begin{cases} t_{j_1}\overline{t}_{j_2} - \overline{t}_{-j_1}t_{-j_2} = 0, \\ t_{j_1}\overline{t}_{-j_2} - \overline{t}_{-j_1}t_{j_2} = 0. \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, из этих соотношений сначала выводим систему

$$\begin{cases} \rho_{j_1} = \rho_{-j_1}, \\ \rho_{j_2} = \rho_{-j_2}, \\ \widetilde{\varphi}_{j_1} + \widetilde{\varphi}_{-j_1} = \widetilde{\varphi}_{j_2} + \widetilde{\varphi}_{-j_2}, \end{cases}$$

а затем, вводя множества $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ и величину $\widetilde{\theta}_2$, заключаем, что равенства

$$\begin{cases} \rho_j = \rho_{-j}, \\ \widetilde{\varphi}_j + \widetilde{\varphi}_{-j} = \widetilde{\theta}_2 \end{cases}$$

верны для всех j. Получено противоречие с предположением, что для матрицы T условие (2.59) не выполнено. Следовательно, $M \cap L_1''' = 0$.

В этих рассуждениях мы использовали то обстоятельство, что все нетривиальные четверки имеют тип **B**, но допускали, что некоторые из них могут одновременно иметь тип **A**. Поэтому доказательство остается справедливым, если все нетривиальные четверки имеют тип I—II и, значит, $M \cap L_2''' = 0$, а также в том случае, если часть четверок имеет тип I—II, а другая часть — тип II, т.е. $M \cap L_3''' = 0$.

Итак, доказано, что пересечение M с каждым из множеств L_1''', L_2''', L_3''', L_4''', L_5, L_6''', L_7 пусто. Поэтому пусто и пересечение M с объединением этих множеств, т.е.

$$M \cap L = 0. \tag{2.76}$$

В разделе 2.2.1.4 было установлено, что $M \subset L_{\text{эрм}} \cup L_{\text{ц}} \cup$ $\cup\, L$. Равенство (2.76) показывает, что справедливо более точное вложение

$$M \subset L_{\text{эрм}} \cup L_{\text{ц}}.$$

Теперь исследуем, какие теплицевы матрицы составляют множества $L_{\text{эрм}}$ и $L_{\text{ц}}$. Начнем с первого множества.

Утверждение 2.2.3. *Если матрица $T \in L_{\text{эрм}}$, то T представима в виде*

$$T = \varkappa R, \tag{2.77}$$

где R — эрмитова теплицева матрица, а комплексное число κ *имеет модуль* $|\kappa| = 1$.

Доказательство утверждения 2.2.3. По определению

$$L_{\text{эрм}} = L_1'' \cup L_2'' \cup L_3'' \cup L_4' \cup L_6'.$$

Последовательно рассмотрим множества, перечисленные в правой части. Пусть $T \in L_1''$, т.е. $\gamma = (0,0,1)$, найдутся индексы $j \neq k$ такие, что $\varphi_j \neq \varphi_k$, и для любого j верны соотношения (2.59). Представим T в виде

$$T = e^{i\frac{\widetilde{\theta}_2}{2}} e^{-i\frac{\widetilde{\theta}_2}{2}} T.$$

Положим $\kappa = e^{i\frac{\widetilde{\theta}_2}{2}}$ и $R = e^{-i\frac{\widetilde{\theta}_2}{2}} T$. Тогда $T = \kappa R$, где $\kappa \in \mathbf{C}$, $|\kappa| = 1$ и R — эрмитова теплицева матрица. Действительно, рассмотрим любую нетривиальную четверку r_j, r_{n-j}, r_{-j}, $r_{-(n-j)}$ матрицы R:

$$r_{-j} = e^{-i\frac{\widetilde{\theta}_2}{2}} t_{-j} = e^{-i\frac{\widetilde{\theta}_2}{2}} \rho_{-j} e^{i\widetilde{\varphi}_{-j}} =$$

$$= \{\text{согласно } (2.59),\ \rho_{-j} = \rho_j,\ \widetilde{\varphi}_{-j} = \widetilde{\theta}_2 - \widetilde{\varphi}_j\} =$$

$$= e^{-i\frac{\widetilde{\theta}_2}{2}} \rho_j e^{i\left(\widetilde{\theta}_2 - \widetilde{\varphi}_j\right)} = \overline{e^{-i\frac{\widetilde{\theta}_2}{2}} \rho_j e^{i\widetilde{\varphi}_j}} = \overline{e^{-i\frac{\widetilde{\theta}_2}{2}} t_j} = \overline{r}_j.$$

Итак, $r_{-j} = \overline{r}_j$ для всех j, т.е. $R^* = R$.

Это доказательство остается справедливым для $T \in L_2''$ и $T \in L_3''$, так как для матриц из этих множеств выполняются условия (2.59).

Рассмотрим теперь множество L_4'. Равенства $\sigma_j = \sigma$ для всех j глобально соответствуют матричному соотношению

$$T = \sigma T^*. \tag{2.78}$$

Определим κ из условия

$$\kappa^2 = \sigma$$

и представим матрицу T в виде

$$T = \kappa\overline{\kappa} T.$$

Полагая $R = \overline{\kappa}T$, получаем $T = \kappa R$. Покажем, что R — эрмитова матрица. В формулу (2.78) подставим $\sigma = \kappa^2$:

$$T = \kappa^2 T^*.$$

Отсюда

$$\overline{\kappa}T = \kappa T^*,$$

или

$$\overline{\kappa}T = (\overline{\kappa}T)^*,$$

т.е. $R = R^*$.

Представление вида $T = \kappa R$ возможно и для $T \in L'_6$, так как и в этом случае $\sigma_j = \sigma$ для любого j. Итак, для любой матрицы $T \in L_{\text{эрм}}$ справедливо представление

$$T = \kappa R,$$

где R — эрмитова теплицева матрица, $\kappa \in \mathbf{C}$, $|\kappa| = 1$. Тем самым доказано утверждение 2.2.3.

Матрицы из множества $L_{\text{эрм}}$ образуют класс *HTKM_1*.

Рассмотрим теперь теплицевы матрицы, составляющие множество $L_{\text{ц}}$.

Утверждение 2.2.4. *Если $T \in L_{ц}$, то T является φ-циркулянтом.*

Доказательство утверждения 2.2.4. По построению $L_{\text{ц}} = L'_1 \cup L'_2 \cup L'_3 \cup L''_4 \cup L''_6$. Если $T \in L'_1$, или $T \in L'_2$, или $T \in L'_3$, то T есть φ-циркулянт, так как определение этих множеств совпадает с определением φ-циркулянта.

Пусть теперь $T \in L''_4$, т.е. $\gamma = (1, 0, 0)$, найдутся индексы $j \neq k$ такие, что $\sigma_j \neq \sigma_k$, и для любого j верно (2.58). Рассмотрим любую нетривиальную четверку t_j, t_{n-j}, t_{-j}, $t_{-(n-j)}$ матрицы T. Поскольку $\gamma = (1, 0, 0)$, эта четверка имеет тип **A**, откуда выводим:

$$t_{-j} = \sigma_j \bar{t}_j$$

и, следовательно,

$$\rho_{-j} = \rho_j, \tag{2.79}$$

$$\widetilde{\varphi}_{-j} = \widetilde{\sigma}_j - \widetilde{\varphi}_j, \tag{2.80}$$

где $\widetilde{\sigma}_j$ определяется как

$$\widetilde{\sigma}_j = \arg \sigma_j;$$

$$t_{-(n-j)} = \sigma_j \bar{t}_{n-j}$$

и, следовательно,

$$\rho_{-(n-j)} = \rho_{n-j}, \tag{2.81}$$

$$\widetilde{\varphi}_{-(n-j)} = \widetilde{\sigma}_j - \widetilde{\varphi}_{n-j}. \tag{2.82}$$

Имеем

$$t_{-j} = \rho_{-j} e^{i\widetilde{\varphi}_{-j}} = \{(2.79)\} = \rho_j e^{i\widetilde{\varphi}_{-j}} = \{(2.80)\} =$$

$$= \rho_j e^{i\widetilde{\sigma}_j - i\widetilde{\varphi}_j} = \{(2.58)\} = \rho_{n-j} e^{i\widetilde{\sigma}_j - i\widetilde{\theta}_1 - i\widetilde{\varphi}_{-(n-j)}} =$$

$$= e^{-i\widetilde{\theta}_1} \rho_{n-j} e^{i\left(\widetilde{\sigma}_j - \widetilde{\varphi}_{-(n-j)}\right)} = \{(2.82)\} =$$

$$= e^{-i\widetilde{\theta}_1} \rho_{n-j} e^{i\widetilde{\varphi}_{n-j}} = e^{-i\widetilde{\theta}_1} t_{n-j}.$$

Полагая $e^{-i\widetilde{\theta}_1} = \varphi$, можем записать результат этих выкладок соотношением

$$t_{-j} = \varphi t_{n-j}. \tag{2.83}$$

Аналогично,

$$t_{-(n-j)} = \rho_{-(n-j)} e^{i\widetilde{\varphi}_{-(n-j)}} = \{(2.81)\} = \rho_{n-j} e^{i\widetilde{\varphi}_{-(n-j)}} = \{(2.58)\} =$$

$$= \rho_j e^{i(\widetilde{\varphi}_j - \widetilde{\theta}_1)} = e^{-i\widetilde{\theta}_1} \rho_j e^{i\widetilde{\varphi}_j} = \varphi t_j,$$

$$t_{-(n-j)} = \varphi t_j. \tag{2.84}$$

Поскольку число $\widetilde{\theta}_1$ не зависит от j, то и φ не зависит от j. Из формул (2.83) и (2.84) следует, что T есть φ-циркулянт.

Доказательство остается верным, если вместо $\gamma = (1, 0, 0)$ взять $\gamma = (1, 1, 0)$, т.к. любая нетривиальная четверка по-прежнему имеет тип **A**. Итак, если $T \in L_{\text{Ц}}$, то T является φ-циркулянтом, т.е. T принадлежит классу *HTKM_2*. Тем самым доказано утверждение 2.2.4. Вместе с тем закончено доказательство необходимости в теореме 2.1.1.

2.2.2 Доказательство достаточности

Включение $L_{\text{эрм}} \cup L_{\text{ц}} \subset M$ очевидно из следующих соображений:

1) Линейный многочлен с комплексными коэффициентами от эрмитовой матрицы R уже, вообще говоря, не является эрмитовой матрицей, однако остается нормальной матрицей, поскольку имеет тот же ортонормированный базис из собственных векторов, что и матрица R.

2) Согласно формуле (1.49), множество φ-циркулянтов для фиксированного числа φ образует алгебру, приводимую к диагональному виду одной и той же матрицей $G_\varphi F_n^*$. Если $|\varphi| = 1$, то эта матрица унитарна, и алгебра φ-циркулянтов состоит из нормальных матриц.

Глава 3

НОРМАЛЬНЫЕ ГАНКЕЛЕВЫ МАТРИЦЫ

В данной главе будет полностью решена задача описания нормальных ганкелевых матриц.

3.1 Критерий нормальности комплексной ганкелевой матрицы

Рассмотрим задачу о классификации ганкелевых матриц, являющихся одновременно нормальными.

Эта задача имеет смысл лишь в поле комплексных чисел, так как произвольная вещественная ганкелева матрица всегда является нормальной в силу своей симметрии.

Прежде чем описать историю решения рассматриваемой задачи, сформулируем критерий нормальности комплексной ганкелевой матрицы, доказываемый в этой главе. Это позволит нам проследить, в какой последовательности были получены классы матриц, в совокупности составляющие предлагаемый критерий.

Теорема 3.1.1. *Ненулевая ганкелева матрица $H \in M_n(\mathbf{C})$ является нормальной тогда и только тогда, когда принадлежит хотя бы одному из следующих классов:*

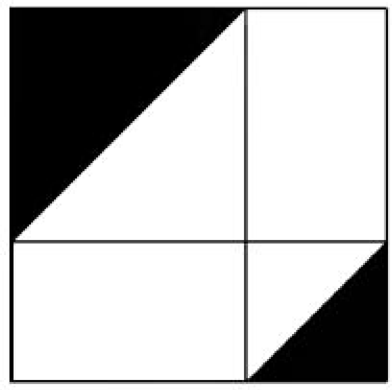
Класс НГМ_1. Вещественные ганкелевы матрицы и произвольные их комплексные кратные.

Класс НГМ_2. Матрицы вида

$$\alpha \mathcal{P}_n + \beta H_1, \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

где H_1 — произвольная вещественная центросимметричная ганкелева матрица.

Класс НГМ_3. Блочно-диагональные матрицы вида



$$\alpha H_1 \oplus \beta H_2, \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

где H_1 — верхнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка j_1 $(0 < j_1 < n)$, а H_2 — нижнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка $j_2 = n - j_1$.

Класс НГМ_4. Матрицы вида

$$\alpha H_1 + \beta H_1^{-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

где H_1 — невырожденная вещественная верхнетреугольная (или нижнетреугольная) ганкелева матрица.

Класс НГМ_5. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением V-преобразований 1-го типа ко множеству унитарных φ-циркулянтов $(|\varphi| = 1,\ \varphi \neq \pm 1)$ и их скалярных кратных.

Класс НГМ_6. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением V-преобразований 1-го типа ко множеству матриц вида $T = T_1 + iT_2$, образуемых одним из следующих двух способов:

а) T_1 — произвольный вещественный невырожденный ξ-циркулянт $(\xi \neq 0, \pm 1)$, T_2 — произвольное вещественное кратное матрицы $T_1^{-\top}$;

б) T_1 и $T_2^{\top}$ — вещественные ξ-циркулянты $(\xi \neq 0, \pm 1)$, "делящие нуль"; иначе говоря, T_1 и T_2 удовлетворяют условию

$$T_1 T_2^{\top} = 0.$$

Класс НГМ_7. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы являются циркулянтами вида (1.47), где $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ *— диагональная матрица, удовлетворяющая соотношениям*

$$|d_j| = |d_{n+2-j}|, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Класс НГМ_8. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы являются косыми циркулянтами вида (1.50), где $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ *— диагональная матрица, для которой выполнены условия*

$$|d_1| = |d_2|, \qquad |d_j| = |d_{n+3-j}|, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Класс НГМ_9. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением V*-преобразований 1-го типа ко множеству матриц вида* $T = T_1 + iT_2$*, формируемых посредством следующей процедуры:*

а) задать в качестве T_1 *ненулевое вещественное кратное вещественного ортогонального циркулянта. Определить* L_1 *как строго нижнетреугольную теплицеву матрицу, поддиагональная часть которой совпадает с поддиагональной частью* T_1*, а* T_3 *как матрицу вида*

$$T_3 = T_1 L_1^\top - L_1 T_1^\top; \tag{3.1}$$

б) задать в качестве T_2 *любой вещественный циркулянт, решающий уравнение*

$$X T_1^\top - T_1 X^\top = T_3. \tag{3.2}$$

Класс НГМ_10. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением V*-преобразований 1-го типа ко множеству матриц вида* $T = T_1 + iT_2$*, формируемых посредством следующей процедуры:*

а) задать в качестве T_1 *ненулевое вещественное кратное вещественного ортогонального косого циркулянта. Матрицу* L_1 *определить как строго нижнетреугольную теплицеву матрицу, поддиагональная часть которой противоположна поддиагональной части* T_1*;*

б) задать в качестве T_2 любой вещественный косой циркулянт, решающий уравнение (3.2), где T_3 определяется формулой (3.1).

Как видно из приведенной формулировки, задача классификации нормальных ганкелевых матриц гораздо сложнее аналогичной задачи для теплицевых матриц. Эта классификационная задача была поставлена Х.Д. Икрамовым в 1997 г. в статье [22]. Там же были указаны классы *НГМ_1*, *НГМ_3* и получены частные случаи классов *НГМ_2*, *НГМ_7*. Использовались следующие соображения:

Всякая вещественная ганкелева матрица нормальна, и умножение на комплексную константу сохраняет нормальность. Это приводит к классу *НГМ_1*.

Рассмотрим два типа представлений квадратных комплексных матриц: теплицево разложение

$$A = B + iC, \qquad B = B^*, \qquad C = C^*, \tag{3.3}$$

и аналог алгебраической формы записи комплексного числа

$$A = X + iY, \qquad X = \overline{X}, \qquad Y = \overline{Y}. \tag{3.4}$$

Для нормальной ганкелевой матрицы A разложения (3.3) и (3.4) совпадают. Так как для произвольной матрицы A свойство нормальности эквивалентно коммутированию компонент B и C ее теплицева разложения, то задача классификации нормальных ганкелевых матриц может быть сведена к описанию пар перестановочных вещественных ганкелевых матриц.

Особое внимание уделено в [22] случаю центросимметричных и кососцентросимметричных матриц A. Для ганкелевых матриц эти свойства означают симметрию или косую симметрию относительно главной антидиагонали. В общем случае центральная симметрия матрицы A эквивалентна ее коммутированию с матрицей $\mathcal{P}_n$. Отсюда следует, что среди нормальных ганкелевых матриц присутствуют матрицы вида $\alpha\,(H_1 + i\mathcal{P}_n)$, где H_1 — вещественная центросимметричная ганкелева матрица. Такие матрицы образуют подмножество класса *НГМ_2*. В частном случае ганкелевых циркулянтов и косых циркулянтов свойства центральной симметрии и косой симметрии позволяют выделить подмножества классов *НГМ_7* и *НГМ_8.*

Еще один класс комплексных ганкелевых матриц, исследованный в [22], составляют матрицы треугольного вида, где треугольность понимается по отношению к главной антидиагонали. Показано, что такая матрица нормальна тогда и только тогда, когда она является комплексным скалярным кратным вещественной матрицы. В сочетании с предположением о блочно-диагональной структуре матрицы это дает класс *НГМ_3.*

Попытку классифицировать нормальные ганкелевы матрицы предприняли в [52] Гу и Паттен. Как было сказано в разделе 2.2, они получили условия теплицевости матрицы $AB - CD$ и выполнения равенства $AB = CD$ для теплицевых матриц A, B, C и D. Эти условия они попробовали применить к решению нормальной ганкелевой задачи, используя то обстоятельство, что исходную постановку задачи, переписанную в виде

$$H\mathcal{P}_n\mathcal{P}_nH^* = H^*\mathcal{P}_n\mathcal{P}_nH,$$

можно сформулировать в терминах теплицевых матриц:

$$(H\mathcal{P}_n)(H\mathcal{P}_n)^* = (\mathcal{P}_nH)^*(\mathcal{P}_nH).$$

По аналогии с теплицевым случаем вводятся два вспомогательных вектора a и α, составленных из элементов искомой ганкелевой матрицы H. Нормальность этой матрицы оказывается эквивалентной вещественности некоторого вектора, в формировании которого участвуют не только a и α, но и произведение одного из этих векторов с теплицевой матрицей, определяемой обоими векторами. В результате указанное условие вещественности превращается в систему существенно нелинейных соотношений для элементов матрицы H, едва ли сильно упрощающих решение задачи по сравнению с исходной формулировкой. Неслучайно некоторые частные решения, приводимые авторами, получены при довольно обременительных дополнительных условиях.

Как видно из этого обзора, до недавнего времени были известны лишь некоторые классы нормальных ганкелевых матриц. Эти классы или их подмножества были найдены разными авторами и из различных соображений.

Приводимое ниже доказательство теоремы 3.1.1 представляет собой изложение подхода, благодаря которому, с одной стороны, все ранее известные классы нормальных ганкелевых матриц, а также некоторые новые, получаются в рамках единой схемы. С другой стороны, мы показываем, что никаких других классов нормальных ганкелевых матриц, кроме перечисленных в формулировке теоремы, не существует. Это доказательство изложено в работах [24, 25, 27, 28, 29, 40, 45, 46, 47], и является полным решением задачи описания нормальных ганкелевых матриц произвольного порядка. В своем изложении мы не различаем случаи необходимости и достаточности, так как все совершаемые преобразования являются эквивалентными.

3.2 Доказательство критерия нормальности

3.2.1 Переход к соответствующей теплицевой матрице

Доказательство критерия нормальности комплексной ганкелевой матрицы начнем с перехода от ганкелевой матрицы к соответствующей теплицевой матрице посредством представления (1.13). Цель состоит в том, чтобы заменить условие нормальности исходной матрицы некоторым уравнением для теплицевой матрицы, решить которое значительно проще.

Подставляя выражение $H = T\mathcal{P}_n$ (см. (1.13)) в определение (1.16) нормальной матрицы H, получаем

$$\mathcal{P}_n T^* T \mathcal{P}_n = TT^*.$$

Следующая лемма позволяет упростить это соотношение.

Лемма 3.2.1. *Если T — теплицева матрица, то*

$$\mathcal{P}_n T^* T \mathcal{P}_n = \overline{TT^*}. \tag{3.5}$$

Доказательство леммы 3.2.1. В силу (1.60) имеем

$$\mathcal{P}_n T^* T \mathcal{P}_n = \overline{T} \mathcal{P}_n T \mathcal{P}_n = \overline{T} T^\top = \overline{T T^*}.$$

■

Учитывая (3.5), приходим к такому утверждению:

Лемма 3.2.2. *Ганкелева матрица H нормальна тогда и только тогда, когда соответствующая ей теплицева матрица T удовлетворяет условию*

$$\overline{T T^*} = T T^*,$$

или

$$\Im\, T T^* = 0. \tag{3.6}$$

Запишем комплексную матрицу T в алгебраической форме

$$T = T_1 + i T_2, \tag{3.7}$$

где

$$T_1 = \frac{T + \overline{T}}{2}, \qquad T_2 = \frac{T - \overline{T}}{2i}.$$

Вещественную теплицеву матрицу T_1 в формуле (3.7) удобно записывать в виде

$$T_1 = a_0 I_n + \mathcal{T}(x_1) + \left(\mathcal{T}(x_2)\right)^\top,$$

где

$$x_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), \qquad x_2 = \left(a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-(n-1)}\right).$$

Здесь

$$a_j = \Re\, h_j, \qquad j = -(n-1), \ldots, n-1.$$

Аналогично, вещественную теплицеву матрицу T_2 будем записывать в виде

$$T_2 = b_0 I_n + \mathcal{T}(y_1) + \left(\mathcal{T}(y_2)\right)^\top,$$

где

$$y_1 = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}), \qquad y_2 = \left(b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-(n-1)}\right)$$

и

$$b_j = \Im\, h_j, \qquad j = -(n-1), \ldots, n-1.$$

Подставляя представление (3.7) в (3.6), получаем условие

$$\Im\left[(T_1 + iT_2)\left(T_1^\top - iT_2^\top\right)\right] = 0,$$

или

$$T_2T_1^\top - T_1T_2^\top = 0. \tag{3.8}$$

В результате приходим к задаче описания пар теплицевых матриц, удовлетворяющих условию (3.8). Эту же задачу можно рассматривать как задачу описания пар вещественных теплицевых матриц, произведение которых дает симметричную матрицу. Действительно, если положить $T_3 = T_2T_1^\top$, то (3.8) превращается в равенство $T_3 = T_3^\top$.

Если одна из матриц T_1 и T_2 диагональна, то, будучи теплицевой, она является скалярной матрицей, и тогда от другой матрицы достаточно потребовать простой симметрии. Ганкелева матрица H, соответствующая такой паре, есть линейная комбинация (с комплексными коэффициентами) вещественной центросимметричной ганкелевой матрицы и матрицы $\mathcal{P}_n$, т.е. H принадлежит классу *НГМ_2*. Поэтому в дальнейшем будем считать, что и T_1, и T_2 имеют хотя бы по одному ненулевому внедиагональному элементу.

Матричное условие (3.8) эквивалентно системе квадратичных уравнений относительно элементов вещественных матриц T_1 и T_2. Для описания нормальных ганкелевых матриц нужно определить все случаи, когда эта система разрешима, и в каждом из них найти соответствующие решения.

Удобно отделить диагональные элементы матриц T_1 и T_2, представляя их в виде

$$T_1 = a_0I_n + \widehat{T}_1, \qquad T_2 = b_0I_n + \widehat{T}_2. \tag{3.9}$$

Теперь условие наличия у T_1 и T_2 хотя бы по одному ненулевому внедиагональному элементу можно сформулировать как требование, чтобы обе матрицы $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ были ненулевыми.

Перепишем уравнение (3.8), используя представления (3.9):

$$\left(b_0I_n + \widehat{T}_2\right)\left(a_0I_n + \widehat{T}_1\right)^\top - \left(a_0I_n + \widehat{T}_1\right)\left(b_0I_n + \widehat{T}_2\right)^\top = 0.$$

После раскрытия скобок имеем

$$\widehat{T}_2\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\widehat{T}_2^\top = a_0\left(\widehat{T}_2^\top - \widehat{T}_2\right) - b_0\left(\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\right). \tag{3.10}$$

В правой части равенства (3.10) стоит теплицева матрица; значит, и матрица в левой части этого уравнения должна быть теплицевой. Выразим это условие через элементы матриц $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$:

$$\left\{\widehat{T}_2\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\widehat{T}_2^\top\right\}_{k+1,m+1} = \left\{\widehat{T}_2\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\widehat{T}_2^\top\right\}_{k,m},\ k,m = 1,\ldots,n-1,$$

или

$$\sum_{g=1}^{n}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{k+1,g}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{m+1,g} - \sum_{g=1}^{n}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{k+1,g}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{m+1,g} -$$

$$-\sum_{g=1}^{n}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{kg}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{mg} + \sum_{g=1}^{n}\left\{\widehat{T}_1\right\}_{kg}\left\{\widehat{T}_2\right\}_{mg} = 0.$$

В терминах элементов матриц $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ это равенство выглядит так:

$$\sum_{g=1}^{n} b_{g-k-1}a_{g-m-1} - \sum_{g=1}^{n} a_{g-k-1}b_{g-m-1} -$$

$$-\sum_{g=1}^{n} b_{g-k}a_{g-m} + \sum_{g=1}^{n} a_{g-k}b_{g-m} = 0.$$

Заменим индекс суммирования g на r следующим образом: в первой и второй суммах положим $g = r + 1$, а в третьей и четвертой — $g = r$. Получающееся в результате соотношение

$$\sum_{r=0}^{n-1} b_{r-k}a_{r-m} - \sum_{r=0}^{n-1} a_{r-k}b_{r-m} - \sum_{r=1}^{n} b_{r-k}a_{r-m} + \sum_{r=1}^{n} a_{r-k}b_{r-m} = 0$$

можно упростить к виду

$$b_{-k}a_{-m} - a_{-k}b_{-m} = b_{n-k}a_{n-m} - a_{n-k}b_{n-m}.$$

Итак,

$$a_{n-k}b_{n-m} - a_{n-m}b_{n-k} = a_{-k}b_{-m} - a_{-m}b_{-k}, \qquad k,m = 1,\ldots,n-1. \tag{3.11}$$

Исходя из матриц

$$\widehat{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{-1} & 0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-(n-1)} & a_{-(n-2)} & a_{-(n-3)} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\widehat{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ b_{-1} & 0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{-(n-1)} & b_{-(n-2)} & b_{-(n-3)} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

введем две вспомогательные $(n-1) \times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. В соответствии с соглашением (1.20), матрицу $\mathcal{F}$, определяемую векторами u и v вида

$$\begin{aligned} u &= (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1)^\top, \\ v &= (b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1)^\top, \end{aligned} \tag{3.12}$$

будем обозначать символом

$$\mathcal{F}(u,v) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_{n-2} & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

а матрицу $\mathcal{G}$, определяемую векторами x и y вида

$$\begin{aligned} x &= \left(a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-(n-1)}\right)^\top, \\ y &= \left(b_{-1}, b_{-2}, \dots, b_{-(n-1)}\right)^\top, \end{aligned} \tag{3.14}$$

обозначаем символом

$$\mathcal{G}(x,y) = \begin{bmatrix} a_{-1} & b_{-1} \\ a_{-2} & b_{-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{-(n-1)} & b_{-(n-1)} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

С учетом определений (1.21) и (1.22) равенства (3.11) принимают вид

$$\triangle^{\mathcal{F}}_{km} = \triangle^{\mathcal{G}}_{km}, \qquad k, m = 1, \dots, n-1. \tag{3.16}$$

Проанализируем эти равенства в нескольких взаимоисключающих случаях, определяемых значениями рангов матриц $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, и в каждом из этих случаев найдем все решения.

3.2.2 Малоранговый случай

В этом разделе покажем, как получить те нормальные ганкелевы матрицы, для которых вспомогательные матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ имеют ранг, не превосходящий единицы.

I случай. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ нулевые; тогда $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ также нулевые матрицы. Этот случай невозможен, поскольку по исходному предположению матрицы $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ должны быть ненулевыми.

II случай. Матрица $\mathcal{G}$ нулевая, а $\mathcal{F}$ — ненулевая матрица. Тогда в (3.16) все миноры $\triangle_{km}^{\mathcal{G}} = 0$, а потому и все миноры $\triangle_{km}^{\mathcal{F}} = 0$. Поскольку $\mathcal{F}$ — ненулевая матрица, то $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 1$ и столбцы u и v этой матрицы коллинеарны. Отсюда следует, что найдется вещественный вектор

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})^\top$$

такой, что u и v можно представить в виде $u = \alpha \mathcal{P}_{n-1} z$ и $v = \beta \mathcal{P}_{n-1} z$. Вещественные числа α и β удовлетворяют условию

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \tag{3.17}$$

Определим строго верхнетреугольную матрицу $U = \mathcal{T}(z)$. Заметим, что при нулевой матрице $\mathcal{G}$ матрицы $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ в формулах (3.9) также являются верхнетреугольными. В силу коллинеарности векторов u, v и z имеем $\widehat{T}_1 = \alpha U$ и $\widehat{T}_2 = \beta U$. Подставим эти соотношения в (3.10):

$$\alpha\beta U U^\top - \alpha\beta U U^\top = a_0(\beta\, U^\top - \beta\, U) - b_0(\alpha\, U^\top - \alpha\, U).$$

После преобразований получаем

$$a_0(\beta\, U^\top - \beta\, U) - b_0(\alpha\, U^\top - \alpha\, U) = 0,$$

или

$$(a_0\beta - b_0\alpha)\,U^\top - (a_0\beta - b_0\alpha)\,U = 0. \tag{3.18}$$

Так как U — строго верхнетреугольная матрица, а $U^\top$ — строго нижнетреугольная, то (3.18) равносильно двум равенствам

$$\begin{cases} (a_0\beta - b_0\alpha)\,U^\top = 0, \\ (a_0\beta - b_0\alpha)\,U = 0. \end{cases}$$

Первое из них есть транспонированная версия второго. Поэтому в дальнейшем рассматриваем единственное равенство

$$(a_0\beta - b_0\alpha)\,U = 0.$$

Поскольку матрица U ненулевая, заключаем, что $a_0\beta - b_0\alpha = 0$. Это соотношение можно записать как равенство нулю определителя матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Вследствие (3.17) найдется ненулевое число κ такое, что

$$a_0 = \kappa\alpha, \qquad b_0 = \kappa\beta.$$

Подставляя эти выражения в формулы (3.9), получаем

$$\begin{aligned} T_1 &= a_0 I_n + \widehat{T}_1 = \kappa\alpha I_n + \alpha U = \alpha(\kappa I_n + U), \\ T_2 &= b_0 I_n + \widehat{T}_2 = \kappa\beta I_n + \beta U = \beta(\kappa I_n + U). \end{aligned}$$

Таким образом, матрицы T_1 и T_2 получаются из одной и той же верхнетреугольной матрицы умножением ее на константы (свою для каждой матрицы). В терминах исходной ганкелевой задачи это означает, что нормальной является комплексная ганкелева матрица, равная произведению некоторого комплексного числа на вещественную верхнетреугольную матрицу. Такая матрица принадлежит классу *НГМ_1*.

III случай. Матрица $\mathcal{F}$ нулевая, а $\mathcal{G}$ — ненулевая матрица. Этот случай эквивалентен предыдущему с той лишь разницей, что матрицы T_1 и T_2 теперь получаются из некоторой нижнетреугольной матрицы умножением на константы (свою для каждой матрицы). Снова в терминах исходной ганкелевой задачи это означает, что нормальной является комплексная ганкелева матрица, равная произведению некоторого комплексного числа на вещественную нижнетреугольную матрицу. Такая матрица принадлежит классу *НГМ_1*.

IV случай. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ненулевые и $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 1$. В равенствах (3.16) все миноры $\triangle_{km}^{\mathcal{F}} = 0$, а потому и все миноры $\triangle_{km}^{\mathcal{G}} = 0$. Поскольку $\mathcal{G}$ — ненулевая матрица, то $\operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$.

Рассуждая, как в случае II, выводим из условия $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 1$ существование вещественных чисел α и β, удовлетворяющих неравенству (3.17), и вещественного вектора

$$z_1 = \left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots, z_{n-1}^{(1)}\right)^\top$$

таких, что $u = \alpha \mathcal{P}_{n-1} z_1$ и $v = \beta \mathcal{P}_{n-1} z_1$ (см. (3.12)). Аналогично, из условия $\operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$ заключаем, что найдутся вещественные числа γ и δ, удовлетворяющие неравенству

$$\gamma^2 + \delta^2 \neq 0, \tag{3.19}$$

и вещественный вектор

$$z_2 = \left(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_{n-1}^{(2)}\right)^\top$$

такие, что $x = \gamma z_2$ и $y = \delta z_2$ (см. (3.14)). Определим строго верхнетреугольную матрицу $U = \mathcal{T}(z_1)$ и строго нижнетреугольную матрицу $L = (\mathcal{T}(z_2))^\top$. Тогда выписанные выше соотношения коллинеарности между векторами можно преобразовать в матричные равенства

$$\widehat{T}_1 = \alpha U + \gamma L, \qquad \widehat{T}_2 = \beta U + \delta L. \tag{3.20}$$

Используя эти равенства, получаем

$$\begin{gathered}
\widehat{T}_2 \widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1 \widehat{T}_2^\top = (\beta U + \delta L)(\alpha U + \gamma L)^\top - (\alpha U + \gamma L)(\beta U + \delta L)^\top = \\
= \alpha\beta U U^\top + \beta\gamma U L^\top + \alpha\delta L U^\top + \gamma\delta L L^\top - \\
- \alpha\beta U U^\top - \alpha\delta U L^\top - \beta\gamma L U^\top - \gamma\delta L L^\top = \\
= (\beta\gamma - \alpha\delta) U L^\top + (\alpha\delta - \beta\gamma) L U^\top = (\alpha\delta - \beta\gamma)\left(L U^\top - U L^\top\right).
\end{gathered}$$

Итак,

$$\widehat{T}_2\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\widehat{T}_2^\top = (\alpha\delta - \beta\gamma)\left(LU^\top - UL^\top\right). \qquad (3.21)$$

Подставим выражения (3.21) и (3.20) в (3.10):

$$\begin{gathered}(\alpha\delta - \beta\gamma)\left(LU^\top - UL^\top\right) = \\ = a_0\left(\beta U^\top + \delta L^\top - \beta U - \delta L\right) - \\ -b_0\left(\alpha U^\top + \gamma L^\top - \alpha U - \gamma L\right).\end{gathered}$$

Приводя подобные члены в правой части, находим

$$\begin{gathered}(\alpha\delta - \beta\gamma)\left(LU^\top - UL^\top\right) = \\ = (a_0\beta - b_0\alpha)\,U^\top - (a_0\delta - b_0\gamma)\,L + \\ + (a_0\delta - b_0\gamma)\,L^\top - (a_0\beta - b_0\alpha)\,U.\end{gathered} \qquad (3.22)$$

Матрицы L, $U^\top$ и $LU^\top$ — строго нижнетреугольные, а матрицы U, $L^\top$ и $UL^\top$ — строго верхнетреугольные. Поэтому соотношение (3.22) равносильно системе

$$\begin{cases}(\alpha\delta - \beta\gamma)\,LU^\top = (a_0\beta - b_0\alpha)\,U^\top - (a_0\delta - b_0\gamma)\,L, \\ (\alpha\delta - \beta\gamma)\,UL^\top = (a_0\beta - b_0\alpha)\,U - (a_0\delta - b_0\gamma)\,L^\top.\end{cases}$$

Второе равенство в этой системе получается из первого транспонированием, поэтому его можно отбросить. В результате приходим к задаче описания пар строго верхнетреугольных матриц U и $L^\top$, удовлетворяющих уравнению

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\,UL^\top = (a_0\beta - b_0\alpha)\,U - (a_0\delta - b_0\gamma)\,L^\top.$$

Чтобы упростить формулировку этой задачи, определим величины

$$\xi = \alpha\delta - \beta\gamma, \qquad \xi_1 = a_0\beta - b_0\alpha, \qquad \xi_2 = b_0\gamma - a_0\delta. \qquad (3.23)$$

В новых обозначениях исследуемое уравнение имеет вид

$$\xi UL^\top = \xi_1 U + \xi_2 L^\top. \qquad (3.24)$$

Анализ этой задачи разобьем на несколько случаев.

Случай IV.1. $\xi = 0$. Это условие означает, что определитель матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

равен нулю. В силу условий (3.17) и (3.19) матрица Z не имеет нулевых строк. Поэтому найдется ненулевое число κ такое, что

$$\gamma = \kappa\alpha, \qquad \delta = \kappa\beta. \tag{3.25}$$

Подстановка выражений (3.25) в (3.20) дает

$$\widehat{T}_1 = \alpha U + \kappa\alpha L = \alpha(U + \kappa L),$$

$$\widehat{T}_2 = \beta U + \kappa\beta L = \beta(U + \kappa L).$$

Таким образом, матрицы $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ получаются одна из другой умножением на число.

Вводя матрицу $T_3 = U + \kappa L$, приходим к соотношениям

$$\widehat{T}_1 = \alpha T_3, \qquad \widehat{T}_2 = \beta T_3.$$

Подставим их в основное уравнение (3.10):

$$0 = a_0\beta\left(T_3^\top - T_3\right) - b_0\alpha\left(T_3^\top - T_3\right),$$

или

$$(a_0\beta - b_0\alpha)\left(T_3^\top - T_3\right) = 0.$$

Пусть матрица T_3 симметрична. Тогда из формул

$$T_1 = a_0 I_n + \alpha T_3, \qquad T_2 = b_0 I_n + \beta T_3 \tag{3.26}$$

следует, что нормальная ганкелева матрица, соответствующая паре (T_1, T_2), представима в виде линейной комбинации (с комплексными коэффициентами) вещественной центросимметричной ганкелевой матрицы и матрицы $\mathcal{P}_n$, т.е. принадлежит классу *НГМ_2*.

Если матрица T_3 не симметрична, то имеет место равенство $a_0\beta - b_0\alpha = 0$, означающее, что матрица

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix}$$

вырождена. Снова используя неравенство (3.17), заключаем, что найдется ненулевое число η, для которого $a_0 = \eta\alpha$ и $b_0 = \eta\beta$. Теперь соотношения (3.26) принимают вид

$$\begin{aligned} T_1 &= \eta\alpha I_n + \alpha T_3 = \alpha\left(\eta I_n + T_3\right), \\ T_2 &= \eta\beta I_n + \beta T_3 = \beta\left(\eta I_n + T_3\right). \end{aligned}$$

Такая пара (T_1, T_2) соответствует нормальной ганкелевой матрице, равной произведению комплексного числа на вещественную ганкелеву матрицу (класс *НГМ_1*).

Случай IV.2. $\xi \neq 0$. Положим

$$\mu_1 = -\xi_1/\xi, \qquad \mu_2 = -\xi_2/\xi \tag{3.27}$$

и перепишем уравнение (3.24), разделив обе его части на ξ:

$$UL^\top = -\mu_1 U - \mu_2 L^\top,$$

или

$$U\left(L^\top + \mu_1 I_n\right) = -\mu_2 L^\top.$$

Добавим и вычтем в правой части матрицу $\mu_1\mu_2 I_n$ и выполним такие преобразования:

$$\begin{gathered} U\left(L^\top + \mu_1 I_n\right) = -\mu_2 L^\top - \mu_1\mu_2 I_n + \mu_1\mu_2 I_n; \\ U\left(L^\top + \mu_1 I_n\right) = -\mu_2\left(L^\top + \mu_1 I_n\right) + \mu_1\mu_2 I_n; \\ U\left(L^\top + \mu_1 I_n\right) + \mu_2\left(L^\top + \mu_1 I_n\right) = \mu_1\mu_2 I_n. \end{gathered}$$

В итоге получаем

$$(U + \mu_2 I_n)\left(L^\top + \mu_1 I_n\right) = \mu_1\mu_2 I_n. \tag{3.28}$$

В зависимости от значений величин μ_1 и μ_2 разобьем анализ случая IV.2 на четыре подслучая.

Случай IV.2.1. $\xi \neq 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$. Будем рассматривать два последних условия как систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_0\beta - b_0\alpha = 0, \\ a_0\delta - b_0\gamma = 0 \end{cases}$$

относительно a_0 и b_0. Определитель этой системы равен $-\beta\gamma+$ $+\alpha\delta=\xi\neq 0$. Следовательно,

$$a_0=b_0=0.$$

Равенство (3.28) превращается в условие $UL^\top = 0$ для двух верхнетреугольных теплицевых матриц U и $L^\top$. Пусть k_U и k_L — столбцевые индексы самых левых ненулевых элементов в первых строках соответственно матриц U и $L^\top$. Матрицы U и L можно представить в блочном виде

$$U=\begin{pmatrix} O_{(n-k_U+1)(k_U-1)} & \widetilde{U} \\ O_{(k_U-1)(k_U-1)} & O_{(k_U-1)(n-k_U+1)} \end{pmatrix},$$

$$L=\begin{pmatrix} O_{(k_L-1)(n-k_L+1)} & O_{(k_L-1)(k_L-1)} \\ \widetilde{L} & O_{(n-k_L+1)(k_L-1)} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{U}$ и $\widetilde{L}$ — квадратные подматрицы.

Условие $UL^\top=0$ приводит к неравенству

$$(k_U-1)+(k_L-1)\geq n. \tag{3.29}$$

Это неравенство, переписанное как $k_U-1\geq n-k_L+1$, показывает, что ненулевые блоки матриц U и L находятся в непересекающихся группах столбцов. Теперь формулы (3.20), сопровождаемые возвращением к основной ганкелевой матрице H, означают, что H есть матрица вида

$$H=\alpha H_1\oplus\beta H_2,$$

где H_1 и H_2 — вещественные ганкелевы матрицы, а α и β — комплексные числа. При этом H_1 — верхнетреугольная, а H_2 — нижнетреугольная матрицы в том смысле, как это определено в разд. 1.1. Таким образом, H принадлежит классу *НГМ_3*.

Случай IV.2.2. $\xi\neq 0$, $\mu_1=0$, $\mu_2\neq 0$. В этом случае уравнение (3.28) имеет вид

$$(U+\mu_2 I_n)\,L^\top=0.$$

Матрица U — строго верхнетреугольная, а число $\mu_2\neq 0$. Поэтому матрица $(U+\mu_2 I_n)$ невырожденна, откуда следует, что

$L^\top = 0$. Условие $\mu_1 = 0$ можно интерпретировать как равенство нулю определителя матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Ввиду условия (3.17) найдется ненулевое число κ такое, что

$$a_0 = \kappa\alpha, \qquad b_0 = \kappa\beta.$$

Подставляя эти выражения и соотношение (3.20) в представление (3.9) и учитывая равенство $L^\top = 0$, получаем

$$\begin{aligned} T_1 = a_0 I_n + \widehat{T}_1 = \kappa\alpha I_n + \alpha U = \alpha\left(\kappa I_n + U\right), \\ T_2 = b_0 I_n + \widehat{T}_2 = \kappa\beta I_n + \beta U = \beta\left(\kappa I_n + U\right). \end{aligned}$$

Эти формулы соответствуют нормальной ганкелевой матрице, равной произведению комплексного числа на вещественную ганкелеву матрицу верхнетреугольного вида (класс *НГМ_1*).

Случай IV.2.3. $\xi \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$. Здесь уравнение (3.28) принимает вид

$$U\left(L^\top + \mu_1 I_n\right) = 0.$$

Матрица $L^\top$ — строго верхнетреугольная, а число $\mu_1 \neq 0$. Поэтому матрица $\left(L^\top + \mu_1 I_n\right)$ невырожденна, откуда следует, что $U = 0$. Условие $\mu_2 = 0$ можно интерпретировать как равенство нулю определителя матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Ввиду условия (3.19) найдется ненулевое число κ такое, что

$$a_0 = \kappa\gamma, \qquad b_0 = \kappa\delta.$$

Подставляя эти выражения и соотношение (3.20) в представление (3.9) и учитывая равенство $U = 0$, получаем

$$\begin{aligned} T_1 = a_0 I_n + \widehat{T}_1 = \kappa\gamma I_n + \gamma L = \gamma\left(\kappa I_n + L\right), \\ T_2 = b_0 I_n + \widehat{T}_2 = \kappa\delta I_n + \delta L = \delta\left(\kappa I_n + L\right). \end{aligned}$$

Эти формулы снова соответствуют нормальной ганкелевой матрице, равной произведению комплексного числа на вещественную ганкелеву матрицу, на этот раз нижнетреугольного вида (класс *НГМ_1*).

Случай IV.2.4. $\xi \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$. Разделим обе части уравнения (3.28) на число $\mu_1\mu_2$:

$$\left(\frac{1}{\mu_2}U + I_n\right)\left(\frac{1}{\mu_1}L^\top + I_n\right) = I_n.$$

Определим R формулой $R = \frac{1}{\mu_2}U + I_n$, тогда

$$U = \mu_2 \left(R - I_n\right), \qquad L = \mu_1 \left(R^{-1} - I_n\right)^\top.$$

Подставив эти представления в (3.20), получим

$$\widehat{T_1} = \alpha\mu_2 \left(R - I_n\right) + \gamma\mu_1 \left(R^{-1} - I_n\right)^\top,$$
$$\widehat{T_2} = \beta\mu_2 \left(R - I_n\right) + \delta\mu_1 \left(R^{-1} - I_n\right)^\top.$$

Матрицы T_1 и T_2 в соотношении (3.9) принимают вид

$$T_1 = \alpha\mu_2 R + \gamma\mu_1 R^{-\top} + \left(a_0 - \alpha\mu_2 - \gamma\mu_1\right) I_n,$$
$$T_2 = \beta\mu_2 R + \delta\mu_1 R^{-\top} + \left(b_0 - \beta\mu_2 - \delta\mu_1\right) I_n.$$

Найдем численные коэффициенты перед единичными матрицами. Из формул (3.27) и (3.23) выводим

$$\mu_1 = -\frac{\xi_1}{\xi} = \frac{\alpha b_0 - \beta a_0}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

$$\mu_2 = -\frac{\xi_2}{\xi} = \frac{\delta a_0 - \gamma b_0}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Отсюда следует, что

$$a_0 - \alpha\mu_2 - \gamma\mu_1 = \frac{\alpha\delta a_0 - \beta\gamma a_0 - \alpha\delta a_0 + \alpha\gamma b_0 - \alpha\gamma b_0 + \beta\gamma a_0}{\alpha\delta - \beta\gamma} = 0,$$

$$b_0 - \beta\mu_2 - \delta\mu_1 = \frac{\alpha\delta b_0 - \beta\gamma b_0 - \beta\delta a_0 + \beta\gamma b_0 - \alpha\delta b_0 + \beta\delta a_0}{\alpha\delta - \beta\gamma} = 0.$$

Используя эти равенства, приходим к представлениям

$$T_1 = \alpha\mu_2 R + \gamma\mu_1 R^{-\top}, \qquad T_2 = \beta\mu_2 R + \delta\mu_1 R^{-\top}.$$

Эти формулы соответствуют нормальной ганкелевой матрице, являющейся линейной комбинацией (с комплексными коэффициентами) некоторой невырожденной вещественной ганкелевой матрицы H_1 верхнетреугольного вида и матрицы H_1^{-1}. Такая матрица принадлежит классу *НГМ_4*.

3.2.3 Полноранговый случай

Пусть теперь матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ненулевые и rank $\mathcal{F} > 1$. Так как $\mathcal{F}$ — матрица размера $(n-1)\times 2$, то rank $\mathcal{F} = 2$. Поэтому в равенствах (3.16) найдется ненулевой минор $\triangle_{km}^{\mathcal{F}}$, а значит, и ненулевой минор $\triangle_{km}^{\mathcal{G}}$. Тем самым rank $\mathcal{G} = 2$.

Применяя лемму 1.2.1, можем написать

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}W.$$

Представим матрицу W в виде

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен единице:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{3.30}$$

Используя в соотношении, связывающем матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, представления (3.13) и (3.15), имеем

$$\begin{aligned} a_{-j} &= \alpha\, a_{n-j} + \gamma\, b_{n-j}, \\ b_{-j} &= \beta\, a_{n-j} + \delta\, b_{n-j}, \end{aligned} \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.31}$$

Поскольку $a_j = \Re\, t_j$, $b_j = \Im\, t_j$, $j = -(n-1), \ldots, n-1$, справедливы соотношения

$$a_j = \frac{t_j + \bar{t}_j}{2}, \qquad b_j = \frac{t_j - \bar{t}_j}{2i}. \tag{3.32}$$

Их подстановка в (3.31) позволяет записать эти формулы через элементы матрицы T:

$$t_{-j} = a_{-j} + ib_{-j} =$$

$$= \alpha\frac{t_{n-j} + \bar{t}_{n-j}}{2} + \gamma\frac{t_{n-j} - \bar{t}_{n-j}}{2i} +$$

$$+i\left(\beta\frac{t_{n-j}+\overline{t}_{n-j}}{2}+\delta\frac{t_{n-j}-\overline{t}_{n-j}}{2i}\right)=$$

$$=\left(\frac{\alpha+\delta}{2}+i\frac{\beta-\gamma}{2}\right)t_{n-j}+\left(\frac{\alpha-\delta}{2}+i\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\overline{t}_{n-j}.$$

Вводя комплексные числа

$$\varphi=\frac{\alpha+\delta}{2}+i\frac{\beta-\gamma}{2},\qquad \psi=\frac{\alpha-\delta}{2}+i\frac{\beta+\gamma}{2}, \tag{3.33}$$

можем переписать эти равенства в виде

$$t_{-j}=\varphi t_{n-j}+\psi\overline{t}_{n-j},\qquad j=1,2,\ldots,n-1.$$

Выразим условие (3.30) через числа φ и ψ. Из (3.33) выводим

$$\varphi+\psi=\alpha+i\beta,\qquad \varphi-\psi=\delta-i\gamma.$$

Перемножая $\varphi+\psi$ и $\overline{\varphi-\psi}$, получаем

$$(\varphi+\psi)(\overline{\varphi-\psi})=\alpha\delta-\beta\gamma+i(\alpha\gamma+\beta\delta).$$

Теперь условию (3.30) можно придать вид

$$\Re\ \left[(\varphi+\psi)\left(\overline{\varphi}-\overline{\psi}\right)\right]=1. \tag{3.34}$$

Раскрывая здесь скобки, имеем

$$\Re\ \left[|\varphi|^2-\varphi\overline{\psi}+\psi\overline{\varphi}-|\psi|^2\right]=1.$$

Поскольку разность $\psi\overline{\varphi}-\varphi\overline{\psi}$ есть чисто мнимое число, окончательным видом условия (3.30) будет

$$|\varphi|^2-|\psi|^2=1. \tag{3.35}$$

Таким образом, рассматриваемый случай нормальной ганкелевой задачи сводится к поиску матриц T, удовлетворяющих соотношению (3.6), на более узком множестве $\mathcal{C}(\varphi,\psi)$ двухпараметрических циркулянтов (см. (1.6)), подчиняющихся условию (3.35).

Рассмотрим теперь влияние V-преобразований 1-го типа, определенных в (1.7)—(1.9), на множество $\mathcal{C}(\varphi,\psi)$.

Лемма 3.2.3. *Пусть $\mathcal{C}(\varphi,\psi)$ — множество (φ,ψ)-циркулянтов, характеризуемое матрицей W. Тогда V-преобразование*

1-го типа этого множества есть множество $\mathcal{C}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})$-циркулянтов, характеризуемое матрицей

$$\widetilde{W} = V^{-1}WV.$$

Если матрица $T \in \mathcal{C}(\varphi,\psi)$ порождает нормальную ганкелеву матрицу $H = T\mathcal{P}_n$, то это же верно для матрицы $\widetilde{T} \in \mathcal{C}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})$, полученной из T посредством вещественного V-преобразования 1-го типа.

Доказательство леммы 3.2.3. Обозначим через $\widetilde{a}_j$, $\widetilde{a}_{-j}$, $\widetilde{b}_j$, $\widetilde{b}_{-j}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\widetilde{\mathcal{G}}$ величины, соответствующие величинам a_j, a_{-j}, b_j, b_{-j}, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, связанным с матрицами T_1 и T_2. Из определения (1.9) выводим

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}V$$

и

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}V.$$

Отсюда

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}V = \mathcal{F}WV = \widetilde{\mathcal{F}}V^{-1}WV = \widetilde{\mathcal{F}}\widetilde{W}.$$

Итак, $\widetilde{T} \in \mathcal{C}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})$, где $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})$ — пара, определяемая матрицей $\widetilde{W}$. Обратно, всякая матрица $\widetilde{T} = \widetilde{T}_1 + i\widetilde{T}_2 \in \mathcal{C}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})$ может быть получена V-преобразованием 1-го типа матрицы $T = T_1 + iT_2 \in \mathcal{C}(\varphi,\psi)$, где

$$T_1 = u_{11}\widetilde{T}_1 + u_{21}\widetilde{T}_2,$$

$$T_2 = u_{12}\widetilde{T}_1 + u_{22}\widetilde{T}_2$$

и

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = V^{-1}.$$

Пусть матрица $T = T_1 + iT_2 \in \mathcal{C}(\varphi,\psi)$ удовлетворяет условию (3.8). Тогда

$$\widetilde{T}_1\widetilde{T}_2^\top = (v_{11}T_1 + v_{21}T_2)\,(v_{12}T_1 + v_{22}T_2)^\top =$$
$$= v_{11}v_{12}T_1T_1^\top + v_{21}v_{22}T_2T_2^\top + v_{11}v_{22}T_1T_2^\top + v_{12}v_{21}T_2T_1^\top$$

и

$$\widetilde{T}_2\widetilde{T}_1^\top = v_{11}v_{12}T_1T_1^\top + v_{21}v_{22}T_2T_2^\top + v_{11}v_{22}T_2T_1^\top + v_{12}v_{21}T_1T_2^\top,$$

откуда

$$\widetilde{T}_1\widetilde{T}_2^\top - \widetilde{T}_2\widetilde{T}_1^\top = \det V \cdot \left(T_1T_2^\top - T_2T_1^\top\right) = 0.$$

■

Доказанная лемма позволяет свести анализ ганкелевой задачи к исследованию четырех различных случаев, определяемых жордановой формой матрицы W:

а) Собственные значения матрицы W образуют комплексно сопряженную пару.

б) Собственные значения вещественны и различны.

в) Собственные значения совпадают и матрица W диагонализуема.

г) Собственные значения совпадают и жордановой формой матрицы W является жорданова клетка 2-го порядка.

Последовательно проанализируем эти ситуации.

а) Собственные значения матрицы W образуют комплексно сопряженную пару.

Рассмотрим множество $C(\varphi, \psi)$, характеризуемое матрицей W, собственные значения которой комплексно сопряжены:

$$\lambda_1 = \xi + i\mu, \qquad \lambda_2 = \xi - i\mu, \qquad \mu \neq 0.$$

Поскольку $\lambda_1\lambda_2 = |\lambda_1|^2 = \det W = 1$, то

$$\xi^2 + \mu^2 = 1.$$

Составим вещественную 2×2-матрицу

$$Z = \begin{pmatrix} \xi & \mu \\ -\mu & \xi \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет те же собственные значения λ_1 и λ_2. Поэтому найдется вещественная невырожденная 2×2-матрица V такая,

что
$$Z = V^{-1}WV.$$

Согласно лемме 3.2.3, V-преобразование 1-го типа множества $\mathcal{C}(\varphi,\psi)$ есть множество $\mathcal{C}(\widetilde{\varphi},0)$, характеризуемое матрицей Z. Для него
$$\widetilde{\varphi} = \xi + i\mu.$$
Поэтому в данном случае нужно исследовать вопрос, какие ганкелевы $\widetilde{\varphi}$-циркулянты ($|\widetilde{\varphi}| = 1$) являются нормальными матрицами или же какие соответствующие им теплицевы $\widetilde{\varphi}$-циркулянты удовлетворяют условию (3.6). Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Лемма 3.2.4. *Ганкелев φ-циркулянт H, где $|\varphi| = 1$ и $\varphi \neq \pm 1$, тогда и только тогда является нормальной матрицей, когда все собственные значения соответствующего φ-циркулянта T имеют один и тот же (ненулевой) модуль, т.е. когда T есть скалярное кратное унитарной матрицы.*

Доказательство леммы 3.2.4. Покажем сначала, что всякий φ-циркулянт T может быть представлен как произведение двух φ-циркулянтов
$$T = \breve{T}_1\breve{T}_2, \tag{3.36}$$
где $\breve{T}_1$ имеет вещественные (и даже неотрицательные) собственные значения, а $\breve{T}_2$ является унитарной матрицей. Представим числа d_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, из формулы (1.49) в показательной форме $d_k = \rho_k e^{i\nu_k}$ и определим диагональные матрицы
$$\breve{D}_1 = \operatorname{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n),$$
$$\breve{D}_2 = \operatorname{diag}\left(e^{i\nu_1}, e^{i\nu_2}, \ldots, e^{i\nu_n}\right).$$
Тогда
$$T = G_\varphi F_n^* D F_n G_\varphi^* =$$
$$= G_\varphi F_n^* \breve{D}_1 \breve{D}_2 F_n G_\varphi^* = G_\varphi F_n^* \breve{D}_1 F_n F_n^* \breve{D}_2 F_n G_\varphi^* =$$
$$= G_\varphi F_n^* \breve{D}_1 F_n G_\varphi^* G_\varphi F_n^* \breve{D}_2 F_n G_\varphi^* = \breve{T}_1 \breve{T}_2,$$

где

$$\breve{T}_1 = G_\varphi F_n^* \breve{D}_1 F_n G_\varphi^* \tag{3.37}$$

и

$$\breve{T}_2 = G_\varphi F_n^* \breve{D}_2 F_n G_\varphi^*.$$

Из определения этих матриц очевидно, что $\breve{T}_1$ имеет вещественные собственные значения, а $\breve{T}_2$ — унитарный φ-циркулянт.

Подставив представление (3.36) в (3.6), получим

$$\breve{T}_1 \breve{T}_1^* = \overline{\breve{T}_1 \breve{T}_1^*}. \tag{3.38}$$

Если φ-циркулянт T имеет одинаковые модули собственных значений, то матрица $\breve{T}_1$ скалярная и, значит, (3.38) выполняется автоматически.

Пусть теперь φ-циркулянт T имеет хотя бы два различных по модулю собственных значения. В этом случае $\breve{D}_1$ — диагональная, вещественная и нескалярная матрица. Подставим выражение (3.37) в (3.38):

$$G_\varphi F_n^* \breve{D}_1 F_n G_\varphi^* G_\varphi F_n^* \breve{D}_1 F_n G_\varphi^* = G_\varphi^* F_n \breve{D}_1 F_n^* G_\varphi G_\varphi^* F_n \breve{D}_1 F_n^* G_\varphi.$$

После упрощения имеем

$$G_\varphi F_n^* \breve{D}_1^2 F_n G_\varphi^* = G_\varphi^* F_n \breve{D}_1^2 F_n^* G_\varphi.$$

Умножим это равенство справа и слева на G_φ^*:

$$F_n^* \breve{D}_1^2 F_n \left(G_\varphi^*\right)^2 = \left(G_\varphi^*\right)^2 F_n \breve{D}_1^2 F_n^*.$$

А теперь умножим справа и слева на F_n:

$$\breve{D}_1^2 F_n \left(G_\varphi^*\right)^2 F_n = F_n \left(G_\varphi^*\right)^2 F_n \breve{D}_1^2. \tag{3.39}$$

Чтобы вывести условия для $\breve{D}_1$, определим, в каких позициях матрица $F_n \left(G_\varphi^*\right)^2 F_n$ имеет ненулевые элементы:

$$\left\{F_n \left(G_\varphi^*\right)^2 F_n\right\}_{km} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^{(k-1)(r-1)} \psi^{-2(r-1)} \varepsilon^{(r-1)(m-1)} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\psi^{-2} \varepsilon^{(k-1)} \varepsilon^{(m-1)}\right)^{(r-1)} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\psi^{-2} \varepsilon^{(k+m-2)}\right)^{(r-1)}.$$

Пусть вначале $\psi^{-2}\varepsilon^{(k+m-2)} \neq 1$ для всех $k, m = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\left\{F_n \left(G_\varphi^*\right)^2 F_n\right\}_{km} = \frac{1}{n}\frac{\left(\psi^{-2}\varepsilon^{(k+m-2)}\right)^n - 1}{\psi^{-2}\varepsilon^{(k+m-2)} - 1} = \frac{1}{n}\frac{\varphi^{-2} - 1}{\psi^{-2}\varepsilon^{(k+m-2)} - 1}.$$

Напомним, что $\varphi \neq \pm 1$; поэтому $\varphi^{-2} \neq 1$. Таким образом, все элементы матрицы $\left\{F_n \left(G_\varphi^*\right)^2 F_n\right\}_{km}$ отличны от нуля. Но тогда равенство (3.39) возможно лишь для скалярной матрицы $\breve{D}_1$, что противоречит сделанному выше предположению.

Пусть теперь для некоторых индексов k_0 и m_0 выполняется соотношение

$$\varepsilon^{(k_0+m_0-2)} = \psi^2.$$

Возводя обе части в степень n, получаем

$$\varphi^2 = 1$$

вопреки условию леммы.

Итак, при наличии у T различных по модулю собственных значений нормальность матрицы H невозможна. ■

В силу леммы 3.2.4 подходящими матрицами из множества $\mathcal{C}\left(\widetilde{\varphi}, 0\right)$ являются скалярные кратные унитарных $\widetilde{\varphi}$-циркулянтов. Поэтому решениями нормальной ганкелевой задачи в данном случае являются ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением V-преобразований 1-го типа к скалярным кратным унитарных $\widetilde{\varphi}$-циркулянтов. Это матрицы класса *НГМ_5*.

б) Собственные значения вещественны и различны.

Исследуем множество $\mathcal{C}(\varphi, \psi)$, характеризуемое матрицей W, собственные значения которой вещественны и различны. Поскольку $\lambda_1\lambda_2 = \det W = 1$, то

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1} \qquad \text{и} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\lambda_1 \neq \pm 1$.

Матрица W может быть диагонализована вещественным подобием, т.е. найдется вещественная невырожденная 2×2-матрица V такая, что

$$V^{-1}WV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix} = \Lambda.$$

Согласно лемме 3.2.3, V-преобразование 1-го типа множества $\mathcal{C}(\varphi, \psi)$ есть множество $\mathcal{C}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$, характеризуемое диагональной матрицей Λ. Для него

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), \qquad \widetilde{\psi} = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \qquad \text{где} \qquad \xi = \lambda_1.$$

Соотношения (3.31) для этого множества имеют вид

$$a_{-j} = \xi a_{n-j}, \qquad b_{-j} = \xi^{-1} b_{n-j}$$

и могут быть объединены в условие

$$t_{-j} = \xi a_{n-j} \ + \ i\frac{1}{\xi} b_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

т.е. T является разделяющимся циркулянтом.

В этом случае матрица T представима в виде

$$T = T_1 + iT_2,$$

где T_1 и T_2 — вещественные ξ- и $\frac{1}{\xi}$-циркулянты. В отличие от произвольного (φ, ψ)-циркулянта поддиагональные элементы матрицы T обладают тем свойством, что их вещественная часть зависит только от вещественной части соответствующего наддиагонального элемента и аналогичное утверждение верно для мнимых частей.

Пусть ν — корень n-й степени из ξ. Тогда матрицы T_1 и T_2 можно записать как

$$T_1 = G_\xi C_1 G_\xi^{-1} \tag{3.40}$$

и

$$T_2 = G_\xi^{-1} C_2 G_\xi, \tag{3.41}$$

где C_1 и C_2 — циркулянты и в лемме 1.2.10 нужно положить $\psi = \nu$. Заметим, что матрицы C_1 и C_2 не обязаны быть вещественными (вещественность теряется при $\xi < 0$ и четном n).

Условие нормальности ганкелевой матрицы H эквивалентно симметричности матрицы $T_1T_2^\top$. Имеем

$$T_1T_2^\top = G_\xi C_1 G_\xi^{-1}\left(G_\xi^{-1} C_2 G_\xi\right)^\top = G_\xi C_1 G_\xi^{-1} G_\xi C_2^\top G_\xi^{-1} =$$

$$= G_\xi C_1 C_2^\top G_\xi^{-1} = G_\xi C G_\xi^{-1},$$

где матрица

$$C = C_1 C_2^\top \tag{3.42}$$

снова является циркулянтом.

Лемма 3.2.5. *Матрица $T_1T_2^\top$ симметрична тогда и только тогда, когда матрица C в (3.42) является скалярной.*

Доказательство леммы 3.2.5. Достаточность очевидна, так как из скалярности C следует скалярность и, следовательно, симметрия матрицы $T_1T_2^\top$.

Переходя к доказательству необходимости, предположим, что матрица $T_1T_2^\top$ симметрична:

$$\left\{T_1T_2^\top\right\}_{km} = \left\{T_1T_2^\top\right\}_{mk}, \qquad \forall\, k, m.$$

Элемент матрицы $T_1T_2^\top$ в позиции (k, m) равен

$$\left\{T_1T_2^\top\right\}_{km} = \nu^{k-m}\{C\}_{km}.$$

Условие симметричности этой матрицы имеет вид

$$\nu^{k-m}\{C\}_{km} = \nu^{m-k}\{C\}_{mk}.$$

Поскольку $\xi \neq 0$, то и $\nu \neq 0$; следовательно,

$$\{C\}_{km} = \nu^{2(m-k)}\{C\}_{mk}. \tag{3.43}$$

Полагая $k = j+1$, $m = 1$ и используя циркулянтность матрицы C, имеем

$$\{C\}_{km} = \{C\}_{j+1,1} = c_{-j} = c_{n-j},$$

$$\{C\}_{mk} = \{C\}_{1,j+1} = c_j.$$

Подстановка в (3.43) дает условие
$$c_{n-j} = \nu^{-2j} c_j. \tag{3.44}$$
При $k = n - j + 1$, $m = 1$ находим
$$\{C\}_{km} = \{C\}_{n-j+1,1} = c_{-(n-j)} = c_j,$$
$$\{C\}_{km} = \{C\}_{1,n-j+1} = c_{n-j}.$$
Подстановка в (3.43) приводит к равенству
$$c_j = \nu^{-2(n-j)} c_{n-j}. \tag{3.45}$$
Из (3.44) и (3.45) следует соотношение
$$c_j = \nu^{-2(n-j)} c_{n-j} = \nu^{-2(n-j)} \nu^{-2j} c_j = \nu^{-2n} c_j,$$
откуда получаем
$$\left(1 - \nu^{-2n}\right) c_j = 0.$$
Поскольку $\nu^n = \xi$, то $\nu^{-2n} = \frac{1}{\xi^2}$. Тем самым
$$\left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) c_j = 0.$$
В силу неравенства $|\xi| \neq 1$ имеем $c_j = 0$. Так как этот вывод верен для любого j, то C — диагональная матрица. Будучи циркулянтом, C должна быть скалярной матрицей. ■

Итак, $C_1 C_2^\top = \kappa I_n$. Исследование этого соотношения разобьем на два подслучая в зависимости от равенства или неравенства нулю коэффициента κ.

1) $\kappa \neq 0$. Пусть $\breve{C}$ — произвольный невырожденный циркулянт, для которого матрица $G_\xi \breve{C} G_\xi^{-1}$ вещественна. Условия такой вещественности будут сформулированы позже.

Положим $C_1 = \mu_1 \breve{C}$, $C_2 = \mu_2 \breve{C}^{-\top}$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}$; тогда $C_1 C_2^\top = \mu_1 \mu_2 I_n$. Поэтому матрица
$$T = \mu_1 G_\xi \breve{C} G_\xi^{-1} \; + \; i\mu_2 G_\xi^{-1} \breve{C}^{-\top} G_\xi, \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R},$$
является разделяющимся двухпараметрическим циркулянтом, соответствующим нормальной ганкелевой матрице.

2) $\kappa = 0$. В этом случае имеем равенство

$$C_1 C_2^\top = 0. \tag{3.46}$$

Так как при транспонировании циркулянт остается циркулянтом, приходим к задаче описания пар циркулянтов, произведение которых равно нулю. Положим $C_3 = C_2^\top$ и представим матрицы $C_1 = F_n^* D_1 F_n$ и $C_3 = F_n^* D_2 F_n$ в соответствии с формулой (1.47). Теперь соотношение (3.46) принимает вид

$$F_n^* D_1 F_n F_n^* D_2 F_n = 0,$$

или

$$D_1 D_2 = 0.$$

Это означает, что для любого j имеет место хотя бы одно из равенств $\{D_1\}_{jj} = 0$ и $\{D_2\}_{jj} = 0$. Матрицы D_1 и D_2 выбираются так, чтобы $T_1 = G_\xi C_1 G_\xi^{-1}$ и $T_2 = G_\xi^{-1} C_2 G_\xi = G_\xi^{-1} C_3^\top G_\xi = \left(G_\xi C_3 G_\xi^{-1}\right)^\top$ были вещественными матрицами. Построив эти матрицы, получим искомый двухпараметрический циркулянт.

Случаи а) и б) дают теплицевы матрицы, которые после применения к ним V-преобразований 1-го типа будут соответствовать нормальным ганкелевым матрицам класса *НГМ_6*.

Теперь выясним, при каких условиях на циркулянт C матрица $G_\xi C G_\xi^{-1}$ будет вещественной. Если $\xi > 0$ или $\xi < 0$ и число n нечетное, то матрицы G_ξ и G_ξ^{-1} вещественны и достаточно потребовать вещественности циркулянта C. Пусть $\xi < 0$ и число n четное. В этом случае матрицы G_ξ и G_ξ^{-1} не являются вещественными. Пусть $C = F_n^* D F_n$. Вещественность матрицы $G_\xi C G_\xi^{-1}$ означает, что

$$G_\xi F_n^* D F_n G_\xi^{-1} = \overline{G}_\xi F_n \overline{D} F_n^* \overline{G}_\xi^{-1}.$$

Умножая это равенство слева на $F_n G_\xi^{-1}$ и справа на $\overline{G}_\xi F_n$, получаем

$$D\left(F_n G_\xi^{-1} \overline{G}_\xi F_n\right) = \left(F_n G_\xi^{-1} \overline{G}_\xi F_n\right)\overline{D}. \tag{3.47}$$

Согласно лемме 1.2.20, матричное равенство (3.47) может быть заменено соотношениями для диагональных элементов матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$:

$$d_1 = \overline{d}_2, \qquad d_k = \overline{d}_{n+3-k}, \qquad k = 3, 4, \ldots, \lceil n/2 \rceil + 1.$$

в) Собственные значения матрицы W совпадают и матрица W диагонализуема.

Пусть множеству $\mathcal{C}(\varphi, \psi)$ соответствует диагонализуемая матрица W, собственные значения которой совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Поскольку $\lambda^2 = \det W = 1$, то

$$\lambda = 1 \qquad \text{или} \qquad \lambda = -1.$$

Рассмотрим эти два случая. Первому соответствует матрица

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Множество $\mathcal{C}(\varphi, \psi)$ для такой матрицы W — это совокупность обычных циркулянтов. Подходящие матрицы описываются следующим утверждением.

Лемма 3.2.6. *Пусть матрица T — циркулянт со спектральным разложением (1.47). Тогда T соответствует нормальной ганкелевой матрице в том и только том случае, если*

$$|d_m| = |d_{n+2-m}|, \qquad m = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{3.48}$$

Доказательство леммы 3.2.6. Для нормальности ганкелевой матрицы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.6). Подстановка (1.47) в (3.6) дает

$$F_n^* D F_n F_n^* \overline{D} F_n = F_n \overline{D} F_n^* F_n D F_n^*.$$

Умножая это равенство слева и справа на F_n, приходим к соотношению

$$D\overline{D} F_n^2 = F_n^2 D\overline{D}.$$

Ввиду леммы 1.2.17 имеем

$$D\overline{D} Q_1 = Q_1 D\overline{D}. \tag{3.49}$$

Это условие равносильно соотношениям (3.48). ■

Мы получили описание теплицевых матриц, для которых соответствующие ганкелевы матрицы нормальны и принадлежат классу *НГМ_7*.

Пусть теперь

$$W = -I_2.$$

В этом случае $\mathcal{C}(\varphi, \psi)$ есть совокупность косых циркулянтов. Для описания подходящих матриц докажем следующее утверждение.

Лемма 3.2.7. *Пусть матрица T — косой циркулянт со спектральным разложением (1.50). В формуле (1.31) нужно положить $\varphi = -1$ и $\psi = e^{i\frac{\pi}{n}}$. Тогда T соответствует нормальной ганкелевой матрице в том и только том случае, если*

$$|d_1| = |d_2|, \qquad |d_m| = |d_{n+3-m}|, \qquad m = 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \quad (3.50)$$

Доказательство леммы 3.2.7. Подстановка (1.50) в (3.6) дает

$$G_{-1}F_n^* D F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* \overline{D} F_n G_{-1}^* = G_{-1}^* F_n \overline{D} F_n^* G_{-1} G_{-1}^* F_n D F_n^* G_{-1}.$$

Умножение слева на $F_n G_{-1}^*$ и справа на $G_{-1}^* F_n$ приводит к равенству

$$D\overline{D} F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n = F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n D\overline{D}.$$

Используя лемму 1.2.20 при $\xi = -1$ и учитывая, что $G_{-1}^{-1} = G_{-1}^*$, имеем

$$F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n = Q_2 = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_{n-2}.$$

Отсюда сразу следуют соотношения (3.50). ■

Мы получили описание теплицевых матриц, которые соответствуют нормальным ганкелевым матрицам из класса *НГМ_8*.

В заключение данного раздела обратим внимание на следующее интересное наблюдение. Пусть T — косой циркулянт со спектральным разложением

$$T = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* \quad (3.51)$$

и диагональной матрицей $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$. Будем считать, что $n = 2l + 1$. Тогда для T можно выписать еще одно представление

$$T = ZF_n^* D_2 F_n Z, \tag{3.52}$$

где D_2 и Z — диагональные матрицы $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)},\ d_2^{(2)},\ \ldots,\ d_n^{(2)}\right)$, $Z = \operatorname{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots, -1, 1)$. Разложение (3.52) является аналогом представлений (3.40) и (3.41) с вещественной матрицей G_ξ, используемых при исследовании разделяющихся циркулянтов. Ясно, что матрица Z вещественна и $Z^2 = I_n$.

Если подставить представление (3.52) в условие (3.6), то получим соотношение

$$ZF_n^* D_2 F_n Z Z F_n^* \overline{D}_2 F_n Z = Z F_n \overline{D}_2 F_n^* Z Z F_n D_2 F_n^* Z,$$

эквивалентное равенству

$$ZF_n^* D_2 \overline{D}_2 F_n Z = Z F_n \overline{D}_2 D_2 F_n^* Z.$$

Умножая его слева на $F_n Z$ и справа на $Z F_n$ и используя лемму 1.2.17, приходим к условию

$$D_2 \overline{D}_2 Q_1 = Q_1 D_2 \overline{D}_2.$$

Это равенство можно заменить соотношениями

$$\left|d_m^{(2)}\right| = \left|d_{n+2-m}^{(2)}\right|, \qquad m = 2, 3, \ldots, l+1. \tag{3.53}$$

На первый взгляд может показаться, что соотношения (3.53) не согласуются с (3.50). Покажем, что это — кажущееся противоречие. Дело в том, что (3.51) и (3.52) суть различные спектральные разложения одного и того же косого циркулянта T. Умножая равенство

$$G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* = Z F_n^* D_2 F_n Z$$

слева на $F_n Z$, а справа на $Z F_n^*$, приходим к выражению матрицы D_2 в виде

$$\begin{aligned} D_2 &= \left(F_n Z G_{-1} F_n^*\right) D_1 \left(F_n G_{-1}^* Z F_n^*\right) = \\ &= \left(F_n Z G_{-1} F_n^*\right) D_1 \left(F_n Z G_{-1} F_n^*\right)^*. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Отсюда

$$D_2 = \overline{\left(F_n^* Z G_{-1}^* F_n\right)} D_1 \left(F_n^* Z G_{-1}^* F_n\right)^\top. \tag{3.55}$$

Формула (3.54) показывает, что матрицы D_1 и D_2 унитарно подобны; поэтому D_2 получается из D_1 некоторой перестановкой диагональных элементов.

В рассматриваемой ситуации $ZG^*_{-1} = G_1$, при этом

$$\left\{ZG^*_{-1}\right\}_{kk} = (-1)^{k-1} e^{-i\frac{\pi}{n}(k-1)} = \left(e^{i\pi} e^{-i\frac{\pi}{n}}\right)^{k-1} =$$
$$= \left(e^{i\frac{\pi(n-1)}{n}}\right)^{k-1} = \{n = 2l+1\} = \left(e^{i\frac{2\pi l}{n}}\right)^{k-1}.$$

В результате получаем, что на диагонали матрицы ZG^*_{-1} стоят элементы $(l+1)$-го столбца матрицы Фурье. Отсюда следует, что матрица $F_n^* ZG^*_{-1} F_n$ является циркулянтом вида

$$C = \begin{pmatrix} O_{l,l+1} & I_l \\ I_{l+1} & O_{l+1,l} \end{pmatrix}.$$

Переписав (3.55) как

$$D_2 = CD_1C^\top,$$

приходим к соотношениям

$$d_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \{C\}_{jk} d_k^{(1)} \{C\}_{jk} = \begin{cases} d_{j+l+1}^{(1)}, & j \le l, \\ d_{j-l}^{(1)}, & j \ge l+1. \end{cases} \tag{3.56}$$

Теперь можно записать условия (3.53) через диагональные элементы матрицы D_1. При $m = l+1$ имеем $n+2-m = 2l+$ $+3-m = l+2$ и

$$\left|d_{l+1}^{(2)}\right| = \left|d_{l+2}^{(2)}\right|,$$

что эквивалентно условию

$$\left|d_1^{(1)}\right| = \left|d_2^{(1)}\right|. \tag{3.57}$$

Для $m = 2, \ldots, l$ получаем соотношение

$$\left|d_{m+l+1}^{(1)}\right| = \left|d_{n+2-m-l}^{(1)}\right|,$$

которое можно записать как

$$\left|d_{m+l+1}^{(1)}\right| = \left|d_{n+3-(m+l+1)}^{(1)}\right|, \qquad m = 2, 3, \ldots, l.$$

Замена $k = n + 3 - (m + l + 1) = l + 3 - m$ дает равенства

$$\left|d_k^{(1)}\right| = \left|d_{n+3-k}^{(1)}\right|, \qquad k = 3, 4, \ldots, l + 1. \tag{3.58}$$

Соотношения (3.57), (3.58) и есть условия (3.50).

г) Собственные значения совпадают и жордановой формой матрицы W является клетка 2-го порядка.

В заключение проанализируем множество $\mathcal{C}(\varphi, \psi)$, характеризуемое недиагонализуемой матрицей W, собственные значения которой совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Как и в п. в), заключаем, что

$$\lambda = 1 \qquad \text{или} \qquad \lambda = -1.$$

Пусть V — вещественная невырожденная 2×2-матрица, для которой

$$V^{-1}WV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_1$$

или

$$V^{-1}WV = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J_2.$$

Согласно лемме 3.2.3, применение V-преобразования 1-го типа ко множеству $\mathcal{C}(\varphi, \psi)$ приводит к множеству $\mathcal{C}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$, характеризуемому матрицей J_1 или матрицей J_2. Остается определить нормальные ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы находятся в описываемых в данном разделе множествах $\mathcal{C}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$.

Сначала исследуем множество $\mathcal{C}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$, характеризуемое матрицей J_1. Начнем со вспомогательного утверждения.

Лемма 3.2.8. *Пусть C — ненулевой вещественный циркулянт с первым столбцом $c = (c_0, c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_1)^\top$ и L — строго нижнетреугольная теплицева матрица, поддиагональные элементы которой совпадают с поддиагональными элементами C. Матрица $CL^\top - LC^\top$ является циркулянтом тогда и только тогда, когда C есть скалярное кратное ортогонального циркулянта.*

Доказательство леммы 3.2.8. Согласно лемме 1.2.3, матрица $CL^\top - LC^\top$ является циркулянтом тогда и только тогда, когда

$$Q_c\left(CL^\top - LC^\top\right) = \left(CL^\top - LC^\top\right)Q_c.$$

Поскольку C и $C^\top$ — циркулянты, имеем

$$C\left(Q_cL^\top - L^\top Q_c\right) = \left(Q_cL - LQ_c\right)C^\top. \qquad (3.59)$$

Сначала для наглядности выпишем общий вид матриц $Q_cL^\top$ и $L^\top Q_c$:

$$Q_cL^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_{n-1} & \dots & c_3 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$L^\top Q_c = \begin{pmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \dots & c_1 & 0 \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{n-1} & \dots & c_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим элемент $\left\{Q_cL^\top - L^\top Q_c\right\}_{km}$, учитывая теплицеву структуру матрицы $L^\top$:

$$\left\{Q_cL^\top - L^\top Q_c\right\}_{km} =$$

$$= \begin{cases} \left\{L^\top\right\}_{k-1,m} - \left\{L^\top\right\}_{k,m+1} = 0, & k \ne 1,\ m \ne n, \\ \left\{L^\top\right\}_{n,m} - \left\{L^\top\right\}_{1,m+1} = -c_{n-m}, & k = 1,\ m \ne n, \\ \left\{L^\top\right\}_{k-1,n} - \left\{L^\top\right\}_{k,1} = c_{k-1}, & k \ne 1,\ m = n, \\ \left\{L^\top\right\}_{n,n} - \left\{L^\top\right\}_{1,1} = 0, & k = 1,\ m = n. \end{cases}$$

Положим $\hat{c} = (0, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1)^\top$. Можно проверить, что

$$Q_cL^\top - L^\top Q_c = \left(Q_1\hat{c}e_1^\top - e_1\left(Q_1\hat{c}\right)^\top\right)\mathcal{P}_n, \qquad (3.60)$$

где матрица Q_1 определена формулой (1.24).

Теперь выпишем общий вид матриц Q_cL и LQ_c:

$$Q_cL = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_{n-2} & c_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$LQ_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{n-1} \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{n-3} \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & \dots & 0 & 0 & c_{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n-1} & 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим элемент $\{Q_cL - LQ_c\}_{km}$, учитывая теплицево строение матрицы L:

$$\{Q_cL - LQ_c\}_{km} =$$

$$= \begin{cases} \{L\}_{k-1,m} - \{L\}_{k,m+1} = 0, & k \neq 1,\ m \neq n, \\ \{L\}_{n,m} - \{L\}_{1,m+1} = c_m, & k = 1,\ m \neq n, \\ \{L\}_{k-1,n} - \{L\}_{k,1} = -c_{n-k+1}, & k \neq 1,\ m = n, \\ \{L\}_{n,n} - \{L\}_{1,1} = 0, & k = 1,\ m = n. \end{cases}$$

Отсюда выводим, что

$$Q_cL - LQ_c = \left(e_1\hat{c}^\top - \hat{c}e_1^\top\right)\mathcal{P}_n. \tag{3.61}$$

Подставляя (3.60) и (3.61) в (3.59), имеем

$$C\left(Q_1\hat{c}e_1^\top - e_1\left(Q_1\hat{c}\right)^\top\right)\mathcal{P}_n = \left(e_1\hat{c}^\top - \hat{c}e_1^\top\right)\mathcal{P}_nC^\top.$$

Умножая это равенство справа на $\mathcal{P}_n$, находим

$$C\left(Q_1\hat{c}e_1^\top - e_1\left(Q_1\hat{c}\right)^\top\right) = \left(e_1\hat{c}^\top - \hat{c}e_1^\top\right)C.$$

Раскроем здесь скобки:

$$CQ_1\hat{c}e_1^\top - (c_0e_1 + \hat{c})(Q_1\hat{c})^\top = e_1\left(C^\top\hat{c}\right)^\top - \hat{c}\left(C^\top e_1\right)^\top.$$

После несложных преобразований получаем

$$CQ_1\hat{c}e_1^\top - c_0e_1(Q_1\hat{c})^\top - \hat{c}(Q_1\hat{c})^\top = e_1\left(C^\top\hat{c}\right)^\top - c_0\hat{c}e_1^\top - \hat{c}(Q_1\hat{c})^\top,$$

или

$$(CQ_1\hat{c} + c_0\hat{c})\,e_1^\top = e_1\left(C^\top\hat{c} + c_0Q_1\hat{c}\right)^\top. \tag{3.62}$$

Учитывая соотношения $Ce_1 = c_0e_1 + \hat{c}$ и $C^\top e_1 = c_0e_1 + Q_1\hat{c}$, имеем

$$\begin{aligned}
C^\top\hat{c} + c_0Q_1\hat{c} &= C^\top Ce_1 - c_0C^\top e_1 + c_0Q_1\hat{c} = \\
&= \{\text{циркулянты } C \text{ и } C^\top \text{ коммутируют}\} = \\
&= CC^\top e_1 - c_0C^\top e_1 + c_0Q_1\hat{c} = \\
&= c_0Ce_1 + CQ_1\hat{c} - c_0^2e_1 - c_0Q_1\hat{c} + c_0Q_1\hat{c} = \\
&= c_0^2e_1 + c_0\hat{c} + CQ_1\hat{c} - c_0^2e_1 = CQ_1\hat{c} + c_0\hat{c}.
\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (3.62) эквивалентно равенству одноранговых матриц

$$(CQ_1\hat{c} + c_0\hat{c})\,e_1^\top = e_1(CQ_1\hat{c} + c_0\hat{c})^\top.$$

Отсюда следует, что

$$CQ_1\hat{c} + c_0\hat{c} = \zeta e_1, \quad \text{где} \quad \zeta = (Q_1\hat{c}, Q_1\hat{c}) = (\hat{c}, \hat{c}).$$

Так как $Q_1\hat{c} = C^\top e_1 - c_0e_1$, то $CQ_1\hat{c} = CC^\top e_1 - c_0^2e_1 - c_0\hat{c}$. В результате приходим к соотношению

$$CC^\top e_1 = \nu e_1, \quad \text{где} \quad \nu = c_0^2 + \zeta.$$

Поскольку циркулянт полностью определяется своим первым столбцом, это соотношение равносильно условию

$$CC^\top = \nu I_n. \tag{3.63}$$

Несложно проверить, что $\nu = (Ce_1, Ce_1)$; поэтому $\nu \neq 0$, так как в противном случае $C = 0$. Положим $\varkappa = \sqrt{\nu}$, тогда

$$\left(\frac{1}{\varkappa}C\right)\left(\frac{1}{\varkappa}C\right)^{\top} = I_n.$$

Следовательно, циркулянт $\widetilde{C} = \frac{1}{\varkappa}C$ является ортогональной матрицей, а матрица $C = \varkappa\widetilde{C}$ — скалярным кратным ортогонального циркулянта. ■

Теперь можно описать множество подходящих матриц среди $C(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$-циркулянтов, описываемых матрицей $W = J_1$.

Из соотношения (1.35) следует, что в представлении $T = T_1 + iT_2$ подходящей матрицы T компонента T_1 является циркулянтом C_1, а компонента T_2 — суммой некоторого циркулянта C_2 и строго нижнетреугольной теплицевой матрицы L_1, поддиагональная часть которой совпадает с поддиагональной частью циркулянта C_1. Используя эту информацию, запишем уравнение (3.8) в виде

$$C_1(C_2 + L_1)^{\top} = (C_2 + L_1)C_1^{\top},$$

или

$$C_1L_1^{\top} - L_1C_1^{\top} = C_2C_1^{\top} - C_1C_2^{\top}. \tag{3.64}$$

Матрица, стоящая в правой части, является циркулянтом, поэтому и матрица

$$C_3 = C_1L_1^{\top} - L_1C_1^{\top} \tag{3.65}$$

также должна быть циркулянтом. Согласно лемме 3.2.8, это условие эквивалентно требованию, чтобы матрица C_1 была скалярным кратным ортогонального циркулянта.

Покажем, как выбрать подходящие матрицы C_1 и C_2. Зададим C_1 как ненулевое вещественное кратное некоторого ортогонального вещественного циркулянта, определив тем самым матрицу C_3. Теперь матрица C_2 может быть получена как решение уравнения

$$C_2C_1^{\top} - C_1C_2^{\top} = C_3. \tag{3.66}$$

Представим циркулянты C_1, C_2 и C_3 их спектральными разложениями (1.47):

$$C_1 = F_n^* D_1 F_n, \qquad C_2 = F_n^* D_2 F_n, \qquad C_3 = F_n^* D_3 F_n. \quad (3.67)$$

Поскольку C_1 и C_3 известны, матрицы D_1 и D_3 определены. Остается найти диагональные элементы матрицы D_2.

Подставляя разложения (3.67) в (3.66), имеем

$$F_n^* D_2 F_n F_n D_1 F_n^* - F_n^* D_1 F_n F_n D_2 F_n^* = F_n^* D_3 F_n.$$

Умножим это уравнение слева на F_n, а справа на F_n^3 и используем соотношение $F_n^4 = I_n$:

$$D_2 F_n^2 D_1 F_n^2 - D_1 F_n^2 D_2 F_n^2 = D_3. \quad (3.68)$$

Матрицы C_1 и C_2 вещественны, т.е.

$$F_n^* D_1 F_n = F_n \overline{D}_1 F_n^*, \qquad F_n^* D_2 F_n = F_n \overline{D}_2 F_n^*.$$

Умножая эти равенства слева на F_n^3 и справа на F_n, получаем

$$F_n^2 D_1 F_n^2 = \overline{D}_1, \qquad F_n^2 D_2 F_n^2 = \overline{D}_2. \quad (3.69)$$

Подстановка этих соотношений в (3.68) дает уравнение

$$D_2 \overline{D}_1 - D_1 \overline{D}_2 = D_3. \quad (3.70)$$

Поскольку C_1 и C_2 вещественны, матрицы

$$D_1 = \operatorname{diag}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, \ldots, u_n + iv_n) \quad (3.71)$$

и

$$D_2 = \operatorname{diag}(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n) \quad (3.72)$$

в силу леммы 1.2.23 должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{array}{lll} v_1 = 0, & & \\ u_j = u_{n+2-j}, & v_j = -v_{n+2-j}, & j = 2, \ldots, n, \\ y_1 = 0, & & \\ x_j = x_{n+2-j}, & y_j = -y_{n+2-j}, & j = 2, \ldots, n. \end{array}$$

Матрица C_3 кососимметрична, а потому имеет чисто мнимый спектр:

$$D_3 = \operatorname{diag}(iz_1, iz_2, \ldots, iz_n). \quad (3.73)$$

Кроме того, должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} &z_1 = 0, \\ &z_j = -z_{n+2-j}, \qquad j = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

С учетом сказанного, матричное уравнение (3.70) сводится к скалярным уравнениям

$$u_j y_j - v_j x_j = z_j/2, \quad j = 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{3.74}$$

Каждое из уравнений (3.74) выражает одну из неизвестных величин x_j и y_j как (линейную) функцию от другой. Случай $u_j = v_j = 0$ невозможен, поскольку число $u_j + iv_j$ есть собственное значение невырожденной матрицы C_1.

Задавая произвольным образом значения свободных неизвестных в системе (3.74) и вычисляя значения прочих неизвестных, получаем подходящую диагональную матрицу D_2, а по ней — требуемый циркулянт C_2 (см. среднюю формулу в (3.67)). С помощью описанной процедуры могут быть найдены все теплицевы матрицы рассматриваемого множества, соответствующие нормальным ганкелевым матрицам. Эти последние образуют класс *НГМ_9*.

И наконец, исследуем множество $\mathcal{C}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$, характеризуемое матрицей J_2. Аналогом леммы 3.2.8 здесь будет

Лемма 3.2.9. *Пусть S — ненулевой вещественный косой циркулянт с первым столбцом $s = (s_0, -s_{n-1}, -s_{n-2}, \ldots, -s_1)^\top$, а L — строго нижнетреугольная теплицева матрица, поддиагональные элементы которой противоположны поддиагональным элементам матрицы S. Матрица $SL^\top - LS^\top$ является косым циркулянтом тогда и только тогда, когда S есть скалярное кратное ортогонального косого циркулянта.*

Доказательство леммы 3.2.9 проведем по образцу доказательства леммы 3.2.8.

Согласно лемме 1.2.5, матрица $SL^\top - LS^\top$ является косым циркулянтом тогда и только тогда, когда

$$Q_s \left(SL^\top - LS^\top \right) = \left(SL^\top - LS^\top \right) Q_s.$$

Поскольку S и $S^\top$ — косые циркулянты, имеем

$$S\left(Q_sL^\top - L^\top Q_s\right) = \left(Q_sL - LQ_s\right)S^\top. \tag{3.75}$$

Снова выпишем для наглядности общий вид матриц $Q_sL^\top$ и $L^\top Q_s$:

$$Q_sL^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & s_2 & s_1 \\ 0 & 0 & s_{n-1} & \dots & s_3 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & s_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$L^\top Q_s = \begin{pmatrix} s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \dots & s_1 & 0 \\ 0 & s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_{n-1} & \dots & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим элемент $\left\{Q_sL^\top - L^\top Q_s\right\}_{km}$, учитывая теплицево строение матрицы $L^\top$:

$$\left\{Q_sL^\top - L^\top Q_s\right\}_{km} =$$

$$= \begin{cases} \left\{L^\top\right\}_{k-1,m} - \left\{L^\top\right\}_{k,m+1} = 0, & k \neq 1,\ m \neq n, \\ \left\{L^\top\right\}_{n,m} - \left\{L^\top\right\}_{1,m+1} = -s_{n-m}, & k = 1,\ m \neq n, \\ \left\{L^\top\right\}_{k-1,n} - \left\{L^\top\right\}_{k,1} = s_{k-1}, & k \neq 1,\ m = n, \\ \left\{L^\top\right\}_{n,n} - \left\{L^\top\right\}_{1,1} = 0, & k = 1,\ m = n. \end{cases}$$

Положим $\hat{s} = (0, s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_1)^\top$. Можно проверить, что

$$Q_sL^\top - L^\top Q_s = \left(Q_1\hat{s}e_1^\top - e_1\left(Q_1\hat{s}\right)^\top\right)\mathcal{P}_n. \tag{3.76}$$

Напомним, что матрица Q_1 определена формулой (1.24).

Теперь найдем общий вид матриц Q_sL и LQ_s:

$$Q_sL = \begin{pmatrix} -s_1 & -s_2 & s_3 & \dots & -s_{n-2} & -s_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ s_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ s_{n-2} & s_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$LQ_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -s_{n-1} \\ s_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -s_{n-2} \\ s_{n-2} & s_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & -s_{n-3} \\ s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} & \dots & 0 & 0 & -s_{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n-1} & 0 & -s_1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим элемент $\{Q_sL - LQ_s\}_{km}$, учитывая теплицеву структуру матрицы L:

$$\{Q_sL - LQ_s\}_{km} =$$

$$= \begin{cases} \{L\}_{k-1,m} - \{L\}_{k,m+1} = 0, & k \neq 1,\ m \neq n, \\ -\{L\}_{n,m} - \{L\}_{1,m+1} = -s_m, & k = 1,\ m \neq n, \\ \{L\}_{k-1,n} + \{L\}_{k,1} = s_{n-k+1}, & k \neq 1,\ m = n, \\ -\{L\}_{n,n} + \{L\}_{1,1} = 0, & k = 1,\ m = n. \end{cases}$$

Отсюда выводим, что

$$Q_sL - LQ_s = -\left(e_1\hat{s}^\top - \hat{s}e_1^\top\right)\mathcal{P}_n. \tag{3.77}$$

Подставляя (3.76) и (3.77) в (3.75), имеем

$$S\left(Q_1\hat{s}e_1^\top - e_1\left(Q_1\hat{s}\right)^\top\right)\mathcal{P}_n = -\left(e_1\hat{s}^\top - \hat{s}e_1^\top\right)\mathcal{P}_nS^\top.$$

Умножая справа на матрицу $\mathcal{P}_n$, находим

$$S\left(Q_1\hat{s}e_1^\top - e_1\left(Q_1\hat{s}\right)^\top\right) = -\left(e_1\hat{s}^\top - \hat{s}e_1^\top\right)S.$$

Раскроем здесь скобки:

$$SQ_1\hat{s}e_1^\top - (s_0e_1 - \hat{s})(Q_1\hat{s})^\top = -e_1\left(S^\top\hat{s}\right)^\top + \hat{s}\left(S^\top e_1\right)^\top.$$

После несложных преобразований получаем

$$SQ_1\hat{s}e_1^\top - s_0e_1(Q_1\hat{s})^\top + \hat{s}(Q_1\hat{s})^\top = -e_1\left(S^\top\hat{s}\right)^\top + s_0\hat{s}e_1^\top + \hat{s}(Q_1\hat{s})^\top,$$

или

$$(SQ_1\hat{s} - s_0\hat{s})\,e_1^\top = -e_1\left(S^\top\hat{s} - s_0Q_1\hat{s}\right)^\top. \qquad (3.78)$$

Учитывая соотношения $Se_1 = s_0e_1 - \hat{s}$, $S^\top e_1 = s_0e_1 + Q_1\hat{s}$, имеем

$$S^\top\hat{s} - s_0Q_1\hat{s} = s_0S^\top e_1 - S^\top Se_1 - s_0Q_1\hat{s} =$$

$$= \{\text{косые циркулянты } S \text{ и } S^\top \text{ коммутируют}\} =$$

$$= s_0S^\top e_1 - SS^\top e_1 - s_0Q_1\hat{s} =$$

$$= s_0^2e_1 + s_0Q_1\hat{s} - s_0Se_1 - SQ_1\hat{s} - s_0Q_1\hat{s} =$$

$$= s_0^2e_1 - s_0^2e_1 + s_0\hat{s} - SQ_1\hat{s} =$$

$$= s_0\hat{s} - SQ_1\hat{s} = -(SQ_1\hat{s} - s_0\hat{s}).$$

Таким образом, соотношение (3.78) эквивалентно равенству одноранговых матриц

$$(SQ_1\hat{s} - s_0\hat{s})\,e_1^\top = e_1(SQ_1\hat{s} - s_0\hat{s})^\top.$$

Отсюда следует, что

$$SQ_1\hat{s} - s_0\hat{s} = \zeta e_1, \quad \zeta = (Q_1\hat{s}, Q_1\hat{s}) = (\hat{s}, \hat{s}).$$

Так как $Q_1\hat{s} = S^\top e_1 - s_0e_1$, то $SQ_1\hat{s} = SS^\top e_1 - s_0^2e_1 + s_0\hat{s}$. В результате приходим к соотношению

$$SS^\top e_1 = \nu e_1, \quad \nu = s_0^2 + \zeta.$$

Поскольку косой циркулянт полностью определяется своим первым столбцом, это соотношение равносильно условию

$$SS^\top = \nu I_n. \qquad (3.79)$$

Несложно проверить, что $\nu = (Se_1, Se_1)$; поэтому $\nu \neq 0$, так как в противном случае $S = 0$. Положим $\kappa = \sqrt{\nu}$, тогда

$$\left(\frac{1}{\kappa}S\right)\left(\frac{1}{\kappa}S\right)^{\top} = I_n.$$

Следовательно, косой циркулянт $\widetilde{S} = \frac{1}{\kappa}S$ является ортогональной матрицей, а матрица $S = \kappa\widetilde{S}$ — скалярным кратным ортогонального косого циркулянта. ∎

Исследование множества $\mathcal{C}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$, характеризуемого матрицей J_2, схоже с анализом предыдущего случая, однако имеет некоторые отличия.

Из соотношения (1.35) следует, что в представлении $T = T_1 + iT_2$ подходящей матрицы T компонента T_1 является косым циркулянтом S_1, а компонента T_2 — суммой некоторого косого циркулянта S_2 и строго нижнетреугольной теплицевой матрицы L_1, поддиагональная часть которой противоположна поддиагональной части косого циркулянта S_1.

Используя эту информацию, запишем уравнение (3.8) в виде

$$S_1 L_1^{\top} - L_1 S_1^{\top} = S_2 S_1^{\top} - S_1 S_2^{\top}.$$

Согласно лемме 3.2.9, для разрешимости этого уравнения матрица S_1 с точностью до скалярного множителя должна быть ортогональной. Вводя матрицу

$$S_3 = S_1 L_1^{\top} - L_1 S_1^{\top},$$

получаем уравнение относительно S_2:

$$S_2 S_1^{\top} - S_1 S_2^{\top} = S_3. \tag{3.80}$$

Чтобы найти подходящие матрицы S_2, записываем спектральные разложения (1.50) всех трех матриц S_j и подставляем их в (3.80). Преобразования, аналогичные тем, что использовались в анализе предыдущего случая, приводят к уравнению (3.70) для диагональной матрицы D_2.

Представляя матрицы D_1 и D_2 формулами (3.71) и (3.72) и учитывая, что косые циркулянты S_1 и S_2 вещественны, можем в соответствии с леммой 1.2.25 выписать соотношения

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_2, && v_1 = -v_2, && \\
&u_j = u_{n+3-j}, && v_j = -v_{n+3-j}, && j = 3, \ldots, n, \\
&x_1 = x_2, && y_1 = -y_2, && \\
&x_j = x_{n+3-j}, && y_j = -y_{n+3-j}, && j = 3, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Косая симметрия и вещественность матрицы (3.80) дают соотношения для диагональных элементов матрицы D_3 (см. (3.73)):

$$\begin{aligned}
&z_1 = -z_2, && \\
&z_j = -z_{n+3-j}, && j = 3, \ldots, n.
\end{aligned}$$

В результате матричное уравнение (3.70) снова сводится к скалярным уравнениям (3.74), где индекс j пробегает теперь значения $1, 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Матрицы S_1 и S_2 определяют вещественные теплицевы матрицы T_1 и T_2, а те, в свою очередь, комплексную теплицеву матрицу T, которой соответствует нормальная ганкелева матрица H. С помощью описанной процедуры могут быть найдены все матрицы класса *НГМ_10*.

Разбор этого случая завершает рассмотрение всех возможных типов двухпараметрических циркулянтов. Вместе с тем закончено и исследование ситуации, когда $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 2$. Теперь теорема 3.1.1 доказана полностью.

Глава 4

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ТЕПЛИЦЕВЫ МАТРИЦЫ

Перейдем к рассмотрению более общих задач, а именно к классификации пар коммутирующих матриц, обладающих определенной структурой. Начнем с описания перестановочных теплицевых матриц.

4.1 Критерий перестановочности теплицевых матриц

Условия, при которых коммутируют две теплицевых матрицы, известны с 1998 г. и были получены В. И. Гельфгатом в работе [17]. Эти условия тесно связаны с условиями нормальности теплицевых матриц. Свой результат, представленный ниже, Гельфгат изначально формулировал для комплексного случая, хотя в вещественном случае он выглядит аналогично и получается из комплексной формулировки, если для всех независимых параметров задачи выбраны вещественные значения.

Критерий коммутирования теплицевых матриц содержится в следующем утверждении.

Теорема 4.1.1. *Ненулевые теплицевы матрицы $T_1 \in M_n(\mathbf{C})$ и $T_2 \in M_n(\mathbf{C})$ перестановочны тогда и только тогда, когда принадлежат хотя бы одному из следующих классов:*

Класс ПТМ_1. Матрица T_2 (T_1) является линейным многочленом от T_1 (T_2).

Класс ПТМ_2. Матрицы T_1 и T_2 суть φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$.

Класс ПТМ_3. Матрицы T_1 и T_2 одновременно являются верхними или нижними треугольными.

4.2 Доказательство критерия перестановочности

Достаточность условий теоремы 4.1.1 вполне очевидна. Поэтому будем доказывать их необходимость.

Используя лемму 1.2.16, представим теплицевы матрицы T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = t_0^{(1)} I_n + C_1 + S_1,$$
$$T_2 = t_0^{(2)} I_n + C_2 + S_2,$$

где C_1 и C_2 — циркулянты, а S_1 и S_2 — косые циркулянты. Каждая из этих четырех матриц имеет нулевую диагональ.

Справедливы следующие преобразования:

$$T_1T_2 = T_2T_1 \iff$$
$$\iff \left(t_0^{(1)} I_n + C_1 + S_1\right)\left(t_0^{(2)} I_n + C_2 + S_2\right) =$$
$$= \left(t_0^{(2)} I_n + C_2 + S_2\right)\left(t_0^{(1)} I_n + C_1 + S_1\right) \iff$$
$$\iff t_0^{(1)} t_0^{(2)} I_n + t_0^{(1)} C_2 + t_0^{(1)} S_2 + t_0^{(2)} C_1 +$$
$$+ C_1C_2 + C_1S_2 + t_0^{(2)} S_1 + S_1C_2 + S_1S_2 =$$
$$= t_0^{(1)} t_0^{(2)} I_n + t_0^{(2)} C_1 + t_0^{(2)} S_1 + t_0^{(1)} C_2 +$$
$$+ C_2C_1 + C_2S_1 + t_0^{(1)} S_2 + S_2C_1 + S_2S_1 \iff$$
$$\iff C_1C_2 + C_1S_2 + S_1C_2 + S_1S_2 = C_2C_1 + C_2S_1 + S_2C_1 + S_2S_1 \iff$$
$$\iff \{\text{поскольку любые два циркулянта коммутируют}$$
$$\text{и то же верно для косых циркулянтов}$$
$$\text{в силу лемм 1.2.8 и 1.2.13}\} \iff$$
$$\iff C_1S_2 + S_1C_2 = C_2S_1 + S_2C_1.$$

Мы пришли к соотношению

$$C_1 S_2 + S_1 C_2 - C_2 S_1 - S_2 C_1 = 0.$$

Будем рассматривать нулевую матрицу в правой части как частный случай скалярной матрицы. Тогда и матрица в левой части должна быть скалярной. Всякую скалярную матрицу можно считать одновременно и циркулянтом, и косым циркулянтом. Применяя леммы 1.2.3 и 1.2.5, можем написать

$$\left\{\begin{aligned} & Q_c\left(C_1 S_2 + S_1 C_2 - C_2 S_1 - S_2 C_1\right) = \\ & \qquad\qquad = \left(C_1 S_2 + S_1 C_2 - C_2 S_1 - S_2 C_1\right) Q_c, \\ & Q_s\left(C_1 S_2 + S_1 C_2 - C_2 S_1 - S_2 C_1\right) = \\ & \qquad\qquad = \left(C_1 S_2 + S_1 C_2 - C_2 S_1 - S_2 C_1\right) Q_s. \end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

Проанализируем каждое из этих равенств по отдельности. Используя перестановочность циркулянтов с матрицей Q_c, перепишем первое соотношение в виде

$$\begin{gathered} C_1\left(Q_c S_2 - S_2 Q_c\right) + \left(Q_c S_1 - S_1 Q_c\right) C_2 - \\ - C_2\left(Q_c S_1 - S_1 Q_c\right) - \left(Q_c S_2 - S_2 Q_c\right) C_1 = 0. \end{gathered}$$

Согласно (1.27), $Q_c = Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n$, поэтому

$$\begin{gathered} C_1\left[\left(Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right) S_2 - S_2\left(Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right)\right] + \\ + \left[\left(Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right) S_1 - S_1\left(Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right)\right] C_2 - \\ - C_2\left[\left(Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right) S_1 - S_1\left(Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right)\right] - \\ - \left[\left(Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right) S_2 - S_2\left(Q_s + 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right)\right] C_1 = 0. \end{gathered}$$

В силу того что S_1, S_2 — косые циркулянты, они коммутируют с матрицей Q_s, что дает возможность упростить исследуемое условие:

$$\begin{gathered} C_1\left[e_1 e_1^\top S_2^\top \mathcal{P}_n - S_2 e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right] + \\ + \left[e_1 e_1^\top S_1^\top \mathcal{P}_n - S_1 e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right] C_2 - \\ - C_2\left[e_1 e_1^\top S_1^\top \mathcal{P}_n - S_1 e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right] - \\ - \left[e_1 e_1^\top S_2^\top \mathcal{P}_n - S_2 e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n\right] C_1 = 0. \end{gathered}$$

Умножая это равенство справа на матрицу $\mathcal{P}_n$ и раскрывая скобки, получаем

$$C_1e_1\left(S_2e_1\right)^\top - C_1S_2e_1e_1^\top + e_1\left(C_2S_1e_1\right)^\top - S_1e_1\left(C_2e_1\right)^\top - \\ - C_2e_1\left(S_1e_1\right)^\top + C_2S_1e_1e_1^\top - e_1\left(C_1S_2e_1\right)^\top + S_2e_1\left(C_1e_1\right)^\top = 0.$$

Пусть c_1 и c_2 — первые столбцы матриц C_1 и C_2, а s_1 и s_2 — первые столбцы S_1 и S_2. Перепишем полученное равенство с помощью этих столбцов:

$$c_1s_2^\top - C_1s_2e_1^\top + e_1\left(C_2s_1\right)^\top - s_1c_2^\top - \\ - c_2s_1^\top + C_2s_1e_1^\top - e_1\left(C_1s_2\right)^\top + s_2c_1^\top = 0,$$

что эквивалентно соотношению

$$c_1s_2^\top + s_2c_1^\top - s_1c_2^\top - c_2s_1^\top = \\ = \left(C_1s_2 - C_2s_1\right)e_1^\top - e_1\left(C_2s_1 - C_1s_2\right)^\top. \tag{4.2}$$

Аналогично проведем анализ второго уравнения системы (4.1). Используя перестановочность косых циркулянтов с матрицей Q_s, перепишем его в виде

$$S_1\left(Q_sC_2 - C_2Q_s\right) + \left(Q_sC_1 - C_1Q_s\right)S_2 - \\ - S_2\left(Q_sC_1 - C_1Q_s\right) - \left(Q_sC_2 - C_2Q_s\right)S_1 = 0.$$

Подставим сюда соотношение $Q_s = Q_c - 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n$:

$$S_1\left[\left(Q_c - 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)C_2 - C_2\left(Q_c - 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)\right] + \\ + \left[\left(Q_c - 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)C_1 - C_1\left(Q_c - 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)\right]S_2 - \\ - S_2\left[\left(Q_c - 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)C_1 - C_1\left(Q_c - 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)\right] - \\ - \left[\left(Q_c - 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)C_2 - C_2\left(Q_c - 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)\right]S_1 = 0.$$

Циркулянты C_1 и C_2 коммутируют с Q_c, поэтому

$$S_1\left[e_1e_1^\top C_2^\top\mathcal{P}_n - C_2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right] + \\ + \left[e_1e_1^\top C_1^\top\mathcal{P}_n - C_1e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right]S_2 - \\ - S_2\left[e_1e_1^\top C_1^\top\mathcal{P}_n - C_1e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right] - \\ - \left[e_1e_1^\top C_2^\top\mathcal{P}_n - C_2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right]S_1 = 0,$$

что эквивалентно соотношению

$$S_1e_1(C_2e_1)^\top - S_1C_2e_1e_1^\top + e_1(S_2C_1e_1)^\top - C_1e_1(S_2e_1)^\top -$$
$$- S_2e_1(C_1e_1)^\top + S_2C_1e_1e_1^\top - e_1(S_1C_2e_1)^\top + C_2e_1(S_1e_1)^\top = 0.$$

Во введенных выше обозначениях для первых столбцов матриц C_1, C_2, S_1 и S_2 это соотношение выглядит так:

$$s_1\mathrm{c}_2^\top - S_1\mathrm{c}_2e_1^\top + e_1(S_2\mathrm{c}_1)^\top - \mathrm{c}_1s_2^\top -$$
$$-s_2\mathrm{c}_1^\top + S_2\mathrm{c}_1e_1^\top - e_1(S_1\mathrm{c}_2)^\top + \mathrm{c}_2s_1^\top = 0,$$

или

$$\begin{aligned}\mathrm{c}_1s_2^\top + s_2\mathrm{c}_1^\top - s_1\mathrm{c}_2^\top - \mathrm{c}_2s_1^\top &= \\ = -(S_1\mathrm{c}_2 - S_2\mathrm{c}_1)e_1^\top &+ e_1(S_2\mathrm{c}_1 - S_1\mathrm{c}_2)^\top.\end{aligned} \tag{4.3}$$

С учетом равенств (4.2) и (4.3) система (4.1) принимает вид

$$\begin{cases} \mathrm{c}_1s_2^\top + s_2\mathrm{c}_1^\top - s_1\mathrm{c}_2^\top - \mathrm{c}_2s_1^\top = \\ \qquad\qquad = (C_1s_2 - C_2s_1)e_1^\top + e_1(C_1s_2 - C_2s_1)^\top, \\ \mathrm{c}_1s_2^\top + s_2\mathrm{c}_1^\top - s_1\mathrm{c}_2^\top - \mathrm{c}_2s_1^\top = \\ \qquad\qquad = -(S_1\mathrm{c}_2 - S_2\mathrm{c}_1)e_1^\top - e_1(S_1\mathrm{c}_2 - S_2\mathrm{c}_1)^\top. \end{cases} \tag{4.4}$$

Напомним, что матрицы C_1, C_2, S_1 и S_2 имеют нулевую диагональ, поэтому у каждого из векторов c_1, c_2, s_1 и s_2 первая координата нулевая. Как следствие, у матриц в левых частях системы (4.4) первые строка и столбец нулевые. У матриц в правых частях, напротив, ненулевые элементы могут находиться лишь в первых строке и столбце. Поэтому система (4.4) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \mathrm{c}_1s_2^\top - s_1\mathrm{c}_2^\top = \mathrm{c}_2s_1^\top - s_2\mathrm{c}_1^\top, \\ C_1s_2 = C_2s_1, \\ S_1\mathrm{c}_2 = S_2\mathrm{c}_1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение этой системы:

$$\mathrm{c}_1s_2^\top - s_1\mathrm{c}_2^\top = \mathrm{c}_2s_1^\top - s_2\mathrm{c}_1^\top. \tag{4.5}$$

По векторам c_1, c_2, s_1 и s_2 построим матрицы

$$Z_1 = [\mathrm{c}_1, -s_1], \quad Z_2 = [\mathrm{c}_2, s_2].$$

С помощью этих матриц соотношение (4.5) можно записать как

$$Z_1 \left(Z_2 \mathcal{P}_2\right)^\top = -Z_2 \left(Z_1 \mathcal{P}_2\right)^\top,$$

или

$$Z_1 \mathcal{P}_2 Z_2^\top = -Z_2 \mathcal{P}_2 Z_1^\top. \tag{4.6}$$

Дальнейший анализ разобьем на три случая, определяемых матрицами Z_1 и Z_2:

а) хотя бы одна из матриц Z_1 или Z_2 нулевая;

б) $\operatorname{rank} Z_1 = 2$ или $\operatorname{rank} Z_2 = 2$;

в) $\operatorname{rank} Z_1 = \operatorname{rank} Z_2 = 1$.

а) Начнем со случая, когда $Z_1 = 0$ или $Z_2 = 0$. Пусть, для определенности, $Z_2 = 0$, что соответствует скалярной матрице T_2. Такую матрицу можно считать многочленом нулевой степени от матрицы T_1. Поэтому пара (T_1, T_2) принадлежит классу *ПТМ_1*. В случае $Z_1 = 0$ рассуждения аналогичны.

б) Теперь рассмотрим ситуацию, когда одна из матриц Z_1 или Z_2 имеет ранг, равный двум. Пусть, для определенности, $\operatorname{rank} Z_1 = 2$. Тогда найдутся индексы k и m такие, что определяемая ими подматрица $\check{Z}_1$ невырожденна. Через $\check{Z}_2$ обозначим подматрицу матрицы Z_2, расположенную в тех же строках k и m. Рассматривая в уравнении (4.6) только k-й и m-й столбцы, можем написать

$$Z_1 \mathcal{P}_2 \check{Z}_2^\top = -Z_2 \mathcal{P}_2 \check{Z}_1^\top.$$

Отсюда выводим

$$Z_2 = -Z_1 \mathcal{P}_2 \check{Z}_2^\top \left(\check{Z}_1^\top\right)^{-1} \mathcal{P}_2.$$

Определим 2×2-матрицу $W = -\mathcal{P}_2 \check{Z}_2^\top \left(\check{Z}_1^\top\right)^{-1} \mathcal{P}_2$, тогда

$$Z_2 = Z_1 W.$$

Записав матрицу W в виде

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix},$$

получаем соотношения

$$c_2 = \alpha c_1 + \gamma s_1, \quad s_2 = \beta c_1 + \delta s_1.$$

Подставляя их в (4.5), имеем

$$\beta c_1 c_1^\top + \delta c_1 s_1^\top - \alpha s_1 c_1^\top - \gamma s_1 s_1^\top = \\ = \alpha c_1 s_1^\top + \gamma s_1 s_1^\top - \beta c_1 c_1^\top - \delta s_1 c_1^\top,$$

или

$$(\alpha - \delta)\left(c_1 s_1^\top + s_1 c_1^\top\right) + 2\gamma s_1 s_1^\top - 2\beta c_1 c_1^\top = 0.$$

Этому соотношению можно придать матричный вид

$$Z_1 \begin{pmatrix} -2\beta & \delta - \alpha \\ \delta - \alpha & 2\gamma \end{pmatrix} Z_1^\top = 0.$$

Рассматривая здесь только строки и столбцы с индексами k и m, находим

$$\check{Z}_1 \begin{pmatrix} -2\beta & \delta - \alpha \\ \alpha - \delta & 2\gamma \end{pmatrix} \check{Z}_1^\top = 0.$$

Поскольку матрица $\check{Z}_1$ невырожденна, получаем условия

$$\delta = \alpha, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

из которых вытекают равенства

$$c_2 = \alpha c_1, \quad s_2 = \alpha s_1.$$

Они означают, что матрица T_2 является линейной функцией от T_1. Поэтому пара (T_1, T_2) принадлежит классу *ПТМ_1*.

в) Наконец, рассмотрим ситуацию, когда $\operatorname{rank} Z_1 = \operatorname{rank} Z_2 = 1$. В этом случае существуют векторы $x \neq 0$ и $y \neq 0$ такие, что

$$c_1 = \alpha x, \quad s_1 = \beta x, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \\ c_2 = \gamma y, \quad s_2 = \delta y, \quad |\gamma| + |\delta| \neq 0. \tag{4.7}$$

Подставляя эти выражения в (4.5), получаем

$$\alpha\delta x y^\top - \beta\gamma x y^\top + \alpha\delta y x^\top - \beta\gamma y x^\top = 0,$$

откуда следует соотношение

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\left(x y^\top + y x^\top\right) = 0. \tag{4.8}$$

Покажем, что если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то матрица $xy^\top + yx^\top$ не может быть нулевой. Предположим обратное, т.е. $xy^\top + yx^\top = 0$; в частности, для диагональных элементов имеем

$$x_j y_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поскольку $x \neq 0$, найдется число k такое, что $x_k \neq 0$, а тогда $y_k = 0$. Аналогично, в силу условия $y \neq 0$ найдется число m такое, что $y_m \neq 0$, а потому $x_m = 0$. Вычисляя элемент $\{xy^\top + yx^\top\}_{km}$, получаем

$$\{xy^\top + yx^\top\}_{km} = x_k y_m + x_m y_k = x_k y_m \neq 0,$$

так как оба числа x_k и y_m не равны нулю. Это противоречит исходному предположению $xy^\top + yx^\top = 0$.

Итак, $xy^\top + yx^\top \neq 0$. Поэтому (4.8) дает условие

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0,$$

означающее вырожденность матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Ввиду (4.7) найдется ненулевое число $\kappa \neq 0$ такое, что

$$\gamma = \kappa\alpha, \quad \delta = \kappa\beta.$$

В зависимости от значений α и β возможны несколько разных случаев.

Если $\alpha = 0$, то $\gamma = 0$, $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$, а матрицы T_1 и T_2 суть косые циркулянты, что соответствует (при $\varphi = -1$) классу *ПТМ_2*.

При $\beta = 0$ имеем $\delta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, откуда следует, что T_1 и T_2 — циркулянты. Это матрицы класса *ПТМ_2* с $\varphi = 1$.

Пусть $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} s_1 &= \beta x = \tfrac{\beta}{\alpha}\alpha x = \tfrac{\beta}{\alpha}c_1, \\ s_2 &= \delta y = \kappa\beta y = \tfrac{\beta}{\alpha}\kappa\alpha y = \tfrac{\beta}{\alpha}\gamma y = \tfrac{\beta}{\alpha}c_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Если $\alpha = \beta$, то в разложениях матриц T_1 и T_2 (см. (1.51)) циркулянты и косые циркулянты имеют одинаковые первые столбцы. Поэтому T_1 и T_2 — нижние треугольные матрицы (класс *ПТМ_3*).

В случае $\alpha = -\beta$ получаем верхние треугольные матрицы T_1 и T_2 (класс *ПТМ_3*).

Остается исследовать случай $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$ и $\alpha \neq -\beta$. Записав векторы c_j и s_j $(j = 1, 2)$ в виде

$$c_j = \left(0, c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \ldots, c_{n-1}^{(j)}\right)^\top,$$

$$s_j = \left(0, s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, \ldots, s_{n-1}^{(j)}\right)^\top,$$

предположим, что вектор $\left(t_0^{(j)}, t_{-1}^{(j)}, t_{-2}^{(j)}, \ldots, t_{-(n-1)}^{(j)}\right)^\top$ является первым столбцом матрицы T_j, а вектор $\left(t_0^{(j)}, t_1^{(j)}, t_2^{(j)}, \ldots, t_{n-1}^{(j)}\right)$ — ее первой строкой. В силу (4.9) имеем

$$\begin{array}{l} t_{n-k}^{(j)} = c_k^{(j)} - s_k^{(j)} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha} c_k^{(j)}, \\ t_{-k}^{(j)} = c_k^{(j)} + s_k^{(j)} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} c_k^{(j)}, \end{array} \qquad j = 1, 2.$$

Отсюда следует, что

$$t_{-k}^{(j)} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} t_{n-k}^{(j)}, \quad j = 1, 2,$$

т.е. T_1 и T_2 суть φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \neq 0$ (класс *ПТМ_2*). Теорема 4.1.1 полностью доказана.

4.3 Пример применения критерия перестановочности теплицевых матриц

Покажем, что теорему 4.1.1 можно применить к описанию нормальных теплицевых матриц, т.е. для обоснования теоремы 2.2.1.

Пусть T — нормальная комплексная теплицева матрица, что означает перестановочность T и T^*. Тогда пара матриц T

и T^* должна принадлежать хотя бы одному из трех классов теоремы 4.1.1.

Предположим сначала, что T и T^* являются треугольными матрицами одного вида, т.е. обе или верхне-, или нижнетреугольные. Это возможно лишь в случае скалярной матрицы T, которая принадлежит сразу обоим классам теоремы 2.2.1.

Пусть теперь T и T^* являются φ-циркулянтами для одного и того же числа $\varphi \neq 0$. Это накладывает определенное ограничение на значение φ. Действительно, в случае φ-циркулянта T для матрицы $B = T^*$ справедливы соотношения

$$b_{-j} = \bar{t}_j = \frac{1}{\bar{\varphi}}\bar{\varphi}\bar{t}_j = \frac{1}{\bar{\varphi}}\bar{t}_{-(n-j)} = \frac{1}{\bar{\varphi}}b_{n-j}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, T^* является $\frac{1}{\bar{\varphi}}$-циркулянтом, а потому должно выполняться соотношение

$$\varphi = \frac{1}{\bar{\varphi}},$$

эквивалентное равенству $|\varphi| = 1$. Следовательно, T принадлежит классу *HTKM_2*.

Наконец, рассмотрим случай, когда

$$T = \alpha I_n + \beta T^* \tag{4.10}$$

для некоторых комплексных чисел α и β.

Если $\beta = -1$, то матрица T с точностью до диагонального элемента является косоэрмитовой и, значит, матрица iT будет линейным многочленом от эрмитовой матрицы.

При $\beta \neq -1$ добавим к обеим частям равенства (4.10) матрицу $\bar{\beta}T$. Получаем соотношение

$$T + \bar{\beta}T = \alpha I_n + \beta T^* + \bar{\beta}T,$$

которое эквивалентно условию

$$T = \frac{\alpha}{1+\bar{\beta}}I_n + \frac{1}{1+\bar{\beta}}\left(\beta T^* + \bar{\beta}T\right).$$

Обозначив
$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{1+\bar{\beta}}, \quad \beta_1 = \frac{1}{1+\bar{\beta}}, \quad R = \beta T^* + \bar{\beta} T,$$
приходим к выражению для матрицы T вида
$$T = \alpha_1 I_n + \beta_1 R,$$
где R — эрмитова матрица. Последнее соотношение характеризует матрицы класса *HTKM_1*.

Мы получили доказательство теоремы 2.2.1, существенно более короткое, чем то, что изложено в главе 2. В значительной мере, хотя и не вполне, это новое доказательство основано на рассуждениях В. И. Гельфгата из статьи [17]. Отметим все же, что статья Гельфгата появилась несколькими годами позднее публикации первоначального решения нормальной теплицевой задачи.

Глава 5

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ГАНКЕЛЕВЫ МАТРИЦЫ

Исследовав задачу классификации перестановочных теплицевых матриц, в данной главе опишем пары коммутирующих ганкелевых матриц. Начнем с вещественного случая, который тесно связан с нормальной ганкелевой задачей. Его обобщение на комплексный случай имеет свои особенности, составляющие вторую часть данной главы.

5.1 Критерий перестановочности вещественных ганкелевых матриц

Хотя описание пар перестановочных вещественных ганкелевых матриц нигде не было опубликовано, такую классификацию можно извлечь как из решения нормальной ганкелевой задачи, чему посвящен разд. 5.2, так и из работы Гельфгата [18], что будет сделано в разд. 5.5.

Пары коммутирующих вещественных ганкелевых матриц описывает следующее утверждение.

Теорема 5.1.1. *Ненулевые ганкелевы матрицы $H_1 \in M_n(\mathbf{R})$ и $H_2 \in M_n(\mathbf{R})$ коммутируют тогда и только тогда, когда принадлежат хотя бы одному из следующих классов:*

Класс ПГВМ_1. Матрицы H_1 и H_2 имеют вид

$$H_1 = \alpha H, \quad H_2 = \beta H.$$

Здесь H — произвольная вещественная ганкелева матрица, а α и β — произвольные вещественные числа.

Класс ПГВМ_2. Матрицы H_1 и H_2 вида

$$H_1 = \alpha_1 \mathcal{P}_n + \beta_1 H,$$
$$H_2 = \alpha_2 \mathcal{P}_n + \beta_2 H,$$

где H — произвольная вещественная центросимметричная ганкелева матрица, а α_1, α_2, β_1 и β_2 — произвольные вещественные числа.

Класс ПГВМ_3. Блочно-диагональные $n \times n$-матрицы H_1 и H_2 вида

$$H_1 = \alpha_1 \widetilde{H} \oplus \beta_1 \widehat{H},$$

$$H_2 = \alpha_2 \widetilde{H} \oplus \beta_2 \widehat{H},$$

где $\widetilde{H}$ — верхнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка j $(0 < j < n)$, а $\widehat{H}$ — нижнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка $n - j$; α_1, α_2, β_1 и β_2 — произвольные вещественные числа.

Класс ПГВМ_4. Матрицы H_1 и H_2 вида

$$H_1 = \alpha_1 H + \beta_1 H^{-1},$$
$$H_2 = \alpha_2 H + \beta_2 H^{-1},$$

где H — невырожденная вещественная верхнетреугольная (или нижнетреугольная) ганкелева матрица, а α_1, α_2, β_1 и β_2 — произвольные вещественные числа.

Класс ПГВМ_5. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением вещественных V-преобразований 2-го типа к парам теплицевых матриц T_1 и T_2 таких, что

$$T_1 = \frac{C + \overline{C}}{2},$$

$$T_2 = \frac{C - \overline{C}}{2i}$$

и C есть скалярное кратное унитарного φ-циркулянта $(|\varphi| = 1,\ \varphi \neq \pm 1)$.

Класс ПГВМ_6. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением вещественных V-преобразований 2-го типа к парам теплице-

вых матриц T_1 и T_2, полученных одним из следующих двух способов:

а) T_1 — произвольный вещественный невырожденный ξ-циркулянт ($\xi \neq 0, \pm 1$), а T_2 — произвольное вещественное кратное матрицы $T_1^{-\top}$;

б) T_1 и $T_2^\top$ — вещественные ξ-циркулянты ($\xi \neq 0, \pm 1$), "делящие нуль"; иначе говоря, T_1 и T_2 удовлетворяют условию

$$T_1 T_2^\top = 0.$$

Класс ПГВМ_7. Матрицы H_1 и H_2 — ганкелевы циркулянты

$$H_1 = F_n{}^* D_1 F_n \mathcal{P}_n,$$
$$H_2 = F_n{}^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, {}_n^{(2)}\right)$ — *диагональные матрицы; при этом*

$$d_j^{(1)} \overline{d_j^{(2)}} = d_j^{(2)} \overline{d_j^{(1)}}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{5.1}$$

Класс ПГВМ_8. Матрицы H_1 и H_2 — ганкелевы косые циркулянты

$$H_1 = G_{-1} F_n{}^* D_1 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n,$$
$$H_2 = G_{-1} F_n{}^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n.$$

Диагональные матрицы $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ *должны удовлетворять соотношениям*

$$\begin{aligned} d_1^{(1)} \overline{d_1^{(2)}} &= d_1^{(2)} \overline{d_1^{(1)}}, \\ d_j^{(1)} \overline{d_j^{(2)}} &= d_j^{(2)} \overline{d_j^{(1)}}, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Класс ПГВМ_9. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением вещественных V-преобразований 2-го типа к парам теплице-

вых матриц T_1 и T_2, являющихся результатом выполнения следующей процедуры:

а) Задать в качестве T_1 ненулевое вещественное кратное вещественного ортогонального циркулянта. Определить L_1 как строго нижнетреугольную теплицеву матрицу, поддиагональная часть которой совпадает с поддиагональной частью T_1, а T_3 — как матрицу

$$T_3 = T_1 L_1^\top - L_1 T_1^\top; \tag{5.3}$$

б) В качестве T_2 взять любой вещественный циркулянт, решающий уравнение

$$X T_1^\top - T_1 X^\top = T_3. \tag{5.4}$$

Класс ПГВМ_10. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением вещественных V-преобразований 2-го типа к парам теплицевых матриц T_1 и T_2, являющихся результатом выполнения следующей процедуры:

а) Задать в качестве T_1 ненулевое вещественное кратное вещественного ортогонального косого циркулянта. Матрицу L_1 определить как строго нижнетреугольную теплицеву матрицу, поддиагональная часть которой противоположна поддиагональной части T_1.

б) В качестве T_2 взять любой вещественный косой циркулянт, решающий уравнение (5.4), где матрица T_3 определена в (5.3).

5.2 Доказательство критерия перестановочности в вещественном случае

Начнем с леммы, устанавливающей связь рассматриваемой задачи с задачей классификации нормальных ганкелевых матриц.

Лемма 5.2.1. *Ганкелева матрица $H \in M_n(\mathbf{C})$, представленная в алгебраической форме*

$$H = H_1 + iH_2, \tag{5.5}$$

является нормальной тогда и только тогда, когда вещественные матрицы H_1 и H_2 перестановочны.

Доказательство леммы 5.2.1. Запишем определение нормальности для комплексной ганкелевой матрицы (5.5), учитывая симметрию матриц H_1 и H_2:

$$(H_1 + iH_2)(H_1 - iH_2) = (H_1 - iH_2)(H_1 + iH_2).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$H_1^2 + H_2^2 + i(H_2H_1 - H_1H_2) = H_1^2 + H_2^2 - i(H_2H_1 - H_1H_2),$$

или

$$H_2H_1 = H_1H_2,$$

что доказывает лемму. ■

Из леммы 5.2.1 следует, что задача классификации пар коммутирующих вещественных ганкелевых матриц эквивалентна нормальной ганкелевой задаче. Для получения требуемой классификации достаточно проанализировать все классы нормальных ганкелевых матриц H, перечисленные в теореме 3.1.1, и для каждого из них описать пары вида

$$H_1 = \frac{H + \overline{H}}{2}, \quad H_2 = \frac{H - \overline{H}}{2i}.$$

Оставшаяся часть доказательства посвящена анализу этих классов.

Пусть H принадлежит классу *НГМ_1*. Это означает, что $H = (\alpha_1 + i\alpha_2)H_0$, где H_0 — вещественная ганкелева матрица. В этом случае получаем

$$H_1 = \alpha_1 H_0, \quad H_2 = \alpha_2 H_0,$$

т.е. получаем пару из класса *ПГВМ_1*.

Матрица H из класса *НГМ_2* может быть представлена в виде

$$H = (\alpha_1 + i\alpha_2)\mathcal{P}_n + (\beta_1 + i\beta_2)H_0,$$

где H_0 — произвольная вещественная центросимметричная ганкелева матрица. Отсюда следует, что пара

$$H_1 = \alpha_1 \mathcal{P}_n + \beta_1 H_0,$$

$$H_2 = \alpha_2 \mathcal{P}_n + \beta_2 H_0$$

принадлежит классу *ПГВМ_ 2*.

Матрицу порядка n из класса *НГМ_ 3* можно записать как

$$H = (\alpha_1 + i\alpha_2)\widetilde{H} \oplus (\beta_1 + i\beta_2)\widehat{H},$$

где $\widetilde{H}$ — верхнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка j, а $\widehat{H}$ — нижнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка $n - j$. Поэтому пара

$$H_1 = \alpha_1 \widetilde{H} \oplus \beta_1 \widehat{H},$$

$$H_2 = \alpha_2 \widetilde{H} \oplus \beta_2 \widehat{H}$$

принадлежит классу *ПГВМ_ 3*.

Класс *НГМ_ 4* представляет собой набор матриц вида

$$H = (\alpha_1 + i\alpha_2)\widetilde{H} + (\beta_1 + i\beta_2)\widetilde{H}^{-1},$$

где $\widetilde{H}$ — невырожденная вещественная верхнетреугольная (или нижнетреугольная) ганкелева матрица. Соответствующие матрицы

$$H_1 = \alpha_1 \widetilde{H} + \beta_1 \widetilde{H}^{-1}$$

и

$$H_2 = \alpha_2 \widetilde{H} + \beta_2 \widetilde{H}^{-1}$$

образуют пару из класса *ПГВМ_ 4*.

Теперь рассмотрим матрицу C, являющуюся скалярным кратным унитарного φ-циркулянта. Положим

$$T_1 = \frac{C + \overline{C}}{2}, \quad T_2 = \frac{C - \overline{C}}{2i}.$$

V-преобразованию 1-го типа матрицы C соответствует вещественное V-преобразование 2-го типа пары (T_1, T_2). При этом нормальность соответствующей ганкелевой матрицы сохраняется, а компоненты H_1 и H_2 ее алгебраической формы (5.5) остаются перестановочными. Они и составляют пару класса *ПГВМ_ 5*.

Класс *ПГВМ_ 6*, как и классы *ПГВМ_ 9* и *ПГВМ_ 10*, очевидным образом получаются из соответствующих классов *НГМ*, если вспомнить определения V-преобразований 1-го и 2-го типов.

Анализ классов *НГМ_ 7* и *НГМ_ 8* менее прост. Начнем с класса *НГМ_ 7*. Пусть C — циркулянт, для которого соответствующий ганкелев циркулянт является нормальной матрицей. Тогда в представлении (1.47) диагональные элементы матрицы $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ должны удовлетворять соотношениям

$$|d_j| = |d_{n+2-j}|, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{5.6}$$

Определим два вещественных циркулянта C_1 и C_2 формулами

$$C_1 = \frac{C + \overline{C}}{2}, \qquad C_2 = \frac{C - \overline{C}}{2i}.$$

Запишем для них спектральные разложения (1.47)

$$C_1 = F_n{}^* D_1 F_n, \qquad C_2 = F_n{}^* D_2 F_n,$$

где $D_1 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Ввиду леммы 1.2.19 имеем

$$D_1 = \frac{D + \overline{\widehat{D}}}{2}, \qquad D_2 = \frac{D - \overline{\widehat{D}}}{2i}.$$

Эти формулы дают поэлементные равенства

$$d_1^{(1)} = \frac{d_1 + \overline{d}_1}{2}, \qquad d_1^{(2)} = \frac{d_1 - \overline{d}_1}{2i},$$

$$d_j^{(1)} = \frac{d_j + \overline{d}_{n+2-j}}{2}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

$$d_j^{(2)} = \frac{d_j - \overline{d}_{n+2-j}}{2i}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Из последних двух соотношений выводим

$$\begin{aligned} d_j &= d_j^{(1)} + i d_j^{(2)}, \\ d_{n+2-j} &= \overline{d_j^{(1)}} + i\overline{d_j^{(2)}}, \end{aligned} \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{5.7}$$

Перепишем условия (5.6) в виде

$$d_j \overline{d}_j = d_{n+2-j} \overline{d}_{n+2-j}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Используя (5.7), придадим этим условиям эквивалентную форму:

$$\left(d_j^{(1)} + i d_j^{(2)}\right)\left(\overline{d_j^{(1)}} - i\overline{d_j^{(2)}}\right) = \left(\overline{d_j^{(1)}} + i\overline{d_j^{(2)}}\right)\left(d_j^{(1)} - i d_j^{(2)}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left|d_j^{(1)}\right|^2 - i d_j^{(1)}\overline{d_j^{(2)}} + i d_j^{(2)}\overline{d_j^{(1)}} + \left|d_j^{(2)}\right|^2 =$$

$$= \left|d_j^{(1)}\right|^2 + i d_j^{(1)}\overline{d_j^{(2)}} - i d_j^{(2)}\overline{d_j^{(1)}} + \left|d_j^{(2)}\right|^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow d_j^{(1)}\overline{d_j^{(2)}} = d_j^{(2)}\overline{d_j^{(1)}}.$$

Пара вещественных ганкелевых циркулянтов $C_1\mathcal{P}_n$ и $C_2\mathcal{P}_n$ принадлежит классу *ПГВМ_7*. В том же классе находятся результаты вещественных V-преобразований 2-го типа этой пары.

Перейдем к классу *НГМ_8*. Пусть S — косой циркулянт, для которого соответствующий ганкелев косой циркулянт является нормальной матрицей. Тогда в представлении (1.50) диагональные элементы матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} |d_1| &= |d_2|, \\ |d_j| &= |d_{n+3-j}|, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Введем два вещественных косых циркулянта S_1 и S_2 формулами

$$S_1 = \frac{S + \overline{S}}{2}, \qquad S_2 = \frac{S - \overline{S}}{2i}.$$

Запишем для них спектральные разложения (1.50)

$$S_1 = G_{-1} F_n{}^* D_1 F_n G_{-1}^*, \qquad S_2 = G_{-1} F_n{}^* D_2 F_n G_{-1}^*,$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$– диагональные матрицы.

Ввиду леммы 1.2.22 имеем

$$D_1 = \frac{D + \overline{\widetilde{D}}}{2}, \qquad D_2 = \frac{D - \overline{\widetilde{D}}}{2i}.$$

Эти матричные соотношения можно переписать как совокупность скалярных условий

$$d_1^{(1)} = \frac{d_1 + \overline{d}_2}{2}, \qquad d_1^{(2)} = \frac{d_1 - \overline{d}_2}{2i},$$

$$d_j^{(1)} = \frac{d_j + \overline{d}_{n+3-j}}{2}, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

$$d_j^{(2)} = \frac{d_j - \overline{d}_{n+3-j}}{2i}, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

или же

$$\begin{aligned} d_1 &= d_1^{(1)} + i d_1^{(2)}, \\ d_2 &= \overline{d_1^{(1)}} + i \overline{d_1^{(2)}}, \\ d_j &= d_j^{(1)} + i d_j^{(2)}, \\ d_{n+3-j} &= \overline{d_j^{(1)}} + i \overline{d_j^{(2)}}, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Заменим соотношения (5.8) равенствами

$$d_1 \overline{d}_1 = d_2 \overline{d}_2,$$

$$d_j \overline{d}_j = d_{n+3-j} \overline{d}_{n+3-j}, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Используя (5.9) и действуя по аналогии со случаем циркулянтов, придадим этим равенствам эквивалентную форму:

$$\left(d_1^{(1)} + i d_1^{(2)}\right)\left(\overline{d_1^{(1)}} - i \overline{d_1^{(2)}}\right) = \left(\overline{d_1^{(1)}} + i \overline{d_1^{(2)}}\right)\left(d_1^{(1)} - i d_1^{(2)}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow d_1^{(1)} \overline{d_1^{(2)}} = d_1^{(2)} \overline{d_1^{(1)}}$$

и

$$\left(d_j^{(1)} + i d_j^{(2)}\right)\left(\overline{d_j^{(1)}} - i \overline{d_j^{(2)}}\right) = \left(\overline{d_j^{(1)}} + i \overline{d_j^{(2)}}\right)\left(d_j^{(1)} - i d_j^{(2)}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow d_j^{(1)}\overline{d_j^{(2)}} = d_j^{(2)}\overline{d_j^{(1)}}, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Пара вещественных ганкелевых косых циркулянтов $S_1\mathcal{P}_n$ и $S_2\mathcal{P}_n$ принадлежит классу *ПГВМ_8*. В том же классе находятся результаты вещественных V-преобразований 2-го типа этой пары.

Теперь теорема 5.1.1 доказана полностью.

5.3 Критерий перестановочности комплексных ганкелевых матриц

Исследование задачи об описании пар перестановочных комплексных ганкелевых матриц представлено Гельфгатом в работе [18]. В этом исследовании были опущены два особых случая, разобранных позднее в [19, 41].

Будем рассматривать данную задачу как комплексный аналог уже разобранной классификационной задачи для пар вещественных ганкелевых матриц. Основные идеи доказательства мы заимствуем из решения комплексной нормальной ганкелевой задачи.

Критерий перестановочности комплексных ганкелевых матриц содержится в следующем утверждении.

Теорема 5.3.1. *Ненулевые ганкелевы матрицы $H_1 \in M_n(\mathbf{C})$ и $H_2 \in M_n(\mathbf{C})$ коммутируют тогда и только тогда, когда принадлежат хотя бы одному из следующих классов:*

Класс ПГКМ_1. Матрицы H_1 и H_2 имеют вид

$$H_1 = \alpha H, \quad H_2 = \beta H.$$

Здесь H — произвольная комплексная ганкелева матрица, а α и β — произвольные комплексные числа.

Класс ПГКМ_2. Матрицы H_1 и H_2 вида

$$H_1 = \alpha_1\mathcal{P}_n + \beta_1 H,$$

$$H_2 = \alpha_2\mathcal{P}_n + \beta_2 H,$$

где H — произвольная комплексная центросимметричная ганкелева матрица, а α_1, α_2, β_1 и β_2 — произвольные комплексные числа.

Класс ПГКМ_3. Блочно-диагональные $n \times n$-матрицы H_1 и H_2 вида

$$H_1 = \alpha_1 \widetilde{H} \oplus \beta_1 \widehat{H},$$

$$H_2 = \alpha_2 \widetilde{H} \oplus \beta_2 \widehat{H},$$

где $\widetilde{H}$ — верхнетреугольная комплексная ганкелева матрица порядка j $(0 < j < n)$ и $\widehat{H}$ — нижнетреугольная комплексная ганкелева матрица порядка $n - j$, а α_1, α_2, β_1 и β_2 — произвольные комплексные числа.

Класс ПГКМ_4. Матрицы H_1 и H_2 вида

$$H_1 = \alpha_1 H + \beta_1 H^{-1},$$

$$H_2 = \alpha_2 H + \beta_2 H^{-1},$$

где H — невырожденная комплексная верхнетреугольная (или нижнетреугольная) ганкелева матрица, а α_1, α_2, β_1 и β_2 — произвольные комплексные числа.

Класс ПГКМ_5. Ганкелевы матрицы H_1 и H_2, для которых соответствующие теплицевы матрицы образуют пару, получающуюся применением комплексного V-преобразования 2-го типа к паре матриц T_1 и T_2, сконструированных одним из следующих двух способов:

а) T_1 — произвольный невырожденный ξ-циркулянт $(\xi \neq 0, \pm 1)$, а T_2 — произвольное комплексное кратное матрицы $T_1^{-\top}$;

б) T_1 и $T_2^\top$ суть ξ-циркулянты $(\xi \neq 0, \pm 1)$, "делящие нуль"; иначе говоря, T_1 и T_2 удовлетворяют условию

$$T_1 T_2^\top = 0.$$

Класс ПГКМ_6. Матрицы H_1 и H_2 — ганкелевы циркулянты

$$H_1 = F_n{}^* D_1 F_n \mathcal{P}_n,$$

$$H_2 = F_n{}^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь $D_1 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ — *диагональные матрицы; при этом*

$$d_j^{(1)} d_{n+2-j}^{(2)} = d_j^{(2)} d_{n+2-j}^{(1)}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{5.10}$$

Класс ПГКМ_7. Матрицы H_1 *и* H_2 — *ганкелевы косые циркулянты*

$$H_1 = G_{-1} F_n{}^* D_1 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n,$$
$$H_2 = G_{-1} F_n{}^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n.$$

Диагональные матрицы $D_1 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ *должны удовлетворять соотношениям*

$$\begin{aligned} &d_1^{(1)} d_2^{(2)} = d_1^{(2)} d_2^{(1)}, \\ &d_j^{(1)} d_{n+3-j}^{(2)} = d_j^{(2)} d_{n+3-j}^{(1)}, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Класс ПГКМ_8. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением комплексного V*-преобразования 2-го типа к паре матриц* T_1 *и* T_2*, являющихся результатом выполнения следующей процедуры:*

а) Задать в качестве T_1 *ненулевое комплексное кратное ненулевого циркулянта* C*, для которого найдется число* ν *такое, что*

$$CC^\top = \nu I_n. \tag{5.12}$$

Определить L_1 *как строго нижнетреугольную теплицеву матрицу, поддиагональная часть которой совпадает с поддиагональной частью* T_1*, а* T_3 — *как матрицу*

$$T_3 = T_1 L_1^\top - L_1 T_1^\top. \tag{5.13}$$

б) В качестве T_2 *взять любой циркулянт, решающий уравнение*

$$XT_1^\top - T_1 X^\top = T_3. \tag{5.14}$$

Класс ПГКМ_9. Ганкелевы матрицы, для которых соответствующие теплицевы матрицы получаются применением *комплексного V-преобразования 2-го типа к паре матриц T_1 и T_2, являющихся результатом выполнения следующей процедуры:*

а) Задать в качестве T_1 ненулевое комплексное кратное ненулевого косого циркулянта S, для которого найдется число ν такое, что

$$SS^\top = \nu I_n. \tag{5.15}$$

Определить матрицу L_1 как строго нижнетреугольную теплицеву матрицу, поддиагональная часть которой противоположна поддиагональной части T_1.

б) В качестве T_2 взять любой косой циркулянт, решающий уравнение (5.14), где матрица T_3 определена формулой (5.13).

5.4 Доказательство критерия перестановочности в комплексном случае

Обоснование критерия коммутирования комплексных ганкелевых матриц почти идентично выводу условий, при которых комплексная ганкелева матрица является нормальной. Поскольку этот вывод нам известен, мы вкратце напомним его идеи и основное внимание уделим различиям двух доказательств.

5.4.1 Переход к соответствующим теплицевым матрицам

Как и в доказательстве теоремы 3.1.1, начнем с перехода от ганкелевых к соответствующим теплицевым матрицам посредством формулы (1.13). Подставив представления $H_1 = T_1\mathcal{P}_n$ и $H_2 = T_2\mathcal{P}_n$ из (1.13) в соотношение перестановочности, получим

$$T_1\mathcal{P}_n T_2\mathcal{P}_n = T_2\mathcal{P}_n T_1\mathcal{P}_n.$$

Согласно лемме 1.2.27, это соотношение эквивалентно равенству
$$T_1 T_2^\top = T_2 T_1^\top,$$
которое запишем в виде
$$T_2 T_1^\top - T_1 T_2^\top = 0. \tag{5.16}$$

Мы пришли к задаче описания пар комплексных теплицевых матриц, удовлетворяющих условию (5.16). Комплексную теплицеву матрицу T_1 запишем в виде
$$T_1 = a_0 I_n + \mathcal{T}(x_1) + (\mathcal{T}(x_2))^\top,$$
где
$$x_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), \qquad x_2 = \left(a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-(n-1)}\right),$$
а матрицу T_2 — в виде
$$T_2 = b_0 I_n + \mathcal{T}(y_1) + (\mathcal{T}(y_2))^\top,$$
где
$$y_1 = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}), \qquad y_2 = \left(b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-(n-1)}\right).$$

Если хотя бы одна из матриц T_1 и T_2 диагональная, то, будучи теплицевой, она является скалярной, поэтому от второй матрицы достаточно потребовать симметрии. Такие пары (T_1, T_2) образуют подкласс класса *ПГКМ_2*.

Удобно отделить диагональные элементы матриц T_1 и T_2, записывая их как
$$T_1 = a_0 I_n + \widehat{T}_1, \qquad T_2 = b_0 I_n + \widehat{T}_2. \tag{5.17}$$
При этом считаем, что $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ — ненулевые матрицы.

Используя формулы (5.17), можно придать уравнению (5.16) вид уравнения (3.10):
$$\widehat{T}_2 \widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1 \widehat{T}_2^\top = a_0 \left(\widehat{T}_2^\top - \widehat{T}_2\right) - b_0 \left(\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\right). \tag{5.18}$$
Отличие в том, что матрицы $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ теперь комплексные.

Матрица в правой части равенства (5.18) теплицева, поэтому и матрица в левой части (5.18) должна быть теплицевой.

Как и в доказательстве теоремы 3.1.1, запишем этот факт через элементы матриц $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$:

$$a_{n-k}b_{n-m} - a_{n-m}b_{n-k} = a_{-k}b_{-m} - a_{-m}b_{-k}, \qquad k, m = 1, \dots, n-1. \tag{5.19}$$

Из элементов матриц T_1 и T_2 сформируем две вспомогательные комплексные $(n-1) \times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. В соответствии с соглашением (1.20), матрицу $\mathcal{F}$, определяемую векторами u и v вида

$$u = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1)^\top, \quad v = (b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1)^\top, \tag{5.20}$$

будем обозначать символом

$$\mathcal{F}(u, v) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_{n-2} & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}, \tag{5.21}$$

а матрицу $\mathcal{G}$, определяемую векторами x и y вида

$$x = \left(a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-(n-1)}\right)^\top, \quad y = \left(b_{-1}, b_{-2}, \dots, b_{-(n-1)}\right)^\top, \tag{5.22}$$

обозначаем символом

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{bmatrix} a_{-1} & b_{-1} \\ a_{-2} & b_{-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{-(n-1)} & b_{-(n-1)} \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Теперь равенства (5.19) принимают вид

$$\triangle^{\mathcal{F}}_{km} = \triangle^{\mathcal{G}}_{km}, \qquad k, m = 1, \dots, n-1. \tag{5.24}$$

Проанализируем эти равенства в нескольких взаимоисключающих случаях, определяемых значениями рангов матриц $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, и в каждом из них найдем пары перестановочных ганкелевых матриц.

5.4.2 Малоранговый случай

В этом разделе опишем пары коммутирующих ганкелевых матриц, для которых соответствующие матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ имеют ранг, не превосходящий единицу.

I случай. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ нулевые. Тогда $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ также нулевые матрицы. Этот случай невозможен, поскольку по предположению эти матрицы должны быть ненулевыми.

II случай. Матрица $\mathcal{G}$ нулевая, а $\mathcal{F}$ — ненулевая. Тогда в (5.24) все миноры $\triangle^{\mathcal{G}}_{km} = 0$, а потому и все миноры $\triangle^{\mathcal{F}}_{km} = 0$. Поскольку $\mathcal{F}$ — ненулевая матрица, $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 1$. Отсюда выводим, что найдется комплексный вектор

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})^\top$$

такой, что u и v можно представить в виде $u = \alpha\mathcal{P}_{n-1}z$ и $v = \beta\mathcal{P}_{n-1}z$. Комплексные числа α и β удовлетворяют условию

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0. \tag{5.25}$$

Определим строго верхнетреугольную матрицу $U = \mathcal{T}(z)$; тогда $\widehat{T}_1 = \alpha U$, $\widehat{T}_2 = \beta U$. Подставим эти соотношения в (5.18):

$$\alpha\beta UU^\top - \alpha\beta UU^\top = a_0(\beta\, U^\top - \beta\, U) - b_0(\alpha\, U^\top - \alpha\, U).$$

После преобразований получаем

$$(a_0\beta - b_0\alpha)\, U = 0.$$

Поскольку матрица U ненулевая, заключаем, что $a_0\beta - b_0\alpha = 0$. Это соотношение можно записать как равенство нулю определителя матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Вследствие (5.25) найдется ненулевое число κ такое, что

$$a_0 = \kappa\alpha, \qquad b_0 = \kappa\beta.$$

Подставляя эти выражения в формулы (5.17), получаем

$$T_1 = a_0 I_n + \widehat{T}_1 = \varkappa\alpha I_n + \alpha U = \alpha\left(\varkappa I_n + U\right),$$
$$T_2 = b_0 I_n + \widehat{T}_2 = \varkappa\beta I_n + \beta U = \beta\left(\varkappa I_n + U\right).$$

Таким образом, матрицы $H_1 = T_1\mathcal{P}_n$ и $H_2 = T_2\mathcal{P}_n$ получаются из одной и той же верхнетреугольной матрицы умножением ее на константы (свою для каждой матрицы). Такая пара матриц принадлежит классу *ПГКМ_1*.

III случай. Матрица $\mathcal{F}$ нулевая, а $\mathcal{G}$ — ненулевая. Этот случай эквивалентен предыдущему с той лишь разницей, что матрицы $H_1 = T_1\mathcal{P}_n$ и $H_2 = T_2\mathcal{P}_n$ теперь получаются из некоторой нижнетреугольной матрицы умножением на константы (свою для каждой матрицы). Такая пара матриц снова принадлежит классу *ПГКМ_1*.

IV случай. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ненулевые и $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 1$. В равенствах (5.24) все миноры $\triangle^{\mathcal{F}}_{km} = 0$, а потому и все миноры $\triangle^{\mathcal{G}}_{km} = 0$. Поскольку G — ненулевая матрица, $\operatorname{rank}\mathcal{G} = 1$.

Из условия $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 1$ выводим существование комплексных чисел α и β, удовлетворяющих неравенству (5.25), и комплексного вектора

$$z_1 = \left(z^{(1)}_1, z^{(1)}_2, \ldots, z^{(1)}_{n-1}\right)^\top$$

таких, что $u = \alpha P_{n-1} z_1$ и $v = \beta P_{n-1} z_1$ (см. (5.20)). Аналогично, из условия $\operatorname{rank}\mathcal{G} = 1$ заключаем, что найдутся комплексные числа γ и δ, удовлетворяющие неравенству

$$|\gamma| + |\delta| \neq 0, \tag{5.26}$$

и комплексный вектор

$$z_2 = \left(z^{(2)}_1, z^{(2)}_2, \ldots, z^{(2)}_{n-1}\right)^\top$$

такие, что $x = \gamma z_2$ и $y = \delta z_2$ (см. (5.22)). Определим строго верхнетреугольную матрицу $U = \mathcal{T}(z_1)$ и строго нижнетреугольную матрицу $L = (\mathcal{T}(z_2))^\top$, тогда

$$\widehat{T}_1 = \alpha U + \gamma L, \qquad \widehat{T}_2 = \beta U + \delta L. \tag{5.27}$$

Используя эти равенства, получаем

$$\widehat{T}_2\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\widehat{T}_2^\top = (\alpha\delta - \beta\gamma)(LU^\top - UL^\top). \tag{5.28}$$

Подставив (5.28) и (5.27) в (5.18) и рассуждая, как в разд. 3.2.2, приходим к соотношению

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)UL^\top = (a_0\beta - b_0\alpha)\,U - (a_0\delta - b_0\gamma)\,L^\top.$$

Чтобы упростить формулировку этой задачи, определим величины

$$\xi = \alpha\delta - \beta\gamma, \qquad \xi_1 = a_0\beta - b_0\alpha, \qquad \xi_2 = b_0\gamma - a_0\delta.$$

В новых обозначениях исследуемое уравнение имеет вид

$$\xi UL^\top = \xi_1 U + \xi_2 L^\top. \tag{5.29}$$

Дальнейший анализ разобьем на несколько случаев.

Случай IV.1. $\xi = 0$. Это условие означает, что определитель матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

равен нулю. В силу соотношений (5.25) и (5.26), матрица Z не имеет нулевых строк. Поэтому найдется число κ такое, что

$$\gamma = \kappa\alpha, \qquad \delta = \kappa\beta. \tag{5.30}$$

Подстановка выражений (5.30) в (5.27) дает

$$\widehat{T}_1 = \alpha U + \kappa\alpha L = \alpha(U + \kappa L),$$
$$\widehat{T}_2 = \beta U + \kappa\beta L = \beta(U + \kappa L).$$

Таким образом, матрицы $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ получаются одна из другой умножением на число.

Вводя матрицу $T_3 = U + \kappa L$, приходим к соотношениям

$$\widehat{T}_1 = \alpha T_3, \qquad \widehat{T}_2 = \beta T_3.$$

Подставим их в основное уравнение (5.18)

$$(a_0\beta - b_0\alpha)\left(T_3^\top - T_3\right) = 0.$$

Пусть матрица T_3 симметрична. Тогда из формул

$$T_1 = a_0 I_n + \alpha T_3, \qquad T_2 = b_0 I_n + \beta T_3 \tag{5.31}$$

получаем пару матриц $H_1 = a_0\mathcal{P}_n + \alpha T_3\mathcal{P}_n$ и $H_2 = b_0\mathcal{P}_n + \beta T_3\mathcal{P}_n$ из класса *ПГКМ_2*.

Если матрица T_3 несимметрична, то имеет место равенство $a_0\beta - b_0\alpha = 0$, означающее, что матрица

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix}$$

вырождена. Снова используя неравенство (5.25), заключаем, что найдется ненулевое число η, для которого $a_0 = \eta\alpha$ и $b_0 = \eta\beta$. Теперь соотношения (5.31) принимают вид

$$\begin{aligned} T_1 &= \eta\alpha I_n + \alpha T_3 = \alpha\left(\eta I_n + T_3\right), \\ T_2 &= \eta\beta I_n + \beta T_3 = \beta\left(\eta I_n + T_3\right). \end{aligned}$$

Этим матрицам соответствует пара перестановочных ганкелевых матриц из класса *ПГКМ_1*.

Случай IV.2. Пусть теперь $\xi \neq 0$. Положим

$$\mu_1 = -\xi_1/\xi, \qquad \mu_2 = -\xi_2/\xi$$

и подставим эти соотношения в (5.29). После преобразований, аналогичных тем, что были проведены в разд. 3.2.2, получим

$$(U + \mu_2 I_n)\left(L^\top + \mu_1 I_n\right) = \mu_1\mu_2 I_n. \tag{5.32}$$

В зависимости от значений величин μ_1 и μ_2 разобьем анализ случая IV.2 на 4 подслучая.

Случай IV.2.1. $\xi \neq 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$. Запишем два последних условия как систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_0\beta - b_0\alpha = 0, \\ a_0\delta - b_0\gamma = 0 \end{cases}$$

относительно a_0, b_0. Определитель этой системы равен $-\beta\gamma+$ $+\alpha\delta = \xi \neq 0$. Следовательно,

$$a_0 = b_0 = 0.$$

Равенство (5.32) превращается в условие $UL^\top = 0$ для двух верхнетреугольных теплицевых матриц U и $L^\top$. Пусть k_U и k_L — столбцевые индексы самых левых ненулевых элементов в первых строках соответственно матриц U и $L^\top$. Матрицы U и L можно представить в блочном виде

$$U = \begin{pmatrix} O_{(n-k_U+1)(k_U-1)} & \widetilde{U} \\ O_{(k_U-1)(k_U-1)} & O_{(k_U-1)(n-k_U+1)} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} O_{(k_L-1)(n-k_L+1)} & O_{(k_L-1)(k_L-1)} \\ \widetilde{L} & O_{(n-k_L+1)(k_L-1)} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{U}$ и $\widetilde{L}$ — квадратные подматрицы.

Соотношение $UL^\top = 0$ приводит к неравенству

$$(k_U - 1) + (k_L - 1) \geq n. \tag{5.33}$$

Это неравенство, переписанное как $k_U - 1 \geq n - k_L + 1$, показывает, что ненулевые блоки матриц U и L находятся в непересекающихся группах столбцов. Формулы (5.27) после умножения справа на $\mathcal{P}_n$ дают пару перестановочных ганкелевых матриц

$$H_1 = \alpha U\mathcal{P}_n + \gamma L\mathcal{P}_n = \alpha\widetilde{H} + \gamma\widehat{H},$$

$$H_2 = \beta U\mathcal{P}_n + \delta L\mathcal{P}_n = \beta\widetilde{H} + \delta\widehat{H}.$$

При этом $\widetilde{H}$ — верхнетреугольная, $\widehat{H}$ — нижнетреугольная матрицы. Пара (H_1, H_2) принадлежит классу *ПГКМ_3*.

Случай IV.2.2. $\xi \neq 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$. В этом случае уравнение (5.32) имеет вид

$$(U + \mu_2 I_n)\, L^\top = 0.$$

Из условия $\mu_2 \neq 0$ выводим, что $L^\top = 0$. Вследствие равенства $\mu_1 = 0$ найдется ненулевое число κ такое, что

$$a_0 = \kappa\alpha, \qquad b_0 = \kappa\beta.$$

Снова используя формулы (5.27), получаем пару ганкелевых матриц вида

$$H_1 = \alpha\left(\varkappa\mathcal{P}_n + U\mathcal{P}_n\right),$$
$$H_2 = \beta\left(\varkappa\mathcal{P}_n + U\mathcal{P}_n\right).$$

Это частный случай пар класса *ПГКМ_1*.

Случай IV.2.3. $\xi \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$. Этот случай аналогичен предыдущему и дает пары ганкелевых матриц вида

$$H_1 = \alpha\left(\varkappa\mathcal{P}_n + L\mathcal{P}_n\right),$$
$$H_2 = \beta\left(\varkappa\mathcal{P}_n + L\mathcal{P}_n\right),$$

снова принадлежащие классу *ПГКМ_1*.

Случай IV.2.4. $\xi \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$. Разделим обе части уравнения (5.32) на число $\mu_1\mu_2$:

$$\left(\frac{1}{\mu_2}U + I_n\right)\left(\frac{1}{\mu_1}L^\top + I_n\right) = I_n.$$

Определим R формулой $R = \frac{1}{\mu_2}U + I_n$, тогда

$$U = \mu_2\left(R - I_n\right), \qquad L = \mu_1\left(R^{-1} - I_n\right)^\top.$$

Подставив эти представления в (5.27) и проведя такие же вычисления, как в разд. 3.2.2, получим

$$T_1 = \alpha\mu_2 R + \gamma\mu_1 R^{-\top}, \qquad T_2 = \beta\mu_2 R + \delta\mu_1 R^{-\top}.$$

Отсюда

$$H_1 = \alpha\mu_2 H + \gamma\mu_1 H^{-1},$$
$$H_2 = \beta\mu_2 H + \delta\mu_1 H^{-1},$$

где H — невырожденная комплексная верхнетреугольная (или нижнетреугольная) ганкелева матрица. Такая пара (H_1, H_2) принадлежит классу *ПГКМ_4*.

5.4.3 Полноранговый случай

Пусть теперь матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ненулевые и $\operatorname{rank}\mathcal{F} > 1$. Так как $\mathcal{F}$ — матрица размера $(n-1)\times 2$, то $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 2$. Поэтому в равенствах (5.24) найдется ненулевой минор $\triangle_{km}^{\mathcal{F}}$, а значит, и ненулевой минор $\triangle_{km}^{\mathcal{G}}$. Тем самым $\operatorname{rank} \mathcal{G} = 2$.

Применяя лемму 1.2.1, представим матрицу W из формулы (1.35) в виде

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен единице:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Используя (1.35), (5.21) и (5.23), получаем соотношения, связывающие элементы матриц T_1 и T_2:

$$\begin{aligned} a_{-j} &= \alpha\, a_{n-j} + \gamma\, b_{n-j}, \\ b_{-j} &= \beta\, a_{n-j} + \delta\, b_{n-j}, \end{aligned} \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Будем говорить, что пара (T_1, T_2) характеризуется матрицей W.

Рассмотрим теперь влияние комплексного V-преобразования 2-го типа, определенного формулами (1.10), на пару матриц T_1 и T_2.

Лемма 5.4.1. *Пусть пара комплексных теплицевых матриц T_1 и T_2 характеризуется матрицей W. Тогда комплексное V-преобразование 2-го типа дает пару $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$, характеризуемую матрицей*

$$\widetilde{W} = V^{-1} W V.$$

Если пара (T_1, T_2) удовлетворяет соотношению (5.16), то это же верно для пары $\left(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2\right)$.

Доказательство леммы 5.4.1. Обозначим через $\widetilde{a}_j$, $\widetilde{a}_{-j}$, $\widetilde{b}_j$, $\widetilde{b}_{-j}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\widetilde{\mathcal{G}}$ величины, соответствующие величинам a_j, a_{-j}, b_j, b_{-j}, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, связанным с матрицами T_1 и T_2. Из определения (1.10) выводим

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} V$$

и

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} V.$$

Отсюда

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} V = \mathcal{F} W V = \widetilde{\mathcal{F}} V^{-1} W V = \widetilde{\mathcal{F}} \widetilde{W}.$$

Итак, пара матриц $\left(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2\right)$ характеризуется матрицей $\widetilde{W}$.

Предположим, что пара (T_1, T_2) удовлетворяет условию (5.16). Тогда

$$\widetilde{T}_1\widetilde{T}_2^\top = (v_{11}T_1 + v_{21}T_2)(v_{12}T_1 + v_{22}T_2)^\top =$$
$$= v_{11}v_{12}T_1T_1^\top + v_{21}v_{22}T_2T_2^\top + v_{11}v_{22}T_1T_2^\top + v_{12}v_{21}T_2T_1^\top$$

и

$$\widetilde{T}_2\widetilde{T}_1^\top = v_{11}v_{12}T_1T_1^\top + v_{21}v_{22}T_2T_2^\top + v_{11}v_{22}T_2T_1^\top + v_{12}v_{21}T_1T_2^\top,$$

откуда

$$\widetilde{T}_1\widetilde{T}_2^\top - \widetilde{T}_2\widetilde{T}_1^\top =$$
$$= \det V \cdot \left(T_1T_2^\top - T_2T_1^\top\right) = 0. \qquad \blacksquare$$

Доказанная лемма позволяет свести анализ рассматриваемой классификационной задачи к исследованию трех различных случаев, определяемых жордановой формой матрицы W:

а) Собственные значения различны.

б) Собственные значения совпадают и матрица W диагонализуема.

в) Собственные значения совпадают и жордановой формой матрицы W является жорданова клетка 2-го порядка.

Последовательно проанализируем эти ситуации.

а) Собственные значения различны.

Исследуем сначала пару (T_1, T_2), характеризуемую матрицей W с различными собственными значениями λ_1 и λ_2.

Поскольку $\lambda_1\lambda_2 = \det W = 1$, положим

$$\lambda_1 = \xi, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\xi}, \qquad \xi = \lambda_1.$$

В этом случае матрицы T_1 и T_2 оказываются соответственно ξ-циркулянтом и ξ^{-1}-циркулянтом, матрица $T_1T_2^\top$ будет ξ-циркулянтом, а матрица $T_2T_1^\top$ — ξ^{-1}-циркулянт. Равенство (5.16) принимает вид

$$T_1T_2^\top = T_2T_1^\top = \kappa I_n. \tag{5.34}$$

Представим T_1 и T_2 как

$$T_1 = G_\xi C_1 G_\xi^{-1} \tag{5.35}$$

и

$$T_2 = G_\xi^{-1} C_2 G_\xi, \tag{5.36}$$

где C_1 и C_2 — циркулянты. Подстановка этих представлений в (5.34) дает

$$G_\xi C_1 G_\xi^{-1} G_\xi C_2^\top G_\xi^{-1} = G_\xi^{-1} C_2 G_\xi G_\xi^{-1} C_1^\top G_\xi = \varkappa I_n,$$

или

$$G_\xi C_1 C_2^\top G_\xi^{-1} = G_\xi^{-1} C_2 C_1^\top G_\xi = \varkappa I_n,$$

что эквивалентно равенству

$$C_1 C_2^\top = \varkappa I_n.$$

Дальнейшее исследование разобьем на два подслучая в зависимости от равенства или неравенства нулю коэффициента $\varkappa$.

1) $\varkappa \neq 0$. Пусть $\widehat{C}$ — произвольный невырожденный циркулянт. Положим $C_1 = \mu_1 \widehat{C}$, $C_2 = \mu_2 \widehat{C}^{-\top}$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{C}$; тогда $C_1 C_2^\top = \mu_1 \mu_2 I_n$. Теперь формулы (5.35)—(5.36) описывают матрицы T_1 и T_2, удовлетворяющие условию (5.34).

2) $\varkappa = 0$. В этом случае имеем

$$C_1 C_2^\top = 0.$$

Выбрав произвольно делящие нуль циркулянты C_1 и $C_3 = C_2^\top$, построим T_1 и T_2 по формулам (5.35)—(5.36).

Пары теплицевых матриц (T_1, T_2), построенные при анализе обоих случаев, после умножения их справа на $\mathcal{P}_n$ дают пары ганкелевых матриц из класса *ПГКМ_ 5*. То же верно для пар, полученных применением к парам (T_1, T_2) произвольных комплексных V-преобразований 2-го типа.

б) Собственные значения матрицы W совпадают и матрица W диагонализуема.

Пусть паре теплицевых матриц T_1 и T_2 соответствует диагонализуемая матрица W, собственные значения которой совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Поскольку $\lambda^2 = \det W = 1$, то

$$\lambda = 1 \qquad \text{или} \qquad \lambda = -1.$$

Рассмотрим эти два случая. Первому соответствует матрица

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Такой матрице W соответствуют циркулянты T_1 и T_2, которые мы представим их спектральными разложениями

$$T_1 = F_n^* D_1 F_n, \tag{5.37}$$

$$T_2 = F_n^* D_2 F_n, \tag{5.38}$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$, $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ — диагональные матрицы.

Подставляя представления (5.37) и (5.38) в формулу (5.16) и учитывая лемму 1.2.18, получаем

$$F_n^* D_1 F_n F_n^* \widehat{D}_2 F_n = F_n^* D_2 F_n F_n^* \widehat{D}_1 F_n,$$

или эквивалентное соотношение

$$D_1 \widehat{D}_2 = D_2 \widehat{D}_1.$$

В поэлементной записи имеем

$$d_j^{(1)} d_{n+2-j}^{(2)} = d_j^{(2)} d_{n+2-j}^{(1)}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{5.39}$$

Ганкелевы матрицы, соответствующие циркулянтам (5.37) и (5.38), подчиненным условиям (5.39), составляют пары, принадлежащие классу *ПГКМ_ 6*.

Пусть теперь

$$W = -I_2.$$

В этом случае T_1 и T_2 — косые циркулянты, которые мы представим их спектральными разложениями

$$T_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*, \tag{5.40}$$

$$T_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*, \tag{5.41}$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$, $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$– диагональные матрицы.

Подставляя представления (5.40) и (5.41) в формулу (5.16) и учитывая лемму 1.2.21, получаем

$$G_{-1}F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_2 F_n G_{-1}^* =$$

$$= G_{-1}F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_1 F_n G_{-1}^*,$$

или эквивалентное соотношение

$$D_1 \widetilde{D}_2 = D_2 \widetilde{D}_1.$$

В поэлементной записи имеем

$$\begin{aligned} &d_1^{(1)} d_2^{(2)} = d_1^{(2)} d_2^{(1)}, \\ &d_j^{(1)} d_{n+3-j}^{(2)} = d_j^{(2)} d_{n+3-j}^{(1)}, \quad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Ганкелевы матрицы, соответствующие косым циркулянтам (5.40) и (5.41), подчиненным условиям (5.42), составляют пары, принадлежащие классу *ПГКМ_ 7*.

в) Собственные значения совпадают и жордановой формой матрицы W является жорданова клетка 2-го порядка.

Как и в разделе б), для собственных значений матрицы W справедливы соотношения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и

$$\lambda = 1 \qquad \text{или} \qquad \lambda = -1.$$

Пусть V — невырожденная 2×2-матрица, приводящая матрицу W к ее жордановой форме, т.е.

$$V^{-1} W V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_1$$

или

$$V^{-1} W V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J_2.$$

Согласно лемме 5.4.1, комплексное V-преобразование 2-го типа, применяемое к паре (T_1, T_2), приводит к теплицевым матрицам $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$, характеризуемым соответственно матрицей $W = J_1$ или матрицей $W = J_2$.

Рассмотрим сначала случай $W = J_1$. Начнем со вспомогательного утверждения.

Лемма 5.4.2. *Пусть C — ненулевой циркулянт с первым столбцом $c = (c_0, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1)^\top$ и L — строго нижнетреугольная теплицева матрица, поддиагональные элементы которой совпадают с поддиагональными элементами C. Матрица $CL^\top - LC^\top$ тогда и только тогда является циркулянтом, когда C удовлетворяет соотношению*

$$CC^\top = \nu I_n \tag{5.43}$$

для некоторого комплексного числа ν.

Доказательство леммы 5.4.2 дословно повторяет доказательство леммы 3.2.8 с единственным отличием: ν может быть не только вещественным, но и произвольным комплексным числом. ■

Теперь можно описать множество подходящих пар теплицевых матриц. Из соотношения (1.35) следует, что матрица T_1 является циркулянтом C_1, а T_2 — суммой циркулянта C_2 и строго нижнетреугольной теплицевой матрицы L_1, поддиагональная часть которой совпадает с поддиагональной частью C_1. Подстановка представлений для T_1 и T_2 в уравнение (5.16) дает условие

$$C_1 (C_2 + L_1)^\top = (C_2 + L_1) C_1^\top,$$

эквивалентное равенству

$$C_1 L_1^\top - L_1 C_1^\top = C_2 C_1^\top - C_1 C_2^\top. \tag{5.44}$$

Матрица, стоящая в правой части, является циркулянтом, поэтому матрица

$$C_3 = C_1 L_1^\top - L_1 C_1^\top$$

также должна быть циркулянтом. Согласно лемме 5.4.2, последнее условие эквивалентно соотношению (5.43).

Покажем, как выбрать подходящие матрицы C_1 и C_2. Пусть сначала $\nu \neq 0$. Зададим C_1 как произвольное (ненулевое) кратное некоторого ортогонального циркулянта, определив тем самым матрицу C_3. Теперь матрица C_2 может быть получена как решение уравнения

$$C_2C_1^\top - C_1C_2^\top = C_3. \tag{5.45}$$

Представим циркулянты C_1, C_2 и C_3 их спектральными разложениями (1.47):

$$C_1 = F_n^* D_1 F_n, \qquad C_2 = F_n^* D_2 F_n, \qquad C_3 = F_n^* D_3 F_n. \tag{5.46}$$

Поскольку C_1 и C_3 известны, матрицы D_1 и D_3 определены. Остается найти диагональные элементы матрицы D_2.

Подставляя разложения (5.46) в (5.45), получаем условие

$$F_n^* D_2 F_n F_n D_1 F_n^* - F_n^* D_1 F_n F_n D_2 F_n^* = F_n^* D_3 F_n,$$

эквивалентное соотношению

$$D_2\widehat{D}_1 - D_1\widehat{D}_2 = D_3. \tag{5.47}$$

Представим D_1, D_2 и D_3 в виде

$$\begin{aligned} D_1 &= \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right),\\ D_2 &= \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right),\\ D_3 &= \operatorname{diag}\left(d_1^{(3)}, d_2^{(3)}, \ldots, d_n^{(3)}\right). \end{aligned} \tag{5.48}$$

Матрица C_3 кососимметрична, поэтому в силу леммы 1.2.24 выполняются равенства

$$\begin{aligned} d_1^{(3)} &= 0,\\ d_j^{(3)} &= -d_{n+2-j}^{(3)}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lceil \tfrac{n+1}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Заметим, что если $n = 2l$, то при $j = l+1$ имеем $d_{l+1}^{(3)} = -d_{l+1}^{(3)}$, откуда следует, что $d_{l+1}^{(3)} = 0$.

От матричного равенства (5.47) перейдем к поэлементным соотношениям

$$d_j^{(2)} d_{n+2-j}^{(1)} - d_j^{(1)} d_{n+2-j}^{(2)} = d_j^{(3)}, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{5.49}$$

Соотношения для индексов $j = 1$ и $j = l+1$ (при $n = 2l$) выполняются тождественно.

Исследуем разрешимость уравнений (5.49) относительно чисел $d_j^{(2)}$. Подставим разложение (5.46) в равенство (5.43):

$$F_n^* D_1 F_n F_n^* \widehat{D}_1 F_n = \nu I_n.$$

Отсюда выводим

$$D_1 \widehat{D}_1 = \nu I_n.$$

В поэлементной записи имеем

$$\begin{aligned} &\left(d_1^{(1)}\right)^2 = \nu, \\ &d_j^{(1)} d_{n+2-j}^{(1)} = \nu, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lceil \tfrac{n+1}{2} \right\rceil. \end{aligned} \tag{5.50}$$

В каждом из нетривиальных уравнений (5.49) коэффициенты при неизвестных $d_j^{(2)}$ и $d_{n+2-j}^{(2)}$ отличны от нуля в силу условий (5.50) и $\nu \neq 0$. В таких уравнениях одно из неизвестных можно выразить как (линейную) функцию от другого. Величины $d_j^{(2)}$ ($j = 1$ и при $n = 2l$ $j = l+1$), входящие в тождественные соотношения, могут быть выбраны произвольно. После того как матрица D_2 определена, с помощью средней формулы в (5.46) восстанавливаем матрицу C_2. Теперь известны обе теплицевы матрицы T_1 и T_2. Соответствующие им ганкелевы матрицы перестановочны и образуют пару из класса *ПГКМ_ 8*.

Теперь рассмотрим случай $\nu = 0$. Если в равенствах (5.50) для каждого j ($j \geq 2$) одно из чисел $d_j^{(1)}$ или $d_{n+2-j}^{(1)}$ отлично от нуля, то проходят те же рассуждения, что и выше, и прежним способом получаем пары матриц из класса *ПГКМ_ 8*.

Пусть теперь существует $j_0 > 1$ такое, что

$$d_{j_0}^{(1)} = d_{n+2-j_0}^{(1)} = 0. \tag{5.51}$$

Рассмотрим соответствующие столбцы $f_{j_0} = F_n^* e_{j_0}$ и $f_{n+2-j_0} = F_n^* e_{n+2-j_0}$ матрицы F_n^*. Заметим, что

$$\begin{aligned} f_{n+2-j_0} = F_n^* e_{n+2-j_0} = F_n^* Q_1 e_{j_0} = \\ = \{\text{по лемме 1.2.17}\} = \\ = F_n^* F_n^2 e_{j_0} = F_n e_{j_0} = \overline{F_n^* e_{j_0}} = \overline{f}_{j_0}. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Вычислим действия матриц $C_k^\top$ $(k = 1,2)$ на векторы f_{j_0} и f_{n+2-j_0}:

$$\begin{aligned} C_k^\top f_{j_0} = F_n^* \widehat{D}_k F_n F_n^* e_{j_0} = F_n^* \widehat{D}_k e_{j_0} = d_{n+2-j_0}^{(k)} F_n^* e_{j_0} = \\ = d_{n+2-j_0}^{(k)} f_{j_0} = \{\text{в силу } (5.52)\} = d_{n+2-j_0}^{(k)} \overline{f}_{n+2-j_0}; \end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned} C_k^\top f_{n+2-j_0} = F_n^* \widehat{D}_k F_n F_n^* e_{n+2-j_0} = F_n^* \widehat{D}_k e_{n+2-j_0} = \\ = d_{j_0}^{(k)} F_n^* e_{n+2-j_0} = d_{j_0}^{(k)} f_{n+2-j_0}. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Теперь, умножив равенство (5.44) слева на $f_{j_0}^\top$ и справа на f_{n+2-j_0}, получим соотношение

$$f_{j_0}^\top C_1 L_1^\top f_{n+2-j_0} - f_{j_0}^\top L_1 C_1^\top f_{n+2-j_0} =$$
$$= f_{j_0}^\top C_2 C_1^\top f_{n+2-j_0} - f_{j_0}^\top C_1 C_2^\top f_{n+2-j_0},$$

или

$$\left(C_1^\top f_{j_0}\right)^\top L_1^\top f_{n+2-j_0} - f_{j_0}^\top L_1 C_1^\top f_{n+2-j_0} =$$
$$= \left(C_2^\top f_{j_0}\right)^\top C_1^\top f_{n+2-j_0} - \left(C_1^\top f_{j_0}\right)^\top C_2^\top f_{n+2-j_0}.$$

С учетом (5.53) и (5.54) последнее равенство принимает вид

$$d_{n+2-j_0}^{(1)} f_{n+2-j_0}^* L_1^\top f_{n+2-j_0} - d_{j_0}^{(1)} f_{j_0}^\top L_1 f_{n+2-j_0} =$$
$$= d_{n+2-j_0}^{(2)} f_{n+2-j_0}^* d_{j_0}^{(1)} f_{n+2-j_0} - d_{n+2-j_0}^{(1)} f_{n+2-j_0}^* d_{j_0}^{(2)} f_{n+2-j_0}.$$

Поскольку F_n — унитарная матрица, имеем $f_{n+2-j_0}^* f_{n+2-j_0} = 1$. Следовательно,

$$d_{n+2-j_0}^{(1)} f_{n+2-j_0}^* L_1^\top f_{n+2-j_0} - d_{j_0}^{(1)} f_{j_0}^\top L_1 f_{n+2-j_0} =$$
$$= d_{n+2-j_0}^{(2)} d_{j_0}^{(1)} - d_{n+2-j_0}^{(1)} d_{j_0}^{(2)}.$$

Если выполнены равенства (5.51), то обе части этого соотношения обращаются в нуль и неизвестные $d_{j_0}^{(2)}$ и $d_{n+2-j_0}^{(2)}$ могут быть выбраны произвольным образом.

Заметим, что в силу (5.50) из равенства $C_1 C_1^\top = 0$ следует, что $d_1^{(1)} = 0$. Поэтому условия (5.51) могут иметь место для какого-то j_0 лишь при $n \geq 5$. Действительно, чтобы одновременно выполнялись соотношения $C_1 C_1^\top = 0$ и $C_1 \neq 0$, необходимо наличие у C_1 хотя бы одной пары ненулевых собственных значений $d_j^{(1)}$ и $d_{n+2-j}^{(1)}$.

В заключение исследуем пары теплицевых матриц T_1 и T_2, характеризуемые матрицей J_2. Аналогом леммы 5.4.2 здесь будет

Лемма 5.4.3. *Пусть S — ненулевой косой циркулянт с первым столбцом $s = (s_0, -s_{n-1}, -s_{n-2}, \ldots, -s_1)^\top$, а L — строго нижнетреугольная теплицева матрица, поддиагональные элементы которой противоположны поддиагональным элементам S. Матрица $SL^\top - LS^\top$ тогда и только тогда является косым циркулянтом, когда S удовлетворяет соотношению*

$$SS^\top = \nu I_n \tag{5.55}$$

для некоторого комплексного числа ν.

Доказательство леммы 5.4.3 дословно повторяет доказательство леммы 3.2.9 с единственным отличием: ν может быть не только вещественным, но и произвольным комплексным числом. ■

Исследование множества подходящих пар теплицевых матриц, характеризуемых матрицей J_2, схоже с анализом предыдущего случая. Некоторые различия все же имеются.

В данном случае матрица T_1 является косым циркулянтом S_1, а T_2 — суммой косого циркулянта S_2 и строго нижнетреугольной теплицевой матрицы L_1, поддиагональная часть которой противоположна поддиагональной части S_1. Подстановка представлений для T_1 и T_2 в условие (5.16) дает уравнение

$$S_1 L_1^\top - L_1 S_1^\top = S_2 S_1^\top - S_1 S_2^\top. \tag{5.56}$$

Правая часть этого соотношения есть косой циркулянт, поэтому косым циркулянтом должна быть и левая часть. Согласно лемме 5.4.3, для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица S_1 удовлетворяла соотношению (5.55) при некотором числе ν. Снова рассмотрим два случая, определяемых тем, равен или не равен нулю параметр ν.

Начнем со случая $\nu \neq 0$. Зададим S_1 как (ненулевое) кратное некоторого ортогонального косого циркулянта, определив тем самым матрицу $S_3 = S_1 L_1^\top - L_1 S_1^\top$. Теперь матрица S_2 может быть получена как решение уравнения

$$S_2 S_1^\top - S_1 S_2^\top = S_3. \tag{5.57}$$

Представим косые циркулянты S_1, S_2 и S_3 их спектральными разложениями

$$\begin{aligned} S_1 &= G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*, \\ S_2 &= G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*, \\ S_3 &= G_{-1} F_n^* D_3 F_n G_{-1}^*. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Поскольку S_1 и S_3 известны, матрицы D_1 и D_3 определены. Остается найти диагональные элементы матрицы D_2.

Подставив разложения (5.58) в (5.57) и выполнив несложные преобразования, получим

$$D_2 \widetilde{D}_1 - D_1 \widetilde{D}_2 = D_3. \tag{5.59}$$

Представим матрицы D_1, D_2, D_3 в виде (5.48). Матрица S_3 кососимметрична, поэтому в силу леммы 1.2.26 выполняются равенства

$$\begin{aligned} d_1^{(3)} &= -d_2^{(3)}, \\ d_j^{(3)} &= -d_{n+3-j}^{(3)}, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil + 1. \end{aligned}$$

Заметим, что при $n = 2l + 1$ и $j = l + 2$ имеем $d_{l+2}^{(3)} = -d_{l+2}^{(3)}$, откуда следует, что $d_{l+2}^{(3)} = 0$.

От матричного равенства (5.59) перейдем к поэлементным соотношениям

$$\begin{aligned} & d_1^{(2)} d_2^{(1)} - d_1^{(1)} d_2^{(2)} = d_1^{(3)}, \\ & d_j^{(2)} d_{n+3-j}^{(1)} - d_j^{(1)} d_{n+3-j}^{(2)} = d_j^{(3)}, \quad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Соотношение, получаемое при $n = 2l+1$ и $j = l+2$, выполняется тождественно.

Исследуем разрешимость уравнений (5.60) относительно чисел $d_j^{(2)}$. Условие (5.55), которому должна удовлетворять матрица $S = S_1$, можно с помощью разложений (5.58) преобразовать в соотношение

$$D_1 \widetilde{D}_1 = \nu I_n.$$

В поэлементной записи имеем

$$\begin{aligned} &d_1^{(1)} d_2^{(1)} = \nu, \\ &d_j^{(1)} d_{n+3-j}^{(1)} = \nu, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil + 1. \end{aligned} \tag{5.61}$$

В каждом из нетривиальных уравнений (5.60) коэффициенты при неизвестных $d_j^{(2)}$ и $d_{n+3-j}^{(2)}$ отличны от нуля в силу условий (5.61) и $\nu \neq 0$. В таких уравнениях одно из неизвестных можно выразить как (линейную) функцию от другого. При $n = 2l + 1$ уравнение в (5.60), отвечающее индексу $j = l + 2$, превращается в нулевое тождество. Поэтому значение соответствующей величины $d_j^{(2)}$ может быть выбрано произвольно. После того как матрица D_2 определена, с помощью средней формулы в (5.58) восстанавливаем матрицу S_2. Теперь известны обе теплицевы матрицы T_1 и T_2. Соответствующие им ганкелевы матрицы перестановочны и образуют пару из класса *ПГКМ_9*.

Теперь рассмотрим случай $\nu = 0$. Если в равенствах (5.61) для каждого j $(j \geq 3)$ одно из чисел $d_j^{(1)}$ или $d_{n+3-j}^{(1)}$ отлично от нуля и это же верно в отношении пары $\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}\right)$, то проходят те же рассуждения, что и выше, и прежним способом получаем пары матриц из класса *ПГКМ_9*. Будем теперь считать, что это предположение нарушено при $j_0 = 1$ или $j_0 \geq 3$, т.е. верна хотя бы одна из пар соотношений

$$\left[\begin{aligned} &d_1^{(1)} = d_2^{(1)} = 0, \quad j_0 = 1, \\ &d_{j_0}^{(1)} = d_{n+3-j_0}^{(1)} = 0, \quad j_0 \geq 3. \end{aligned} \right. \tag{5.62}$$

Последующий анализ разобьем на два случая. Пусть сначала $j_0 \geq 3$. Введем векторы

$$u_1 = G_{-1} F_n^* e_{j_0}, \quad u_2 = G_{-1} F_n^* e_{n+3-j_0}.$$

Это столбцы матрицы $U = G_{-1} F_n^*$, соответствующие числам $d_{j_0}^{(1)}$ и $d_{n+3-j_0}^{(1)}$.

Для дальнейшего нам потребуется следующее наблюдение:

$$\begin{gathered} u_2 = G_{-1}F_n^* e_{n+3-j_0} = G_{-1}F_n^* Q_2 e_{j_0} = \\ = \{\text{по лемме 1.2.20 для } \xi = -1\} = \\ = G_{-1}F_n^* F_n G_{-1}^{-1} G_{-1}^* F_n e_{j_0} = \\ = G_{-1}^* F_n e_{j_0} = \overline{G_{-1}F_n^* e_{j_0}} = \overline{u}_1. \end{gathered} \tag{5.63}$$

Вычислим действия матриц $S_k^\top$ на векторы u_1 и u_2:

$$\begin{gathered} S_k^\top u_1 = G_{-1}F_n^* \widetilde{D}_k F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* e_{j_0} = G_{-1}F_n^* \widetilde{D}_k e_{j_0} = \\ = d_{n+3-j_0}^{(k)} G_{-1}F_n^* e_{j_0} = d_{n+3-j_0}^{(k)} u_1 = \\ = \{\text{в силу (5.63)}\} = d_{n+3-j_0}^{(k)} \overline{u}_2, \end{gathered} \tag{5.64}$$

$$\begin{gathered} S_k^\top u_2 = G_{-1}F_n^* \widetilde{D}_k F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* e_{n+3-j_0} = \\ = G_{-1}F_n^* \widetilde{D}_k e_{n+3-j_0} = d_{j_0}^{(k)} G_{-1}F_n^* e_{n+3-j_0} = d_{j_0}^{(k)} u_2. \end{gathered} \tag{5.65}$$

Теперь, умножив равенство (5.56) слева на $u_1^\top$ и справа на u_2, получим соотношение

$$u_1^\top S_1 L_1^\top u_2 - u_1^\top L_1 S_1^\top u_2 = u_1^\top S_2 S_1^\top u_2 - u_1^\top S_1 S_2^\top u_2,$$

или

$$\left(S_1^\top u_1\right)^\top L_1^\top u_2 - u_1^\top L_1 S_1^\top u_2 = \left(S_2^\top u_1\right)^\top S_1^\top u_2 - \left(S_1^\top u_1\right)^\top S_2^\top u_2.$$

С учетом (5.64) и (5.65) последнее равенство принимает вид

$$\begin{gathered} d_{n+3-j_0}^{(1)} u_2^* L_1^\top u_2 - d_{j_0}^{(1)} u_1^\top L_1 u_2 = \\ = d_{n+3-j_0}^{(2)} u_2^* d_{j_0}^{(1)} u_2 - d_{n+3-j_0}^{(1)} u_2^* d_{j_0}^{(2)} u_2. \end{gathered} \tag{5.66}$$

Столбец u_2 унитарной матрицы U имеет единичную длину, поэтому (5.66) можно переписать как

$$d_{n+3-j_0}^{(1)} u_2^* L_1^\top u_2 - d_{j_0}^{(1)} u_1^\top L_1 u_2 = d_{n+3-j_0}^{(2)} d_{j_0}^{(1)} - d_{n+3-j_0}^{(1)} d_{j_0}^{(2)}. \tag{5.67}$$

Если (5.62) выполнено для $j_0 \geq 3$, то обе части соотношения (5.67) обращаются в нуль и неизвестные $d_{j_0}^{(2)}$ и $d_{n+3-j_0}^{(2)}$ могут быть выбраны произвольным образом.

Пусть теперь $j_0 = 1$. Положим

$$u_1 = G_{-1}F_n^* e_1, \quad u_2 = G_{-1}F_n^* e_2.$$

Это первые два столбца матрицы U. Они соответствуют числам $d_1^{(1)}$ и $d_2^{(1)}$.

Снова замечаем, что

$$
\begin{gathered}
u_2 = G_{-1}F_n^* e_2 = G_{-1}F_n^* Q_2 e_1 = \\
= \{\text{по лемме 1.2.20 для } \xi = -1\} = G_{-1}F_n^* F_n G_{-1}^{-1} G_{-1}^* F_n e_1 = \\
= \overline{G_{-1}F_n^* e_1} = \overline{u}_1.
\end{gathered}
$$

Действия матриц $S_k^\top$ на векторы u_1 и u_2 вычисляются по формулам

$$
\begin{gathered}
S_k^\top u_1 = G_{-1}F_n^* \widetilde{D}_k F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* e_1 = \\
= d_2^{(k)} G_{-1} F_n^* e_1 = d_2^{(k)} u_1 = d_2^{(k)} \overline{u}_2,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
S_k^\top u_2 = G_{-1}F_n^* \widetilde{D}_k F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* e_2 = \\
= d_1^{(k)} G_{-1} F_n^* e_2 = d_1^{(k)} u_2.
\end{gathered}
$$

Проделаем для (5.56) преобразования, аналогичные тем, что описаны выше для случая $j_0 \geq 3$. В результате приходим к соотношению

$$
d_2^{(1)} u_2^* L_1^\top u_2 - d_1^{(1)} u_1^\top L_1 u_2 = d_2^{(2)} d_1^{(1)} - d_2^{(1)} d_1^{(2)}. \tag{5.68}
$$

Если $d_1^{(1)} = d_2^{(1)} = 0$, то обе части этого соотношения обращаются в нуль и неизвестные $d_1^{(2)}$ и $d_2^{(2)}$ могут быть выбраны произвольным образом.

Определив матрицу D_2, завершаем построение пары перестановочных ганкелевых матриц из класса *ПГКМ_9* уже известным способом.

Отметим, что условия (5.62) могут иметь место для какого-то j_0 лишь при $n \geq 4$. Действительно, чтобы одновременно выполнялись соотношения $SS^\top = 0$ и $S \neq 0$, необходимо наличие у S хотя бы одной пары ненулевых собственных значений.

Проведенный анализ случая в) завершает доказательство теоремы 5.3.1.

5.5 Вывод вещественного критерия перестановочности ганкелевых матриц из комплексного

В этом заключительном разделе данной главы покажем, как утверждения теоремы 5.1.1 получаются из формулировки теоремы 5.3.1.

Всякая пара вещественных перестановочных ганкелевых матриц является комплексной. Поэтому она должна принадлежать хотя бы одному из классов *ПГКМ*. Следовательно, чтобы получить все пары вещественных перестановочных ганкелевых матриц, нужно проанализировать классы *ПГКМ* и выделить из них пары вещественных представителей.

Очевидно, что если в описании первых четырех классов *ПГКМ* все параметры взять вещественными, то получим первые четыре класса *ПГВМ*.

Далее рассмотрим класс *ПГКМ_ 5*. Для каждой пары перестановочных комплексных ганкелевых матриц H_1 и H_2 данного класса по соответствующим им теплицевым матрицам T_1 и T_2 построим матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ вида (5.21), (5.23). В этом случае $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — матрицы ранга два и поэтому связаны посредством матрицы W формулой (1.35). При этом матрица W имеет различные собственные значения ξ и ξ^{-1}. Поэтому $\xi \neq \pm 1$.

Поделим все множество пар ганкелевых матриц данного класса на два подмножества, соответствующих случаям $|\xi| = 1$ и $|\xi| \neq 1$, и рассмотрим их по отдельности.

Пусть сначала $|\xi| = 1$. Обозначим $\xi = \alpha + i\beta$. Так как в этом случае пары матриц T_1 и T_2 определены с точностью до комплексного V-преобразования 2-го типа, то можно считать, что матрицы W для рассматриваемого подмножества имеют вид $W = \mathrm{diag}(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta)$. Совершим со всеми такими парами соответствующих теплицевых матриц комплексное V-преобразование 2-го типа с матрицей

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

При таком преобразовании получаем множество пар комплексных теплицевых матриц, характеризуемых матрицами вида

$$\widetilde{W}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+i\beta & \\ & \alpha-i\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+i\beta & -i\alpha+\beta\\ -i\alpha-\beta & \alpha-i\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы $\widetilde{W}$ вещественны. Из полученного после преобразований множества возьмем пару ненулевых вещественных теплицевых матриц T_1 и T_2 как представителей этого случая. Пусть T_1 — теплицева матрица с первой строкой $(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1})$ и первым столбцом $\left(a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-(n-1)}\right)^\top$, а T_2 — теплицева матрица с первой строкой $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ и первым столбцом $\left(b_0, b_{-1}, \ldots, b_{-(n-1)}\right)^\top$. Введем матрицу $C = T_1 + iT_2$ с первой строкой $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ и первым столбцом $\left(c_0, c_{-1}, \ldots, c_{-(n-1)}\right)^\top$. Считаем, что $C \neq 0$.

Из определения матриц T_1 и T_2 получаем

$$T_1=\frac{C+\overline{C}}{2},\quad T_2=\frac{C-\overline{C}}{2i}. \tag{5.69}$$

С учетом вида матрицы $\widetilde{W}$ имеем

$$c_{-j}=a_{-j}+ib_{-j}=\alpha a_{n-j}-\beta b_{n-j}+i(\beta a_{n-j}+\alpha b_{n-j})=$$
$$=(\alpha+i\beta)a_{n-j}+i(\alpha+i\beta)b_{n-j}=(\alpha+i\beta)c_{n-j}=\xi c_{n-j}.$$

Получаем, что C — ξ-циркулянт с $|\xi|=1$.

Напомним, что условие коммутрирования ганкелевых матриц эквивалентно следующему соотношению для соответствующих теплицевых матриц

$$T_1T_2^\top=T_2T_1^\top,$$

которое с учетом (5.69) принимает вид

$$\left(C+\overline{C}\right)\left(C-\overline{C}\right)^\top=\left(C-\overline{C}\right)\left(C+\overline{C}\right)^\top.$$

После преобразований имеем условие

$$CC^\top-CC^*+\overline{C}C^\top-\overline{C}C^*=CC^\top+CC^*-\overline{C}C^\top-\overline{C}C^*,$$

упрощающееся до вида

$$CC^* = \overline{CC^*}. \tag{5.70}$$

Так как $|\xi| = 1$, то в спектральном разложении (1.49) для $\varphi = \xi$ для матрицы G_ξ справедливо соотношение $G_\xi^{-1} = \overline{G_\xi}$, поэтому C^* также будет ξ-циркулянтом. В силу леммы 1.2.15 матрица CC^* — ξ-циркулянт. Условие (5.70) означает вещественность матрицы CC^*, поэтому, так как ξ не является вещественным числом, приходим к соотношению

$$CC^* = \nu I_n, \tag{5.71}$$

где $\nu \in \mathbf{R}$. Элемент матрицы CC^* в позиции $(1,1)$ равен сумме квадратов модулей элементов первой строки матрицы C, поэтому $\nu \geq 0$. Если $\nu = 0$, то и $C = 0$, но рассматривается лишь случай $C \neq 0$, следовательно, $\nu > 0$. Представим $C = \sqrt{\nu}C_1$. Подставив это в (5.71), имеем

$$C_1 C_1^* = I_n.$$

Приходим к описанию класса *ПГВМ_ 5*.

Теперь исследуем случай $|\xi| \neq 1$. Если в описании класса *ПГКМ_ 5* $|\xi| \neq 1$, то, взяв все параметры вещественными, получаем класс *ПГВМ_ 6*.

Далее рассмотрим класс *ПГКМ_ 6*. Условия вещественности соответствующих циркулянтов C_1 и C_2 в силу леммы 1.2.23 имеют вид

$$d_{n+2-j}^{(1)} = \overline{d_j^{(1)}}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

$$d_{n+2-j}^{(2)} = \overline{d_j^{(2)}}, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

из которых получаем, что соотношения (5.10) для вещественных C_1 и C_2 превращаются в равенства (5.1), характеризующие класс *ПГВМ_ 7*.

Записав для представителей класса *ПГКМ_ 7* условия вещественности соответствующих косых циркулянтов S_1 и S_2

$$d_2^{(1)} = \overline{d_1^{(1)}},$$

$$d_{n+3-j}^{(1)} = \overline{d_j^{(1)}}, \quad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

$$d_2^{(2)} = \overline{d_1^{(2)}},$$

$$d_{n+3-j}^{(2)} = \overline{d_j^{(2)}}, \quad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

приходим к выводу о превращении соотношений (5.11) в (5.2), фигурирующие в описании класса *ПГВМ_ 8*.

Анализ классов *ПГКМ_ 8* и *ПГКМ_ 9* почти идентичен. При $\nu \neq 0$, взяв все параметры вещественными, получаем классы *ПГВМ_ 9* и *ПГВМ_ 10*. Если же $\nu = 0$, то для вещественных матриц C и S в силу условий (5.12) и (5.15), записанных в позиции $(1, 1)$ сумма квадратов элементов первых строк равна нулю, что свидетельствует о равенстве нулю самих матриц C и S и соответственно $T_1 = H_1 = 0$ для обоих классов. Такая ситуация невозможна в силу условия теоремы о том, что перестановочные ганкелевы матрицы ненулевые.

Таким образом, все классы теоремы 5.1.1 выведены и из описания теоремы 5.3.1.

Глава 6

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ТЕПЛИЦЕВА И ГАНКЕЛЕВА МАТРИЦЫ

В этой заключительной главе мы опишем решение задачи о коммутировании теплицевой и ганкелевой матриц.

6.1 Критерий перестановочности комплексных теплицевой и ганкелевой матриц

Задача о перестановочности теплицевой и ганкелевой матриц заключается в описании всех пар (T, H) таких, что T — теплицева, а H — ганкелева матрица и

$$TH = HT.$$

Первоначально эта задача была решена для комплексного случая [31, 42, 48, 49], и лишь потом было дано решение для вещественных пар (T, H). Поэтому при описании обоих решений будем следовать тому же порядку.

Условия перестановочности теплицевой и ганкелевой матриц сформулируем в виде следующего критерия.

Теорема 6.1.1. *Ненулевые теплицева матрица $T \in M_n(\mathbf{C})$ и ганкелева матрица $H \in M_n(\mathbf{C})$ коммутируют тогда и только только, когда T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:*

Класс ПТГКМ_1. Матрица T — скалярная, а H — произвольная ганкелева матрица.

Класс ПТГКМ_2. Матрицы T и H имеют вид

$$T = A, \quad H = \alpha\mathcal{P}_n + \beta A\mathcal{P}_n.$$

Здесь A — произвольная симметричная теплицева матрица, а α и β — произвольные комплексные числа.

Класс ПТГКМ_3. Матрицы T и H имеют вид

$$T = t_0 I_n + (1+\alpha)L + (1-\alpha)L^\top,$$
$$H = \beta\left(L + L^\top\right)\mathcal{P}_n,$$

где L — нижнетреугольная теплицева матрица, имеющая нули в первом столбце в позициях $1, 2, \ldots, \lceil n/2 \rceil$, а α и β — произвольные комплексные числа.

Класс ПТГКМ_4. Матрица T является циркулянтом

$$T = F_n{}^* D_1 F_n,$$

а H — ганкелевым циркулянтом

$$H = F_n{}^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ — диагональные матрицы; при этом

$$d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)} - d_{n+2-j}^{(1)}\right) = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Класс ПТГКМ_5. Матрица T является косым циркулянтом

$$T = G_{-1} F_n{}^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H — ганкелевым косым циркулянтом

$$H = G_{-1} F_n{}^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n.$$

Диагональные матрицы $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ должны удовлетворять соотношениям

$$d_1^{(2)}\left(d_1^{(1)} - d_2^{(1)}\right) = 0, \qquad d_2^{(2)}\left(d_2^{(1)} - d_1^{(1)}\right) = 0,$$
$$d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)} - d_{n+3-j}^{(1)}\right) = 0, \qquad j = 3, 4, \ldots, n.$$

Класс ПТГКМ_6. Порядок n — четное число. Матрица T является линейным многочленом от кососимметричного и инволютивного косого циркулянта S:

$$T = t_0 I_n + \alpha S.$$

Матрица H задается формулой

$$H = \beta \left(C - S^{-1} C S \right) \mathcal{P}_n,$$

где C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S. Как и выше, α и β — произвольные комплексные числа.

Класс ПТГКМ_7. Матрицы T и H задаются формулами

$$T = \alpha \left(C_1 + S - C^{-1} S C \right),$$

$$H = \beta C \mathcal{P}_n.$$

Здесь C — симметричный инволютивный циркулянт, S — косой циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы C, C_1 — симметричный циркулянт, а α и β — произвольные комплексные числа.

Класс ПТГКМ_8. Матрицы T и H задаются формулами

$$T = \alpha \left(S_1 + C - S^{-1} C S \right),$$

$$H = \beta S \mathcal{P}_n.$$

При этом S — симметричный инволютивный косой циркулянт, C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S, S_1 — симметричный косой циркулянт, а α и β — произвольные комплексные числа.

Класс ПТГКМ_9. Порядок n — четное число. Матрица T имеет вид

$$T = \alpha \left(t_0 I_n + 2S + C - S^{-1} C S \right),$$

где S — кососимметричный инволютивный косой циркулянт, а C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S. Матрица

H задается формулой

$$H = \beta\left(C - S^{-1}CS\right)\mathcal{P}_n.$$

Комплексные числа α и β произвольны.

Класс ПТГКМ_10. Матрицы T и H задаются формулами

$$T = \alpha\left(t_0 I_n + Z - iZ^\top\right),$$

$$H = \beta\left(Z + Z^\top\right)\mathcal{P}_n,$$

где Z — инволютивный φ-циркулянт, причем $|\varphi| = 1$, $\varphi \neq \pm 1$, а α и β — произвольные комплексные числа.

6.2 Доказательство критерия перестановочности в комплексном случае

Докажем теорему 6.1.1. От пары (T, H) перейдем к паре (T_1, T_2), где $T_1 = T$, а T_2 является теплицевой матрицей, соответствующей ганкелевой матрице H, т.е. $H = T_2\mathcal{P}_n$. Нижний индекс этих теплицевых матриц показывает, какой из матриц исходной пары они соответствуют. Положим

$$\{T_1\}_{km} = t_{m-k}, \qquad \{T_2\}_{km} = h_{m-k}.$$

Основное соотношение перестановочности приобретает вид

$$T_1 T_2 \mathcal{P}_n = T_2 \mathcal{P}_n T_1.$$

После умножения справа на $\mathcal{P}_n$ получаем

$$T_1 T_2 = T_2 \mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n.$$

По лемме 1.2.27, матрица T_1 удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n = T_1^\top.$$

Используя его, находим

$$T_1 T_2 - T_2 T_1^\top = 0. \tag{6.1}$$

Полное описание решений уравнения (6.1) даст нам все требуемые пары перестановочных матриц.

6.2.1 Три особых случая

Прежде чем описывать решение уравнения (6.1) в общем случае, рассмотрим три специальных ситуации.

6.2.1.1 T_1 и T_2 — циркулянты

Пусть сначала матрицы T_1 и T_2 являются циркулянтами

$$T_1 = F_n^* D_1 F_n, \tag{6.2}$$

$$T_2 = F_n^* D_2 F_n, \tag{6.3}$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Согласно лемме 1.2.18,

$$T_1^\top = F_n^* \widehat{D}_1 F_n, \tag{6.4}$$

где $\widehat{D}_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, d_{n-1}^{(1)}, \ldots, d_2^{(1)}\right)$. Подстановка выражений (6.2), (6.3) и (6.4) для матриц T_1, T_2 и $T_1^\top$ в уравнение (6.1) приводит к соотношению

$$F_n^* D_1 F_n F_n^* D_2 F_n - F_n^* D_2 F_n F_n^* \widehat{D}_1 F_n = 0,$$

которое эквивалентно равенству

$$D_2\left(D_1 - \widehat{D}_1\right) = 0.$$

Мы получили условие на спектры циркулянтов, один из которых является теплицевой компонентой решения, а другой соответствует ганкелевой компоненте. Всякая пара циркулянтов, удовлетворяющая этому условию, порождает пару (T, H) из класса *ПТГКМ_4*.

6.2.1.2 T_1 и T_2 — косые циркулянты

Пусть теперь T_1 и T_2 являются косыми циркулянтами

$$T_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*, \tag{6.5}$$

$$T_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*, \tag{6.6}$$

где $D_1=\operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$и $D_2=\operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ — диагональные матрицы.

Используя лемму 1.2.21, имеем

$$T_1^{\top} = G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_1 F_n G_{-1}^*, \tag{6.7}$$

где $\widetilde{D}_1 = \operatorname{diag}\left(d_2^{(1)}, d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, d_{n-1}^{(1)}, \ldots, d_3^{(1)}\right)$.

Подстановка выражений (6.5), (6.6) и (6.7) для матриц T_1, T_2 и $T_1^{\top}$ в уравнение (6.1) приводит к соотношению

$$G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* -$$

$$- G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_1 F_n G_{-1}^* = 0,$$

или, после упрощения,

$$D_2 \left(D_1 - \widetilde{D}_1\right) = 0.$$

Это равенство есть условие на спектры косых циркулянтов, один из которых является теплицевой компонентой решения, а другой соответствует ганкелевой компоненте. Всякая пара косых циркулянтов, удовлетворяющая этому условию, порождает пару (T, H) из класса *ПТГКМ_5*.

6.2.1.3 T_1 — симметричная матрица

Если матрица T_1 симметрична, то уравнение (6.1) приобретает вид

$$T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

Приходим к частному случаю задачи о коммутирующих теплицевых матрицах, полное решение которой было получено в теореме 4.1.1.

В случае, если матрица T_1 скалярная, матрица T_2 может быть выбрана произвольным образом. Получаем пару из класса *ПТГКМ_1*. Этот класс регистрирует очевидный факт: всякая скалярная матрица коммутирует с произвольной, в том числе и с любой ганкелевой матрицей.

В дальнейшем считаем, что матрица T_1 имеет хотя бы один ненулевой внедиагональный элемент. Это предположение исключает ситуацию, когда T_1 и T_2 одновременно являются верхними или нижними треугольными матрицами, поскольку матрица T_1 симметрична.

Если T_2 является линейным многочленом с комплексными коэффициентами от T_1, получаем пару из класса *ПТГКМ_2*.

Осталось проанализировать ситуацию, когда T_1 и T_2 — φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6.2.1. *Пусть C — симметричный φ-циркулянт. Тогда* $\varphi = \pm 1$.

Доказательство леммы 6.2.1. Рассмотрим ненулевой элемент c_j циркулянта C. Имеем

$$c_j = \{\text{матрица } C \text{ симметрична}\} = c_{-j} =$$
$$= \{\text{матрица } C - \varphi\text{-циркулянт}\} = \varphi c_{n-j} =$$
$$= \{\text{матрица } C \text{ симметрична}\} = \varphi c_{-(n-j)} =$$
$$= \{\text{матрица } C - \varphi\text{-циркулянт}\} = \varphi^2 c_j,$$

или

$$\left(1 - \varphi^2\right) c_j = 0.$$

Так как $c_j \neq 0$, то $\varphi^2 = 1$. ■

Согласно лемме 6.2.1 симметричная матрица T_1 в паре φ-циркулянтов обязана быть обычным циркулянтом или косым циркулянтом, а тогда тот же тип имеет матрица T_2. Однако такие пары уже были рассмотрены в двух предыдущих разделах.

6.2.2 Основной подход

Теперь опишем основной подход к решению уравнения (6.1). Изучим вначале простейшие ситуации, когда одна или обе матрицы являются диагональными.

Случай диагональной матрицы T_1 был уже рассмотрен. Если матрица T_2 диагональная, то T_1 должна быть симметричной. Получаем подкласс класса *ПТГКМ_2* ($\beta = 0$), соответствующий ганкелевым матрицам вида $H = \alpha\mathcal{P}_n$.

Пусть теперь ни одна из матриц T_1 и T_2 не является диагональной. Представим T_1 и T_2 как

$$T_1 = t_0 I_n + \widehat{T}_1, \qquad T_2 = h_0 I_n + \widehat{T}_2.$$

Подставляя эти выражения в (6.1), получаем равенство

$$\left(t_0 I_n + \widehat{T}_1\right)\left(h_0 I_n + \widehat{T}_2\right) - \left(h_0 I_n + \widehat{T}_2\right)\left(t_0 I_n + \widehat{T}_1^\top\right) = 0,$$

эквивалентное соотношению

$$\widehat{T}_1 \widehat{T}_2 - \widehat{T}_2 \widehat{T}_1^\top = h_0 \left(\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\right). \tag{6.8}$$

Всякую квадратную матрицу можно однозначно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц. Запишем такие представления

$$\widehat{T}_1 = A_1 + B_1 \tag{6.9}$$

и

$$\widehat{T}_2 = A_2 + B_2 \tag{6.10}$$

для наших матриц $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$. Всюду в дальнейшем символ "A" указывает на симметрию матрицы, а "B" — на косую симметрию. Нижний индекс, равный единице или двойке, означает принадлежность к теплицевой компоненте решения или к теплицевой матрице, соответствующей ганкелевой компоненте.

Подстановка представления (6.10) в (6.8) дает

$$\widehat{T}_1 (A_2 + B_2) - (A_2 + B_2)\, \widehat{T}_1^\top = h_0 \left(\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\right). \tag{6.11}$$

Считаем, что матрица $\widehat{T}_1$ не является симметричной, так как иначе придем к уже рассмотренной ситуации.

Дальнейшее исследование уравнения (6.11) разобьем на два взаимоисключающих случая: а) матрица $\widehat{T}_2$ не является симметричной ($B_2 \neq 0$); б) $\widehat{T}_2$ симметрична ($B_2 = 0$). Каждому из этих случаев ниже отведен свой раздел.

В дальнейшем часто будем использовать следующий факт. Если в паре (T, H) матрицы коммутируют, то это же верно для любой пары вида $(\alpha T, \beta H)$, где α и β — произвольные константы.

6.2.3 Ганкелева матрица не персимметрична

В этом случае матрица T_2 несимметрична, а потому $B_2 \neq 0$.

Транспонируя равенство (6.11) и умножая его затем на минус единицу, получаем

$$\widehat{T}_1 (A_2 - B_2) - (A_2 - B_2)\, \widehat{T}_1^\top = h_0 \left(\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\right). \qquad (6.12)$$

Вычитая (6.12) из (6.11), имеем

$$\widehat{T}_1 B_2 - B_2 \widehat{T}_1^\top = 0. \qquad (6.13)$$

Подставляя представления (6.9) в (6.13), находим

$$(A_1 + B_1)\, B_2 - B_2\, (A_1 - B_1) = 0. \qquad (6.14)$$

Умножив это соотношение слева на $(-\mathcal{P}_n)$ и справа на $\mathcal{P}_n$, получим

$$(A_1 - B_1)\, B_2 - B_2\, (A_1 + B_1) = 0. \qquad (6.15)$$

Вычитая это равенство из (6.14), приходим к соотношению

$$B_1 B_2 + B_2 B_1 = 0. \qquad (6.16)$$

Применяя к этому соотношению лемму 1.2.28, заключаем, что возможны лишь две ситуации: матрицы B_1 и B_2 являются циркулянтами либо обе они — косые циркулянты. В каждом из этих случаев B_1 и B_2 суть делители нуля.

6.2.3.1 B_1 и B_2 — циркулянты

В этом случае соотношение (6.15) принимает вид

$$A_1 B_2 = B_2 A_1.$$

Из теоремы 4.1.1 следует, что матрица A_1 должна быть, как и B_2, циркулянтом. Поскольку и B_1 — циркулянт, матрица $\widehat{T}_1$ также является циркулянтом (см. формулу (6.9)). Подчеркнем это обстоятельство обозначением $\widehat{T}_1 = C_1$ и запишем с его помощью соотношение (6.8):

$$C_1 \widehat{T}_2 - \widehat{T}_2 C_1^\top = h_0 \left(C_1^\top - C_1\right).$$

Перепишем это соотношение еще раз, представив $\widehat{T_2}$ в виде $\widehat{T_2} = C_2 + S_2$, где C_2 — циркулянт, а S_2 — косой циркулянт:

$$C_1S_2 - S_2C_1^\top = C_2C_1^\top - C_1C_2 + h_0\left(C_1^\top - C_1\right). \qquad (6.17)$$

В правой части равенства (6.17) стоит циркулянт, значит, и матрица в левой части должна быть циркулянтом. Чтобы найти условия, при которых это возможно, нам потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 6.2.2. *Пусть C — циркулянт, а S — косой циркулянт, причем обе матрицы нескалярные и имеют один и тот же порядок. Матрица $CS - SC^\top$ тогда и только тогда является теплицевой, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S, коллинеарны.*

Доказательство леммы 6.2.2. Пусть C — циркулянт с первой строкой $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, а S — косой циркулянт с первой строкой $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$. Запишем условие теплицевости матрицы $CS - SC^\top$:

$$\left\{CS - SC^\top\right\}_{k,m} = \left\{CS - SC^\top\right\}_{k+1,m+1}, \qquad k,m = 1,\ldots,n-1,$$

что эквивалентно соотношению

$$\sum_{q=1}^{n}\{C\}_{k,q}\{S\}_{q,m} - \sum_{q=1}^{n}\{S\}_{k,q}\{C\}_{m,q} - \\ - \sum_{q=1}^{n}\{C\}_{k+1,q}\{S\}_{q,m+1} + \sum_{q=1}^{n}\{S\}_{k+1,q}\{C\}_{m+1,q} = 0,$$

или, с учетом теплицевости матриц C и S — равенству

$$\sum_{q=1}^{n} c_{q-k}s_{m-q} - \sum_{q=1}^{n} c_{q-k-1}s_{m+1-q} - \\ - \sum_{q=1}^{n} s_{q-k}c_{q-m} + \sum_{q=1}^{n} s_{q-k-1}c_{q-m-1} = 0.$$

Заменим индекс суммирования q на r, полагая $r = q$ в первой и третьей суммах и $r = q - 1$ во второй и четвертой:

$$\sum_{r=1}^{n} c_{r-k} s_{m-r} - \sum_{r=0}^{n-1} c_{r-k} s_{m-r} -$$

$$- \sum_{r=1}^{n} s_{r-k} c_{r-m} + \sum_{r=0}^{n-1} s_{r-k} c_{r-m} = 0.$$

После упрощения получаем

$$c_{n-k} s_{-(n-m)} - c_{-k} s_m - s_{n-k} c_{n-m} + s_{-k} c_{-m} = 0.$$

Поскольку C — циркулянт, а S — косой циркулянт, то

$$c_{n-k} s_m + c_{n-k} s_m + s_{n-k} c_{n-m} + s_{n-k} c_{n-m} = 0.$$

Заменяя здесь $n - k$ на k, имеем

$$c_k s_m = -s_k c_{n-m}, \qquad k, m = 1, \ldots, n-1. \tag{6.18}$$

По векторам

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})^\top, \qquad s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})^\top$$

построим две вспомогательные матрицы $M = cs^\top$ и $K = -s\,(\mathcal{P}_{n-1} c)^\top$ порядка $n - 1$. Равенства (6.18) означают, что $M = K$. Из условия нескалярности матриц C и S следует, что $c \neq 0$ и $s \neq 0$. Применяя лемму 1.2.2, заключаем, что для некоторого $\alpha \neq 0$ выполняются соотношения

$$\begin{cases} s_k = -\alpha c_k, & k = 1, \ldots, n-1, \\ s_{n-m} = \alpha c_m, & \quad m = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} s_k = -\alpha c_k, \\ s_k = \alpha c_{n-k}, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Из этих соотношений выводим, что для всех k верны равенства $c_k = -c_{n-k}$, означающие, что $C^\top = -C$, и равенства $s_k = -s_{n-k}$, эквивалентные условию $S^\top = S$. При этом векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов матриц C и S, пропорциональны с коэффициентом α, так как

$$s_{-k} = -s_{n-k} = \alpha c_{n-k} = \alpha c_{-k}. \qquad \blacksquare$$

Из доказательства леммы 6.2.2 видим, что теплицевость матрицы $CS - SC^\top$ влечет за собой косую симметрию матрицы C и симметрию матрицы S.

Условия перестановочности теплицевой и ганкелевой матриц в рассматриваемом случае получим из следующего утверждения.

Лемма 6.2.3. *Пусть C — ненулевой циркулянт, S — косой циркулянт, и обе матрицы имеют нулевую диагональ. Тогда условие, что матрица $CS - SC^\top$ является циркулянтом, эквивалентно равенству $S = 0$.*

Доказательство леммы 6.2.3. Пусть C — циркулянт с первой строкой $0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, а S — косой циркулянт с первой строкой $0, s_1, \ldots, s_{n-1}$.

Достаточность утверждения очевидна. Докажем его необходимость.

Предположим, что $S \neq 0$. Поскольку обе матрицы C и S ненулевые и имеют нулевую диагональ, они нескалярны и, по лемме 6.2.2, их первые столбцы пропорциональны с некоторым коэффициентом α. Без ограничения общности, можно считать, что $\alpha = 1$, так как при необходимости циркулянт C можно умножить на подходящую ненулевую константу, не изменяя условий леммы. При таком α матрицы C и S имеют одинаковый первый столбец

$$x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})^\top .$$

Записывая с помощью леммы 1.2.3 условие, что матрица $CS - SC^\top = CS + SC$ является циркулянтом, получаем

$$Q_c\,(CS + SC) = (CS + SC)\,Q_c,$$

или

$$C\,(Q_cS - SQ_c) = (SQ_c - Q_cS)\,C,$$

или, используя соотношение $Q_c = Q_s + 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n$ (см. (1.27)),

$$C\left[\left(Q_s + 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)S - S\left(Q_s + 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n\right)\right] =$$

$$= \left[S\left(Q_s + 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right) - \left(Q_s + 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right)S\right]C.$$

Поскольку S — косой циркулянт, это равенство можно привести к виду

$$Ce_1e_n^\top S - CSe_1e_n^\top = Se_1e_n^\top C - e_1e_n^\top SC,$$

или, умножая это равенство справа на $\mathcal{P}_n$, — к виду

$$Ce_1\left(Se_1\right)^\top - CSe_1e_1^\top = Se_1\left(Ce_1\right)^\top - e_1\left(CSe_1\right)^\top.$$

Ввиду условий $Ce_1 = Se_1 = x$ получаем

$$xx^\top - Cxe_1^\top = xx^\top - e_1(Cx)^\top,$$

что эквивалентно равенству

$$Cxe_1^\top - e_1(Cx)^\top = 0.$$

В первой из матриц, стоящих в левой части, все столбцы, кроме первого, нулевые, а во второй нулевыми являются все строки, кроме первой. Поэтому $\{Cx\}_j = 0$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

Положим $\{Cx\}_1 = \xi$, тогда $Cx = \xi e_1$. Первым столбцом циркулянта C^2 является вектор Cx. Следовательно,

$$C^2 = \xi I_n.$$

Согласно лемме 1.2.4, вектор g, состоящий из одних единиц, будет собственным вектором для циркулянта C:

$$Cg = \lambda g.$$

Из соотношений $\mathcal{P}_n g = g$ и $\mathcal{P}_n C = -C\mathcal{P}_n$ выводим

$$\lambda g = \lambda \mathcal{P}_n g = \mathcal{P}_n\left(\lambda g\right) = \mathcal{P}_n\left(Cg\right) = -C\mathcal{P}_n g = -Cg = -\lambda g.$$

Поэтому $\lambda = 0$ и $Cg = 0$. Теперь имеем

$$\xi g = \xi I_n g = C^2 g = 0,$$

откуда $\xi = 0$ и, как следствие, $C^2 = 0$. Такое равенство возможно для циркулянта C только в случае, если $C = 0$, а тогда и $S = 0$. Эти выводы противоречат и условию леммы, и исходному предположению $S \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

Из лемм 6.2.2 и 6.2.3 следует, что в рассматриваемом случае должно быть $S_2 = 0$, т.е. матрица $\widehat{T}_2$ является циркулянтом. Но и $\widehat{T}_1$ — ненулевой циркулянт, поэтому мы не получаем ничего нового по сравнению с разделом 6.2.1.1.

6.2.3.2 B_1 и B_2 — косые циркулянты

И в этом случае соотношение (6.15) имеет вид

$$A_1 B_2 = B_2 A_1.$$

Из теоремы 4.1.1 следует, что матрица A_1 должна быть, как и B_2, косым циркулянтом. Поскольку и B_1 — косой циркулянт, матрица $\widehat{T}_1$ также является косым циркулянтом (см. формулу (6.9)). Подчеркнем это обстоятельство обозначением $\widehat{T}_1 = S_1$ и запишем с его помощью соотношение (6.8):

$$S_1 \widehat{T}_2 - \widehat{T}_2 S_1^\top = h_0 \left(S_1^\top - S_1 \right).$$

Перепишем это соотношение еще раз, представив $\widehat{T}_2$ в виде $\widehat{T}_2 = C_2 + S_2$, где C_2 — циркулянт, а S_2 — косой циркулянт:

$$S_1 C_2 - C_2 S_1^\top = S_2 S_1^\top - S_1 S_2 + h_0 \left(S_1^\top - S_1 \right). \tag{6.19}$$

В правой части равенства (6.19) стоит косой циркулянт, значит, и матрица в левой части должна быть косым циркулянтом. Чтобы найти условия, при которых это возможно, нам потребуется доказать два вспомогательных утверждения.

Лемма 6.2.4. *Пусть C — циркулянт, а S — косой циркулянт, причем обе матрицы нескалярные и имеют один и тот же порядок. Матрица $SC - CS^\top$ тогда и только тогда является теплицевой, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S, коллинеарны.*

Доказательство леммы 6.2.4. Пусть C — циркулянт с первой строкой $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, а S — косой циркулянт с первой строкой $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$. Запишем условие теплицевости матрицы $SC - CS^\top$:

$$\left\{ SC - CS^\top \right\}_{k,m} = \left\{ SC - CS^\top \right\}_{k+1,m+1}, \qquad k, m = 1, \ldots, n-1,$$

что эквивалентно соотношению

$$\sum_{q=1}^{n}\{S\}_{k,q}\{C\}_{q,m}-\sum_{q=1}^{n}\{C\}_{k,q}\{S\}_{m,q}-$$

$$-\sum_{q=1}^{n}\{S\}_{k+1,q}\{C\}_{q,m+1}+\sum_{q=1}^{n}\{C\}_{k+1,q}\{S\}_{m+1,q}=0,$$

или, с учетом теплицевости матриц C и S — соотношению

$$\sum_{q=1}^{n}s_{q-k}c_{m-q}-\sum_{q=1}^{n}s_{q-k-1}c_{m+1-q}-$$

$$-\sum_{q=1}^{n}c_{q-k}s_{q-m}+\sum_{q=1}^{n}c_{q-k-1}s_{q-m-1}=0.$$

Заменим индекс суммирования q на r, полагая $r=q$ в первой и третьей суммах $r=q$ и $r=q-1$ во второй и четвертой:

$$\sum_{r=1}^{n}s_{r-k}c_{m-r}-\sum_{r=0}^{n-1}s_{r-k}c_{m-r}-$$

$$-\sum_{r=1}^{n}c_{r-k}s_{r-m}+\sum_{r=0}^{n-1}c_{r-k}s_{r-m}=0.$$

После упрощения получаем

$$s_{n-k}c_{-(n-m)}-s_{-k}c_{m}-c_{n-k}s_{n-m}+\mathrm{c}_{-k}s_{-m}=0.$$

Поскольку C — циркулянт, а S — косой циркулянт, то

$$s_{n-k}c_{m}+s_{n-k}c_{m}-c_{n-k}s_{n-m}-c_{n-k}s_{n-m}=0.$$

Заменяя здесь $n-k$ на k, имеем

$$s_{k}c_{m}=c_{k}s_{n-m},\qquad k,m=1,\ldots,n-1. \tag{6.20}$$

По векторам

$$c=(c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})^{\top},\qquad s=(s_1,s_2,\ldots,s_{n-1})^{\top}$$

построим две вспомогательные матрицы $M = s\mathrm{c}^{\top}$ и $K = c\,(\mathcal{P}_{n-1}s)^{\top}$ порядка $n-1$. Равенство (6.20) означает, что $M = K$. Из условия нескалярности матриц C и S следует, что $c \neq 0$ и $s \neq 0$. Применяя лемму 1.2.2, заключаем, что для некоторого $\alpha \neq 0$ выполняются соотношения

$$\begin{cases} c_k = \alpha s_k, & k = 1, \ldots, n-1, \\ c_{n-m} = \alpha s_m, & m = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_k = \alpha s_k, \\ c_k = \alpha s_{n-k}, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Из этих соотношений выводим, что для всех k верны равенства $s_k = s_{n-k}$, т. е. $S^\top = -S$, и равенства $c_k = c_{n-k}$, т. е. $C^\top = C$. При этом векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов матриц C и S, пропорциональны с коэффициентом $(-\alpha)$, так как

$$c_{-k} = c_{n-k} = \alpha s_{n-k} = -\alpha s_{-k}. \qquad \blacksquare$$

Из доказательства леммы 6.2.4 видим, что теплицевость матрицы $SC - CS^\top$ влечет за собой симметрию матрицы C и косую симметрию матрицы S.

Лемма 6.2.5. *Пусть S — ненулевой косой циркулянт, C — циркулянт, и обе матрицы имеют нулевую диагональ. Матрица $SC - CS^\top$ тогда и только тогда является косым циркулянтом, когда выполняется одно из следующих двух условий:*

а) $C = 0$;

б) n — четное число, векторы Ce_1 и Se_1 линейно зависимы, и матрица S пропорциональна своей обратной.

Доказательство леммы 6.2.5 Пусть C — циркулянт с первой строкой $0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, S — косой циркулянт с первой строкой $0, s_1, \ldots, s_{n-1}$.

При $C = 0$ получаем случай а) нашей леммы. Поэтому в дальнейшем считаем, что $C \neq 0$. Поскольку обе матрицы C и S ненулевые и имеют нулевую диагональ, они нескалярны и, по лемме 6.2.4 их первые столбцы пропорциональны с некоторым коэффициентом $(-\alpha)$. Без ограничения общности, можно считать, что $\alpha = -1$, так как при необходимости косой циркулянт S можно умножить на подходящую ненулевую константу, не изменяя условий леммы. При таком α матрицы C и S имеют одинаковый первый столбец

$$x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})^\top .$$

Записывая условие, что матрица $SC - CS^\top = SC + CS$ является косым циркулянтом, получаем

$$Q_s (SC + CS) = (SC + CS) Q_s,$$

или

$$S (Q_s C - C Q_s) = (C Q_s - Q_s C) S,$$

или, ввиду соотношения $Q_s = Q_c - 2e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n$ (см. (1.27)),

$$S \left[\left(Q_c - 2e_1 e_n^\top \right) C - C \left(Q_c - 2e_1 e_n^\top \right) \right] =$$

$$= \left[C \left(Q_c - 2e_1 e_n^\top \right) - \left(Q_c - 2e_1 e_n^\top \right) C \right] S.$$

Поскольку C — циркулянт, это равенство можно привести к виду

$$S e_1 e_n^\top C - S C e_1 e_n^\top = C e_1 e_n^\top S - e_1 e_n^\top C S,$$

или, умножая это равенство справа на $\mathcal{P}_n$, к виду

$$S e_1 (C e_1)^\top - S C e_1 e_1^\top = C e_1 (S e_1)^\top - e_1 (S C e_1)^\top .$$

Используя равенства $Ce_1 = Se_1 = x$, получаем

$$x x^\top - S x e_1^\top = x x^\top - e_1 (S x)^\top,$$

или

$$S x e_1^\top - e_1 (S x)^\top = 0.$$

В первой из матриц, стоящих в левой части, все столбцы, кроме первого, нулевые, а во второй нулевыми являются все строки, кроме первой. Поэтому $\{Sx\}_j = 0$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

Пусть $\{Sx\}_1 = \xi$, тогда $Sx = \xi e_1$. Первым столбцом косого циркулянта S^2 является вектор Sx. Следовательно,

$$S^2 = \xi I_n.$$

Если $\xi = 0$ (что имеет место, например, при нечетном $n = 2l + 1$, поскольку всякая кососимметричная матрица нечетного порядка вырождена), то $S = 0$ и $C = 0$, тогда как по предположению $C \neq 0$.

При четном n и невырожденном косом циркулянте S имеем случай б). Здесь соотношение $S^2 = \xi I_n$ эквивалентно равенству $S = \xi S^{-1}$. ■

Располагая леммами 6.2.4 и 6.2.5, рассмотрим два возможных случая. Пусть вначале $C_2 = 0$, тогда $\widehat{T}_2$ есть косой циркулянт. Так как и $\widehat{T}_1$ — косой циркулянт, то приходим к ситуации, уже исследованной в разд. 6.2.1.2.

Пусть теперь n есть четное число, а $\widehat{T}_1 = S_1$ — невырожденный косой циркулянт. Учитывая косую симметрию матрицы S_1, запишем соотношение (6.19) в виде

$$S_1 C_2 - C_2 S_1^\top = -2 S_1 \left(S_2 + h_0 I_n\right),$$

или, поскольку S_1 невырожденна, в виде

$$S_2 + h_0 I_n = -\frac{1}{2} S_1^{-1} \left(S_1 C_2 - C_2 S_1^\top\right).$$

Так как матрицы T и H определены с точностью до умножения на константы, имеем

$$T = t_0 I_n + \alpha S_1,$$

$$H = 2\beta \left(h_0 I_n + C_2 + S_2\right) \mathcal{P}_n =$$

$$= 2\beta \left(C_2 - \frac{1}{2} S_1^{-1} \left(S_1 C_2 + C_2 S_1\right)\right) \mathcal{P}_n = \beta \left(C_2 - S_1^{-1} C_2 S_1\right) \mathcal{P}_n.$$

Такая пара соответствует описанию класса *ПТГКМ_ 6*, где нужно положить $C = C_2$ и $S = S_1$.

Итак, полностью разобран случай, когда матрица $\widehat{T}_2$ не является симметричной. В дальнейшем считаем, что $\widehat{T}_2 = \widehat{T}_2^\top$.

6.2.4 Ганкелева матрица персимметрична

Исследуем теперь случай, когда ганкелева матрица персимметрична, т.е. $\widehat{T}_2 = \widehat{T}_2^\top$, а потому $B_2 = 0$. Запишем равенство (6.11) в виде

$$\widehat{T}_1 A_2 - A_2 \widehat{T}_1^\top = h_0 \left(\widehat{T}_1^\top - \widehat{T}_1\right). \qquad (6.21)$$

Подставляя сюда представление (6.9), получаем

$$(A_1 + B_1)\, A_2 - A_2\, (A_1 - B_1) = -2h_0 B_1, \tag{6.22}$$

или, после умножения слева и справа на $\mathcal{P}_n$,

$$(A_1 - B_1)\, A_2 - A_2\, (A_1 + B_1) = 2h_0 B_1. \tag{6.23}$$

Складывая (6.22) и (6.23), имеем

$$A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

Матрицы A_1 и A_2 симметричны и их диагональные элементы равны нулю. В силу теоремы 4.1.1 и леммы 6.2.1 возможны лишь три случая: 1) обе матрицы A_1 и A_2 являются циркулянтами; 2) обе матрицы A_1 и A_2 суть косые циркулянты; 3) $A_2 = \mu A_1$ для некоторого комплексного числа μ. Проведем раздельный анализ этих случаев.

6.2.4.1 A_1 и A_2 — циркулянты

Переобозначим матрицы A_1 и A_2, полагая $A_1 = \widehat{C}_1$, $A_2 = \widehat{C}_2$. Подставим в (6.22) представление матрицы B_1 в виде $B_1 = \widetilde{C} + \widetilde{S}$, где $\widetilde{C}$ — циркулянт, а $\widetilde{S}$ — косой циркулянт:

$$\left(\widehat{C}_1 + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right) \widehat{C}_2 - \widehat{C}_2 \left(\widehat{C}_1 - \widetilde{C} - \widetilde{S}\right) = -2h_0 \left(\widetilde{C} + \widetilde{S}\right).$$

Используя перестановочность циркулянтов (см. лемму 1.2.8), получаем

$$\widetilde{S}\widehat{C}_2 + \widehat{C}_2\widetilde{S} + 2h_0\widetilde{S} = -2\widetilde{C}\widehat{C}_2 - 2h_0\widetilde{C},$$

или

$$\widetilde{S}\left(\widehat{C}_2 + h_0 I_n\right) + \left(\widehat{C}_2 + h_0 I_n\right)\widetilde{S} = -2\widetilde{C}\left(\widehat{C}_2 + h_0 I_n\right).$$

Поскольку матрица $\widetilde{S}$ кососимметрична, то

$$\widetilde{S}\left(\widehat{C}_2 + h_0 I_n\right) - \left(\widehat{C}_2 + h_0 I_n\right)\widetilde{S}^\top = -2\widetilde{C}\left(\widehat{C}_2 + h_0 I_n\right). \tag{6.24}$$

В правой части равенства (6.24) стоит циркулянт, значит, и матрица в левой части должна быть циркулянтом. Проанализируем это требование.

Лемма 6.2.6. *Пусть C — симметричный и нескалярный циркулянт с диагональным элементом ζ, а S — кососимметричный и нескалярный косой циркулянт с нулевым диагональным элементом. Матрица $SC - CS^\top$ тогда и только тогда является циркулянтом, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в матрицах C и S, пропорциональны, а циркулянт C с точностью до скалярного множителя есть инволюция (см. (1.18)).*

Доказательство леммы 6.2.6. В силу леммы 6.2.4 условие теплицевости матрицы $SC - CS^\top$ эквивалентно коллинеарности векторов, составленных из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S.

Учтем теперь требование, чтобы матрица $SC - CS^\top$ была циркулянтом. Согласно лемме 1.2.3, имеем

$$Q_c(SC + CS) = (SC + CS)Q_c,$$

или

$$C\left(Q_cS - SQ_c\right) = \left(SQ_c - Q_cS\right)C.$$

Используя соотношение $Q_c = Q_s + 2e_1e_1^\top\mathcal{P}_n$, можем написать

$$C\left[\left(Q_s + 2e_1e_n^\top\right)S - S\left(Q_s + 2e_1e_n^\top\right)\right] =$$
$$= \left[S\left(Q_s + 2e_1e_n^\top\right) - \left(Q_s + 2e_1e_n^\top\right)S\right]C,$$

или, после упрощения,

$$Ce_1e_n^\top S - CSe_1e_n^\top = Se_1e_n^\top C - e_1e_n^\top SC,$$

или, с учетом равенств $S^\top = -S$ и $C^\top = C$,

$$-Ce_1\left(Se_n\right)^\top - CSe_1e_n^\top = Se_1\left(Ce_n\right)^\top + e_1\left(CSe_n\right)^\top. \quad (6.25)$$

Положим $x = Se_1$, тогда $Ce_1 = x + \zeta e_1$. Вычислим векторы Se_n и Ce_n:

$$Se_n = -\mathcal{P}_nS\mathcal{P}_ne_n = -\mathcal{P}_nSe_1 = -\mathcal{P}_nx,$$
$$Ce_n = \mathcal{P}_nC\mathcal{P}_ne_n = \mathcal{P}_nCe_1 = \mathcal{P}_nx + \zeta e_n.$$

Подставляя эти выражения в (6.25), получаем

$$(x+\zeta e_1)(\mathcal{P}_n x)^\top - Cxe_n^\top = x(\mathcal{P}_n x + \zeta e_n)^\top - e_1(\mathcal{P}_n Cx)^\top,$$

$$\zeta e_1(\mathcal{P}_n x)^\top - Cxe_n^\top = \zeta xe_n^\top - e_1(\mathcal{P}_n Cx)^\top,$$

$$e_1(\mathcal{P}_n(C+\zeta I_n)x)^\top = ((C+\zeta I_n)x)e_n^\top.$$

Матрица, стоящая в левой части этого равенства, имеет нули во всех строках, кроме первой, а матрица из правой части — нули во всех столбцах, кроме последнего. Поэтому

$$\{(C+\zeta I_n)x\}_j = 0, \qquad j = 2,3,\ldots,n.$$

Введем циркулянт $\breve{C}$ с нулевой главной диагональю формулой $C = \breve{C} + \zeta I_n$; тогда предыдущие равенства можно записать как

$$\left\{\left(\breve{C} + 2\zeta I_n\right)x\right\}_j = 0, \qquad j = 2,3,\ldots,n.$$

Поскольку $x = Ce_1 - \zeta e_1 = \breve{C}e_1$, эти равенства эквивалентны матричному соотношению

$$\left(\breve{C} + 2\zeta I_n\right)\breve{C} = \kappa I_n,$$

откуда выводим

$$\breve{C}^2 + 2\zeta\breve{C} + \zeta^2 I_n = \left(\kappa + \zeta^2\right)I_n,$$

$$\left(\breve{C} + \zeta I_n\right)^2 = \left(\kappa + \zeta^2\right)I_n.$$

Полагая $\kappa + \zeta^2 = \chi^2$, получаем

$$C^2 = \chi^2 I_n.$$

Поскольку $C \neq 0$, то $\chi \neq 0$. Определяя матрицу $\breve{C}$ формулой $C = \chi\breve{C}$, имеем $\breve{C}^2 = I_n$, т.е. $\breve{C}$ — симметричный инволютивный циркулянт. ■

Применяя лемму 6.2.6 с $\zeta = h_0$ к нашей задаче, заключаем, что матрица $\widehat{C}_2 + h_0 I_n$ есть скалярное кратное инволютивного циркулянта. Без ограничения общности можно считать, что инволютивным циркулянтом является сама матрица $\widehat{C}_2 + h_0 I_n$. Полагая $C = \widehat{C}_2 + h_0 I_n$ и учитывая, что $C^{-1} = C$, выводим из (6.24) соотношение

$$\widetilde{C} = -\frac{1}{2}\widetilde{S} - \frac{1}{2}\left(\widehat{C}_2 + h_0 I_n\right)\widetilde{S}\left(\widehat{C}_2 + h_0 I_n\right) = -\frac{1}{2}\widetilde{S} - \frac{1}{2}C\widetilde{S}C.$$

С учетом обозначения $A_1 = \widehat{C}_1$, исходные матрицы T и H можем записать в виде

$$T = 2\alpha\left(t_0 I_n + A_1 + B_1\right) = 2\alpha\left(t_0 I_n + \widehat{C}_1 + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right) =$$

$$= 2\alpha\left(t_0 I_n + \widehat{C}_1 + \widetilde{S} - \frac{1}{2}\widetilde{S} - \frac{1}{2}C\widetilde{S}C\right) =$$

$$= \alpha\left(2t_0 I_n + 2\widehat{C}_1 + \widetilde{S} - C\widetilde{S}C\right),$$

$$H = \beta\left(h_0 I_n + A_2\right)\mathcal{P}_n = \beta\left(h_0 I_n + \widehat{C}_2\right)\mathcal{P}_n = \beta C\mathcal{P}_n.$$

Итак, пара (T, H) принадлежит классу *ПТГКМ_7*, причем $C_1 = 2t_0 I_n + 2\widehat{C}_1$ и $S = \widetilde{S}$.

6.2.4.2 A_1 и A_2 — косые циркулянты

Переобозначим матрицы A_1 и A_2, полагая $A_1 = \widehat{S}_1$, $A_2 = \widehat{S}_2$. Подставим в (6.22) представление матрицы B_1 в виде $B_1 = \widetilde{C} + \widetilde{S}$:

$$\left(\widehat{S}_1 + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right)\widehat{S}_2 - \widehat{S}_2\left(\widehat{S}_1 - \widetilde{C} - \widetilde{S}\right) = -2h_0\left(\widetilde{C} + \widetilde{S}\right).$$

Используя перестановочность косых циркулянтов (см. лемму 1.2.13), получаем

$$\widetilde{C}\left(\widehat{S}_2 + h_0 I_n\right) + \left(\widehat{S}_2 + h_0 I_n\right)\widetilde{C} = -2\widetilde{S}\left(\widehat{S}_2 + h_0 I_n\right).$$

Поскольку матрица $\widetilde{C}$ кососимметрична, то

$$\widetilde{C}\left(\widehat{S}_2 + h_0 I_n\right) - \left(\widehat{S}_2 + h_0 I_n\right)\widetilde{C}^\top = -2\widetilde{S}\left(\widehat{S}_2 + h_0 I_n\right). \quad (6.26)$$

В правой части равенства (6.26) стоит косой циркулянт, значит, и матрица в левой части должна быть косым циркулянтом. Это ограничение приводит к условиям, описываемым следующим утверждением.

Лемма 6.2.7. *Пусть S — симметричный и нескалярный косой циркулянт с диагональным элементом ζ, а C — кососимметричный и нескалярный циркулянт с нулевым диагональным элементом. Матрица $CS - SC^\top$ тогда и только тогда является косым циркулянтом, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в матрицах C и S, пропорциональны, а косой циркулянт S с точностью до скалярного множителя есть инволюция (см. (1.18)).*

Доказательство леммы 6.2.7. В силу леммы 6.2.2 условие теплицевости матрицы $CS-SC^\top$ эквивалентно коллинеарности векторов, составленных из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S.

Исследуем теперь требование, чтобы матрица $CS - SC^\top = CS + SC$ была косым циркулянтом. Согласно лемме 1.2.5 имеем

$$Q_s(CS + SC) = (CS + SC)Q_s,$$

или

$$S(Q_sC - CQ_s) = (CQ_s - Q_sC)S.$$

Используя соотношение $Q_s = Q_c - 2e_1e_1^\top \mathcal{P}_n$, можем написать

$$S\left[\left(Q_c - 2e_1e_n^\top\right)C - C\left(Q_c - 2e_1e_n^\top\right)\right] = \\ = \left[C\left(Q_c - 2e_1e_n^\top\right) - \left(Q_c - 2e_1e_n^\top\right)C\right]S,$$

или

$$Se_1e_n^\top C - SCe_1e_n^\top = Ce_1e_n^\top S - e_1e_n^\top CS,$$

или, с учетом равенств $C = -C^\top$ и $S^\top = S$,

$$-Se_1\left(Ce_n\right)^\top - SCe_1e_n^\top = Ce_1\left(Se_n\right)^\top + e_1\left(SCe_n\right)^\top. \tag{6.27}$$

Положим $x = Ce_1$, тогда $Se_1 = x + \zeta e_1$. Вычислим векторы Ce_n и Se_n:

$$Ce_n = -\mathcal{P}_nC\mathcal{P}_ne_n = -\mathcal{P}_nCe_1 = -\mathcal{P}_nx,$$

$$Se_n = \mathcal{P}_nS\mathcal{P}_ne_n = \mathcal{P}_nSe_1 = \mathcal{P}_nx + \zeta e_n.$$

Подставляя эти выражения в (6.27), получаем

$$(x + \zeta e_1)\left(\mathcal{P}_nx\right)^\top - Sxe_n^\top = x\left(\mathcal{P}_nx + \zeta e_n\right)^\top - e_1\left(\mathcal{P}_nSx\right)^\top,$$

$$\zeta e_1 \left(\mathcal{P}_n x\right)^\top - S x e_n^\top = \zeta x e_n^\top - e_1 \left(\mathcal{P}_n S x\right)^\top,$$

$$e_1 \left(\mathcal{P}_n \left(S + \zeta I_n\right) x\right)^\top = \left(\left(S + \zeta I_n\right) x\right) e_n^\top.$$

Матрица, стоящая в левой части этого равенства, имеет нули во всех строках, кроме первой, а матрица из правой части — нули во всех столбцах, кроме последнего. Поэтому

$$\{(S + \zeta I_n) x\}_j = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Введем косой циркулянт $\breve{S}$ с нулевой главной диагональю формулой $S = \breve{S} + \zeta I_n$; тогда предыдущие равенства можно записать как

$$\left\{\left(\breve{S} + 2\zeta I_n\right) x\right\}_j = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Поскольку $x = S e_1 - \zeta e_1 = \breve{S} e_1$, эти равенства эквивалентны матричному соотношению

$$\left(\breve{S} + 2\zeta I_n\right) \breve{S} = \kappa I_n,$$

откуда выводим

$$\breve{S}^2 + 2\zeta \breve{S} + \zeta^2 I_n = \left(\kappa + \zeta^2\right) I_n,$$

$$\left(\breve{S} + \zeta I_n\right)^2 = \left(\kappa + \zeta^2\right) I_n.$$

Полагая $\kappa + \zeta^2 = \chi^2$, получаем

$$S^2 = \chi^2 I_n.$$

Поскольку $S \neq 0$, то $\chi \neq 0$. Определяя матрицу $\breve{S}$ формулой $S = \chi \breve{S}$, имеем $\breve{S}^2 = I_n$, т.е. $\breve{S}$ — симметричный и инволютивный косой циркулянт. ■

Применяя лемму 6.2.7 с $\zeta = h_0$, заключаем, что матрица $\widehat{S}_2 + h_0 I_n$ есть скалярное кратное инволютивного косого циркулянта. Без ограничения общности можно считать, что инволютивным циркулянтом является сама матрица $\widehat{S}_2 + h_0 I_n$. Полагая $S = \widehat{S}_2 + h_0 I_n$, выводим из (6.26) соотношение

$$\widetilde{S} = -\frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}\left(\widehat{S}_2 + h_0 I_n\right)\widetilde{C}\left(\widehat{S}_2 + h_0 I_n\right) = -\frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2} S \widetilde{C} S.$$

Вспоминая, что $A_1 = \widehat{S}_1$, можем записать исходные матрицы T и H в виде

$$T = 2\alpha\left(t_0 I_n + A_1 + B_1\right) = 2\alpha\left(t_0 I_n + \widehat{S}_1 + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right) =$$

$$= 2\alpha\left(t_0 I_n + \widehat{S}_1 + \widetilde{C} - \frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S\widetilde{C}S\right) =$$

$$= \alpha\left(2t_0 I_n + 2\widehat{S}_1 + \widetilde{C} - S\widetilde{C}S\right),$$

$$H = \beta\left(h_0 I_n + A_2\right)\mathcal{P}_n = \beta\left(h_0 I_n + \widehat{S}_2\right)\mathcal{P}_n = \beta S\mathcal{P}_n.$$

Итак, пара (T, H) принадлежит классу *ПТГКМ_8*, причем $S_1 = 2t_0 I_n + 2\widehat{S}_1$ и $C = \widetilde{C}$.

6.2.4.3 $A_2 = \mu A_1$

Нам осталось исследовать случай $A_2 = \mu A_1$. Напомним действующее предположение, что матрица T_1 несимметрична; поэтому $B_1 \neq 0$. Матрица A_2 не является скалярной, а потому $\mu \neq 0$ и нескалярна матрица A_1.

Подставим соотношение $A_2 = \mu A_1$ в (6.22), записав h_0 как $h_0 = \mu h$:

$$\mu\left(A_1 + B_1\right)A_1 - \mu A_1\left(A_1 - B_1\right) = -2\mu h B_1.$$

После упрощения получаем

$$A_1 B_1 + B_1 A_1 = -2hB_1, \tag{6.28}$$

или

$$\left(A_1 + hI_n\right)B_1 = -B_1\left(A_1 + hI_n\right). \tag{6.29}$$

Мы пришли к задаче описания пары антикоммутирующих теплицевых матриц, одна из которых симметрична, а другая кососимметрична.

Обозначим элементы первых строк матриц A_1 и B_1 через $0,\ a_1^{(1)},\ \ldots,\ a_{n-1}^{(1)}$ и $0,\ b_1^{(1)},\ \ldots,\ b_{n-1}^{(1)}$ соответственно, а элементы первых столбцов — как $0,\ a_{-1}^{(1)},\ \ldots,\ a_{-(n-1)}^{(1)}$ и $0,\ b_{-1}^{(1)},\ \ldots,\ b_{-(n-1)}^{(1)}$. Правая часть равенства (6.28) является теплицевой матрицей, поэтому и матрица в левой части должна быть теплицевой:

$$\{A_1B_1 + B_1A_1\}_{k,m} = \{A_1B_1 + B_1A_1\}_{k+1,m+1},$$
$$k, m = 1, \ldots, n-1,$$

или, в более подробной записи,

$$\sum_{q=1}^{n} \{A_1\}_{k,q} \{B_1\}_{q,m} + \sum_{q=1}^{n} \{B_1\}_{k,q} \{A_1\}_{q,m} -$$
$$- \sum_{q=1}^{n} \{A_1\}_{k+1,q} \{B_1\}_{q,m+1} - \sum_{q=1}^{n} \{B_1\}_{k+1,q} \{A_1\}_{q,m+1} = 0.$$

Используя теплицеву структуру матриц A_1 и B_1, имеем

$$\sum_{q=1}^{n} a_{q-k}^{(1)} b_{m-q}^{(1)} - \sum_{q=1}^{n} a_{q-k-1}^{(1)} b_{m+1-q}^{(1)} +$$
$$+ \sum_{q=1}^{n} b_{q-k}^{(1)} a_{m-q}^{(1)} - \sum_{q=1}^{n} b_{q-k-1}^{(1)} a_{m+1-q}^{(1)} = 0.$$

Заменим индекс суммирования q на r, полагая $r = q$ в первой и третьей суммах и $r = q - 1$ во второй и четвертой:

$$\sum_{r=1}^{n} a_{r-k}^{(1)} b_{m-r}^{(1)} - \sum_{r=0}^{n-1} a_{r-k}^{(1)} b_{m-r}^{(1)} +$$
$$+ \sum_{r=1}^{n} b_{r-k}^{(1)} a_{m-r}^{(1)} - \sum_{r=0}^{n-1} b_{r-k}^{(1)} a_{m-r}^{(1)} = 0.$$

Это равенство эквивалентно соотношению

$$a_{n-k}^{(1)} b_{-(n-m)}^{(1)} - a_{-k}^{(1)} b_{m}^{(1)} + b_{n-k}^{(1)} a_{-(n-m)}^{(1)} - b_{-k}^{(1)} a_{m}^{(1)} = 0.$$

Учитывая симметрию матрицы A_1 и косую симметрию матрицы B_1, получаем

$$a_{n-k}^{(1)} b_{n-m}^{(1)} + a_{k}^{(1)} b_{m}^{(1)} - b_{n-k}^{(1)} a_{n-m}^{(1)} - b_{k}^{(1)} a_{m}^{(1)} = 0,$$

или

$$a_{n-k}^{(1)} b_{n-m}^{(1)} - a_{n-m}^{(1)} b_{n-k}^{(1)} = b_{k}^{(1)} a_{m}^{(1)} - b_{m}^{(1)} a_{k}^{(1)}. \tag{6.30}$$

Введем две вспомогательные матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ размера $(n-1)\times 2$ формулами

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} a_{n-1}^{(1)} & b_{n-1}^{(1)} \\ a_{n-2}^{(1)} & b_{n-2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ a_1^{(1)} & b_1^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & a_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} & a_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n-1}^{(1)} & a_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Определим величины

$$\triangle_{km}^{\mathcal{F}} = \det \begin{pmatrix} a_{n-k}^{(1)} & b_{n-k}^{(1)} \\ a_{n-m}^{(1)} & b_{n-m}^{(1)} \end{pmatrix} = a_{n-k}^{(1)} b_{n-m}^{(1)} - a_{n-m}^{(1)} b_{n-k}^{(1)},$$

$$\triangle_{km}^{\mathcal{G}} = \det \begin{pmatrix} b_k^{(1)} & a_k^{(1)} \\ b_m^{(1)} & a_m^{(1)} \end{pmatrix} = b_k^{(1)} a_m^{(1)} - b_m^{(1)} a_k^{(1)}.$$

Теперь равенствам (6.30) можно придать вид

$$\triangle_{km}^{\mathcal{F}} = \triangle_{km}^{\mathcal{G}}. \tag{6.31}$$

Вводя векторы

$$a = \left(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{n-1}^{(1)}\right)^{\top},$$

$$b = \left(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \ldots, b_{n-1}^{(1)}\right)^{\top},$$

можем записать матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ как

$$\mathcal{F} = [\ \mathcal{P}_{n-1} a \mid \mathcal{P}_{n-1} b\ ],$$

$$\mathcal{G} = [\ b \mid a\ ].$$

По условиям рассматриваемого случая матрицы A_1 и B_1 не являются диагональными. Поэтому матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не имеют нулевых столбцов и, следовательно, ранг каждой из них не меньше единицы. В силу (6.31) возможны лишь два случая: $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$ и $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 2$.

Пусть $\operatorname{rank} \mathcal{F} = \operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$. В этом случае (ненулевые) векторы a и b должны быть линейно зависимы. Положим $b = \alpha a$. Определим L как строго нижнетреугольную теплицеву матрицу с первым столбцом $\left(0, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{n-1}^{(1)}\right)^\top$. Поскольку $a \neq 0$, то $L \neq 0$. Теперь A_1 и B_1 можно записать в виде

$$A_1 = L + L^\top, \qquad B_1 = \alpha L - \alpha L^\top.$$

Подставляя эти выражения в (6.28), находим

$$\alpha\left(L + L^\top\right)\left(L - L^\top\right) + \alpha\left(L - L^\top\right)\left(L + L^\top\right) = -2h\alpha\left(L - L^\top\right),$$

$$L^2 - LL^\top + L^\top L - \left(L^\top\right)^2 + L^2 + LL^\top - L^\top L - \left(L^\top\right)^2 =$$

$$= -2h\left(L - L^\top\right),$$

$$L^2 - \left(L^\top\right)^2 = -h\left(L - L^\top\right),$$

$$L^2 + hL = \left(L^\top\right)^2 + hL^\top.$$

Матрица в левой части этого равенства — строго нижнетреугольная, а матрица в правой части — строго верхнетреугольная, поэтому

$$L^2 + hL = 0,$$

или

$$L\left(L + hI_n\right) = 0.$$

Если $h \neq 0$, то матрица $L + hI_n$ невырожденна, а тогда $L = 0$, что противоречит условиям данного случая. Следовательно, $h = 0$ и $L^2 = 0$. Пусть в матрице L верхние q строк нулевые, тогда нулевыми будут верхние $2q$ строк матрицы L^2. Поскольку $L^2 = 0$, то должно выполняться условие $2q \geq n$, или $q \geq n/2$. Возвращаясь к исходным матрицам T и H, имеем

$$T = t_0 I_n + A_1 + B_1 = t_0 I_n + L + L^\top + \alpha L - \alpha L^\top =$$

$$= t_0 I_n + (1+\alpha)L + (1-\alpha)L^\top,$$

$$H = \frac{\beta}{\mu} A_2 \mathcal{P}_n = \frac{\beta}{\mu}\mu A_1 \mathcal{P}_n = \beta(L + L^\top)\mathcal{P}_n.$$

Получаем пару из класса *ПТГКМ_3*.

Пусть теперь $\operatorname{rank}\mathcal{F} = \operatorname{rank}\mathcal{G} = 2$. Согласно лемме 1.2.1, найдется 2×2-матрица

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

с определителем, равным единице, такая, что

$$\mathcal{F} = \mathcal{G}W. \tag{6.33}$$

В данном случае $\mathcal{F} = \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G}\mathcal{P}_2$, поэтому, умножив равенство (6.33) слева на $\mathcal{P}_{n-1}$, а справа на $\mathcal{P}_2$, получим

$$\mathcal{G} = \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G}W\mathcal{P}_2. \tag{6.34}$$

Из (6.34) выводим

$$\mathcal{G} = \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G}W\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_{n-1}\left(\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G}W\mathcal{P}_2\right)W\mathcal{P}_2 = \mathcal{G}\left(W\mathcal{P}_2\right)^2.$$

Таким образом,

$$\mathcal{G}\left(I_2 - \left(W\mathcal{P}_2\right)^2\right) = 0.$$

Поскольку $\mathcal{G}$ — матрица полного ранга, это равенство возможно, лишь если $\left(W\mathcal{P}_2\right)^2 = I_2$.

Используя (6.32), находим

$$W\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

и

$$\left(W\mathcal{P}_2\right)^2 = \begin{pmatrix} \beta^2 + \alpha\delta & \alpha(\beta+\gamma) \\ \delta(\beta+\gamma) & \gamma^2 + \alpha\delta \end{pmatrix}.$$

Матричное равенство $\left(W\mathcal{P}_2\right)^2 = I_2$ дает скалярные соотношения

$$\begin{cases} \beta^2 + \alpha\delta = 1, \\ \alpha(\beta+\gamma) = 0, \\ \delta(\beta+\gamma) = 0, \\ \gamma^2 + \alpha\delta = 1. \end{cases}$$

Условие $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ позволяет переписать их в виде

$$\begin{cases} \beta(\beta+\gamma) = 0, \\ \alpha(\beta+\gamma) = 0, \\ \delta(\beta+\gamma) = 0, \\ \gamma(\beta+\gamma) = 0. \end{cases}$$

Это же условие гарантирует, что не все числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ равны нулю. Следовательно, $\gamma = -\beta$, и матрицу W можно искать в виде

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее исследование разобьем на три случая: $\alpha = 0$, $\delta = 0$ и $\alpha\delta \neq 0$.

Если $\alpha = 0$, то $\beta = \pm 1$.

1) Пусть сначала $\alpha = 0$ и $\beta = -1$. Получаем условие $\mathcal{P}_{n-1}a = a$, означающее, что A_1 является циркулянтом $A_1 = C_1$, а тогда и $A_2 = \mu A_1$ — циркулянт. Перепишем соотношение (6.29), подставив в него представление $B_1 = \widetilde{C} + \widetilde{S}$:

$$\left(\widetilde{C} + \widetilde{S}\right)(C_1 + hI_n) + (C_1 + hI_n)\left(\widetilde{C} + \widetilde{S}\right) = 0,$$

или

$$\widetilde{S}\,(C_1 + hI_n) + (C_1 + hI_n)\,\widetilde{S} = -2\widetilde{C}\,(C_1 + hI_n)\,.$$

В результате получаем условие, эквивалентное равенству (6.24). Повторяя все рассуждения раздела 6.2.4.1 и полагая $C = C_1 + hI_n$, можем записать

$$T = 2\alpha\,(t_0 I_n + A_1 + B_1) = 2\alpha\left(t_0 I_n + C_1 + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right) = \\ = \alpha\left(2t_0 I_n + 2C_1 + \widetilde{S} - C\widetilde{S}C\right),$$

$$H = \frac{\beta}{\mu}\,(h_0 I_n + A_2)\,\mathcal{P}_n = \frac{\beta}{\mu}\,(\mu h I_n + \mu C_1)\,\mathcal{P}_n = \beta C \mathcal{P}_n.$$

Приходим к подклассу класса *ПТГКМ_ 7*.

2) Если $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, то выполнено соотношение $\mathcal{P}_{n-1}a = -a$, т.е. A_1 является косым циркулянтом $A_1 = S_1$. Тогда $A_2 = \mu A_1$ — также косой циркулянт. Представим $B_1 = \widetilde{C} + \widetilde{S}$

и подставим в (6.29):

$$\left(\widetilde{C}+\widetilde{S}\right)(S_1+hI_n)+(S_1+hI_n)\left(\widetilde{C}+\widetilde{S}\right)=0.$$

В результате имеем соотношение

$$\widetilde{C}(S_1+hI_n)+(S_1+hI_n)\widetilde{C}=-2\widetilde{S}(S_1+hI_n),$$

идентичное (6.26). По аналогиис разд. 6.2.4.2, считая $S=S_1+$ $+hI_n$, выводим:

$$T=2\alpha(t_0I_n+A_1+B_1)=2\alpha\left(t_0I_n+S_1+\widetilde{C}+\widetilde{S}\right)=$$

$$=\alpha\left(2t_0I_n+2S_1+\widetilde{C}-S\widetilde{C}S\right),$$

$$H=\frac{\beta}{\mu}(h_0I_n+A_2)\mathcal{P}_n=\frac{\beta}{\mu}(\mu hI_n+\mu S_1)\mathcal{P}_n=\beta S\mathcal{P}_n.$$

Получаем подкласс класса *ПТГКМ_8*.

Если $\delta=0$, то снова $\beta=\pm1$.

1) Пусть $\delta=0$ и $\beta=-1$, тогда имеем равенство $\mathcal{P}_{n-1}b=-b$, из которого следует, что B_1 является кососимметричным циркулянтом $B_1=C_1$. Представим $A_1=\widetilde{C}+\widetilde{S}$ и подставим в (6.29):

$$C_1\left(\widetilde{C}+\widetilde{S}+hI_n\right)+\left(\widetilde{C}+\widetilde{S}+hI_n\right)C_1=0.$$

Получаем соотношение

$$C_1\widetilde{S}-\widetilde{S}C_1^\top=-2C_1\left(\widetilde{C}+hI_n\right),$$

в соответствии с которым матрица $C_1\widetilde{S}-\widetilde{S}C_1^\top$ должна быть циркулянтом. В силу леммы 6.2.3 это возможно, если $\widetilde{S}=0$. Тогда сама матрица A_1 является циркулянтом, и поэтому $T=t_0I_n+A_1+B_1$ — циркулянт. Так как $A_2=\mu A_1$, то и A_2 будет циркулянтом, а, значит, $H=(h_0I_n+A_2)\mathcal{P}_n$ ганкелевым циркулянтом. Приходим к уже рассмотренному случаю, когда теплицева и ганкелева матрицы являются соответствующими циркулянтами.

2) Если $\delta=0$ и $\beta=1$, то справедливо соотношение $\mathcal{P}_{n-1}b=$ $=b$, показывающее, что B_1 является кососимметричным косым

циркулянтом $B_1 = S_1$. Представим $A_1 = \widetilde{C} + \widetilde{S}$ и подставим в (6.29):

$$S_1 \left(\widetilde{C} + \widetilde{S} + hI_n\right) + \left(\widetilde{C} + \widetilde{S} + hI_n\right) S_1 = 0.$$

Имеем условие

$$S_1\widetilde{C} - \widetilde{C}S_1^{\top} = -2S_1 \left(\widetilde{S} + hI_n\right), \tag{6.35}$$

из которого следует, что матрица $S_1\widetilde{C} - \widetilde{C}S_1^{\top}$ должна быть косым циркулянтом. По лемме 6.2.5 это возможно в двух случаях, которые последовательно рассмотрим.

В первом случае $\widetilde{C} = 0$. Тогда матрица A_1 — косой циркулянт, и поэтому то же самое справедливо для всей матрицы $T = t_0I_n + A_1 + B_1$. Так как $A_2 = \mu A_1$, то и матрица A_2 является косым циркулянтом, а, значит, $H = (h_0I_n + A_2)\mathcal{P}_n$ будет ганкелевым косым циркулянтом. Снова приходим к уже рассмотренному случаю, но теперь теплицева и ганкелева матрицы являются соответствующими косыми циркулянтами.

Второй случай более интересен. Он возможен только для четного n. Теперь матрица S_1 должна быть скалярным кратным кососимметричной инволюции. Из (6.35) следует, что

$$\widetilde{S} + hI_n = -\frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S_1\widetilde{C}S_1.$$

Для исходной матрицы T имеем

$$T = 2\alpha\left(t_0I_n + A_1 + B_1\right) = 2\alpha\left(t_0I_n + \widetilde{C} + \widetilde{S} + S_1\right) =$$

$$= 2\alpha\left(\left(t_0 - h\right)I_n + S_1 + \widetilde{C} + \widetilde{S} + hI_n\right) =$$

$$= 2\alpha\left(\left(t_0 - h\right)I_n + S_1 + \widetilde{C} - \frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S_1\widetilde{C}S_1\right) =$$

$$= \alpha\left(2\left(t_0 - h\right)I_n + 2S_1 + \widetilde{C} - S_1\widetilde{C}S_1\right) =$$

$$= \alpha\left(\tau_0I_n + 2S + C - SCS\right),$$

где мы положили $\tau_0 = 2\left(t_0 - h\right)$, $C = \widetilde{C}$ и $S = S_1$.

Вспоминая, что $h_0 = \mu h$, получаем

$$H = \frac{2\beta}{\mu}\left(h_0 I_n + A_2\right)\mathcal{P}_n = \frac{2\beta}{\mu}\left(\mu h I_n + \mu A_1\right)\mathcal{P}_n =$$

$$= 2\beta\left(hI_n + \widetilde{C} + \widetilde{S}\right)\mathcal{P}_n = 2\beta\left(\widetilde{C} + \left(\widetilde{S} + hI_n\right)\right)\mathcal{P}_n =$$

$$= 2\beta\left(\widetilde{C} - \frac{1}{2}\widetilde{C} - \frac{1}{2}S_1\widetilde{C}S_1\right)\mathcal{P}_n =$$

$$= \beta\left(\widetilde{C} - S_1\widetilde{C}S_1\right)\mathcal{P}_n = \beta\left(C - SCS\right)\mathcal{P}_n,$$

если $S = S_1$ и $C = \widetilde{C}$. Приходим к классу *ПТГКМ_ 9* с $t_0 = \tau_0$.

Пусть теперь $\alpha\delta \neq 0$. Рассмотрим уравнение (6.28) и домножим обе части на $\xi\nu$:

$$(\xi A_1)(\nu B_1) + (\nu B_1)(\xi A_1) = -2(\xi h)(\nu B_1).$$

Очевидно, что если пара матриц A_1 и B_1 является решением, то решением будет и пара $(\xi A_1, \nu B_1)$. При этом вектор a перейдет в ξa, а вектор b в νb.

Запишем соотношение (6.33) в виде

$$[\,\mathcal{P}_{n-1}a \mid \mathcal{P}_{n-1}b\,] = [\,b \mid a\,]W$$

и преобразуем его к равенству

$$[\,\mathcal{P}_{n-1}a \mid \mathcal{P}_{n-1}b\,]\begin{pmatrix}\xi & \\ & \nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\xi} & \\ & \frac{1}{\nu}\end{pmatrix} =$$

$$= [\,b \mid a\,]\begin{pmatrix}\nu & \\ & \xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\nu} & \\ & \frac{1}{\xi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \delta\end{pmatrix},$$

которое эквивалентно условию

$$[\,\mathcal{P}_{n-1}\xi a \mid \mathcal{P}_{n-1}\nu b\,]\begin{pmatrix}\frac{1}{\xi} & \\ & \frac{1}{\nu}\end{pmatrix} = [\,\nu b \,|\xi a\,]\begin{pmatrix}\frac{1}{\nu} & \\ & \frac{1}{\xi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \delta\end{pmatrix}.$$

Умножим последнее равенство справа на диагональную матрицу $\operatorname{diag}(\xi, \nu)$:

$$[\,\mathcal{P}_{n-1}\xi a \mid \mathcal{P}_{n-1}\nu b\,] = [\,\mu b \,|\xi a\,]\begin{pmatrix}\frac{1}{\nu} & \\ & \frac{1}{\xi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi & \\ & \nu\end{pmatrix}.$$

После упрощения получим

$$[\ \mathcal{P}_{n-1}\xi a \mid \mathcal{P}_{n-1}\nu b\ ] = [\ \nu b\ |\xi a\ ] \begin{pmatrix} \frac{\xi}{\nu}\alpha & \beta \\ -\beta & \frac{\nu}{\xi}\delta \end{pmatrix}.$$

В данном случае $\alpha\delta \neq 0$, поэтому параметры ξ и ν можем выбрать из условия

$$\frac{\xi}{\nu}\alpha = \frac{\nu}{\xi}\delta,$$

которое идентично соотношению

$$\left(\frac{\xi}{\nu}\right)^2 = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что если в матрице W диагональные элементы ненулевые, то они равны и можно считать, что матрица W имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

Приходим к условию

$$[\ \mathcal{P}_{n-1}a \mid \mathcal{P}_{n-1}b\ ] = [\ b \mid a\ ] \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{6.37}$$

При этом $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Введем вспомогательную матрицу $\widetilde{T}$ как $\widetilde{T} = hI_n + A_1 + B_1$ и представим ее в виде суммы симметричной и кососимметричной частей:

$$\widetilde{T} = \frac{\widetilde{T} + \widetilde{T}^\top}{2} + \frac{\widetilde{T} - \widetilde{T}^\top}{2}.$$

Тогда условие (6.29) примет вид

$$\frac{\widetilde{T} + \widetilde{T}^\top}{2}\frac{\widetilde{T} - \widetilde{T}^\top}{2} + \frac{\widetilde{T} - \widetilde{T}^\top}{2}\frac{\widetilde{T} + \widetilde{T}^\top}{2} = 0,$$

который эквивалентен соотношению

$$\widetilde{T}^2 - \widetilde{T}\widetilde{T}^\top + \widetilde{T}^\top\widetilde{T} - \left(\widetilde{T}^\top\right)^2 + \widetilde{T}^2 + \widetilde{T}\widetilde{T}^\top - \widetilde{T}^\top T - \left(\widetilde{T}^\top\right)^2 = 0,$$

или

$$\widetilde{T}^2 = \left(\widetilde{T}^2\right)^\top.$$

Будем считать, что $\widetilde{T}$ — теплицева матрица с первым столбцом $\left(h, t_{-1}, t_{-2}, \ldots, t_{-(n-1)}\right)^{\top}$ и с первой строкой $(h, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$. Определим векторы

$$u_1 = (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})^{\top},$$
$$u_2 = \left(t_{-1}, t_{-2}, \ldots, t_{-(n-1)}\right)^{\top}.$$

Так как $\widetilde{T} = hI_n + A_1 + B_1$, то

$$u_1 = a + b, \quad u_2 = a - b.$$

Перепишем равенство (6.37) в виде

$$[\, \mathcal{P}_{n-1}a \mid \mathcal{P}_{n-1}b \,] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= [\, b \mid a \,] \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

или после упрощения

$$[\, \mathcal{P}_{n-1}(a-b) \mid \mathcal{P}_{n-1}(a+b) \,] =$$
$$= [\, a+b \mid a-b \,] \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}.$$

С учетом выражений для u_1 и u_2 имеем

$$[\, \mathcal{P}_{n-1}u_2 \mid \mathcal{P}_{n-1}u_1 \,] = [\, u_1 \mid u_2 \,] \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}. \tag{6.38}$$

Наряду с матрицей $\widetilde{T}$ рассмотрим матрицу

$$Z = \widetilde{T} + i\widetilde{T}^{\top}. \tag{6.39}$$

Лемма 6.2.8. *Равенство $\widetilde{T}^2 = \left(\widetilde{T}^{\top}\right)^2$ эквивалентно соотношению $Z^2 = \left(Z^{\top}\right)^2$.*

Доказательство леммы 6.2.8. Распишем выражение $Z^2 - \left(Z^{\top}\right)^2$:

$$Z^2 - \left(Z^{\top}\right)^2 = \left(\widetilde{T} + i\widetilde{T}^{\top}\right)^2 - \left(\left(\widetilde{T} + i\widetilde{T}^{\top}\right)^{\top}\right)^2 =$$

$$= \widetilde{T}^2 - \left(\widetilde{T}^\top\right)^2 + i\left(\widetilde{T}\widetilde{T}^\top + \widetilde{T}^\top\widetilde{T}\right) -$$

$$- \left(\widetilde{T}^\top\right)^2 + \widetilde{T}^2 - i\left(\widetilde{T}\widetilde{T}^\top + \widetilde{T}^\top\widetilde{T}\right) = 2\left(\widetilde{T}^2 - \left(\widetilde{T}^\top\right)^2\right).$$

Получаем утверждение леммы. ■

Из (6.39) следует, что матрицу $\widetilde{T}$ можно записать как

$$\widetilde{T} = \frac{1}{2}Z - \frac{i}{2}Z^\top.$$

Исследуем теперь условие $Z^2 = \left(Z^\top\right)^2$ на матрицу Z. Обозначим через v_1 вектор, состоящий из внедиагональных элементов первой строки матрицы Z, а через v_2 вектор, состоящий из внедиагональных элементов первого столбца матрицы Z. Тогда

$$v_1 = u_1 + iu_2, \quad v_2 = u_2 + iu_1. \tag{6.40}$$

Переписав равенство (6.38) в виде

$$[\, \mathcal{P}_{n-1}u_2 \mid \mathcal{P}_{n-1}u_1 \,] \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= [\, u_1 \mid u_2 \,] \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

приходим к соотношению

$$[\, \mathcal{P}_{n-1}(u_2 + iu_1) \mid \mathcal{P}_{n-1}(u_1 + iu_2) \,] =$$

$$= [\, u_1 + iu_2 \mid u_2 + iu_1 \,] \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

В силу (6.40) имеем

$$[\, \mathcal{P}_{n-1}v_2 \mid \mathcal{P}_{n-1}v_1 \,] = [\, v_1 \mid v_2 \,] \begin{pmatrix} -(\beta - i\alpha) & 0 \\ 0 & -(\beta + i\alpha) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi = -(\beta - i\alpha)$, тогда предыдущее равенство означает, что

$$v_2 = \varphi \mathcal{P}_{n-1} v_1.$$

Тем самым, мы получаем, что матрица Z является φ-циркулянтом и должна удовлетворять соотношению $Z^2 = \left(Z^\top\right)^2$.

Условие, что матрица W имеет определитель, равный единице, можно записать как

$$-(\beta+i\alpha)[-(\beta-i\alpha)]=\alpha^2+\beta^2=1. \tag{6.41}$$

Покажем, что $\varphi\neq\pm1$. Пусть сначала $\varphi=1$, тогда

$$-(\beta-i\alpha)=1$$

и с учетом (6.41)

$$-(\beta+i\alpha)=1.$$

Отсюда имеем равенство $\alpha=0$, которое противоречит условию $\alpha\neq0$.

Теперь рассмотрим случай $\varphi=-1$, тогда

$$-(\beta-i\alpha)=-1$$

и с учетом (6.41)

$$-(\beta+i\alpha)=-1.$$

Снова получаем соотношение $\alpha=0$, противоречащее условию исследуемого случая $\alpha\neq0$. Значит, $\varphi\neq\pm1$.

Рассмотрим равенство

$$Z^2=\left(Z^\top\right)^2.$$

В левой части стоит φ-циркулянт, в правой $1/\varphi$-циркулянт. Данное равенство возможно лишь в виде

$$Z^2=\left(Z^\top\right)^2=\xi I_n.$$

Представив матрицу Z как $Z=\sqrt{\xi}Z_0$, приходим к условию $Z_0^2=I_n$, означающему, что матрица Z_0 является инволюцией.

Итак, в данном случае имеем

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}Z-\frac{i}{2}Z^\top,$$

где $Z=\varkappa Z_0$, Z_0 — инволютивный φ-циркулянт, $\varkappa$ — комплексное число. Заметим, что если φ и $\varkappa$ фиксированы, то существует только конечное число подходящих матриц Z.

Вспомним, что $hI_n + A_1$ и B_1 — симметричная и кососимметричная части $\widetilde{T}$. Это означает выполнение соотношений

$$hI_n + A_1 = \frac{1-i}{4}\left(Z + Z^\top\right), \qquad B_1 = \frac{1+i}{4}\left(Z - Z^\top\right).$$

Теперь возвратимся к исходным матрицам T и H:

$$T = 2\alpha\left(t_0 I_n + A_1 + B_1\right) =$$
$$= 2\alpha\left(\left(t_0 - h\right) I_n + \left(hI_n + A_1\right) + B_1\right) =$$
$$= 2\alpha\left(\left(t_0 - h\right) I_n + \frac{1-i}{4}\left(Z + Z^\top\right) + \frac{1+i}{4}\left(Z - Z^\top\right)\right) =$$
$$= 2\alpha\left(\left(t_0 - h\right) I_n + \frac{1}{2}Z - \frac{i}{2}Z^\top\right) =$$
$$= \alpha\left(2\left(t_0 - h\right) I_n + Z - iZ^\top\right) = \alpha\left(\tau_0 I_n + Z - iZ^\top\right),$$

где $\tau_0 = 2\left(t_0 - h\right)$,

$$H = \frac{4\beta}{\mu(1-i)}\left(h_0 I_n + \mu A_1\right)\mathcal{P}_n = \frac{4\beta}{\mu(1-i)}\mu\left(hI_n + A_1\right)\mathcal{P}_n =$$
$$= \frac{4\beta}{(1-i)}\frac{(1-i)}{4}\left(Z + Z^\top\right)\mathcal{P}_n = \beta\left(Z + Z^\top\right)\mathcal{P}_n.$$

Здесь было использовано условие $h_0 = \mu h$. Полученные матрицы составляют класс *ПТГКМ_10* с $t_0 = \tau_0$. Теорема 6.1.1 полностью доказана.

6.3 Критерий перестановочности вещественных теплицевой и ганкелевой матриц

На основании сформулированного и доказанного выше критерия коммутирования комплексных теплицевой и ганкелевой матриц можно получить вещественный аналог, который является результатом нахождения вещественных пар среди решений комплексной задачи о перестановочных теплицевой и ганкелевой матрицах. Решение вещественной задачи представлено в [43].

Теорема 6.3.1. *Ненулевые теплицева матрица $T \in M_n(\mathbf{R})$ и ганкелева матрица $H \in M_n(\mathbf{R})$ коммутируют тогда и только тогда, когда T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:*

Класс ПТГВМ_ 1. Матрица T — скалярная, а H — произвольная ганкелева матрица.

Класс ПТГВМ_ 2. Матрицы T и H имеют вид:

$$T = A, \quad H = \alpha\mathcal{P}_n + \beta A\mathcal{P}_n.$$

Здесь A — произвольная вещественная симметричная теплицева матрица, а α и β — произвольные вещественные числа.

Класс ПТГВМ_ 3. Матрицы T и H имеют вид:

$$T = t_0 I_n + (1+\alpha)\, L + (1-\alpha)\, L^\top,$$

$$H = \beta\left(L + L^\top\right)\mathcal{P}_n,$$

где L — вещественная нижнетреугольная теплицева матрица, имеющая нули в первом столбце в позициях $1, 2, \ldots, \lceil n/2 \rceil$, а α и β — вещественные числа.

Класс ПТГВМ_ 4. Матрица T является циркулянтом

$$T = F_n{}^* D_1 F_n,$$

а H — ганкелевым циркулянтом

$$H = F_n{}^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$

и $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ — диагональные

матрицы; при этом

$$\begin{array}{ll} d_1^{(k)} = \overline{d_1^{(k)}}, & k = 1, 2, \\ d_{n+2-j}^{(k)} = \overline{d_j^{(k)}}, & j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \ k = 1, 2, \\ d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)} - \overline{d_j^{(1)}} \right) = 0, & j = 2, 3, \ldots, n. \end{array}$$

Класс ПТГВМ_ 5. Матрица T является косым циркулянтом

$$T = G_{-1} F_n{}^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H — ганкелевым косым циркулянтом

$$H = G_{-1}{F_n}^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n.$$

Диагональные матрицы $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ *должны удовлетворять соотношениям*

$$\begin{aligned}
&d_2^{(k)} = \overline{d_1^{(k)}}, && k = 1, 2,\\
&d_{n+3-j}^{(k)} = \overline{d_j^{(k)}}, && j = 3, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1, \quad k = 1, 2,\\
&d_j^{(2)} \left(d_j^{(1)} - \overline{d_j^{(1)}} \right) = 0, && j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Класс ПТГВМ_6. Порядок n есть четное число. Матрица T является линейным многочленом от кососимметричного и инволютивного косого циркулянта S:

$$T = t_0 I_n + \alpha S.$$

Матрица H задается формулой

$$H = \beta\left(C - S^{-1}CS\right)\mathcal{P}_n,$$

где C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S, α и β — произвольные чисто мнимые числа, t_0 — произвольное вещественное число.

Класс ПТГВМ_7. Матрицы T и H задаются формулами

$$T = \alpha\left(C_1 + S - C^{-1}SC\right),$$

$$H = \beta C \mathcal{P}_n.$$

Здесь C — вещественный симметричный и инволютивный циркулянт, S — вещественный косой циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы C, C_1 — вещественный симметричный циркулянт, а α и β — произвольные вещественные числа.

Класс ПТГВМ_8. Матрицы T и H задаются формулами

$$T = \alpha\left(S_1 + C - S^{-1}CS\right),$$

$$H = \beta S\mathcal{P}_n.$$

Здесь S — вещественный симметричный и инволютивный косой циркулянт, C — вещественный циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S, S_1 — вещественный симметричный косой циркулянт, а α и β — произвольные вещественные числа.

Класс ПТГВМ_9. Порядок n есть четное число. Матрица T имеет вид

$$T = \alpha\left(t_0 I_n + 2S + C - S^{-1}CS\right),$$

где S — кососимметричный и инволютивный косой циркулянт, а C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S. Матрица H задается формулой

$$H = \beta\left(C - S^{-1}CS\right)\mathcal{P}_n.$$

Чисто мнимые числа α, β и t_0 произвольны.

Класс ПТГВМ_10. Матрицы T и H задаются формулами

$$T = t_0 I_n + \alpha\,(1+i)\left(Z - iZ^\top\right),$$

$$H = \beta\left(Z + Z^\top\right)\mathcal{P}_n,$$

где Z — инволютивный φ-циркулянт, причем $|\varphi| = 1$, $\varphi \neq \pm 1$, а α, β и t_0 — произвольные вещественные числа.

6.4 Доказательство критерия перестановочности в вещественном случае

Приведем теперь обоснование теоремы 6.3.1. Как уже отмечено, для ее доказательства достаточно выделить вещественные пары из всех классов, перечисляемых в теореме 6.1.1.

Очевидно, что из классов *ПТГКМ_ 1–ПТГКМ_ 3* получаются классы *ПТГВМ_ 1–ПТГВМ_ 3*. Класс *ПТГВМ_ 4* получается из класса *ПТГКМ_ 4* на основании леммы 1.2.23, а класс *ПТГВМ_ 5* — из класса *ПТГКМ_ 5* на основании леммы 1.2.25.

Класс *ПТГВМ_ 6* получается из класса *ПТГКМ_ 6* следующим образом. Так как всякий косой циркулянт S является нормальной матрицей, то условие его инволютивности делает S эрмитовой матрицей, а из кососимметричности еще и следует, что S будет чисто мнимой и недиагональной. Взяв α чисто мнимым и t_0 вещественным, получаем вещественную матрицу T. При таком выборе матрица $C - S^{-1}CS$ будет чисто мнимой. Выбор числа β чисто мнимым обеспечивает вещественность матрицы H. Заметим, что матрица H не зависит от выбора диагонального элемента для C. Класс *ПТГВМ_ 9* получается аналогичным образом из класса *ПТГКМ_ 9*.

Класс *ПТГКМ_ 7* дает нам класс *ПТГВМ_ 7*. Поскольку H — вещественная матрица, вещественным должно быть и произведение βC. Без ограничения общности можно считать, что вещественны C и β. Тогда матрица $\widehat{C} = S - C^{-1}SC$ вещественна. Взяв $C_1 = \breve{C}_1 + i\widetilde{C}$, получаем

$$T = \alpha\left(C_1 + \widehat{C}\right) = (\alpha_1 + i\alpha_2)\left(\breve{C}_1 + \widehat{C} + i\widetilde{C}\right).$$

Условие вещественности T имеет вид

$$\alpha_1\widetilde{C} = -\alpha_2\left(\breve{C}_1 + \widehat{C}\right).$$

Если $\alpha_1 = 0$, то в силу того, что $T \neq 0$, имеем $\alpha_2 \neq 0$ и $\breve{C}_1 + \widehat{C} = 0$. Тогда $T = -\alpha_2\widetilde{C}$ и мы приходим к *классу ПТГВМ_ 4*. В противном случае запишем

$$T = (\alpha_1 + i\alpha_2)\left(\breve{C}_1 + \widehat{C} + i\widetilde{C}\right) =$$

$$= \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)}{\alpha_1}\left(\alpha_1\left(\breve{C}_1 + \widehat{C}\right) + i\alpha_1\widetilde{C}\right) =$$

$$= \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)}{\alpha_1}(\alpha_1 - i\alpha_2)\left(\breve{C}_1 + \widehat{C}\right) = \frac{|\alpha|^2}{\alpha_1}\left(\breve{C}_1 + S - C^{-1}SC\right).$$

Полагая
$$\tilde{\alpha} = \frac{|\alpha|^2}{\alpha_1},$$
получаем класс *ПТГВМ_7*. Класс *ПТГВМ_8* получается аналогичным образом из класса *ПТГКМ_8*.

Обоснование класса *ПТГВМ_10* не столь тривиально. Найдем условия, при которых матрицы $T = t_0 I_n + \alpha \left(Z - iZ^\top\right)$ и $H\mathcal{P}_n = \beta\left(Z + Z^\top\right)$ вещественны.

По теореме 6.1.1, матрица Z есть инволютивный φ-циркулянт для некоторого числа φ с модулем 1, $\varphi \neq \pm 1$. Отсюда следует, что Z — нормальная матрица с собственными значениями, равными ± 1. Поэтому матрица Z эрмитова. Представим Z в алгебраической форме
$$Z = A + iB, \quad A^\top = A, \quad B^\top = -B.$$
Вещественные матрицы A и B не могут быть нулевыми одновременно.

Используя это представление, находим
$$H\mathcal{P}_n = \beta\left(Z + Z^\top\right) = (\beta_1 + i\beta_2)(A + iB + A - iB) =$$
$$= 2(\beta_1 + i\beta_2) A = 2\beta_1 A + i2\beta_2 A.$$
Условие вещественности матрицы $H\mathcal{P}_n$ имеет вид
$$\beta_2 A = 0.$$

Если $A = 0$, то $Z = iB$, но тогда матрица Z не может быть φ-циркулянтом для числа φ такого, что $|\varphi| = 1$, $\varphi \neq \pm 1$. Исключением являются скалярные матрицы Z и T. Соответствующие пары T и H принадлежат классу *ПТГВМ_1*.

В случае ненулевой матрицы A имеем
$$\beta \in \mathbf{R}.$$

Преобразуем теперь матрицу T:
$$T = t_0 I_n + \alpha\left(Z - iZ^\top\right) = t_0 I_n + \alpha\left(A + iB - i(A - iB)\right) =$$
$$= t_0 I_n + \alpha(A + iB - iA - B) = t_0 I_n + \alpha(1 - i)(A - B).$$

Если матрица $A-B$ диагональная, то матрица T скалярная, что приводит к паре из класса *ПТГВМ_1*. В противном случае заключаем, что

$$\alpha\,(1-i) \in \mathbf{R}.$$

Положим

$$\alpha\,(1-i) = 2\tilde{\alpha},$$

тогда

$$\alpha = (1+i)\,\tilde{\alpha}.$$

В результате матрица $\alpha\,(1-i)\,(A-B)$ вещественна и, взяв вещественным число t_0, получаем класс *ПТГВМ_10*. Теорема 6.3.1 доказана.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

— V-преобразование
— 1-го типа, 18
— 2-го типа, 19
— — вещественное, 19
— — комплексное, 19

— Матрица
— антидиагональ, 21
— ганкелева, 19
— — φ-циркулянт, 21
— — косой циркулянт, 21
— — циркулянт, 21
— инволютивная, 22
— кососимметричная, 21
— нормальная
— — вещественная, 21
— — комплексная, 21
— персимметричная, 21
— симметричная, 21
— скалярная, 22
— теплицева, 16
— — φ-циркулянт, 17
— — индекс, 57
— — косой циркулянт, 17
— — циркулянт, 17
— центросимметричная, 21

— Четверка
— вырожденная, 52
— нетривиальная, 52
— тривиальная, 52

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Гельфгат В. И., 49, 172, 183, 192
Икрамов Х. Д., 49, 129
Lee W. Y., 91
Arimoto A., 94
Farenick D. R., 91
Gu G., 93, 130
Ito K., 92
Krupnik M., 91
Krupnik N., 91
Patton L., 93, 130

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.

[2] *Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.

[3] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.

[4] *Ефимов Н.В., Розендорн Е.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.

[5] *Икрамов Х. Д.* Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Наука, Физматлит, 1991.

[6] *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М.: Наука, 1974.

[7] *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений: Численные методы. Пер. с англ. М.: Мир, 1983.

[8] *Тыртышников Е. Е.* Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения. М.: АН СССР. Отдел вычислительной математики, 1989.

[9] *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960.

[10] *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений: Пер. с англ. М.: Наука, 1970.

[11] *Hankel G.* Theorie der complexen Zahlensysteme. Lpz., 1867.

[12] *Hankel G.* Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Lpz., 1874.

[13] *Heinig G., Rost K.* Algebraic Methods for Toeplitz-like Matrices and Operators. - Operator theory: advances and aplication, V. 13, Birkhäuser, 1984.

[14] *Бабенко К. И.* О теплицевых и ганкелевых матрицах // Успехи матем. наук. 1986. Т. 41, № 1 (247). С. 171–178.

[15] *Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е.* Вычисления с теплицевыми матрицами // Вычислительные процессы и системы. Вып. 1. М.: Наука. 1983. С. 124–266.

[16] *Гельфгат В. И.* Критерий нормальности теплицевых матриц // ЖВМ и МФ. 1995. Т 35, № 9. С. 1428–1432.

[17] *Гельфгат В. И.* Условия коммутирования теплицевых матриц // ЖВМ и МФ. 1998. Т 38, № 1. С. 11–14.

[18] *Гельфгат В. И.* Условия коммутирования ганкелевых матриц // ЖВМ и МФ. 2011. Т 51, № 7. С. 1181–1193.

[19] *Гельфгат В. И.* О решении двух подзадач, завершающих классификацию пар коммутирующих ганкелевых матриц // ЖВМ и МФ. 2013. Т 53, № 4. С. 520–522.

[20] *Икрамов Х. Д.* Об описании нормальных теплицевых матриц // ЖВМ и МФ. 1994. Т.34, № 3. С. 473-479.

[21] *Икрамов Х. Д.* О классификации нормальных теплицевых матриц с вещественными элементами // Матем. заметки. 1995. Т.57, № 5. С. 670-680.

[22] *Икрамов Х. Д.* К вопросу об описании нормальных ганкелевых матриц // Фундам. прикл. матем. 1997. Т. 3. № 3. С. 809–819.

[23] *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* Критерий нормальности комплексной теплицевой матрицы // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36, № 2. С. 3–10.

[24] *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* О кососимметричной части произведения теплицевых матриц // Матем. заметки. 1998. Т. 63, № 1. С. 138–141.

[25] *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* Об одном новом классе нормальных ганкелевых матриц // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2007. № 1. С. 10–13.

[26] *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* О нормальных ганкелевых матрицах // Записки научных семинаров СПб. Отд. АН. 2007. Т. 346. С. 63–80.

[27] *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* О нормальных ганкелевых матрицах малых порядков // Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 2. С. 207–218.

[28] *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* О классификации нормальных ганкелевых матриц // Доклады РАН. 2009. Т. 424. № 6. С. 736–740.

[29] *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* О сведении нормальной ганкелевой задачи к двум частным случаям // Матем. заметки. 2009. Т. 85. № 5. С. 702–710.

[30] *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* Об одной характеризации теплицевых и ганкелевых циркулянтов // Записки научных семинаров СПб. Отд. АН 2010. Т. 382. С. 71–81.

[31] *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* Об условиях перестановочности теплицевых и ганкелевых матриц // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. №3. С. 363–367.

[32] *Лифанов И. К., Тыртышников Е. Е.* Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения // Вычислительные процессы и системы. Вып. 7. М.: Наука. 1990. С. 94–287.

[33] *Пустыльников Л. Д.* Теплицевы и ганкелевы матрицы и их применение // Успехи матем. наук. 1984. Т. 39. № 4 (238). С. 53–84.

[34] *Тыртышников Е. Е.* О некоторых задачах, связанных с теплицевыми матрицами // Численный анализ на Фортране. Методы и алгоритмы. М.: МГУ. 1979. С. 105–113.

[35] *Тыртышников Е. Е.* О решении систем с матрицами типа теплицевых // Численный анализ на Фортране. Вычислительные методы и инструментальные системы. М.: МГУ. 1979. С. 60–72.

[36] *Тыртышников Е. Е.* Некоторые алгоритмы, связанные с матрицами типа теплицевых // Вычислительные методы и программирование. Вып. 35. М.: МГУ. 1981. С. 158–180.

[37] *Тыртышников Е. Е.* Параллельные алгоритмы в задачах с теплицевыми матрицами // Вычислительные процессы и системы. Вып. 5. М.: Наука. 1987. С. 51–67.

[38] *Тыртышников Е. Е.* Новые быстрые алгоритмы для систем с ганкелевой и теплицевой матрицами // ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29. № 5. С. 645–652.

[39] *Чугунов В. Н.* Классификация нормальных и сопряженно-нормальных теплицевых и ганкелевых матриц. Дисс. д.ф.-м.н. -М.: МПГУ, 2012.

[40] *Чугунов В. Н.* О двух частных случаях решения нормальной ганкелевой задачи // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49. № 6. С. 931–939.

[41] *Чугунов В. Н.* К вопросу об описании пар коммутирующих комплексных ганкелевых матриц // ЖВМ и МФ. 2012. Т. 52. № 4. С. 579-584.

[42] *Чугунов В. Н., Икрамов Х. Д.* О классификации пар перестановочных теплицевой и ганкелевой матриц // Доклады РАН. 2015. Т. 464. №4. С. 406–410.

[43] *Чугунов В. Н., Икрамов Х. Д.* Классификация вещественных пар коммутирующих теплицевых и ганкелевых матриц // Сибирский ЖВМ. 2016. Т. 19. №4. С. 457–467.

[44] *Arimoto A.* A simple proof of the classification of normal Toeplitz matrices // Electronic J. Linear Algebra. 2002. V. 9. P. 108–111.

[45] *Chugunov V. N., Ikramov Kh. D.* A contribution to the normal Hankel problem // Linear Algebra Appl. 2009. V. 430. № 8–9. P. 2094–2101.

[46] *Chugunov V. N., Ikramov Kh. D.* There exist normal Hankel (φ, ψ)-circulants of any order n // Matrix methods: Theory, Algorithms and Applications. World Scientific. 2010. С. 222–226.

[47] *Chugunov V. N., Ikramov Kh. D.* A complete solution of the normal Hankel problem // Linear Algebra Appl. 2010. V. 432. № 12. P. 3210-3230.

[48] *Chugunov V. N., Ikramov Kh. D.* Permutability of Toeplitz and Hankel matrices // Linear Algebra Appl. 2015. V. 467. P. 226–242.

[49] *Chugunov V. N., Ikramov Kh. D.* A complete solution of the permutability problem for Toeplitz and Hankel matrices // Linear Algebra Appl. 2015. V. 478. P. 53-80.

[50] *Dellwo D. R.* Accelerated refinement with applications to integral equations // SIAM J. Numer. Anal. 1988. V. 25. P. 1327-1339.

[51] *Farenick D. R., Krupnik M., Krupnik N., Lee W. Y.* Normal Toeplitz matrices// SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1996. V. 17. № 4. P. 1037–1043.

[52] *Gu G., Patton L.* Commutation relations for Toeplitz and Hankel matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2003. V. 24. № 3. P. 728–746.

[53] *Ito K.* Every normal Toeplitz matrix is either of type I or of type II // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1996. V. 17. № 4. P. 998–1006.

[54] *Kailath T., Kung S.-Y., Morf M.* Displacement ranks of a matrix // Bull. Amer. Math. Soc. 1979. V. 1. № 5. P. 769-773.

[55] *Levinson N.* The Wiener rms (root mean square) error criteria in filter design and prediction // J. Math. Phys. 1946. V. 25. P. 261–278.

[56] *Töeplitz O., Hellinger E.* Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen // Mathematische Annalen. 1910. B. 69. № 3. S. 289–330.

[57] *Töeplitz O.* Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. I. Teil: Theorie der L-Formen // Mathematische Annalen. 1911. B. 70. № 3. S. 351–376.