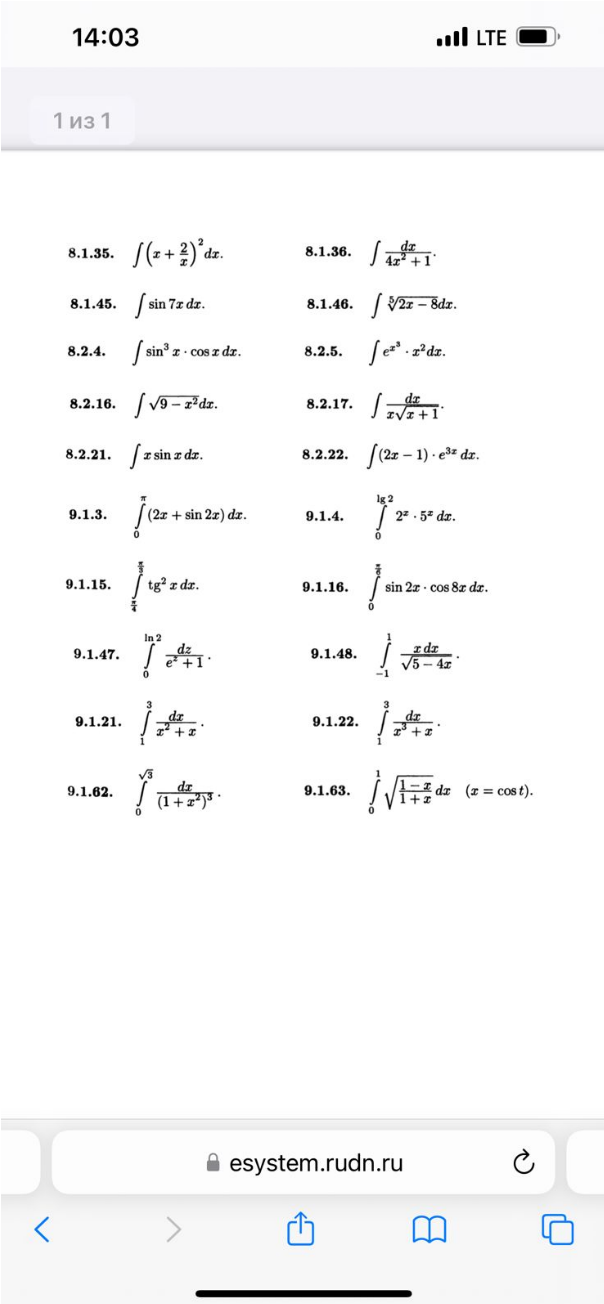
1 Задания



14:03 LTE

1 из 1

8.1.35. $\int\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 dx.$ **8.1.36.** $\int\frac{dx}{4x^2+1}.$

8.1.45. $\int\sin 7x\,dx.$ **8.1.46.** $\int\sqrt[5]{2x-8}\,dx.$

8.2.4. $\int\sin^3 x\cdot\cos x\,dx.$ **8.2.5.** $\int e^{x^3}\cdot x^2\,dx.$

8.2.16. $\int\sqrt{9-x^2}\,dx.$ **8.2.17.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}.$

8.2.21. $\int x\sin x\,dx.$ **8.2.22.** $\int(2x-1)\cdot e^{3x}\,dx.$

9.1.3. $\int\limits_0^{\pi}(2x+\sin 2x)\,dx.$ **9.1.4.** $\int\limits_0^{\lg 2}2^x\cdot 5^x\,dx.$

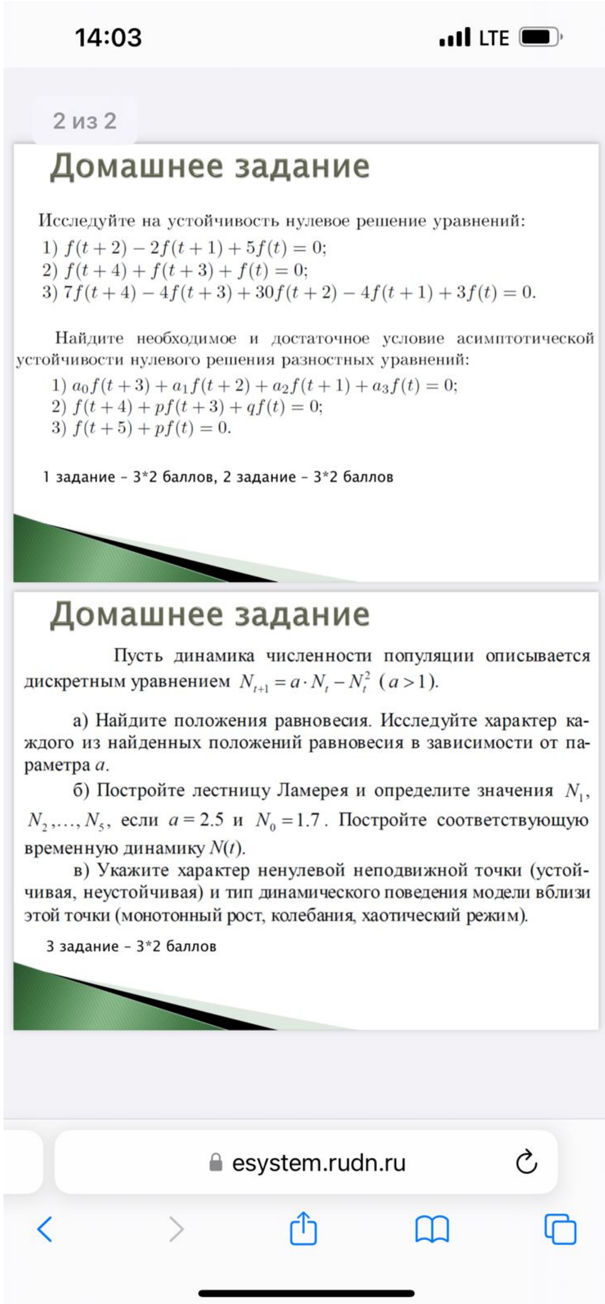
9.1.15. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}^2 x\,dx.$ **9.1.16.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\sin 2x\cdot\cos 8x\,dx.$

9.1.47. $\int\limits_0^{\ln 2}\frac{dz}{e^z+1}.$ **9.1.48.** $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$

9.1.21. $\int\limits_1^3\frac{dx}{x^2+x}.$ **9.1.22.** $\int\limits_1^3\frac{dx}{x^3+x}.$

9.1.62. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+x^2)^3}.$ **9.1.63.** $\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \quad (x=\cos t).$

esystem.rudn.ru



14:03 LTE

2 из 2

Домашнее задание

Исследуйте на устойчивость нулевое решение уравнений:

1) $f(t+2)-2f(t+1)+5f(t)=0;$
2) $f(t+4)+f(t+3)+f(t)=0;$
3) $7f(t+4)-4f(t+3)+30f(t+2)-4f(t+1)+3f(t)=0.$

Найдите необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения разностных уравнений:

1) $a_0f(t+3)+a_1f(t+2)+a_2f(t+1)+a_3f(t)=0;$
2) $f(t+4)+pf(t+3)+qf(t)=0;$
3) $f(t+5)+pf(t)=0.$

1 задание - 3*2 баллов, 2 задание - 3*2 баллов

Домашнее задание

Пусть динамика численности популяции описывается дискретным уравнением $N_{t+1}=a\cdot N_t-N_t^2$ $(a>1)$.

а) Найдите положения равновесия. Исследуйте характер каждого из найденных положений равновесия в зависимости от параметра a.

б) Постройте лестницу Ламерея и определите значения N_1, $N_2,\ldots,N_5$, если $a=2.5$ и $N_0=1.7$. Постройте соответствующую временную динамику $N(t)$.

в) Укажите характер ненулевой неподвижной точки (устойчивая, неустойчивая) и тип динамического поведения модели вблизи этой точки (монотонный рост, колебания, хаотический режим).

3 задание - 3*2 баллов

esystem.rudn.ru

2 Решения

2.1

$$\int\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 dx$$

□

$$\int\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 dx=\int\left(x^2+4+\frac{4}{x^2}\right)dx=\frac{x^3}{3}+4x-\frac{4}{x}+\mathrm{const}$$

■

2.2

$$\int\frac{dx}{4x^2+1}$$

□

$$\int\frac{dx}{4x^2+1}=\left\{u=2x,du=2dx\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{2}\arctan 2x+\mathrm{const}$$

■

2.3

$$\int \sin 7x dx$$

□

$$\int \sin 7x dx = -\frac{1}{7}\cos 7x + \text{const}$$

■

2.4

$$\int \sqrt[5]{2x-8}dx$$

□

$$\int \sqrt[5]{2x-8}dx = \left\{ u = 2x-8, du = 2dx \right\} = \frac{1}{2}\int \sqrt[5]{u}du = \frac{5u^{6/5}}{12} = \frac{5(2x-8)^{6/5}}{12} + \text{const}$$

■

2.5

$$\int \sin^3 x \cos x dx$$

□

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \left\{ u = \sin x, du = \cos x dx \right\} = \int u^3 du = \frac{\sin^4 x}{4} + \text{const}$$

■

2.6

$$\int \exp x^3 x^2 dx$$

□

$$\int \exp(x^3)x^2 dx = \left\{ u = x^3, du = 3x^2 dx \right\} = \frac{1}{3}\int \exp(u)du = \frac{\exp x^3}{3} + \text{const}$$

■

2.7

$$\int \sqrt{9-x^2}dx$$

□

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \left\{ x = 3\sin u, dx = 3\cos u du \right\} = 3\int 3\cos^2 u du = 9\int \frac{1+\cos 2u}{2}du = \frac{9}{2}\int du + \frac{9}{2}\int \cos 2u du =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\sin 2u + \text{const} = \left\{ \sin 2u = 2\sin u\cos u = 2\frac{x}{3}\sqrt{1-\sin^2 u} = 2\frac{x}{3}\sqrt{1-\sin^2 \arcsin\frac{x}{3}} = \right.$$

$$\left. = 2\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{2x}{9}\sqrt{9-x^2} \right\} = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \text{const}$$

■

2.8

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

□

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \left\{ u = x+1, du = dx \right\} = \int \frac{du}{(u-1)\sqrt{u}} = \left\{ t = \sqrt{u}, dt = \frac{du}{2\sqrt{u}} \right\} = -2\int \frac{dt}{1-t^2} = -2\,\mathrm{arctanh}\,\sqrt{x+1} + \mathrm{const}$$

■

2.9

$$\int x \sin x dx$$

□

$$\int x \sin x dx = \left\{ u = x, du = dx, dv = \sin x dx, v = -\cos x \right\} = -x\cos x + \int \cos x dx = \sin x - x\cos x + \mathrm{const}$$

■

2.10

$$\int (2x-1)\exp 3x dx$$

□

$$\int (2x-1)\exp 3x dx = 2\int \exp 3x x dx - \int \exp 3x dx = \left\{ u = x, du = dx, dv = \exp 3x dx, v = \frac{\exp 3x}{3} \right\} =$$

$$= 2\left(\frac{x}{3}\exp 3x - \frac{1}{3}\int \exp 3x dx \right) - \frac{1}{3}\exp 3x = 2\left(\frac{x}{3}\exp 3x - \frac{1}{9}\exp 3x \right) - \frac{1}{3}\exp 3x = \frac{\exp 3x}{9}(6x-5)$$

■

2.11

Исследуйте на устойчивость нулевое решение уравнения:

$$f(t+2) - 2f(t+1) + 5f(t) = 0.$$

□

Указанное выражение является линейным однородным разностным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. В общем случае такого уравнения для n порядка:

$$a_0 f(t+n) + a_1 f(t+n-1) + ... + a_{n-1} f(t+1) + a_n f(t) = 0$$

единственное стационарное решение является нулевым. Для

1. **устойчивости** такого решения необходимо и достаточно, чтобы модуль каждого из решений характеристического уравнения $P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ был меньше либо равен единице $|\lambda_j| \leq 1$ и корни, по модулю равные единице, являлись простыми числами (единичной кратности).

2. **асимптотической устойчивости** такого решения необходимо и достаточно, чтобы модуль каждого из решений характеристического уравнения был меньше единицы $|\lambda_j| < 1$.

Теорема Шура: Корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы тогда и только тогда, когда специальные определители, сформированные из коэффициентов этого уравнения, положительны $\Delta_j|_{j=1..n} > 0$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & 0 & 0 & a_n & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n-1} & & & a_0 & 0 & 0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & & & 0 & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ a_1 & & & a_n & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем будем находить корни характеристического уравнения напрямую и для сравнения вычислять указанные выше определители. В силу эквивалентности такие проверки должны давать одинаковый результат.

Составим характеристическое уравнение для рассматриваемого случая:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 1 - 2i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$, модули корней: $\lambda_1 = \lambda_2 \simeq 2.23$. Определители: $\Delta_1 = -24$, $\Delta_2 = 512$. Видно, что модули корней характеристического уравнений больше единицы, один из определителей меньше нуля, а значит нулевое решение *не является устойчивым.*

■

2.12

Исследуйте на устойчивость нулевое решение уравнения:

$$f(t+4) + f(t+3) + f(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \lambda^3 + 1 = 0.$$

Полная запись корней уравнения является громоздкой, поэтому приведем сразу модули корней: $\lambda_1 = \lambda_2 \simeq 1.18$, $\lambda_3 = \lambda_4 \simeq 0.84$. Определители: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = -1$, $\Delta_4 = 3$. Видно, что два корня характеристического уравнения по модулю больше единицы, два определителя меньше нуля, значит нулевое решение *не является устойчивым.*

■

2.13

Исследуйте на устойчивость нулевое решение уравнения:

$$7f(t+4) - 4f(t+3) + 30f(t+2) - 4f(t+1) + 3f(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$7\lambda^4 - 4\lambda^3 + 30\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Полная запись корней уравнения является громоздкой, поэтому приведем сразу модули корней: $\lambda_1 = \lambda_2 \simeq 0.32$, $\lambda_3 = \lambda_4 \simeq 2.03$. Определители: $\Delta_1 = 40$, $\Delta_2 = 1344$, $\Delta_3 = -471040$, $\Delta_4 = 157286400$. Видно, что два корня характеристического уравнения по модулю больше единицы, Δ_3 меньше нуля, значит нулевое решение *не является устойчивым.*

■

2.14

Найдите необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения разностного уравнения:

$$a_0 f(t+3) + a_1 f(t+2) + a_2 f(t+1) + a_3 f(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Полная запись корней характеристического уравнения является громоздкой, поэтому запишем необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости через определители:

$$\Delta_1 = a_0^2 - a_3^2 > 0,$$

$$\Delta_2 = a_0^4 - a_0^2a_2^2 - 2a_0^2a_3^2 + 2a_0a_1a_2a_3 - a_1^2a_3^2 + a_3^4 > 0,$$

$$\Delta_3 = a_0^6 - a_0^4a_1^2 - 2a_0^4a_2^2 - 3a_0^4a_3^2 + 2a_0^3a_1^2a_2 + 6a_0^3a_1a_2a_3 - 2a_0^2a_1^3a_3 - a_0^2a_1^2a_2^2 - a_0^2a_1^2a_3^2 -$$
$$-4a_0^2a_1a_2^2a_3 + a_0^2a_2^4 + a_0^2a_2^2a_3^2 + 3a_0^2a_3^4 + 2a_0a_1^3a_2a_3 + 4a_0a_1^2a_2a_3^2 - 2a_0a_1a_2^3a_3 - 6a_0a_1a_2a_3^3 + 2a_0a_2^3a_3^2 - a_1^4a_3^2 +$$
$$+a_1^2a_2^2a_3^2 + 2a_1^2a_3^4 - 2a_1a_2^2a_3^3 + a_2^2a_3^4 - a_3^6 > 0.$$

■

2.15

Найдите необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения разностного уравнения:

$$f(t+4) + pf(t+3) + qf(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + p\lambda^3 + q = 0.$$

Полная запись корней характеристического уравнения является громоздкой, поэтому запишем необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости через определители:

$$\Delta_1 = 1 - q^2 > 0,$$
$$\Delta_2 = -p^2q^2 + q^4 - 2q^2 + 1 > 0,$$
$$\Delta_3 = -p^4q^2 + 2p^2q^4 - 2p^2q^2 - q^6 + 3q^4 - 3q^2 + 1 > 0,$$
$$\Delta_4 = -p^6q^2 + 3p^4q^4 - p^4q^2 + 2p^4q - 3p^2q^6 + 5p^2q^4 - p^2q^2 - p^2 + q^8 - 4q^6 + 6q^4 - 4q^2 + 1 > 0.$$

■

2.16

Найдите необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения разностного уравнения:

$$f(t+5) + pf(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 + p\lambda = 0.$$

Полная запись корней характеристического уравнения является громоздкой, поэтому запишем необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости через определители:

$$\Delta_1 = 1 - p^2 > 0,$$
$$\Delta_2 = (1-p^2)^2 > 0,$$
$$\Delta_3 = (1-p^2)^3 > 0,$$
$$\Delta_4 = (1-p^2)^4 > 0,$$
$$\Delta_5 = (1-p^2)^5 > 0.$$

Исходя из представленных выражений для определителей, решение уравнения будет асимптотически устойчиво при $p < 1$.

2.17

Пусть динамика численности популяции описывается дискретным уравнением:

$$N_{t+1} = aN_t - N_t, (a > 1)$$

Найдите положения равновесия. Исследуйте характер каждого из найденных положений равновесия в зависимости от параметра a.

□

В случае тривиального начального условия $N_0 = 0$ система с первого шага войдет в положение устойчивого равновесия, соответствующее нулевым значениям N_t вне зависимости от параметра a. При $N_0 = 1$ система также устойчива вне зависимости от a, поскольку на каждом следующем шаге $N_{t+1} = a - 1$. Аналогичный результат наблюдается при любом значении a, если $N_0 = a - 1$. При возрастании N_0 устойчивость системы будет зависеть от соотношения между линейной составляющей с коэффициентом a и квадратичным слагаемым. В некоторых случаях достигается равновесие: $\{a = 2.5,\ N_0 = 1.7\}$, $\{a = 2.8,\ N_0 = 2.0\}$, в некоторых – хаос: $\{a = 3.8,\ N_0 = 1.1\}$, $\{a = 4.0,\ N_0 = 0.9\}$.

■

2.18

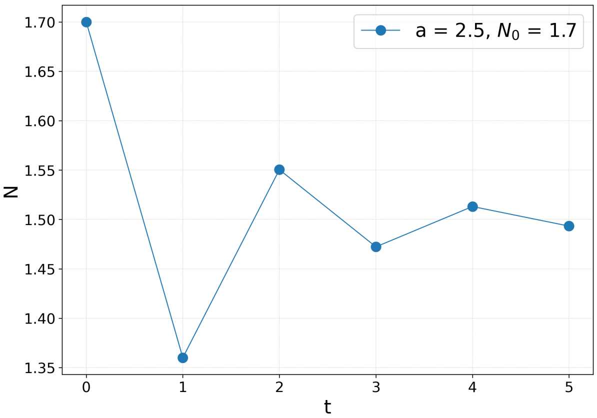
Пусть динамика численности популяции описывается дискретным уравнением:

$$N_{t+1} = aN_t - N_t, (a > 1)$$

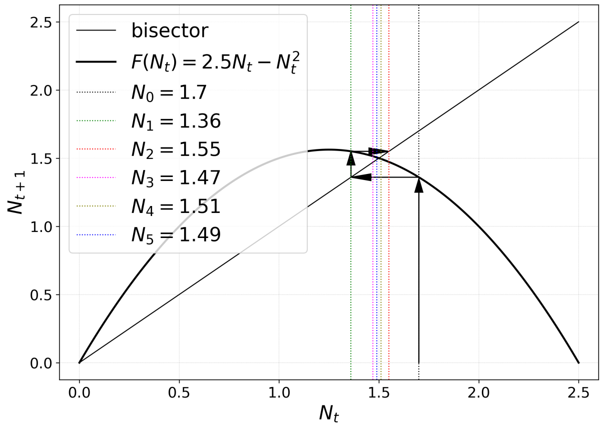
Постройте лестницу Ламерея и определите значения N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, если $a = 2.5$ и $N_0 = 1.7$. Постройте соответствующую временную динамику $N(t)$.

□

Решим указанное уравнение для заданных параметров и получим: $N_1 \simeq 1.36$, $N_2 \simeq 1.55$, $N_3 \simeq 1.47$, $N_4 \simeq 1.51$, $N_5 \simeq 1.49$. Временная динамика и лестница Ламерея представлены на рисунках ниже. В лестнице Ламерея для ясности восприятия приведены только несколько первых итераций.



Временная динамика



Лестница Ламерея

■

2.19

Пусть динамика численности популяции описывается дискретным уравнением:

$$N_{t+1} = aN_t - N_t, (a > 1)$$

Укажите характер ненулевой неподвижной точки (устойчивая, неустойчивая) и тип динамического поведения модели вблизи этой точки (монотонный рост, колебания, хаотический режим).

□

В приблизительно в районе точки $N \simeq 1.5$ наблюдается устойчивое равновесие с колебательным поведением модели.

■