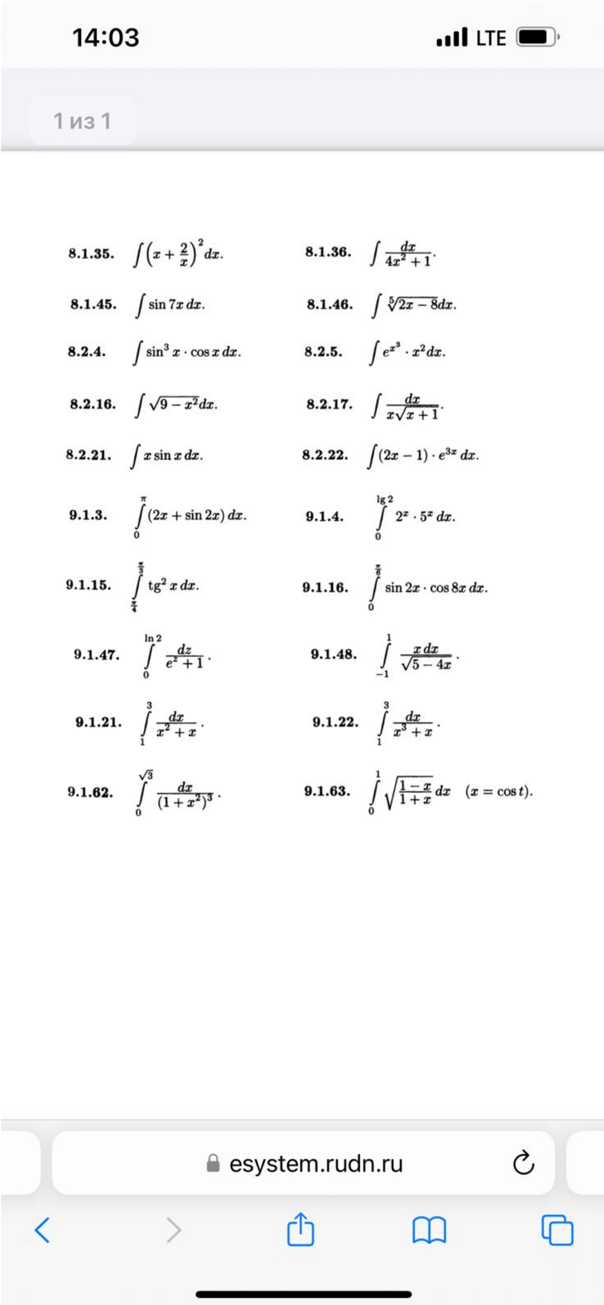
1 Задания



14:03 LTE

1 из 1

8.1.35. $\int\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 dx.$ **8.1.36.** $\int\frac{dx}{4x^2+1}.$

8.1.45. $\int\sin 7x\,dx.$ **8.1.46.** $\int\sqrt[5]{2x-8}dx.$

8.2.4. $\int\sin^3 x\cdot\cos x\,dx.$ **8.2.5.** $\int e^{x^3}\cdot x^2dx.$

8.2.16. $\int\sqrt{9-x^2}dx.$ **8.2.17.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}.$

8.2.21. $\int x\sin x\,dx.$ **8.2.22.** $\int(2x-1)\cdot e^{3x}\,dx.$

9.1.3. $\int\limits_0^{\pi}(2x+\sin 2x)\,dx.$ **9.1.4.** $\int\limits_0^{\lg 2}2^x\cdot 5^x\,dx.$

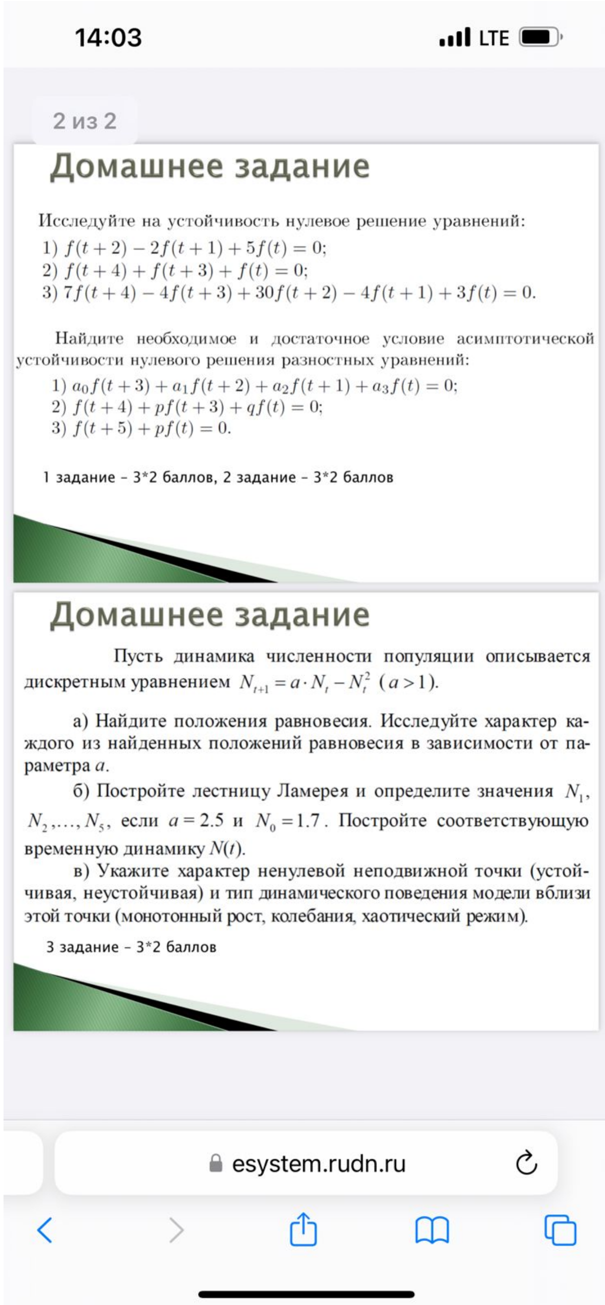
9.1.15. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}^2 x\,dx.$ **9.1.16.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\sin 2x\cdot\cos 8x\,dx.$

9.1.47. $\int\limits_0^{\ln 2}\frac{dz}{e^z+1}.$ **9.1.48.** $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$

9.1.21. $\int\limits_1^3\frac{dx}{x^2+x}.$ **9.1.22.** $\int\limits_1^3\frac{dx}{x^3+x}.$

9.1.62. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+x^2)^3}.$ **9.1.63.** $\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\quad(x=\cos t).$

esystem.rudn.ru



14:03 LTE

2 из 2

Домашнее задание

Исследуйте на устойчивость нулевое решение уравнений:
1) $f(t+2)-2f(t+1)+5f(t)=0;$
2) $f(t+4)+f(t+3)+f(t)=0;$
3) $7f(t+4)-4f(t+3)+30f(t+2)-4f(t+1)+3f(t)=0.$

Найдите необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения разностных уравнений:
1) $a_0f(t+3)+a_1f(t+2)+a_2f(t+1)+a_3f(t)=0;$
2) $f(t+4)+pf(t+3)+qf(t)=0;$
3) $f(t+5)+pf(t)=0.$

1 задание - 3*2 баллов, 2 задание - 3*2 баллов

Домашнее задание

Пусть динамика численности популяции описывается дискретным уравнением $N_{t+1}=a\cdot N_t-N_t^2$ $(a>1)$.

а) Найдите положения равновесия. Исследуйте характер каждого из найденных положений равновесия в зависимости от параметра a.

б) Постройте лестницу Ламерея и определите значения N_1, $N_2,\ldots,N_5$, если $a=2.5$ и $N_0=1.7$. Постройте соответствующую временную динамику $N(t)$.

в) Укажите характер ненулевой неподвижной точки (устойчивая, неустойчивая) и тип динамического поведения модели вблизи этой точки (монотонный рост, колебания, хаотический режим).

3 задание - 3*2 баллов

esystem.rudn.ru

2 Решения

2.1

Исследуйте на устойчивость нулевое решение уравнения:

$$f(t+2)-2f(t+1)+5f(t)=0.$$

□

Указанное выражение является линейным однородным разностным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. В общем случае такого уравнения для n порядка:

$$a_0f(t+n)+a_1f(t+n-1)+\ldots+a_{n-1}f(t+1)+a_nf(t)=0$$

единственное стационарное решение является нулевым. Для

1. **устойчивости** такого решения необходимо и достаточно, чтобы модуль каждого из решений характеристического уравнения $P(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$ был меньше либо равен единице $|\lambda_j|\le 1$ и корни, по модулю равные единице, являлись простыми числами (единичной кратности).

2. **асимптотической устойчивости** такого решения необходимо и достаточно, чтобы модуль каждого из решений характеристического уравнения был меньше единицы $|\lambda_j|<1$.

Теорема Шура: Корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы тогда и только тогда, когда специальные определители, сформированные из коэффициентов этого уравнения, положительны $\Delta_j|_{j=1..n} > 0$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & 0 & 0 & a_n & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n-1} & & & a_0 & 0 & 0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & & & 0 & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ a_1 & & & a_n & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем будем находить корни характеристического уравнения напрямую и для сравнения вычислять указанные выше определители. В силу эквивалентности такие проверки должны давать одинаковый результат.

Составим характеристическое уравнение для рассматриваемого случая:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 1 - 2i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$, модули корней: $\lambda_1 = \lambda_2 \simeq 2.23$. Определители: $\Delta_1 = -24$, $\Delta_2 = 512$. Видно, что модули корней характеристического уравнений больше единицы, один из определителей меньше нуля, а значит нулевое решение *не является устойчивым.*

■

2.2

Исследуйте на устойчивость нулевое решение уравнения:

$$f(t+4) + f(t+3) + f(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \lambda^3 + 1 = 0.$$

Полная запись корней уравнения является громоздкой, поэтому приведем сразу модули корней: $\lambda_1 = \lambda_2 \simeq 1.18$, $\lambda_3 = \lambda_4 \simeq 0.84$. Определители: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = -1$, $\Delta_4 = 3$. Видно, что два корня характеристического уравнения по модулю больше единицы, два определителя меньше нуля, значит нулевое решение *не является устойчивым.*

■

2.3

Исследуйте на устойчивость нулевое решение уравнения:

$$7f(t+4) - 4f(t+3) + 30f(t+2) - 4f(t+1) + 3f(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$7\lambda^4 - 4\lambda^3 + 30\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Полная запись корней уравнения является громоздкой, поэтому приведем сразу модули корней: $\lambda_1 = \lambda_2 \simeq 0.32$, $\lambda_3 = \lambda_4 \simeq 2.03$. Определители: $\Delta_1 = 40$, $\Delta_2 = 1344$, $\Delta_3 = -471040$, $\Delta_4 = 157286400$. Видно, что два корня характеристического уравнения по модулю больше единицы, Δ_3 меньше нуля, значит нулевое решение *не является устойчивым.*

■

2.4

Найдите необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения разностного уравнения:

$$a_0 f(t+3) + a_1 f(t+2) + a_2 f(t+1) + a_3 f(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Полная запись корней характеристического уравнения является громоздкой, поэтому запишем необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости через определители:

$$\Delta_1 = a_0^2 - a_3^2 > 0,$$

$$\Delta_2 = a_0^4 - a_0^2 a_2^2 - 2a_0^2 a_3^2 + 2a_0 a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_3^2 + a_3^4 > 0,$$

$$\Delta_3 = a_0^6 - a_0^4 a_1^2 - 2a_0^4 a_2^2 - 3a_0^4 a_3^2 + 2a_0^3 a_1^2 a_2 + 6a_0^3 a_1 a_2 a_3 - 2a_0^2 a_1^3 a_3 - a_0^2 a_1^2 a_2^2 - a_0^2 a_1^2 a_3^2 -$$
$$-4a_0^2 a_1 a_2^2 a_3 + a_0^2 a_2^4 + a_0^2 a_2^2 a_3^2 + 3a_0^2 a_3^4 + 2a_0 a_1^3 a_2 a_3 + 4a_0 a_1^2 a_2 a_3^2 - 2a_0 a_1 a_2^3 a_3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3^3 + 2a_0 a_2^3 a_3^2 - a_1^4 a_3^2 +$$
$$+a_1^2 a_2^2 a_3^2 + 2a_1^2 a_3^4 - 2a_1 a_2^2 a_3^3 + a_2^2 a_3^4 - a_3^6 > 0.$$

■

2.5

Найдите необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения разностного уравнения:

$$f(t+4) + pf(t+3) + qf(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + p\lambda^3 + q = 0.$$

Полная запись корней характеристического уравнения является громоздкой, поэтому запишем необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости через определители:

$$\Delta_1 = 1 - q^2 > 0,$$

$$\Delta_2 = -p^2q^2 + q^4 - 2q^2 + 1 > 0,$$

$$\Delta_3 = -p^4q^2 + 2p^2q^4 - 2p^2q^2 - q^6 + 3q^4 - 3q^2 + 1 > 0,$$

$$\Delta_4 = -p^6q^2 + 3p^4q^4 - p^4q^2 + 2p^4q - 3p^2q^6 + 5p^2q^4 - p^2q^2 - p^2 + q^8 - 4q^6 + 6q^4 - 4q^2 + 1 > 0.$$

■

2.6

Найдите необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения разностного уравнения:

$$f(t+5) + pf(t) = 0.$$

□

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 + p\lambda = 0.$$

Полная запись корней характеристического уравнения является громоздкой, поэтому запишем необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости через определители:

$$\Delta_1 = 1 - p^2 > 0,$$

$$\Delta_2 = (1-p^2)^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = (1-p^2)^3 > 0,$$

$$\Delta_4 = (1-p^2)^4 > 0,$$

$$\Delta_5 = (1-p^2)^5 > 0.$$

Исходя из представленных выражений для определителей, решение уравнения будет асимптотически устойчиво при $p < 1$.

2.7

Пусть динамика численности популяции описывается дискретным уравнением:

$$N_{t+1} = aN_t - N_t, (a > 1)$$

Найдите положения равновесия. Исследуйте характер каждого из найденных положений равновесия в зависимости от параметра a.

□

В случае тривиального начального условия $N_0 = 0$ система с первого шага войдет в положение устойчивого равновесия, соответствующее нулевым значениям N_t вне зависимости от параметра a. При $N_0 = 1$ система также устойчива вне зависимости от a, поскольку на каждом следующем шаге $N_{t+1} = a - 1$. Аналогичный результат наблюдается при любом значении a, если $N_0 = a - 1$. При возрастании N_0 устойчивость системы будет зависеть от соотношения между линейной составляющей с коэффициентом a и квадратичным слагаемым. В некоторых случаях достигается равновесие: $\{a = 2.5,\ N_0 = 1.7\}$, $\{a = 2.8,\ N_0 = 2.0\}$, в некоторых – хаос: $\{a = 3.8,\ N_0 = 1.1\}$, $\{a = 4.0,\ N_0 = 0.9\}$.

■

2.8

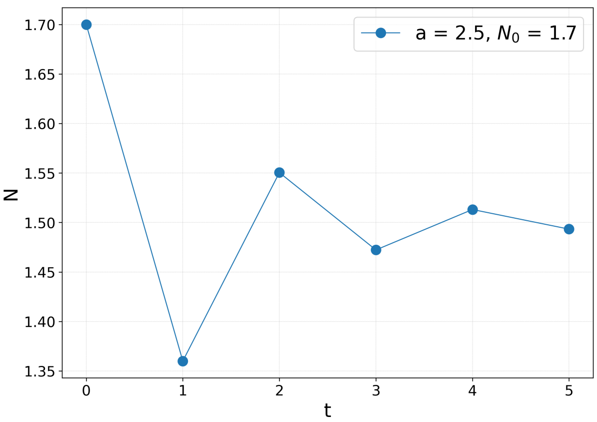
Пусть динамика численности популяции описывается дискретным уравнением:

$$N_{t+1} = aN_t - N_t, (a > 1)$$

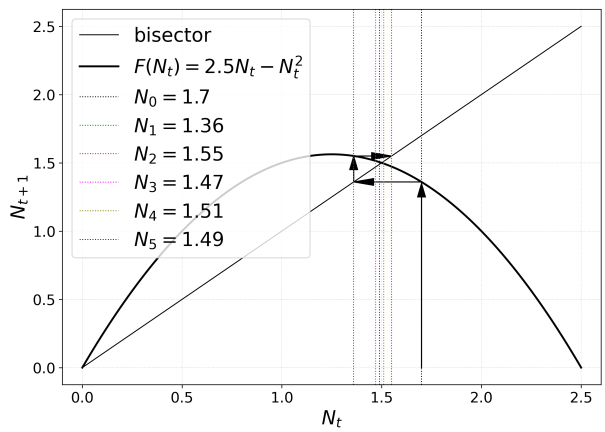
Постройте лестницу Ламерея и определите значения N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, если $a = 2.5$ и $N_0 = 1.7$. Постройте соответствующую временную динамику $N(t)$.

□

Решим указанное уравнение для заданных параметров и получим: $N_1 \simeq 1.36$, $N_2 \simeq 1.55$, $N_3 \simeq 1.47$, $N_4 \simeq 1.51$, $N_5 \simeq 1.49$. Временная динамика и лестница Ламерея представлены на рисунках ниже. В лестнице Ламерея для ясности восприятия приведены только несколько первых итераций.



Временная динамика



Лестница Ламерея

■

2.9

Пусть динамика численности популяции описывается дискретным уравнением:

$$N_{t+1} = aN_t - N_t, (a > 1)$$

Укажите характер ненулевой неподвижной точки (устойчивая, неустойчивая) и тип динамического поведения модели вблизи этой точки (монотонный рост, колебания, хаотический режим).

□

В приблизительно в районе точки $N \simeq 1.5$ наблюдается устойчивое равновесие с колебательным поведением модели.

■