Задачи для Case Day.

1. Натуральное число n делят с остатком на числа, меньшие n. Для какого наибольшего n среди остатков встречаются не все однозначные числа (то есть числа от 1 до 9)?

Ответ: 18.

Решение. У 18 нет остатка 9, так как все делители 18-9 не более 9. Для числа $n > 18$ у каждого из чисел $n - i$ есть делитель, больший 9, например само это число.

2. Сколько пятизначных чисел можно выбрать так, чтобы любые два выбранных числа отличались хотя бы в двух разрядах?

Ответ: 9000.

Решение. Выберем числа, сумма цифр которых делится на 10. Для любых первых четырёх цифр однозначно подбирается пятая. Поэтому выбрано 9000 чисел. Докажем, что больше чисел выбрать нельзя. Для любых первых четырёх цифр выбрано максимум одно число с таким началом, поэтому больше 9000 тоже выбрать нельзя.

3. Дан треугольник со сторонами 5, 6, 7. Найдите наименьшее возможное значение суммы квадратов расстояний от точки внутри треугольника до вершин.

Ответ: $\frac{110}{3}$

4. У Пети есть генератор случайных чисел и он с помощью него заполняет матрицу 3×3. Каждое число на диагонали равномерно распределено на $[0; 4]$, а любое другое равномерно распределено на $[0; 3]$. Все 9 случайных величин независимы в совокупности. Чему равно математическое ожидание определителя?

Ответ: $-5,75$.

Решение. По определению определитель равен $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$. Математическое ожидание первого произведения равно 8, второго и третьего — $\frac{27}{8}$, а трёх последних — $\frac{9}{2}$. Поэтому математическое ожидание определителя равно $1 + \frac{54}{8} - \frac{27}{2} = \frac{8+54-108}{8} = \frac{-46}{8} = -5,75$.

5. Петя загадал многочлен третьей степени $f(x)$ такой, что $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, а $\int\limits_0^1 f(x)d(x) = \frac{1}{2}$. Услышав это, Вася сказал, что не может восстановить $f(x)$, но знает значение $f(x)$ для ещё одного x. Для какого? *Предполагаем, что Васины размышления верны.*

Ответ: 0.5.

Решение. Из условий $f(0) = 1$ и $f(1) = 0$ получаем, что $f(x) = 1 - x + x(x-1)(ax+b)$. Интеграл аддитивен, поэтому $\int\limits_0^1 x(x-1)(ax+b)dx = 0$. С другой стороны $x(x-1)(ax+b) = ax^3 + (b-a)x^2 - bx$, а $\int\limits_0^1 ax^3 + (b-a)x^2 - bx\, dx = \frac{a}{4} + \frac{b-a}{3} - \frac{b}{2}$. Приравнивая этот интеграл к нулю получаем, что $a = -2b$, поэтому $f(x) = 1 - x + bx(1-x)(1-2x)$. У этого многочлена известно значение в точке $x = \frac{1}{2}$, а в любой другой точке значение зависит от b.

6. Произведение цифр натурального числа равно 12^{13}. Какое наименьшее количество цифр может быть в этом числе?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что $12^{13} = 2^{26} \cdot 3^{13}$. Поэтому в числе могли встречаться только цифры 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Среди всех примеров с оптимальным количеством цифр будем рассматривать наименьшее число. Единиц в оптимальном примере быть не может. Если есть хотя бы две цифры, не превосходящие 3, то их можно заменить на их произведение. Если есть две 6, то их можно заменить на 4 и 9. Если есть 3 и 4, то можно заменить на 2 и 6, если есть 3 и 6, то можно заменить на 2 и 9, если есть 2 и 4, то можно заменить на 8. Поэтому цифр, не 8 и не 9 довольно мало.

Давайте разберём несколько случаев.
1) Есть ровно одна 6. Тогда нет, 3 и 4. Произведение оставшихся цифр $2^{25} \cdot 3^{12}$. Любая цифра делится или только на 2, или только на 3. Чтобы набрать 2^{25} нужно хотя бы 9 цифр, чтобы набрать 3^{12} нужно хотя бы 6 цифр, то есть цифр хотя бы 16.
2) Нет шестёрок. Тогда любая цифра либо 4, либо 8, либо 3, либо 9. на 2^{26} нужно хотя бы 9 цифр, а на 3^{13} хотя бы 7. Снова хотя бы 16 цифр.

На 16 цифр есть пример: 2, 6, 8 восьмёрок и 6 девяток.

7. Найдите $\lim_{n \to \infty} \quad \frac{n\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+..+\sqrt{n}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+...+\sqrt[3]{n}\right)^3}$

Ответ: $256\overline{243}$

8. Окружность радиуса 1 касается параболы $y = x^2$ в двух точках, симметричных относительно оси Oy. Найдите координату центра этой окружности по оси y.

Ответ: 1,25.

Решение. Обозначим точки касания $A\ (a, a^2)$ и $B\ (-a, a^2)$. Серединный перпендикуляр этих точек – ось Oy, значит центр окружности лежит на ней. Уравнение касательной в точке a имеет вид $y = 2a(x-a)+a^2$, нормаль имеет уравнение $y = -\frac{x-a}{2a}+a^2$. С осью Oy эта нормаль пересекается в точке $C\ (0, a^2+\frac{1}{2})$. Когда расстояние AC равно 1? Имеем уравнение $a^2+1/4 = 1$, октуда $a^2 = 3/4$, откуда ордината центра равна $\frac{5}{4}$

9. По кругу сидят 6 человек. Изначально у одного из них n конфет, а у других ноль. За один ход любой, у кого хотя бы 4 конфеты может съесть одну из них, а по одной раздать соседям и человеку напротив. Сколько существует $1 \leqslant n \leqslant 1000$ таких, что люди могут добиться того, чтобы у всех шестерых конфет стало поровну?

Ответ: 35.

Решение. Покажем, что можно это сделать в точности, если n делится на 28.

Как распределить 28 конфет? Пронумеруем людей 1, 2, 3, 4, 5, 6, считаем, что конфеты изначально у первого. Первый 7 раз проделает операцию, после чего у 2, 4, 6 по 7 конфет, у 1, 3, 5 ноль. Затем каждый из 2, 4, 6 проделает операцию по одному разу. У них останется по 3 конфеты, а у 1, 3, 5 получится по 3 конфеты.

Если смогли распределить 28 конфет, то сможем и любое кратное 28.

Почему n обязано делиться на 28?

Обозначим a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 количество операций, которое сделали люди. Тогда заметим, что $a_2 = a_4 = a_6$, потому что поступило людям 2, 4, 6 поровну конфет $(a_1 + a_3 + a_5)$, поэтому и отдать должны были поровну. Аналонично $a_3 = a_5$. Обозначим $a_2 = a_4 = a_6 = x$, $a_3 = a_5 = y$. Тогда после всех операций у первого $n - 4a_1 + 3x$, у 2, 4 и 6 — $a_1 - 4x + 2y$, а у 3 и 5 — $3x - 4y$.

Из равенства $a_1 - 4x + 2y = 3x - 4y$ получаем, что $a_1 = 7x - 6y$. Подставим это в равенство $n - 4a_1 + 3x = 3x - 4y$, получим $n - 28x + 24y + 3x = 3x - 4y$, после преобразования получим, что $n = 28(x - y)$, то есть n делится на 28.

10. Напишите радиус окружности, на которой лежат точки пересечения гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и параболы $y = x^2 - 2x - 6$

Ответ: 4

Решение. Найдём окружность, которая принадлежит тому же пучку, что и две упомянутые кривые. Для этого можно сложить их уравнения с коэффициентами $0 = 2(x^2 - 2x - 6 - y) + (y^2 - x^2 + 1) = x^2 - 4x + y^2 - 2y - 11 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 16$

11. В футбольном турнире участвовали 6 команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. В каждой игре за победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Пять команд набрали по 6 очков. Сколько очков могла набрать шестая команда? В ответе приведите сумму всех найденных вариантов.

Ответ: 50

Решение. Покажем, что все возможности — это 5, 6, 7, 8, 9, 15.
Как можно набрать 6 очков? Это либо 2 победы, 3 поражения, либо одна победа, три ничьи, одно поражение. В любом случае у каждой из пяти команд побед не больше, чем поражений. Так как суммарно побед и поражений поровну, то у шестой команды побед не меньше, чем поражений. Поэтому у шестой команды не может быть меньше 5 очков, потому что если команда набирает меньше одного очка за матч, то побед меньше, чем поражений.

Почему не может быть 10 очков? Набрать 10 очков за 5 игр есть один способ — это 3 победы, одна ничья, одно поражение. То есть разность побед и поражений 2. Тогда есть две команды, у которых 2 победы и 3 поражения, а у трёх других 1 победа, 3 ничьи, одно поражение. То есть ничьи есть только у 4 команд, при этом у трёх команд по 3 ничьи, тогда все матчи между этими 4 командами должны были завершиться вничью, но тогда у шестой команды не 1 ничья.

Почему не может быть 11? Набрать 11 очков есть один способ — 3 победы, 2 ничьи, 0 поражений. То есть разность побед и поражений 3. Тогда у трёх из пяти команд 2 победы, 3 поражения, а у двух других 1 победа, три ничьих. Получается, что ничьи были только у трёх команд, но суммарно ничьих 4 штуки. Так не бывает.

Почему не может быть 12? Набрать 12 очков есть один способ — 4 победы, одно поражение. Тогда снова у трёх команд 2 победы, 3 поряжения, а у двух по одной победе и 3 ничьи. Но тогда ничьи всего у двух команд.

Почему не может быть 13? Набрать 13 очков один способ — 4 победы и одна ничья. Тогда из пятёрки команд у четырёх должен быть баланс побед и поражений -1, а у одной три ничьи. То есть ничьи были только у двух команд, но тогда как команда набрала 3 ничьи?

14 очков набрать за 5 игр невозможно.

На остальные варианты предъявим пример. Шестая команда – команда F.

Команды	A	B	C	D	E	F	Очки
A	x	3 : 0	1 : 1	1 : 1	0 : 3	1 : 1	6
B	0 : 3	x	3 : 0	1 : 1	1 : 1	1 : 1	6
C	1 : 1	0 : 3	x	3 : 0	1 : 1	1 : 1	6
D	1 : 1	1 : 1	0 : 3	x	3 : 0	1 : 1	6
E	3 : 0	1 : 1	1 : 1	0 : 3	x	1 : 1	6
F	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	x	5

Команды	A	B	C	D	E	F	Очки
A	x	3 : 0	1 : 1	1 : 1	1 : 1	0 : 3	6
B	0 : 3	x	3 : 0	1 : 1	1 : 1	1 : 1	6
C	1 : 1	0 : 3	x	3 : 0	1 : 1	1 : 1	6
D	1 : 1	1 : 1	0 : 3	x	3 : 0	1 : 1	6
E	1 : 1	1 : 1	1 : 1	0 : 3	x	3 : 0	6
F	3 : 0	1 : 1	1 : 1	1 : 1	0 : 3	x	6

Команды	A	B	C	D	E	F	Очки
A	x	1 : 1	3 : 0	1 : 1	1 : 1	0 : 3	6
B	1 : 1	x	1 : 1	1 : 1	3 : 0	0 : 3	6
C	0 : 3	1 : 1	x	3 : 0	1 : 1	1 : 1	6
D	1 : 1	1 : 1	0 : 3	x	3 : 0	1 : 1	6
E	1 : 1	0 : 3	1 : 1	1 : 1	x	3 : 0	6
F	3 : 0	3 : 0	1 : 1	0 : 3	0 : 3	x	7

Команды	A	B	C	D	E	F	Очки
A	x	1 : 1	3 : 0	1 : 1	1 : 1	0 : 3	6
B	1 : 1	x	3 : 0	1 : 1	1 : 1	0 : 3	6
C	0 : 3	0 : 3	x	0 : 3	3 : 0	3 : 0	6
D	1 : 1	1 : 1	3 : 0	x	0 : 3	1 : 1	6
E	1 : 1	1 : 1	0 : 3	3 : 0	x	1 : 1	6
F	3 : 0	3 : 0	0 : 3	1 : 1	1 : 1	x	8

Команды	A	B	C	D	E	F	Очки
A	x	3 : 0	0 : 3	0 : 3	3 : 0	0 : 3	6
B	0 : 3	x	3 : 0	3 : 0	0 : 3	0 : 3	6
C	3 : 0	0 : 3	x	1 : 1	1 : 1	1 : 1	6
D	3 : 0	0 : 3	1 : 1	x	1 : 1	1 : 1	6
E	0 : 3	3 : 0	1 : 1	1 : 1	x	1 : 1	6
F	3 : 0	3 : 0	1 : 1	1 : 1	1 : 1	x	9

Команды	A	B	C	D	E	F	Очки
A	x	3 : 0	3 : 0	0 : 3	0 : 3	0 : 3	6
B	0 : 3	x	3 : 0	3 : 0	0 : 3	0 : 3	6
C	0 : 3	0 : 3	x	3 : 0	3 : 0	0 : 3	6
D	3 : 0	0 : 3	0 : 3	x	3 : 0	0 : 3	6
E	3 : 0	3 : 0	0 : 3	0 : 3	x	0 : 3	6
F	3 : 0	3 : 0	3 : 0	3 : 0	3 : 0	x	15

12. у Васи в комнате равномерный бардак который надо убирать час.

Каждый ход у Вася случайно входит либо в депрессивную фазу (и он убирает 20% за 80% времени) либо маниакальную (и он убирает 80% за 20% времени). Вероятность депрессивной фазы равна $0,8$.

Найдите математическое ожидание времени уборки. Ответ округлите с точности до трёх знаков.

Ответ. $17/8 = 2,125$.

Решение. Обозначим матожидание S. Если первая фаза депрессивная, то после 0,8 часа останется работы 0,8, которую он выполнит в среднем за $0,8S$. Если же фаза маниакальная, то через 0,2 часа останется 0,2 работы, он выполнит это за $0,2S$.

Отсюда получаем уравнение. $S = 0.8 \cdot (0.8S + 0.8) + 0.2 \cdot (0.2S + 0.2)$ Решая его, получаем ответ.

13. Найдите $L = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{4}{\sqrt[n]{x}+3}\right)^{2n} \mathrm{d}x$.

Ответ: 2.

Набросок решения. Нужно понять, что подынтегральные выражения стремятся к $\frac{1}{\sqrt{x}}$, а ещё показать, что выполнены условия перестановки пределов.

14. Сколько существует матриц над полем из двух элементов размера 5×5, ранг которых в точности равен 3.

Ответ: 4036200

Решение. Обозначим d_i размерность пространства, натянутого на первые i столбцов. Есть 10 вариантов, как может выглядеть последовательность d_i.

1) 0-0-1-2-3. Способов для такой последовательности $1 \times 1 \times 31 \times 30 \times 28$.
2) 0-1-1-2-3. Способов для такой последовательности $1 \times 31 \times 2 \times 30 \times 28$.
3) 0-1-2-2-3. Способов для такой последовательности $1 \times 31 \times 30 \times 4 \times 28$.
4) 0-1-2-3-3. Способов для такой последовательности $1 \times 31 \times 30 \times 28 \times 8$.
5) 1-1-1-2-3. Способов для такой последовательности $31 \times 2 \times 2 \times 30 \times 28$.
6) 1-1-2-2-3. Способов для такой последовательности $31 \times 2 \times 30 \times 4 \times 28$.
7) 1-1-2-3-3. Способов для такой последовательности $31 \times 2 \times 30 \times 28 \times 8$.

8) 1-2-2-2-3. Способов для такой последовательности $31 \times 30 \times 4 \times 4 \times 28$.
9) 1-2-2-3-3. Способов для такой последовательности $31 \times 30 \times 4 \times 8$.
10) 1-2-3-3-3. Способов для такой последовательности $31 \times 30 \times 28 \times 8 \times 8$.
Суммируя все варианты, получаем

$$31 \times 30 \times 28 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 4 + 8 + 16 + 16 + 32 + 64) = 31 \times 30 \times 28 \times 155 = 4036200$$

15. Есть две команды, в каждой по 10 человек, силы которых — числа от 1 до 10. Для соревнования между командами игроки каждой из команд выстроились в ряд: у первой команды по убыванию силы от 10 до 1, а у второй команды – по возрастанию. Команды начинают соревноваться. Сначала соревнуются первые в очереди. Проигрывающий уступает место следующему в своей команде. Если соревнуются игроки с силами a и b, то первый побеждает с вероятностью $\frac{a}{a+b}$. С какой вероятностью первая команда победит?

Ответ: 0.5

Решение. Матч между командами можно промоделироват немного иначе. Можно считать, что люди в командах не соревнуются, а просто очередной член каждой команды выбывает в случайный момент времени с экспоненциальным распределением с параметром, равным силе. Отсюда очевидно, что распределение времени того, сколько продержится команда, не зависит от порядка участников.