1 Билеты №21. Теорема Виета

Теорема Виета

• Пусть K — коммутативное кольцо, $a_1, \ldots, a_n \in K$ (не обязательно все числа различны). Введем обозначения:
$\sigma_1(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$;
$\sigma_2(a_1, \ldots, a_n) = \sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_i a_j$ (сумма всех произведений по два числа); при $k \le n$
$\sigma_k(a_1, \ldots, a_n) = \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ (сумма всех произведений по k чисел); $\sigma_n(a_1, \ldots, a_n) = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Теорема 12

Пусть $f = c_n t^n + \cdots + c_1 t + c_0 \in K[t]$, причем $f = c_n(t - a_1) \ldots (t - a_n)$. Тогда $\frac{c_i}{c_n} = (-1)^{n-i} \sigma_{n-i}(a_1, \ldots, a_n)$ для каждого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Доказательство. • $\frac{c_i}{c_n}$ — это коэффициент многочлена $(t - a_1) \ldots (t - a_n)$ при t^i.

• Из i скобок мы должны выбрать t, а из остальных $n - i$ скобок вида $(t - a_j)$ должны выбрать $-a_j$. Перемножим все выбранные числа, сложим по всем выборкам и вынесем $(-1)^{n-i}$ — получим в точности $\sigma_{n-i}(a_1, \ldots, a_n)$. $\square$

2 Билеты №22. Интерполяция: формула Лагранжа

Интерполяция

• Пусть K — поле, даны различные числа $x_0, x_1, \ldots, x_n \in K$ и (не обязательно различные) $y_0, y_1, \ldots, y_n \in K$.

• Нужно построить *интерполяционный многочлен* $f \in K[t]$: такой, что $\deg(f) \le n$ и $f(x_i) = y_i$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Лемма 9

Существует не более одного интерполяционного многочлена для заданных $x_0, x_1, \ldots, x_n \in K$ (различных) и $y_0, y_1, \ldots, y_n \in K$.

Доказательство. • Пусть f_1 и f_2 — два разных интерполяционных многочлена. Тогда $f_1 - f_2 \in K[t]$, $\deg(f_1 - f_2) \le \max(\deg(f_1), \deg(f_2)) \le n$.

• Однако, многочлен $f_1 - f_2$ имеет $n + 1$ различных корней $x_0, \ldots, x_n$ (так как $f_1(x_i) = f_2(x_i)$), противоречие с Теоремой 7. $\square$

Вспомогательный пример. Пусть $f_1 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ f_2 = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. Тогда $h = f_1 - f_2 = (a_3 - b_3)x^3 + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) \neq 0$. Многочлен $h \neq 0$ и $h \in K[t]$, так как иначе $f_1 = f_2$.

Так как $h(x_i) = f_1(x_i) - f_2(x_i) = 0$. Отсюда следует, что $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = h(x_4) = 0$. То есть у многочлена h есть 4 корня, но так как $h = (a_3 - b_3)x^3 + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$, то он имеет не больше 3 корней. Противоречие...

Интерполяционный многочлен Лагранжа

- Построим такой многочлен f_i степени не более n, что $f_i(x_i) = 1$ и $f_i(x_j) = 0$ при $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$.
- Пусть $\varphi(t) = (t - x_0)(t - x_1)\ldots(t - x_n)$, а $\varphi_i(t) = \frac{\varphi(t)}{(t - x_i)}$ — это тоже многочлен из $K[t]$.
- Так как $f_i(x_j) = 0$ при $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$, по Теореме 7 $f_i(t) \,\vdots\, \varphi_i(t)$. Так как $\deg(f_i) = \deg(\varphi_i)$, мы имеем $f_i = c_i\varphi_i(t)$, где $c_i \in K$.
- Подставим x_i, чтобы найти c_i: $\quad 1 = f_i(x_i) = c_i\varphi_i(x_i)$, откуда $c_i = \frac{1}{\varphi_i(x_i)}$.
- По Лемме 7, $\varphi'(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i(t)$. При $j \neq i$ мы имеем $\varphi_j(x_i) = 0$. Следовательно, $\varphi'(x_i) = \varphi_i(x_i)$.
- Таким образом, $f_i(t) = \frac{\varphi_i(t)}{\varphi_i(x_i)} = \frac{\varphi(t)}{\varphi'(x_i)\cdot(t - x_i)}$.
- Следовательно,

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i f_i(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{\varphi(t)}{\varphi'(x_i) \cdot (t - x_i)}.$$

Пример.

$$\varphi_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

$$\varphi_2 = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

$$\varphi_3 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}$$

$$\varphi_4 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

Эти многочлены имеют интересное свойство. Рассмотрим, например, φ_1. Во всех значениях, кроме x_1, он превращается в 0. Когда мы подставляем x_1 он обращается в 1.

Пусть $f(x_i) = f_i$. Тогда многочлен будет выглядеть следующим образом:

$$f(x) = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \varphi_3 f_3 + \varphi_3 f_3$$

$$f(x_1) = f_1,\ f(x_2) = f_2,\ f(x_3) = f_3,\ f(x_4) = f_4$$

Ура, работает!

Пример [править | править код]

Найдем формулу интерполяции для $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ имеющей следующие значения:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1.5 & f(x_0) &= -14,1014 \\ x_1 &= -0.75 & f(x_1) &= -0,931596 \\ x_2 &= 0 & f(x_2) &= 0 \\ x_3 &= 0.75 & f(x_3) &= 0,931596 \\ x_4 &= 1.5 & f(x_4) &= 14,1014. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3}\cdot\frac{x-x_4}{x_0-x_4} = \frac{1}{243}x(2x-3)(4x-3)(4x+3) \\ l_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3}\cdot\frac{x-x_4}{x_1-x_4} = -\frac{8}{243}x(2x-3)(2x+3)(4x-3) \\ l_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{x-x_4}{x_2-x_4} = \frac{3}{243}(2x+3)(4x+3)(4x-3)(2x-3) \\ l_3(x) &= \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\cdot\frac{x-x_4}{x_3-x_4} = -\frac{8}{243}x(2x-3)(2x+3)(4x+3) \\ l_4(x) &= \frac{x-x_0}{x_4-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_4-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_4-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_4-x_3} = \frac{1}{243}x(2x+3)(4x-3)(4x+3). \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} L(x) = {} & \frac{1}{243}\Big(f(x_0)x(2x-3)(4x-3)(4x+3) \\ & - 8f(x_1)x(2x-3)(2x+3)(4x-3) \\ & + 3f(x_2)(2x+3)(4x+3)(4x-3)(2x-3) \\ & - 8f(x_3)x(2x-3)(2x+3)(4x+3) \\ & + f(x_4)x(2x+3)(4x-3)(4x+3)\Big) \\ = {} & 4,834848x^3 - 1,477474x. \end{aligned}$$