

1 билет 29

Формула обращения Мёбиуса. Мультипликативный вариант

Теорема 22

Пусть K — поле, $f, g : \mathbb{N} \rightarrow K \setminus \{0\}$, причем $f(m) = \prod_{d|m} g(d)$.

Тогда $g(m) = \prod_{n|m} f(n)^{\mu(\frac{m}{n})}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \prod_{n|m} f(n)^{\mu(\frac{m}{n})} &= \prod_{n|m} \left(\prod_{d|n} g(d) \right)^{\mu(\frac{m}{n})} = \\ &= \prod_{d|m} g(d)^{\sum_{n|m} \mu(\frac{m}{n})} = g(m) \end{aligned}$$

по Лемме 8. □

$$\prod_{\substack{n, \\ n|m}} \prod_{\substack{d, \\ d|n}} g(d)^{\mu(m/n)} = \prod_{\substack{d, \\ d|m}} \prod_{\substack{n, \\ d|n|m}} g(d)^{\mu(m/n)} = \prod_{\substack{d, \\ d|m}} g(d)^{\sum_{\substack{n, \\ d|n|m}} \mu(m/n)} = g(m).$$

2 билет 30

Сумма мультипликативной функции по делителям числа

Теорема 23

Пусть $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ — мультипликативная функция,
 $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Тогда g — мультипликативная функция.

Доказательство. • Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$.

• $a = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ и $b = q_1^{\ell_1} \dots q_t^{\ell_t}$ — канонические разложения.

• Так как $(a, b) = 1$, все эти простые различны и $ab = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} q_1^{\ell_1} \dots q_t^{\ell_t}$ — каноническое разложение.

• По Теореме 8, $d | ab \iff d = p_1^{k'_1} \dots p_s^{k'_s} q_1^{\ell'_1} \dots q_t^{\ell'_t}$, где $0 \leq k'_i \leq k_i$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$ и $0 \leq \ell'_j \leq \ell_j$ для всех $j \in \{1, \dots, t\}$.

• Следовательно, $d = d_a d_b$, где $d_a | a$ и $d_b | b$, причем $(d_a, d_b) = 1$ и такое представление единственно:

$$d_a = p_1^{k'_1} \dots p_s^{k'_s} \text{ и } d_b = q_1^{\ell'_1} \dots q_t^{\ell'_t}.$$

• Таким образом,

$$\begin{aligned} g(ab) &= \sum_{d|ab} f(d) = \sum_{d_a|a} \sum_{d_b|b} f(d_a d_b) = \sum_{d_a|a} \sum_{d_b|b} f(d_a) f(d_b) = \\ &= \left(\sum_{d_a|a} f(d_a) \right) \left(\sum_{d_b|b} f(d_b) \right) = g(a)g(b). \end{aligned} \quad \square$$