Дискретная математика I семестр

Теория множества

$P(X) = 2^{|X|}$ - мощность всех подмножеств множества X

Характеристики Б.О.:

	Характеристика	Описание
1	Рефлексивность	$\forall x \in A, (x, x) \in P$
2	Иррефлексивность (Антирефлексивность)	$\forall x \in A, (x, x) \notin P$
3	Симметричность	$\forall x, y \in A, \ \ xPy \Rightarrow yPx$
4	Асимметричность	$\forall x, y \in A, \ \ xPy \Rightarrow y\bar{P}x \ \big((y, x) \notin P\big)$
5	Антисимметричность	$\forall x, y \in A, \ \ xPy \wedge yPx \Rightarrow x = y$
6	Полнота	$\forall x, y \in A, \ \ xPy \vee yPx$
7	Связность	$\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow xPy \vee \ yPx$
8	Транзитивность	$\forall x, y, z \in A, \ \ xPy \wedge yPz \Rightarrow xPz$
9	Отрицательная транзитивность	$\forall x, y, z \in A, \ \ xP^c y \wedge yP^c z \Rightarrow xP^c z$
10	Ацикличность	$\nexists t \geq 1$ и $a_1, a_2, \dots, a_t$: $a_1Pa_2, a_2Pa_3, \dots, a_{t-1}Pa_t, a_tPa_1$

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение ~ на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Определения

- Множество X не более чем счетно, если оно либо конечно, либо счетно
- Множество X несчетно, если оно ни конечно, ни счетно (бесконечно и несчетно)
- X ~ Y - множества равномощны

Функции

- Инъекция $f(x) \neq f(y), \forall x \neq y$
- Сюръекция, когда для каждого элемента множества Y существует хотя бы один прообраз в множестве X
- Биекция = инъекция + сюръекция

Задачи на множества

Важные теоремы теории множеств

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ - счетно
   Можно доказать через таблицу, либо через биекцию
   $f(x, y) = 2^{x-1}(2y-1)$
2. $X_1 \times \dots \times X_n$ - счетно, если X_i - счетно
3. $X \to Y$ - инъекция и множество Y - счетно, то множество X - не более чем счетно
4. $\bigcup X_i$ - счетно, если $\forall X_i$ - счетно
5. В любом бесконечном множестве есть счетное подмножество
6. Если X - бесконечно (или несчетно) и Y не более, чем счетно, то $X \cup Y \sim X$

Элементарная комбинаторика

Число размещений

Число размещений из n элементов по k - это количество последовательностей длины k, составленных из различных элементов множества мощности n.

Число способом разложить k разных шариков в n ящиков (в ящик помещается только один шар)

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Число размещений с повторениями

Число размещений с повторениями из n элементов по k - это количество последовательностей длины k, составленных из элементов множества мощности n.

Количество способов разложить k различных шаров в n ящиков (в ящик можно класть сколько угодно шаров)

$$\widetilde{A_n^k} = n^k$$

Число сочетаний

Число сочетаний из n по k - это количество k-элементных подмножеств в множестве мощности n ($0 \le k \le n$).

Количество способов разложить k одинаковых шаров в n ящиков.

Возможные обозначения

- C_n^k
- $\binom{n}{k}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k это количество неупорядоченных наборов из k элементов n-элементного множества (в отличие от множества, в наборе один и тот же элемент может встречаться несколько раз).

Число способов выбрать k предметов, если есть предметы n типов.

Возможные обозначения

- $\widetilde{C}_n^k$
- $\left(\binom{n}{k}\right)$

$$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Мультиномиальные коэффициенты (полиномиальные коэффициенты)

Мультиномиальные коэффициенты – число способов разбить множество мощности n на m не пересекающихся подмножеств (каждое из которых длины k_i).

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_m!}$$

Еще немного полезных формул

$$C_n^k \cdot C_k^l = C_n^l \cdot C_{n-l}^{n-k}$$

$$C_n^0 C_m^k + C_n^n C_m^{k-1} + \cdots + C_n^k C_m^0 = C_{m+n}^k$$

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \cdots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$$

$$nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$$