5. Однородные системы линейных уравнений: приведение к ступенчатому виду, нетривиальное решение.

Системы линейных уравнений

Определение

Пусть K — поле, $a_{i,j} \in K$ (где $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$), $b_1, \dots, b_n \in K$. Пусть $x_1, \dots, x_m$ — неизвестные. Тогда система линейных уравнений (далее СЛУ) — это

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2, \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n. \end{cases}$$

СЛУ называется однородной (далее ОСЛУ), если $b_1 = \dots = b_n = 0$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Элементарные преобразования:

(I) Поменять местами два уравнения.

(II) К одному уравнению прибавить другое, умноженное на $\lambda \in K$.

(III) Умножить уравнение на $\lambda \in K$, отличное от 0.

• Везде умножение уравнения на число происходит вместе с правой частью.

Лемма 2

1) *Элементарные преобразования всех трех типов обратимы, то есть имеют обратные элементарные преобразования.*
2) *Элементарные преобразования не меняют решений СЛУ.*

Доказательство. 1) • Элементарное преобразование типа (I) само себе обратно.

• Рассмотрим элементарное преобразование типа (II), пусть мы к i-му уравнению прибавили j-е, умноженное на λ.

• Тогда обратное преобразование — прибавить к i-му уравнению j-е уравнение, умноженное на $-\lambda$.

• Наконец, обратное преобразование к умножению уравнения на $\lambda \neq 0$ — умножить его же на λ^{-1}.

2) • Очевидно, элементарное преобразование системы оставляет все ее решения (все уравнения останутся верными).

• Так как такое преобразование обратимо, добавиться новые решения не могут — иначе проведем обратное преобразование, и все новые решения сохранятся. □

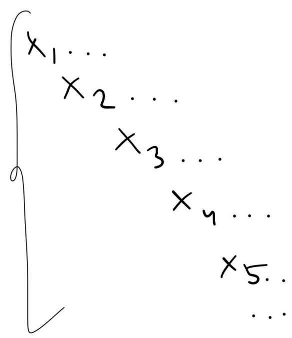
Определение

ОСЛУ приведена к ступенчатому виду, если каждое уравнение, имеющее ненулевые коэффициенты, имеет вид

$$x_{s_i} + c_{i,s_i+1}x_{s_i+1} + \dots + c_{m,k}x_m = 0,$$

причем $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ (где k — наибольший номер уравнения, имеющего ненулевые коэффициенты).

И коэффициент при x_i где i - номер строки, не равен 0.



Лемма 3

ОСЛУ можно привести элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.

Доказательство. • Индукция по количеству неизвестных.

База для одного неизвестного очевидна — наша система имеет вид $ax_1 = 0$.

• Если $a \neq 0$, то на a можно поделить и получить $x_1 = 0$. Если же $a = 0$, система уже имеет ступенчатый вид.

Переход.

• Если все коэффициенты при x_1 равны 0, то достаточно привести к ступенчатому виду систему без x_1, что можно сделать по индукционному предположению.

• Если не все коэффициенты $a_{i,1}$ равны 0, то переставим уравнения (с помощью элементарных преобразований типа (I)) так, чтобы $a_{1,1} \neq 0$, после чего поделим первое уравнение на $a_{1,1}$ — оно примет нужный нам вид $x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,m}x_m = 0$.

• Теперь для всех $k \in \{2, \dots, n\}$ вычтем из k уравнения новое первое уравнение, умноженное на $a_{k,1}$ — во всех уравнениях, кроме первого, исчезнет переменная x_1.

• Далее останется применить к системе из всех уравнений, кроме первого, индукционное предположение.

$\square$

Лемма 4

ОСЛУ, в которой неизвестных больше, чем уравнений, имеет нетривиальное решение (не все x_i равны 0).

Тривиальное - простое, очевидное, неинтересное
Пример. Уравнение в целых числах $x^2 + y^2 = z^2$ имеет тривиальные решения (0, 0, 0) или (1,0,1). а вот (3,4,5) или (5,12, 13) - нетривиальные
Или $x^4 + y^4 = z^4$ имеет те же тривиальные решения, а нетривиальных у него нет

Доказательство. • Приведем систему к ступенчатому виду.

• Будем считать, что обозначения как в определении. Пусть осталось k уравнений с ненулевыми коэффициентами. Тогда $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ — не более чем $n < m$ номеров переменных.

• Остались переменные с номерами не из $\{s_1, \ldots, s_k\}$. Положим все их равными 1.

• После чего последовательно вычислим: сначала x_{s_k}, потом $x_{s_{k-1}}$, и так далее, x_{s_1}.

• Переменную x_{s_i} мы вычисляем из i уравнения:

$$x_{s_i} = -(c_{i,s_i+1}x_{s_i+1} + \cdots + c_{i,m}x_m),$$

все значения в правой части уже известны. □

6. Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций.

Лемма 5

Пусть V — линейное пространство над полем K, $n < m$, $a_1, \dots, a_n \in V$ и $y_1, \dots, y_m \in \mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_n)$. Тогда $y_1, \dots, y_m$ ЛЗ.

Пусть V — линейное пространство над полем K.

2) Пусть $M \subset V$. *Линейная оболочка* множества M — это множество $\mathrm{Lin}(M)$ всех линейных комбинаций векторов из M (с любым количеством векторов).

Доказательство. • Пусть $y_1 = \beta_{1,1}a_1 + \dots + \beta_{n,1}a_n$, …, $y_m = \beta_{1,m}a_1 + \dots + \beta_{n,m}a_n$.

• Мы хотим найти такие $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ (не все равные 0), что $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m = 0$. Это означает, что

$$0 = \lambda_1(\beta_{1,1}a_1 + \dots + \beta_{n,1}a_n) + \dots + \lambda_m(\beta_{1,m}a_1 + \dots + \beta_{n,m}a_n) = (\beta_{1,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{1,m}\lambda_m)a_1 + \dots + (\beta_{n,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{n,m}\lambda_m)a_n.$$

• Для равенства нулю этого выражения достаточно, чтобы были равны 0 коэффициенты при a_1, …, a_n. Это дает нам ОСЛУ (относительно неизвестных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$):

$$\begin{cases} \beta_{1,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{1,m}\lambda_m = 0, \\ \dots \\ \beta_{n,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{n,m}\lambda_m = 0. \end{cases}$$

• В этой ОСЛУ неизвестных больше, чем уравнений. Значит, она имеет нетривиальное решение — соответствующие $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ дают линейную зависимость $y_1, \dots, y_m$. $\square$