Билет 8. 8. Идеал. Ядро гомоморфизма является идеалом.

Определение

Пусть K — коммутативное кольцо. Множество $I \subset K$ — *идеал* в K, если I — подкольцо K и выполнено следующее условие:

$$\forall x \in K \text{ и } \forall a \in I \qquad ax \in I.$$

• В любом кольце K есть два "неинетересных" идеала: это $\{0\}$ и K.

Лемма 6

Пусть K — коммутативное кольцо, $I \subset K$. Пусть выполнены следующие условия:

1° *Замкнутость по +* $\forall\, a, b \in I \quad a + b \in I$.

2° *$\exists$ обратного элемента по +* $\forall\, a \in I \quad \exists(-a) \in I$.

3° *Замкнутость по $\cdot$ на элементы K* $\forall x \in K$ *и* $\forall a \in I \qquad ax \in I$

Тогда I — идеал в K.

Доказательство. • По Лемме 1, I — подкольцо K.

• Теперь по условию 3° несложно понять, что I — идеал. $\square$

Из определения

Примеры идеалов:

Пусть наше коммутативное кольцо это $\mathbb{Z}$, а подкольцо I - все числа кратные 5: { … , -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, …}. Это множество является идеалом потому, что и сумма любых двух таких чисел, и произведение любого из них на любое целое число сами входят в это множество. При этом то же самое множество не будет идеалом в кольце $\mathbb{R}$ вещественных чисел, так как результат умножения какого-либо из этих чисел на произвольное вещественное число в общем случае не входит в это множество (если взять число 0,2 то получится число 1, а оно не принадлежит подкольцу I).

Напоминание что такое ker(F) и im(F):

Ядро гомоморфизма f — это $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in K \ : \ f(x) = 0\}$.

Образ гомоморфизма f — это
$\mathrm{Im}(f) = \{y \in L \ : \ \exists x \in K : f(x) = y\}$.

Напоминание что такое гомоморфизм колец:

Пусть K, L — кольца, $f : K \to L$ — гомоморфизм колец. Тогда:
1) $\mathrm{Ker}(f)$ — *подкольцо* K.
2) $\mathrm{Im}(f)$ — *подкольцо* L.

Лемма 7

Пусть K — коммутативное кольцо, $\varphi : K \to L$ — гомоморфизм колец. Тогда $\ker(\varphi)$ *— идеал в* K.

Доказательство. • По Лемме 3, $\ker(\varphi)$ — подкольцо K.

• Пусть $a \in \ker(\varphi)$ и $x \in K$. Тогда
$\varphi(ax) = \varphi(a) \cdot \varphi(x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0$, а значит, $ax \in \ker(\varphi)$

• По Лемме 6, $\ker(\varphi)$ — идеал в K. $\square$

Подкольцо из определения гомоморфизма колец.
Это из определения гомоморфизма
Аналогично проверяем все пункты из леммы 3

• Пусть K, L — кольца. Отображение $f : K \to L$ называется гомоморфизмом, если $\forall\, a, b \in K$:
$f(a+b) = f(a) + f(b)$ и $f(ab) = f(a)f(b)$.

Билет 9. Идеал и обратимые элементы. Идеалы в поле. Гомоморфизм из поля — инъекция.

Лемма 8

Пусть K — коммутативное кольцо с 1, I — идеал в K, а $x \in I$ — обратимый элемент кольца K. Тогда $I = K$.

Доказательство. • Так как $x^{-1} \in K$ и $x \in I$, мы имеем $1 = x \cdot x^{-1} \in I$.

• $\forall y \in K$ имеем $y = y \cdot 1 \in I$. Значит, $I = K$. □

Грубо говоря мы можем получить все числа из К в I как раз с помощью 1 (и даже саму 1).

Следствие 1

Пусть K — поле, а I — идеал в K. Тогда $I = K$ или $I = \{0\}$.

Доказательство. • Предположим, что $I \neq \{0\}$. Тогда $\exists a \in I$, $a \neq 0$. Так как a — обратимый элемент (как все ненулевые элементы поля), $I = K$ по Лемме 8. □

Следствие 2

Пусть K — поле, L — кольцо, а $f : K \to L$ — гомоморфизм колец. Тогда либо $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$, либо f — мономорфизм.

Доказательство. • По Лемме 7 $\ker(f)$ — идеал в поле K.

• Тогда по Следствию 1 либо $\ker(f) = K$, либо $\ker(f) = \{0\}$.

• Если $\ker(f) = K$, то $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

• Если $\ker(f) = \{0\}$, то f — мономорфизм. □

По лемме 4

Билет 10. Идеал, порожденный множеством элементов. Главный идеал.

Давайте попробуем сами построить идеал на каком-нибудь множестве. Возьмем его подмножество $T = \{t_i i \in Ind\} \subseteq K,$ где Ind - это просто индексы и их не обязательно конечное количество.
Тогда определим идеал - множество всех линейных комбинаций T
$I = \{a_1 t_{i,1} + \ldots + a_k t_{i,k} : a_i \in K\}$ при этом сумма конечная.
Множество всех таких линейных комбинаций - это идеал. Проверить это легко: нужно убедиться что есть замкнутость по сложению и «засасывание» (оно будет красиво и приятно работать только в коммутаторном кольце, поэтому мы их и рассматриваем).
Легко видеть что I - наименьший идеал, содержащий данное подмножество T. Почему так? Рассмотрим все идеалы содержащие T. Их много например все кольцо K. Тогда пересечем их и получим как раз I.

Если множество T конечно, то запись будет такая же но без двойного индекса.
$I = \{a_1 t_1 + \ldots + a_k t_k : a_i \in K\}$.

Пусть K — коммутативное кольцо, $M \subset K$. Тогда $\langle M \rangle := \{m_1 x_1 + \cdots + m_s x_s \ : \ m_1, \ldots, m_s \in M,\ x_1, \ldots, x_s \in K\}$ — *идеал, порожденный множеством M* (здесь количество элементов s не фиксировано и может быть любым натуральным числом).

• Идеал, порожденный M — множество всех линейных комбинаций элементов из M.

Если идеал I порождается одним элементом, то это главный идеал.

Определение. Пусть K — коммутативное кольцо.
1) Пусть $m \in K$. Тогда $mK = \{mx \ : \ x \in K\}$ — *главный идеал*.
2) Если все идеалы в кольце K — главные, то K — *кольцо главных идеалов*.

Лемма 9

Пусть K — коммутативное кольцо, $M \subset K$. Тогда $\langle M \rangle$ — идеал в K.

Доказательство. • Нужно проверить условия из Леммы 6.

• Пусть $a, b \in \langle M \rangle$. Тогда существуют такие $m_1, \dots, m_s \in M$, $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s \in K$, что $a = a_1 m_1 + \dots + a_s m_s$ и $b = b_1 m_1 + \dots + b_s m_s$ (можно считать, что a и b — линейные комбинации одних и тех же элементов M, при необходимости добавив слагаемые с нулевыми коэффициентами).

• $-a = (-a_1)m_1 + \dots + (-a_s)m_s \in \langle M \rangle$.

• Тогда $a + b = (a_1 + b_1)m_1 + \dots + (a_s + b_s)m_s \in \langle M \rangle$.

• Для любого $x \in K$, $ax = (a_1 x)m_1 + \dots + (a_s x)m_s \in \langle M \rangle$.

• Условия Леммы 6 проверены, а значит, $\langle M \rangle$ — идеал в K. $\square$