1 Билет №27. Формула обращения Мёбиуса (аддитивный вариант)

1.1 Теорема

Пусть $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, причём $g(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$. Тогда $f(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$

1.2 Доказательство

$$\sum_{d|n} \mu(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left(\sum_{d' | \frac{n}{d}} f(d')\right) = \tag{1}$$

$$= \sum_{(d,d'):dd'|n} \mu(d) f(d') = \tag{2}$$

$$= \sum_{d|n} f(d) \cdot \left(\sum_{d' | \frac{n}{d}} \mu(d')\right) = \tag{3}$$

$$= f(n) \cdot 1 + \sum_{d|n, d<n} f(d) \cdot \left(\sum_{d' | \frac{n}{d}} \mu(d')\right) = f(n) + 0 = f(n) \tag{4}$$

В равенстве (1) мы просто заменили функцию g на функцию f по формуле, данной в условии.

В равенстве (2) мы засунули под один знак суммы два сомножителя. Понятное дело, что d' — это также делитель n. $dd'|n \Leftrightarrow d'|\frac{n}{d} \Leftrightarrow d|\frac{n}{d'}$.

В равенстве (3) мы сделали преобразование, аналогичное предыдущему, но теперь для функции μ.

В равенсвте (4) мы просто выносим из общей суммы случай, когда $d = n$. Получается, $\sum\limits_{1|\frac{n}{n}} \mu(1) = 1$ (по формуле Мёбиуса). Также, по прошлой лемме, $\sum\limits_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') = 0$. Вот одна из её формулировок:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Так как $d < n$, то $\frac{n}{d} > 1$, поэтому будет 0.

2 Билет №28. Вывод формулы для функции Эйлера из формулы обращения Мёбиуса

Функция Эйлера через формулу обращения Мёбиуса

Теорема 21

Пусть $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ *— каноническое разложение числа* n*.*
Тогда $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s})$*.*

Доказательство. • По Теореме 17, $\sum\limits_{d \in \mathbb{N},\, d \mid m} \varphi(d) = m$.

• По Формуле обращения Мёбиуса,
$\varphi(n) = \sum\limits_{d \in \mathbb{N},\, d \mid n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d}$.

• Напомним, что при $d = p_{i_1} \dots p_{i_t}$ мы имеем $\mu(d) = (-1)^t$ (здесь $i_1, \dots, i_t$ — различные индексы), $\mu(1) = 1$, а в остальных случаях $\mu(d) = 0$. Поэтому,

$$\varphi(n) = n - \sum_{1 \le i \le s} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3}} + \dots =$$

$$n\left(1 - \sum_{1 \le i \le s} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le s} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le s} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3}} + \dots\right) =$$

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right). \quad \square$$

Как и в прошлом доказательстве мы вынесли из общей суммы случай, когда делителем будет 1 ($n/1 = n$). Дальше мы рассматриваем всевозможные перемножения двух простых делителей, трёх и так далее. Когда нечётное число делителей, то функция Мёбиуса для каждого слагаемого будет -1, иначе — 1.