Лемма 5

Пусть $f : K \to L$ – изоморфизм колец. Тогда и $f^{-1} : L \to K$ – изоморфизм колец.

- Очевидно, что $f^{-1} : L \to K$ – биекция.
- Осталось доказать, что f^{-1} – гомоморфизм (т.е. $f(a + b) = f(a) + f(b)$ и $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$)
- Рассмотрим любые два элемента $a, b \in L$.
- Пусть $w = f^{-1}(a + b) - f^{-1}(a) - f^{-1}(b)$. Так как f – гомоморфизм имеем:

$$f(w) = f(f^{-1}(a + b)) - f(f^{-1}(a)) + -f(f^{-1}(b)) = a + b - a - b = 0$$

- Из f(w) = 0 = f(0) и того, что f – биекция следует, что w = 0.
- Следоватедьно, $f^{-1}(a + b) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$.
- Далее абсполютно аналогичное доказательство для $\cdot$
- Другими словами просто доказываем f(w) = 0 и получаем равенство, по которому можно доказать гомоморфизм по определению

Изоморфные кольца

Если суеществует изоморфизм $f : K \to L$, то говорят, что это кольца **изоморфны** $K \simeq L$.

Не знаю нужна ли будет эта теорема

$\simeq$ – отношение эквивалентности на множестве всех колец.

- Рефлексивность очевида
- Симметричность следует из леммы 5
- Осталсь доказать транзитивность. Композиция биекций – очевидно биекция. Дальше просто докажем по изоморфность биекции (проверим для $+$ и $\cdot$)

$\mathrm{gf}(a + b) = g(f(a + b)) = g(f(a) + f(b)) = g(f(a)) + g(f(b)) = \mathrm{gf}(a) + \mathrm{gf}(b)$