Мы рассматриваем такие $i+j$, что их сумма больше $n$

$1 \; 2 \; 3 \dots i \dots n-i \dots n$

← можно!

← т.к. меньше $i+n-1$

Вершины смежны в $C(G)$ по построению.

Теперь построим ГЦ в $C(G)$:

– при $n = 2m+1$ он будет иметь вид

$v_1 v_{2m} v_2 v_{2m-1} \dots v_m v_{m+1} v_{2m+1}$ // совершаем то, что даёт ~~2m+2~~ $2m+1$ (?)

– при $n = 2m$:

$v_1 v_{2m-1} v_2 v_{2m-2} \dots v_{m-1} v_{m+1} v_m v_{2m}$

$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq n$ – построении цикл

## Билет 3.9 Совершенное паросочетание в кубическом графе

– граф, все вершины которого имеют степень 3, называется кубическим

– мост графа – ребро, не входящее ни в один цикл

**Теорема Петерсена**

Пусть $G$ – связный кубический граф, в котором не более двух мостов. Тогда в графе $G$ есть совершенное паросочетание

$\triangleright$ Пусть сов-пар нет. Тогда по теореме Татта $\exists$ такое множество $S \subset V(G)$, что $o(G-S) > |S|$. // отрицаем Татта, т.к. не верим.

Т.к. в кубическом графе чётное число вершин, то $S \neq \emptyset$ и $o(G-S) \equiv |S| \mod 2$

Пусть $U_1, \dots U_n$ – все нечётные компоненты связности графа $G-S$ (то самое $o(G-S)$). Тогда $n \geq |S| + 2$.

Так как $o(G-S) \equiv |S| \mod 2$, а $o(G-S) = n$, то эта оценка верна, т.к. у т. Татта там не строгое – отрицаем Татта!

# Билет 2.4

замыкание графа - множество всех вершин, которое можно добавить у какой-то вершины

**Замыкание** - граф, полученный в результате операции:

Пусть есть граф $G$, если $\exists$ 2 несмежные вершины $a, b \in V(G)$, для которых $d_G(a)+d_G(b) \geq v(G)$, то добавим ребро $ab$, продолжим процесс, пока это возможно.

Получили замыкание графа $G$ — $C(G)$

**Лемма 2**

Пусть $ab \notin E(G)$, $d_G(a)+d_G(b) \geq v(G)$. Тогда граф $G$ - гамильтонов, когда $G+ab$ - гамильтонов

▷ "⇒" очев. "⇐": ГЦ проходит либо по $ab$, либо по $G$ (очев). Если по $ab$, то тогда есть гамильтонов путь, а по лемме 1 в графе есть ГЦ. ◁

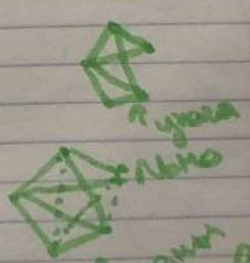
**Следствие** Граф $G$ гамильтонов, когда его замыкание - гамильтонов граф.

**Лемма 3**

Замыкание графа $G$ определено однозначно (не зависит от порядка добавления ребра) (док-во очев)

**Теорема 3 Критерий Хватала**

Пусть $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ - последовательность степеней вершин графа $G$, а для каждого $i \in [1, n-1]$ выполняется неравенство $d_i + d_{n-i} \geq n$. Тогда граф $G$ - гамильтонов.



▷ Докажем, что замыкание $C(G)$ - гамильтонов граф.

Пусть $V(G)=\{v_1, \dots v_n\}$, причём $d_G(v_i)=d_i$. При $i+j \geq n$.

$d_G(v_i)+d_G(v_j)=d_i+d_j \geq d_i + d_{n-i} \geq n$,

следовательно, вершины $v_i$ и $v_j$ смежны в $C(G)$