1 Билет 4. Гомоморфизмы колец. Ядро и образ гомоморфизма

Гомоморфизм (единая форма) - это функция, при которой у каждого аргумента есть только один образ и при этом выполняется:

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ и } f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

Очевидным примером будет $f(x) = x, f : Z \to Z$, где все свойства будут выполняться. Функции вида $f(x) = ax$ не будут подходить по умножению

Ядро (корни) гомоморфизма f — это $Ker(f) = \{x \in K : f(x) = 0\}$.
Ядро гомоморфизма - это такое множество, которое содержит все элементы кольца, при котором отображение этого элемнта будет нулем.

Если гомоморфизм $f(x)$, то $Ker(f) = 0$
Образ гомоморфизма - то же самое, что и образ функции: множество всех отображений.
$Im(f) = Z$
Пусть K, L — кольца, $f : K \to L$ — гомоморфизм колец.
Тогда:
1) $Ker(f)$ — подкольцо K. 2) $Im(f)$ — подкольцо L.
Доказательство.
1) Пусть $a, b \in Ker(f)$. Тогда
а) $f(a+b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$, следовательно,
$a + b \in Ker(f)$.
б) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) = 0 \cdot 0 = 0$, следовательно, $a \cdot b \in Ker(f)$.
в) $f(-a) = -f(a) = -0_L = 0_L$.

2) Пусть $y_1, y_2 \in Im(f)$, а $x_1, x_2 \in K$ таковы, что $f(x_1) = y_2$ и $f(x_2) = y_2$. Тогда
а) $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in Im(f)$ и $y_1 \cdot y_1 = f(x_1) \cdot f(x_2) \in Im(f)$.
б) $-y = -f(x) = f(-x) \in Im(f)$.

2 Билет 5. Типы гомоморфизмов. Мономорфизм и ядро

Типы гомоморфизма (как в матане)
Инъекция - мономорфзима
Суръекция - эпиморфизм
Биэкция - изоморфизм