Теория графов (основы)

Определения

$\boldsymbol{E_G(X, Y)}$ множество, состоящее из таких ребер $e \in E(G)$, что $e = xy, x \in X, y \in Y$

$\boldsymbol{N_G(v)}$ – окрестность вершины v (множество всех вершин смежных с v)

$\boldsymbol{N'_G(U)}$ – множество всех вершин графа смежных со всеми вершинами множества U

$\boldsymbol{N_G(U)} = N'_G(U) \setminus U$

$\boldsymbol{d_G(x)}$ – количество ребер графа инцидентных вершине x

$\boldsymbol{\delta(G)}$ – минимальная степень вершины в графе G

$\boldsymbol{\Delta(G)}$ – максимальная степень вершины в графе G

Граф G называют **регулярным**, если степени всех его вершин одинаковы

Подграф

Подграф H графа G называется **остовным**, если $V(H) = V(G), U \subset V(G)$ через $G(U)$ мы обозначим индуцированные подграф на множестве вершин U. Это означает, что $V(G(U)) = U$, а $E(G(U))$ состоит из всех ребер множества E(G), обо конца которых лежат в U.

Индуцированные подграф - это другой граф, который образуется из подмножества вершин исходного графа и всех ребер, соединяющих пары вершин в этом множестве.

Маршрут и путь

Маршрут – последовательность вершин и ребер графа G, где $e_i = a_i a_{i+1}$

Путь - это маршрут, не проходящий ни по какому ребру дважды. Более того, путь - подграф графа G, состоящий из вершин и ребер, по которым этот путь проходит

Путь называется **простым**, если все его вершины различны.

Внутренность $\boldsymbol{\mathrm{Int}(P)}$ - это множество всех его вершин, отличных от начала и конца этого пути.

Расстояние между вершинами x и y графа G называется наименьшая длина xy-пути. Обозначение $\mathrm{dist}_G(x, y)$.

Цикл

Цикл - это последовательность вершин и различных ребер графа G, где $e_i = a_i a_{i+1}$ для всех $i \in [1..n]$ (мы считаем, что $a_{n+i} = a_i$).

Цикл называется **простым**, если все его вершины различны.

Длина цикл - количество его ребер.

Пусть C - простой цикл, а x, y - две его несоседние вершины.
- Вершины x и y делят цикл C на два пути с концами x и y, которые мы будем называть дугами.
- Если xy $\in E(G)$, назовем ребро xy хордой или (что, то же самое) диагональю цикла C.

Индуцированный цикл графа G - это простой цикл, не имеющий диагоналей.

Компоненты связанности

Вершины a и b графа G называют **связанными**, если в графе существует путь между ними.

Граф называется **связным**, если любые две его вершины связанны.

Компоненты связанности графа G - максимальные (по включению) связанные множества вершин. Через $c(G)$ обозначим их количество.

Будем называть компонентами графа G подграфы, индуцированные на его компонентах связанности.

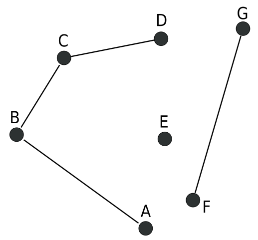

Рис. 1. Граф G, $c(G) = 3$

Дерево и лес

Дерево - это связанный граф без циклов.

Лес - это граф без циклов. Все компоненты леса - деревья.

Вершина x графа G, имеющая степень 1, называется **висячей вершиной** или листом.

Эйлеров Путь и цикл

Эйлеров путь – путь в графе G, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Эйлеров цикл – цикл в графе G? проходящий по каждому ребру один раз.

Эйлеров граф - граф, в котором есть эйлеров цикл.

Связный граф – эйлеров, если и только если степени всех вершин G четны.

Критерий наличия эйлерова пути

Связный граф G имеет эйлеров путь, если и только если в графе G нет вершин нечетной степени или таких вершин ровно две.

Гамильтонов путь и цикл

Гамильтонов путь в графе G – это простой путь, проходящий по каждой вершине графа.

Гамильтонов цикл в графе G – это простой путь, проходящий по каждой вершине графа.

Граф называется **гамильтоновым**, если в нем есть гамильтонов цикл.

Теоремы и леммы

Общие

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e(G)$$

Циклы

Для любого циклы Z существует такой простой цикл Z', что $V(Z') \subset V(Z)$ и $E(Z') \subset E(Z)$

Если в графе есть нечетный цикл, то есть и простой нечетный цикл.

Из xy-пути можно выделить простой xy-путь.

Дерево

В дереве с n вершинами n - 1 ребро.

У любого связанного графа существует основное дерево.

Граф G является деревом, если и только если для любых двух вершин существует единственный простой путь, соединяющий их.

Гамильтонов путь и цикл

Пусть n > 2, $a_1 ... a_n$ - максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq n$. Тогда в графе есть цикл длины n.

Критерий Оре

1. Если для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G) - 1$, то в графе G есть гамильтонов путь.
2. Если $v(G) > 2$ и для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G)$, то в графе G есть гамильтонов цикл

Критерий Дирака

1. Если $\delta(G) \geq \frac{v(G)-1}{2}$, то в графе G есть гамильтонов путь.
2. Если $\delta(G) \geq \frac{v(G)}{2}$, то в графе есть гамильтонов цикл.

Замыкание графа: метод Хватала

Пусть ab $\notin E(G), d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$. Тогда граф G – гамильтонов, если и только если граф G + ab – гамильтонов.

Критерий Хватала

Пусть $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ – последовательность степеней вершин графа G, а для каждого $i \in [1 ... n-1]$ выполняется неравенство $d_i + d_{n-i} \geq n$.

Для любого связанного графа G с $v(G) \geq 3$ и ребра $e \in E(G)$ в графе G^3 существует гамильтонов цикл, содержащий ребро e.