7. Базис, размерность. Корректность определения размерности. Разложение по базису.

Базис и размерность

Ба́зис (др.-греч. βάσις «основа») — упорядоченный (конечный или бесконечный) набор векторов в векторном пространстве или модуле, такой, что любой вектор этого пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов из этого набора. Векторы базиса называются *базисными векторами*.

- В пространстве всех многочленов над полем один из базисов составляют степенные функции: $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.

Определение

1) *Базис* линейного пространства — это линейно независимая порождающая система векторов.

2) *Размерность* линейного пространства V (обозначение: $\dim(V)$) — это количество элементов в базисе.

Если пространство V имеет бесконечный базис, то $\dim(V) = \infty$.)

Отдельно скажем о размерности пространства, состоящего из 0: $\dim(\{0\}) = 0$.

- Позже мы докажем существование базиса в конечно порожденном пространстве. А сейчас докажем корректность определения размерности.

Алгебра. Глава 5. Линейные пространства

Д. В. Карпов

Лемма 6

Размерность определена корректно, то есть, любые два базиса пространства V имеют одно и то же число элементов (любые два бесконечных базиса мы считаем равными по количеству элементов.)

Доказательство. • Пусть V имеет два базиса с разным числом векторов. Рассмотрим меньший из них — скажем, $e_1, \ldots, e_n$.

- Тогда все вектора большего базиса принадлежат $V = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)$, а значит, больший базис ЛЗ по Лемме 5, противоречие.

базис – ЛНЗ

Лемма 5

Пусть V — линейное пространство над полем K, $n < m$, $a_1, \ldots, a_n \in V$ и $y_1, \ldots, y_m \in \mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_n)$. Тогда $y_1, \ldots, y_m$ ЛЗ.

Поскольку имеем 2 базиса (где кол-во элементов n < m), то логично, что из меньшего базиса n можно получить больший m (все векторы ЛП должны быть представимы через векторы базиса, если представимо через n ⇔ можно представить и ч/з m).

8. Существование базиса в конечно порожденном пространстве. Выделение базиса из конечной порождающей системы.

Теорема 1

Пусть V — конечно порожденное линейное пространство над полем K. Тогда V имеет базис. Более того, из любой конечной порождающей системы векторов V можно выделить базис.

Доказательство. • Пусть $a_1, \dots, a_n$ — любая конечная порождающая система V (есть у конечно порожденного пространства).

• Если эти вектора ЛНЗ, то они — базис. Если же они ЛЗ, то по Свойству 3 ЛЗ векторов, один из них является линейной комбинацией остальных. Пусть, скажем, $a_n = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{n-1} a_{n-1}$.

Свойство 3
Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛЗ, то среди них есть вектор, который является линейной комбинацией остальных.

• Докажем, что $a_1, \dots, a_{n-1}$ — тоже порождающая система векторов V. Пусть $x \in V$, тогда существует преставление

$$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \alpha_n(\beta_1 a_1 + \dots + \beta_{n-1} a_{n-1}) = (\alpha_1 + \alpha_n \beta_1) a_1 + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n \beta_{n-1}) a_{n-1}.$$

• Таким образом, мы уменьшили порождающую систему на один вектор. Такие шаги не могут продолжаться бесконечно. Значит, в некоторый момент мы получим ЛНЗ порождающую систему векторов —

Конечно порождающая система векторов Lin(M)

Теорема 2

Алгебра. Глава 5. Линейные пространства

Д. В. Карпов

Пусть V — конечно порожденное линейное пространство над полем K, а векторы $a_1, \dots, a_n$ ЛНЗ. Тогда эти векторы можно дополнить до базиса.

Доказательство. • Если $a_1, \dots, a_n$ — порождающая система V, то это — базис.

• Иначе есть вектор $a_{n+1} \in V \setminus \mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_n)$

Свойство 4
Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛНЗ и $y \notin \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n)$, то $x_1, \dots, x_n, y$ — ЛНЗ.

• По свойству 4 ЛНЗ векторов, $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ ЛНЗ.

• Будем так действовать, пока это возможно.

• Пространство V имеет конечную порождающую систему — скажем, из m векторов. Тогда по Лемме 5 не существует множества более чем из m ЛНЗ векторов.

• Значит, наш процесс должен закончиться и в некоторый момент мы получим линейно независимую порождающую систему векторов — то есть, базис. □

Лемма 5
Пусть V — линейное пространство над полем K, $n < m$, $a_1, \dots, a_n \in V$ и $y_1, \dots, y_m \in \mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_n)$. Тогда $y_1, \dots, y_m$ ЛЗ.