## Теорема о гомоморфизме колец

x∈ K , ¬x – вычет, состоящий из элементов кольца сравнимых с x.  ¬x = x + I = {x+a: a ∈  I}

Факторкольцо: K/I = {¬a : a ∈ K}

K /Ker(f) (факторкольцо по идеалу) ~ Im(f)

Ker(f) – идеал коммутативного кольца (лемма 7)
Im(f) – образ ( ∀ y∈ L, ∃x∈ K: f(x)=y)

### Теорема 2

*Пусть $K, L$ — коммутативные кольца, $f : K \to L$ — гомоморфизм. Тогда $K/\mathrm{Ker}(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$. Более того, отображение $\overline{f} : K/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, заданное формулой $\overline{f}(\overline{x}) := f(x)$, является изоморфизмом колец.*

Доказательство. • Докажем корректность определения $\overline{f}$. Пусть $\overline{x} = \overline{y}$. Тогда $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$, а значит, $f(x) = f(y) + f(x - y) = f(y) + 0 = f(y)$.

¬x = ¬y  ⇔ x – y ∈ Ker(f)  => f(x – y) = 0
В этом пункте доказываем корректность определения ¬f , т.е. то, что значения отображения от равных ¬x = ¬y  также будут равны друг другу:  f(x) = f(y) + f(x – y) = f(y) + 0 = f(y)
Т.к. задавали отображение ¬f по правилу f(x) = ¬f (¬x), то очевидно, что ¬f (¬x) = ¬f (¬y)

• Теперь ясно, что $\overline{f}$ — гомоморфизм:

$\overline{f}(\overline{x} + \overline{y}) = \overline{f}(\overline{x + y}) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \overline{f}(\overline{x}) + \overline{f}(\overline{y})$;   $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$;   $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{ab}$.

$\overline{f}(\overline{x} \cdot \overline{y}) = \overline{f}(\overline{x \cdot y}) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(\overline{x}) \cdot \overline{f}(\overline{y})$.   Проверили на f (a + b) = f(a) + f(b) и f (a * b) = f(a)*f(b)

• Очевидно, $\overline{f}$ — сюръекция: $\forall y \in \mathrm{Im}(f)\ \exists x \in K$ такой, что $y = f(x)$. Тогда и $y = \overline{f}(\overline{x})$.

т.к. f(x) = ¬f (¬x), сюръекция в том, что для одного y имеем два x и ¬x

• Пусть $\overline{a} \in \mathrm{Ker}(\overline{f})$. Тогда $0 = \overline{f}(\overline{a}) = f(a)$, а значит, $a \in \mathrm{Ker}(f)$, откуда следует $\overline{a} = \overline{0}$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(\overline{f}) = \{\overline{0}\}$.

Ker(¬f) – ядро, если ¬f(¬a) = 0, аналогично для Ker(f)
т.к.  ¬a = ¬0 =>  a – 0 ∈ Ker(f)  => Ker(¬f) ={¬0}

• Пусть $a \in \mathrm{Ker}(f)$. Из $f(a) = 0 = f(0)$ следует, что $a = 0$ (так как $f$ — инъекция).
⇐ • Пусть $f(a) = f(b)$. Тогда $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$.
• Значит, $a - b \in \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, откуда $a = b$. Таким образом, $f$ — инъекция, а значит, мономорфизм.

• Таким образом, $\overline{f}$ — изоморфизм, а значит, $K/\mathrm{Ker}(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$.   Сюръекция + инъекция

K, L – коммутативные кольца ( ассоциативность +*, коммутативность +*, 0, обратный элемент по +, дистрибутивность)
Отображение f: K → L – гомоморфизм:
(f (a + b) = f(a) + f(b), f (a * b) = f(a)*f(b), для любых a,b ∈K )

**Теорема 13.1** (Теорема о гомоморфизме колец). $R/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\,\varphi$.

*Доказательство.* Пусть $I := \ker\varphi$. Тогда из доказательства теоремы о гомоморфизме для групп отображение $\psi\colon R/I \to \mathrm{Im}\,\varphi$, $\psi(a + I) := \varphi(a)$ является изоморфизмом групп (по сложениею).

Остается проверить, что $\psi$ — гомоморфизм колец.

$$\psi((a + I)(b + I)) = \psi(ab + I) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a + I)\psi(b + I).$$ ■

*Пример.* $K$ — поле, $a \in K$, $\quad \varphi\colon K[x] \to K, \quad f \mapsto f(a)$.

Это гомоморфизм, он сюръективен ($b = \varphi(b)$).

$\ker\varphi = (x - a) \implies K[x]/(x - a) \simeq K$.

K, – коммутативное кольцо
(ассоциативность +*, коммутативность +*, 0, обратный элемент по +, дистрибутивность)

## Поле частных

Делитель ноля – ненулевой элемент, произведение которого на другой ненулевой элемент равно нулю

В кольце вычетов $\mathbb{Z}_m$ по модулю $m$, если $k$ не взаимно просто с $m$, то вычет $k$ является делителем нуля. Например, в кольце $\mathbb{Z}_6$ элементы 2, 3, 4 — делители нуля:

$2_6 \cdot 3_6 = 0;\ 4_6 \cdot 3_6 = 0$

- Пусть $K$ — коммутативное кольцо без делителей ноля (то есть, если $a, b \in K$ и $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$).
- Обозначим через $M$ множество всех дробей $\frac{a}{b}$, где $a, b \in K$, $b \neq 0$.
- Пусть $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc$.

### Свойство 1

$\frac{0}{b} \sim \frac{c}{d} \iff c = 0.$

Доказательство. $\Leftarrow$. Если $c = 0$, то $0 \cdot d = 0 = b \cdot 0$.

$\Rightarrow$. $\frac{0}{b} \sim \frac{c}{d} \Rightarrow 0 = 0 \cdot d = bc$. Так как по определению $b \neq 0$, а делителей 0 в $K$ нет, $c = 0$. □

### Свойство 2

$\frac{a}{a} \sim \frac{c}{d} \iff c = d.$

Доказательство. Очевидно, $a \neq 0$. Следовательно, $\frac{a}{a} \sim \frac{c}{d} \iff ad = ac \iff a(d - c) = 0 \iff d - c = 0 \iff c = d.$ □

### Свойство 3

**Сокращение дроби.** $\frac{a}{b} \sim \frac{ac}{bc}$ *при* $c \neq 0.$

Доказательство. $abc - bac = 0.$ Просто доказали возможность сокращения на с



### Лемма 12

*$\sim$ — отношение эквивалентности.*

Доказательство. • Рефлексивность очевидна.

- Симметричность.

$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc \iff cb = da \iff \frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}.$ Коммутативное кольцо в помощь

- Транзитивность. Если $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$, то $ad = bc$ и $cf = de$.
- Если хотя бы одно из $a, c, e$ равно 0, то по Свойству 1 равны и два других. Тогда $\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$. один из числителей = 0 и 0/b ~ c/d <=> c=0 => все = 0
- Пусть $0 \notin \{a, c, e\}$. Тогда перемножим полученные равенства и сократим на $cd \neq 0$:

$adcf = bcde \Rightarrow af = be \Rightarrow \frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}.$ □