Билет 11.

- A_n — множество всех четных подстановок.

Теорема 3

При $n \geq 2$ выполняется:

1) $A_n < S_n$;

2) $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Доказательство. 1) • По Свойству 5, если $\sigma \in A_n$, то и $\sigma^{-1} \in A_n$.

Обратная перестановка сохраняет четность, то есть группа замкнута по взятию обратного элемента

Свойство 5

$I(\sigma) \equiv I(\sigma^{-1}) \pmod 2$ *для любой* $\sigma \in S_n$.

- Пусть $\sigma, \sigma' \in A_n$. По Свойству 2, $\sigma\sigma' \in A_n$.

Свойство 2

Произведение подстановок одной четности четно, а произведение подстановок разных четностей нечетно.

Перемножая два четных элемента, получается четный, значит группа замкнута по умножению

Так как множество четных подстановок A_n содержится в множестве всех подстановок S_n, а также A_n замкнуто по обратному элементу и умножению, тогда $A_n < S_n$

2) • Докажем, что четных и нечетных подстановок в S_n поровну.

- Определим отображение $f : S_n \to S_n$ формулой $f(\sigma) := \sigma \cdot (12)$.
- Отметим, что $f(f(\sigma)) = \sigma \cdot (12)^2 = \sigma$.
- По Лемме 8, подстановки σ и $f(\sigma)$ всегда разной четности.
- Пусть $A_n = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ и $f(\sigma) = \sigma'$. Тогда все подстановки $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k$ — различны и нечетны.
- Если $\sigma' \in S_n$ — нечетная подстановка, то $f(\sigma')$ — четная и $f(f(\sigma')) = \sigma'$.
- Следовательно, $S_n \setminus A_n = \{\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k\}$.
- Таким образом, $|A_n| = |S_n \setminus A_n|$, откуда следует, что $|A_n| = \frac{n!}{2}$. □

Берем транспозицию (12), которая просто меняет четность перестановки как $f(\sigma)$

Если взять все четные перестановки и применить транспозицию, получаться нечетные перестановки, причем каждая разная. И так как S_n замкнута по умножению, и в A_n только четные перестановки, получается Все новые нечетные это $S_n \setminus A_n$

Билет 12.

Гомоморфизм групп

Определение

• Пусть G, H — группы. Отображение $f : G \to H$ называется **гомоморфизмом**, если $\forall\, a, b \in G \quad f(ab) = f(a)f(b)$.

Ядро гомоморфизма f — это $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \ : \ f(x) = e_H\}$.

Образ гомоморфизма f — это
$\mathrm{Im}(f) = \{y \in H \ : \ \exists x \in G : f(x) = y\}$.

Свойство 1

Если $f : G \to H$ гомоморфизм, то $f(e_G) = e_H$.

В целом жить можно

Доказательство. $f(e_G) = f(e_G \cdot e_G) = f(e_G) \cdot f(e_G)$. Умножая левую и правую части $(f(e_G))^{-1}$, получаем $f(e_G) = e_H$. $\square$

Свойство 2

Если $f : G \to H$ гомоморфизм, то $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

Доказательство. • $e_H = f(e_G) = f(a \cdot a^{-1}) = f(a) \cdot f(a^{-1})$.

• Аналогично, $f(a^{-1}) \cdot f(a) = e_H$. Значит, $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. $\square$

Лемма 9

Пусть G, H — группы, $f : G \to H$ — гомоморфизм групп.
Тогда:

1) $\mathrm{Ker}(f) < G$.

2) $\mathrm{Im}(f) < H$.

Доказательство. Достаточно проверить условия из Леммы 1.

В целом просто подставить, главное это помнить определения

1) • Пусть $a, b \in \mathrm{Ker}(f)$. Тогда
$f(ab) = f(a)f(b) = e_H \cdot e_H = e_H$, следовательно, $ab \in \mathrm{Ker}(f)$.

• $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} = e_H^{-1} = e_H$, следовательно, $a^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$.

2) • Пусть $y, y' \in \mathrm{Im}(f)$, а $x, x' \in G$ таковы, что $f(x) = y$ и $f(x') = y'$.

• Тогда $yy' = f(x)f(x') = f(xx') \in \mathrm{Im}(f)$.

• $y^{-1} = (f(x))^{-1} = f(x^{-1}) \in \mathrm{Im}(f)$. $\square$

Следствие 2

Если $f : G \to H$ гомоморфизм, а $N < G$, то $f(N) = \{f(x) \ : \ x \in N\} < H$.

Доказательство. • Очевидно, f индуцирует гомоморфизм $f|_N : N \to H$.

• По Лемме 9 мы имеем $f(N) = \mathrm{Im}(f|_N) < H$. $\square$

Напомню, что $f|_N$ это *сужение* функции, то есть мы просто убираем часть аргументов, которые подходят по области допустимых значений