8. Символ Лежандра. Свойства. ($\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$. Вычисление $\left(\frac{-1}{p}\right)$.)

9. Формула $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{2ax}{p}\right]}$.

+задачка

Определение

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}$. Тогда символ Лежандра

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } a \text{ — квадратичный вычет по модулю } p; \\ -1, \text{ если } a \text{ — квадратичный невычет по модулю } p; \\ 0, \text{ если } a \vdots p. \end{cases}$$

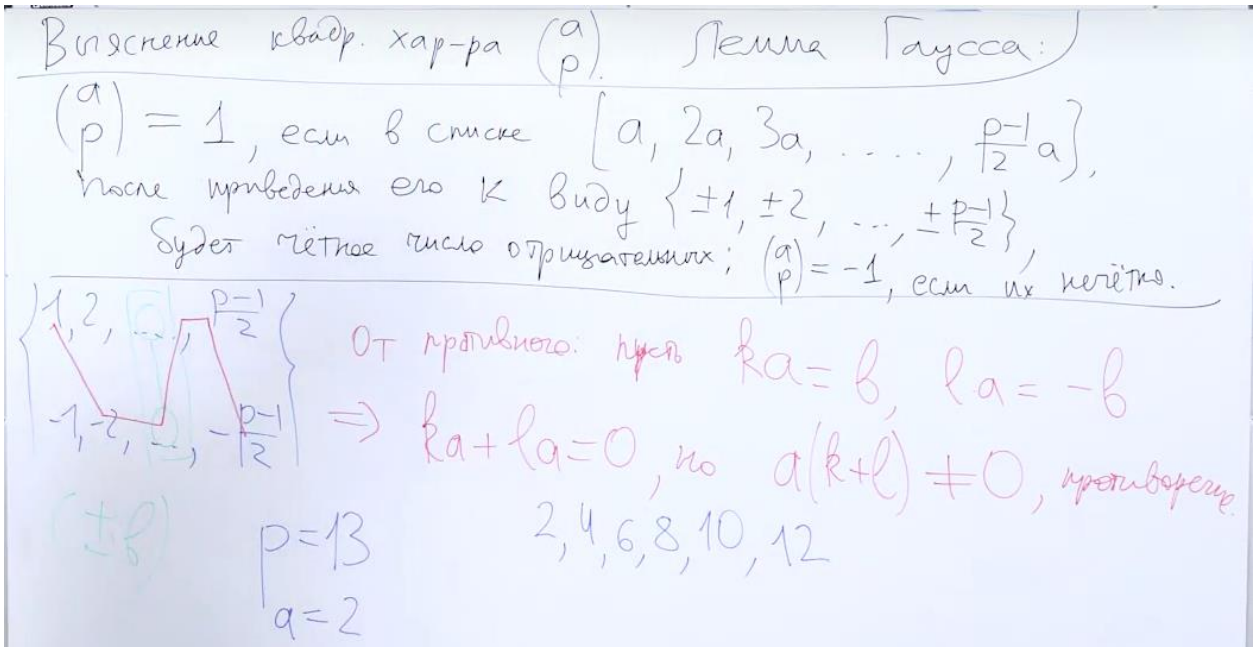
Свойство 1

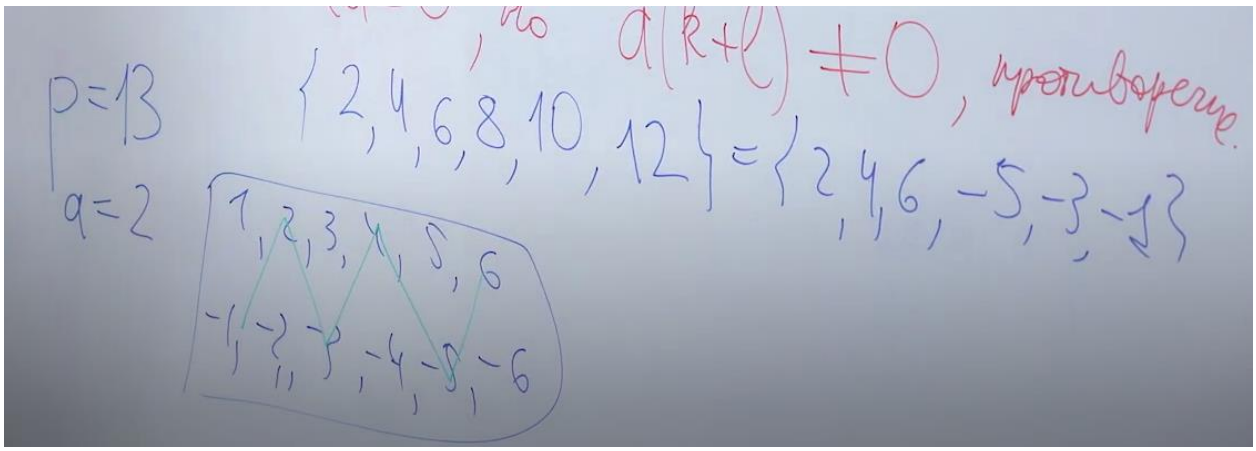
$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Доказательство. • a — квадратичный вычет по модулю p $\iff$ $\overline{a}$ — квадратичный вычет в $\mathbb{Z}_p$ $\iff$ $(\overline{a})^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

• a — квадратичный невычет по модулю p $\iff$ $\overline{a}$ — квадратичный невычет в $\mathbb{Z}_p$ $\iff$ $(\overline{a})^{\frac{p-1}{2}} = -1$.

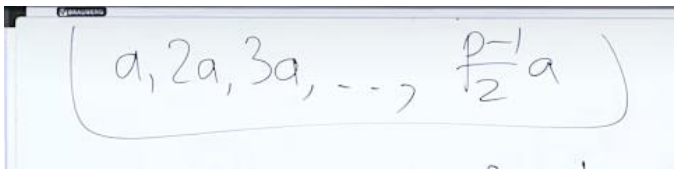
• $a = 0 \iff a^{\frac{p-1}{2}} = 0$. □

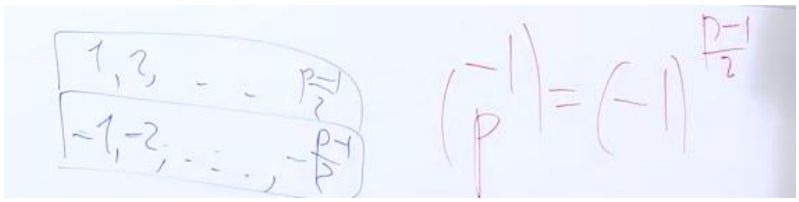




Свойство 2

(Первое дополнение к закону взаимности Гаусса.)
$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.





«Молния» проходит только в нижней части «чемодана Гаусса»

Свойство 3

$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$.

Доказательство. • Следует из Леммы 5 и определения символа Лежандра. □

Лемма 5

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $a, b \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. *Тогда:*

1) *Если* a, b — *квадратичные вычеты, то* ab — *квадратичный вычет.*

2) *Если* a — *квадратичный вычет,* a b — *квадратичный невычет, то* ab — *квадратичный невычет.*

3) *Если* a, b — *квадратичные невычеты, то* ab — *квадратичный вычет.*

1 * 1 = 1;

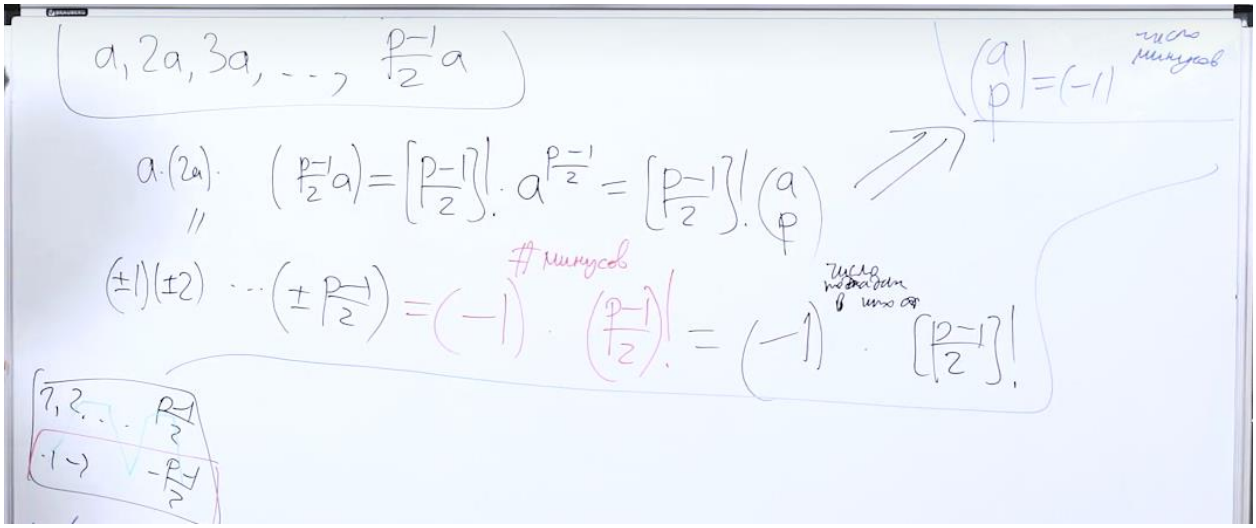
1 * (-1) = -1;

(-1)*(-1) = 1

Лемма 6

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $p_1 = \frac{p-1}{2}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots p$. *Тогда*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} \left[\frac{2ax}{p}\right]}.$$



$a = 2; p = 29$

2; 2*2; 3*2; 4*2; 5*2; 6*2; 7*2; 8*2; 9*2; 10*2; 11*2; 12*2; 13*2; 14*2

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
2	4	6	8	10	12	14	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14

Доказательство. • Пусть $M = \{1, 2, \ldots, p_1\}$.

Утверждение 1

Для каждого $j \in M$ *существует* $s_j \in \{0, 1\}$ *и* $r_j \in M$ *такие, что* $ja \equiv (-1)^{s_j} r_j \pmod{p}$.

Доказательство. • Пусть r'_j — остаток от деления ja на p.

• Если $r'_j \in M$, то положим $r_j := r'_j$, $s_j = 0$.

• Если $r'_j \notin M$, то $r'_j \in \{p_1 + 1, \ldots, p - 1\}$, тогда $p - r'_j \in \{1, \ldots, p - 1 - p_1 = p_1\} = M$.

• В этом случае положим $r_j = p - r'_j$, $s_j = 1$. □

Утверждение 2

Если $i, j \in M$, $i \neq j$, *то* $r_i \neq r_j$.

Доказательство. • Предположим противное, пусть $r_i = r_j$.

• Если $s_i = s_j$, то $r'_i = r'_j$.

• Следовательно, $ia \equiv_p ja \iff a(i-j) \vdots p \Rightarrow i - j \vdots p$,
что не так (последний переход верен, так как $(a, p) = 1$).

• Если $s_i \neq s_j$, то $r'_i = p - r'_j$.

• Следовательно, $ia \equiv_p -ja \iff a(i+j) \vdots p \Rightarrow i + j \vdots p$,
что не так: $2 \leq i + j \leq 2p_1 = p - 1$. □

Утверждение 3

$s_j = 1 \iff [\frac{2aj}{p}] \not\vdots 2$.

Доказательство. • Напомним, что
$aj = pq + r'_j \iff 2aj = 2pq + 2r'_j$, где $r'_j \in \{1, \ldots, p-1\}$.

$$s_j = 1 \iff \frac{p+1}{2} = p_1 + 1 \leq r'_j \leq p - 1 \iff$$

$$p+1 \leq 2r'_j \leq 2p-2 \iff p+1+2pq \leq 2aj \leq 2p-2+2pq \iff$$

$$p + 2pq < 2aj < 2p + 2pq \iff$$

$$2q + 1 < \frac{2aj}{p} < 2q + 2 \iff \left[\frac{2aj}{p}\right] = 2q + 1 \not\vdots 2.$$

• Пояснение 1. Так как разность целых чисел не менее 1,
$p + 1 + 2pq \leq 2aj \iff p + 2pq < 2aj$.

• Пояснение 2. Так как разность четных чисел не менее 2,
$2aj \leq 2p - 2 + 2pq \iff 2aj < 2p + 2pq$. □

• Вернемся к доказательству Леммы 6. По Утверждению 2, $\{r_1, \ldots, r_{p_1}\} = M$ (так как все эти числа из M и различны, а $|M| = p_1$).

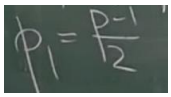
• Пусть $R = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p_1$. Тогда $r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_{p_1} = R$.

• Напишем цепочку сравнений:

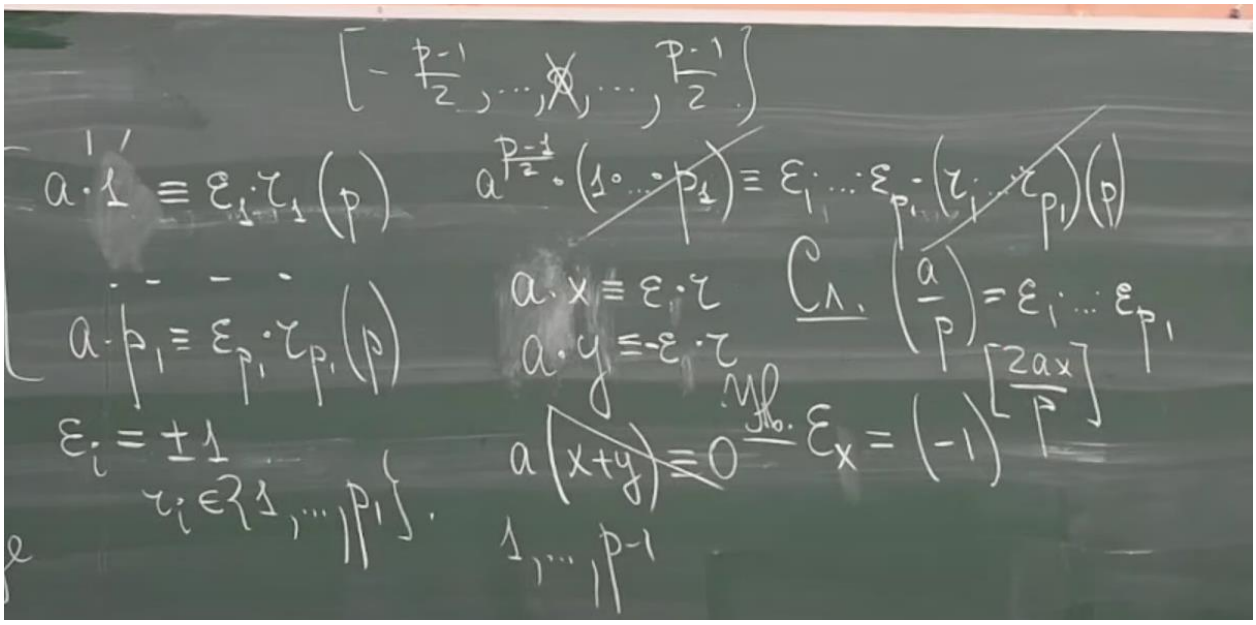
$$(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} s_x} R \equiv (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} s_x} \cdot \prod_{x=1}^{p_1} r_x \equiv$$

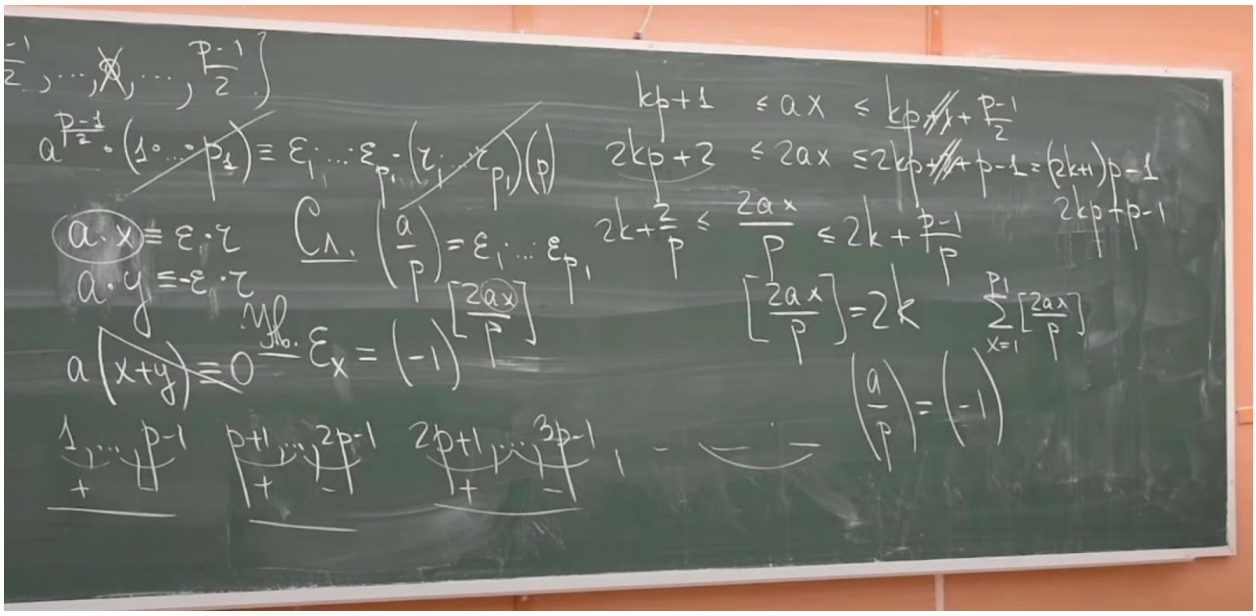
$$\prod_{x=1}^{p_1} (-1)^{s_x} r_x \equiv \prod_{x=1}^{p_1} ax \pmod{p} \equiv a^{p_1} R \pmod{p} \qquad (1).$$

• Сокращая (1) на R (можно, так как $(R, p) = 1$), получаем $a^{p_1} \equiv (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} s_x} \equiv (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} [\frac{2ax}{p}]} \pmod{p}$ (последний переход верен по Утверждению 3). □



Лемма 6
Пусть $p \in \mathbb{P}$, $p_1 = \frac{p-1}{2}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots p$. *Тогда* $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} [\frac{2ax}{p}]}$.





Теперь оценим аналогично, если ах попадает в «правую» половину

$\frac{p-1}{2}+1+kp \ \leq ax \ \leq kp-1+p$

$p-1+2+2kp \ \leq \ 2ax \ \leq 2kp-2+2p$

$p(2k+1)+1 \leq 2ax \ \leq 2kp-2+2p$

$(2k+1)+\frac{1}{p} \ \leq \ \frac{2ax}{p} \ \leq 2k+2-\frac{2}{p}$, то есть

$\left[\frac{2ax}{p}\right]=2k+1$, в общем, нечётное число.

Задачка:

Сколько корней имеет

$x^4+20=0$ в F_{101}?

$x^4=81$ в F_{101}

$(x^2-9)(x^2+9)=0$ (то есть надо посмотреть, является ли 9 и -9 квадратичным вычетом по модулю 101)

$\left(\frac{9}{101}\right)=\left(\frac{3}{101}\right)^2=1$, то есть 9 – квадратичный вычет по модулю 101

$\left(\frac{-9}{101}\right)=\left(\frac{-1}{101}\right)\left(\frac{9}{101}\right)=(-1)^{\frac{101-1}{2}}*1=1$, то есть -9 – квадратичный вычет по модулю 101