Кратность корня через производную

Для начала вспомним что такое $char(K)$.

Кратность корня через производную

Для начала вспомним что такое $char(K)$.

Если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $\underline{k} = 0$ (сумма k единиц), то характеристика поля равна наименьшему такому числу. Если такого числа нет, то $char(K) = 0$.

Кратность корня через производную

Теорема:

Пусть K – поле, $char(K) = 0, f \in K[t]$, а $\alpha \in K$ – корень f.

Тогда α – корень кратности m многочлена f, если
$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, а $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Кратность корня через производную

Теорема:

Пусть K – поле, $char(K) = 0, f \in K[t]$, а $\alpha \in K$ – корень f.

Тогда α – корень кратности m многочлена f, если
$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, а $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Доказательство:

Если α корень кратности m, то $f(t) = (t - \alpha)^m \cdot g(t)$.

Кратность корня через производную

Теорема:

Пусть K – поле, $char(K) = 0, f \in K[t]$, а $\alpha \in K$ – корень f.

Тогда α – корень кратности m многочлена f, если
$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \dots, f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, а $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Доказательство:

Если α корень кратности m, то $f(t) = (t - \alpha)^m \cdot g(t)$.

$$f'(t) = ((t-\alpha)^m \cdot g(t))' = m \cdot (t-\alpha)^{m-1} \cdot g'(t) + (t-\alpha)^m \cdot g'(t).$$

Кратность корня через производную

Теорема:

Пусть K – поле, $char(K) = 0, f \in K[t]$, а $\alpha \in K$ – корень f.

Тогда α – корень кратности m многочлена f, если
$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, а $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Доказательство:

Если α корень кратности m, то $f(t) = (t - \alpha)^m \cdot g(t)$.

$f'(t) = ((t - \alpha)^m \cdot g(t))' = m \cdot (t - \alpha)^{m-1} \cdot g'(t) + (t - \alpha)^m \cdot g'(t)$.

Таким образом $f'(t) \vdots (t - \alpha)^{m-1}$.

Кратность корня через производную

Теорема:

Пусть K – поле, $char(K) = 0, f \in K[t]$, а $\alpha \in K$ – корень f.

Тогда α – корень кратности m многочлена f, если
$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, а $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Доказательство:

Если α корень кратности m, то $f(t) = (t - \alpha)^m \cdot g(t)$.

$f'(t) = ((t - \alpha)^m \cdot g(t))' = m \cdot (t - \alpha)^{m-1} \cdot g'(t) + (t - \alpha)^m \cdot g'(t)$.

Таким образом $f'(t) \vdots (t - \alpha)^{m-1}$.

При взятии производной кратность корня α снизилась на 1. Значит все производные до $m - 1$ будут делиця на $t - \alpha$.

Кратность корня через производную

В обратную сторону все еще проще. Если α – корень кратности $l \in \mathbb{N}$, то по доказанной ранее части:

$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(l-1)}(\alpha) = 0$, а $f^{(l)}(\alpha) \neq 0$.

Кратность корня через производную

В обратную сторону все еще проще. Если α – корень кратности $l \in \mathbb{N}$, то по доказанной ранее части:

$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(l-1)}(\alpha) = 0$, а $f^{(l)}(\alpha) \neq 0$.

Откуда следует, что $m = l$.