Теория графов (связность)

Определения

Точки сочленения и блоки в связном графе

Точка сочленения - вершина $a \in V(G)$, если граф $G - a$ несвязен (при удалении a увеличивается число компонентов связности).

Блок - любой максимальный по включению подграф графа G, не имеющий точек сочленения.

- В силу максимальности, блок графа G является индуцированным подграфом графа G на своем множестве вершин.
- Любой подграф без точек сочленения H графа G входит хотя бы в один блок (так как H можно дополнить до максимального подграфа без точек сочленения).

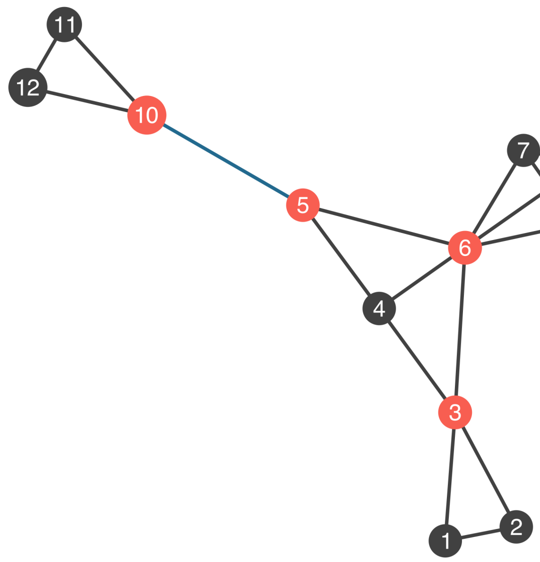

Рис. 1. Вершины {3, 5, 6, 10} являются точками сочленения,
(5, 10) - мост, {10, 11, 12}, {6, 7, 8, 9}, {1, 2, 3}, {3, 4, 5, 6} - блоки

Блоки и точки сочленения несвязанного графа - это блоки и точки сочленения его компонентов.

Граф $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{G})$, вершины которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \ldots, a_n$ графа G и всем его блокам $B_1, \ldots, B_m$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j будут смежны, если $a_i \in V\left(B_j\right)$. Других ребер в этом графе нет.

Дерево блоков и точек сочленения - граф $B(G)$ графа G.

Крайник блок - блок, соответствующий висячей вершине дерева блоков и точек сочленения.

Внутренность $\operatorname{Int}(B)$ блока B - это множество всех его вершин, не являющихся точками сочленения графа G.

Теоремы и леммы

Лемма 1

Пусть B_1, B_2 - два разных блока графа G, причем $V(B_1) \cap V(B_2) \neq \emptyset$. Тогда $V(B_1) \cap V(B_2)$ состоит из точки сочленения a графа G, причем a - единственная точка сочленения, отделяющая B_1 и B_2.

Лемма 2

Пусть B_1, B_2 - два разных блока графа G, а P - путь между ними в графе $B(G)$. Тогда точки сочленения графа G, отделяющие B_1 от B_2 - это в точности те же точки сочленения, что лежат на пути P. Остальные точки сочленения не разделяют даже объединение блоков пути P.

Теорема 1

1. Дерево блоков и точек сочленения связного графа G - это действительно дерево, все листья которого соответствуют блокам.
2. Точка сочленения a разделяет два блока B_1 и B_2 в графе G, если и только если a разделяет B_1 и B_2 в $B(G)$.

Лемма 3

Пусть B - крайний блок связного графа G, а $G' = G - \mathrm{Int}(B)$. Тогда граф G' связен, а блоки G' - это все блоки G, кроме B.

Разрез графа G по точке сочленения a

Пусть $U_1, ..., U_k$ - все компоненты связности графа $G - a$, а $G_i = G(U_i \cup \{a\})$. Разрежем граф G на графы $G_1, ..., G_k$.

Лемма 4

1. Пусть $b \in U_i$. Тогда b разделяет вершины $x, y \in U_i$ в G_i, если и только если b разделяет их в G.
2. Все точки сочленения графов $G_1, ..., G_k$ - это в точности все точки сочленения G, кроме a.