Теорема о гомоморфизме колец

эквивалентно = (рефлексивно, симметрично, транзитивно)

x∈ K , ¬x – вычет, состоящий из элементов кольца сравнимых с x. ¬x = x + I = {x+a: a ∈ I}

K /Ker(f) (факторкольцо по идеалу) ~ Im(f) образ (∀ y∈ L, ∃x∈ K: f(x)=y)

Ker(f) – идеал коммутативного кольца (лемма 7)

Изоморфизм – будем проверять ¬f (¬x) = f(x) на биекцию гомоморфизма

Теорема 2

Пусть K, L — коммутативные кольца, $f : K \to L$ — гомоморфизм. Тогда $K/\mathrm{Ker}(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$. Более того, отображение $\overline{f} : K/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, заданное формулой $\overline{f}(\overline{x}) := f(x)$, является изоморфизмом колец.

Лемма 11

$+$ и $\cdot$ в K/I определены корректно.

Доказательство. • Пусть $a \equiv_I a'$, то есть, $\overline{a} = \overline{a'}$. Это означает, что $a - a' \in I$. Докажем, что от замены a на a' результат $+$ и $\cdot$ не изменится:

$$\overline{a}+\overline{b} = \overline{a'}+\overline{b} \iff a+b \equiv_I a'+b \iff a+b-(a'+b) = a-a' \in I;$$

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{a'}\cdot\overline{b} \iff ab \equiv_I a'b \iff$$
$$ab-(a'b) = (a-a')b \in I \Leftarrow a-a' \in I. \qquad \square$$

Доказательство. • Докажем корректность определения $\overline{f}$. Пусть $\overline{x} = \overline{y}$. Тогда $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$, а значит,
$f(x) = f(y) + f(x-y) = f(y) + 0 = f(y)$.

• Теперь ясно, что $\overline{f}$ — гомоморфизм:
$\overline{f}(\overline{x}+\overline{y}) = \overline{f}(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x)+f(y) = \overline{f}(\overline{x}) + \overline{f}(\overline{y})$; $\boxed{\overline{a}+\overline{b} := \overline{a+b}; \qquad \overline{a}\cdot\overline{b} := \overline{ab}.}$
$\overline{f}(\overline{x}\cdot\overline{y}) = \overline{f}(\overline{x\cdot y}) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(\overline{x})\cdot\overline{f}(\overline{y})$. Проверили на f (a + b) = f(a) + f(b) и f (a * b) = f(a)*f(b)

• Очевидно, $\overline{f}$ — сюръекция: $\forall y \in \mathrm{Im}(f)\ \exists x \in K$ такой, что $y = f(x)$. Тогда и $y = \overline{f}(\overline{x})$. т.к. f(x) = ¬f (¬x)

• Пусть $\overline{a} \in \mathrm{Ker}(\overline{f})$. Тогда $0 = \overline{f}(\overline{a}) = f(a)$, а значит, $a \in \mathrm{Ker}(f)$, откуда следует $\overline{a} = \overline{0}$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(\overline{f}) = \{\overline{0}\}$.

• Таким образом, $\overline{f}$ — изоморфизм, а значит, $K/\mathrm{Ker}(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$. $\square$

K, L – коммутативные кольца (ассоциативность +*, коммутативность +*, 0, обратный элемент по +, дистрибутивность)
Отображение f: K → L – гомоморфизм:
(f (a + b) = f(a) + f(b), f (a * b) = f(a)*f(b), для любых a,b ∈K)

Теорема 13.1 (Теорема о гомоморфизме колец). $R/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\,\varphi$.

Доказательство. Пусть $I := \ker\varphi$. Тогда из доказательства теоремы о гомоморфизме для групп отображение $\psi\colon R/I \to \mathrm{Im}\,\varphi$, $\psi(a+I) := \varphi(a)$ является изоморфизмом групп (по сложениею).

Остается проверить, что ψ — гомоморфизм колец.

$$\psi((a+I)(b+I)) = \psi(ab+I) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a+I)\psi(b+I). \qquad \blacksquare$$

Пример. K — поле, $a \in K$, $\quad \varphi\colon K[x] \to K, \quad f \mapsto f(a)$.
Это гомоморфизм, он сюръективен ($b = \varphi(b)$).
$\ker\varphi = (x-a) \implies K[x]/(x-a) \simeq K$.

K, – коммутативное кольцо
(ассоциативность +*, коммутативность +*, 0, обратный элемент по +, дистрибутивность)

Поле частных

Делитель ноля – ненулевой элемент, произведение которого на другой ненулевой элемент равно нулю

В кольце вычетов $\mathbb{Z}_m$ по модулю m, если k не взаимно просто с m, то вычет k является делителем нуля. Например, в кольце $\mathbb{Z}_6$ элементы 2, 3, 4 — делители нуля:

$$2_6 \cdot 3_6 = 0;\ 4_6 \cdot 3_6 = 0$$

- Пусть K — коммутативное кольцо без делителей ноля (то есть, если $a, b \in K$ и $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$).
- Обозначим через M множество всех дробей $\frac{a}{b}$, где $a, b \in K$, $b \neq 0$.
- Пусть $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc$.

Свойство 1

$\frac{0}{b} \sim \frac{c}{d} \iff c = 0$.

Доказательство. $\Leftarrow$. Если $c = 0$, то $0 \cdot d = 0 = b \cdot 0$.

$\Rightarrow$. $\frac{0}{b} \sim \frac{c}{d} \Rightarrow 0 = 0 \cdot d = bc$. Так как по определению $b \neq 0$, а делителей 0 в K нет, $c = 0$. □

Свойство 2

$\frac{a}{a} \sim \frac{c}{d} \iff c = d$.

Доказательство. Очевидно, $a \neq 0$. Следовательно, $\frac{a}{a} \sim \frac{c}{d} \iff ad = ac \iff a(d - c) = 0 \iff d - c = 0 \iff c = d$. □

Свойство 3

Сокращение дроби. *$\frac{a}{b} \sim \frac{ac}{bc}$ при $c \neq 0$.*

Доказательство. $abc - bac = 0$.

Просто доказали возможность сокращения на с

Лемма 12

$\sim$ — отношение эквивалентности.

Доказательство. • Рефлексивность очевидна.

- Симметричность.

$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc \iff cb = da \iff \frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$.

Коммутативное кольцо в помощь

- Транзитивность. Если $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$, то $ad = bc$ и $cf = de$.
- Если хотя бы одно из a, c, e равно 0, то по Свойству 1 равны и два других. Тогда $\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$.

один из числителей = 0 и 0/b ~ c/d <=> c=0 => все = 0

- Пусть $0 \notin \{a, c, e\}$. Тогда перемножим полученные равенства и сократим на $cd \neq 0$:

$adcf = bcde \Rightarrow af = be \Rightarrow \frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$. □