1 билет 29

Формула обращения Мёбиуса. Мультипликативный вариант

Теорема 22

Пусть K — поле, $f, g : \mathbb{N} \to K \setminus \{0\}$, причем $f(m) = \prod\limits_{d \mid m} g(d)$.

Тогда $g(m) = \prod\limits_{n \mid m} f(n)^{\mu(\frac{m}{n})}$.

Доказательство.

$$\prod_{n \mid m} f(n)^{\mu(\frac{m}{n})} = \prod_{n \mid m} \left(\prod_{d \mid n} g(d) \right)^{\mu(\frac{m}{n})} =$$

$$\prod_{d \mid m} g(d)^{\sum\limits_{d \mid n \mid m} \mu(\frac{m}{n})} = g(m)$$

по Лемме 8. □

2 билет 30

Сумма мультипликативной функции по делителям числа

Теорема 23

Пусть $f : \mathbb{N} \to$ *— мультипликативная функция,* $g(n) = \sum\limits_{d \mid n} f(d)$*. Тогда* g *— мультипликативная функция.*

Доказательство. • Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$.

• $a = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ и $b = q_1^{\ell_1} \dots q_t^{\ell_t}$ — канонические разложения.

• Так как $(a, b) = 1$, все эти простые различны и $ab = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} q_1^{\ell_1} \dots q_t^{\ell_t}$ — каноническое разложение.

• По Теореме 8, $d \mid ab \iff d = p_1^{k_1'} \dots p_s^{k_s'} q_1^{\ell_1'} \dots q_t^{\ell_t'}$, где $0 \le k_i' \le k_i$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$ и $0 \le \ell_j' \le \ell_j$ для всех $j \in \{1, \dots, t\}$.

• Следовательно, $d = d_a d_b$, где $d_a \mid a$ и $d_b \mid b$, причем $(d_a, d_b) = 1$ и такое представление единственно: $d_a = p_1^{k_1'} \dots p_s^{k_s'}$ и $d_b = q_1^{\ell_1'} \dots q_t^{\ell_t'}$.

• Таким образом,

$$g(ab) = \sum_{d \mid ab} f(d) = \sum_{d_a \mid a} \sum_{d_b \mid b} f(d_a d_b) = \sum_{d_a \mid a} \sum_{d_b \mid b} f(d_a) f(d_b) =$$

$$\left(\sum_{d_a \mid a} f(d_a) \right) \left(\sum_{d_b \mid b} f(d_b) \right) = g(a) g(b). \qquad \square$$