Комплесные числа

Множество комплексных чисел состоит из упорядоченных пар вещественных чисел:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Формы записи

- Вещественная и мнимая часть $z := (a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$
- Школьная $z = a + bi$ (очень удобно проводить операции с ней, так как это просто многочлен)
- Тригонометрическая $z = (r, \phi) = (r \cdot cos(\phi), r \cdot sin(\phi))$
- Еще один вид тригонометрической записи $e^{i\phi}$

Геометрическая интерпретация

Комплексное число можно представить в декартовой системе координат $\mathbb{R}^2$. По оси абсцисс будет откладывать вещественную часть, а по оси ординат мнимую. Модуль $|z|$ расстояние от начала координат, а $\phi = arg(z)$ это направление угла против часовой стрелки.

Геометрическая интерпретация

Комплексное число можно представить в декартовой системе координат $\mathbb{R}^2$. По оси абсцисс будет откладывать вещественную часть, а по оси ординат мнимую. Модуль $|z|$ расстояние от начала координат, а $\phi = arg(z)$ это направление угла против часовой стрелки.

Теорема:
Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Тогда $|xy| = |x| \cdot |y|$ и $arg(xy) = arg(x) + arg(y)$.

Геометрическая интерпретация

Комплексное число можно представить в декартовой системе координат $\mathbb{R}^2$. По оси абсцисс будет откладывать вещественную часть, а по оси ординат мнимую. Модуль $|z|$ расстояние от начала координат, а $\phi = arg(z)$ это направление угла против часовой стрелки.

Теорема:
Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Тогда $|xy| = |x| \cdot |y|$ и $arg(xy) = arg(x) + arg(y)$.

Для доказательства достаточно лишь представить x в виде $(r \cdot cos(\phi), r \cdot sin(\phi))$, а y в виде $(p \cdot cos(\psi), p \cdot sin(\psi))$.
И теперь лишь останеця применить правило умножения и некоторые тригонометрические упрощения.
$cos(phi) \cdot cos(\psi) - sin(phi) \cdot sin(\psi) = cos(\phi + \psi)$
$cos(phi) \cdot sin(\psi) + sin(phi) \cdot cos(\psi) = sin(\phi + \psi)$

Формула Муавра

Теорема:

Пусть $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Тогда $|z^n| = |z|^n$ и $arg(z^n) = n \cdot arg(z)$.

Формула Муавра

Теорема:

Пусть $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Тогда $|z^n| = |z|^n$ и $arg(z^n) = n \cdot arg(z)$.

Доказывать будем по индукции n. База $n = 1$ очевидна.

Формула Муавра

Теорема:
Пусть $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Тогда $|z^n| = |z|^n$ и $arg(z^n) = n \cdot arg(z)$.

Доказывать будем по индукции n. База $n = 1$ очевидна.

Переход $n \to n + 1$.

- Пусть $|z| = r, arg(z) = \phi$ и утверждение доказано для n, то есть, $|z^n| = r^n$ и $arg(z^n) = n \cdot \phi$.

Формула Муавра

Теорема:
Пусть $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Тогда $|z^n| = |z|^n$ и $arg(z^n) = n \cdot arg(z)$.

Доказывать будем по индукции n. База $n = 1$ очевидна.

Переход $n \to n + 1$.

- Пусть $|z| = r, arg(z) = \phi$ и утверждение доказано для n, то есть, $|z^n| = r^n$ и $arg(z^n) = n \cdot \phi$.
- По прошлой теореме (о произведении геометрической записи) получаем
  $|z^{n+1}| = |z||z^n| = r \cdot r^n = r^{n+1}$.
  $arg(z^{n+1}) = arg(z) + arg(z^n) = \phi + n\phi = (n+1)\phi$.