Многочлены

Разность n-ых степеней

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^{2n} - b^{2n} = \left(a^2 - b^2\right)\left(a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + ... + a^2b^{2n-4} + b^{2n-2}\right)$$

Производная многочлена

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_i} = f(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

$$f'(x) = f(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

Если многочлен f(x) имеет корень кратности n, то это значит, что

1. $f(\alpha) = 0$
2. $f^{(i)}(\alpha) = 0$ для $\forall i \in [1, n-1]$

Пример (связь производной с функцией и ее корнями)

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = f(x) \cdot \frac{2x-3}{x^2 - 3x + 2} = f(x) \cdot \frac{2x-3}{f(x)} = 2x - 3$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

Простейшие дроби

Дробь $\frac{f}{g} \in K[t]$ - простейшая, если $g = p^k$, где $p \in K[t]$ – неприводимый многочлен и $\deg(f) < \deg(g)$.

Теорема Виета

$$\sigma_k(a_1, ..., a_n) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le ... \le i_k \le n} a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}$$

Теорема (следствие из теоремы Виета)

Пусть $f = c_n t^n + ... + c_1 t + c_0 \in K[t]$, причем $f = c_n(t - a_1)...(t - a_n)$.

Тогда $\frac{c_i}{c_n} = (-1)^{n-i} \sigma_{n-i}(a_1, ..., a_n)$ для $\forall i \in \{0, ..., n-1\}$.

Алгоритм интерполяции Лагранжа

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

$$L(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{f(x)}{f'(x_i) \cdot (x - x_i)}$$

$$l_{i(x)} = \prod_{j=0, j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Пример

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \\ = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{-30}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \\ = \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{6}$$

i	x	y
0	0	0
1	2	1
2	3	3
3	5	2

$$L(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + y_2 \cdot l_2(x) + y_3 \cdot l_3(x) = 0 \cdot l_0(x) + 1 \cdot l_1(x) + 3 \cdot l_2(x) + 2 \cdot l_3(x)$$

Алгоритм интерполяции по Ньютону

$$N = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1) + ...$$

Чтобы найти многочлен по точкам, нужно постепенно подставлять значения x, тогда если подставляем x_i, то начиная с i будут нули.

Пример

$$2 = a_0 + a_1(1-1) + a_2(1-1)(2-1) + ...$$

$$3 = a_0 + a_1(2-1) + a_2(2-1)(2-2) + ...$$

i	x	y
0	1	2
1	2	3
2	3	−10

Упрощенный алгоритм интерполяции по Ньютону $\Delta x = \text{const}$

Пусть $h = \Delta x$, тогда построим табличку, где $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$, где i – строчка в таблице.

i	x	y = Δ^0y	Δ^1y	Δ^2y
0	1	3	−13	28
1	2	−10	15	
2	3	5		

Тогда коэффициент $a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! \cdot h^k}$

Связь разложения на простейшие дроби с интерполяцией

Алгоритм, когда все корни первой степени

$$g(x) = (x - a_1)...(x - a_n)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{g'(a_i) \cdot (x - a_i)}$$

Метод неопределенных коэффициентов

- Раскладываем знаменатель в виде произведения
- Расписываем дробно рациональную функцию в виде суммы дробей, где степень числителя меньше степени знаменателя

Пример разложения

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} (x - x_3)^{k_3} ... (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} ... (x^2 + p_j x + q_j)^{s_j}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + ... + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + ... \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} +$$

$$+ \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + ... + \frac{C_{s_i} x + D_{s_i}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_i}} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_2}{x^2 + p_j x + q_j} + ... + \frac{M_{s_j} x + N_{s_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{s_j}}$$

Пример (конкретный)

$$\frac{x^2 - 2}{(x - 1)(x + 3)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{(x + 3)^2} + \frac{D}{(x + 3)^3}$$

$$\frac{x - 3}{x^2 (x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Способ нахождения коэффициентов

- Раскрываем скобки и приравниваем значения коэффициентов перед x-ами соответствующих степеней (может быть очень долго)
- Подставляем вместо x конкретное значение, чтобы некоторые скобки обращались в 0

Первообразный корень из 1

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Число $\varepsilon \in \mathbb{C}$ такое, что $\varepsilon^n = 1$, но $\varepsilon^k \neq 1, \forall k \in \mathbb{N} \wedge k < n$, называется первообразным корнем из 1 степени n.

Существует ровно $\varphi(n)$ первообразных корней из 1 степени n, и они имеют вид

$$\varepsilon_k = \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right), k \in \{1, ..., n-1\}, (k, n) = 1$$

Многочлен деления круга

Любой многочлен вида $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$.

Многочленен деления круга

$$\Phi_n(t) := \prod_{1 \leq k \leq n, (k,n)=1} (t - \varepsilon_k)$$

- Из определения следует, что $\Phi_n \in \mathbb{C}[t]$.
- Все коэффициенты этого многочлена – целые

$$t^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(t)$$

$$\Phi_n(t) = \prod_{d \mid n} \left(t^d - 1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

- $\Phi_n \in \mathbb{Z}[t]$ - унитарный многочлен (то есть, старший коэффициент Φ_n равен 1).
- $\Phi_p = \frac{x^p - 1}{x-1} = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$
- $\Phi_{p^n} = x^{(p-1) \cdot p^{n-1}} + x^{(p-2) \cdot p^{n-1}} + ... + x^{p^{n-1}} + 1$
- $\deg(\Phi_n) = \varphi(n)$
- Количество множителей разложения $t^n - 1$ в многочлены $\in \mathbb{R}[t]$ равно $\tau(n)$, где $\tau(n)$ – количество делителей числа n.

Пример вычисления $\Phi_n(t)$

Обозначим через $\varepsilon_{n,k} = \varepsilon_k$ для n и $\rho = \sqrt[3]{1}$.

$$\Phi_1(t) = \left(t - \varepsilon_{n,1}\right) = (t - 1)$$

$$\Phi_2(t) = \left(t - \varepsilon_{n,1}\right) = (t + 1)$$

$$\Phi_3(t) = \left(t - \varepsilon_{n,1}\right) \cdot \left(t - \varepsilon_{n,2}\right) = (t - \rho)(t + \rho) = t^2 + t + 1$$

Решение некоторых задач

Может быть полезно

$i = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$	$-i = \left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{i} = \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{-i} = \left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$

Задача 1

$$x^k - 8 \;\vdots\; x^3 - 2, k \in \mathbb{N}$$

$$x^k - 8 \;\vdots\; x^3 - 2 \Rightarrow x^k - 8 = \left(x^3 - 2\right) \cdot Q(x)$$

$$\text{При} \quad x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{2}^k - 8 = 0 \cdot Q(x) \Rightarrow k = 9 \text{ единственное решение}$$

Задача 2

$$x^k + x^n \;\vdots\; x^2 - x + 1$$

$$x^k + x^n = \left(x^2 - x + 1\right) \cdot Q(x)$$

$$D = 1 - 4 = -3$$

$$x_{1,2} = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2} = \left(1, \pm\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x_1^k + x_1^n = 0 \Rightarrow \left|\arg\left(x_1^k\right) - \arg\left(x_1^n\right)\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow |k - n| \equiv 3 (\operatorname{mod} 6)$$