1 Билет 15

Производная многочлена

• Здесь K — поле. Значит, существует $1 \in K$. Будем использовать в поле K обозначение $n := \underbrace{1 + \dots + 1}_{n}$.

• В этих обозначениях из дистрибутивности следует, что $m \cdot n = (\underbrace{1 + \dots + 1}_{m}) \cdot (\underbrace{1 + \dots + 1}_{n}) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{mn} = mn$, так что введенное обозначение корректно.

Определение

Пусть $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 \in K[t]$.
Производная многочлена f — это

$$f'(t) := n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \dots + a_1.$$

Лемма 5

Для $f, g \in K[t]$ выполнено $(f+g)' = f' + g'$.

Доказательство. • Пусть $f(t) = a_n t^n + \dots + a_0$, $g(t) = b_n t^n + \dots + b_0$. (Степени можно считать одинаковыми, иначе допишем нулевых коэффициентов.)

• Тогда $(f+g)(t) = (a_n + b_n) t^n + \dots + (a_1 + b_1) t + (a_0 + b_0)$ и $(f+g)'(t) = n(a_n + b_n) t^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) = (n a_n t^{n-1} + \dots + a_1) + (n b_n t^{n-1} + \dots + b_1) = f'(t) + g'(t)$. □

2 Билет 16

Лемма 6

Для $f, g \in K[t]$ выполнено $(fg)' = fg' + f'g$.

Доказательство. • Сначала рассмотрим случай одночлена:

$$((a_k t^k)(b_\ell t^\ell))' = (a_k b_\ell t^{k+\ell})' = (k+\ell)a_k b_\ell t^{k+\ell-1} =$$

$$(a_k t^k)\cdot(\ell b_\ell t^{\ell-1})+(k a_k t^{k-1})\cdot(b_\ell t^\ell) = (a_k t^k)\cdot(b_\ell t^\ell)'+(a_k t^k)'\cdot(b_\ell t^\ell).$$

• Теперь общий случай $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_0$,
$g(t) = b_m t^m + \cdots + b_0$:

$$(fg)' = \left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m} b_j t^j\right)\right)' = \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j t^{i+j}\right)' =$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_i b_j t^{i+j})' = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_i t^i)'(b_j t^j) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_i t^i)(b_j t^j)' =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i t^i)'\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m} b_j t^j\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}(b_j t^j)'\right) =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right)'\cdot\left(\sum_{j=0}^{m} b_j t^j\right)+\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m} b_j t^j\right)' = f'g + fg'. \quad \square$$

Лемма 7

Для $f(t) = \prod_{i=1}^{n}(t-\alpha_i)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ (не обязательно все эти числа различны). Тогда $f'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(t)}{t-\alpha_i}$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 1$ очевидна (тогда $f'(t) = 1$).

Переход. Пусть $g(t) = \frac{f(t)}{t-\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n-1}(t-\alpha_i)$. По Лемме 6 и индукционному предположению,

$$f'(t) = (g(t)(t-\alpha_n))' = g'(t)(t-\alpha_n) + g(t)(t-\alpha_n)' =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{g(t)}{t-\alpha_i}\right)(t-\alpha_n) + g(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(t)}{t-\alpha_i}. \quad \square$$

Следствие 2

Пусть $\alpha \in K$, $f(t) = (t-\alpha)^n$. Тогда $f'(t) = n(t-\alpha)^{n-1}$.

Доказательство. Воспользуемся Леммой 7 для $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha$. $\Rightarrow f' = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(t)}{t-\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(t)}{t-\alpha} = n\frac{f(t)}{t-\alpha}$ $\square$