1. Линейное пространство. Свойства.

Определение

Пусть K — поле, V — множество, и определены операции $+: V \times V \to V$ и $\cdot : K \times V \to V$, удовлетворяющие следующим условиям.

1) *Ассоциативность сложения.*
$\forall a, b, c \in V \quad (a+b)+c = a+(b+c)$.

2) *Коммутативность сложения.* $\forall a, b \in V \quad a+b = b+a$.

3) *Ноль.* $\exists 0 \in V$ такой, что $\forall a \in V \quad a+0 = a$.

4) *Обратный элемент.* $\forall a \in V \ \exists -a \in V$ такой, что $a+(-a) = 0$.

5) *Дистрибутивность.* $\forall \alpha, \beta \in K$ и $\forall a \in V$ выполнено $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$.

6) *Дистрибутивность.* $\forall \alpha \in K$ и $\forall a, b \in V$ выполнено $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$.

7) *Ассоциативность умножения.* $\forall \alpha, \beta \in K$ и $\forall a \in V$ выполнено $\alpha(\beta a) = (\alpha \cdot \beta)a$.

8) *Умножение на 1.* $\forall a \in V$ выполнено $1 \cdot a = a$.

Тогда мы будем говорить, что V — *линейное пространство* над полем K, а элементы V называть *векторами*.

• Как правило, мы будем обозначать векторы строчными латинскими буквами, а числа из поля — греческими.

• 0-вектор ($0 \in V$) и $0 \in K$ — разные нули, хоть мы и обозначаем их одинаково.

Свойство 1

Ноль-вектор единственен

Доказательство. Пусть есть два ноль-вектора: 0_1 и 0_2. Тогда $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. □

Свойство 2

Обратный вектор $-a$ всегда единственен.

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 — два обратных вектора к $a \in V$. Тогда $a_1 + a = a + a_2 = 0$, откуда
$a_1 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = a_2$. □

Определение

Для $a, b \in V$ определим $a - b := a + (-b)$.

Свойство 3

Для любого $a \in V$ выполнено $0 \cdot a = 0$ (слева 0-число, справа 0-вектор).

Доказательство. $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Вычтем из левой и правой части $0 \cdot a$ и получим то, что нужно. □

Свойство 4

Для любого $a \in V$ выполнено $-a = (-1) \cdot a$.

Доказательство.

• $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$.

• По Свойству 2, обратный вектор единственен. Значит, $-a = (-1) \cdot a$. □

2. Линейное подпространство.

Линейное подпространство

Определение

Если U, V — линейные пространства над полем K, $U \subset V$, причем операции сложения и умножения в U и V одинаковы. Тогда U — линейное подпространство V, а V — линейное надпространство U.

Лемма 1

Пусть V — линейное пространство над полем K, $U \subset V$, причем U замкнуто по сложению векторов и умножению на число (то есть, $\forall \alpha \in K$, $\forall a, b \in U$ выполнено $a + b \in U$ и $\alpha a \in U$). Тогда U — линейное подпространство V (со сложением и умножением из V).

Доказательство. • При выполнении этих условий, $+ : U \times U \to U$ и $\cdot : K \times U \to U$.

• Отметим, что для любого $a \in U$ выполнено $-a \in U$ и $0 = a - a \in U$.

• Теперь несложно понять, U — линейное пространство над K со сложением и умножением из V (6 свойств из определения наследуются из V, существование 0-вектора и обратного элемента обосновано выше). $\square$

(из V наследуются ассоциативность сложения, коммутативность сложения, обе дистрибутивности, ассоциативность умножения, умножение на 1, про 0 и обратный элемент упомянуто выше)