Линал. Глава 0. Билеты 1-3.

Билет 1

Пусть K - множество, элементы которого мы будем называть числами. На множестве определены 2 операции:

$+ : K \times K \to K$ // т.е. берём элементы из K и получаем K

$\cdot : K \times K \to K$

Рассмотрим несколько аксиом:

1) ассоциативность по $+$ — $\forall a,b,c \in K: (a+b)+c = a+(b+c)$
2) коммутативность по $+$ — $\forall a,b \in K: a+b = b+a$
3) нейтральный элемент - ноль по $+$ — $\exists 0 \in K: a+0 = a$
4) обратный элемент по $+$ — $\forall a \in K \exists (-a) \in K: a+(-a) = 0$

// 1-4: абелева (коммутативная группа). Без 2 просто группа. (по +)

5) дистрибутивность — $\forall a,b,c \in K: (a+b)c = ac+bc$ и $a(b+c) = ab+ac$
6) ассоциативность $\cdot$ — $\forall a,b,c \in K: (ab)c = a(bc)$
7) коммутативность $\cdot$ — $\forall a,b \in K: ab = ba$
8) нейтральный элем. по $\cdot$ - единица — $\exists 1 \in K: a \cdot 1 = a$
9) обратный элемент по $\cdot$ — $\forall a \in K \setminus \{0\} \exists (a)^{-1} \in K: a \cdot (a)^{-1} = (a)^{-1} \cdot a = 1$

Если выполнено:
- 1-6: K - кольцо // чётверка целых чисел (aka вещ. гост $\mathbb{H}$)
- 1-7: K - коммутативное кольцо // чётные числа
- 1-6 и 8: K - кольцо с 1 // единичная матрица
- 1-6, 8-9: K - тело // кватернионы
- 1-9: K - поле // $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

*Пример делителя нуля: $\mathbb{Z}/_6$ $\quad 2 \cdot 3 = 0$, 2,3 - делители нуля

Билет 2

Свойства 0: 1) Ноль в кольце K единственен. // св-во 1
Пусть $\exists 0_1, 0_2$. Тогда: $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$.
2) $-0 = 0$. Следует из $0+0=0$ // св-во 7

Свойства 1: 1) В кольце не более одной единицы. // св-во 4
Пусть $\exists 1_1, 1_2$. Тогда: $1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2$.
2) Если K - кольцо с 1, то $1^{-1} = 1$. Следует из $1 \cdot 1 = 1$ // св-во 8

Свойства обратных: 1) для любого $a \in K$ обратный элемент по $+$ единственен.
Пусть $\exists b_1, b_2$ - обратные $+$ элементы для $a \in K$. Тогда: $b_1 = b_1 + 0 = b_1 + (a + b_2) = (b_1 + a) + b_2 = 0 + b_2 = b_2$. // св-во 2
2) $\forall a \in K: -(-a) = a$. // св-во 3
$a = a + ((-a) + (-(-a))) = (a + (-a)) + (-(-a)) = (-(-a))$.
3) Пусть K - кольцо с 1. Тогда для $\forall a \in K$ $\exists$ не более чем один обратный по $\cdot$ // св-во 5
Пусть $\exists b_1, b_2$ - обратные $\cdot$ элементы для $a \in K$. Тогда: $b_1 = b_1 \cdot 1 = b_1 \cdot (a \cdot b_2) = (b_1 \cdot a) \cdot b_2 = 1 \cdot b_2 = b_2$
4) Пусть K - кольцо с 1. Тогда для любого обратимого $a \in K$ верно $(a^{-1})^{-1} = a$. // св-во 6
$a = a \cdot 1 = a \cdot (a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1}) = (a \cdot a^{-1}) \cdot (a^{-1})^{-1} = 1 \cdot (a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}$.

Билет 3

Опр. Пусть $K \subset L$, причём оба они — кольца с одними и теми же операциями $+$ и $\cdot$. Тогда K — подкольцо L, а L — надкольцо K.

Опр. Пусть $K \subset L$, причём оба они — поля с одними и теми же операциями $+$ и $\cdot$. Тогда K — подполе L, а L — надполе K.

Лемма 1

Пусть L — кольцо, $K \subset L$. Если выполнены следующие условия:

1°) Замкнутость по $+$: $\forall a, b \in K: a+b \in K$

2°) Замкнутость по $\cdot$: $\forall a, b \in K: a \cdot b \in K$

3°) Существование обратного элемента по $+$: $\forall a \in K: \exists -a \in K$,

тогда K — кольцо, а значит подкольцо L. Если L коммутативно, то K тоже.

▷ 1° и 2° означают, что и $+$ и $\cdot$ корректно определены в K.
Ассоциативность $+, \cdot$, коммутативность $+$, коммутативность $\cdot$ (если есть) наследуются из L. //ура, принципы ООП
Рассмотрим $\forall a \in K$: тогда $-a \in K$, а значит $a - a = 0 \in K$. ◀

//по сути проверяем аксиомы кольца и принадлежность элементов

Лемма 2 //аналогично лемме 2, но для поля

Пусть L — поле, $K \subset L$. Если выполнены следующие условия:

1°) Замкнутость по $+$: $\forall a, b \in K: a+b \in K$

2°) Замкнутость по $\cdot$: $\forall a, b \in K: a \cdot b \in K$

3°) $\exists$ обратного элемента по $+$: $\forall a \in K\ \exists (-a) \in K$

— как в кольце!

4°) $\exists$ обратного элемента по $\cdot$: $\forall a \in K, a \neq 0: \exists (a)^{-1} \in K$

Тогда K — поле, а значит подполе L.

▷ По лемме 1, K — коммутативное подкольцо L. Проверим $\exists 1$ в K. Рассмотрим $\forall a \in K, a \neq 0$. Тогда $a^{-1} \in K$, значит $a \cdot a^{-1} = 1 \in K$. ◀