Комплексные числа

Определение

Комплексное число - число, состоящее из упорядоченной пары вещественных чисел.

$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Иногда комплексные числа записываются в виде:

$a + bi$, где i = (0, 1)

- Базовые операции
  - Сложение: $(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$
    Легко проверить, записав в виде:
    $a + bi + a' + b' = (a + a') + (b + b')i$
  - Умножение: $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$
    Данная формула аналогично выводится через
    $(a + bi) \cdot (a' + b'i)$

$\mathbb{C}$ – поле

1. Ассоциативность из и коммутативность сложения наследуются из $\mathbb{R}$ (так как складываем по компонентно)
2. Ноль это (0, 0)
3. Обратный элемент к (a, b) это (-a, -b)
4. Коммутативность, дистрибутивность и ассоциативность умножения легко проверяется по определению
5. Единица это 1 := (1, 0)

6. Обратный элемент $z^{-1} := (\frac{a}{N(z)}, \frac{-b}{N(z)})$

Принятые обозначения

- $z = (a, b) \in \mathbb{C}$
- Вещественная часть z - это $Re(Z) := a$
- Мнимая часть z - это $Im(z) := b$
- Комплексное сопряженное: $\bar{z} := (a, -b)$

  $z \cdot \bar{z} = N(z)$
- Норма z - это $N(z) := a^2 + b^2$
- Модуль z - это $|z| := \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

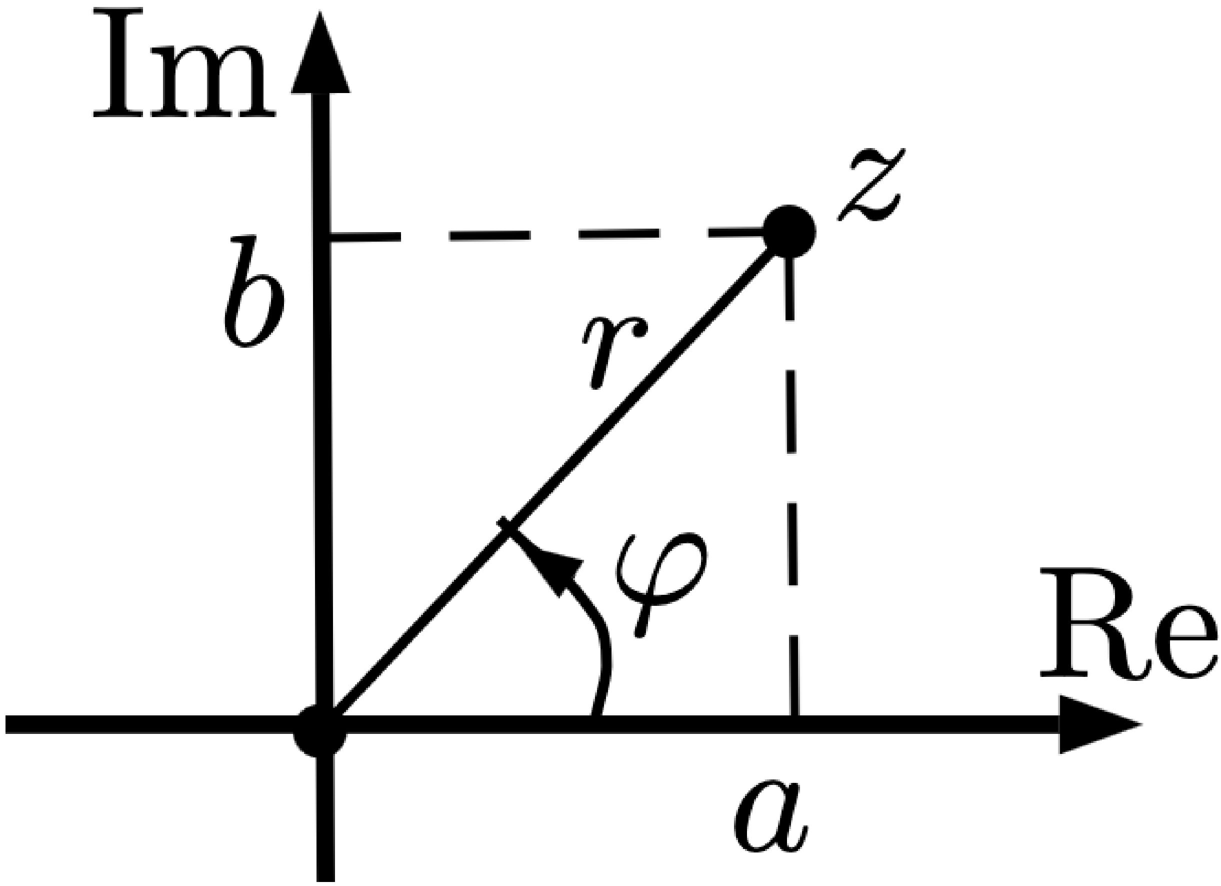
Геометрическая интерпретация $\mathbb{C}$ и тригонометрическая запись

Существует еще один способ задать комплексное число - записать его в геометрическом представлении внутри системы координат $\mathbb{R}^2$.

- $z = (r, \phi)$, где $r = |z|$, $\phi = arg(z)$
- $a = r\cos(\phi),\ b = r\sin(\phi)$
- $z = (r\cos\phi, r\sin\phi)$
- $e^{\alpha i} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

$arg(z)$ - это направленные угол от оси абсцисс до луча Oz против часовой стрелки. Вычисляется с точностью до добавления $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

$arg(z) = atan2(a, b)$



Операции с геометрическим представление комплексного числа

Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Тогда $|xy| = |x| \cdot |y|$ и $arg(xy) = arg(x) + arg(y)$

▼ Пример

$x = (r, \phi)$

$y = (p, \psi)$

$x \cdot y = (rp\cos(\phi + \psi), rp\sin(\phi + \psi) = (rp, \phi + \psi)$

Формула Муавра

Пусть $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Тогда:

1. $|z^n| = |z|^n$
2. $arg(z^n) = n \cdot arg(z)$

Извлечение корня из комплексного числа

Пусть $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \ \wedge a \neq 0$

Решим уравнение $z^n = a$

$z = (p, \phi)$

$a = (r, \psi)$

По формуле Муавра

1. $p = \sqrt[n]{r}$
2. $n\psi = \phi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

   $\psi = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$
3. Считаем для $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

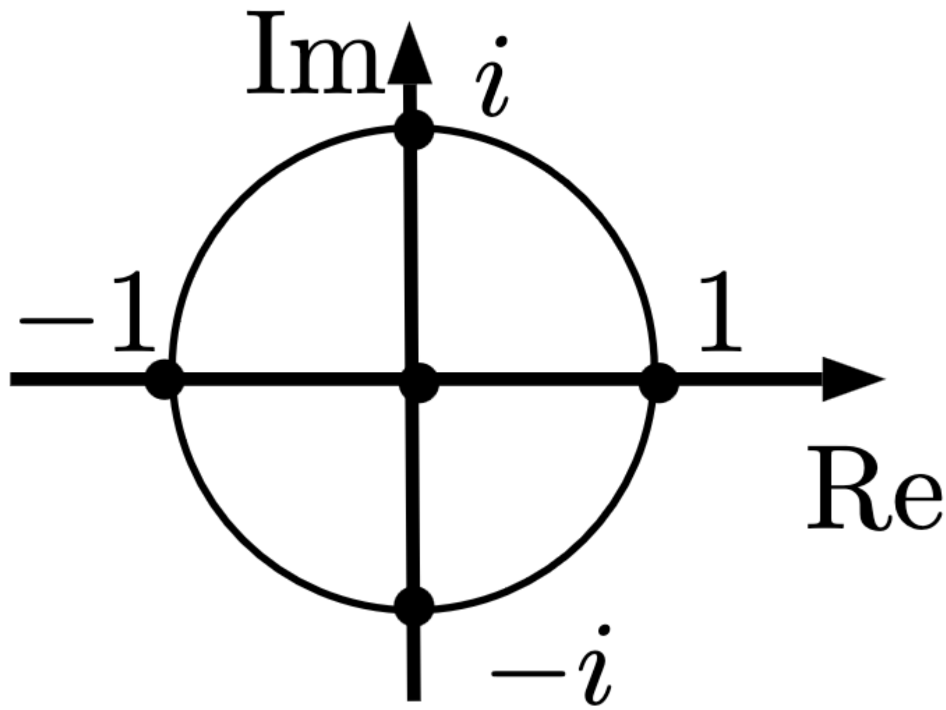
▼ Пример

$z^4 = 1$

a - искомое число ($a = (p, \psi)$)

$p = \sqrt[4]{(1)} = 1$

$\psi = \frac{0}{4} + \frac{2\pi k}{4} = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$


Im
i
−1
1
Re
−i