1 Билет 13

Значение многочлена в точке. Корень многочлена.

Определение

Пусть $f = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in K[t]$.

1) Значение многочлена f в точке $\beta \in K$ — это число $f(\beta) = a_n \beta^n + \dots + a_1 \beta + a_0$.

2) Если $f(\beta) = 0$, то β — корень многочлена f.

Теорема 6(БЕЗУ)

Пусть K — поле, $f \in K[t]$, $\alpha \in K$. Тогда остаток от деления $f(t)$ на $t - \alpha$ равен $f(\alpha)$.

Доказательство. • По теореме о делении с остатком, $f(t) = (t - \alpha)q(t) + r(t)$, где $\deg(r) < \deg(t - \alpha) = 1$. Следовательно, $r(t) = r \in K$ — константа.

• Итак, $f(t) = (t - \alpha)q(t) + r$, где $r \in K$. Подставим α и получим $f(\alpha) = 0q(t) + r = r$, что нам и нужно. □

Следствие 1

Пусть K — поле, $f \in K[t]$, $\alpha \in K$ — корень f. Тогда $f(t) \,\vdots\, t - \alpha$.

Доказательство. Следует из Теоремы 6, так как $f(\alpha) = 0$. □

2 Билет 14

Кратность корня

Определение

Пусть $f \in K[t]$, $\alpha \in K$. Число α является *корнем кратности m* многочлена f, если $f(t) \vdots (t-\alpha)^m$, но $f(t) \not\vdots (t-\alpha)^{m+1}$.

• По Следствию 1 любой корень многочлена $f \in K[t]$ имеет кратность хотя бы 1.

Теорема 7

Пусть K — поле, $f \in K[t]$, $\deg(f) = n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ — все различные корни f, причем корень α_i имеет кратность m_i. Тогда:

1) $f(t) \vdots \prod_{i=1}^{k} (t-\alpha_i)^{m_i}$;

2) $m_1 + \dots + m_k \le n$. *В частности,* $k \le n$.

Доказательство. 1) • Для любых $i \ne j$, очевидно, $((t-\alpha_i)^{m_i}, (t-\alpha_j)^{m_j}) \sim 1$.

• Для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ имеем $f \vdots (t-\alpha_i)^{m_i}$. Теперь пункт 1 следует из Свойства 4 взаимно простых многочленов.

2) Прямое следствие пункта 1. $\square$