Теория графов (паросочетания)

Обозначения

$\boldsymbol{o(G)}$ – количество компонентов связанности с нечетным числом вершин

Множество вершин $U \subset V(G)$ называется **независимым**, если никакие две его вершины не смежны.

$\boldsymbol{\alpha(G)}$ - количество вершин в максимальном независимом множестве графа G.

Множество ребер $M \subset E(G)$ называется **паросочетанием**, если никакие два его ребра не имеют общей вершины.

$\boldsymbol{\alpha'(G)}$ - количество ребер в максимальном паросочетании графа G.

Множество вершин $W \subset V(G)$ **покрывает ребро** $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e.

Множество ребер $F \subset E(G)$ **покрывает вершину** $v \subset V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v.

Совершенное паросочетание – паросочетание, покрывающее все вершины графа.

Вершинное покрытие – множество вершин $W \subset V(G)$, покрывающее все ребра графа.

$\boldsymbol{\beta(G)}$ - минимальное количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G.

Реберное покрытие - множество ребер $F \subset E(G)$, покрывающее все вершины графа G.

$\boldsymbol{\beta'(G)}$ – количество ребер в минимальном реберном покрытии графа G.

Стабильное паросочетание M для множества предпочтений $\leq$, если для любого ребра $f \notin M$ существует такое ребро $e \in M$, что e и f имеют общий конец v и $f \underset{v}{\leq} e$

Замыкание графа: метод Хватала

Рассмотрим произвольный граф G. Если существует две несмежных вершины $a, b \in V(G)$, для которых $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$, то добавим в граф ребро ab. Далее продолжим процесс с полученным графом, и так далее, до тех пор, пока это возможно. Полученный в результате граф назовем **замыканием графа G** и обозначим через $C(G)$.

Гамильтонов цикл в кубе графа

Для графа G и натурального числа d обозначим через G^d граф на вершинах из $V(G)$, в котором вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $\operatorname{dist}_G(x, y) \leq d$

Чередующиеся и дополняющие пути

Пусть M – **паросочетание** в графе G.

1. **M-чередующийся путь** – путь в котором чередуются ребра из M и ребра, не входящие в M.
2. **M-дополняющий путь** – M-дополняющий путь, у которого начало и конец не совпадают с паросочетанием M.

Факторы регулярного графа

k-фактором графа G называет остовный регулярный подграф степени k.

Множество Татта. Дефицит графа

Пусть $S \subset V(G)$ такого, что $o(G - S) > |S|$. Мы будем называть S множеством Татта граф G.

Дефицитом граф G мы будем называть величину $\operatorname{def}(G) := v(G) - 2\alpha'(G)$.

Дефицит графа G – это количество вершин, не покрытых максимальным паросочетанием графа G.

Теоремы и лемы

1. $U \subset V(G)$ – независимое множество, если и только если $V(G) \setminus U$ – вершинное покрытие
2. $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$

Теорема Галлаи

Пусть G – граф с $\delta(G) > 0 \Rightarrow \alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$

Теорема Бержа

Паросочетание M в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда нет M-дополняющий путей.

Теорема Холла (паросочетания в двудольном графе)

- Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ – двудольный граф с долями V_1 и V_2.

В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли V_1, если и только если для любого множества $U \subset V_1$ выполняется $|U| \leq |N_G(U)|$.

Следствие 1 из теоремы Холла

В двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ все вершины V_1 имеют степень не меньше k, а все вершины V_2 имеют степени больше k. Тогда есть паросочетание, покрывающее V_1.

Следствие 2 из теоремы Холла

Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ – регулярный двудольный граф степени k. Тогда G есть объединение k своих совершенных паросочетаний.

Теорема о гареме

В одной стране проживает юноши $\{A_1, ..., A_n\}$. Для каждого $i \in \{1, ..., n\}$, юноша A_i хочет завести гарем из k_i знакомых ему девушек (естественно $k_i \in \mathbb{N}$). Они могут это сделать одновременно тогда и только тогда, когда длю любого множества юношей количество знакомых хотя бы одному из них девушек не меньше, чем сумма желаемых ими размеров гаремов.

Теорема Кенига

Пусть G – двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$

Следствие из теоремы Кенига и Галлаи

Пусть G – двудольный граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha(G) = \beta'(G)$

Stable marriage theorem

Пусть G – двудольный граф. Тогда для любого множества предпочтений $\leq$ в графе G существует стабильное паросочетание.

Теорема Татта

В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \in V(G)$ выполняется условие $o(G - S) \leq |S|$

Теорема Петерсена

Пусть G - связанный кубический граф, в котором не более двух мостов. Тогда в графе G есть совершенное паросочетание.

Факторы регулярного графа

У регулярного графа степени 2k есть 2-фактора (граф связанный).

Теорема Томсона (о почти регулярном факторе почти регулярного графа)

Пусть G - граф, степени всех вершин которого равны k или k + 1, а r < k. Тогда существует остовный граф H графа G, степени всех вершин которого равны либо r, либо r + 1.

Формула Бержа

$\operatorname{def}(G) = \max_{S \subset V(G)}(o(G - S) - |S|)$

Доказательства

Теорема Бержа

$\Rightarrow$ Пусть в графе G существует M-дополняющий путь $S = a_1 a_2 ... a_{2k}$.

Тогда заменим входящие в M ребра на $a_2 a_3, ..., a_{2k-2} a_{2k-1}$ на не входящие в M ребра $a_1 a_2, ..., a_{2k-1} a_{2k}$, и тем самым получим большее паросочетание. Противоречие.

$\Leftarrow$ Пусть M - не максимальное паросочетание, тогда рассмотрим максимальное паросочетание $M', |M'| > |M|$.

Пусть $N = M \triangle M', H = G(N)$. Для любой вершины $v \in V(H)$ мы имеем $d_H(v) \in \{1, 2\}$, следовательно, H - объединение нескольких путей и циклов.

В каждой из этих путей и циклов ребра паросочетаний M И M' чередуются. Так как ребер из M' в $E(H)$ больше, хотя бы одна компонента P графа H - путь нечетной длины, в котором больше ребер из M', Легко понять, что P - это M-дополняющий путь. Противоречие.

Связность (продолжение)

Алгоритм разделения связного графа на блоки

- Выберем точку сочленения a и разрежем по ней G – заменим граф G на полученные при этом графы $G_1, G_2, ..., G_n$.
- Каждый следующим шагом мы будем брать один из имеющихся графов, выбирать в нем точку сочленения и разрезать по ней.
- И так далее, пока хотя бы один из полученных графов имеет точку сочленения.

Теорема 2

В результате описанного выше алгоритма разрезания графа по точкам сочленения вне зависимости от порядка действий получатся блоки графа G.

Рекурсивный алгоритм построения дерева блоков и точек сочленения

- Выберем точку сочленения a и разрежем по ней G – заменим граф G на полученные при этом графы $G_1, ..., G_k$
- В каждом из графов $G_1, ..., G_k$ построим дерево блоков и точек сочленения. Пусть, скажем, $B(G_i) = T_i$.
- В графе G_i по лемме 4 вершина a не является точкой сочленения.
- Значит, по лемме 1 в G_i есть единственный блок B_i, содержащий a.
- Построим дерево $B(G)$, присоединим в точке a деревья $T_1, ..., T_n$ (дерево T_i присоединяем ребрами aB_i).

Теорема 3

В результате описанного выше алгоритма будет построено дерево блоков и точек сочленения графа G.

Теорема 4

Пусть G – двусвязный граф, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, v(G) = n_1 + n_2$. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $v(G_1) = n_1, v(G_2) = n_2$ и оба графа G_1 и G_2 связные.

Разделяющие множества

Пусть $X, Y \subset V(G), R \subset V(G) \cup E(G)$.

1. Назовем множество R **разделяющим**, если граф G - R несвязен.
2. Пусть $X \not\subset R, Y \not\subset R$. Будем говорить, что R **разделяет** множества X и Y (или что, то же самое, **отделяет** множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_X \in X$ и $v_Y \in Y$ не лежат в одном компоненте связности графа $G - R$.

- Любой неполный граф имеет **вершинное** разделяющее множество.
- Любой граф более чем из одной вершины имеет **реберное** разделяющие множество.
- Граф G называется k-связным, если $v(G) \geq k + 1$ и минимальное разделяющие множество в графе G содержат хотя бы k вершин.

Вершинная связность

1. Пусть $x, y \in V(G)$ – несмежные вершины. Обозначим через $\kappa_G(x, y)$ размер минимального разделяющего множество $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет x и y. Если x и y смежны, то положим $\kappa_G(x, y) = +\infty$. Назовем $\kappa_G(x, y)$ **связностью** вершин x и y.
2. Пусть $X, Y \in V(G)$ – несмежные вершины. Обозначим через $\kappa_G(X, Y)$ размер минимального разделяющего множество $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет X и Y. Если такого множества нет, то положим $\kappa_G(x, y) = +\infty$.

Теорема Менгера

Пусть $X, Y \in V(G), \kappa_G(X, Y) \geq k, |X| \geq k, |Y| \geq k$. Тогда в графе G существуют k непересекающихся XY-путей.

Следствие 1

Пусть вершины $x, y \in V(G)$ несмежны, $\kappa_G(x, y) \geq k$. Тогда существует k независимых путей x из в y.

Следствие 2

Пусть $x \in V(G), Y \in V(G), x \notin Y, k = \min(|Y|, \kappa_G(x, Y))$. Тогда существуют k путей от x до различных вершин из множества Y, не имеющих общих внутренних вершин.

Теорема 6 (Уитни)

Пусть G – k-связный граф. Тогда для любых двух вершин $x, y \in V(G)$ существует k независимых xy-путей.

Теорема 7 (Дирака)

Пусть $k \geq 2$. В k-связном графе для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.