Билет 13, Билет 14

Типы гомоморфизмов. Свойства

G, H - группы, $f: G \to H$ - гомоморфизм групп.

Мономорфизм: f - инъекция
Эпиморфизм: f - сюръекция $(Im(f) = H)$
Изоморфизм: f - биекция

из 1 св-ва гомоморфизма $f: G \to H: f(e_G) = e_H$

Лемма 10

Пусть $f: G \to H$ - гомоморфизм групп. Тогда f - мономорфизм, когда $\boxed{Ker(f) = \{e_G\}}$

▷ Если f - мономорфизм, то f - инъекция. Пусть $a \in Ker(f)$. Из $f(a) = e_H = f(e_G)$ следует, что $a = e_G$ (т.к. f - инъекция). Пусть $f(a) = f(b)$. Тогда $f(a \cdot b^{-1}) = f(a) \cdot f(b^{-1}) = f(a) \cdot (f(b))^{-1} = e_H$. Значит $a \cdot b^{-1} \in Ker(f) = \{e_G\}$, откуда $a \cdot b^{-1} = e_G$ и $a = b$. Таким образом, f - инъекция, а значит, мономорфизм. ◀

Лемма 11

Пусть $f: G \to H$ - изоморфизм групп. Тогда и $f^{-1}: H \to G$ - изоморфизм групп.

▷ (!): f^{-1} - гомоморфизм (из биекции). Рассмотрим $\forall a, b \in H$. Так как f - гомоморфизм, $f(f^{-1}(ab)) = ab = f(f^{-1}(a)) \cdot f(f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(a) \cdot f^{-1}(b))$. Из того, что f - биекция, следует, что $f^{-1}(ab) = f^{-1}(a) \cdot f^{-1}(b)$. А это значит, что f^{-1} - гомоморфизм.

Опр. Если $\exists$ изоморфизм групп $f: G \to H$, то говорят, что эти группы изоморфны. $G \simeq H$.

Теорема 4 (об изоморфных группах)

$\simeq$ - отношение эквивалентности на множестве всех групп.

▷ Рефлексивность: $id: G \to G$ ($id(x) = x \ \forall x \in G$) - очевидно, изоморфизм.

Симметричность: Лемма 11 (про обратное отображение)

Транзитивность: Пусть F, G, H - группы, $F \simeq G$, $G \simeq H$. Тогда $\exists$ изоморфизмы $\varphi: F \to G$ и $\psi: G \to H$. Докажем, что $\psi\varphi: F \to H$ является изоморфизмом ($(\psi\varphi)(a) := \psi(\varphi(a))$).

Композиция биекций ψ и φ - биекция. Проверим гомоморфизм: $\psi\varphi(ab) = \psi(\varphi(ab)) = \psi(\varphi(a) \cdot \varphi(b)) = \psi(\varphi(a)) \cdot \psi(\varphi(b)) = (\psi\varphi)(a)(\psi\varphi)(b)$ ◀

$\Rightarrow$ гомоморфизм.