Поле частных

- Пусть K — коммутативное кольцо без делителей ноля (то есть, если $a, b \in K$ и $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$).
- Обозначим через M множество всех дробей $\frac{a}{b}$, где $a, b \in K$, $b \neq 0$.
- Пусть $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc$.

Определение

Поле частных F коммутативного кольца K без делителей ноля состоит из классов эквивалентности дробей. Мы будем обозначать класс эквивалентности дроби $\frac{a}{b}$ в точности так же, как саму эту дробь.

Сложение: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$.

Умножение: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$.

Свойство 4

$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$.

Доказательство. $\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cd}{d^2} = \frac{a+c}{d}$ по Свойству 3.

Определение по Вики:
Поле частных (называемое также полем отношений) в общей алгебре определяется для области целостности R как наименьшее поле[1][2], содержащее R.
Поле частных для R может обозначаться Frac(R) или Quot(R).

Короче, поле частных, это множество всех возможных классов эквивалентности какого-то бинарного отношения над Областью целостности
(ассоциативное коммутативное кольцо без делителей нуля)

Примеры:
Классическим примером области целостности является кольцо целых чисел;
наименьшее расширение его до поля даёт поле рациональных чисел Q.

Пусть K — поле. Тогда кольцо многочленов K[X] с коэффициентами из этого поля всегда является областью целостности.
Поле частных для K[X] обозначается K(X) и называется полем рациональных функций.

Fun Fact: Поле частных для любого поля изоморфно исходному полю.

Лемма 13

Сложение и умножение в поле частных определены корректно, то есть, результат не зависит от замены дроби на эквивалентную

Доказательство. • Достаточно доказать, что при замене первой дроби $\frac{a}{b}$ на эквивалентную дробь $\frac{a'}{b'}$ результат сложения и умножения не изменится. Отметим, что $ab' = a'b$.

• Сложение (мы можем сократить на d^2, так как $d \neq 0$):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \sim \frac{a'}{b'} + \frac{c}{d} = \frac{a'd + b'c}{b'd} \iff$$
$$(ad+bc)b'd = (a'd+b'c)bd \iff adb'd+bcb'd = a'dbd+b'cbd$$
$$\iff ab'd^2 = a'bd^2 \iff ab' = a'b.$$

• Умножение. Если $c = 0$, утверждение следует из Свойства 1. Иначе можно сокращать на cd:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \sim \frac{a'}{b'}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a'c}{b'd} \iff acb'd = a'cbd \iff ab' = a'b.$$

Теорема 3

Поле частных F коммутативного кольца K без делителей ноля — поле.

Доказательство. Коммутативность сложения и умножения очевидно следуют из аналогичных свойств в K.

Ассоциативность сложения.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}.$$

В каждом из слагаемых три сомножителя, один числитель и два знаменателя других дробей. Легко понять, что при другом порядке сложения будет то же самое.

Ноль. Дроби вида $\frac{0}{b}$ $(b \in K,\ b \neq 0)$ образуют класс эквивалентности по Свойству 1. Несложно проверить, что это класс и будет 0 в поле частных: $\frac{0}{b}+\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}=\frac{c}{d}$.

Обратный элемент по $+$. Положим $-\left(\frac{a}{b}\right):=\frac{-a}{b}$.

Проверка: $\frac{-a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{0}{b^2}=0$.

Ассоциативность умножения.

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

Легко понять, что при другом порядке умножения будет то же самое.

Дистрибутивность.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ade+bce}{bdf}=\frac{ade}{bdf}+\frac{bce}{bdf}=\frac{ae}{bf}+\frac{ce}{df}$$

(последний переход верен по Свойству 3).

Единица. В качестве 1 подойдет класс эквивалентности дробей вида $\frac{a}{a}$, где $a \neq 0$.

Обратный элемент по умножению. Для дроби $\frac{a}{b}$, где $a \neq 0$ положим $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}:=\frac{b}{a}$.

Проверка: $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1$ по определению. $\square$

Вложение кольца в поле частных

Лемма 14

Пусть K — коммутативное кольцо с 1 без делителей 0, а F — его поле частных. Тогда отображение $\varphi : K \to F$, заданное формулой $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ — мономорфизм колец.

Доказательство. • Проверим, что φ — гомоморфизм колец. Пусть $a, b \in K$.

- $\varphi(a) + \varphi(b) = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a\cdot 1 + b\cdot 1}{1\cdot 1} = \frac{a+b}{1} = \varphi(a+b)$.
- $\varphi(a)\varphi(b) = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1\cdot 1} = \varphi(ab)$.

• Пусть $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Тогда $0 = \varphi(a) = \frac{a}{1} \iff a = 0$. $\square$