Билет 3

$K[t]$ – кольцо многочленов над кольцом K.

Теорема 1 (о вложении K в $K[t]$)

] K - коммутативное кольцо. Тогда $K[t]$ - тоже коммутативное кольцо. Если при этом K - кольцо с 1, то $K[t]$ - тоже с 1.

▷ Будем доказывать выполнение аксиом кольца K в $K[t]$:

- — Ассоциативность и коммутативность сложения
  следует из ассоц. и коммутат. сложения в K, т.к. сложение покоэффициентное. //определили сложение покомпонентно
- — ∃ нейтрального элемента - нуля
  многочлен 0 будет нолём в $K[t]$ //определили $0:=(0,..0,.)$
- — Обратный элемент по сложению
  для $f=(a_0,\dots,a_n,\dots)$ положим $-f:=(-a_0,\dots,-a_n,\dots)$
- — Коммутативность умножения
  ] $f=(a_0,\dots,a_n,\dots)$, $g=(b_0,\dots,b_n,\dots)$, $fg=(d_0,\dots,d_n,\dots)$, $gf=(d'_0,\dots,d'_n,\dots)$.
  Тогда $d_n=\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} b_j a_{n-j} = d'_n$. //определили $d_n=\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$
- — Дистрибутивность
  ] $h=(c_0,\dots,c_n,\dots)$, $(f+g)h=(d_0,\dots,d_n,\dots)$, $fh=(p_0,\dots,p_n,\dots)$ и $gh=(q_0,\dots,q_n,\dots)$
  Тогда $d_n=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)c_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}(a_i c_{n-i})+(\sum_{i=0}^{n} b_i c_{n-i})=p_n+q_n$, а это коэф. многочлена $fh+gh$
  //Воспользовались определением произведений многочленов: $d_n=a_i b_{n-i}$, где $a_i\in f$, $b_{n-i}\in g$. Но у нас произведение $(f+g)h$! Тогда возьмём i-тый член $(f+g)$ (он по формуле как a_i+b_i определён) и умножим на $n-i$-тый член h - это c_{n-i}. А потом по св-ву сумм $\Sigma(a+b)c = \Sigma ac + \Sigma bc$ и подставим значения, определённые для f и g.

— Ассоциативность умножения
] $fg=(d_0,\dots,d_n,\dots)$ и $(fg)h=(p_0,\dots,p_n,\dots)$. Тогда $p_n=\sum_{k=0}^{n} d_k c_{n-k} =$
$h=(c_0,\dots,c_n,\dots)$

$=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)c_{n-k} = \left(\sum_{\substack{i,j,l\in\mathbb{N}_0,\\ i+j+l=n}} a_i b_j c_l\right)$. При другом порядке скобок получится то же самое

т.к. fg, $(a_0,..a_n)(b_0,..b_n..)$?

— Единица
Если ∃ $1\in K$, то несложно проверить, что $1:=(1,0,\dots0,\dots)$ – единица в $K[t]$ //т.к. a_0 элемент, там переменной нет ◭

Лемма 1 //о мономорфизме колец
∃ K — коммутативное кольцо, $\varphi: K \to K[t]$ задано формулой $\varphi(c) := (c, 0, 0 \ldots)$. Тогда φ - мономорфизм колец.

▷ ∃ $a, b \in K$. Тогда $\varphi(a+b) = (a+b, 0, \ldots 0) = (a, 0, \ldots 0) + (b, 0, \ldots 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$ //у гомоморфизма $f(a+b) = f(a) + f(b)$

$\varphi(ab) = (ab, 0, \ldots 0)$, $\varphi(a)\varphi(b) = (a, 0, \ldots 0) \cdot (b, 0, \ldots 0) =: (c_0, c_1, \ldots)$. Тогда $c_0 = a_0 b_0$, а при $n > 0$ имеем $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = 0$, т.к. каждое слагаемое равно нулю. Значит $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ //второе св-во гомоморфизма

Таким образом, φ - гомоморфизм.

∃ $a \in Ker(\varphi)$, тогда $(a, 0, \ldots) = \varphi(a) = (0, 0, \ldots)$, значит $a = 0$. ◁ //проверяем ядро, так как по лемме 4 у гомоморф. мономорф. про ядро

Опр.
Многочлен вида $(a, 0, \ldots 0)$ называют константой. Будем отождествлять такой многочлен с числом $a \in K$ и считать, что $K \subset K[t]$

• Умножение на константу: $a \in K$, $f = (b_0, b_1, \ldots)$: $(a, 0, 0 \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) = (ab_0, ab_1, \ldots)$, обозначается af.

Лемма 2 //об обратимых элементах кольца $K[t]$
Если K - поле, то обратимые элементы $K[t]$ — это в точности ненулевые константы.

▷ ∃ $f, g \in K[t]$ $fg = 1$ (типа на обратимый домножили). Тогда $0 = deg(1) = deg(f) + deg(g)$, откуда следует $deg(f) = deg(g) = 0$, т.е f и g — ненулевые константы (степень константы) //из св-ва 1 $deg(fg) \leq deg(f) + deg(g)$

Опр ∃ $f, g \in K[t]$, K-поле. Будем говорить, что f и g ассоциированы, если $f = cg$, где $c \in K$, $c \neq 0$ ($f \sim g$ - обозначение)

Лемма 3 ассоциированность — отношение эквивалентности

▷ Рефлексивность: $f = 1 \cdot f$, значит $f \sim f$ //выше определили 1
Симметричность: ∃ $f \sim g$, тогда ∃ $a \in K$, $a \neq 0$, что $f = ag$. Тогда $g = a^{-1} f$, значит $g \sim f$, а значит $g \sim f$ //выше определили обратный по.
Транзитивность: ∃ $f \sim g$, $g \sim h$, тогда ∃ $a, b \in K$ такие, что $f = ag$, $g = bh$, тогда $f = ag = (ab)h$, а значит $f \sim h$. ◁

• если $f, g \in K[t]$ и $f \sim g$, то $deg(f) = deg(g)$
• $-f = (-1) f \Rightarrow (-f) \sim f$.

Билет 5

<u>Опр.</u> Пусть k - поле, $f, g \in k[t]$, $g \neq 0$. Говорят, что f делится на g ($f \vdots g$), если $\exists\, h \in k[t] : f = gh$.

<u>Свойства:</u>

- 1) если $f \vdots g$ и $g \vdots h$, то $f \vdots h$ // транзитивность

  $\triangleright$ $f = pg$, $g = qh$, $p, q \in k[t] \Rightarrow f = (pq)h$ $\blacktriangleleft$

- 2) Пусть $f, g \vdots h$, а $p, q \in k[t]$, $\Rightarrow$ $fp + gq \vdots h$ // типа-дистрибутивная

  $\triangleright$ откуда следует $fp + gq = (ap + bq)h$ $\blacktriangleleft$

- 3) Пусть $f, g \in k[t]$, $f \neq 0$, $f \vdots g$. Тогда $\deg(f) \geq \deg(g)$

  $\triangleright$ Тогда $f = gh$, где $h \in k[t]$, причём понятно, что $h \neq 0$. Следовательно, $\deg(f) = \deg(g) + \deg(h) \geq \deg(g)$.

- 4) Пусть $f, g \in k[t]$, $f, g \neq 0$, $f \vdots g$ и $\deg(f) = \deg(g)$. Тогда $f \sim g$ // о степенях, примерно как в главе 2 // ассоциированы

  $\triangleright$ $f = gh$, где $h \in k[t]$ и $\deg(g) = \deg(f) = \deg(g) + \deg(h)$ $\blacktriangleleft$

  $\Rightarrow \deg(h) = 0$, значит $h \in k$, $h \neq 0$, то есть $f \sim g$.

- 5) Пусть $f, g \in k[t]$, $f, g \neq 0$ и $f \vdots g$, $g \vdots f$. Тогда $f \sim g$. // ассоциир. - отнош. эквивалент

  $\triangleright$ $\deg(f) \geq \deg(g)$ и $\deg(g) \geq \deg(f) \Rightarrow$ $\deg(f) = \deg(g)$, по свойству 4 $f \sim g$.