4. Вложение вещественных чисел в комплексные.

5. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из 1

Лемма 1

Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, заданное формулой $f(a) = (a, 0)$ — мономорфизм.

Доказательство. • Очевидно, f — инъекция.

• Нужно проверить, что это гомоморфизм. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$.

• $f(a+b) = (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$.

• $f(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a)f(b)$. $\square$

Комментарии: логично, что инъекция, разным действительным ставятся в соответствие разные комплексные. Мономорфизм – это тип гомоморфизма. Поэтому проверим, собственно, что это гомоморфизм. Гомоморфизм это вот:

• Пусть K, L — кольца. Отображение $f : K \to L$ называется гомоморфизмом, если $\forall\, a, b \in K$:

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \text{и} \quad f(ab) = f(a)f(b).$$

Ядро гомоморфизма f — это $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in K \ : \ f(x) = 0\}$.

Образ гомоморфизма f — это $\mathrm{Im}(f) = \{y \in L \ : \ \exists x \in K : f(x) = y\}$.

Проверили, да, действительно, гомоморфизм. А инъекция в гомоморфизме – это мономорфизм.

• Очевидно, $\mathrm{Im}(f) \simeq \mathbb{R}$. Таким образом, $\mathbb{C}$ имеет подполе $\mathrm{Im}(f)$, изоморфное $\mathbb{R}$. В дальнейшем мы будем отождествлять каждое вещественное число a с комплексным $(a, 0)$.

Im(f) – эта запись означает образ гомоморфизма f

То есть $Im(f) = \{y \in C\colon\ \exists x \in R\colon f(x) = y\}$

Подполе C, изоморфное R, это как раз числа вида (a, 0)

• Теперь можно сказать, что для любого $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ выполнено:

$z \cdot \overline{z} = N(z) = N(\overline{z})$ (все это равно по $a^2 + b^2$) и

$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2\mathrm{Re}(\overline{z})$ (все это равно по $2a$).

• Сопряженные комдплексные числа $z, \overline{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — корни квадратного уравнения с вещественными коэффициентами $t^2 - 2\mathrm{Re}(z) \cdot t + N(z) = 0$.

$z = (a, b)$

$\bar{z} = (a, -b)$

$z\bar{z} = (a, b)(a, -b) = a^2 + b^2$, да, это норма z

- Комплексное с опряжение: $\overline{z} := (a, -b)$.
- Норма z — это $N(z) := a^2 + b^2$.

Со сложением понятно, действительная часть у z и сопряжённого одна и та же ☺

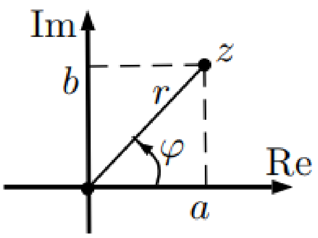
Последнее – привет теорема Виета

Корни из 1

- Отдельно рассмотрим корни n степени из 1 — решения уравнения $z^n = 1$.
- Из сказанного выше следует, что модуль всех корней из 1 равен 1. Так как $\arg(1) = 0$, все различные аргументы считаются по формуле

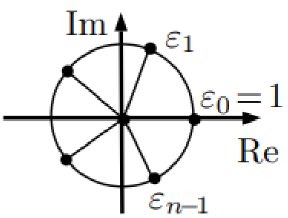
$$\psi_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}. \qquad (1)$$

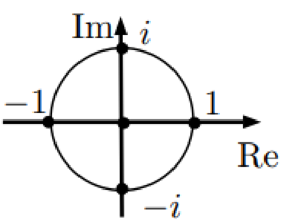
Комментарии:



arg – это угол φ. Поэтому arg(1) = 0; то есть ψ должно делиться на 2π.

- Обозначим их $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ (корень ε_k имеет аргумент ψ_k).
- Корни из 1 степени n лежат на окружности радиуса 1 в вершинах правильного n-угольника, одна из которых — в 1.
- По формуле Муавра $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Значит, все корни из 1 — это степени ε_1.





- На рисунке справа изображены корни степени 4 из 1. Один из них — это $i = (0, 1)$ $(\arg(i) = \frac{\pi}{2})$.
- Остальные корни из 1 степени 4 — это $-1 = i^2$, $-i = i^3$ и $1 = i^4$.
- Комплексное число $z = (a, b)$ может быть записано в виде $z = a + bi$, который многим из вас более привычен.
- Еще одно часто встречающееся обозначение — комплексное число z с $|z| = 1$ и $\arg(z) = \alpha$ часто записывают в виде $z = e^{\alpha i}$.
- Таким образом, $e^{\alpha i} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.