3. Линейная комбинация, линейная оболочка. Порождающая система векторов.

Линейная комбинация, линейная оболочка

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем K.

1) Пусть $x_1, \dots, x_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ —*линейная комбинация* векторов $x_1, \dots, x_n$. Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если не все $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ нули.

2) Пусть $M \subset V$. *Линейная оболочка* множества M — это множество $\mathrm{Lin}(M)$ всех линейных комбинаций векторов из M (с любым количеством векторов).

Свойство 1

Если $M \subset V$, то и $\mathrm{Lin}(M) \subset V$.

Доказательство. Несложно проверить, что линейная комбинация векторов линейного пространства V всегда лежит в V.

Действительно: операции + и * определены так, что $x_i + x_j$ => M и k* x_j => M
Тогда все $a_i x_i$ принадлежат M ∈ V, а их сумма тем более.

Алгебра. Глава 5. Линейные

Условия:
a + b ∈ M
k * a ∈ M

Свойство 2

Для любого $M \subset V$, $\mathrm{Lin}(M)$ — линейное подпространство V.

Доказательство. • Достаточно проверить замкнутость по сложению и умножению.

• Пусть $x_1, \dots, x_n \in M$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда

$$\beta(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = (\beta\alpha_1)x_1 + \dots + (\beta\alpha_n)x_n \in \mathrm{Lin}(M).$$

• Пусть, кроме того, $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$. Тогда

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n \in \mathrm{Lin}(M).$$

(Здесь достаточно проверить сложение линейных комбинаций одних и тех же векторов, так как в линейную комбинацию можно добавить отсутствующие в ней вектора с нулевыми коэффициентами.) □

4. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов и их свойства.

Определение

1) Пусть V — линейное пространство над полем K и $M \subset V$. Если $\mathrm{Lin}(M) = V$, то M — *порождающая система векторов* пространства V.

2) Пространство V называется *конечно порожденным*, если оно имеет конечную порождающую систему векторов.

• В основном, мы будем изучать конечно порожденные линейные пространства.

каждый вектор из V можно выразить через мн-во всех линейных комбинаций векторов
пример: R – поле, V = {ka}, k ∈ R
$15a = 5a + 10a = a_1 + \ldots + a_{15}$

базис – единственное представление

- P^n — пространство всех многочленов степени не выше n. Размерность этого пространства $n+1$. Многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют в нём базис.
- Пусть X — произвольное линейное пространство и пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ некоторая линейно-независимая система векторов. Тогда линейная оболочка, натянутая на эту систему есть конечномерное пространство.

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем K.

• Вектора $x_1, \ldots, x_n \in V$ называются *линейно зависимыми* (коротко: ЛЗ), если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная 0. (То есть, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ не все равны 0, а $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.) Если такой комбинации нет, то вектора $x_1, \ldots, x_n \in V$ называются *линейно независимыми* (коротко: ЛНЗ).

• Бесконечное множество векторов называется *линейно зависимым*, если из них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную 0 и *линейно независимым*, если нельзя.

Пример ЛЗ системы векторов:

1). $k = 2,\ n = 3;\ a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow 2\cdot a_1 + 1\cdot a_2 = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \theta$ при том, что

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 2^2 + 1^2 \neq 0$. Следовательно, система векторов $\{a_1, a_2\}$ линейно зависима.

2). $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix}7\\-3\\2010\end{pmatrix}$.

Очевидно, что $7\cdot e_1 + (-3)\cdot e_2 + 2010\cdot e_3 + (-1)\cdot a = \theta$. Следовательно, система векторов $\{e_1, e_2, e_3, a\}$ линейно зависима. Здесь специальное «устройство» векторов e_1, e_2, e_3 позволило нам быстро угадать нетривиальную линейную комбинацию векторов системы, равную нуль-вектору.

Пример ЛНЗ: {a} ∈ V, где a – ненулевой (очевидно, никогда не получим 0)

Свойства ЛЗ и ЛНЗ множеств векторов

Свойство 0

Пусть V — линейное пространство над полем K, $0 \in M \subset V$. Тогда множество векторов M ЛЗ.

Доказательство. Есть нетривиальная линейная комбинация $1 \cdot 0 = 0$. □

Свойство 1

Если множество векторов ЛЗ, то любое его надмножество тоже ЛЗ.

Доказательство. Можно не использовать добавленные вектора в линейных комбинациях. □

Добавленные из надмножества

Свойство 2

Если множество векторов ЛНЗ, то любое его подмножество тоже ЛНЗ.

Доказательство. Убрав некоторые вектора из множества, мы не добавим новых линейных комбинаций. □

Алгебра. Глава 5. Линейные пространства

Д. В. Карпов

Свойство 3

Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛЗ, то среди них есть вектор, который является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. • Пусть $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, НУО $\alpha_n \neq 0$.

• Тогда

$$x_n = \frac{-\alpha_1}{\alpha_n} x_1 + \dots + \frac{-\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \in \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$ □

Свойство 4

Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛНЗ и $y \notin \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n)$, то $x_1, \dots, x_n, y$ — ЛНЗ.

Доказательство. • Пусть $x_1, \dots, x_n, y$ — ЛЗ. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta y = 0$.

• Если $\beta = 0$, то не все $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ равны 0 и $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, а значит, $x_1, \dots, x_n$ ЛЗ, противоречие.

• Значит, $\beta \neq 0$. Тогда

$$y = \frac{-\alpha_1}{\beta} x_1 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\beta} x_n \in \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n),$$

противоречие. □

Алгебра. Глава 5. Линейные пространства

Д. В. Карпов

Свойство 5

Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛНЗ, а $y \in V$ таков, что $x_1, \dots, x_n, y$ — ЛЗ, то $y \in \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство. Прямое следствие Свойства 4. □