1 Билет 23

Интерполяция по Ньютону

• Будем по индукции строить такой многочлен $g_k(t)$, что $g_k(x_i) = y_i$ при $i \in \{0, \dots, k\}$ и $\deg(g_k) \leq k$.

• База $k = 0$: подойдет $g_0(t) = y_0$.

• Переход $k \to k+1$. Пусть построен многочлен g_k. Будем искать g_{k+1} в виде
$g_{k+1}(t) = a_k(t - x_0) \dots (t - x_k) + g_k(t)$.

• Тогда $g_{k+1}(x_i) = y_i$ при $i \in \{0, \dots, k\}$ и $\deg(g_{k+1}) \leq \max(k+1, \deg(g_k)) = k+1$.

• Остается найти коэффициент a_k. Для этого подставим x_{k+1}:

$$y_{k+1} = g_{k+1}(x_{k+1}) = a_k(x_{k+1} - x_0) \dots (x_{k+1} - x_k) + g_k(x_{k+1}) \iff a_k = \frac{y_{k+1} - g_k(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_0) \dots (x_{k+1} - x_k)}.$$

2 Билет 24

Поле рациональных функций

• Пусть K — поле. Очевидно, в кольце многочленов $K[t]$ нет делителей ноля (если $fg = 0$ в $K[t]$, то $f = 0$ или $g = 0$). Поэтому, следующее определение корректно.

Определение

Поле рациональных функций $K(t)$ — это поле частных кольца многочленов $K[t]$.

• Элементы $K(t)$ — дробно-рациональные функции вида $\frac{f(t)}{g(t)}$, где $f, g \in K[t]$, $g \neq 0$ (точнее говоря, классы эквивалентности таких функций). Мы будем называть такие функции просто дробями.

Определение

Правильная дробь в $K(t)$ — это дробь вида $\frac{f(t)}{g(t)}$, где $\deg(f) < \deg(g)$.

Свойство 1

Если дробь $\frac{f}{g} \in K(t)$ правильная и $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f}{g}$, то дробь $\frac{f_1}{g_1}$ Тоже правильная.

Доказательство. • Если один из многочленов f и f_1 равен 0, то другой тоже. В этом случае утверждение очевидно.
• Далее пусть $f \neq 0$ и $f_1 \neq 0$.
• $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f}{g} \iff f_1 g = g_1 f$, откуда следует, что $\deg(f_1) + \deg(g) = \deg(f_1 g) = \deg(f g_1) = \deg(f) + \deg(g_1)$.
• Так как $0 \leq \deg(f) < \deg(g)$, отсюда следует, что $\deg(f_1) < \deg(g_1)$, то есть, $\frac{f_1}{g_1}$ — правильная дробь. □

Свойство 2

Если дробь $\frac{f}{g} \in K(t)$ правильная и $c \in K$, то и $\frac{cf}{g}$ — правильная дробь.

Доказательство. Очевидно ввиду $\deg(cf) \leq \deg(f)$. □

Свойство 3

Если дроби $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in K(t)$ правильные, то и $\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2}$ — правильная дробь.

Доказательство. Тогда $\deg(f_1) < \deg(g_1)$ и $\deg(f_2) < \deg(g_2)$, откуда
$\deg(f_1 f_2) = \deg(f_1) + \deg(f_2) < \deg(g_1) + \deg(g_2) = \deg(g_1 g_2)$, а значит, дробь $\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}$ — правильная. □

Свойство 4

Если дроби $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in K(t)$ правильные, то и $\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}$ — правильная дробь.

Доказательство. $\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 + g_1 f_2}{g_1 g_2}$. Нужно проверить, что $\deg(f_1 g_2 + g_1 f_2) < \deg(g_1 g_2)$:

$$\deg(f_1 g_2 + g_1 f_2) \leq \max(\deg(f_1 g_2), \deg(g_1 f_2)) = \max(\deg(f_1) + \deg(g_2), \deg(g_1) + \deg(f_2)) < \deg(g_1) + \deg(g_2) = \deg(g_1 g_2),$$

так как $\deg(f_1) < \deg(g_1)$ и $\deg(f_2) < \deg(g_2)$. □