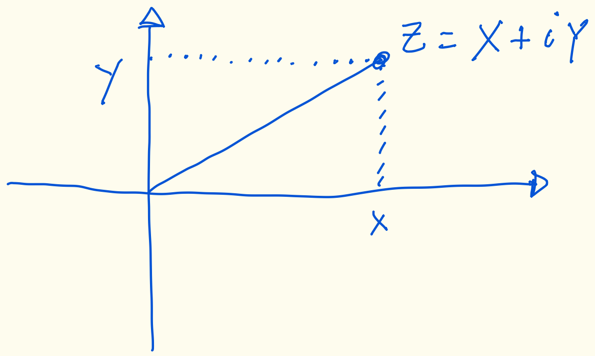
LEZIONE 7 21/10/25 Martedì

NUMERI COMPLESSI

RIASSUNTO



PIANO DI GAUSS

$$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

i = UNITÀ IMMAGINARIA

$$i^2 = -1$$

OVVERO "$i = \sqrt{-1}$".

$x = Re(z)$ PARTE REALE

$y = Im(z)$ PARTE IMMAGINARIA

$$(1-i) + (\sqrt{2} + 2i) = (1+\sqrt{2}) + i(-1+2)$$
$$= (1+\sqrt{2}) + i$$

$$(1-i)\cdot(\sqrt{2}+2i) = \sqrt{2} + 2i - \sqrt{2}\,i - i(2i) =$$
$$= \sqrt{2} + (2-\sqrt{2})i - 2i^2$$
$$= \sqrt{2} + (2-\sqrt{2})i + 2$$
$$= \underbrace{2+\sqrt{2}}_{\text{PARTE REALE}} + \underbrace{(2-\sqrt{2})}_{\text{PARTE IMMAG.}}\,i$$

POTENZE DI i

$i^2 = -1$

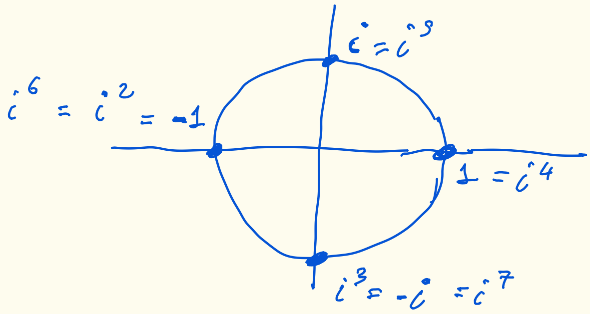
$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\, i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^2 = -1$

SI RIPETE

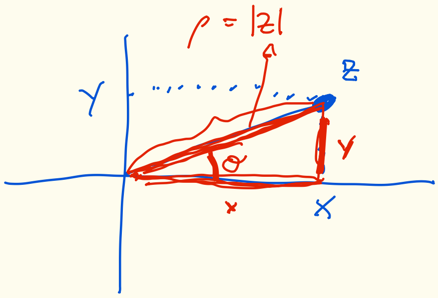


FORMA TRIGONOMETRICA

$z = x + i y$

MODULO DI z É

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad \text{REALE}$$



$|z|$ = LUNGHEZZA DEL SEGMENTO.

DI SOLITO $|z|$ SI INDICA CON $\rho = |z|$.

θ = angolo formato dal SEGMENTO E ASSE x

É DETTO <u>ARGOMENTO</u> DI z

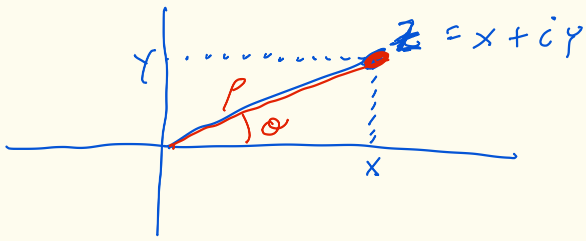
COME SI CALCOLA θ?

$$\begin{cases} \cos\theta = x/\rho \\ \sin\theta = y/\rho \end{cases} \rightarrow \text{DA QUI SI RICAVA } \theta.$$

<u>NOTA</u>) θ É DEFINITO A MENO DI MULTIPLI DI 2π

QUANDO θ É IN $[0, 2\pi)$ O $[-\pi, \pi)$ SI DICE CHE θ É L'ARGOMENTO PRINCIPALE

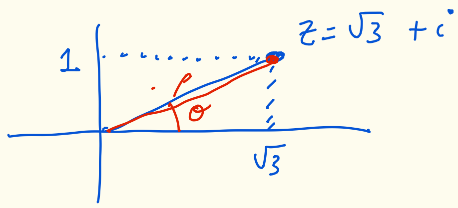
UN PUNTO NEL PIANO È DESCRITTO TRAMITE LE PROIEZIONI SUGLI ASSI COORDINATI O TRAMITE MODULO E ARGOMENTO



$$z = x + iy = \rho\cos\theta + i(\rho\sin\theta) =$$
$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ESEMPIO

$$z = \sqrt{3} + i$$



$x = \sqrt{3}$

$y = 1$

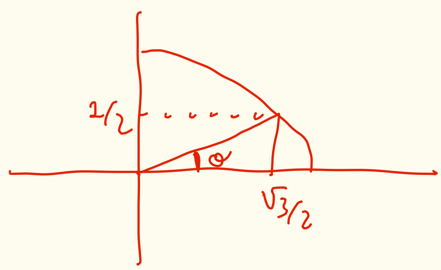
$$\rho = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

TROVIAMO ORA θ L'ARGOMENTO

DOBBIAMO RISOLVERE

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = y/\rho = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

NOTO CHE θ È NEL I° QUADRANTE



$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

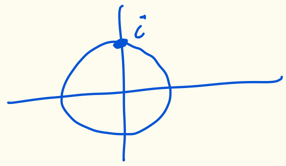
FORMA ALGEBRICA

$\downarrow$

$$z = \sqrt{3} + i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))$$

ESERCIZIO

$z = i$



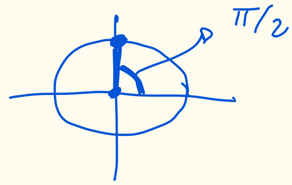
$x = 0$

$y = 1$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$\begin{cases} \cos\theta = x/\rho = 0 \\ \sin\theta = y/\rho = 1/1 = 1 \end{cases}$$

$\theta = \pi/2$



$$z = i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) =$$
$$= 1\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right)$$

PER CASA

$z = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

FORMULE DI DE MOIVRE

LA FORMA TRIGONOMETRICA È UTILE PER CALCOLARE PRODOTTI E QUOZIENTI

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

CALCOLIAMO

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= \rho_1\rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\cos\theta_1 \sin\theta_2 + i\sin\theta_1 \cos\theta_2 +$$

$$+ \underbrace{i^2}_{=-1} \sin\theta_1 \sin\theta_2) =$$

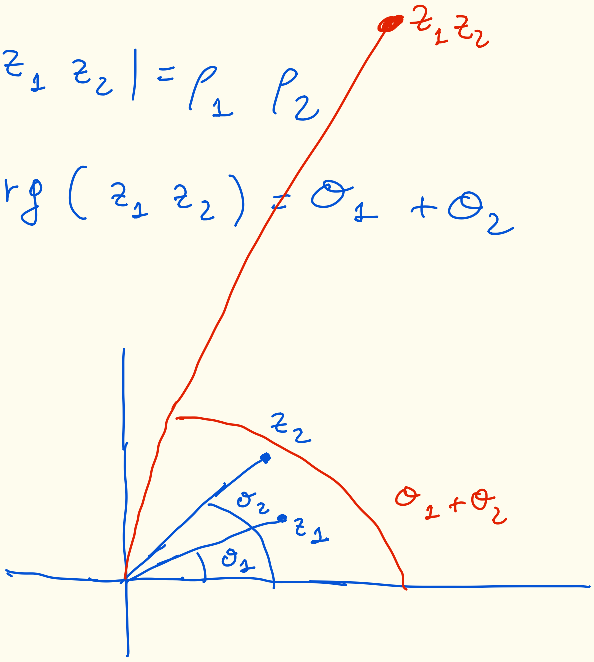
$$= \rho_1 \rho_2 \left(\underbrace{\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2}_{} + i \left(\underbrace{\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2}_{} \right) \right)$$

$$= \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right)$$

NOTIAMO CHE

$$|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$$



LA FORMULA SI GENERALIZZA A N NUMERI COMPLESSI, CIOÉ SE

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

$$\vdots$$

$$z_N = \rho_N (\cos\theta_N + i \sin\theta_N)$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_N = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_N \left(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_N) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_N) \right)$$

DA QUI SI RICAVA LA FORMULA DELLE POTENZE

CHE È IL CASO

$$z_1 = z_2 = \dots = z_N = z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\boxed{z^N = \rho^N \left(\cos(N\theta) + i\sin(N\theta)\right)}$$

FORMULA DI DE MOIVRE

ESEMPIO

$(1+i)^7$ ← CALCOLARE QUESTO

$z = 1+i$ VOGLIO CALCOLARE z^7

USIAMO LA FORMA TRIGONOM.

MODULO E ARGOMENTO DI $z = 1+i$

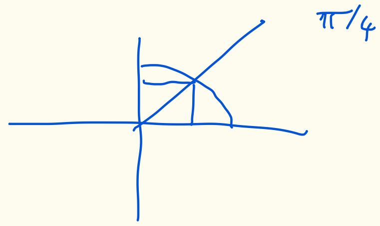
$x = 1$
$y = 1$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = x/\rho = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \\ \sin\theta = y/\rho = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

θ IN I° QUADRANTE

$$\theta = \pi/4 = 45°$$



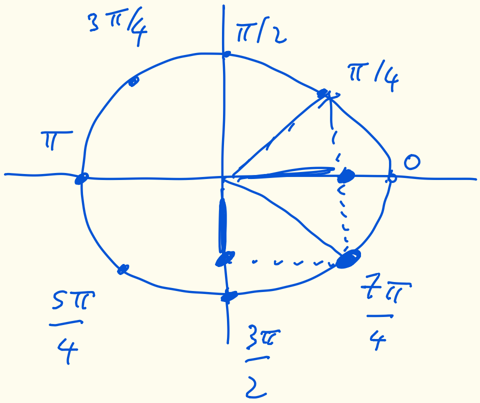
$$z = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right)$$

$$z^7 = \rho^7\left(\cos(7\theta) + i\sin(7\theta)\right)$$

DE MOIVRE:

$$z^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos\left(7\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(7\cdot\pi/4\right)\right)$$

$$= 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) =$$



$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 8 - 8i$$

FORMULA DI DE MOIVRE PER I QUOZIENTI

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \overset{-1}{i^2}\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 \cancel{- i\cos\theta_2\sin\theta_2} \cancel{+ i\sin\theta_2\cos\theta_2} - i^2\sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\boxed{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2} + i\boxed{(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}}{\underbrace{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}_{=1}}$$

FORMULA DI TRIGONOMETRIA

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DEGLI ANGOLI (PROSTAFERESI)

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\boxed{\cos(\theta_1 - \theta_2)} + i\boxed{\sin(\theta_1 - \theta_2)}\right)$$

NOTIAMO CHE:

$$\rho = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$$

RADICI N-ESIME

LA RADICE N-ESIMA DI UN NUMERO COMPLESSO W È UN COMPLESSO Z TALE CHE $z^N = w$.

SIA $w = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right) \neq 0$

W AMMETTE ESATTAMENTE N RADICI N-ESIME.

COME SI CALCOLANO?

QUESTE SONO:

$$z_k = r^{1/N}\left(\cos(\theta_k) + i\sin(\theta_k)\right)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{N}$$

← RADICI N-ESIME DI W.

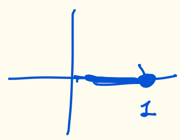
ESEMPIO

CALCOLIAMO LE RADICI CUBICHE DI $W = 1$

CIOÈ $\sqrt[3]{1}$ INTESE COME RADICI COMPLESSE.

$W = 1$ IN FORMA TRIGONOM.

$w = 1 = \cos(0) + i\sin(0)$



$r = 1$ ↑ MODULO DI W

$\varphi = 0$ ↑ ARGOMENTO DI W

HO 3 RADICI CUBICHE DI $W = 1$

$z_k = 1^{1/3}\left(\cos\theta_k + i\sin\theta_k\right)$ $k = 0, 1, 2$

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{3}$$

$$\theta_0 = \frac{0}{3} = 0$$

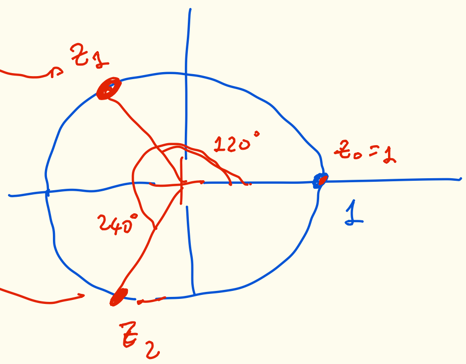
$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3} \qquad \theta_2 = \frac{4\pi}{3}$$

LE RADICI SONO

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= \cos(0) + i\sin(0) = 1 + 0i = 1 \\ z_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ z_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}}$$

$$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

$$\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$



ESERCIZIO PER CASA: CALCOLARE RADICI CUBICHE DI -1