Architettura degli elaboratori

Lezione 4 - teoria

Prof.ssa Valentina Ciriani
Università degli Studi di Milano
www.di.unimi.it/ciriani

Contenuto

1. Forme canoniche [MKM 2.3]
2. Mappe di Karnaugh [MKM 2.4, 2.5]

-MKM = M. Morris Mano, C.R. Kime, T. Martin, Reti logiche, Pearson
-PH = D.A. Patterson, J.L. Hennessy, Struttura e Progetto dei Calcolatori, Zanichelli

2

Forme canoniche

- Ci sono molti modi per rappresentare una funzione booleana in forma algebrica. Le forme canoniche sono:
  - particolari forme algebriche
  - che facilitano la semplificazione delle espressioni
  - e producono spesso circuiti semplici
- Due tipi di forme canoniche:
  1. **SOP** (Sum Of Products) è una somma di prodotti (termini) di letterali Es $X\overline{Y}+\overline{X}+YZ$
  2. **POS** (Product Of Sums) è un prodotto di somme di letterali. Es $(X+Y+Z)\overline{Z}(Y+\overline{Z})$

3

Mintermini e maxtermini

- Si consideri una funzione booleana di n variabili
- Un **mintermine** è un prodotto delle n variabili dove ciascuna variabile appare con o senza negazione
- Un **maxtermine** è una somma delle n variabili dove ciascuna variabile appare con o senza negazione
- Ci sono 2^n possibili mintermini e 2^n possibili maxtermini

Esempio: si consideri una funzione con variabili X Y Z:

XYZ $X\overline{Y}Z$ $\overline{X}Y\overline{Z}$ sono mintermini

$X+Y+Z$ $X+\overline{Y}+\overline{Z}$ $X+\overline{Y}+Z$ sono maxtermini

4

Esempio mintermini

X	Y	Z	Product Term	Symbol	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m_1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_4	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	XYZ	m_7	0	0	0	0	0	0	0	1

5

Esempio maxtermini

X	Y	Z	Sum Term	Symbol	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	0	0	$X+Y+Z$	M_0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	$X+Y+\overline{Z}$	M_1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	$X+\overline{Y}+Z$	M_2	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_3	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	$\overline{X}+Y+Z$	M_4	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	M_5	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	M_6	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_7	1	1	1	1	1	1	1	0

Si nota che $M_i = \overline{m_i}$

6

Somma di mintermini

- Ogni funzione booleana può essere scritta come somma di mintermini
- Es $F = \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ = m_0+m_2+m_5+m_7 = \Sigma\, m(0,2,5,7)$
- Es $\overline{F} = \overline{X}\overline{Y}Z + \overline{X}YZ + X\overline{Y}\overline{Z} + XY\overline{Z} = m_1+m_3+m_4+m_6 = \Sigma\, m(1,3,4,6)$

(a) X	Y	Z	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

7

Prodotto di maxtermini

- Es $\overline{F} = m_1+m_3+m_4+m_6 = \Sigma\, m(1,3,4,6)$

  $F = \overline{m_1+m_3+m_4+m_6} = \overline{m}_1 \cdot \overline{m}_3 \cdot \overline{m}_4 \cdot \overline{m}_6 = M_1 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 = \Pi\, M(1,3,4,6)$

(a) X	Y	Z	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

8

Proprietà dei mintermini

- Date n variabili booleane ci sono 2^n mintermini a cui sono attribuiti i numeri da 0 a 2^n -1
- Qualunque funzione booleana può essere espressa come somma di mintermini
- Il complemento di una funzione può essere espressa come somma dei mintermini che non sono nella funzione stessa
- Una funzione con 2^n mintermini è la funzione che vale sempre 1
- Una funzione che non ha mintermini è la funzione che vale sempre 0

9

Somma di mintermini

- Se ho una funzione espressa con una forma algebrica posso trasformarla in somma di mintermini scrivendo la sua tabella di verità Es: $E = \overline{Y} + \overline{X}\overline{Z}$
- $E = \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} + \overline{X}\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + X\overline{Y}Z = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5$

X	Y	Z	E
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

10

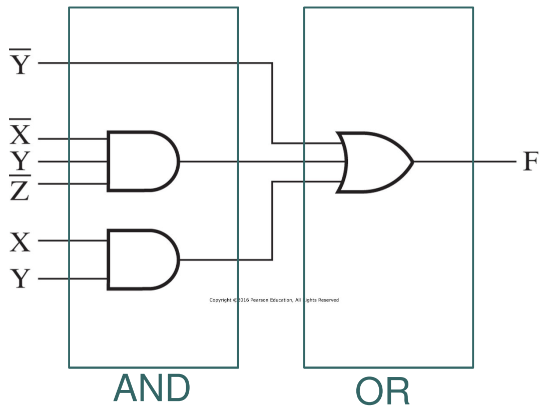
Somma di prodotti SOP

- La somma di mintermini
  - è una forma canonica
  - è unica (deriva dalla tabella di verità)
  - è una somma di prodotti di letterali (SOP)
  - spesso si può semplificare per ottenere una SOP più compatta (con meno termini o meno letterali)
- Non tutte le somme di prodotti sono somme di mintermini (Esempio: funzione E vista prima)
- Es: $X\overline{Y}+YZ$ è una SOP ma non è una somma di mintermini

11

Somma di prodotti SOP

- Le SOP sono dette anche forme a due livelli perché c'è un livello di OR e un livello di AND



12

Semplificazione

- La complessità di un circuito corrisponde alla complessità dell'espressione algebrica
- La tabella di verità è unica
- Le espressioni corrispondenti possono essere molte:
  - necessità di trovare la migliore
  - decidere quale metrica utilizzare per valutare quale è la migliore (numero prodotti (termini), numero letterali?)
- Esempio: $H = \bar{A}D+B = \bar{A}\bar{B}D+B$
  - La prima: 2 prodotti e 3 letterali
  - La seconda: 2 prodotti e 4 letterali

13

Semplificazione

Trovare la migliore espressione algebrica per una funzione booleana (rispetto ad una data metrica)

Soluzioni:

1. Semplificare con le equivalenze:
   - non è sempre facile fare una serie di trasformazione che portino ad una forma più piccola
2. Semplificare con le mappe di Karnaugh (K-mappe):
   - metodo che però può essere usato fino a 4 variabili
   - con più variabili è praticamente inutilizzabile
3. Sintesi logica (algoritmi di minimizzazione)
   - Algoritmi esatti (Quine-McCluskey), lenti ma ottimi
   - Algoritmi euristici, più veloci ma non garantiscono di trovare l'ottimo

14

Mappe di Karnaugh

Mappa di Karnaugh della funzione f:

- è una matrice le cui celle rappresentano i mintermini di f
- è equivalente ad una tabella di verità
- è quindi una rappresentazione unica

15

Mappe di Karnaugh: proprietà

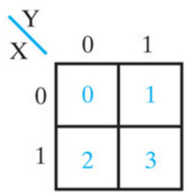
Le mappe di Kanaugh si basano sulla proprietà che

- celle vicine corrispondono a mintermini che hanno un solo letterale diverso
- Esempio: $\bar{A}BCD$ e $ABCD$ sono in celle vicine
- Due mintermini in celle vicine si possono unire in un solo prodotto (che contiene solo i letterali uguali)
- Esempio
  $\bar{A}BCD + ABCD$
  $= (\bar{A}+A)BCD$ [distributiva]
  $= 1BCD$ [complementazione]
  $= BCD$ [elemento neutro]

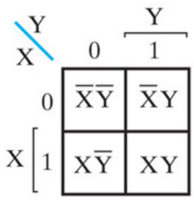
16

K-Mappe a 2 variabili

X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	3



(a)



(b)

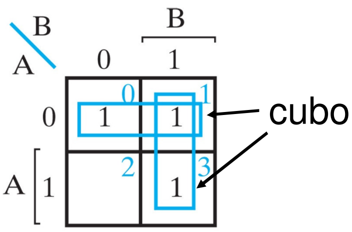
$\overline{X}Y+XY=Y$

17

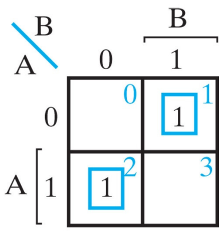
Esempio K-mappa a 2 variabili

A	B	F_a
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

A	B	F_b
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**



(a)



(b)

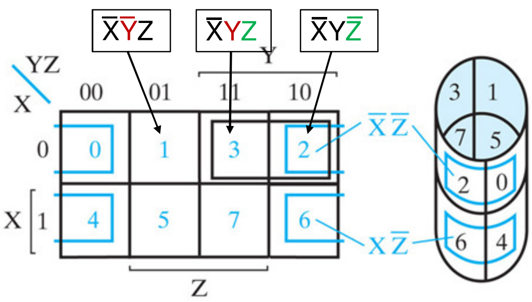
$F_a = \overline{A}\overline{B}+\overline{A}B+AB = \overline{A} + B$

$F_b = \overline{A}B + A\overline{B}$

18

K-Mappe a 3 variabili

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

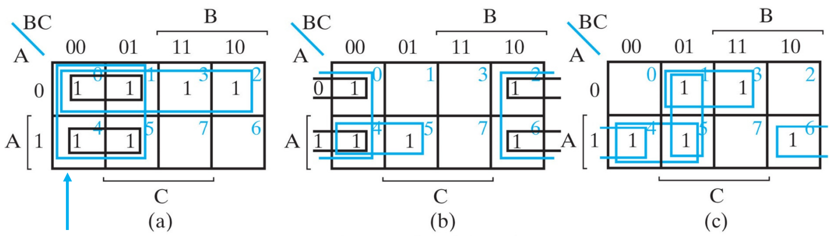


Esempio K-mappa a 3 variabili

A	B	C	F_a
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**0**
1	1	1	**0**

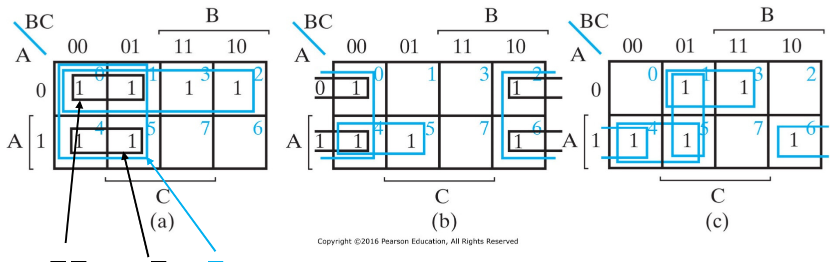
A	B	C	F_b
0	0	0	**1**
0	0	1	**0**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

A	B	C	F_c
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**



$\bar{A}\bar{B} + A\bar{B} = \bar{B}$

Esempio K-mappa a 3 variabili



$\bar{A}\bar{B} + A\bar{B} = \bar{B}$

$F_a = \bar{A} + \bar{B}$

$\bar{A}\bar{C} + A\bar{C} = \bar{C}$

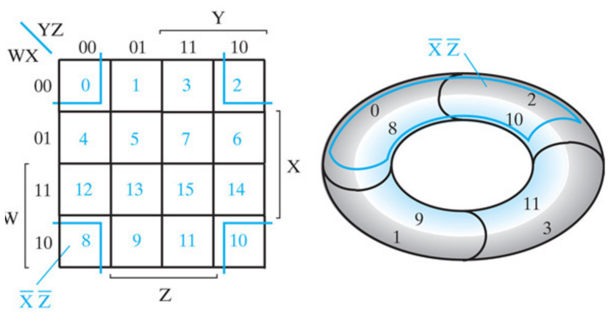
$F_b = \bar{C} + A\bar{B}$

$F_c = \bar{A}C + A\bar{C} + A\bar{B} + \bar{B}C$
$= \bar{A}C + A\bar{C} + A\bar{B}$
$= \bar{A}C + A\bar{C} + \bar{B}C$

21

K-Mappe a 4 variabili

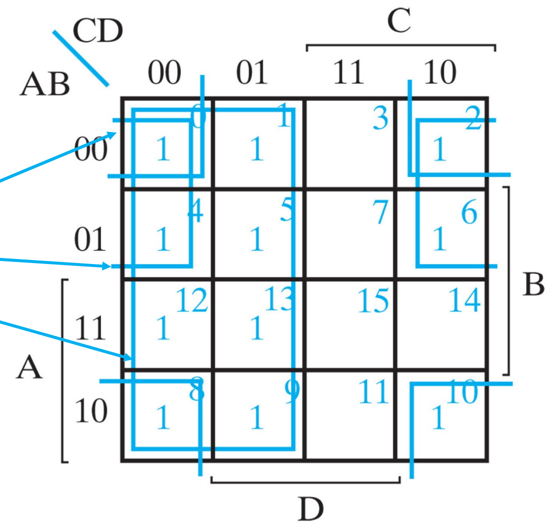
W	X	Y	Z	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	0	12
1	1	0	1	13
1	1	1	0	14
1	1	1	1	15



22

Esempio K-Mappe a 4 variabili

F(A,B,C,D)=
Σ m(0,1,2,4,5,6,8,
9,10,12,13)
= $\bar{C} + \bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{D}$



23

Esercizi da fare a casa 1

1. Costruire una SOP, una POS e la K-mappa per le funzioni:
   1. F= $\overline{XY} + \bar{Z}$
   2. F= $X(Y+\bar{Z})$
2. Convertire le seguenti espressioni in SOP e POS:
   1. $A(\bar{B}C + B)+\bar{B}$
   2. $B\bar{A} + C$

24

Esercizi da fare a casa 2

3. Data le seguente tabella di verità scrivere la K-mappa e le due forme canoniche (somma di mintermini e prodotto di maxtermini)

A	B	C	F
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

Esercizi da fare a casa 3

4. Scrivere la K-mappa per la funzione F(A,B,C)= Σ m(0,1,4,5,7) e individuare i cubi nella mappa
5. Scrivere la K-mappa per la funzione F(A,B,C,D)= Σ m(0,3,4,5,7,8, 9,10,13,15) e individuare i cubi nella mappa
6. Scrivere la K-mappa per la funzione F(A,B,C,D)= Σ m(1,2,3,4,9,11,12,15) e individuare i cubi nella mappa

Architettura degli elaboratori

Lezione 4 - esercizi

Prof.ssa Valentina Ciriani
Università degli Studi di Milano
www.di.unimi.it/ciriani

Esercizio 1.1

Costruire la tabella di verità e il circuito logico per la funzione:

$$F= \overline{XY} + \overline{Z}$$

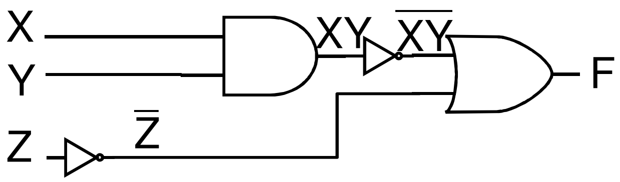
X	Y	Z	XY	$\overline{XY}$	$\overline{Z}$	$\overline{XY}+\overline{Z}$
0	0	0	0	1	1	**1**
0	0	1	0	1	0	**1**
0	1	0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	**1**
1	0	0	0	1	1	**1**
1	0	1	0	1	0	**1**
1	1	0	1	0	1	**1**
1	1	1	1	0	0	**0**

28

Esercizio 1.1

Costruire la tabella di verità e il circuito logico per la funzione:

$$F = \overline{XY} + \overline{Z}$$



Esercizio 1.2

Costruire la tabella di verità e il circuito logico per la funzione:

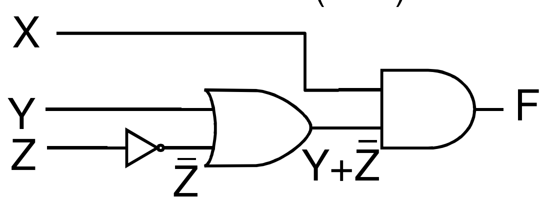
$$F = X(Y+\overline{Z})$$

X	Y	Z	$\overline{Z}$	$Y+\overline{Z}$	$X(Y+\overline{Z})$
0	0	0	1	1	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	1	**0**
0	1	1	0	1	**0**
1	0	0	1	1	**1**
1	0	1	0	0	**0**
1	1	0	1	1	**1**
1	1	1	0	1	**1**

Esercizio 1.2

Costruire la tabella di verità e il circuito logico per la funzione:

$$F= X(Y+\bar{Z})$$



31

Esercizio 2.1

Semplificare la seguente espressione booleana al minimo numero di letterali

$\bar{A}\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{B}C$

$= \bar{A}\bar{C} + C(\bar{A}B+\bar{B}) =$	[distributiva]
$= \bar{A}\bar{C} + C(\bar{A}+\bar{B})(B+\bar{B})=$	[distributiva $XY+Z=(X+Z)(Y+Z)$]
$= \bar{A}\bar{C} + C(\bar{A}+\bar{B})1 =$	[complementaz.]
$= \bar{A}\bar{C} + C(\bar{A}+\bar{B}) =$	[elem. neutro]
$= \bar{A}\bar{C} + \bar{A}C + \bar{B}C =$	[distributiva]
$= \bar{A}(\bar{C}+C) + \bar{B}C =$	[distributiva]
$= \bar{A}1 + \bar{B}C =$	[complementaz.]
$= \bar{A} + \bar{B}C =$	[elem. neutro]

32

Esercizio 2.1

Altra soluzione

$\overline{A}\,\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{B}C$

$= \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{B}C + \overline{B}C =$ [idempotenza]

$= \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}BC + 1\overline{B}C + \overline{B}C =$ [elem. neutro]

$= \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}BC + (\overline{A}+A)\overline{B}C + \overline{B}C =$ [inverso]

$= \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}C + \overline{B}C =$ [distributiva]

$= \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}C(B+\overline{B}) + A\overline{B}C + \overline{B}C =$ [distributiva]

$= \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}C1 + A\overline{B}C + \overline{B}C =$ [inverso.]

$= \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}C + A\overline{B}C + \overline{B}C =$ [elem. neutro]

$= \overline{A}(\overline{C}+C) + A\overline{B}C + \overline{B}C =$ [distributiva]

$= \overline{A}1 + A\overline{B}C + \overline{B}C =$ [inverso]

$= \overline{A} + A\overline{B}C + \overline{B}C =$ [elem. neutro]

$= \overline{A} + A\overline{B}C + \overline{B}C1 =$ [elem. neutro]

$= \overline{A} + \overline{B}C(A+1) =$ [distributiva]

$= \overline{A} + \overline{B}C1 =$ [elem. nullo]

$= \overline{A} + \overline{B}C$ [elem. neutro]

33

Esercizio 2.2

Semplificare la seguente espressione booleana

$\overline{(A+B+C)} \cdot \overline{ABC}$

$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cdot \overline{ABC}$ [De Morgan]

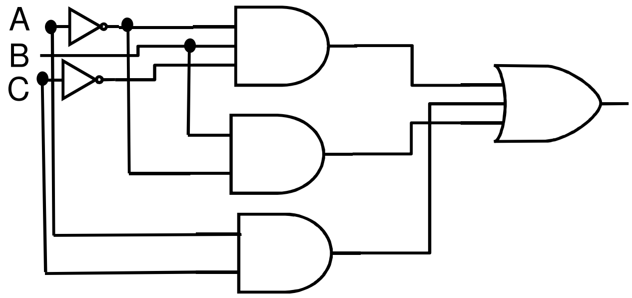
$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cdot (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$ [De Morgan]

$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ [assorbimento]

34

Esercizio 3.1

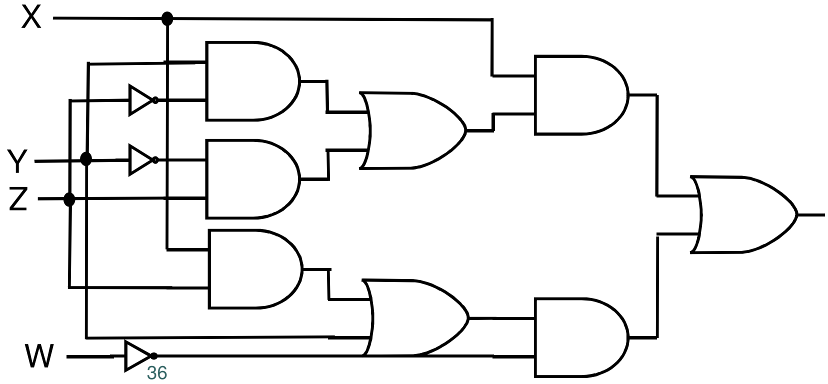
Disegnare il circuito logico per le seguenti espressioni booleane. Il diagramma deve corrispondere esattamente all'equazione assumendo che i complementi degli ingressi non siano disponibili: $\overline{A}B\overline{C} + B\overline{A} + AC$



35

Esercizio 3.2

Disegnare il circuito logico per le seguenti espressioni booleane. Il diagramma deve corrispondere esattamente all'equazione assumendo che i complementi degli ingressi non siano disponibili: $X(Y\overline{Z}+\overline{Y}Z) + \overline{W}(Y+XZ)$



36

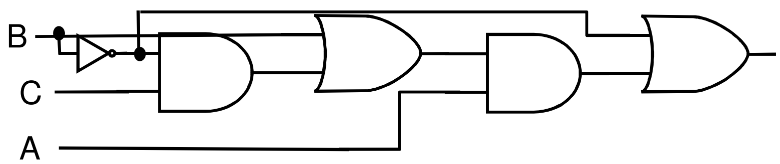
Esercizio 4.1

Scrivere la tabella di verità e il circuito logico per
$A(\overline{B}C + B)+\overline{B}$

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{B}C$	$\overline{B}C+B$	$A(\overline{B}C+B)$	$A(\overline{B}C+B)+\overline{B}$
0	0	0	1	0	0	0	**1**
0	0	1	1	1	1	0	**1**
0	1	0	0	0	1	0	**0**
0	1	1	0	0	1	0	**0**
1	0	0	1	0	0	0	**1**
1	0	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	0	0	1	1	**1**
1	1	1	0	0	1	1	**1**

Esercizio 4.1

$A(\overline{B}C + B)+\overline{B}$



Esercizio 4.2

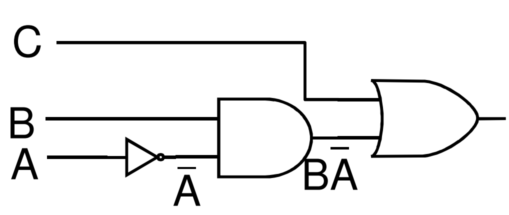
Scrivere la tabella di verità e il circuito logico per
$B\overline{A} + C$

A	B	C	$\overline{A}$	$B\overline{A}$	$B\overline{A}+C$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

39

Esercizio 4.2

$B\overline{A} + C$



40