Architettura degli elaboratori

Lezione 5 - teoria

Prof.ssa Valentina Ciriani
Università degli Studi di Milano
www.di.unimi.it/ciriani

1

Contenuto

1. Semplificazione con Mappe di Karnaugh [MKM 2.5]
2. OR esclusivo [MKM 2.6]

-MKM = M. Morris Mano, C.R. Kime, T. Martin, Reti logiche, Pearson
-PH = D.A. Patterson, J.L. Hennessy, Struttura e Progetto dei Calcolatori, Zanichelli

2

2

Funzioni booleane on e off set

- L'onset di F è composto da tutti gli input in cui la funzione vale 1 ovvero $F^1 = \{x \mid F(x) = 1\}$
- L' offset di F è composto da tutti gli input in cui la funzione vale 0 ovvero $F^0 = \{x \mid F(x) = 0\}$

onset $F^1(x) = 1 \leftrightarrow F(x) = 1$
offset $F^0(x) = 1 \leftrightarrow F(x) = 0$

- se $F^1 = \{0,1\}^n$, allora $F = 1$ ovvero è sempre vero
- se $F^0 = \{0,1\}^n$ ($F^1 = \varnothing$), F è sempre falso

Spesso si usa F per intendere F^1 (F^0 sono tutti i punti che non sono in F^1, quindi F^0 si può anche non dare)

3

3

ON- set e OFF-set: esempio

F — AB \ CD	00	01	11	10
00	1			
01			1	
11	1			1
10	1		1	1

F^1 = {0000, 0111, 1100, 1110, 1000, 1011, 1010}
F^0 = {0001, 0011, 0010, 0100, 0101, 0110, 1101, 1111, 1001}

4

4

Implicanti

Un prodotto P è un **implicante** per una funzione F se F vale 1 in tutti i mintermini di cui è composto P

F: AB \ CD	00	01	11	10
00	1			
01			1	
11	1		1	1
10	1		1	1

$A\overline{C}\overline{D}$ e $A\overline{B}C$ sono implicanti di F

$\overline{A}BC$ non è un implicante di F

5

5

Implicanti primi

Un prodotto P è un **implicante primo** per una funzione F se cancellando un qualsiasi letterale da P si ottiene un prodotto che non sia implicante di F

F: AB \ CD	00	01	11	10
00	1			
01				1
11	1		1	1
10	1		1	1

L'implicante AC di F è primo perché C e A non sono implicanti di F

L'implicante $BC\overline{D}$ di F è primo perché $C\overline{D}$, $B\overline{D}$ e BC non sono implicanti di F

L'implicante $A\overline{B}C$ di F non è primo perché AC è un implicante di F

$AC = A\overline{B}C + ABC$

6

6

Implicanti primi essenziali

P è un **implicante primo essenziale** per F se esiste un mintermine di F contenuto in P che non è contenuto in nessuno degli altri implicanti primi di F

F AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01				1
11			1	1
10	1	1	1	1

Gli implicanti primi $\overline{B}\,\overline{C}$, AC e $B C \overline{D}$ sono essenziali

L'implicante primo $A\overline{B}$ non è essenziale

7

Proprietà

F AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	1
11			1	1
10	1	1	1	1

E' sempre possibile costruire una SOP di F sommando tutti gli **implicanti primi** di F

- Non è sempre il modo migliore perché alcuni implicanti primi non sono necessari

Gli **implicanti primi essenziali** di F sono sempre parte di una SOP di F

SOP = $\overline{B}\,\overline{C}$ + BC + AC + $A\overline{B}$ (tutti i primi)
SOP = $\overline{B}\,\overline{C}$ + BC + AC (tutti gli essenziali più qualche primo)
SOP = $\overline{B}\,\overline{C}$ + BC + AB (tutti gli essenziali più qualche primo)

8

SOP da K-mappa

Semplice algoritmo per trovare una SOP semplificata da una k-mappa di F:

1. P(F) := {implicanti primi di F}
2. **E(F)** := {implicanti primi essenziali}
3. M(F) :={mintermini non coperti da E(F)}
4. N(F) := {implicanti primi non essenziali}
5. **C(F)** := il più piccolo sottoinsieme di N(F) che copra tutti i mintermini in M(F)
6. **SOP** := somma dei prodotti in **E(F)** e in **C(F)**

9

9

Proprietà

F (AB \ CD)	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	1
11			1	1
10	1	1	1	1

P(F)={$\overline{B}\,\overline{C}$, BC, AC, A$\overline{B}$}

E(F)={$\overline{B}\,\overline{C}$, BC}

M(F)={A$\overline{B}$CD, A$\overline{B}$C$\overline{D}$}

N(F)={AC, A$\overline{B}$}

C(F)={AC} (o C(F)={A$\overline{B}$})

SOP= $\overline{B}\,\overline{C}$ + BC + AC

10

10

SOP da K-mappa

- Come calcolare C(F)? Ovvero il più piccolo sottoinsieme di N(F) che copra tutti i mintermini in M(F)
- Non è sempre facile trovare il più piccolo
- Esistono diverse strategie per trovare un insieme "abbastanza" piccolo
- Ma non per forza il minimo

Copertura

- Una **copertura** di una funzione Booleana F è un insieme di prodotti la cui somma ha la stessa tabella di verità di F
  - Es. L'insieme dei mintermini di F
  - Es. L'insieme degli implicanti primi di F
- Una copertura di F è **prima** se tutti i suoi prodotti sono implicanti primi di F

Algoritmo di copertura SOP

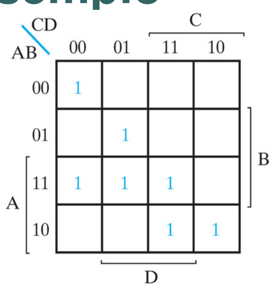
Algoritmo:

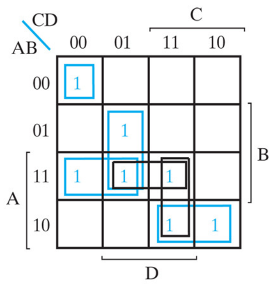
1. P(F) := {implicanti primi di F}
2. E(F) := {implicanti primi essenziali}
3. M(F) := {mintermini non coperti da E(F)}
4. N(F) := {implicanti primi non essenziali}
5. S := E(F)
6. R := M(F)
7. while (R $\neq \varnothing$)   (finché R non è vuoto)
    1. Prendo un p $\in$ N(F) tale che p che copra il maggior numero di mintermini di R
    2. S := S U {p}   (aggiungo p in S)
    3. da R tolgo <u>tutti</u> i mintermini coperti da p
8. **SOP** = somma dei prodotti in S

13

13

Esempio



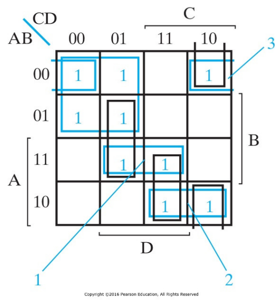


1. P(F) := {$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, $AB\bar{C}$, $B\bar{C}D$, $A\bar{B}C$, ABD, ACD}
2. E(F) := {$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, $AB\bar{C}$, $B\bar{C}D$, $A\bar{B}C$}
3. M(F) :={ABCD}
4. N(F) := {ABD, ACD}
5. S := {$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, $AB\bar{C}$, $B\bar{C}D$, $A\bar{B}C$}
6. R :={ABCD}
7. 1)
    ABD $\in$ N(F) e copre ABCD
    S := {$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, $AB\bar{C}$, $B\bar{C}D$, $A\bar{B}C$, ABD}   (aggiungo ABD in S)
    R è vuoto
8. SOP = $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C} + B\bar{C}D + A\bar{B}C + ABD$

14

14

Esempio



1. $P(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{D}, B\bar{C}D, ABD, ACD, A\bar{B}C, \bar{B}C\bar{D}, \bar{A}\bar{C}\}$
2. $E(F) := \{\bar{A}\bar{C}\}$
3. $M(F) := \{AB\bar{C}D, ABCD, A\bar{B}CD, A\bar{B}C\bar{D}, \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\}$
4. $N(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{D}, B\bar{C}D, ABD, ACD, A\bar{B}C, \bar{B}C\bar{D}\}$
5. $S := \{\bar{A}\bar{C}\}$
6. $R := \{AB\bar{C}D, ABCD, A\bar{B}CD, A\bar{B}C\bar{D}, \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\}$
7. 1)
   $ABD \in N(F)$ e copre $AB\bar{C}D$ e $ABCD$
   $S := \{\bar{A}\bar{C}, ABD\}$
   $R := \{A\bar{B}CD, A\bar{B}C\bar{D}, \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\}$
   2)
   $A\bar{B}C \in N(F)$ e copre $A\bar{B}CD$ e $A\bar{B}C\bar{D}$
   $S := \{\bar{A}\bar{C}, ABD, A\bar{B}C\}$
   $R := \{\bar{A}\bar{B}C\bar{D}\}$
   3)
   $\bar{A}\bar{B}\bar{D} \in N(F)$ e copre $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
   $S := \{\bar{A}\bar{C}, ABD, A\bar{B}C, \bar{A}\bar{B}\bar{D}\}$
   R è vuoto
8. $SOP = \bar{A}\bar{C} + ABD + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{D}$

15

15

Funzioni non completamente specificate

- $F = (F^1, F^0, F^x): \{0,1\}^n \rightarrow \{0, 1, x\}$
  dove x rappresenta il "don't care"

onset	$F^1(y) = 1 \leftrightarrow F(y) = 1$
offset	$F^0(y) = 1 \leftrightarrow F(y) = 0$
don't care set	$F^x(y) = 1 \leftrightarrow F(y) = x$

(F^1, F^0, F^x) forma una ripartizione di $\{0,1\}^n$:

- $F^1 \cup F^0 \cup F^x = \{0,1\}^n$
- $F^1 \cap F^0 = F^1 \cap F^x = F^0 \cap F^x = \varnothing$

16

16

Esempio

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		x	
01	x			
11	1	1	x	1
10	1	x		1

- F^1 = {0000, 1100, 1101, 1110, 1000, 1010}
- F^x = {0011, 0100, 1111, 1001}

17

17

Implicanti con dont'care (DC)

Un prodotto P è un **implicante** per una funzione non completamente specificata F se :

1. F vale 1 o x in tutti i mintermini di cui è composto P
2. F vale 1 in almeno un mintermine di P

F

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		x	
01			x	x
11	1		1	x
10	1		x	1

$A\bar{C}\bar{D}$ e AC sono implicanti di F

$\bar{A}BC$ non è un implicante di F

18

18

Implicanti primi (DC)

Un prodotto P è un **implicante primo** per una funzione F se cancellando un qualsiasi letterale da P si ottiene un prodotto che non sia implicante di F

F (AB \ CD)	00	01	11	10
00	1	x		
01				1
11	1		x	1
10	1		x	1

L'implicante AC di F è primo perché C e A non sono implicanti di F

L'implicante $BC\overline{D}$ di F è primo perché $C\overline{D}$, $B\overline{D}$ e BC non sono implicanti di F

L'implicante $A\overline{B}C$ di F non è primo perché AC è un implicante di F

Implicanti primi essenziali (DC)

P è un **implicante primo essenziale** per F se esiste un mintermine che vale 1 in F contenuto in P che non è contenuto in nessuno degli altri implicanti primi di F

F (AB \ CD)	00	01	11	10
00	x	1		
01				1
11			x	x
10	1	1	1	1

Gli implicanti primi $\overline{B}\overline{C}$ e $BC\overline{D}$ sono essenziali

L'implicanti primi $A\overline{B}$ e AC non sono essenzial1

Copertura con DC

Si usa esattamente lo stesso algoritmo di copertura SOP:

1. usando le definizioni di
   - implicanti
   - primi
   - essenziali

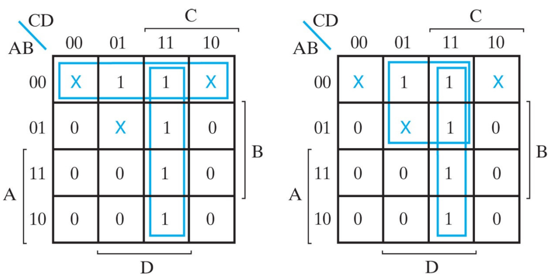
   date nel caso di funzioni non completamente specificate
2. considerando che i mintermini da coprire necessariamente sono solo quelli dell'on-set (ovvero M(F) contiene solo mintermini dell'on-set)

21

21

Esempio

1. P(F) := {$\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{A}D$, CD}
2. E(F) := {CD}
3. M(F) :={$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$}
4. N(F) := {$\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{A}D$}
5. S := {CD}
6. R :={$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$}
7. 1) Prendo $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D \in$ R
   $\overline{A}\,\overline{B} \in$ N(F) e copre $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$
   S := {CD, $\overline{A}\,\overline{B}$}
   R è vuoto
8. SOP = CD + $\overline{A}\,\overline{B}$



(a) F = CD + $\overline{A}\,\overline{B}$ (b) F = CD + $\overline{A}D$

CD+$\overline{A}\,\overline{B}$ e CD+$\overline{A}D$
- coprono entrambe F
- ma sono due funzioni differenti (hanno diverse tabelle di verità)

22

22

OR esclusivo XOR

$X \oplus Y = \overline{X}Y + X\overline{Y}$

X	Y	X⊕Y
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

Identità che valgono:

$X \oplus 0 = X \qquad X \oplus 1 = \overline{X}$

$X \oplus X = 0 \qquad X \oplus \overline{X} = 1$

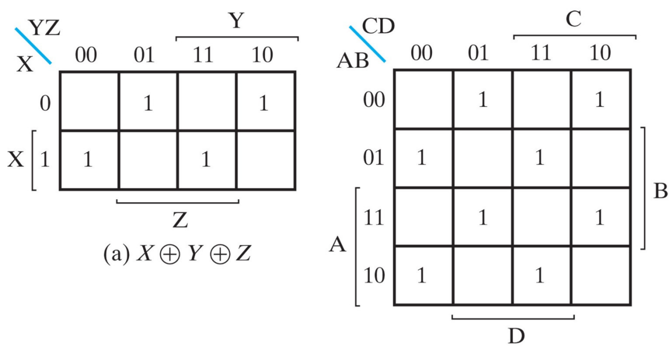
$X \oplus \overline{Y} = \overline{X} \oplus Y = \overline{X \oplus Y}$

$\overline{X} \oplus \overline{Y} = X \oplus Y$

23

23

Funzioni dispari



(a) $X \oplus Y \oplus Z$

(b) $A \oplus B \oplus C \oplus D$

Gli XOR sono detti anche funzioni dispari perché valgono 1 solo quando c'è un numero dispari di variabili che valgono 1

24

24

Esercizi da fare a casa 1

1. Trovare tutti gli implicanti primi e tutti quelli essenziali per le seguenti funzioni booleane:
   1. $F(A,B,C,D)=\Sigma m(1,5,6,7,11,12,13,15)$
   2. $F(A,B,C,D)=\Sigma m(1,6,7,11,12,13,15)$
   3. $F(A,B,C,D)=\Sigma m(0,1,2,3,4,5,10,11,13,15)$
   4. $F(A,B,C,D)=\Sigma m(1,2,3,4,5,10,11,13,15)$
   5. $F(A,B,C,D)=\Sigma m(0,1,3,4,7,10,11,13,15)$
   6. $F(A,B,C,D)=\Sigma m(0,1,2,5,7,8,10,12,14,15)$

Esercizi da fare a casa 2

2. Trovare una copertura SOP (usando l'algoritmo di copertura SOP) delle seguenti funzioni, utilizzando le K-mappe:
   1. $F(A,B,C,D)=\Sigma m(0,1,2,4,7,8,10,12)$
   2. $F(A,B,C,D)=\Sigma m(1,4,5,6,10,11,12,13,15)$
   3. $F(A,B,C,D)=\Sigma m(0,1,3,4,7,10,11,13,15)$

Esercizi da fare a casa 3

3. Trovare una copertura SOP (usando l'algoritmo di copertura SOP) delle seguenti funzioni non completamente specificate, utilizzando le K-mappe:
   1. $F^1(A,B,C,D)=\Sigma m(5,6,11,12)$ (on-set)
      $F^x(A,B,C,D)=\Sigma m(0,1,2,9,10,14,15)$ (don't care)
   2. $F^1(A,B,C,D)= \Sigma m(3,4,6,11,12,14)$
      $F^x(A,B,C,D)=\Sigma m(0,1,2,7,8,9,10)$
   3. $F^1(A,B,C,D)=\Sigma m(3,4,6,9,12,14)$
      $F^x(A,B,C,D)= \Sigma m(0,1,2,7,8,10,11,13)$

27

27

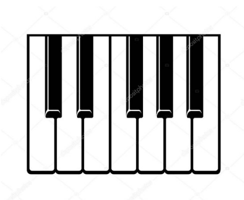
Esercizi da fare a casa 4

4. Si consideri una tastiera musicale con 7 tasti bianchi e 5 tasti neri. In tutto abbiamo 12 tasti che possono essere rappresentati con $\lceil \log_2 12 \rceil = 4$ bit

Si consideri la seguente codifica:

Tasti bianchi:

DO = 0011
RE = 0100
MI = 0110
FA = 1000
SOL = 1001
LA = 1100
SI = 1101



Tasti neri:

DO# = 0000 (DO diesis)
RE# = 0001
FA# = 0101
SOL# = 0111
LA# = 1110

1. Definire una K-mappa per una funzione non completamente specificata F che valga 1 quando viene premuto un tasto nero e valga 0 quando viene premuto un tasto bianco
2. Trovare una copertura SOP (usando l'algoritmo di copertura SOP)
3. Disegnare un circuito corrispondente alla SOP
4. E' possibile definire una codifica che porti ad un circuito più piccolo? Definire la codifica che porti al circuito minimo (Esiste una SOP con 1 solo letterale?)
5. Definire una codifica che porti una copertura SOP con 19 letterali (disegnare anche il circuito)

28

28

Esercizi da fare a casa 5

Risolvere **l'esempio di esame prima parte** in 90 minuti

29

29

Architettura degli elaboratori

Lezione 5 - esercizi

Prof.ssa Valentina Ciriani
Università degli Studi di Milano
www.di.unimi.it/ciriani

30

Esercizio 1.1

Costruire una SOP, una POS e la K-mappa per la funzione F= $\overline{XY} + \overline{Z}$

F = $\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$ [De Morgan]

è una SOP ma anche una POS

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1		1

31

31

Esercizio 1.2

Costruire una SOP, una POS e la K-mappa per la funzione F= $X(Y+\overline{Z})$

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

X \ YZ	00	01	11	10
0				
1	1		1	1

SOP: $X\overline{Y}\overline{Z}+XY\overline{Z}+XYZ$

POS: $(X+Y+Z)(X+Y+\overline{Z})(X+\overline{Y}+Z)(X+\overline{Y}+\overline{Z})(\overline{X}+Y+\overline{Z})$

32

32

Esercizio 2.1

Convertire la seguente espressione in SOP e POS: $A(\overline{B}C + B)+\overline{B}$

$A(\overline{B}C + B)+\overline{B}$
$= A\overline{B}C + AB + \overline{B}$ SOP [distributiva]

$A(\overline{B}C + B)+\overline{B}$
$= (A + \overline{B})(\overline{B}C + B + \overline{B})$ POS [distributiva]
$= (A + \overline{B})(\overline{B}C + 1)$ [complement.]
$= (A + \overline{B})1$ [elem. assorb]
$= (A + \overline{B})$ POS e SOP [elem. neutro]

33

33

Esercizio 2.1

Convertire la seguente espressione in SOP e POS: $A(\overline{B}C + B)+\overline{B}$
Soluzione alternativa:

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{B}C$	$\overline{B}C+B$	$A(\overline{B}C+B)$	$A(\overline{B}C+B)+\overline{B}$
0	0	0	1	0	0	0	**1**
0	0	1	1	1	1	0	**1**
0	1	0	0	0	1	0	**0**
0	1	1	0	0	1	0	**0**
1	0	0	1	0	0	0	**1**
1	0	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	0	0	1	1	**1**
1	1	1	0	0	1	1	**1**

SOP:
$\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+A\overline{B}\overline{C}$
$+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$

POS:
$(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})$

34

34

Esercizio 2.2

Convertire la seguente espressione in SOP e POS:
$B\overline{A} + C$

1) 1) SOP: $B\overline{A} + C$ è già in forma SOP
   2) POS:
      $B\overline{A} + C =$
      $(B+C)(\overline{A}+C)$ POS [distributiva]
2) Si può calcolare la somma di mintermini e il prodotto di maxtermini

35

35

Esercizio 3

Data le seguente tabella di verità scrivere la K-mappa e le due forme canoniche (somma di mintermini e prodotto di maxtermini)

A	B	C	F
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

SOP:
$\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$

POS:
$(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)\ (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

36

36

Esercizio 3

A	B	C	F
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	
1		1		1

37

37

Esercizio 4

Scrivere la K-mappa per la funzione F(A,B,C)= Σ m(0,1,4,5,7) e individuare i cubi nella mappa

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1	1	

$\overline{B}$ AC

38

38

Esercizio 5

Scrivere la K-mappa per la funzione F(A,B,C,D) = Σ m(0,3,4,5,7,8, 9,10,13,15) e individuare i cubi nella mappa

F (AB \ CD)	00	01	11	10
00	1		1	
01	1	1	1	
11		1	1	
10	1	1		1

Più tutti i cubi con un solo mintermine

39

Esercizio 6

Scrivere la K-mappa per la funzione F(A,B,C,D) = Σ m(1,2,3,4,9,11,12,15) e individuare i cubi nella mappa

F (AB \ CD)	00	01	11	10
00		1	1	1
01	1			
11	1		1	
10		1	1	

Più tutti i cubi con un solo mintermine

40