



Architettura degli elaboratori

Lezione 6 - teoria

Prof.ssa Valentina Ciriani
Università degli Studi di Milano
www.di.unimi.it/ciriani

1



Contenuto

1. Decoder [MKM 3.5]
2. Encoder [MKM 3.6]
3. Selezione: multiplexer [MKM 3.7]
4. Sommatori binari [MKM 3.9]
5. Circuiti sequenziali [MKM 4.1,4.2]

-MKM = M. Morris Mano, C.R. Kime, T. Martin, Reti logiche, Pearson
-PH = D.A. Patterson, J.L. Hennessy, Struttura e Progetto dei Calcolatori, Zanichelli

2

2



Decoder

- Le informazioni discretizzatili sono rappresentate con codici binari
- Con n bit si rappresentano fino a 2^n elementi
- La **decodifica $n-m$** è
 - la trasformazione di un codice a n bit in ingresso ad uno a m bit di uscita con $n \leq m \leq 2^n$
 - tale che ad ogni parola di codice in ingresso corrisponda solo una parola di codice in uscita

3

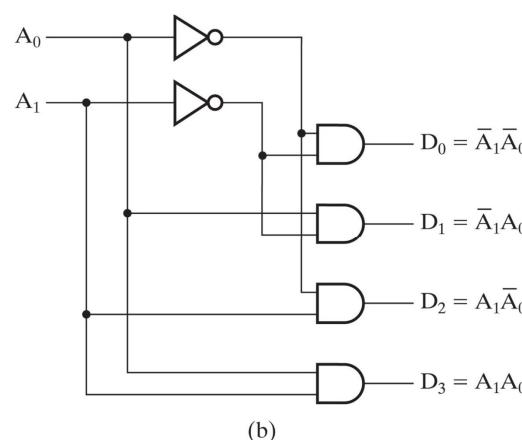
3



Decoder 2-4 (mintermini)

A_1	A_0	D_0	D_1	D_2	D_3
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

(a)



Copyright ©2016 Pearson Education, All Rights Reserved

4

4



Encoder

- è il circuito che fa le operazioni inverse al decoder
- ha 2^n (o meno) ingressi e n uscite
- Ci deve essere solo un 1 in ogni configurazione di ingresso

5

5



Encoder 8-3

Inputs								Outputs		
D ₇	D ₆	D ₅	D ₄	D ₃	D ₂	D ₁	D ₀	A ₂	A ₁	A ₀
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

$$A_0 = D_1 + D_3 + D_5 + D_7$$

$$A_1 = D_2 + D_3 + D_6 + D_7$$

$$A_2 = D_4 + D_5 + D_6 + D_7$$

Tre porte OR a 4 ingressi

Cosa succede se D₁=1 e D₂=1? Ottengo 011

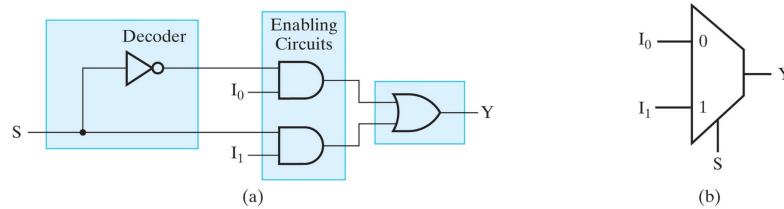
Ci deve essere sempre un solo ingresso uguale a 1

6

6

• • • Selezione

- Spesso è necessario selezionare le informazioni binarie
 - se $S=0$ passa il segnale I_0
 - se $S=1$ passa il segnale I_1



multiplexer

7

• • • Sommatori binari

- Un circuito aritmetico è un circuito combinatorio che esegue operazioni aritmetiche
- Il sommatore a due bit è un tassello importante per la costruzione di circuiti aritmetici:
 - $0+0=0$
 - $0+1=1$
 - $1+0=1$
 - $1+1=10$ (somma 0 e riporto 1)

8

8



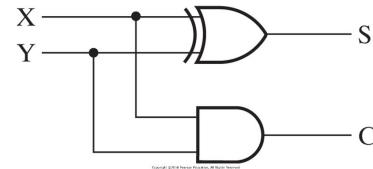
Half adder

- Half adder: circuito combinatorio che esegue la somma di due bit:

X	Y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$S = \overline{X}Y + X\overline{Y} = (X \oplus Y)$$

$$C = XY$$



C=Carry S=Sum

9



Full adder

- Nel caso di somma con riporto in realtà abbiamo bisogno di sommare tre bit
- Il full adder è un circuito combinatorio per la somma di tre bit

X	Y	Z	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

10

10

• • • | Full adder

		YZ		Y	
		00	01	11	10
X		0		1	
X	1	1		1	
			1		

Z

$$\begin{aligned} S &= \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}Y\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z} + XYZ \\ &= X \oplus Y \oplus Z \end{aligned}$$

		YZ		Y	
		00	01	11	10
X		0		1	
X	1		1	1	1
				1	

Z

$$\begin{aligned} C &= XY + XZ + YZ \\ &= XY + Z(XY + \bar{X}Y) \\ &= XY + Z(X \oplus Y) \end{aligned}$$

Copyright ©2016 Pearson Education, All Rights Reserved

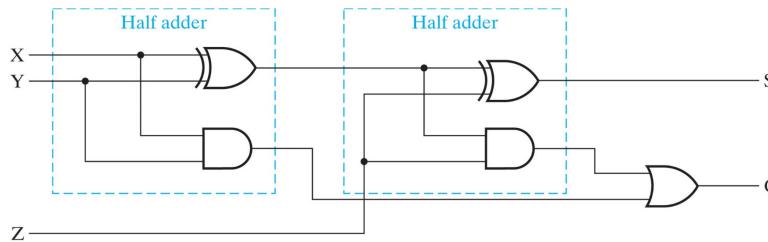
11

11

• • • | Full adder

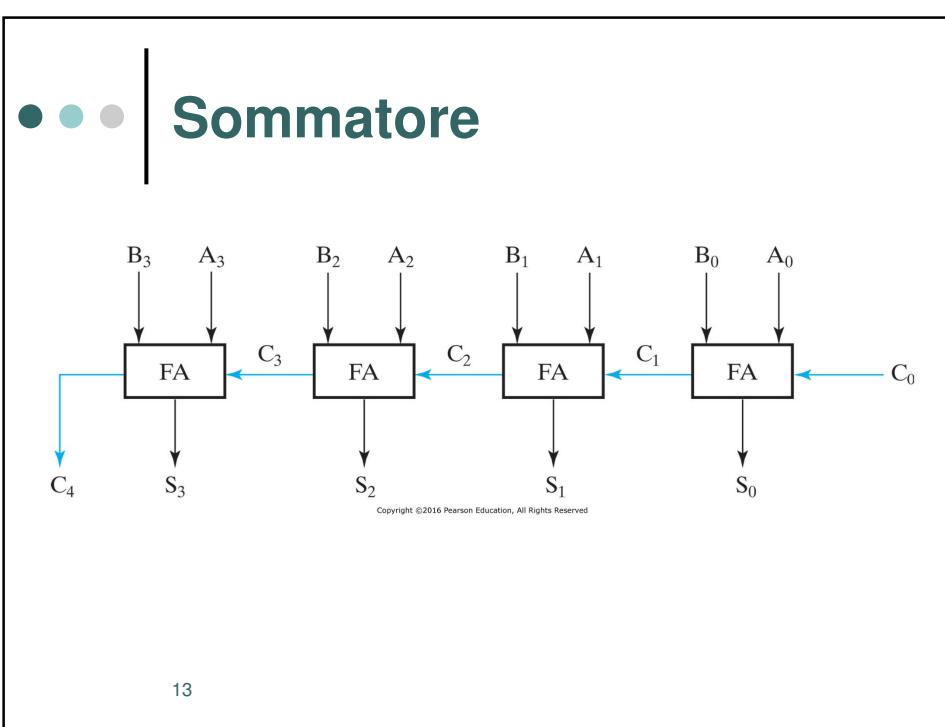
- Il circuito di un full adder si può vedere come due half adder in cascata:

$$\begin{aligned} S &= (X \oplus Y) \oplus Z \\ C &= XY + Z(X \oplus Y) \end{aligned}$$



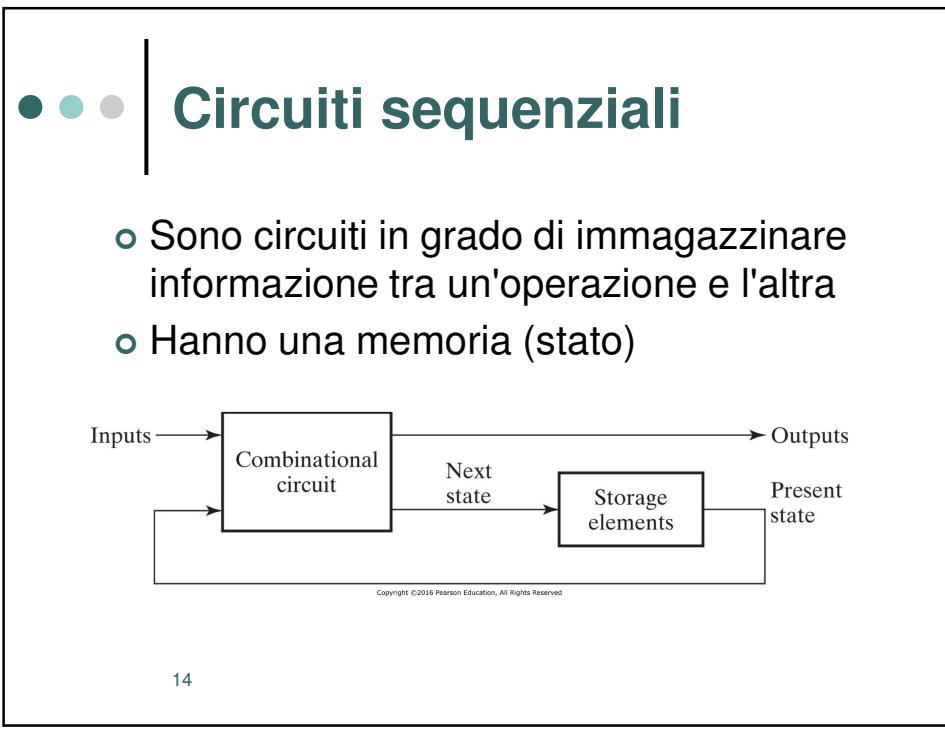
12

12



13

13



14

14



Sincrono e asincrono

- Circuito sequenziale **sincrono**: il comportamento evolve nel tempo discreto. Il tempo è scandito da un orologio comune (clock)
- Il segnale di sincronizzazione (clock signal) è generato da un apposito circuito
- Circuito sequenziale **asincrono**: gli ingressi evolvono in maniera continua
- I circuiti asincroni sono molto più complessi da progettare

15

15



Latch

- Un elemento di memoria è un circuito in grado di mantenersi sempre in uno stato binario finché non viene cambiato
- Latch sono elementi di memoria semplici usati come componenti dei flip-flop (elementi di memoria più complessi)
- Il latch è un circuito **bistabile**: con due stati stabili che memorizzano un bit

16

16



Latch $\bar{S}\bar{R}$

- Sono latch set-reset e sono un circuito composto di due porte NAND (not-AND)
- È una rete che memorizza un bit

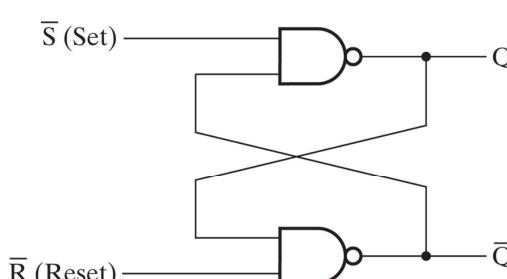
X	Y	X NAND Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

17

17



Latch $\bar{S}\bar{R}$



(a) Logic diagram

\bar{S}	\bar{R}	Q	\bar{Q}	
0	1	1	0	Set state
1	1	1	0	
1	0	0	1	Reset state
1	1	0	1	
0	0	1	1	Undefined

(b) Function table

- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 1$, mantiene i vecchi valori
- * $\bar{S} = 0, \bar{R} = 1$, con set Q diventa 1
- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 0$, con reset Q diventa 0

18

18

Latch $\bar{S}\bar{R}$

(a) Logic diagram

X	Y	X NAND Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

\bar{S}	\bar{R}	Q	\bar{Q}	
0	1	1	0	Set state
1	1	1	0	
1	0	0	1	Reset state
1	1	0	1	
0	0	1	1	Undefined

(b) Function table

Copyright ©2016 Pearson Education, All Rights Reserved

- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 1,$ mantiene i vecchi valori
- * $\bar{S} = 0, \bar{R} = 1,$ con set Q diventa 1
- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 0,$ con reset Q diventa 0

19

19

Latch $\bar{S}\bar{R}$

(a) Logic diagram

X	Y	X NAND Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

\bar{S}	\bar{R}	Q	\bar{Q}	
0	1	1	0	Set state
1	1	1	0	
1	0	0	1	Reset state
1	1	0	1	
0	0	1	1	Undefined

(b) Function table

Copyright ©2016 Pearson Education, All Rights Reserved

- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 1,$ mantiene i vecchi valori
- * $\bar{S} = 0, \bar{R} = 1,$ con set Q diventa 1
- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 0,$ con reset Q diventa 0

20

20

Latch $\bar{S}\bar{R}$

(a) Logic diagram

(b) Function table

\bar{S}	\bar{R}	Q	\bar{Q}	
0	1	1	0	Set state
1	1	0	1	Reset state
0	0	1	1	Undefined

Copyright ©2016 Pearson Education, All Rights Reserved

- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 1$, mantiene i vecchi valori
- * $\bar{S} = 0, \bar{R} = 1$, con set Q diventa 1
- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 0$, con reset Q diventa 0

21

21

Latch $\bar{S}\bar{R}$

(a) Logic diagram

(b) Function table

\bar{S}	\bar{R}	Q	\bar{Q}	
0	1	1	0	Set state
1	1	1	0	Reset state
1	0	0	1	Undefined
0	0	1	1	

Copyright ©2016 Pearson Education, All Rights Reserved

- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 1$, mantiene i vecchi valori
- * $\bar{S} = 0, \bar{R} = 1$, con set Q diventa 1
- * $\bar{S} = 1, \bar{R} = 0$, con reset Q diventa 0

22

22



Latch D

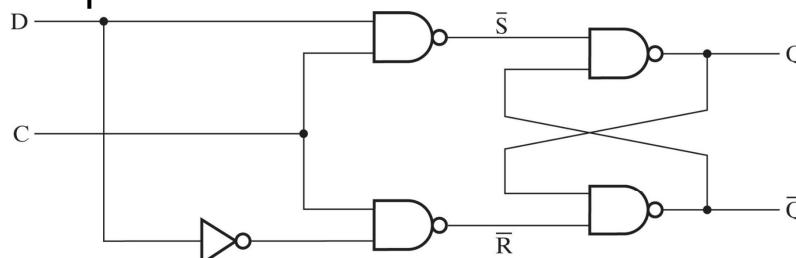
- Per eliminare lo stato indefinito
- usa 4 porte NAND e un inverter
- C'è un segnale di controllo C che è
 - $C=1$ quando lo stato deve cambiare in dato D
 - $C=0$ quando lo stato deve rimanere inalterato

23

23



Latch D



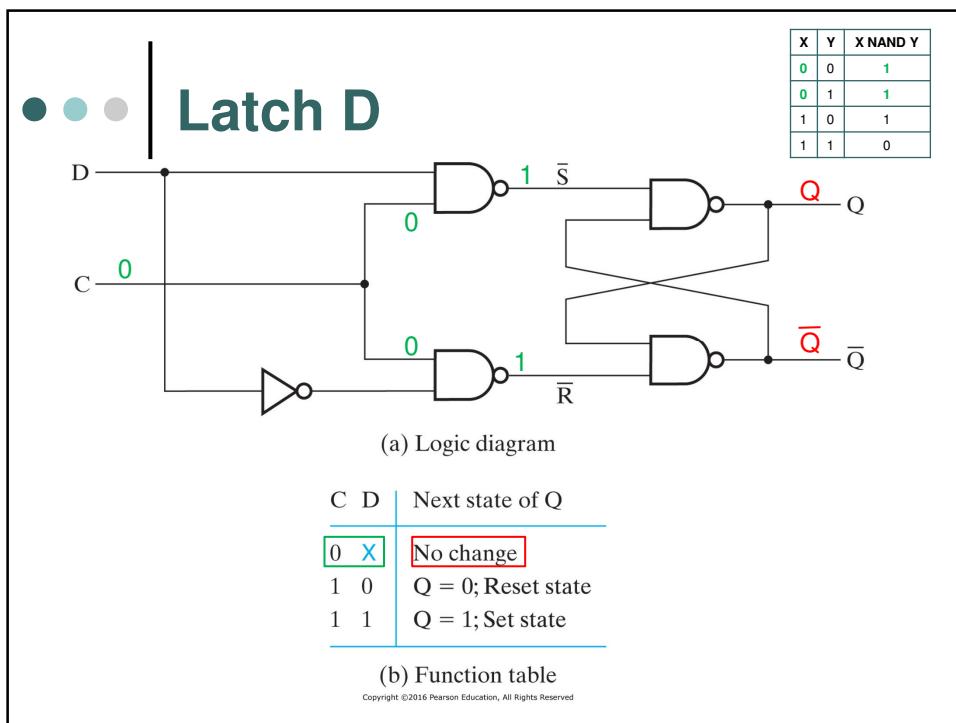
(a) Logic diagram

C	D	Next state of Q
0	X	No change
1	0	$Q = 0$; Reset state
1	1	$Q = 1$; Set state

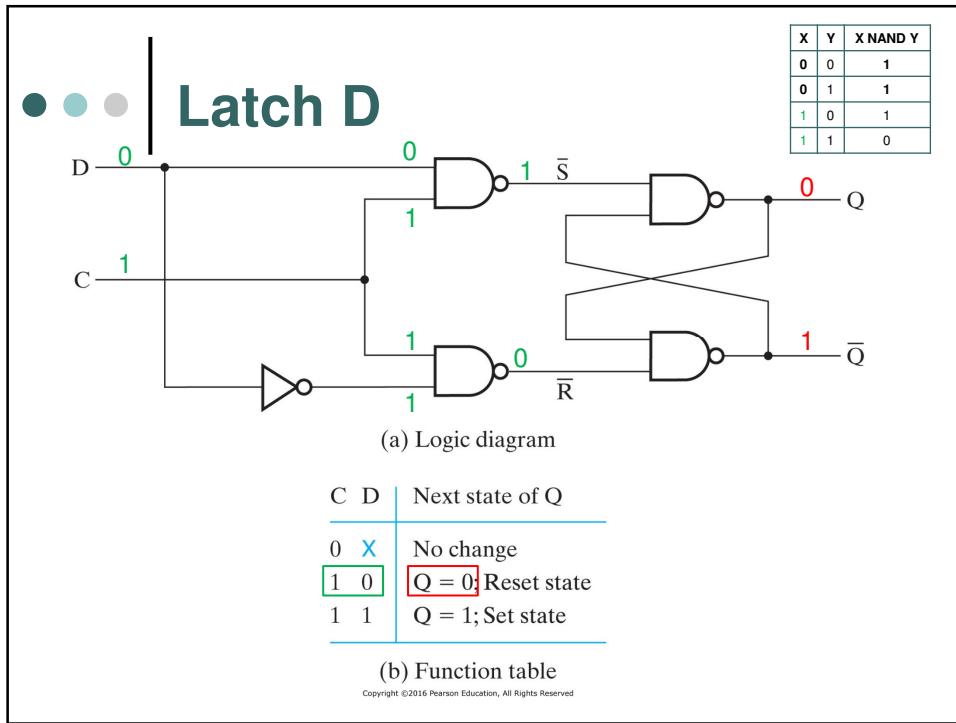
(b) Function table

Copyright ©2016 Pearson Education, All Rights Reserved

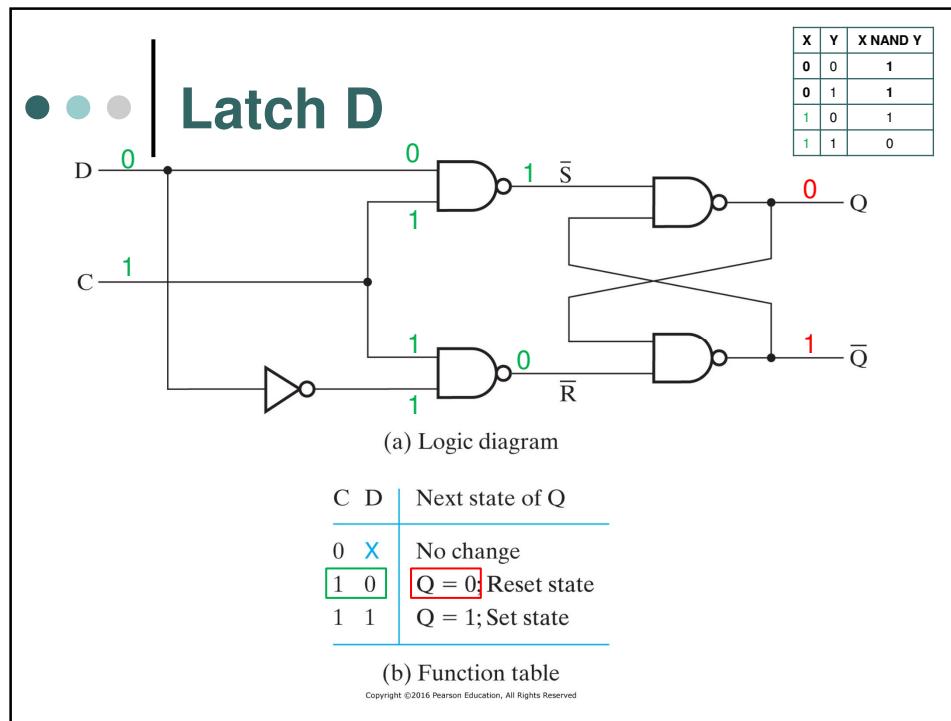
24



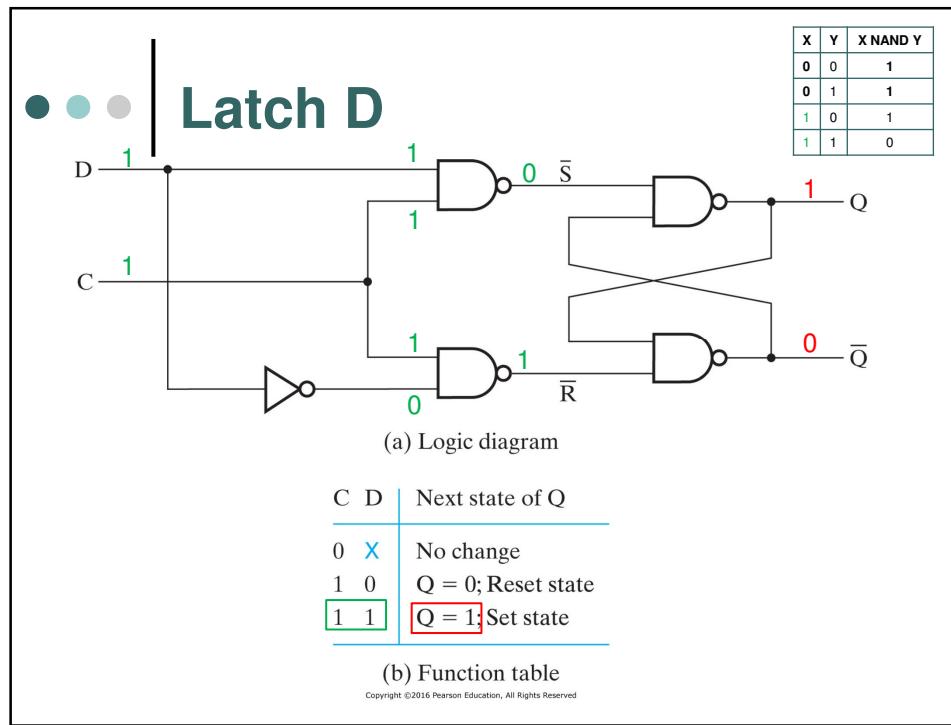
25



26



27



28



Architettura degli elaboratori

Lezione 6 - esercizi

Prof.ssa Valentina Ciriani

Università degli Studi di Milano

www.di.unimi.it/ciriani

29



Esercizio 1.1

implicanti primi ed essenziali per:

$$F(A,B,C,D) = \Sigma m(1,5,6,7,11,12,13,15)$$

F \ CD	00	01	11	10
AB	00	1		
00	1	1	1	
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10			1	

$$P(F) = \{\bar{A}\bar{C}D, \bar{A}BC, A\bar{B}\bar{C}, ACD, BD\}$$

$$E(F) = \{\bar{A}\bar{C}D, \bar{A}BC, A\bar{B}\bar{C}, ACD\}$$

30

30



Esercizio 1.2

implicanti primi ed essenziali per:

$$F(A,B,C,D) = \Sigma m(1,6,7,11,12,13,15)$$

	F	CD	00	01	11	10
	AB	00		1		
	00				1	1
	01					
	11		1	1	1	
	10					1

$$\begin{aligned} P(F) &= \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D, \bar{A}BC, A\bar{B}\bar{C}, \\ &ABD, BCD, ACD\} \\ E(F) &= \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D, \bar{A}BC, A\bar{B}\bar{C}, \\ &ACD\} \end{aligned}$$

31

31



Esercizio 1.3

implicanti primi ed essenziali per:

$$F(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,2,3,4,5,10,11,13,15)$$

	F	CD	00	01	11	10
	AB	00		1 1	1 1	
	00					
	01		1	1		
	11				1	1
	10					1 1

$$\begin{aligned} P(F) &= \{\bar{A}\bar{B}, ACD, \\ &\bar{A}\bar{C}, B\bar{C}D, ABD, \bar{B}\bar{C}\} \\ E(F) &= \{\bar{A}\bar{C}, \bar{B}\bar{C}\} \end{aligned}$$

32

32



Esercizio 1.4

implicanti primi ed essenziali per:

$$F(A,B,C,D) = \Sigma m(1,2,3,4,5,10,11,13,15)$$

	F	CD	00	01	11	10
	AB	00				
	00		1	1		1
	01		1	1		
	11			1	1	
	10				1	1

$$\begin{aligned} P(F) &= \{\bar{A}\bar{B}D, \bar{A}B\bar{C}, ABD, \\ &\quad \bar{A}\bar{C}D, B\bar{C}D, ACD, \bar{B}C\} \\ E(F) &= \{\bar{A}B\bar{C}, \bar{B}C\} \end{aligned}$$

33

33



Esercizio 1.5

implicanti primi ed essenziali per:

$$F(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,3,4,7,10,11,13,15)$$

	F	CD	00	01	11	10
	AB	00				
	00		1	1	1	
	01		1		1	
	11			1	1	
	10				1	1

$$\begin{aligned} P(F) &= \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{B}D, ABD, \\ &\quad \bar{A}\bar{B}C, \bar{A}\bar{C}\bar{D}, CD\} \\ E(F) &= \{ABD, A\bar{B}C, \bar{A}\bar{C}\bar{D}, \\ &\quad CD\} \end{aligned}$$

34

34

Esercizio 1.6

implicanti primi ed essenziali per:

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,5,7,8,10,12,14,15)$$

	CD	00	01	11	10
AB	00	1 1			1
	01		1 1		
	11	1		1 1	
	10	1			1

$$\begin{aligned} P(F) &= \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}, \bar{A}BD, ABC, \\ &\quad \bar{A}CD, BCD, A\bar{D}, \bar{B}\bar{D}\} \\ E(F) &= \{A\bar{D}, \bar{B}\bar{D}\} \end{aligned}$$

35

35

Esercizio 2.1

Trovare una copertura SOP di $F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,4,7,8,10,12)$

	CD	00	01	11	10
AB	00	1 1			1
	01	1		1	
	11	1			
	10	1			1

1. $P(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}, \bar{B}\bar{D}, \bar{A}BCD, \bar{C}\bar{D}\}$
2. $E(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}, \bar{B}\bar{D}, \bar{A}BCD, \bar{C}\bar{D}\}$
3. $M(F) := \{\}$
4. $N(F) := \{\}$
5. $S := \{\bar{A}BC, \bar{B}\bar{D}, \bar{A}BCD, \bar{C}\bar{D}\}$
6. $R := \{\}$ ovvero R è vuoto
7. $SOP = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}BCD + \bar{C}\bar{D}$ 11 letterali

36

36



Esercizio 2.2

Trovare una copertura SOP di $F(A,B,C,D) = \Sigma m(1,4,5,6,10,11,12,13,15)$

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
00				1		
01			1	1		1
11			1	1	1	
10					1	1

1. $P(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{D}, ABD, A\bar{B}C, \bar{A}\bar{C}D, ACD, B\bar{C}\}$
2. $E(F) := \{A\bar{B}\bar{D}, A\bar{B}C, \bar{A}\bar{C}D, B\bar{C}\}$
3. $M(F) := \{ABCD\}$
4. $N(F) := \{ABD, ACD\}$
5. $S := \{\bar{A}\bar{B}\bar{D}, A\bar{B}C, \bar{A}\bar{C}D, B\bar{C}, ABD\}$
6. $R := \{ABCD\}$
7. $\bar{A}BD \in N(F)$ e copre $ABCD$
 $S := \{\bar{A}\bar{B}\bar{D}, A\bar{B}C, \bar{A}\bar{C}D, B\bar{C}, ABD\}$
 R è vuoto
8. $SOP = \bar{A}\bar{B}\bar{D} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{C}D + B\bar{C} + ABD$ 14 letterali

37

37



Esercizio 2.3

Trovare una copertura SOP di $F(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,3,4,7,10,11,13,15)$

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
00			1	1	1	
01			1		1	
11				1	1	
10					1	1

1. $P(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{B}D, ABD, A\bar{B}C, \bar{A}\bar{C}D, CD\}$
2. $E(F) := \{ABD, A\bar{B}C, \bar{A}\bar{C}D, CD\}$
3. $M(F) := \{ABCD\}$
4. $N(F) := \{A\bar{B}C, \bar{A}\bar{B}D\}$
5. $S := \{ABD, ABC, \bar{A}\bar{C}D, CD\}$
6. $R := \{ABCD\}$
7. $\bar{A}\bar{B}C \in N(F)$ e copre $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
 $S := \{ABD, ABC, \bar{A}\bar{C}D, CD, \bar{A}\bar{B}C\}$
 R è vuoto
8. $SOP = ABD + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{C}D + CD + \bar{A}\bar{B}C$ 14 letterali

38

38

Esercizio 3.1

Trovare una copertura $F^1(A,B,C,D) = \Sigma m(5,6,11,12)$

$F^x(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,2,9,10,14,15)$

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
F		00	x	x		x
		01		1		1
F		11	1		x	x
		10		x	1	x

1. $P(F) := \{AB\bar{D}, A\bar{B}D, \bar{A}\bar{C}D, AC, C\bar{D}\}$
2. $E(F) := \{ABD, \bar{A}CD, CD\}$
3. $M(F) := \{\bar{A}BCD\}$
4. $N(F) := \{A\bar{B}D, AC\}$
5. $S := \{AB\bar{D}, \bar{A}\bar{C}D, C\bar{D}\}$
6. $R := \{\bar{A}BCD\}$
7. 1)
 $AC \in N(F)$ e copre $A\bar{B}CD$
 $S := \{ABD, \bar{A}CD, C\bar{D}, AC\}$
 R è vuoto
8. SOP = $AB\bar{D} + \bar{A}\bar{C}D + C\bar{D} + AC$ 10 letterali

39

39

Esercizio 3.2

Trovare una copertura $F^1(A,B,C,D) = \Sigma m(3,4,6,11,12,14)$

$F^x(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,2,7,8,9,10)$

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
F		00	x	x	1	x
		01	1		x	1
F		11	1			1
		10	x	x	1	x

1. $P(F) := \{\bar{B}, \bar{D}, \bar{A}C\}$
2. $E(F) := \{\bar{B}, \bar{D}\}$
3. $M(F) := \{\}$
4. $N(F) := \{AC\}$
5. $S := \{B, D\}$
6. R è vuoto
7. SOP = $\bar{B} + \bar{D}$ 2 letterali

40

40

Esercizio 3.3

Trovare una copertura $F^1(A,B,C,D) = \sum m(3,4,6,9,12,14)$
 $F^x(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,7,8,10,11,13)$

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
F		00	x	x	1	x
		01	1		x	1
		11	1	x		1
		10	x	1	x	x

1. $P(F) := \{\bar{B}, \bar{D}, \bar{A}C, A\bar{C}\}$
2. $E(F) := \{\bar{D}\}$
3. $M(F) := \{\bar{A}BCD, A\bar{B}\bar{C}D\}$
4. $N(F) := \{\bar{B}, AC, A\bar{C}\}$
5. $S := \{\bar{D}\}$
6. $R := \{\bar{A}BCD, A\bar{B}\bar{C}D\}$
7. $\bar{B} \in N(F)$ e copre $\bar{A}BCD$ e $A\bar{B}\bar{C}D$
 $S := \{\bar{D}, \bar{B}\}$
 R è vuoto
8. SOP = $\bar{D} + \bar{B}$ 2 letterali

41

41

Esercizio 4

4. Si consideri una tastiera musicale con 7 tasti bianchi e 5 tasti neri. In tutto abbiamo 12 tasti che possono essere rappresentati con $\lceil \log_2 12 \rceil = 4$ bit

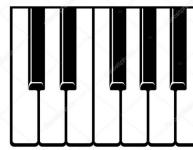
Si consideri la seguente codifica:

Tasti bianchi:

DO	= 0011
RE	= 0100
MI	= 0110
FA	= 1000
SOL	= 1001
LA	= 1100
SI	= 1101

Tasti neri:

DO#	= 0000 (DO diesis)
RE#	= 0001
FA#	= 0101
SOL#	= 0111
LA#	= 1110



1. Definire una K-mappa per una funzione non completamente specificata F che valga 1 quando viene premuto un tasto nero e valga 0 quando viene premuto un tasto bianco
2. Trovare una copertura SOP (usando l'algoritmo di copertura SOP)
3. Disegnare un circuito corrispondente alla SOP
4. E' possibile definire una codifica che porti ad un circuito più piccolo? Definire la codifica che porta al circuito minimo (Esiste una SOP con 1 solo letterale?)
5. Definire una codifica che porti una copertura SOP con 19 letterali (disegnare anche il circuito)

42

42

Esercizio 4.1 e 4.2

Trovare una copertura $F^1(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,5,7,14)$

$F^0(A,B,C,D) = \Sigma m(3,4,6,8,9,12,13)$

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
			1	1		X
				1	1	
					X	1
					X	X

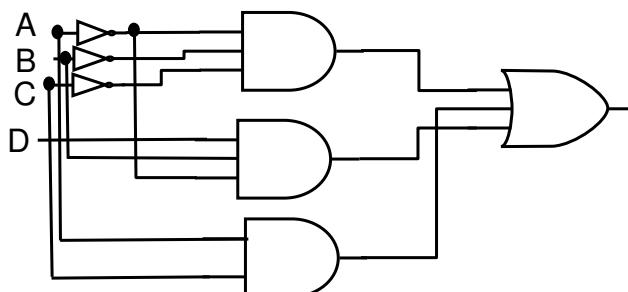
1. $P(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{B}\bar{D}, \bar{A}B\bar{D}, \bar{A}\bar{C}D, BCD, AC\}$
2. $E(F) := \{AC\}$
3. $M(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}, \bar{A}\bar{B}\bar{C}D, \bar{A}B\bar{C}D, \bar{A}BCD\}$
4. $N(F) := \{ABC, ABD, ABD, \bar{A}CD, BCD\}$
5. $S := \{AC\}$
6. $R := \{ABCD, \bar{A}\bar{B}\bar{C}D, \bar{A}B\bar{C}D, \bar{A}BCD\}$
7.
 - 1) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \in N(F)$ e copre $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ e $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
 $S := \{AC, \bar{A}\bar{B}\bar{C}\}$
 $R := \{ABCD, \bar{A}\bar{B}\bar{C}D\}$
 - 2) $ABD \in N(F)$ e copre $\bar{A}BCD$ e $\bar{A}B\bar{C}D$
 $S := \{AC, \bar{A}\bar{B}\bar{C}, ABD\}$
 R è vuoto
8. SOP = $AC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BD$
8 letterali

43

43

Esercizio 4.3

$$AC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BD$$



44

44

Esercizio 4.4

$F^1(A,B,C,D) = \Sigma m(8,9,10,11,12)$ tasti neri

$F^0(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,2,3,4,5,6)$ tasti bianchi

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
F		00				
		01		X		
11		1	X	X	X	
10		1	1	1	1	

1. $P(F) := \{A\}$
2. $E(F) := \{\bar{A}\}$
3. $M(F) := \{\}$
4. $N(F) := \{\}$
5. $S := \{A\}$
6. R è vuoto
7. SOP = A
un solo letterale, forma minima

45

45

Esercizio 4.5

$F^1(A,B,C,D) = \Sigma m(0,3,5,6,12)$ tasti neri

$F^0(A,B,C,D) = \Sigma m(1,2,4,7,8,13,14)$ tasti bianchi

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
F		00	1	1		
		01	1		1	
11		1		X		
10			X	X	X	X

1. $P(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}, \bar{A}\bar{B}\bar{C}D, \bar{A}\bar{B}C\bar{D}, A\bar{B}\bar{C}\bar{D}, \bar{B}\bar{C}\bar{D}\}$
2. $E(F) := \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}, \bar{A}\bar{B}\bar{C}D, \bar{A}\bar{B}C\bar{D}, A\bar{B}\bar{C}\bar{D}, \bar{B}\bar{C}\bar{D}\}$
3. $M(F) := \{\}$
4. $N(F) := \{\}$
5. $S := \{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}, \bar{A}\bar{B}\bar{C}D, \bar{A}\bar{B}C\bar{D}, A\bar{B}\bar{C}\bar{D}, \bar{B}\bar{C}\bar{D}\}$
6. R è vuoto
7. SOP = $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$
19 letterali

46

46



Soluzioni dell'esempio di esame (prima parte)

47

47



Esercizio 1

Algoritmo:

1. $P(F) := \{\text{implicanti primi di } F\}$
2. $E(F) := \{\text{implicanti primi essenziali}\}$
3. $M(F) := \{\text{mintermini non coperti da } E(F)\}$
4. $N(F) := \{\text{implicanti primi non essenziali}\}$
5. $S := E(F)$
6. $R := M(F)$
7. while ($R \neq \emptyset$) (finché R non è vuoto)
 1. Prendo un $p \in N(F)$ tale che p copri il maggior numero di mintermini di R
 2. $S := S \cup \{p\}$ (aggiungo p in S)
 3. da R tolgo tutti i mintermini coperti da p
8. **SOP** = somma dei prodotti in S

48

48



Esercizio 2.1

Convertire da base 10 a base 2 il numero 3456,76 con precisione p=5

Soluzione:

$3456/2 = 1728$	$3456\%2 = 0$	$0,76 \times 2 = 1,52$	1
$1728 /2 = 864$	$1728\%2 = 0$	$0,52 \times 2 = 1,04$	1
$864/2 = 432$	$864\%2 = 0$	$0,04 \times 2 = 0,08$	0
$432/2 = 216$	$432\%2 = 0$	$0,08 \times 2 = 0,16$	0
$216/2 = 108$	$216\%2 = 0$	$0,16 \times 2 = 0,32$	0 p=5
$108/2 = 70$	$108\%2 = 0$		
$54/2 = 27$	$54\%2 = 0$		
$27/2 = 17$	$27\%2 = 1$		
$13/2 = 6$	$13\%2 = 1$		
$6/2= 3$	$6\%2 = 0$		
$3/2= 1$	$3\%2 = 1$		
$1/2= 0$	$1\%2 = 1$		

$(110110000000,11000)_2$

49

49



Esercizio 2.2

Rappresentare il numero -179_{10} in binario per N=8:

1. complemento a 2
2. modulo e segno
3. complemento a 1

Soluzione:

1. complemento a 2: si rappresentano con 8 bit gli interi in $[-128, 127]$
2. modulo e segno: si rappresentano con 8 bit gli interi in $[-127, 127]$ (1 bit per il segno e 7 bit per il modulo)
3. complemento a 1: i rappresentano con 8 bit gli interi in $[-127, 127]$ (metà dei numeri per i negativi e metà per i positivi e lo 0 viene rappresentato due volte)

Quindi in tutti e tre i casi -179_{10} **non** è rappresentabile

50

50



Esercizio 2.2

Rappresentare il numero -179_{10} in binario per N=9:

1. modulo e segno
2. complemento a 2
3. complemento a 1

Per N = 9

$179/2 = 89$	$179 \% 2 = 1$
$89/2 = 44$	$89 \% 2 = 1$
$44/2 = 22$	$44 \% 2 = 0$
$22/2 = 11$	$22 \% 2 = 0$
$11/2 = 5$	$11 \% 2 = 1$
$5/2 = 2$	$5 \% 2 = 1$
$2/2 = 1$	$2 \% 2 = 0$
$1/2 = 0$	$1 \% 2 = 1$

Con 9 bit $179_{10} = 010110011$

1. complemento a 2: $-179_{10} = 101001101_2$
2. modulo e segno: $-179_{10} = 110110011_2$
3. complemento a 1: $-179_{10} = 101001100_2$

51

51



Esercizio 3

Eseguire la somma e la sottrazione in C2 con N=8 tra la seguente coppia di numeri decimali (ci sono casi di overflow?): -120_{10} e 21_{10}

$120/2 = 60$	$120 \% 2 = 0$
$60/2 = 30$	$60 \% 2 = 0$
$30/2 = 15$	$30 \% 2 = 0$
$15/2 = 7$	$15 \% 2 = 1$
$7/2 = 3$	$7 \% 2 = 1$
$3/2 = 1$	$3 \% 2 = 1$
$1/2 = 0$	$1 \% 2 = 1$

$120_{10} = 01111000_2$
 $-120_{10} = 10001000_2$

Somma: $-120_{10} + 21_{10}$

$21/2 = 10$	$21 \% 2 = 1$
$10/2 = 5$	$10 \% 2 = 0$
$5/2 = 2$	$5 \% 2 = 1$
$2/2 = 1$	$2 \% 2 = 0$
$1/2 = 0$	$1 \% 2 = 1$

$21_{10} = 00010101_2$
 $-21_{10} = 11101011_2$

Differenza: $-120_{10} + (-21_{10})$

$$\begin{array}{r} 10001000+ \\ 00010101= \\ \hline 10011101 \end{array} \quad = -99_{10}$$

$$\begin{array}{r} 10001000+ \\ 11101011= \\ \hline 101110011 \end{array} \quad = -141_{10} \text{ underflow}$$

52

52



Esercizio 4

Semplificare la seguente espressione booleana utilizzando le equivalenze note

$$\begin{aligned}
 & \overline{AB}(\overline{B}+AC)(\overline{A}+\overline{B}) \\
 & = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{B}+AC)(\overline{A}+\overline{B}) = \quad [\text{De Morgan}] \\
 & = (\overline{B}+(\overline{A}AC))(\overline{A}+\overline{B}) = \quad [\text{distributiva } xY+z=(x+z)(y+z)] \\
 & = (\overline{B}+(0C))(\overline{A}+\overline{B}) = \quad [\text{inverso}] \\
 & = (\overline{B}+0)\overline{(A+B)} = \quad [\text{elem. nullo}] \\
 & = \overline{B}\overline{(A+B)} = \quad [\text{elem. neutr.}] \\
 & = \overline{B}\overline{A}\overline{B} = \quad [\text{De Morgan}] \\
 & = \overline{A}\overline{B} \quad \begin{array}{c} A \rightarrow \\ B \rightarrow \end{array} \quad \text{[idempotenza]}
 \end{aligned}$$

53

53



Esercizio 5

Trovare una copertura $F^1(A,B,C,D) = \Sigma m(1,6,11,12)$
 $F^X(A,B,C,D) = \Sigma m(0,2,8,10,13,15)$

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
		00	x 1		x	
		01				1
		11	1 x	x		
		10	x		1 x	

1. $P(F) := \{\overline{A}\overline{B}\overline{C}, AB\overline{C}, A\overline{B}C, \overline{A}C\overline{D}, A\overline{C}\overline{D}, ACD\}$
2. $E(F) := \{\overline{ABC}, \overline{ACD}\}$
3. $M(F) := \{\overline{ABC}\overline{D}, \overline{ABCD}\}$
4. $N(F) := \{\overline{ABC}, ABC, A\overline{C}\overline{D}, ACD\}$
5. $S := \{\overline{ABC}, \overline{ACD}\}$
6. $R := \{\overline{ABC}\overline{D}, \overline{ABCD}\}$
7.
 - 1) $\overline{ABC} \in N(F)$ e copre $AB\overline{C}\overline{D}$
 $S := \{\overline{ABC}, \overline{ACD}, ABC\}$
 $R := \{\overline{ABCD}\}$
 - 2) $\overline{ABC} \in N(F)$ e copre $A\overline{B}CD$
 $S := \{\overline{ABC}, A\overline{C}\overline{D}, ABC, A\overline{BC}\}$
 R è vuoto
8. SOP = $\overline{ABC} + \overline{AC}\overline{D} + AB\overline{C} + A\overline{B}C$

54

54