Lezione 6 16/10/2025 Giovedì

- Modulo di un reale (equaz./diseq.)
- Numeri COMPLESSI
- TRIGONOMETRIA
- ESERCIZI SU RELAZIONI, SUP E INF

AVVISO: SU ARIEL SOLUZIONI ESERCIZI PER CASA

- SU ARIEL "MATEMATICA ASSISTITA" RISOLVERE GLI ESERCIZI

MODULO OPPURE VALORE ASSOLUTO

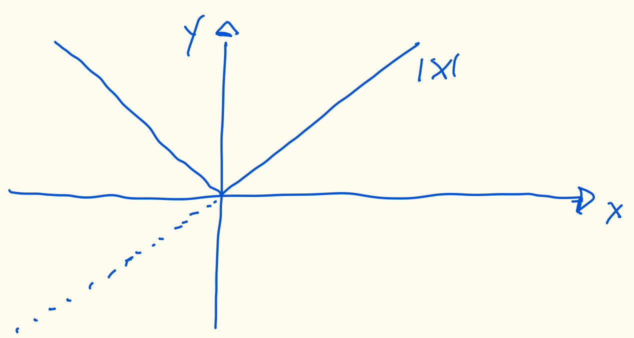
$x \in \mathbb{R}$

DEFINIAMO IL MODULO COME

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

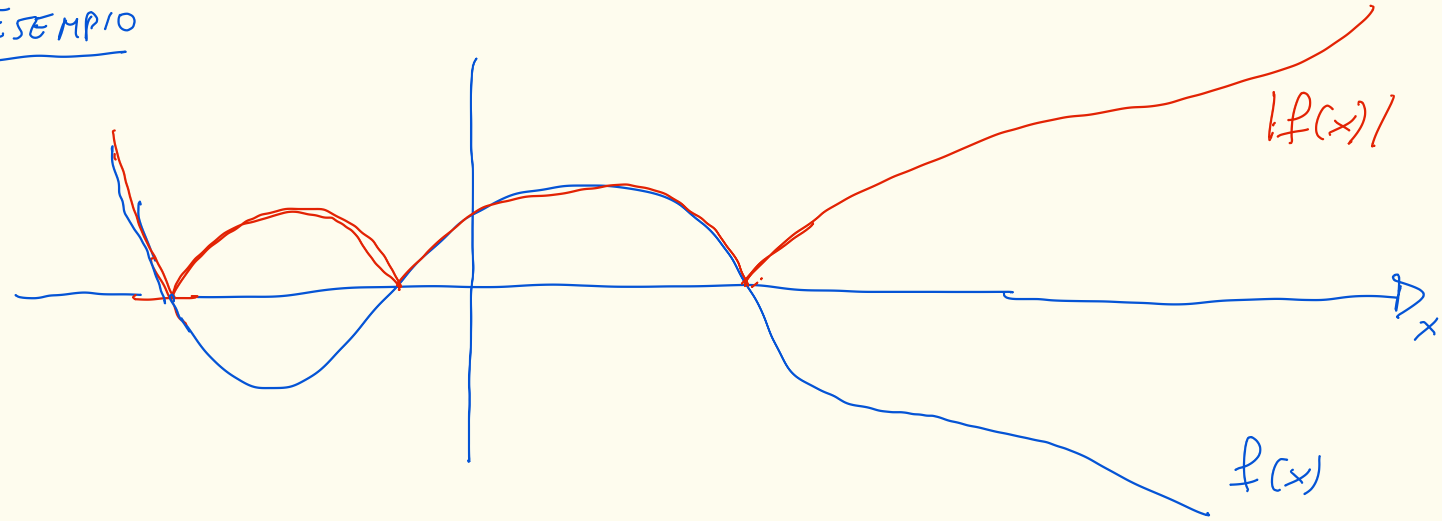
QUINDI $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

GRAFICO



IN GENERALE IL GRAFICO DI $|f(x)|$ SI OTTIENE RIBALTANDO LA PARTE NEGATIVA DI $f(x)$ LUNGO L'ASSE DELLE X

ESEMPIO



OSSERVAZIONE IMPORTANTE

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

SEMPRE POSITIVA

ATTENZIONE $\sqrt{x^2} = x$ É ERRATA

INFATTI GIÀ NON VALE PER $x = -3$

CHE DIVENTA

$3 = -3$ IMPOSSIBILE

EQUAZIONI

CASO SEMPLICE:

$|f(x)| = c$ c É UNA COSTANTE

($c \in \mathbb{R}$)

A) $c \geq 0$: $f(x) = c \lor f(x) = -c$ | B) $c < 0$: SOLUZIONI $= \emptyset$

CASO PIÚ COMPLESSO

$$|f(x)| = |g(x)| \longleftrightarrow f(x)=g(x) \vee f(x)=-g(x)$$

ESEMPIO

$$|x^2-1| = |x+1|$$

$$\Updownarrow$$

$x^2-1 = x+1$

$x^2-x-2=0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$\vee$

$x^2-1 = -x-1$

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$x_1=0$

$x_2=-1$

SOLUZ = $\{2, -1, 0\}$

CASO ANCORA PIÚ COMPLESSO

$$|f(x)| = g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

NOTARE CHE $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$

DISEQUAZIONI

$|f(x)| \geq c$ CON $c \geq 0$ COSTANTE

$$\Updownarrow$$

$f(x) \geq c \quad \vee \quad f(x) \leq -c$

$|f(x)| \leq c$ CON $c > 0$ COSTANTE

$$\Updownarrow$$

$$-c \leq f(x) \leq c \longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq c \\ f(x) \geq -c \end{cases}$$

CASI PIÚ COMPLESSI

$|f(x)| \geq g(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

$|f(x)| \leq g(x)$

$$\Updownarrow$$

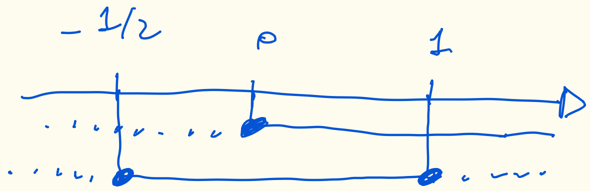
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

ESEMPIO $|2x| \geq 4x^2-2 \longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 2x \geq 0 \\ 2x \geq 4x^2-2 \end{cases}}_{1°} \cup \underbrace{\begin{cases} 2x < 0 \\ -2x \geq 4x^2-2 \end{cases}}_{2°}$

1°

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 2x - 2 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

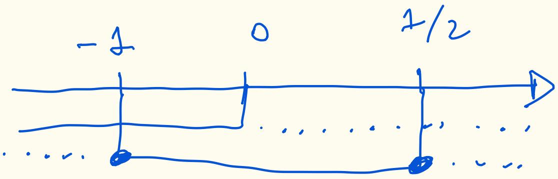


SOLUZ 1° SISTEMA = $[0, 1]$

2°

$$\begin{cases} 2x < 0 \\ -2x \geq 4x^2 - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$



SOLUZ 2° SISTEMA = $[-1, 0)$

LA SOLUZIONE TOTALE DELLA DISEQ È L'UNIONE DELLE SOLUZIONI DEI 2 SISTEMI

$$[0, 1] \cup [-1, 0) = [-1, 1]$$

ESERCIZIO PER CASA: $|x^2 - 1| \geq 1$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$x, y \in \mathbb{R}$: $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$

PERCHÉ?

$-|x| \leq x \leq |x| \qquad -|y| \leq y \leq |y|$

SOMMO MEMBRO A MEMBRO

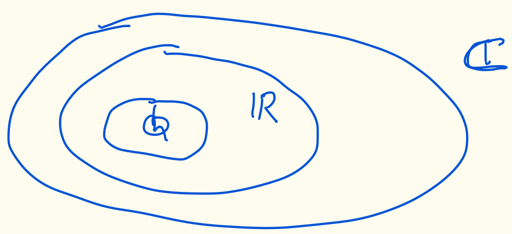
$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

EQUIVALENTE A

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \square$$

NUMERI COMPLESSI



$\mathbb{C}$ = INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI

UN NUMERO COMPLESSO È DEL TIPO

$$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

i È DETTA UNITÀ IMMAGINARIA

È UNA QUANTITÀ TALE CHE $i^2 = -1$

IN PARTICOLARE $i \notin \mathbb{R}$

X É DETTA PARTE REALE

SI INDICA ANCHE CON $Re(z)$

Y É DETTA PARTE IMMAGINARIA

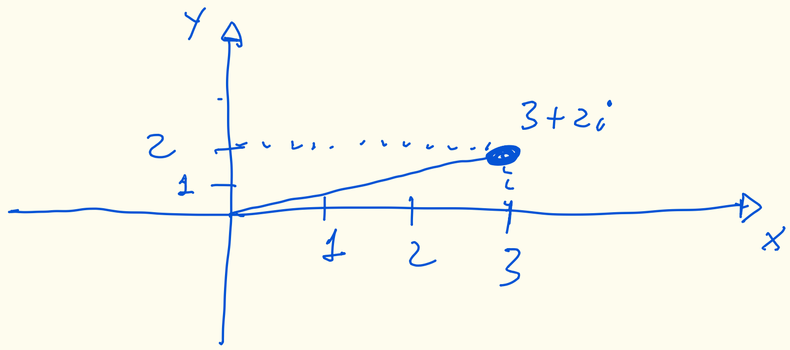
SI INDICA CON $Im(z)$

ESEMPIO

$$z = 3 + 2i$$

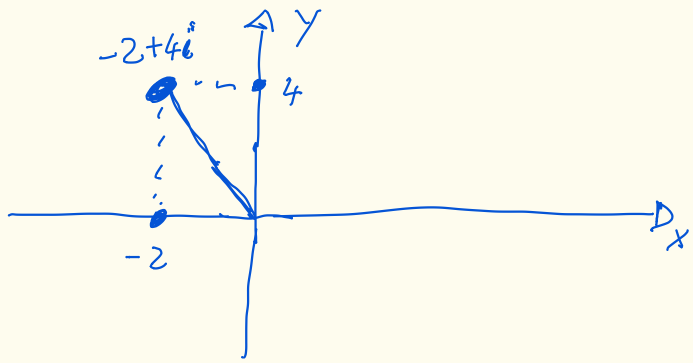
$$Re(z) = 3 \qquad Im(z) = 2$$

PIANO DI GAUSS



ESEMPIO

$$z = -2 + 4i$$

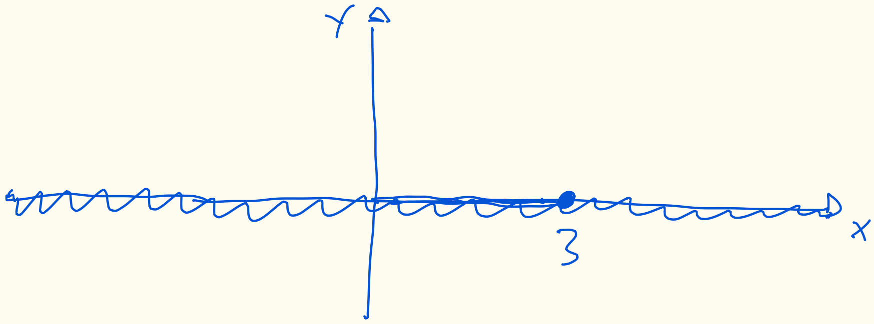


OGNI REALE X É UN NUMERO COMPLESSO IN QUESTO MODO $X + i\,0$

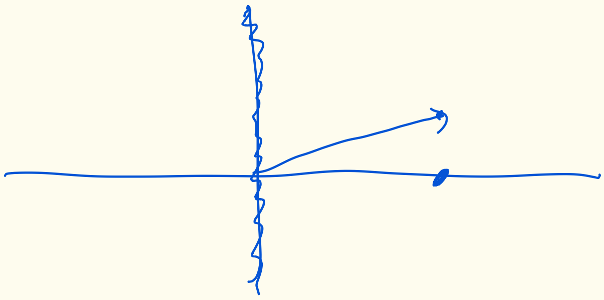
CIOÉ I REALI SONO I NUMERI COMPLESSI CON PARTE IMMAGINARIA NULLA

ESEMPIO IL NUMERO REALE 3 NEL PIANO DI GAUSS

$$3 + i0$$



L'ASSE DELLE X CONSISTE DEI REALI



I COMPLESSI DEL TIPO iy (CON PARTE REALE NULLA) SONO DETTI IMMAGINARI PURI, VIVONO SULL'ASSE Y.

SOMMA

$$(x+iy)+(x'+iy') \doteq x+x'+i(y+y')$$

ESEMPIO

$$(2+3i)+(-1-2i) = 1+i$$

$$i^2 = -1$$

PRODOTTO

$$(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx' + i\,\underbrace{xy' + iyx'}\, + \underbrace{i^2yy'}$$

$$= \underbrace{xx'-yy'}_{\text{PARTE REALE}} + i\,\underbrace{(xy'+yx')}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}}$$

ESEMPIO

$$(2+3i)\cdot(-1-2i) = -2-4i-3i+(3i)(-2i)$$

$$= -2-7i-6i^2 = -2-7i-6(-1) =$$

$$= 4-7i$$

ESERCIZIO

SCRIVERE IN FORMA ALGEBRICA $(x+iy)$

$$\frac{2-2i}{1+3i}$$

$$\frac{2-2i}{1+3i} = \frac{2-2i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{(2-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} =$$

$$= \frac{2-6i-2i-6}{1\cancel{-3i}\cancel{+3i}+9} = \frac{-4-8i}{10}$$

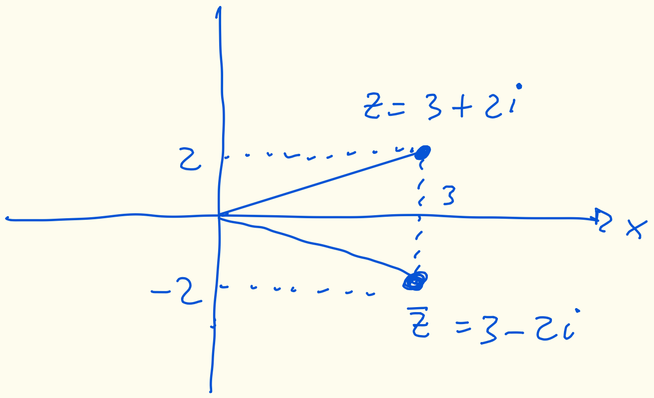
$$= -\frac{4}{10}-\frac{8}{10}i = -\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$$

$$Re = -2/5 \qquad Im = -4/5$$

CONIUGATO

SE $z = x+iy$ É UN COMPLESSO DEFINIAMO IL SUO CONIUGATO

$$\bar{z} = x-iy$$



$\bar{z} = 3 - 2i$

IL MODULO DI $z = x + iy$ NUMERO COMPLESSO È

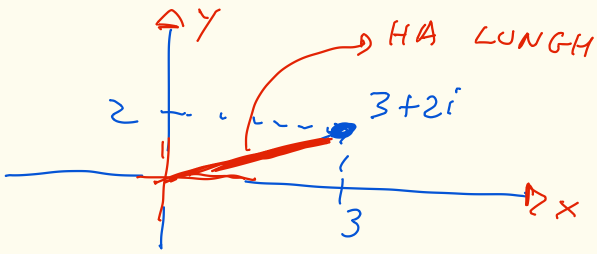
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

IL MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO È SEMPRE UN NUMERO REALE ≥ 0

ESEMPIO $z = 3 + 2i$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

GEOMETRICAMENTE



PROPOSIZIONE

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

PERCHÉ? $z = x + iy$

$$z\bar{z} = \underbrace{(x + iy)}^{z}\underbrace{(x - iy)}^{\bar{z}} = x^2 \cancel{- ixy} \cancel{+ iyx} + y^2 = |z|^2$$

OSS

SE $z=0$ ALLORA $|z|=0$.

VALE ANCHE IL VICEVERSA

CIOÉ $|z|=0$ ALLORA $z=0$

PERCHÉ ?

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

$$x^2+y^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 0 + i\,0 = 0$$

QUINDI $z=0$ É L'UNICO COMPLESSO CHE HA MODULO NULLO

PROPRIETÀ

1) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

4) $\overline{\overline{z}} = z$

PROPRIETÀ DEL MODULO

1) $|z| \geq 0$ ED INOLTRE $|z| = 0$ SE E SOLO SE $z = 0$

2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3) $|z| = |\bar{z}|$

4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

<u>OSS</u>

$x \in \mathbb{R} = x + 0i$

$|x|$ COME NUMERO REALE

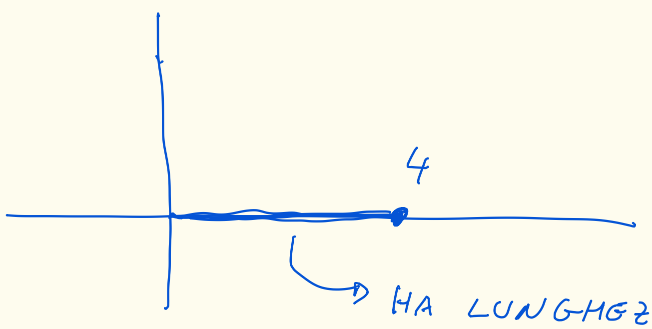
$|x|$ COME NUMERO COMPLESSO

PER I REALI I DUE CONCETTI SONO UGUALI

$$|x + 0i| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

COME COMPLESSO

COME NUMERO REALE



HA LUNGHEZZA 4

ESERCIZIO

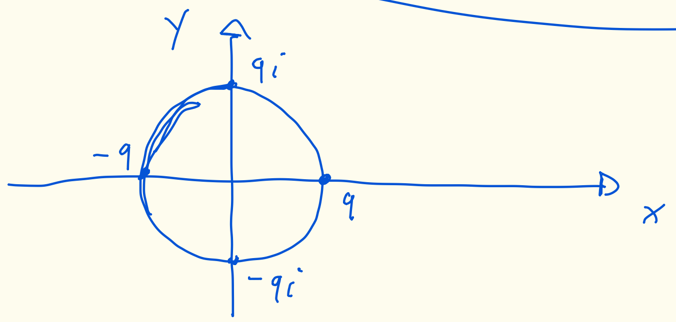
DISEGNARE TUTTI I COMPLESSI z TALI CHE HANNO MODULO UGUALE A 9.

$$z : |z| = 9$$

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 9$$

$$x^2 + y^2 = 81 \rightsquigarrow$$ CIRCONFERENZA RAGGIO 9 CENTRO (0, 0)



ESERCIZIO

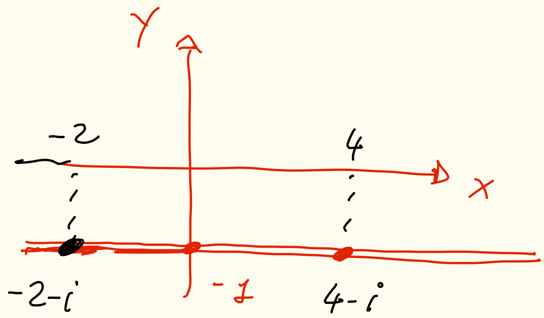
DISEGNARE TUTTI COMPLESSI CHA HANNO PARTE IMMAG. UGUALE A -1

$$z : \mathrm{Im}(z) = -1$$

$$z = x + iy$$

$$\mathrm{Im}(z) = y = -1$$

↳ È UNA RETTA



ESERCIZIO PER CASA

DISEGNARE I COMPLESSI z : $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -1$.

EQUAZIONI CON I COMPLESSI

$$x \in \mathbb{R} : \quad x^2 + 1 = 0$$

$$\text{SOLUZ} = \emptyset$$

$$z \in \mathbb{C} : \quad z^2 + 1 = 0$$

$$z = x + iy$$

$$z^2 = z \cdot z = (x+iy)(x+iy) = x^2 + 2ixy + (iy)^2 =$$

$$= x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$z^2 + 1 = 0 \longleftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy + 1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{x^2 - y^2 + 1 + i(2xy)} = 0$$

DUE NUMERI COMPLESSI SONO UGUALI $\Leftrightarrow$ HANNO STESSA PARTE REALE E IMMAGINARIA.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$2xy = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

CASO $x=0$: SOSTITUISCO NELLA PRIMA EQ

$$-y^2 + 1 = 0$$

$$y^2 = 1$$

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

OTTENGO LE SOLUZ $z_1 = 0 + i\,1 = i$

$z_2 = 0 - i\,1 = -i$

CASO $y=0$: SOSTITUISCO NELLA PRIMA EQ:

$$x^2 - 0^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

NON HA SOLUZ SUI REALI

x É UN REALE PERCHÉ PARTE REALE DI UN COMPLESSO.

SOLUZIONI DI $z^2 + 1 = 0$ SONO $z = \pm i$

ESERCIZIO

RISOLVERE $z^2 + i\,\mathrm{Im}(z) + 2\bar{z} = 0$

$i^2 = -1$

$z = x + iy$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2$$

$$= x^2 + 2ixy - y^2$$

$Im(z) = y$

$\bar{z} = x - iy$

SOSTITUIAMO

$$\underbrace{x^2 - y^2 + 2ixy + iy + 2x - 2iy}\ = 0$$

$$\underbrace{x^2 - y^2 + 2x} + i\underbrace{(2xy - y)} = \underbrace{0}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ \boxed{y(2x-1) = 0} \end{cases}$$

$y = 0$

OPPURE

$2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1/2$

CASO $y=0$:

$x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = -2$

$z_1 = 0 + 0i = 0$

$z_2 = -2 + i\,0 = -2$

CASO $x = 1/2$:

$\frac{1}{4} - y^2 + 1 = 0$

$y^2 = 5/4 \qquad y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}$

$z_4 = 1/2 - i\frac{\sqrt{5}}{2}$

PER CASA

1) $i\,\mathrm{Re}(z) + z^2 = |z|^2 + 1$

2) $z^2 + \bar{z} = 0$

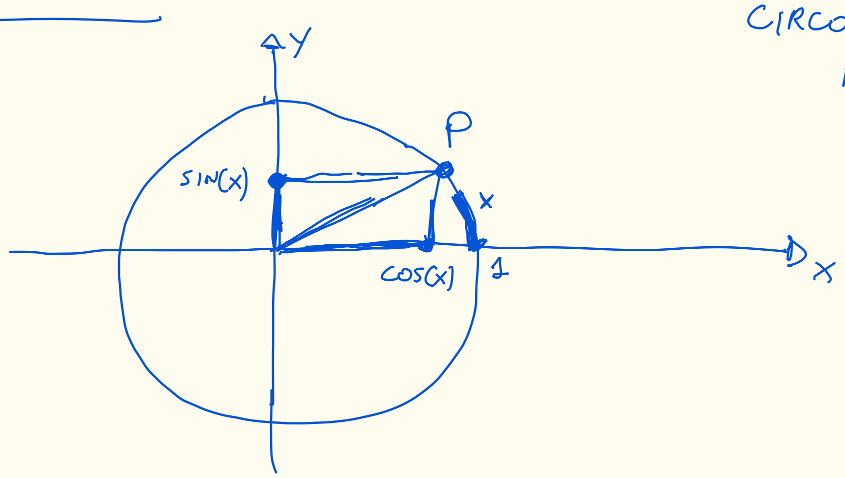
3) $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ SCRIVERE IN FORMA $x+iy$

SETTIMANA PROSSIMA:

- FORMA TRIGONOMETRICA DI z
- POTENZE / RADICI

(DE MOIVRE)

TRIGONOMETRIA



CIRCONFERENZA RAGGIO 1

$L = 2\pi$

COS(x) = PROIEZIONE LUNGO ASSE X

SIN (x) = PROIEZIONE LUNGO ASSE Y

$P = (\cos(x), \sin(x))$ VIVE SULLA CIRCONF.

$x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$

RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA TRIGONOMETRIA

NOTAZIONE:

$$\cos^2(x) = (\cos(x))^2$$

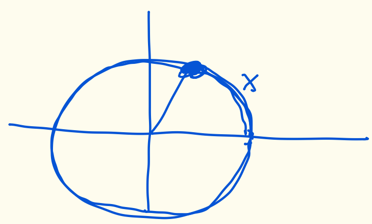
$$\sin^2(x) = (\sin(x))^2$$

$$\sin(x) = \text{sen}(x)$$

SIN(X) E COS(X) SONO FUNZIONI PERIODICHE DI PERIODO 2π

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

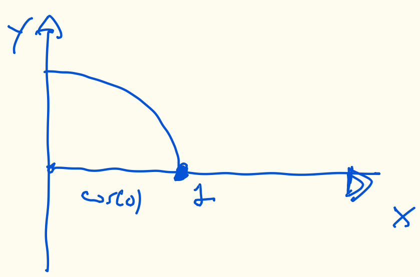
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$



VALORI FONDAMENTALI

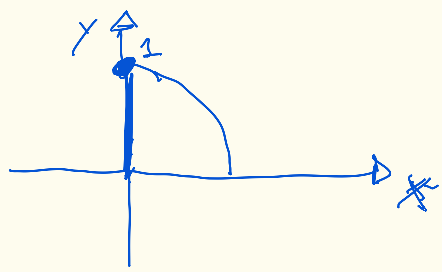
$$\sin(0) = 0$$

$$\cos(0) = 1$$



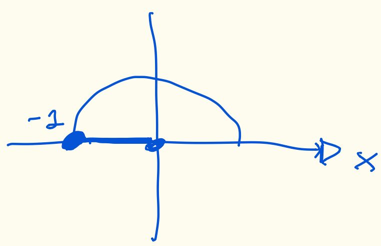
$$\sin(\pi/2) = 1$$

$$\cos(\pi/2) = 0$$



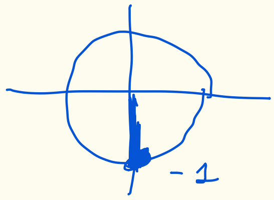
$$\sin(\pi) = 0$$

$$\cos(\pi) = -1$$



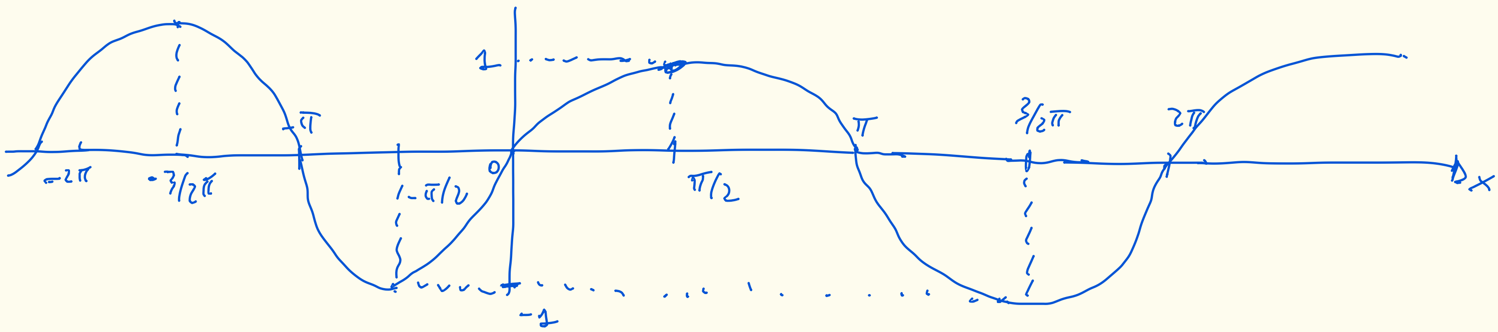
$\sin(3/2\,\pi) = -1$

$\cos(3/2\,\pi) = 0$

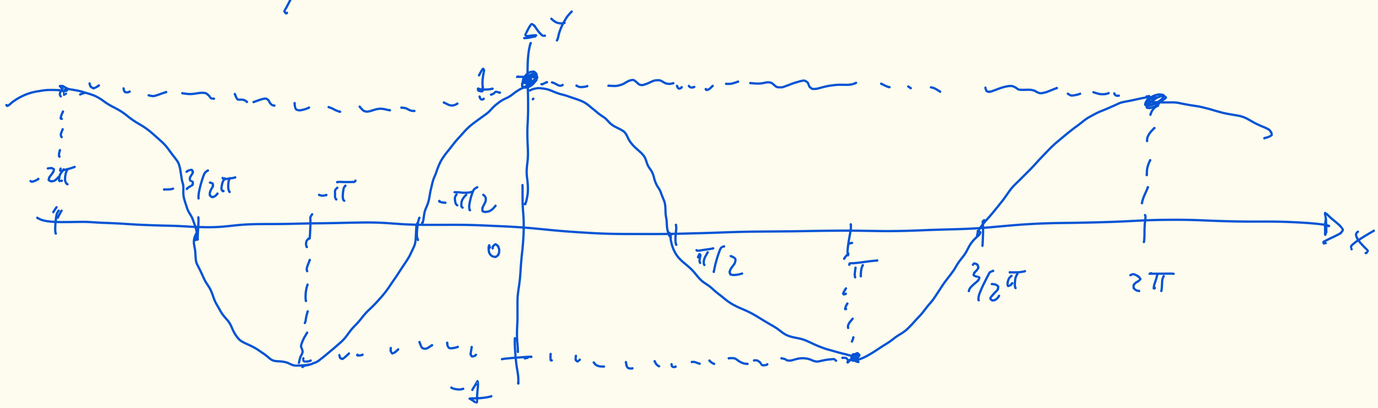


GRAFICI

$y = \sin(x)$



$y = \cos(x)$



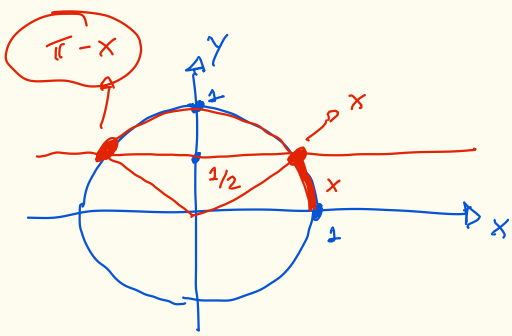
FUNZIONI LIMITATE

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

EQUAZIONE

$\sin(x) = 1/2$



$x = \pi/6$

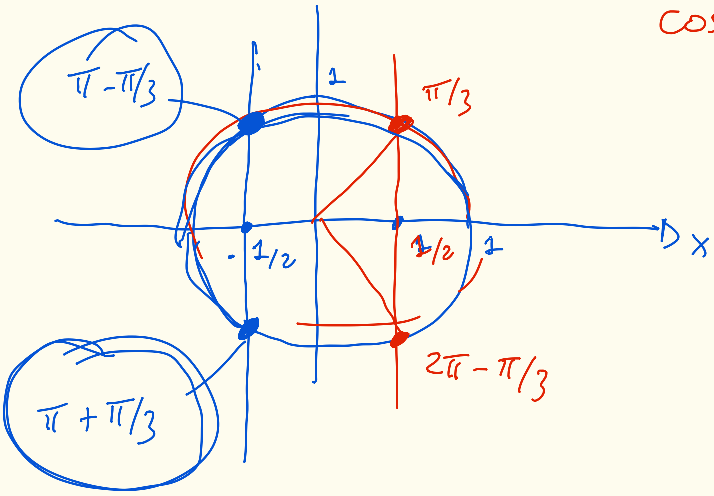
LE SOLUZIONI SONO

$\pi/6 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\pi - x = \pi - \pi/6 = \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = -1/2$$



$\cos x = 1/2$

$x = \pi/3$

SOLUZIONI

$$\pi - \pi/3 + 2k\pi = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\pi + \pi/3 + 2k\pi = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

ESERCIZIO

$$2\sin^2(x) = 3\cos(x)$$

RICORDIAMO:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\boxed{\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)}$$

$$2(1 - \cos^2(x)) = 3\cos(x)$$

$$2 - 2\cos^2(x) - 3\cos(x) = 0$$

CAMBIO IL SEGNO

$$2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2 = 0$$

SOSTITUZIONE

$$y = \cos(x)$$

$$2y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

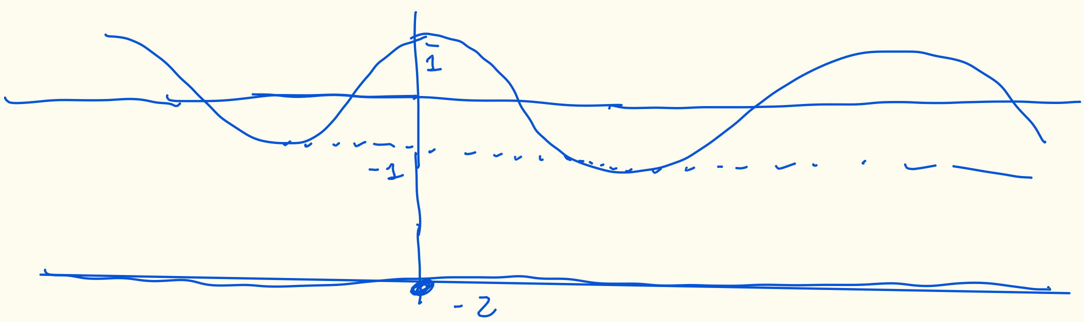
$$\cos(x) = 1/2 \quad \lor \quad \cos(x) = -2$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\boxed{x = \pm \pi/3 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}}$$

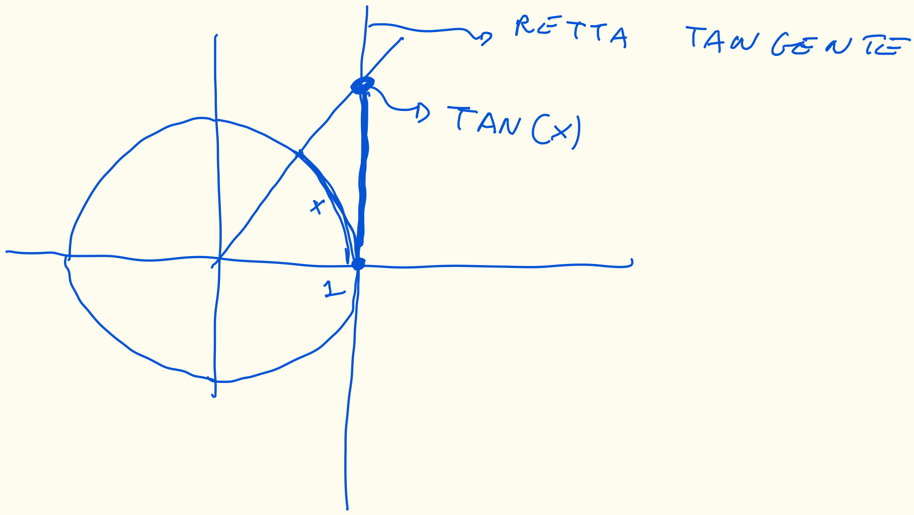
NON HA SOLUZIONI PERCHÉ

$$-1 \le \cos(x) \le 1$$

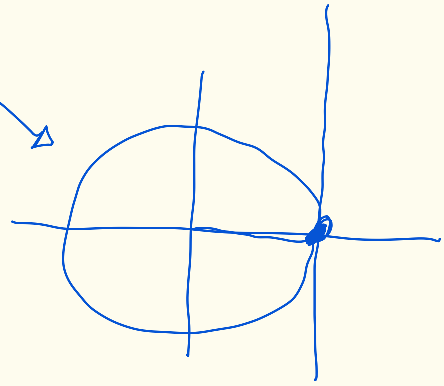


TANGENTE

$$\tan(x) = tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$ PER DEFINIZIONE



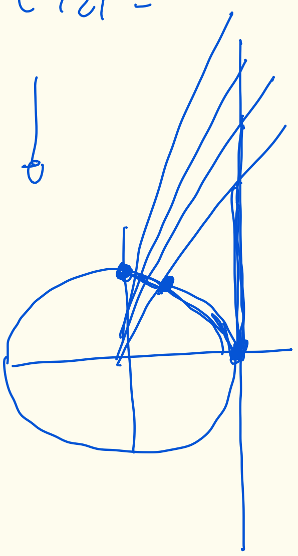
TAN(0) = 0



TAN(π/2) =

↓

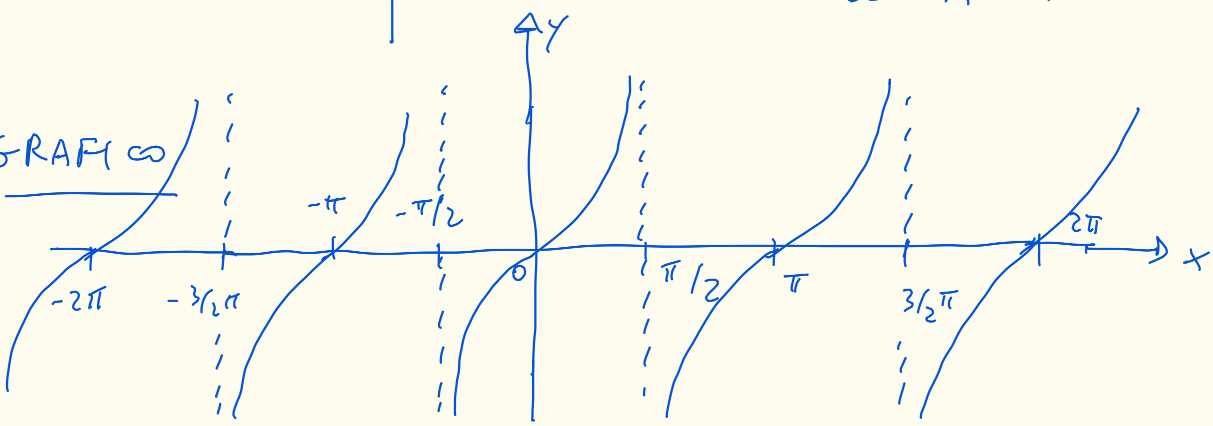
0



TAN(π/2) NON É DEFINITA

MA TENDE A +∞

GRAFICO



TAN(x) NON É DEFINITA IN π/2 + kπ

É PERIODICA DI PERIODO π

$$\tan(x+\pi) = \tan(x)$$

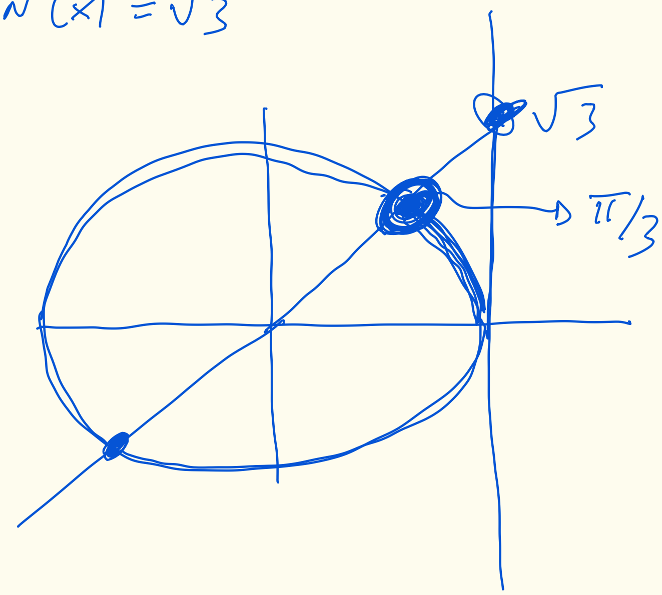
$\tan(0)=0$ $\tan(\pi/4) = 1$ $\tan(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$

TANGENTE NON É UNA FUNZIONE LIMITATA

ESERCIZIO

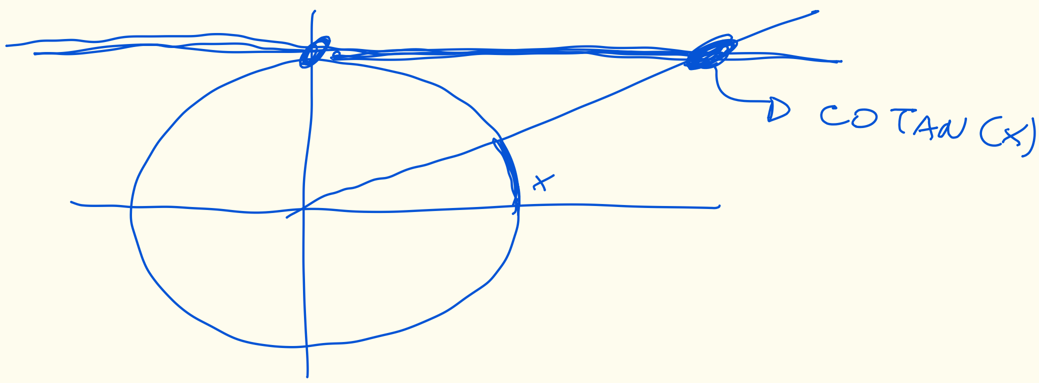
$\tan(x) = \sqrt{3}$



SOLUZIONI: $\pi/3 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

COTANGENTE

$$\cot(x) = \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$



COTAN(x) NON É DEFINITA QUANDO $\sin(x) = 0$

OVVERO $x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

ESERCIZIO

$$\sin(x) = \sqrt{3}\cos(x)$$

DIVIDO PER $\cos(x)$ QUANDO È $\neq 0$

QUINDI PRIMA DISCUTO COSA SUCCEDE

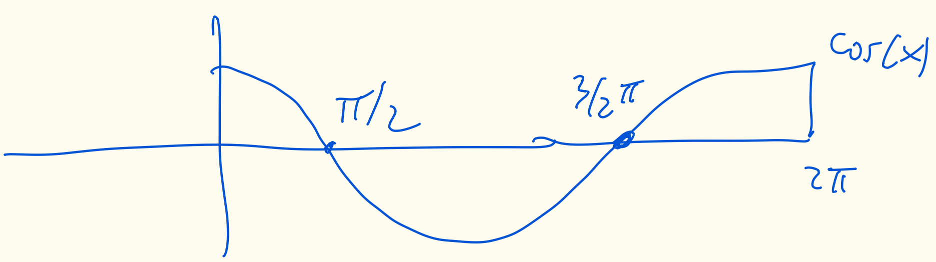
QUANDO $\cos(x) = 0$

$$\cos(x) = 0 \implies x = \pi/2 + k\pi$$

NON SONO SOLUZIONI

DELL'EQUAZIONE INFATTI

$$\underbrace{\sin(\pi/2 + k\pi)}_{= \pm 1} \stackrel{?}{=} \sqrt{3}\underbrace{\cos(\pi/2 + k\pi)}_{= 0}$$



PER GLI ALTRI x DIVIDO PER $\cos(x)$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{3}\cancel{\cos(x)}}{\cancel{\cos(x)}}$$

$\tan(x) = \sqrt{3}$

$$x = \pi/3 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ESERCIZIO

CALCOLARE $\cos(\alpha)$ SAPENDO CHE

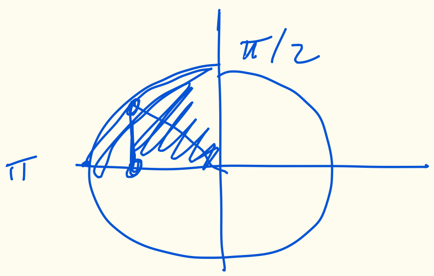
$\sin(\alpha) = 5/13$ E $\pi/2 < \alpha < \pi$

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$$

$$= \pm\sqrt{1 - \left(5/13\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{1 - 25/169}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$$



QUADRANTE 2

COS È NEGATIVO

PRENDIAMO IL MENO

$\cos(\alpha) = -12/13$