Кривые Безье

Кривые Безье используются в компьютерной графике для рисования плавных изгибов, в CSS-анимации и много где ещё.

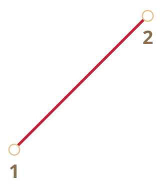
Это очень простая вещь, которую стоит изучить один раз, а затем чувствовать себя комфортно в мире векторной графики и продвинутых анимаций.

Опорные точки

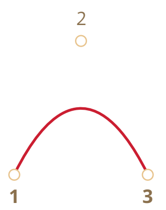
Кривая Безье задаётся опорными точками.

Их может быть две, три, четыре или больше. Например:

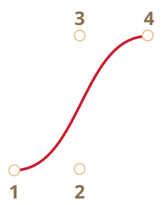
По двум точкам:



По трём точкам:



По четырём точкам:



Если вы посмотрите внимательно на эти кривые, то «на глазок» заметите:

1. **Точки не всегда на кривой.** Это совершенно нормально, как именно строится кривая мы рассмотрим чуть позже.
2. **Степень кривой равна числу точек минус один.** Для двух точек – это линейная кривая (т.е. прямая), для трёх точек – квадратическая кривая (парабола), для четырёх – кубическая.
3. **Кривая всегда находится внутри выпуклой оболочки, образованной опорными точками:**

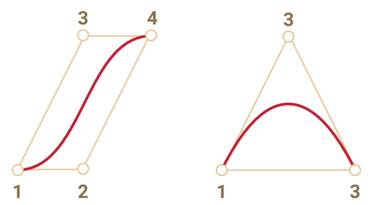
Раздел
Анимация

Навигация по уроку
Опорные точки
Алгоритм «де Кастельжо»
Математика
Итого

Комментарии

Поделиться

Редактировать на GitHub



Благодаря последнему свойству в компьютерной графике можно оптимизировать проверку пересечения двух кривых. Если их выпуклые оболочки не пересекаются, то и кривые тоже не пересекутся. Таким образом, проверка пересечения выпуклых оболочек в первую очередь может дать быстрый ответ на вопрос о наличии пересечения. Проверить пересечение или выпуклые оболочки гораздо проще, потому что это прямоугольники, треугольники и т.д. (см. рисунок выше), гораздо более простые фигуры, чем кривая.

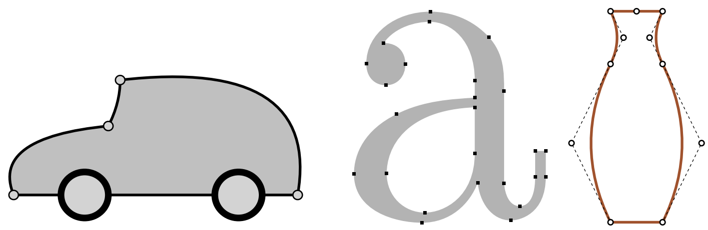
Основная ценность кривых Безье для рисования в том, что, двигая точки, кривую можно менять, причём кривая при этом меняется интуитивно понятным образом.

Попробуйте двигать точки мышью в примере ниже:

Как можно заметить, кривая натянута по касательным 1 → 2 и 3 → 4.

После небольшой практики становится понятно, как расположить точки, чтобы получить нужную форму. А, соединяя несколько кривых, можно получить практически что угодно.

Вот некоторые примеры:



Алгоритм «де Кастельжо»

Есть математическая формула для кривых Безье, но давайте рассмотрим её чуть позже, потому что Алгоритм де Кастельжо идентичен математическому определению кривой и наглядно показывает, как она строится.

Рассмотрим его на примере трёх точек (точки 1,2 и 3 можно двигать). Нажатие на кнопку «play» запустит демонстрацию.

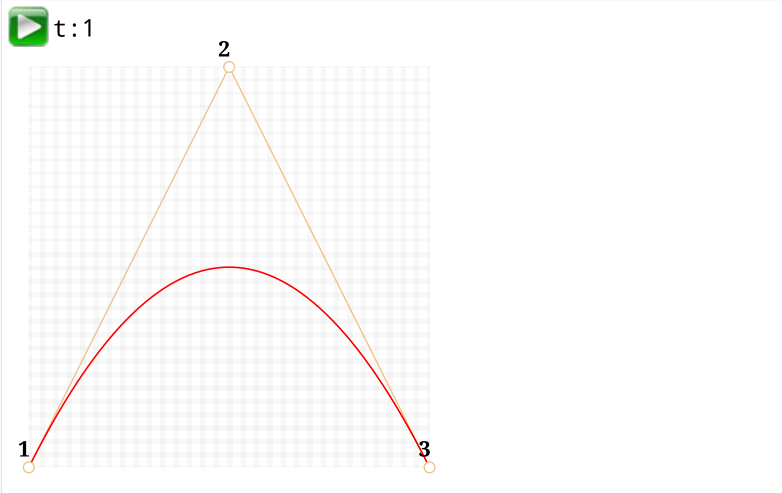
Раздел
Анимация

Навигация по уроку
Опорные точки
Алгоритм «де Кастельжо»
Математика
Итого

Комментарии

Поделиться

Редактировать на GitHub



Построение кривой Безье с 3 точками по «алгоритму де Кастельжо»:

1. Рисуются опорные точки. В примере это: `1`, `2`, `3`.
2. Строятся отрезки между опорными точками в следующем порядке 1 → 2 → 3. На рисунке они коричневые.
3. Параметр `t` «пробегает» значения от `0` до `1`. В примере использован шаг `0.05`, т.е. в цикле `0, 0.05, 0.1, 0.15, ... 0.95, 1`.

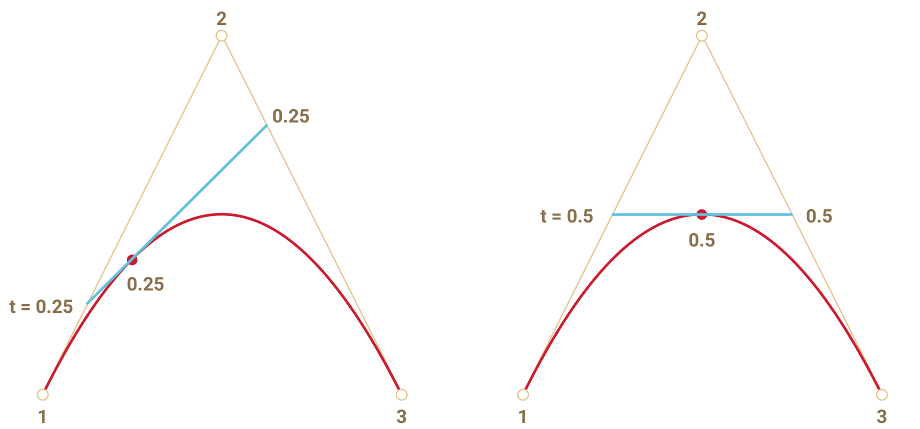
   Для каждого из этих значений `t`:

   - На каждом из коричневых отрезков берётся точка, находящаяся на расстоянии, пропорциональном `t`, от его начала. Так как отрезков два, то и точек две.

     Например, при `t=0` – точки будут в начале, при `t=0.25` – на расстоянии в 25% от начала отрезка, при `t=0.5` – 50% (на середине), при `t=1` – в конце отрезков.

   - Эти точки соединяются. На рисунке ниже соединяющий их отрезок изображён синим.

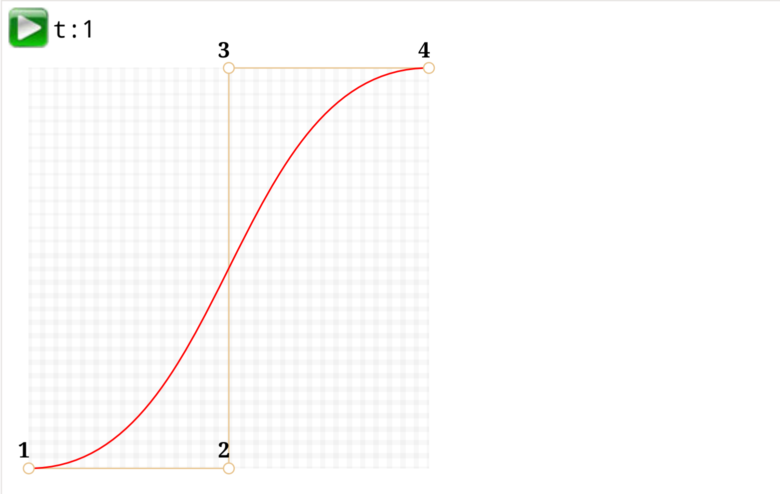
При `t=0.25` При `t=0.5`



4. На получившемся синем отрезке берётся точка на расстоянии, соответствующем `t`. То есть, для `t=0.25` (левый рисунок) получаем точку в конце первой четверти отрезка, для `t=0.5` (правый рисунок) – в середине отрезка. На рисунках выше эта точка отмечена красным.
5. По мере того, как `t` «пробегает» последовательность от `0` до `1`, каждое значение `t` добавляет к кривой точку. Совокупность таких точек для всех значений образует кривую Безье. Она красная и имеет параболическую форму на картинках выше.

Был описан процесс для построения по трём точкам. Но то же самое происходит и с четырьмя точками.

Демо для четырёх точек (точки можно двигать):



Алгоритм для 4 точек:

- Точки по порядку соединяются отрезками: 1 → 2, 2 → 3, 3 → 4. Получается три коричневых отрезка.
- Для `t` на отрезке от `0` до `1`:
  - На отрезках берутся точки, соответствующие текущему `t`, соединяются. Получается два зелёных отрезка .
  - На этих отрезках берутся точки, соответствующие текущему `t`, соединяются. Получается один синий отрезок.
  - На синем отрезке берётся точка, соответствующая текущему `t`. При запуске примера выше она красная.
- Эти точки вместе описывают кривую.

Алгоритм является рекурсивным и может быть обобщён на любое количество контрольных точек.

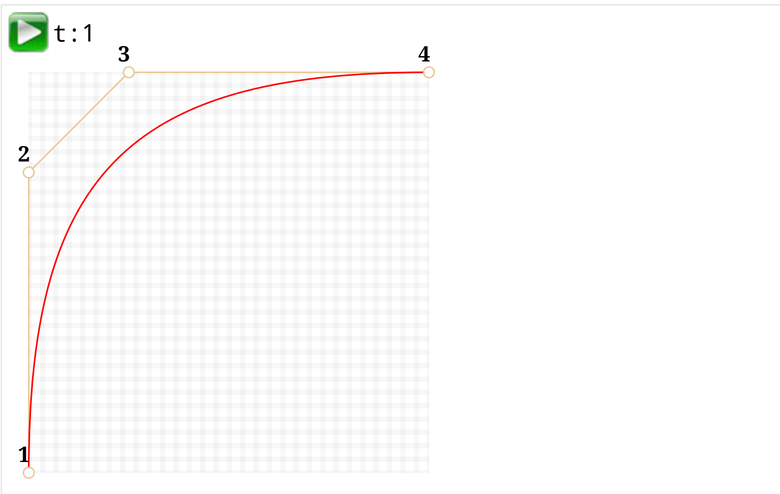
Дано N контрольных точек:

1. Соединяем их, чтобы получить N-1 отрезков.
2. Затем для каждого `t` от `0` до `1` берём точку на каждом отрезке на расстоянии пропорциональном `t` и соединяем их. Там будет N-2 отрезков.
3. Повторяем 2 шаг, пока не останется одна точка.

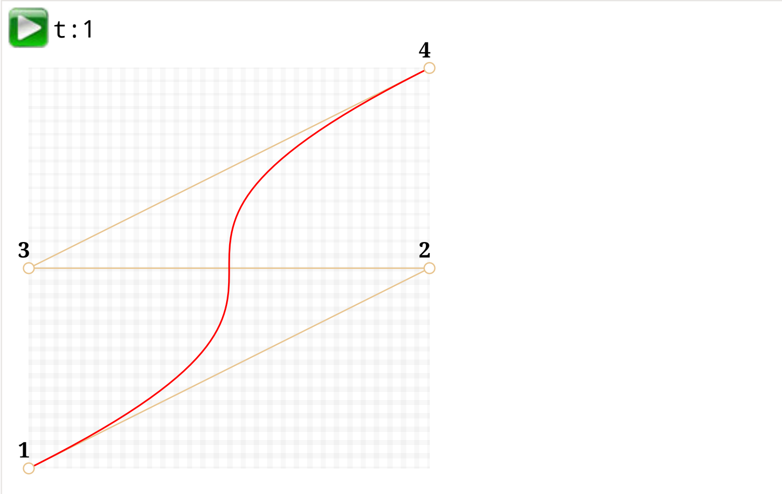
Эти точки образуют кривую.

Запускайте и приостанавливайте примеры, чтобы ясно увидеть отрезки и то, как строится кривая.

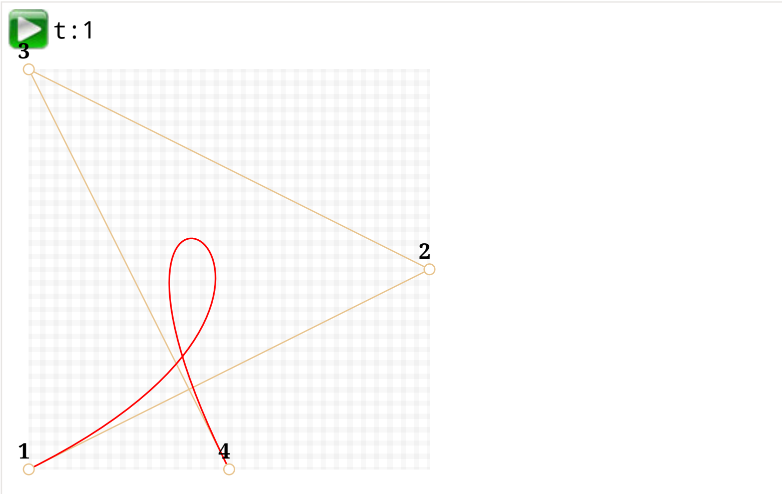
Кривая, которая выглядит как `y=1/t`:



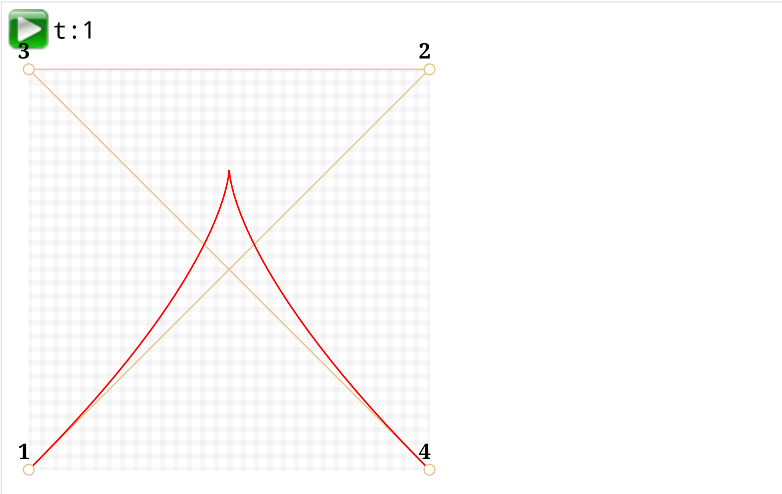
Зигзагообразные контрольные точки тоже работают нормально:



Создание петли возможно:



Негладкая кривая Безье (да, это тоже возможно):



Если в описании алгоритма есть что-то непонятное, посмотрите «живые» примеры выше, они наглядно показывают, как строится кривая.

Поскольку алгоритм является рекурсивным, мы можем построить кривые Безье любого порядка, используя 5, 6 или более контрольных точек. Но на практике много точек не так полезны. Обычно мы берём 2-3 точки, а для сложных линий склеиваем несколько кривых. Это проще для разработки и расчёта.

Раздел
Анимация
Навигация по уроку
Опорные точки
Алгоритм «де Кастельжо»
Математика
Итого
Комментарии
Поделиться
Редактировать на GitHub

Как нарисовать кривую *через* заданные точки?

Для задания кривой Безье используются контрольные точки. Как видим, они не находятся на кривой, кроме первой и последней.

Иногда перед нами стоит другая задача: нарисовать кривую *через* несколько точек, чтобы все они были на одной гладкой кривой. Эта задача называется интерполяцией, и она за рамками нашего изложения.

Для таких кривых существуют математические формулы, например, полином Лагранжа. В компьютерной графике сплайн-интерполяция часто используется для построения плавных кривых, соединяющих множество точек.

Математика

Кривая Безье может быть описана с помощью математической формулы.

Как мы видели, на самом деле нет необходимости её знать, большинство людей просто рисуют кривую, перемещая точки с помощью мыши. Но если вы увлекаетесь математикой – вот она.

Координаты кривой с контрольными точками P_i : первая контрольная точка имеет координаты $P_1 = (x_1, y_1)$, вторая: $P_2 = (x_2, y_2)$ и т.д., описываются уравнением, зависящим от параметра t на отрезке $[0,1]$.

- Формула для 2-х точечной кривой:

  $P = (1-t)P_1 + tP_2$

- Для 3 контрольных точек:

  $P = (1-t)^2P_1 + 2(1-t)tP_2 + t^2P_3$

- Для 4 контрольных точек:

  $P = (1-t)^3P_1 + 3(1-t)^2tP_2 +3(1-t)t^2P_3 + t^3P_4$

Это векторные уравнения. Другими словами, мы можем поставить x и y вместо P, чтобы получить соответствующие координаты.

Например, 3-точечная кривая образована точками (x,y), рассчитанными как:

- $x = (1-t)^2x_1 + 2(1-t)tx_2 + t^2x_3$
- $y = (1-t)^2y_1 + 2(1-t)ty_2 + t^2y_3$

Вместо $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ мы должны поместить координаты 3 контрольных точек, а затем при перемещении t от 0 до 1 для каждого значения t мы получим (x,y) кривой.

Например, если контрольными точками являются $(0,0)$, $(0.5,1)$ и $(1,0)$, уравнения становятся:

- $x = (1-t)^2 * 0 + 2(1-t)t * 0.5 + t^2 * 1 = (1-t)t + t^2 = t$
- $y = (1-t)^2 * 0 + 2(1-t)t * 1 + t^2 * 0 = 2(1-t)t = -2t^2 + 2t$

Теперь, в то время как t «пробегает» от 0 до 1, набор значений (x, y) для каждого t образует кривую для таких контрольных точек.

Итого

Кривые Безье задаются опорными точками.

Мы рассмотрели два определения кривых:

1. Через математическую формулу.
2. Использование процесса рисования: алгоритм де Кастельжо.

Их удобство в том, что:

- Можно рисовать плавные линии с помощью мыши, перемещая контрольные точки.
- Сложные формы могут быть сделаны из нескольких кривых Безье.

Применение:

- В компьютерной графике, моделировании, в графических редакторах. Шрифты описываются с помощью кривых Безье.
- В веб-разработке – для графики на Canvas или в формате SVG. Кстати, все живые примеры выше написаны на SVG. Фактически, это один SVG-документ, к которому точки передаются параметрами. Вы можете открыть его в отдельном окне и посмотреть исходник: demo.svg.
- В CSS-анимации для задания траектории или скорости передвижения.

Комментарии

перед тем как писать…