Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Е. А. МОЛОКАНОВА, А. И. УРУСОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

Учебное электронное издание
на компакт-диске

Тамбов
• Издательство ФГБОУ ВО «ТГТУ» •
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Е. А. МОЛОКАНОВА, А. И. УРУСОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

Утверждено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия для студентов 1 курса инженерных
и экономических направлений высшего профессионального образования

Учебное электронное издание
комплексного распространения

Тамбов
• Издательство ФГБОУ ВО «ТГТУ» •
2017

УДК 51(075.8)
ББК 221я73
Ж86

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
заведующая кафедрой функционального анализа
ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
Е. А. Панасенко

Доктор технических наук, доцент кафедры
«Техническая механика и детали машин» ФГБОУ ВО «ТГТУ»
С. В. Плотникова

Жуковская, Т. В.

Ж86 Высшая математика в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2 ч. / Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, А. И. Урусов. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2017. – Ч. 1. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 37,0 Mb ; RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-8265-1709-3

Ч. 1. – 2017. – 1 электрон. опт. диск ; 37,0 Mb ; RAM.

ISBN 978-5-8265-1710-9

Изложены краткие теоретические сведения по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному исчислению функций одной переменной. По каждому из разделов представлен набор задач для аудиторной и самостоятельной работы студентов. Задачи подобраны таким образом, что решая их как под контролем преподавателя, так и самостоятельно, студент сможет более детально разобраться и лучше усвоить изучаемую тему.

Предназначено для студентов 1 курса инженерных и экономических направлений высшего профессионального образования.

УДК 51(075.8)
ББК 221я73

Все права на размножение и распространение в любой форме остаются за разработчиком.
Нелегальное копирование и использование данного продукта запрещено.

ISBN 978-5-8265-1710-9 (ч. 1)
ISBN 978-5-8265-1709-3 (общ.)

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»), 2017

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Высшая математика в примерах и задачах. Часть 1» предназначено для изучения дисциплины «Высшая математика» студентами первого курса инженерных и экономических направлений высших учебных заведений. В данном пособии первая глава посвящена изучению линейной и векторной алгебры, вторая – аналитической геометрии, третья – дифференциальному исчислению функций одной переменной.

По каждой из указанных выше тем изложены краткие теоретические сведения, представлен набор заданий для использования на практических занятиях, индивидуальный набор примеров и задач для самостоятельного выполнения с решением типового задания. Задания каждого типа включены в количестве 25-ти вариантов. Задачи подобраны с таким учётом, что при самостоятельном решении или решении под контролем преподавателя они позволяют более детально разобраться и лучше усвоить изучаемую тему, а также самостоятельно готовиться к контрольным точкам по индивидуальным вариантам.

Приоритет индивидуальной работы способствует максимальному овладению, например, общепрофессиональной компетенцией ОПК-2: способность демонстрировать базовые знания в области естественно-научных дисциплин, готовность выявлять естественно-научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности; применять для их разрешения основные законы естествознания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Материал изложен доступно и просто, в небольшом объёме, но полно и логически связно, в рамках разумной математической строгости, соответствует разделам учебных программ инженерных и экономических направлений подготовки бакалавров.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1.1. Теоретические сведения

1. *Матрица* размером $m \times n$ – прямоугольная таблица чисел или буквенных выражений, записанных в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

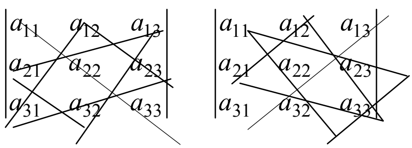
где a_{ij} – элементы матрицы; индекс i – номер строки, а индекс j – номер столбца ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$).

2. Числовой характеристикой квадратной матрицы является *определитель* (или *детерминант*). Обозначение: $|A|$, $\det A$.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ – *определитель второго порядка*, числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$ –

определитель третьего порядка. Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольников (рис. 1.1):



(+) (–)

Рис. 1.1

Минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ – определитель, полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца определителя $|A|$.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ – минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ – *определитель n-го порядка.*

Определитель n-го порядка вычисляется *разложением по любой строке* (*столбцу*): равен сумме произведений элементов любого столбца (или строки), умноженных на их алгебраические дополнения. Например, разложение по 2-й строке определителя n-го порядка имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + ... + a_{2n}A_{2n} .$$

Основные с*войства определителей*:

1) если в определителе переставить местами два столбца (две строки), то определитель изменит свой знак на противоположный;

2) если в определителе два столбца (две строки) равны, то определитель равен нулю;

3) общий множитель элементов столбца (строки) можно выносить за знак определителя;

4) если в определителе все элементы некоторого столбца (строки) равны нулю, то определитель равен нулю;

5) если в определителе соответствующие элементы двух столбцов или двух строк пропорциональны, то определитель равен нулю;

6) если к элементам некоторого столбца (строки) определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

Остальные свойства определителей сформулированы в работе [5].

3. Линейные операции над матрицами. Транспонирование.

Сложение матриц. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначение: $C = A + B$.

Пример 1.1. Найдите сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -1+3 \\ 2+1 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц:

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $A + \theta = A$.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ *на число* λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, полученная умножением всех элементов матрицы A на число λ, т.е. $b_{ij} = \lambda a_{ij}$. Обозначение: $B = \lambda A$.

Пример 1.2. Найдите произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 3$.

$$\lambda A = 3\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Разность двух матриц (одинакового размера) определяется равенством

$$(A - B) = A + (-1)B.$$

Транспонирование – операция замены строк матрицы столбцами с сохранением их номеров. A^T – *транспонированная* матрица по отношению к A.

4. Умножение матриц. Степень матрицы.

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{m\times n}$ на матрицу $B = (b_{kj})_{n\times l}$ называется такая матрица $C = (c_{ij})_{m\times l}$, $C = AB$, каждый элемент которой определяется равенством

$$c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Свойства произведения матриц:

1) в общем случае $AB \neq BA$;

2) $(AB)C = A(BC)$;

3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

4) $(A + B)C = AC + BC$;

5) $C(A + B) = CA + CB$;

6) $(AB)^T = B^T A^T$;

7) $EA = AE = A$.

Целая неотрицательная степень матрицы определяется равенствами

$$A^n = \underbrace{AA \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}} = A^{n-1}A = AA^{n-1} \text{ и } A^0 = E.$$

5. Обратная матрица.

Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Если $\det A \neq 0$, то матрица A – *невырожденная.*

Всякая невырожденная матрица A имеет обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}, \tag{1.1}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнениям матрицы A; $\widetilde{A}$ – *присоединённая* матрица.

6. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы.

К *элементарным преобразованиям матриц* относятся: умножение всех элементов некоторой строки или столбца на число $\lambda \neq 0$; прибавление к элементам некоторой строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на произвольное число α; перестановка любых строк или столбцов матрицы.

Матрицы, полученные одна из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований, называются *эквивалентными*. Обозначение $A \sim B$.

Ранг матрицы A – число ненулевых строк ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Обозначение: r_A или $r(A)$, или $rank A$.

Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.

1.1.2. Учебные занятия

1. *Определители второго и третьего порядка.*

1.1.1. Вычислите определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & b \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & -\operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$.

1.1.2. Расположите определители в возрастающем порядке:

1) $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$.

1.1.3. При каком значении α определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2\alpha+1 \end{vmatrix}$ равен нулю?

1.1.4. Решите уравнение:

а) $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$.

1.1.5. Вычислите определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}$.

1.1.6. Решите уравнение и неравенство:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$.

1.1.7. Вычислите определитель: а) используя разложение по строке или столбцу, применяя свойства определителей; б) приведя его к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

1.1.8. Вычислите определитель n-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$.

2. ***Линейные операции над матрицами. Транспонирование.***

1.1.9. Найдите линейные комбинации матриц:

а) $2A+3B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $3A-4B+2E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

1.1.10. Найдите линейные комбинации матриц:

а) $A-5B$, если $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 8 & 0 & 4 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $5A+3B-2E$, если $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 3 & -1\\ 5 & 8 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -6\\ 1 & -6 & 2\\ -4 & -13 & 4\end{pmatrix}$.

1.1.11. Вычислите произведения AA^T и $A^T A$ при заданной матрице A:

а) $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

3. ***Произведение матриц.***

1.1.12. Даны матрицы A, B, C, D, F, G, K. Найдите те из произведений AB, BA, AC, CA, AD, DA, AF, FA, BF, FB, DF, FD, CG, GC, BK, KB, которые имеют смысл.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 11 & 3\\ -4 & 0 & -2\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}7\\ -1\\ 1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 0 & 7\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}0 & 4 & 5\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}3 & 0 & -5 & 11\\ -2 & 3 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

1.1.13. Найдите матрицу A^n:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

4. ***Обратная матрица.***

1.1.14. Найдите обратную матрицу A^{-1} матричным методом. Проверьте коммутативность матриц A и A^{-1}, если:

а) $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

1.1.15. Решите матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; б) $X\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. ***Элементарные преобразования. Ранг матрицы.***

1.1.16. Найдите ранг матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 18 & 1 \\ 1 & 7 & 41 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$.

Индивидуальные задания

1. Решите уравнение:

1.1. $\begin{vmatrix} x & 0{,}2 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; 1.2. $\begin{vmatrix} x & 0{,}4 \\ -5 & x-3 \end{vmatrix} = 0$; 1.3. $\begin{vmatrix} x-1 & 0{,}4 \\ 5 & x \end{vmatrix} = 0$;

1.4. $\begin{vmatrix} x & 0{,}1 \\ -10 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; 1.5. $\begin{vmatrix} x & 0{,}2 \\ -10 & x-3 \end{vmatrix} = 0$; 1.6. $\begin{vmatrix} x-1 & 0{,}2 \\ 10 & x \end{vmatrix} = 0$;

1.7. $\begin{vmatrix} x-2 & 0{,}2 \\ -5 & x \end{vmatrix} = 0$; 1.8. $\begin{vmatrix} x-3 & 0{,}4 \\ -5 & x \end{vmatrix} = 0$; 1.9. $\begin{vmatrix} x & 0{,}4 \\ 5 & x-1 \end{vmatrix} = 0$;

1.10. $\begin{vmatrix} x-2 & 0{,}1 \\ -10 & x \end{vmatrix} = 0$; 1.11. $\begin{vmatrix} x-3 & 0{,}2 \\ -10 & x \end{vmatrix} = 0$; 1.12. $\begin{vmatrix} x & 0{,}2 \\ 10 & x-1 \end{vmatrix} = 0$;

1.13. $\begin{vmatrix} x-7 & -4 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$; 1.14. $\begin{vmatrix} x & 1{,}2 \\ 10 & x-7 \end{vmatrix} = 0$; 1.15. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$;

1.16. $\begin{vmatrix} x-2 & \frac{1}{3} \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0$; 1.17. $\begin{vmatrix} x-7 & 4 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0$; 1.18. $\begin{vmatrix} x & \frac{1}{2} \\ 4 & x-1 \end{vmatrix} = 0$;

1.19. $\begin{vmatrix} x & 0{,}2 \\ 5 & x \end{vmatrix} = 0$; 1.20. $\begin{vmatrix} x & 0{,}8 \\ 5 & x \end{vmatrix} = 0$; 1.21. $\begin{vmatrix} 2x & 0{,}4 \\ 10 & x-1 \end{vmatrix} = 0$;

1.22. $\begin{vmatrix} x-2 & 0{,}2 \\ -10 & 2x \end{vmatrix} = 0$; 1.23. $\begin{vmatrix} x-3 & 0{,}4 \\ -10 & 2x \end{vmatrix} = 0$; 1.24. $\begin{vmatrix} 2x & 0{,}4 \\ 10 & x-1 \end{vmatrix} = 0$; 1.25. $\begin{vmatrix} x-7 & -6 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

Пример 1.1.1. Решите уравнение $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Раскрываем определитель второго порядка

$$-3\cdot(2x-3)-(-x)\cdot 4=0, \quad -6x+9+4x=0, \quad -2x=-9, \quad x=4{,}5.$$

Ответ: $x=4{,}5$.

2. Вычислите определитель:

2.1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; 2.2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 10 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; 2.3. $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

2.4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 7 \\ 11 & 5 & -2 \end{vmatrix}$; 2.5. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 8 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 2.6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

2.7. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; 2.8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; 2.9. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 11 & 4 \end{vmatrix}$;

2.10. $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; 2.11. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; 2.12. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -11 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

2.13. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 10 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 2.14. $\begin{vmatrix} 10 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 2.15. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

2.16. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ 6 & -7 & 1 \end{vmatrix}$; 2.17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; 2.18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;

2.19. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$; 2.20. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 2.21. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

2.22. $\begin{vmatrix} 11 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 2.23. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 2.24. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; 2.25. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Пример 1.1.2. Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0\cdot 4\cdot 8 + 3\cdot 7\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot 5 - 6\cdot 4\cdot 2 - 0\cdot 7\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot 8 = .$$

$$= 0 + 42 + 30 - 48 - 0 - 24 = 72 - 72 = 0.$$

Ответ: $\Delta = 0$.

3. Вычислите определитель четвёртого порядка:

3.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;
3.2. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;
3.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

3.4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;
3.5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;
3.6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$;

3.7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;
3.8. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;
3.9. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

3.10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;
3.11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;
3.12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;

3.13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;
3.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;
3.15. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ -7 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;

$$3.16.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 3.17.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 3.18.\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 11 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$3.19.\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 3.20.\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 3.21.\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$3.22.\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \ 3.23.\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \ 3.24.\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \ 3.25.\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Пример 1.1.3. Вычислите определитель четвёртого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используем разложение по строке или столбцу и применяем свойства определителей. Умножаем третью строку на (–1) и прибавляем её к четвёртой, затем раскладываем определитель по четвёртой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-1) \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

(определитель третьего порядка разложили по первой строке):

$$= 2\cdot\left(2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 2\cdot(2\cdot 3 + 2\cdot 4) = 28.$$

Ответ: $\Delta = 28$.

4. Даны матрицы A и B. Найдите:

а) $AB + qB$;

б) A^{-1}. Проверьте справедливость равенства $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Замечание: задания выполняются в соответствии с последней цифрой порядкового номера в журнале.

4.1. $q = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

4.2. $q = -3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

4.3. $q = -4$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

4.4. $q = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$;

4.5. $q = -5$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;

4.6. $q = -2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

4.7. $q = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

4.8. $q = -3$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

4.9. $q = 3$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

4.10. $q = -2$, $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 1.1.4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) $AB+2B$; б) A^{-1}; в) проверьте справедливость равенства $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Решение.

а) Найдём матрицу $AB+2B$.

Первоначально в соответствии с определением произведения матриц найдём матрицы AB и $2B$:

$$AB=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&3&-1\\2&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&5\\-2&3&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-2) & 0\cdot3+2\cdot2+0\cdot3 & 0\cdot(-1)+2\cdot5+0\cdot0\\ -1\cdot1+3\cdot0+-1\cdot(-2) & -1\cdot3+3\cdot2+(-1)\cdot3 & -1\cdot(-1)+3\cdot5+(-1)\cdot0\\ 2\cdot1+3\cdot0+3\cdot(-2) & 2\cdot3+3\cdot2+3\cdot3 & 2\cdot(-1)+3\cdot5+3\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&4&10\\1&2&16\\-4&21&13\end{pmatrix},$$

$$2B=2\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&5\\-2&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&-2\\0&4&10\\-4&6&0\end{pmatrix}.$$

Далее найдём $AB+2B$:

$$AB+2B=\begin{pmatrix}0&4&10\\1&2&16\\-4&21&13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&6&-2\\0&4&10\\-4&6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&10&8\\1&6&26\\-8&27&13\end{pmatrix}.$$

б) Найдём матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&3&-1\\2&3&3\end{pmatrix}$.

Вычислим определитель:

$$\det A=\begin{vmatrix}0&2&0\\-1&3&-1\\2&3&3\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&-1\\2&3\end{vmatrix}=-2\cdot(-3+2)=2\neq0.$$

Алгебраические дополнения элементов матрицы равны:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&-1\\3&3\end{vmatrix}=12$; $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&-1\\2&3\end{vmatrix}=1$; $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&3\\2&3\end{vmatrix}=-9$;

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6\,; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0\,; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\,;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2\,; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\,; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\,.$$

Присоединённая матрица имеет вид

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

тогда обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -4{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Проверим справедливость равенства $A^{-1}A = AA^{-1} = E$:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -4{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-2 & 12-9-3 & 3-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2+2 & -9+6+3 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -4{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0+1-0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 12+1{,}5-12{,}5 & -6+0+6 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Ответ: а) $AB + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 1 & 6 & 26 \\ -8 & 27 & 13 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -4{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найдите ранг матрицы:

5.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; 5.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$; 5.3. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

5.4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; 5.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 5.6. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 11 & 12 & 25 \end{pmatrix}$;

5.7. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; 5.8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 5.9. $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 7 & 8 \\ 3 & 11 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

5.10. $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; 5.11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5.12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

5.13. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -3 \\ 7 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5.14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5.15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 17 \end{pmatrix}$;

5.16. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; 5.17. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; 5.18. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 18 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$;

5.19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}$; 5.20. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 13 \\ 1 & 3 & -2 & -9 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$; 5.21. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$;

5.22. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$; 5.23. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; 5.24. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

5.25. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 1.1.5. Определите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}2&3&4&7&1\\1&-1&3&3&3\\0&-2&1&-1&2\\1&3&2&2&-1\end{pmatrix}$.

Решение. Элементарными преобразованиями приведём матрицу к ступенчатой. Переставим первую и четвёртую строки, применим ко второй и четвёртой строкам элементарное преобразование 2, а затем к элементам второго столбца прибавим соответствующие элементы пятого столбца:

$$\begin{pmatrix}2&3&4&7&1\\1&-1&3&3&3\\0&-2&1&-1&2\\1&3&2&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2&-1\\1&-1&3&3&3\\0&-2&1&-1&2\\2&3&4&7&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\ \times(-2)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2&-1\\0&-4&1&1&4\\0&-2&1&-1&2\\0&-3&0&3&3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&2&2&-1\\0&0&1&1&4\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&2&-1\\0&0&1&1&4\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times 3/2\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&2&-1\\0&0&1&1&4\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Далее – к третьей и четвёртой строкам применим элементарное преобразование 2. Количество ненулевых строк в ступенчатой матрице равно 3, следовательно, $r(A)=3$.

Ответ: $r(A)=3$.

1.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.2.1. Теоретические сведения

1. Общие сведения. Условия совместности.

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{1.2}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы; x_j – неизвестные; b_i – свободные члены (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n). Если все свободные члены системы (1.2) равны нулю, то система называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Если система (1.2) имеет решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*. Если решение системы единственное, то она называется *определённой*, если система имеет несколько решений (более одного), то она называется *неопределённой*.

Рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a & a & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где A – *матрица системы*; B, X – *матрицы-столбцы* соответственно *неизвестных* и *свободных членов*.

$AX = B$ – матричная запись системы (1.2).

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_m \end{array}\right)$$ – *расширенная матрица* системы.

Для того чтобы *система линейных уравнений* (1.2) была *совместна*, необходимо и достаточно, чтобы *ранг расширенной матрицы системы был равен рангу матрицы системы* $r(A') = r(A)$.

2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Пусть число уравнений системы (1.2) равно числу неизвестных *n* = *m*. Рассмотрим методы и решения систем с квадратной матрицей на примере систем трёх линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

2.1. Матричный метод.

AX = *B* – матричное уравнение системы (1.4). Решение находится по формуле

$$X = A^{-1}B, \tag{1.5}$$

где *X* – решение системы в матричной форме; A^{-1} – обратная матрица матрицы системы.

2.2. Метод Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{1.6}$$

Формулы (1.6) называются *формулами Крамера* для системы (1.4), в которых:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ – *главный определитель* системы;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$ – *вспомогательные определители*.

2.3. Решение СЛАУ произвольной размерности. Метод Гаусса.

Метод Гаусса – универсальный метод решения систем линейных уравнений, применяется в случаях: $\Delta = 0$; $n \neq m$, $m = n > 3$; и состоит из двух этапов, условно называемых *прямой* и *обратный ход.*

Прямой ход заключается в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками. После чего осуществляется исследование системы на совместность и определённость путём сравнения рангов матрицы системы A и расширенной матрицы A'. При этом возможны следующие случаи: если $r(A') > r(A)$, то система несовместна; если $r(A') = r(A) = n$, то система является определённой; если $r(A') = r(A) < n$, то система является неопределённой.

Если система является неопределённой ($r(A') = r(A) < n$), то некоторые её неизвестные объявляются *свободными*, а остальные – *главные* – через них выражаются. Количество свободных неизвестных равно $k = n - r(A)$.

Обратный ход – по ступенчатой матрице восстанавливается система уравнений и методом исключения неизвестных находится её решение.

1.2.2. Учебные занятия

1. *Общие понятия систем линейных уравнений. Условия совместности.*

1.2.1. Если $(x_0; y_0)$ – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 5, \end{cases}$

тогда $x_0 y_0$ равно…

1) –3; 2) 3; 3) –4; 4) –2.

1.2.2. Система линейных уравнений называется неопределённой, если она имеет:

1) пустое множество решений; 2) ровно два решения;
3) бесконечное множество решений; 4) единственное решение.

1.2.3. При каком значении α система линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ \alpha x + 5y = -2 \end{cases}$

не имеет решений?

2. ***Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.***

1.2.4. Решите систему линейных уравнений:

1) матричным методом;

2) по формулам Крамера.

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=12, \\ 4x_1-7x_2=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2=4, \\ 3x_1+4x_2=12. \end{cases}$

1.2.5. Решите систему линейных уравнений: 1) матричным методом; 2) по формулам Крамера; 3) методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ x_2+3x_3=7, \\ x_1-x_2+x_3=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1-x_2-4x_3=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+x_2-5x_3=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=3, \\ 2x_1+3x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=11, \\ 2x_1+2x_2+4x_3=2, \\ 3x_1-5x_2+2x_3=-5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=9, \\ 3x_1-5x_2+x_3=-4, \\ 4x_1-7x_2+x_3=5. \end{cases}$

1.2.6. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4=0, \\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3-3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3-2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3-11x_4=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+11x_3-15x_4=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=3, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4=-5, \\ 6x_1+10x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 8x_1+12x_2+7x_3+6x_4=9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5, \\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=5, \\ 3x_1+4x_2+3x_3+x_4=-1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=2. \end{cases}$

Индивидуальные задания

1. Решите систему линейных уравнений:

а) матричным методом;

б) по формулам Крамера;

в) методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 5x-4y-z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=1; \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} 5x-4y-z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=2; \end{cases}$ 1.3. $\begin{cases} 5x-4y-z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=3; \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 5x-4y-z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=4; \end{cases}$ 1.5. $\begin{cases} 5x-4y-z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=5; \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} 5x-4y-z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=6; \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 5x-4y-z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=7; \end{cases}$ 1.8. $\begin{cases} 5x-4y-z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=8; \end{cases}$ 1.9. $\begin{cases} 5x-4y-z=0, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=9; \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=0; \end{cases}$ 1.11. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=1; \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=2; \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=3; \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=4; \end{cases}$ 1.15. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=5; \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=6; \end{cases}$ 1.17. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=7; \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=8; \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 5x-4y-z=1, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=9; \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} 5x-4y-z=2, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=0; \end{cases}$ 1.21. $\begin{cases} 5x-4y-z=2, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=1; \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 5x-4y-z=2, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=2; \end{cases}$ 1.23. $\begin{cases} 5x-4y-z=2, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=3; \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} 5x-4y-z=2, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=4; \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 5x-4y-z=2, \\ 2x+3y+4z=0, \\ 3x-y+z=5. \end{cases}$

Пример 1.2.1. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ x_2+3x_3=7, \\ x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$

а) матричным методом;
б) по формулам Крамера;
в) методом Гаусса.

а) Решим исходную систему матричным методом. Составим матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\ 7\\ 3\end{pmatrix}.$$

Вычислим главный определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=1+6+0+1+3-0=11.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=4,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7\ ,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3\ ,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\ .$$

Обратная матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & -1 & 7\\ 3 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Решение системы $X=A^{-1}B=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & -1 & 7\\ 3 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 7\\ 3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}22\\ 11\\ 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

б) Решим систему линейных уравнений по формулам Крамера.

Определитель матрицы A равен $\det A=11$. Вспомогательные определители равны:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 7 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=22,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 7 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=11,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 7\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=22.$$

Тогда по формулам Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{22}{11}=2,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{11}{11}=1,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{22}{11}=2\ .$$

в) Решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

Выпишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк (прямой ход):

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \times(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \times 3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right) :11 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

$r(A') = r(A) = n = 3$, поэтому система совместна и определена.

Составим систему ступенчатого вида и решим её (обратный ход):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 = 7 - 3x_3, \\ x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Проверка подтверждает, что найденные числа являются решением.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$.

2. Исследуйте на совместность и решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

Замечание: Задания выполняются в соответствии с последней цифрой порядкового номера в журнале.

2.1. а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12; \end{cases}$

2.2. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1; \end{cases}$

2.3. а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3; \end{cases}$

2.4. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$

2.5. а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1; \end{cases}$

2.6. а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1; \end{cases}$

2.7. а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 8; \end{cases}$

2.8. а) $\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

2.9. а) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18; \end{cases}$

2.10. а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 2, \\ 5x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 7x_4 = -3. \end{cases}$

Пример 1.2.2. Решите систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу данной системы и преобразуем её к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ \quad -x_2 + 4x_4 = 4, \\ \quad x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

$rA = 3$, $n = 4$ $\Rightarrow$ система неопределённая. Назовём x_4 свободной неизвестной, x_1, x_2, x_3 выразим через x_4:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 - x_4, \\ -x_2 = 4 - 4x_4, \\ x_3 = -2 + 2x_4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2(4 - 4x_4) + (-2 + 2x_4) = 1 - x_4, \\ x_2 = -4 + 4x_4, \\ x_3 = -2 + 2x_4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5 + 5x_4, \\ x_2 = -4 + 4x_4, \\ x_3 = -2 + 2x_4, \\ x_4 \in R. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -5 + 5x_4, \\ x_2 = -4 + 4x_4, \\ x_3 = -2 + 2x_4, \\ x_4 \in R. \end{cases}$

1.3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.3.1. Теоретические сведения

1. Векторы. Линейные операции над векторами.

Величины, характеризующиеся числовым значением и направлением, называются *векторами*. Обозначение: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.

Геометрически вектор изображают направленным отрезком прямой. Геометрически векторы можно складывать, их сумма $\vec{a} + \vec{b}$ находится по правилу треугольника или параллелограмма [5]. Вектор можно умножать на число λ, вектор $\lambda\vec{a}$ будет параллелен вектору $\vec{a}$ [5].

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется выражение

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – числа.

2. Коллинеарные и компланарные векторы.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если существует такое число λ (число μ), что выполняется равенство

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} \ \ (\vec{a} = \mu\vec{b}).$$

Коллинеарные векторы расположены на одной или параллельных прямых.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

Компланарные векторы лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Коллинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ в R^2 и компланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в R^3 называются линейно зависимыми. Любые два упорядоченных неколлинеарных (линейно независимых в R^2) вектора образуют *базис на плоскости*, а любые три упорядоченных некомпланарных (линейно независимых в R^3) вектора образуют *базис в пространстве*. Базисные векторы на плоскости обозначаются $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, в пространстве – $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

Для любого вектора $\vec{x} \in R^3$ выполняется равенство

$$\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}, \tag{1.7}$$

которое называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$. Коэффициенты α_1, α_2, α_3 в разложении вектора по базису называются *координатами* вектора в этом базисе. Обозначение: $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

Для векторов, заданных координатами

$$\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}, \ \vec{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3},$$

с*умма* и *произведение вектора на число* равны:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \alpha_3 + \beta_3\}; \quad \lambda\vec{a} = \{\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2; \lambda\alpha_3\}.$$

Условие коллинеарности принимает вид

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \lambda,$$

число λ является коэффициентом пропорциональности.

3. Проекция вектора на ось. Орт вектора. Прямоугольный декартовый базис.

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l – число, равное длине отрезка AB этой оси, взятое со знаком «+», если отрезок AB ориентирован (считая от A к B) в положительную сторону оси l и знаком «–» – в противном случае (рис. 1.2). Обозначение: $\text{пр}_l\vec{a}$. Проекцию вектора $\vec{a}$ на ось l можно найти по формуле

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi .$$

Свойства проекций:

1) $\text{пр}_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b}$;

2) $\text{пр}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\text{пр}_l\vec{a}$.

Орт вектора $\vec{a}$ – вектор $\vec{a}^{\,0}$, который имеет одинаковое направление с вектором $\vec{a}$ и модуль, равный единице:

$$\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} . \tag{1.8}$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in R^3$ образует *прямоугольный декартов базис*. При этом векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ единичной длины, попарно перпендикулярны и образуют правую тройку (рис. 1.3). Оси Ox, Oy, Oz, расположенные так, что начало отсчёта – точка O, а направление и масштаб на них задают векторы $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ соответственно, образуют *прямоугольную декартову систему координат*. Координатами вектора $\vec{a} = \{a_x;\, a_y;\, a_z\}$ в прямоугольном декартовом базисе являются его проекции на соответствующие координатные оси.

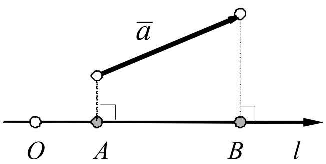


Рис. 1.2

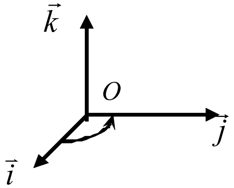


Рис. 1.3

Из формулы (1.8) следует:

$$\frac{a_x}{|\vec{a}|} = \cos\alpha,\ \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \cos\beta,\ \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \cos\gamma ,$$

где α, β, γ – углы между соответствующими осями координат и вектором $\vec{a}$, косинусы этих углов – *направляющие косинусы*. Следовательно,

$$\vec{a}^{\,0} = \{\cos\alpha;\, \cos\beta;\, \cos\gamma\}.$$

Если известны координаты конца $N(x_2;\, y_2;\, z_2)$ и начала $M(x_1;\, y_1;\, z_1)$ вектора, то координатами вектора $\overrightarrow{MN}$ будут

$$\overrightarrow{MN} = \{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\}.$$

4. Деление отрезка в заданном отношении.

Если отрезок, концами которого служат точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, разделён точкой $C(\vec{x};\ \vec{y};\ \vec{z})$ в отношении λ, то:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad \overline{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad \overline{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{1.9}$$

5. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a}\vec{b}$, равное произведению их длин на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a}\vec{b} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \tag{1.10}$$

Геометрический смысл скалярного произведения (рис 1.4):

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\ \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\ \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{1.11}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$;

3) $\left(\vec{a}, \lambda\vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}, \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$;

4) $\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

5) *Признак ортогональности* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \perp \vec{b}$).

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0.$$

Механический смысл скалярного произведения – работа, совершаемая при перемещении материальной точки под действием силы $\vec{F}$, равна скалярному произведению силы на вектор перемещения (рис. 1.5):

$$A = \vec{F}\overrightarrow{MN}, \text{ или } A = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{MN}\right|\cos\varphi.$$

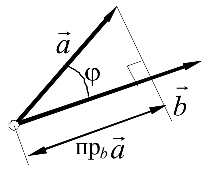


Рис. 1.4

Если векторы заданы координатами:

$$\vec{a} = \left\{a_x;\ a_y;\ a_z\right\}; \quad \vec{b} = \left\{b_x;\ b_y;\ b_z\right\},$$

то скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{1.12}$$

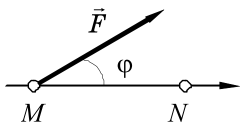


Рис. 1.5

Признак ортогональности векторов в координатной форме:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

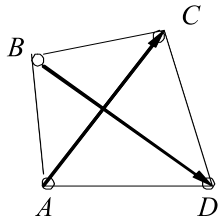


Рис. 1.6

Пример. Докажите, что диагонали AC и BD четырёхугольника с вершинами $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$ взаимно перпендикулярны.

Решение. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ (рис. 1.6), вычитая из координат конца соответствующие координаты начала вектора:

$$\overrightarrow{AC}=\{-4-1;1+2;1-2\}=\{-5;3;-1\};$$

$$\overrightarrow{BD}=\{-5-1;-5-4;3-0\}=\{-6;-9;3\}.$$

По признаку ортогональности векторов

$$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\overrightarrow{BD}=0.$$

Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ по формуле (1.12):

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-5\cdot(-6)+3\cdot(-9)-1\cdot 3=30-27-3=0,$$

следовательно, векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ ортогональны (взаимно перпендикулярны), что и требовалось доказать.

Применение скалярного произведения для решения задач:

1. $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}\ \Rightarrow\ |\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

2. $$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.\qquad(1.13)$$

3. $$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}\Rightarrow\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

4. Нахождение *координат орта* $\vec{a}^0=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Так как $\left|\vec{a}^0\right|=1$, получаем *основное свойство направляющих косинусов:*

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

6. Векторное произведение.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\,,\, \vec{b}\right]$ (рис. 1.7), удовлетворяющий условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

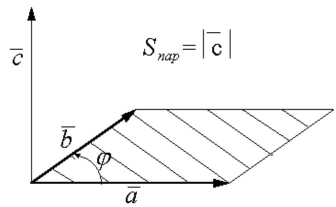


Рис. 1.7

Геометрический смысл модуля векторного произведения – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах (рис. 1.7):

$$|\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}\,\|\,\vec{b}|\sin\varphi = S_{\text{пар}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; S_{\text{пар}} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi\,.$$

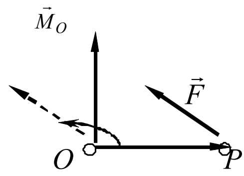


Рис. 1.8

Механический смысл векторного произведения. Если сила $\vec{F}$ приложена к точке P, то моментом этой силы относительно точки O называется вектор (рис. 1.8)

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}\,,$$

равный векторному произведению плеча $\overrightarrow{OP}$ на силу $\vec{F}$.

Свойства векторного произведения

1. *Признак коллинеарности* векторов: $\vec{a}\,\|\,\vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a} \times \vec{b} = \vec{\theta}$.

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

3. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$.

4. $\left[\vec{a},\, \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right] = \left[\vec{a},\, \vec{b}\right] + [\vec{a},\, \vec{c}]$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}$, $\vec{b} = \left\{b_x; b_y; b_z\right\}$, то *векторное произведение* можно найти по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна

$$S_{\text{пар}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}\right\|,$$

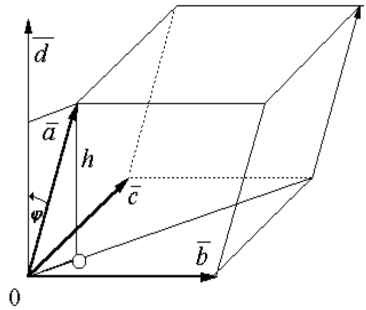


Рис. 1.9

7. Смешанное произведение векторов, его свойства.

Смешанным произведением $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трёх векторов называется число, равное

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\ .$$

Геометрический смысл модуля смешанного произведения – объём параллелепипеда, построенный на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, приведённых к общему началу (рис. 1.9):

$$V_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Формула вычисления смешанного произведения в координатах:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Объём параллелепипеда равен

$$V_{\text{пар}}=\left\|\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix}\right\|.$$

Признак компланарности векторов. Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ является равенство

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0\ .$$

1.3.2. Учебные занятия

1. ***Линейные операции над векторами.***

1.3.1. Если векторы $\vec{a}=\{-2;-4;1\}$ и $\vec{b}=\{-4;2;2\}$, то $\vec{a}-2\vec{b}$ равно…

1) $\{6;-8;-3\}$; 2) $\{-6;8;3\}$; 3) $\{-6;-2;3\}$; 4) –6.

1.3.2. Даны точки $A(3;-1;2)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;4;-2)$. Найдите координаты векторов: а) $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$; б) $3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$.

2. ***Коллинеарность векторов. Линейная зависимость, линейная независимость векторов. Деление отрезка в заданном отношении.***

1.3.3. Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны:

а) $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \beta\vec{k}$;

б) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 9\vec{j} + 2\vec{k}$.

1.3.4. Определите модули суммы и разности векторов $\vec{a} = \{3;\ -5;\ 8\}$ и $\vec{b} = \{-1;\ 1;\ 4\}$, их орты.

1.3.5. Дано: $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

1.3.6. Точки $A(-2;\ 3)$ и $B(6;\ -9)$ – концы отрезка AB. Найдите точку C, являющуюся серединой отрезка AB.

1.3.7. Одним концом отрезка AB является точка $A(-3;\ -5)$, а его серединой точка $C(3;\ -2)$. Вычислите координаты второго конца отрезка – точки B.

1.3.8. Некоторый отрезок AB разделён в отношении 2:3:5 (считая от точки A к точке B), его концы – есть точки с координатами $A(-11;\ 1)$ и $B(9;\ 11)$. Найдите точки деления данного отрезка.

1.3.9. Проверьте линейную независимость векторов $\vec{a} = \{2;\ 3;\ 1\}$, $\vec{b} = \{5;\ 7;\ 0\}$, $\vec{c} = \{3;\ -2;\ 4\}$. Представьте вектор $\vec{d} = \{4;\ 12;\ -3\}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3. ***Скалярное произведение векторов.***

1.3.10. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{4; -2; -4\}$ и $\vec{b} = \{6; -3; 2\}$.

1.3.11. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°.

1.3.12. Определите угол между векторами $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

1.3.13. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ним углы, равные $\dfrac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 8$, вычислите:

а) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$.

1.3.14. Найдите работу, производимую силой $\vec{f}=\{3;-2;\ 5\}$, под действием которой точка, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2;-3;\ 5)$ в положение $B(3;-2;-1)$.

1.3.15. В вершине куба приложены три силы, разные по величине $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. направленные по диагоналям граней куба. Определите величину равнодействующей.

1.3.16. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Вычислите $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

1.3.17. Даны точки $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ и $C(0;1;-5)$. Вычислите $\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right)\left(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$.

1.3.18. Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$. Определите его внутренний угол при вершине B.

1.3.19. Найдите вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}=\{2;3;-1\}$ и $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\left(2\vec{i}-\vec{i}+\vec{k}\right)=-6$.

4. ***Векторное произведение векторов.***

1.3.20. Векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ образуют угол $\pi/6$. Зная, что $|\vec{u}|=4, |\vec{v}|=7$, найдите $|[\vec{u},\vec{v}]|$.

1.3.21. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

1.3.22. Вычислите площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$; $B(2;3;4)$; $C(4;3;2)$ и длину высоты, опущенной из вершины A.

1.3.23. Сила $f=\{3;2;-4\}$ приложена к точке $A(2;-1;1)$. Определите момент этой силы относительно начала координат.

5. ***Смешанное произведение векторов.***

1.3.24. Найдите смешанное произведение векторов

$$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}.$$

1.3.25. Установите, компланарны ли векторы

$$\vec{a}=(2;3;-1),\quad b=(1;-1;3)\ \text{и}\ c=(1;9;-11).$$

1.3.26. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах

$$\vec{a}=(-2;2;1), \vec{b}=(3;-2;5), \vec{c}=(7;-7;21).$$

1.3.27. Докажите, что точки $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$, $D(2;\ 1;\ 3)$ лежат в одной плоскости.

1.3.28. Даны вершины тетраэдра $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$, $D(-5;\ -4;\ 8)$. Найдите длину его высоты, опущенной из вершины D.

Индивидуальные задания

1. Найдите: а) длину вектора $\vec{c}$; б) орт вектора $\vec{b}$; в) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{a}$; г) проекцию $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c}$; д) точки $D(x;\ y;\ z)$ и $E(u;\ v;\ w)$ такие, что $\vec{b} \perp \overrightarrow{OD}$ и $\vec{c} \parallel \overrightarrow{OE}$, где точка O – начало координат.

1.1. $\vec{a}=\{2;\ -1;\ 3\}$; $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; $x=2$; $y=-1$; $v=-2$.

1.2. $\vec{a}=\{1;\ -2;\ 3\}$; $\vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{c}=-\vec{a}+2\vec{b}$; $x=1$; $z=-2$; $u=-2$.

1.3. $\vec{a}=\{-3;\ -1;\ 1\}$; $\vec{b}=-\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$; $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; $y=2$; $z=-1$; $w=-4$.

1.4. $\vec{a}=\{-2;\ 1;\ 2\}$; $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{c}=2\vec{a}-4\vec{b}$; $x=3$; $y=-2$; $v=3$.

1.5. $\vec{a}=\{3;\ -2;\ 3\}$; $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$; $x=-2$; $z=3$; $w=-3$.

1.6. $\vec{a}=\{-3;\ 2;\ 1\}$; $\vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{c}=-\vec{a}+3\vec{b}$; $x=-3$; $y=-2$; $v=3$.

1.7. $\vec{a}=\{1;\ 1;\ -3\}$; $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}$; $y=2$; $z=-3$; $w=2$.

1.8. $\vec{a}=\{-1;\ -1;\ 3\}$; $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$; $x=-1$; $z=-4$; $u=3$.

1.9. $\vec{a}=\{1;\ -1;\ -3\}$; $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; $x=-2$; $y=-1$; $v=-3$.

1.10. $\vec{a}=\{-2;\ 1;-3\}$; $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; $x=-2$; $y=1$; $w=-2$.

1.11. $\vec{a}=\{1;\ -2;\ 3\}$; $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{c}=-\vec{a}+2\vec{b}$; $y=2$; $z=-1$; $u=2$.

1.12. $\vec{a}=\{2;\ -1;\ 1\}$; $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; $y=-2$; $z=-1$; $v=2$.

1.13. $\vec{a}=\{-1;\ 1;\ 2\}$; $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$; $x=1$; $y=-3$; $w=-1$.

1.14. $\vec{a}=\{0;\ -1;\ 4\}$; $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$; $x=1$; $y=-2$; $u=-3$.

1.15. $\vec{a}=\{2;\ -2;\ 1\}$; $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; $x=1$; $z=-1$; $v=3$.

1.16. $\vec{a}=\{1;\ -1;\ 0\}$; $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$; $y=3$; $z=-2$; $w=-4$.

1.17. $\vec{a}=\{0;\ -1;\ 3\}$; $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$; $x=3$; $y=-1$; $u=-1$.

1.18. $\vec{a}=\{1;\ -2;\ 3\}$; $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$; $x=3$; $y=-1$; $v=-1$.

1.19. $\vec{a}=\{2;\,-1;\,0\}$; $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}$; $z=-2$; $y=-3$; $u=2$.

1.20. $\vec{a}=\{1;\,-1;\,2\}$; $\vec{b}=-\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}-5\vec{b}$; $x=2$; $z=-1$; $w=-2$.

1.21. $\vec{a}=\{2;\,-1;\,1\}$; $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$; $z=-1$; $y=-1$; $w=2$.

1.22. $\vec{a}=\{0;\,-1;\,3\}$; $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$; $x=2$; $y=0$; $v=3$.

1.23. $\vec{a}=\{0;\,-1;\,4\}$; $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}$; $x=-2$; $y=1$; $w=-2$.

1.24. $\vec{a}=\{2;\,-1;\,3\}$; $\vec{b}=-3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$; $x=-2$; $z=1$; $u=-2$.

1.25. $\vec{a}=\{-2;\,-1;\,2\}$; $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$; $z=2$; $y=-3$; $w=-3$.

Пример 1.3.1. Даны векторы $\vec{a}=\{3;\,-1;\,-1\}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

Найдите: а) длину вектора $\vec{c}$; б) орт вектора $\vec{b}$; в) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{a}$; г) проекцию $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c}$; д) точки $D(2;\,y;\,-2)$ и $E(u;\,v;\,-3)$ такие, что $\vec{b}\perp\overrightarrow{OD}$ и $\vec{c}\,\|\,\overrightarrow{OE}$, где точка O – начало координат.

Решение.

а) Найдём вектор $\vec{c}$, являющийся линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

$$\vec{c}=3\cdot\{3;\,-1;\,-1\}-2\cdot\{-2;\,2;\,-2\}=\{9+4;\,-3-4;\,-3+4\}=$$
$$=\{13;\,-7;\,1\}\ \Rightarrow\ \vec{c}=\{13;\,-7;\,1\}.$$

Далее найдём длину вектора $\vec{c}$: $|\vec{c}|=\sqrt{x_c^2+y_c^2+z_c^2}$.

$$|\vec{c}|=\sqrt{13^2+(-7)^2+1^2}=\sqrt{169+49+1}=\sqrt{219}.$$

б) Орт вектора $\vec{b}$ находится по формуле: $\overrightarrow{b^o}=\left\{x_b/|\vec{b}|;\,y_b/|\vec{b}|;z_b/|\vec{b}|\right\}$.

$$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

$$\overrightarrow{b^o}=\left\{\frac{-2}{2\sqrt{3}};\,\frac{2}{2\sqrt{3}};\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right\}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{b^o}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}};\,\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

в) Косинус угла между векторами $\vec{c}$ и $\vec{a}$ найдём по формуле (1.13).

$$\cos\left(\widehat{\vec{c},\vec{a}}\right)=\frac{13\cdot3-7\cdot(-1)+1\cdot(-1)}{\sqrt{13^2+(-7)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{39+7-1}{\sqrt{219}\cdot\sqrt{11}}=\frac{45}{\sqrt{2409}}=$$
$$=\frac{45\sqrt{2409}}{2409}=\frac{15\sqrt{2409}}{803}.$$

Следовательно, угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{a}$ равен

$$\left(\vec{c}\,\widehat{,}\,\vec{a}\right) = \arccos\frac{15\sqrt{2409}}{803}.$$

г) Найдём проекцию $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c}$.

Воспользуемся формулой $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c} = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|}$.

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c} = \frac{-2\cdot 13 + 2(-7) - 2\cdot 1}{2\sqrt{3}} = \frac{-26-14-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{42}{2\sqrt{3}} = -\frac{21}{\sqrt{3}} = -7\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \text{пр}_{\vec{b}}\vec{c} = -7\sqrt{3}.$$

д) Найдём точки $D(2;\, y;\, -2)$ и $E(u;\, v;\, -3)$ такие, что $\vec{b}\perp\overrightarrow{OD}$ и $\vec{c}\,\|\,\overrightarrow{OE}$, где точка O – начало координат.

Точка O – начало координат, поэтому $\overrightarrow{OD} = \{2;\, y;\, -2\}$, $\overrightarrow{OE} = \{u;\, v;\, -3\}$. Вектор $\overrightarrow{OD}$ определим по условию ортогональности векторов:

$$\vec{b}\perp\overrightarrow{OD} \;\Leftrightarrow\; \vec{b}\cdot\overrightarrow{OD} = 0.$$

Найдём скалярное произведение $\vec{b}\cdot\overrightarrow{OD}$ и приравняем его к нулю:

$$-2\cdot 2 + 2\cdot y - 2\cdot(-2) = 0,\; -4 + 2y + 4 = 0,\; y = 0.$$

Следовательно, $\overrightarrow{OD} = \{2;\, 0;\, -2\}$.

Вектор $\overrightarrow{OE}$ найдём, используя условие коллинеарности векторов:

$$\vec{c}\,\|\,\overrightarrow{OE} \;\Leftrightarrow\; \frac{x_c}{x_{OE}} = \frac{y_c}{y_{OE}} = \frac{z_c}{z_{OE}},\; \Rightarrow\; \frac{13}{u} = \frac{-7}{v} = -\frac{1}{3},$$

отсюда

$$\frac{13}{u} = -\frac{1}{3};\; u = -39;\; \Rightarrow\; \frac{-7}{v} = -\frac{1}{3};\; v = 21.$$

Следовательно, $\overrightarrow{OE} = \{-39;\, 21;\, -3\}$.

2. Найдите разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

2.1.	$\vec{x} = \{-2;\, 4;\, 1\}$;	$\vec{p} = \{0;\, 1;\, 2\}$;	$\vec{q} = \{1;\, 0;\, 1\}$;	$\vec{r} = \{-1;\, 2;\, 4\}$.
2.2.	$\vec{x} = \{4;\, 2; -8\}$;	$\vec{p} = \{2;\, -1;\, 1\}$;	$\vec{q} = \{-3;\, 2;\, 4\}$;	$\vec{r} = \{1;\, 1;\, -1\}$.
2.3.	$\vec{x} = \{3;\, 1;\, 2\}$;	$\vec{p} = \{1; 0;\, 1\}$;	$\vec{q} = \{2;\, 1;\, -1\}$;	$\vec{r} = \{0;\, -1;\, 2\}$.

2.4.	$\vec{x}=\{6;\ 2;\ -7\}$;	$\vec{p}=\{2;\ 1;\ -3\}$;	$\vec{q}=\{3;\ 2;\ -5\}$;	$\vec{r}=\{1;\ -1;\ 1\}$.
2.5.	$\vec{x}=\{-2;\ 19;\ 1\}$;	$\vec{p}=\{5;\ -1;\ 2\}$;	$\vec{q}=\{2;\ 3;\ -4\}$;	$\vec{r}=\{1;\ 2;\ 3\}$.
2.6.	$\vec{x}=\{8;\ 3;\ 2\}$;	$\vec{p}=\{1;\ 1;\ -1\}$;	$\vec{q}=\{1;\ -1;\ 1\}$;	$\vec{r}=\{-1;\ 1;\ 1\}$.
2.7.	$\vec{x}=\{1;\ 3;\ -1\}$;	$\vec{p}=\{9;\ -6;\ 3\}$;	$\vec{q}=\{5;\ -8;\ 9\}$;	$\vec{r}=\{2;\ 1;\ -3\}$.
2.8.	$\vec{x}=\{4;\ 2;6\}$;	$\vec{p}=\{5;\ 2;\ -3\}$;	$\vec{q}=\{2;\ 1;\ -1\}$;	$\vec{r}=\{4;\ -3;\ 5\}$.
2.9.	$\vec{x}=\{6;\ 3;\ 5\}$;	$\vec{p}=\{-2;\ 1;\ 7\}$;	$\vec{q}=\{0;\ 1;\ 2\}$;	$\vec{r}=\{-1;\ 2;\ 3\}$.
2.10.	$\vec{x}=\{10;\ 6;\ 9\}$;	$\vec{p}=\{-1;\ 7;\ 4\}$;	$\vec{q}=\{2;\ 3;\ 1\}$;	$\vec{r}=\{0;\ 2;\ 7\}$.
2.11.	$\vec{x}=\{5;\ 7;\ 1\}$;	$\vec{p}=\{1;\ 2;\ 2\}$;	$\vec{q}=\{-1;\ 0;\ 8\}$;	$\vec{r}=\{1;\ -1;\ 1\}$.
2.12.	$\vec{x}=\{6;\ 6;\ 4\}$;	$\vec{p}=\{-1;\ 2;\ 5\}$;	$\vec{q}=\{4;\ 3;\ -1\}$;	$\vec{r}=\{0;\ 2;\ 2\}$.
2.13.	$\vec{x}=\{8;\ 10;\ 4\}$;	$\vec{p}=\{1;\ 3;\ 4\}$;	$\vec{q}=\{2;\ 2;\ 3\}$;	$\vec{r}=\{1;\ 1;\ -2\}$.
2.14.	$\vec{x}=\{12;\ -10;\ 6\}$;	$\vec{p}=\{1;\ 3;\ 2\}$;	$\vec{q}=\{3;\ 2;\ -5\}$;	$\vec{r}=\{-6;\ 5;\ 3\}$.
2.15.	$\vec{x}=\{3;\ 6;\ 5\}$;	$\vec{p}=\{-2;\ 1;\ 4\}$;	$\vec{q}=\{3;\ 2;\ 1\}$;	$\vec{r}=\{0;\ 2;\ 3\}$.
2.16.	$\vec{x}=\{5;\ 2;\ 4\}$;	$\vec{p}=\{1;\ 0;\ 4\}$;	$\vec{q}=\{-2;\ 1;\ 3\}$;	$\vec{r}=\{1;\ 5;\ -2\}$.
2.17.	$\vec{x}=\{-2;\ 4;\ 3\}$;	$\vec{p}=\{-3;\ 1;\ 0\}$;	$\vec{q}=\{2;\ 1;\ 1\}$;	$\vec{r}=\{-3;\ 4;\ 2\}$.
2.18.	$\vec{x}=\{4;\ 11;\ 11\}$;	$\vec{p}=\{2;\ -1;\ -1\}$;	$\vec{q}=\{3;\ 4;\ -2\}$;	$\vec{r}=\{3;\ -2;\ 4\}$.
2.19.	$\vec{x}=\{-1;\ -4;\ -2\}$;	$\vec{p}=\{1;\ 1;\ 2\}$;	$\vec{q}=\{2;\ -1;\ 2\}$;	$\vec{r}=\{4;\ 1;\ 4\}$.
2.20.	$\vec{x}=\{5;\ 1;\ 11\}$;	$\vec{p}=\{3;\ 2;\ 1\}$;	$\vec{q}=\{2;\ 3;\ 1\}$;	$\vec{r}=\{2;\ 1;\ 3\}$.
2.21.	$\vec{x}=\{31;\ 29;\ 10\}$;	$\vec{p}=\{1;\ 2;\ 4\}$;	$\vec{q}=\{5;\ 1;\ 2\}$;	$\vec{r}=\{3;\ -1;\ 2\}$.
2.22.	$\vec{x}=\{1;\ 6;\ 3\}$;	$\vec{p}=\{-1;\ 2;\ 0\}$;	$\vec{q}=\{3;\ 2;\ 1\}$;	$\vec{r}=\{0;\ 1;\ 2\}$.
2.23.	$\vec{x}=\{-6;\ 5;-1\}$;	$\vec{p}=\{-7;\ 0;\ 1\}$;	$\vec{q}=\{2;\ 2;\ 1\}$;	$\vec{r}=\{1;\ -2;\ 0\}$.
2.24.	$\vec{x}=\{2;\ 3;\ -3\}$;	$\vec{p}=\{2;\ 1;\ -1\}$;	$\vec{q}=\{0;\ 1;\ 2\}$;	$\vec{r}=\{-3;\ 1;\ 1\}$.
2.25.	$\vec{x}=\{1;\ 0;\ 1\}$;	$\vec{p}=\{1;\ 2;\ -3\}$;	$\vec{q}=\{0;\ 1;\ 2\}$;	$\vec{r}=\{0;\ 0;\ 1\}$.

Пример 1.3.2. Разложить вектор $\vec{x}=\{4;2;1\}$ по базису $\vec{p}=\{1;0;0\}$, $\vec{q}=\{1;1;0\}$, $\vec{r}=\{1;1;1\}$.

Решение. Разложить вектор $\vec{x}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ – это значит найти координаты заданного вектора в указанном базисе. Запишем разложение (1.7) вектора по базису в координатной форме:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Выполним линейные операции над векторами, заданными координатами, и приравняем координаты линейной комбинации векторов к соответствующим координатам вектора $\vec{x}$. Получим систему линейных уравнений и решим её:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=4,\\ \qquad \lambda_2+\lambda_3=2,\\ \qquad\qquad \lambda_3=1.\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_1=2,\\ \lambda_2=1,\\ \lambda_3=1.\end{cases}$$

Следовательно, в базисе $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ заданный вектор будет иметь вид: $\vec{x}=\{2;1;1\}$ или $\vec{x}=2\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$.

3. Даны точки A, B, C. Найдите площадь ΔABC и его высоту, проведённую из вершины K.

3.1. $A(1;-2;2)$; $B(-1;4;0)$; $C(-4;-1;1)$; $K=C$; $x=-1$; $z=2$.
3.2. $A(1;-3;2)$; $B(3;-4;0)$; $C(-4;2;-1)$; $K=B$; $x=-2$; $z=1$.
3.3. $A(2;-1;2)$; $B(3;4;-1)$; $C(-3;1;-2)$; $K=A$; $x=-3$; $z=-2$.
3.4. $A(1;-2;3)$; $B(1;-3;0)$; $C(-4;-1;2)$; $K=C$; $y=1$; $z=2$.
3.5. $A(-4;3;2)$; $B(1;4;-3)$; $C(-2;-3;1)$; $K=B$; $y=-3$; $z=-2$.
3.6. $A(0;-2;3)$; $B(-1;2;1)$; $C(3;-1;-1)$; $K=A$; $y=4$; $z=-1$.
3.7. $A(4;-2;3)$; $B(2;4;-2)$; $C(-4;-3;1)$; $K=C$; $x=-1$; $y=-2$.
3.8. $A(-1;4;2)$; $B(-2;3;0)$; $C(-4;1;-1)$; $K=B$; $x=-2$; $y=-3$.
3.9. $A(1;-3;1)$; $B(1;3;-1)$; $C(-3;3;-1)$; $K=A$; $x=1$; $y=4$.
3.10. $A(2;-3;1)$; $B(1;-1;2)$; $C(-2;1;-1)$; $K=C$; $x=-2$; $y=1$.
3.11. $A(0;-3;1)$; $B(1;-1;3)$; $C(-2;1;-1)$; $K=C$; $x=-3$; $y=-1$.
3.12. $A(1;-2;2)$; $B(-1;4;0)$; $C(-4;-1;1)$; $K=C$; $x=-1$; $z=2$.
3.13. $A(2;-3;1)$; $B(1;4;-1)$; $C(-3;1;-2)$; $K=B$; $x=-2$; $z=-2$.
3.14. $A(2;-1;3)$; $B(-1;3;0)$; $C(-3;1;-1)$; $K=B$; $y=1$; $z=2$.
3.15. $A(1;-2;4)$; $B(-1;4;3)$; $C(-2;1;-2)$; $K=A$; $y=-1$; $z=3$.
3.16. $A(2;-3;1)$; $B(1;-4;3)$; $C(2;-3;-1)$; $K=A$; $x=-2$; $y=3$.
3.17. $A(2;-3;2)$; $B(1;4;-2)$; $C(-4;3;-1)$; $K=C$; $y=-1$; $x=2$.
3.18. $A(1;-2;3)$; $B(-1;4;1)$; $C(-2;2;-1)$; $K=C$; $y=3$; $x=1$.
3.19. $A(-1;2;3)$; $B(1;4;-2)$; $C(-3;2;-1)$; $K=B$; $z=-2$; $x=2$.
3.20. $A(1;3;-5)$; $B(1;4;-4)$; $C(-4;1;-3)$; $K=B$; $x=2$; $z=3$.

3.21. $A(2;-2;3)$; $B(2;4;-1)$; $C(-1;3;-1)$; $K=A$; $x=-1$; $z=-2$.

3.22. $A(1;-1;5)$; $B(-1;4;3)$; $C(-3;-1;2)$; $K=A$; $y=-4$; $z=2$.

3.23. $A(1;-4;2)$; $B(1;4;-2)$; $C(-3;-3;1)$; $K=C$; $y=3$; $z=1$.

3.24. $A(1;-2;3)$; $B(3;-4;0)$; $C(-4;-1;2)$; $K=C$; $x=-1$; $z=-3$.

3.25. $A(-3;3;2)$; $B(2;4;-2)$; $C(-3;-1;1)$; $K=B$; $x=-1$; $y=-3$.

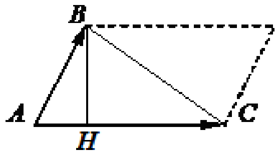


Рис. 1.10

Пример 1.3.3. Даны точки $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(4;\ 3;\ 2)$, $C(2;\ 3;\ 4)$. Найдите площадь ΔABC и его высоту, проведённую из вершины B (рис. 1.10).

Решение. Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=(2-1)\vec{i}+(3-1)\vec{j}+(4-1)\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k};$$

$$\overrightarrow{AC}=(4-1)\vec{i}+(3-1)\vec{j}+(2-1)\vec{k}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=4\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}.$$

Находим модуль вектора, равный площади параллелограмма:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+8^2+4^2}=4\sqrt{6}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC}=0{,}5\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{6}\ \text{(кв. ед.).}$$

С другой стороны, площадь треугольника ABC равна половине произведения основания AC на высоту, проведённую к этому основанию:

$$S_{\Delta ABC}=0{,}5AC\cdot BH,$$

отсюда

$$BH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|},\ BH=\frac{2\cdot2\sqrt{6}}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{14}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{21}}{7}\ \text{(ед.).}$$

4. Даны векторы $\vec{a},\vec{b}$ и точки A и B. Выполните задания: а) установите, компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{AB}$; б) вычислите объём параллелепипеда, построенного на векторах $x\vec{a}+y\vec{b},\ \vec{a},\ \overrightarrow{AB}$, и найдите длину одной из высот этого параллелепипеда.

4.1. $\vec{a}=\{-3;\ 2;\ -1\}$; $\vec{b}=\{3;-2;1\}$; $A(0;4;-2)$; $B(2;-1;2)$; $x=2$; $y=-1$.

4.2. $\vec{a}=\{-3;\ 2;\ -3\}$; $\vec{b}=\{2;-2;1\}$; $A(0;-3;-2)$; $B(2;-1;4)$; $x=-2$; $y=1$.

4.3. $\vec{a}=\{-4;\ 2;\ -1\}$; $\vec{b}=\{3;-4;2\}$; $A(5;4;-2)$; $B(4;-1;2)$; $x=2$; $y=-2$.

4.4. $\vec{a}=\{-3;\ 5;\ -1\}$; $\vec{b}=\{3;-2;4\}$; $A(3;4;-2)$; $B(3;-1;1)$; $x=-3$; $y=-1$.

4.5. $\vec{a}=\{-3;\ 6;\ -2\}$; $\vec{b}=\{-3;-2;2\}$; $A(-1;3;-2)$; $B(-3;-1;-2)$; $x=2$; $y=-3$.

4.6. $\vec{a}=\{0;\ 2;\ -1\}$; $\vec{b}=\{3;-2;-4\}$; $A(5;4;-2)$; $B(3;-1;5)$; $x=1$; $y=-4$.

4.7. $\vec{a}=\{-3;\ 4;\ -2\}$; $\vec{b}=\{4;-2;-1\}$; $A(3;-4;-2)$; $B(4;-1;-2)$; $x=-4$; $y=-4$.

4.8. $\vec{a}=\{-5;\ 0;\ -1\}$; $\vec{b}=\{1;-2;3\}$; $A(-1;4;-2)$; $B(-3;-1;1)$; $x=-3$; $y=3$.

4.9. $\vec{a}=\{-4;\ 1;\ -1\}$; $\vec{b}=\{2;-2;-1\}$; $A(3;4;-2)$; $B(0;-1;3)$; $x=-4$; $y=-1$.

4.10. $\vec{a}=\{-4;\ 2;\ 1\}$; $\vec{b}=\{5;-2;1\}$; $A(2;4;-2)$; $B(2;-1;5)$; $x=-2$; $y=-3$.

4.11. $\vec{a}=\{3;\ 4;\ -1\}$; $\vec{b}=\{3;-2;4\}$; $A(0;-4;-2)$; $B(-3;-1;2)$; $x=-4$; $y=-3$.

4.12 $\vec{a}=\{3;\ 3;\ -1\}$; $\vec{b}=\{3;-5;1\}$; $A(0;3;-2)$; $B(2;-1;2)$; $x=4$; $y=-3$.

4.13. $\vec{a}=\{-3;\ 2;\ -6\}$; $\vec{b}=\{5;-2;1\}$; $A(6;4;-2)$; $B(2;-1;4)$; $x=3$; $y=1$.

4.14. $\vec{a}=\{1;\ -2;\ -1\}$; $\vec{b}=\{3;-5;3\}$; $A(2;-1;-2)$; $B(2;-1;6)$; $x=-3$; $y=-4$.

4.15. $\vec{a}=\{-3;\ 3;\ -1\}$; $\vec{b}=\{4;-2;2\}$; $A(6;3;-2)$; $B(2;-2;2)$; $x=-3$; $y=5$.

4.16. $\vec{a}=\{-2;\ 1;\ -1\}$; $\vec{b}=\{4;-1;2\}$; $A(3;2;-2)$; $B(4;-1;3)$; $x=-4$; $y=-3$.

4.17. $\vec{a}=\{-2;\ 2;\ -4\}$; $\vec{b}=\{4;-3;1\}$; $A(2;4;-2)$; $B(1;-2;3)$; $x=-1$; $y=-3$.

4.18. $\vec{a}=\{-2;\ 3;\ -2\}$; $\vec{b}=\{-1;1;3\}$; $A(3;2;-4)$; $B(3;-1;2)$; $x=-3$; $y=3$.

4.19. $\vec{a}=\{-2;\ 3;\ -1\}$; $\vec{b}=\{-3;-2;1\}$; $A(2;4;-2)$; $B(2;-1;5)$; $x=-1$; $y=2$.

4.20. $\vec{a}=\{3;\ 2;\ -3\}$; $\vec{b}=\{1;-2;1\}$; $A(1;-3;-2)$; $B(1;-1;4)$; $x=-4$; $y=1$.

4.21. $\vec{a}=\{-3;\ 1;\ -1\}$; $\vec{b}=\{3;-1;3\}$; $A(2;4;-2)$; $B(4;-1;2)$; $x=2$; $y=-4$.

4.22. $\vec{a}=\{-3;\ 2;\ -1\}$; $\vec{b}=\{-1;-2;4\}$; $A(5;4;-2)$; $B(3;-1;3)$; $x=-3$; $y=1$.

4.23. $\vec{a}=\{1;\ 2;\ -2\}$; $\vec{b}=\{1;-2;2\}$; $A(-1;4;-2)$; $B(2;-1;2)$; $x=3$; $y=-2$.

4.24. $\vec{a}=\{0;\ -3;\ -1\}$; $\vec{b}=\{1;-2;-4\}$; $A(5;2;-2)$; $B(3;-1;2)$; $x=3$; $y=-1$.

4.25. $\vec{a}=\{-3;\ 0;\ -2\}$; $\vec{b}=\{4;-1;-1\}$; $A(3;1;-2)$; $B(2;-1;3)$; $x=-2$; $y=3$.

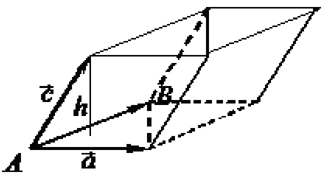


Рис. 1.11

Пример 1.3.4. Даны векторы $\vec{a} = \{-4; 3; -2\}$, $\vec{b} = \{-1; 4; 3\}$ и точки $A(3; 2; -5)$ и $B(1; -1; 2)$. Выполните задания: а) установите, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}$; б) вычислите объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a}, \overrightarrow{AB}$, и найдите длину одной из высот этого параллелепипеда.

Решение. Найдём вектор $\overrightarrow{AB} = \{-2; -3; 7\}$.

а) Условие компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}$: $\vec{a}\,\vec{b}\,\overrightarrow{AB} = 0$.

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -167 \neq 0, \Rightarrow \text{ векторы } \vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB} \text{ некомпланарны.}$$

б) Вычислим объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a}, \overrightarrow{AB}$, и найдём длину высоты этого параллелепипеда, опущенного из конца вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ (рис. 1.11).

$$\vec{c} = \{-2; -5; -10\}.$$

$$V_{\text{пар}} = \left|\vec{c}\,\vec{a}\,\overrightarrow{AB}\right| = \left\|\begin{matrix} -4 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & -5 & -10 \end{matrix}\right\| = \left|160 - 10 - 18 - 16 - 60 - 30\right| = 26 \text{ (куб. ед.).}$$

С другой стороны, $V_{\text{пар-да}} = S_{\text{осн}} h = S_{\text{пар-ма}} h \Rightarrow h = \dfrac{V_{\text{пар-да}}}{S_{\text{пар-ма}}}$.

Найдём площадь $S_{\text{пар-ма}}$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}$, с помощью их векторного произведения:

$$S_{\text{пар-ма}} = \left|\vec{a} \times \overrightarrow{AB}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{matrix}\right\| = \left|17\vec{i} + 14\vec{j} - 13\vec{k}\right| = \sqrt{289 + 196 + 169} = \sqrt{654},$$

$$h = \frac{V_{\text{пар-да}}}{S_{\text{пар-ма}}} = \frac{26}{\sqrt{654}} = \frac{26\sqrt{654}}{654} = \frac{13\sqrt{654}}{327} \text{ (ед.).}$$

Ответ: $V_{\text{пар-да}} = 26$ куб.ед.; $h = \dfrac{13\sqrt{654}}{327}$ ед.

5. Вычислите: а) работу силы $\vec{F}$, если точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B; б) момент силы $\vec{F}$, приложенной к точке P, относительно точки K.

5.1. $\vec{F}=\{3;\,-2;\,5\}$, $P(3;-2;-1)$, $A(2;-3;5)$, $B(5;-4;-4)$, $K=B$.

5.2. $\vec{F}=\{1;\,-7;\,4\}$, $P(10;1;2)$, $A(3;2;-1)$, $B(5;3;-1)$, $K=A$.

5.3. $\vec{F}=\{-2;\,5;2\}$, $P(2;10;4)$, $A(4;7;3)$, $B(-4;2;-4)$, $K=B$.

5.4. $\vec{F}=\{8;\,1;\,-3\}$, $P(4;2;-5)$, $A(0;3;-2)$, $B(3;-3;4)$, $K=A$.

5.5. $\vec{F}=\{-3;\,4;\,1\}$, $P(-4;2;5)$, $A(-2;-1;3)$, $B(4;-5;2)$, $K=A$.

5.6. $\vec{F}=\{6;\,-1;\,4\}$, $P(4;-3;6)$, $A(3;-2;5)$, $B(5;-4;-4)$, $K=B$.

5.7. $\vec{F}=\{3;\,-4;\,7\}$, $P(3;4;-5)$, $A(2;3;-4)$, $B(4;5;-1)$, $K=A$.

5.8. $\vec{F}=\{-3;\,2;\,-1\}$, $P(-6;6;-2)$, $A(-4;5;1)$, $B(-3;-6;2)$, $K=B$.

5.9. $\vec{F}=\{8;\,-3;1\}$, $P(5;-5;3)$, $A(3;-4;2)$, $B(-2;-5;3)$, $K=A$.

5.10. $\vec{F}=\{10;\,5;\,-2\}$, $P(5;8;-6)$, $A(4;7;-3)$, $B(-1;5;-7)$, $K=B$.

5.11. $\vec{F}=\{3;\,-4;\,7\}$, $P(10;1;4)$, $A(8;2;-3)$, $B(-3;6;-4)$, $K=B$.

5.12. $\vec{F}=\{5;\,1;\,-3\}$, $P(1;3;5)$, $A(-4;2;9)$, $B(-3;6;-7)$, $K=B$.

5.13. $\vec{F}=\{1;\,-2;\,4\}$, $P(4;-5;6)$, $A(3;-2;5)$, $B(-3;-4;6)$, $K=A$.

5.14. $\vec{F}=\{7;\,-3;\,10\}$, $P(6;-7;5)$, $A(3;-6;1)$, $B(2;5;-1)$, $K=A$.

5.15. $\vec{F}=\{3;\,-7;\,2\}$, $P(2;-5;7)$, $A(-2;3;5)$, $B(-1;-4;7)$, $K=A$.

5.16. $\vec{F}=\{-4;\,2;\,1\}$, $P(3;4;9)$, $A(4;-1;7)$, $B(3;-2;-6)$, $K=B$.

5.17. $\vec{F}=\{3;\,5;\,10\}$, $P(1;10;5)$, $A(-5;8;3)$, $B(-4;-4;2)$, $K=B$.

5.18. $\vec{F}=\{8;\,-2;\,1\}$, $P(5;-6;9)$, $A(3;-4;7)$, $B(-2;-3;5)$, $K=A$

5.19. $\vec{F}=\{4;\,-5;\,8\}$, $P(2;-4;3)$, $A(-2;1;-3)$, $B(-4;-6;4)$, $K=A$.

5.20. $\vec{F}=\{-3;\,4;\,5\}$, $P(3;5;6)$, $A(7;2;4)$, $B(1;3;5)$, $K=B$.

5.21. $\vec{F}=\{-2;\,8;\,3\}$, $P(2;1;7)$, $A(4;-9;6)$, $B(1;-3;7)$, $K=A$.

5.22. $\vec{F}=\{3;\,5;\,-9\}$, $P(10;6;-7)$, $A(8;3;-1)$, $B(6;4;-2)$, $K=B$.

5.23. $\vec{F}=\{-2;\,6;\,-5\}$, $P(2;4;-5)$, $A(9;-2;1)$, $B(6;-2;4)$, $K=A$.

5.24. $\vec{F}=\{8;\,2;-3\}$, $P(1;7;2)$, $A(-5;1;4)$, $B(-7;3;2)$, $K=A$.

5.25. $\vec{F}=\{-5;\,1;\,-4\}$, $P(1;2;-6)$, $A(3;-2;1)$, $B(1;-3;3)$, $K=B$.

Пример 1.3.5. Вычислите: а) работу силы $\vec{F} = \{3;1;1\}$, если точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(5;1;-4)$ в положение $B(4;2;-4)$; б) момент силы $\vec{F}$, приложенной к точке $P(7;-4;-2)$, относительно точки A.

Решение. а) работа силы $\vec{F} = \{3;1;1\}$ по перемещению прямолинейно материальной точки из положения $A(5;1;-4)$ в положение $B(4;2;-4)$ равна

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AB} = \{-1;1;0\},\quad A = 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = -3 + 1 = -2\,.$$

б) момент силы $\vec{F} = \{3;1;1\}$, приложенной к точке $P(7;-4;-2)$, относительно точки $A(5;1;-4)$ равен

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AP} \times \vec{F}\,;\ \overrightarrow{AP} = \{2;-5;2\};\quad \overrightarrow{M_A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 4\vec{j} + 17\vec{k}\,.$$

Ответ: а) $A = -2$; б) $\overrightarrow{M_A} = -7\vec{i} + 4\vec{j} + 17\vec{k}$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1.1. Теоретические сведения

1. Уравнение прямой на плоскости можно записать в разных видах.

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.1}$$

коэффициенты A и B являются координатами нормального вектора. *Нормальный вектор* $\overrightarrow{N}$ – ненулевой вектор, перпендикулярный прямой (рис. 2.1).

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, *с данным нормальным вектором* $\overrightarrow{N} = \{A; B\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2.2}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ с направляющим вектором $\vec{S} = \{m; n\}$, называется *каноническим уравнением прямой*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{2.3}$$

Направляющий вектор $\vec{S}$ – ненулевой вектор, параллельный прямой или лежащий на прямой (рис. 2.1).

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $(x_1; y_1)$ *и* $(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{2.4}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k:

$$y = kx + b, \tag{2.5}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$, α – угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс (рис. 2.2); b – отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат.

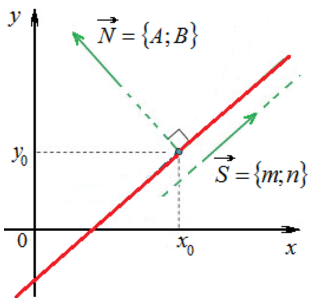


Рис. 2.1

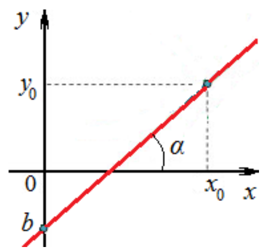


Рис. 2.2

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ (рис. 2.2), *с угловым коэффициентом k*:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.6}$$

2. *Условия перпендикулярности и параллельности прямых.* Если прямые параллельны, то их нормальные, так же как и направляющие, векторы коллинеарны (рис. 2.3). Если прямые перпендикулярны, то их нормальные, так же как и направляющие, векторы перпендикулярны (рис. 2.3). Если прямые заданы общими уравнениями (2.1):

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то
$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}; \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом (2.5):

$$l_1 : y = k_1x + b_1, \ l_2 : y = k_2x + b_2,$$

то
$$l_1 \parallel l_2 \ \Leftrightarrow \ k_1 = k_2, \ b_1 \neq b_2; \quad l_1 \perp l_2 \ \Leftrightarrow k_1k_2 = -1.$$

Таким образом, угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

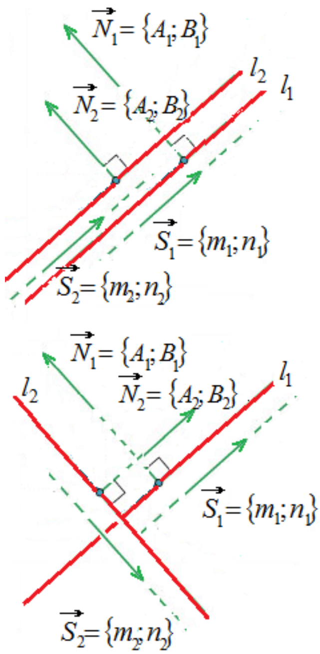


Рис. 2.3

3. *Угол между прямыми.* Угол между прямыми (наименьший угол) может быть найден как угол между направляющими или нормальными векторами. Если прямые имеют нормальные векторы $\overrightarrow{N}_1 = \{A_1; B_1\}$ и $\overrightarrow{N}_2 = \{A_2; B_2\}$, то можно найти косинус угла α между прямыми; а если известны угловые коэффициенты прямых, можно найти тангенс этого угла:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right|}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \tag{2.7}$$

4. *Расстояние от точки до прямой.* Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.8}$$

2.1.2. Учебные занятия

2.1.1. В треугольнике *ABC* составьте уравнения медианы и высоты, проведённых из вершины *A*, если известны координаты вершин: $A(-4;2)$, $B(-7;7)$, $C(-13;-13)$.

2.1.2. В треугольнике *ABC* известны координаты вершин: $A(0;4)$, $B(2;6)$, $C(8;-2)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через вершину *A* перпендикулярно медиане *BM*.

2.1.3. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(2;1)$: а) параллельно прямой $3x + 2y - 5 = 0$; б) перпендикулярно прямой $3x + 4y - 2 = 0$.

2.1.4. Зная координаты вершины $A(1;3)$ треугольника *ABC*, уравнения двух его медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$, составьте уравнения всех сторон треугольника.

2.1.5. Пусть стороны *AB*, *BC* и *AC* треугольника *ABC* лежат на прямых, имеющих следующие уравнения: $x + y + 1 = 0$, $x - 4y - 9 = 0$ и $x + 6y + 1 = 0$. Составьте уравнения высоты и медианы, проведённых из вершины *A*.

2.1.6. Найдите точку B^*, симметричную точке $B(3;5)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(0;1)$ и $C(-8;3)$.

2.1.7. Даны координаты вершин четырёхугольника *ABCD*: $A(0;1)$, $B(3;6)$, $C(8;2)$, $D(5;-2)$. Найдите угол между диагональю *AC* и стороной *AD*.

2.1.8. Даны вершина $A(2;6)$ треугольника ABC и уравнения высот $y=x$ и $y=-2x$, проходящих через вершины B и C. Найдите уравнение стороны BC.

2.1.9. Сторона квадрата лежит на прямой $3x+2y-7=0$, известна одна из вершин квадрата – $A(-2;3)$. Найдите площадь этого квадрата.

2.1.10. Одна из вершин квадрата $A(1;2)$ лежит на стороне, уравнение которой $2x+y-4=0$. Найдите уравнение диагонали квадрата, выходящей из точки A.

2.1.11. В треугольнике ABC известны координаты вершин: $A(-2;2)$, $B(2;5)$, $C(6;-4)$. Найдите уравнение биссектрисы, выходящей из вершины A.

2.1.12. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3)$ и точку M, делящую отрезок BC в отношении $3:2$, где $B(4;1)$, $C(6;4)$.

2.1.13. Найдите точку пересечения медиан треугольника ABC, если известны координаты вершин: $A(0;2)$, $B(4;1)$, $C(2;-6)$.

Примеры решения задач

Пример 2.1.1. В треугольнике ABC с вершинами $A(2;-2)$, $B(3;1)$, $C(-4;-2)$ составьте: а) уравнение стороны AB; б) уравнение медианы AM; в) уравнение высоты BH. А также найдите: г) угол между стороной AB и медианой AM; д) координаты точки пересечения медианы AM и высоты BH; е) расстояние от вершины C до стороны AB.

Решение. Треугольник ABC изображён на рис. 2.4.

а) Известны координаты двух точек прямой: $A(2;-2)$ и $B(3;1)$, поэтому воспользуемся уравнением (2.4).

$\dfrac{x-2}{3-2}=\dfrac{y+2}{1+2}$ или $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{3}$ – каноническое уравнение прямой AB. Приведём это уравнение к общему виду, получим

$$3(x-2)=y+2 \text{ или } 3x-y-8=0.$$

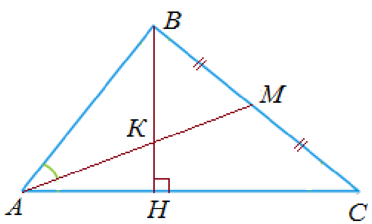


Рис. 2.4

б) Медиана AM делит сторону BC пополам (рис. 2.4). Найдём координаты точки M по формулам (1.9). Здесь $B(3;1)$, $C(-4;-2)$, $\lambda=1$, поэтому

$$x_M=(3-4)/2=-0{,}5;$$
$$y_M=(1-2)/2=-0{,}5.$$

Получили точку $M(-0{,}5;-0{,}5)$. Уравнение медианы найдём с помощью уравнения прямой (2.4), проходящей через точки $A(2;-2)$ и $M(-0{,}5;-0{,}5)$:

$$\frac{x-2}{-0{,}5-2}=\frac{y+2}{-0{,}5+2} \text{ или } \frac{x-2}{-2{,}5}=\frac{y+2}{1{,}5}.$$

Преобразовав последнее равенство по свойствам пропорций, получим общее уравнение медианы *AM*: $3x+5y+4=0$.

в) Высота *BH* перпендикулярна к стороне *AC* (рис. 2.4) треугольника *ABC*. Следовательно, вектор $\overrightarrow{AC}=\{-6;0\}$ является нормальным для прямой *BH*. Точка $B(3;1)$ принадлежит прямой *BH*. Используем уравнение (2.2):

$$-6(x-3)+0(y-1)=0 \text{ или } x-3=0.$$

Прямая *BH*: $x-3=0$ параллельна оси *Oy*.

г) Из уравнений прямых *AM*: $3x+5y+4=0$ и *AB*: $3x-y-8=0$ находим их нормальные векторы – это векторы $\vec{N}_1=\{3;5\}$ и $\vec{N}_2=\{3;-1\}$ соответственно. Для нахождения косинуса угла между прямыми используем формулу (2.7).

$$\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=3\cdot3+5\cdot(-1)=4,\ \left|\vec{N}_1\right|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34},$$

$$\left|\vec{N}_2\right|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10} \quad \Rightarrow \cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{34}\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{85}} \text{ и } \alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{85}}.$$

д) Для того чтобы найти координаты точки *K* – точки пересечения прямых *AM* и *BH* (рис. 2.4), решим систему из уравнений этих прямых:

$$\begin{cases}3x+5y+4=0,\\ x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3,\\ y=-2{,}6\end{cases} \Rightarrow K(3;-2{,}6).$$

е) Расстояние d от точки $C(-4;-2)$ до прямой *AB*: $3x-y-8=0$ находим по формуле (2.8):

$$d=\frac{|3\cdot(-4)-(-2)-8|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{18}{\sqrt{10}}=1{,}8\sqrt{10}.$$

Пример 2.1.2. Найдите координаты точки *B*, симметричной точке $A(2;-3)$ относительно прямой $l: 3x-5y+13=0$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку *B* параллельно прямой l.

Решение. Точка *B* лежит на прямой, перпендикулярной прямой l, и проходящей через точку *A* (рис. 2.5) – прямой *AB*. Составим уравнение этой прямой. Нормальный вектор $\vec{N}=\{3;-5\}$ прямой l параллелен прямой *AB*

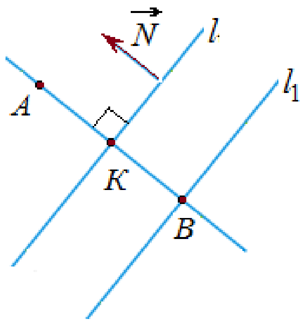


Рис. 2.5

(рис. 2.5), поэтому является направляющим для прямой AB. Используя точку $A(2;-3)$ и вектор $\vec{N}=\{3;-5\}$, составим каноническое уравнение (2.3) прямой AB:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-5},$$

преобразовав которое, получим общее уравнение AB: $5x+3y-1=0$. Точка K – точка пересечения прямых l и AB, является серединой отрезка AB (рис. 2.5). Координаты точки K найдём, решив систему из уравнений прямых l и AB:

$$\begin{cases}3x-5y+13=0,\\5x+3y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases} \Rightarrow \quad K(-1;2).$$

Тогда координаты точки $B(x_B;y_B)$ можно найти, используя формулы (1.9), координаты точек $A(2;-3)$ и $K(-1;2)$:

$$-1=\frac{2+x_B}{2},\ 2=\frac{-3+y_B}{2} \quad \Rightarrow\ x_B=-4,\ y_B=7 \quad \Rightarrow\ B(-4;7).$$

Составим уравнение прямой l_1, проходящей через точку $B(-4;7)$ параллельно прямой l (рис. 2.5). Так как прямые l и l_1 параллельны, вектор $\vec{N}=\{3;-5\}$ будет нормальным и для прямой l_1. Используем уравнение (2.2):

$$3(x+4)-5(x-7)=0 \text{ или } 3x-5y+47=0.$$

Индивидуальные задания[1]

1. Составьте каноническое уравнение прямой и постройте прямую на чертеже, зная её угловой коэффициент k_1 и отрезок b_1, отсекаемый на оси Oy, считая от начала координат.

2. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, а также одна из его вершин $A(x_A,y_A)$. Составьте: а) общие уравнения двух других сторон этого параллелограмма; б) канонические уравнения высот, проведённых из вершины $A(x_A,y_A)$ к сторонам параллелограмма; с) уравнение диагонали параллелограмма, проходящей через точку $A(x_A,y_A)$. А также найдите: д) острый угол между сторонами параллелограмма;

[1] Значения необходимых величин (k_1, b_1 и др.) возьмите в соответствии с номером Вашего варианта из табл. 2.1.

е) длины высот параллелограмма; ж) проекцию точки $A(x_A, y_A)$ на стороны параллелограмма, сделайте чертёж.

3. Найдите расстояние между прямыми, заданными уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_1x + b_2$. Сделайте чертёж.

4.1. Найдите направляющий вектор прямой $-x + 3y + 14 = 0$. Сделайте чертёж.

4.2. Найдите угол между прямыми $-4x + 3y + 3 = 0$ и $4x + 3y + 4 = 0$. Сделайте чертёж.

4.3. В треугольнике *ABC* найдите уравнение медианы, проведённой из вершины *A*, если известны координаты вершин: $A(4;3)$, $B(5;1)$, $C(-5;13)$. Сделайте чертёж.

4.4. В треугольнике *ABC* найти уравнение высоты, проведённой из вершины *A*, если известны координаты вершин: $A(-1;8)$, $B(1;11)$, $C(-5;6)$. Сделайте чертёж.

4.5. Точка $A(3;3)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $4x + y - 3 = 0$. Составьте уравнение диагонали этого квадрата, проходящей через точку *A*. Сделайте чертёж.

4.6. Найдите расстояние от точки $A(3;3)$ до прямой $-2x - y + 3 = 0$. Сделайте чертёж.

4.7. В треугольнике *ABC* найдите уравнения высоты и медианы, проведённых из вершины *A*, если известны координаты вершин: $A(5;6)$, $B(5;8)$, $C(9;2)$. Сделайте чертёж.

4.8. В треугольнике *ABC* найдите уравнение биссектрисы, проведённой из вершины *A*, если известны координаты вершин: $A(-1;4)$, $B(-1;12)$, $C(23;4)$. Сделайте чертёж.

4.9. Найдите общее уравнение прямой, проходящей через точку *B* параллельно прямой, проходящей через точки *A* и *C*, а также найдите расстояние между этими прямыми, если известны координаты точек: $A(11;6)$, $B(4;8)$, $C(6;4)$. Сделайте чертёж.

4.10. Найдите направляющий вектор прямой $x + 3y + 3 = 0$. Сделайте чертёж.

4.11. Найдите угол между прямыми $2x - 3y + 1 = 0$ и $3x + y - 2 = 0$. Сделайте чертёж.

4.12. В треугольнике ABC найти уравнение медианы, проведённой из вершины A, если известны координаты вершин: $A(5;-3)$, $B(4;2)$, $C(-2;-18)$. Сделайте чертёж.

4.13. В треугольнике ABC найти уравнение высоты, проведённой из вершины A, если известны координаты вершин: $A(5;5)$, $B(-6;-2)$, $C(-1;1)$. Сделайте чертёж.

4.14. Точка $A(4;2)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-y-1=0$. Составьте уравнение диагонали этого квадрата, проходящей через точку A. Сделайте чертёж.

4.15. Найдите расстояние от точки $A(-3;-3)$ до прямой $3x-4y-3=0$. Сделайте чертёж.

4.16. В треугольнике ABC найдите уравнения высоты и медианы, проведённых из вершины A, если известны координаты вершин: $A(6;-3)$, $B(10;0)$, $C(8;-8)$. Сделайте чертёж.

4.17. В треугольнике ABC найдите уравнение биссектрисы, проведённой из вершины A, если известны координаты вершин: $A(4;-5)$, $B(4;-17)$, $C(-44;-5)$. Сделайте чертёж.

4.18. Найдите общее уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно прямой, проходящей через точки A и C, а также найдите расстояние между этими прямыми, если известны координаты точек: $A(5;-7)$, $B(8;-7)$, $C(5;-5)$. Сделайте чертёж.

4.19. Найдите направляющий вектор прямой $x-4y-18=0$. Сделайте чертёж.

4.20. Найдите угол между прямыми $3x+2y+5=0$ и $3x+3y-1=0$. Сделайте чертёж.

4.21. В треугольнике ABC найдите уравнение медианы, проведённой из вершины A, если известны координаты вершин: $A(-3;4)$, $B(3;4)$, $C(-13;2)$. Сделайте чертёж.

4.22. В треугольнике ABC найти уравнение высоты, проведённой из вершины A, если известны координаты вершин: $A(4;-8)$, $B(9;-2)$, $C(6;-3)$. Сделайте чертёж.

4.23. Точка $A(-3;-2)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x+2y-4=0$. Составьте уравнение диагонали этого квадрата, проходящей через точку A. Сделайте чертёж.

4.24. В треугольнике ABC найдите уравнения высоты и медианы, проведённых из вершины A, если известны координаты вершин: $A(-6;-2)$, $B(-9;-1)$, $C(1;-13)$. Сделайте чертёж.

4.25. В треугольнике ABC найдите уравнение биссектрисы, проведённой из вершины A, если известны координаты вершин: $A(6;2)$, $B(10;10)$, $C(-10;-6)$. Сделайте чертёж.

2.2. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.2.1. Теоретические сведения

1. *Общее уравнение плоскости* α имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2.9}$$

где A, B, C – координаты *нормального вектора* $\vec{N}$, ненулевого вектора, перпендикулярного плоскости α (рис. 2.6).

Для того чтобы составить общее уравнение плоскости (2.9), необходима исходная информация, однозначно определяющая плоскость, в соответствии с которой получаем различные уравнения плоскости:

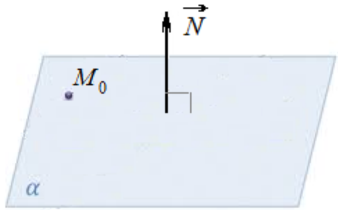


Рис. 2.6

– *уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{N} = \{A, B, C\}$ (рис. 2.6):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \tag{2.10}$$

– *уравнение плоскости в «отрезках»*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{2.11}$$

где a, b, c – абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскостью координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно;

– *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.12}$$

2. Рассмотрим простейшие задачи на расположение плоскостей. Пусть даны две плоскости:

$$\alpha: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\beta: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Угол φ *между плоскостями* α и β (меньший угол) равен углу между нормалями $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, поэтому его можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right|}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей α и β:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие параллельности плоскостей α и β:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α вычисляется по формуле

$$d = \frac{|A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

3. *Прямую* l *в пространстве* можно задать различными уравнениями:

– *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{2.13}$$

здесь использованы координаты точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, лежащей на прямой, и координаты параллельного прямой вектора $\vec{S} = \{m; n; p\}$, называемого *направляющим* (рис. 2.7);

– *параметрические уравнения прямой* (t – параметр)

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad t \in R; \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{2.14}$$

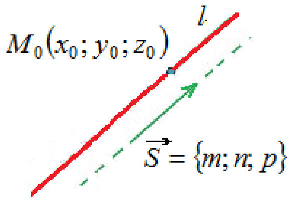


Рис. 2.7

– *уравнения прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

– *общие уравнения прямой* l *в пространстве*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

в которых прямая l является результатом пересечения двух плоскостей, и её направляющий вектор можно найти по формуле

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (2.15)$$

4. Рассмотрим простейшие задачи на расположение прямых. Пусть даны две прямые

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Для двух прямых в пространстве возможен один из вариантов взаимного расположения: параллельны, совпадают, пересекаются, скрещиваются. В любом случае прямые образуют некоторый угол φ (меньший угол между их направляющими векторами $\vec{S}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{S}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$):

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right|}{\left|\vec{S}_1\right| \cdot \left|\vec{S}_2\right|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Отсюда следует *условие перпендикулярности прямых*:

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0 \text{ или } m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых имеет вид

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \quad \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1 M_2},$$

а *условие их совпадения*

$$l_1 = l_2 \Leftrightarrow \quad \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \parallel \overrightarrow{M_1 M_2},$$

где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – точки, принадлежащие прямым l_1 и l_2. *Условие пересечения непараллельных прямых* имеет вид

$$\overrightarrow{M_1 M_2}\,\vec{S}_1 \vec{S}_2 = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0,$$

если это условие не выполняется, то прямые *скрещивающиеся*. Расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямой l (2.13), проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ с направляющим вектором $\vec{S} = \{m; n; p\}$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{\left|\vec{S} \times \overrightarrow{M_0 M_1}\right|}{\left|\vec{S}\right|}. \qquad (2.16)$$

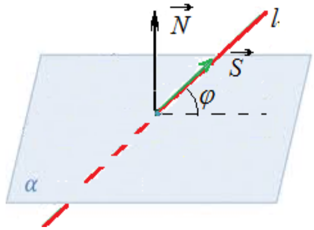


Рис. 2.8

5. Угол φ (рис. 2.8) между прямой l, заданной уравнением (2.13), и плоскостью α, заданной уравнением (2.9), можно найти по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{N}\vec{S}|}{|\vec{N}||\vec{S}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если $\varphi = 0$, т.е. при выполнении равенства

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

прямая l либо параллельна плоскости α ($l \parallel \alpha$), либо лежит в плоскости α ($l \subset \alpha$). Для выяснения этого подставим координаты точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ из уравнения прямой (2.13) в уравнение плоскости (2.9). Если координаты удовлетворяют уравнению, то $l \subset \alpha$; в противном случае – $l \parallel \alpha$. Если $Am + Bn + Cp \neq 0$, прямая и плоскость пересекаются. Условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

2.2.2. Учебные занятия

2.2.1. Даны точки $A(3;-2;-1)$, $B(3;2;0)$, $C(-3;1;0)$, $D(-4;-2;0{,}5)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x - 3y + 4z = 0$.

2.2.2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3;0;2)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{2;3;5\}$.

2.2.3. Даны точки $A(3;-2;4)$ и $B(1;4;2)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{AB}$.

2.2.4. Составьте уравнение плоскости, если она проходит через точку $M_0(6;-10;1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz – отрезок $c = 2$.

2.2.5. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;-3;-4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

2.2.6. Составьте уравнение плоскости, параллельной плоскости Oxy и проходящей через точку $M_0(2;-2;3)$.

2.2.7. Найдите величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2;-3;3)$ параллельно плоскости $3x+y-3z=0$.

2.2.8. Составьте уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1;5;6)$, $M_2(-1;-7;10)$.

2.2.9. Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$.

2.2.10. Составьте уравнение плоскости, параллельной плоскости Oxz и проходящей через точку $M_0(-3;-2;4)$.

2.2.11. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(-2;-3;-4)$.

2.2.12. Составьте уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(-2;3;4)$.

2.2.13. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$ и параллельной векторам $\vec{a}=\{3;0;-1\}$ и $\vec{b}=\{-3;2;2\}$.

2.2.14. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;3;-5)$ и $M_2(-1;1;-6)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{4;4;3\}$.

2.2.15. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;3;4)$ параллельно плоскости $x+2y-3z+4=0$.

2.2.16. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2;-3;1)$ и $M_2(1;4;-2)$ перпендикулярно плоскости $2x+3y-z+4=0$.

2.2.17. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(2;3;-5)$, $M_2(1;0;-4)$ и $M_3(3;1;2)$.

2.2.18. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;-1;2)$ перпендикулярно плоскостям $x+2y-2z+4=0$ и $x-2y+z-4=0$.

2.2.19. Составьте уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям $x+5y-z+7=0$ и $3x-y+2z-3=0$.

2.2.20. Найдите острый угол между плоскостями α и β:

а) $\alpha: 2x-3y+4z-1=0$, $\beta: 3x-4y-z+3=0$;

б) $\alpha: x-y+z+1=0$, $\beta: 2x+3y-z-3=0$.

2.2.21. Определите, при каком значении B плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By+10z-3=0$ будут перпендикулярны.

2.2.22. Определите, при каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x-3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны.

2.2.23. Найдите расстояние от точки A до плоскости α:

а) $A(2;3;4)$, $\alpha: 4x+3y+12z-5=0$; б) $A(1;-2;1)$, $\alpha: 10x-2y+11z-10=0$.

2.2.24. Найдите расстояние между параллельными плоскостями $2x-3y+6z+28=0$ и $2x-3y+6z-14=0$.

2.2.25. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;-1;2)$ а) параллельно вектору $\vec{a}=\{2;1;-3\}$; б) параллельно оси Oy; г) параллельно прямой $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

2.2.26. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки $A(2;-5;0)$ и $B(3;-1;4)$.

2.2.27. Составьте канонические и параметрические уравнения прямых:

а) $\begin{cases}3x-y+z-2=0,\\2x+2y-3z+1=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x+4y-z-5=0,\\4x-2y+z+3=0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}4x+y-3=0,\\x-y+2z+8=0.\end{cases}$

2.2.28. Проверьте, параллельны ли прямые:

а) $\begin{cases}x=2t-2,\\y=-t+1,\\z=3\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+4y-5z+3=0,\\x+2y+3z-7=0;\end{cases}$

б) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{-4}$ и $\begin{cases}x-2y+3z-2=0,\\2x+8y-3z+1=0.\end{cases}$

2.2.29. Проверьте, перпендикулярны ли прямые:

а) $\begin{cases}x=3t,\\y=-2t+2,\\z=-t+4\end{cases}$ и $\begin{cases}2x-y+z-4=0,\\3x+y-2=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x+y-3z-1=0,\\2x-y-9z=0\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+y+2z+5=0,\\2x-2y-z+2=0;\end{cases}$

в) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-6}$ и $\begin{cases}2x+y-4z+2=0,\\4x-y-5z+4=0.\end{cases}$

2.2.30. Найдите точки пересечения прямой, проходящей через точки $A(2;0;-4)$ и $B(3;1;-5)$, с координатными плоскостями.

2.2.31. Даны вершины треугольника *ABC*: $A(2;-5;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(0;4;-3)$. Составьте: а) уравнение стороны *AB* треугольника *ABC*; б) уравнение медианы, проведённой из вершины *A*; в) уравнение средней линии треугольника *ABC*, параллельной стороне *AB*; г) уравнение биссектрисы его внутреннего угла при вершине *C*; д) уравнение его высоты, опущенной из вершины *B*.

2.2.32. Найдите угол между прямой l и плоскостью α:

а) $l: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$, $\alpha: x+2y-3z+4=0$;

б) $l: \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{4}$, $\alpha: 2x-3y-2z+5=0$.

2.2.33. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;2;-3)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{2}$.

2.2.34. Составьте уравнение перпендикуляра к плоскости $4x-5y-z-3=0$, проходящего через точку $M(-1;1;-2)$.

2.2.35. Найдите точку пересечения прямой l с плоскостью α:

а) $l: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{5}$, $\alpha: x+2y-3z-4=0$;

б) $l: \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+5}{2}$, $\alpha: 2x+3y+z-22=0$;

в) $l: \dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{4}$, $\alpha: 3x-y+2z-8=0$.

2.2.36. Составьте уравнение перпендикуляра к плоскости $x-3y+2z-26=0$, проходящего через точку $M(-2;2;-4)$. Найдите координаты основания этого перпендикуляра.

2.2.37. Проверьте, что прямая l параллельна плоскости α:

а) $l: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$, $\alpha: 5x-2y+7z+3=0$;

б) $l: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z+1}{3}$, $\alpha: 3x-5y-3z-4=0$;

в) $l: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y-3}{8} = \dfrac{z-1}{-9}$, $\alpha: x+3y-2z-1=0$.

2.2.38. Проверьте, что прямая l лежит в плоскости α:

а) $l: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$, $\alpha: 2x - y - 2z - 9 = 0$;

б) $l: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{5}$, $\alpha: 3x - 4y - 2z - 7 = 0$;

в) $l: \begin{cases} x = t + 7, \\ y = t - 2, \\ z = 2t + 1, \end{cases}$ $\alpha: x + 3y - z + 1 = 0$.

2.2.39. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 2x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$ и точку $M(2;1;-1)$.

2.2.40. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;4;0)$ и прямую $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{2}$.

2.2.41. Составьте уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$.

2.2.42. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-1)$ и прямую $\begin{cases} x = t - 3, \\ y = 2t + 5, \\ z = -3t + 1. \end{cases}$

2.2.43. Найдите проекцию точки M на плоскость α:

а) $M(4;-3;1)$, $\alpha: x - 2y - z - 15 = 0$; б) $M(3;1;-1)$, $\alpha: x + 2y + 3z - 30 = 0$.

2.2.44. При каких значениях n и A прямая $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-5}{n} = \dfrac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$?

2.2.45. При каком значении A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ параллельна прямой $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{1}$?

2.2.46. При каких значениях m и C прямая $\dfrac{x-2}{m} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?

2.2.47. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$?

2.2.48. При каких значениях B и D прямая $\begin{cases} x-2y+z-9=0, \\ 3x+By+z+D=0 \end{cases}$ лежит в плоскости Oxy?

2.2.49. Найти точку, симметричную точке $M(4;3;10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Примеры решения задач

Пример 2.2.1. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(0;1;3)$ и $M_2(2;4;5)$.

Решение. Для составления уравнения плоскости α воспользуемся уравнением (2.10). Вектор нормали $\vec{N}=\{A,B,C\}$ можно получить с помощью векторного произведения двух векторов, параллельных плоскости α или лежащих в плоскости α (пункт 1.3.1, рис. 1.7). Такими векторами являются вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ и орт оси Ox – вектор $\vec{i}=\{1;0;0\}$ (рис. 2.9). Находим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;3;2\}.$$

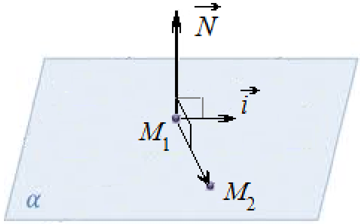


Рис. 2.9

Тогда вектор нормали найдём по формуле (1.14):

$$\vec{N}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{i}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2\vec{j}-3\vec{k}.$$

С помощью вектора нормали $\vec{N}=\{0;2;-3\}$ и, например, точки $M_1(0;1;3)$ составляем уравнение (2.10):

$$2(y-1)-3(z-3)=0 \text{ или } 2y-3z+7=0,$$

которое и является искомым уравнением плоскости α.

Пример 2.2.2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-1)$ параллельно плоскости $5x-3y+2z-10=0$.

Решение. Так как искомая плоскость α параллельна данной, то нормальный вектор $\vec{N} = \{5;-3;2\}$ данной плоскости будет также нормальным и для плоскости α. Используя уравнение плоскости (2.10) и координаты точки $M(2;3;-1)$, составим уравнение плоскости α:

$$5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0 \text{ или } 5x-3y+2z+1=0 .$$

Пример 2.2.3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;-1;2)$ параллельно векторам $\vec{a} = \{1;-2;1\}$ и $\vec{b} = \{1;2;-2\}$.

Решение. Так как плоскость параллельна векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то как и в примере 2.2.1, в качестве нормального вектора можно взять вектор $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} = \{2;3;4\} .$$

Подставляем координаты вектора $\vec{N}$ и точки M в уравнение (2.10):

$2(x+1)+3(y+1)+4(z-2)=0$ или $2x+3y+4z-3=0$ – уравнение искомой плоскости.

Пример 2.2.4. Преобразуйте к каноническому виду общие уравнения прямой $l: \begin{cases} x+2y+4z-8=0, \\ 6x+3y+2z-18=0. \end{cases}$

Решение. Для того чтобы записать канонические уравнения прямой (2.13), необходимо найти направляющий вектор $\vec{S}$ и какую-нибудь точку, принадлежащую этой прямой. Вектор $\vec{S}$ находим по формуле (2.15):

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 22\vec{j} - 9\vec{k} = \{-8;22;-9\} .$$

Координаты точки на прямой l являются решением системы линейных уравнений, определяющей прямую. Система имеет бесконечное множество решений. Найдём одно из них, положив, например, $x = 0$. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными, решим её:

$$\begin{cases} 2y+4z-8=0, \\ 3y+2z-18=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7, \\ z=-1{,}5. \end{cases}$$

Нашли точку $M_0(0;7;-1{,}5)$, лежащую на прямой l, следовательно, по формуле (2.13) канонические уравнения прямой запишутся в виде

$$\frac{x}{-8}=\frac{y-7}{22}=\frac{z+1{,}5}{-9}.$$

Пример 2.2.5. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;1;-1)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{1;-2;3\}$.

Решение. Подставляем данные условия задачи в формулу (2.14), получаем:

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=1-2t, \\ z=-1+3t \end{cases} \text{ – параметрические уравнения прямой.}$$

Пример 2.2.6. Найдите расстояние от точки $M(-5;4;3)$ до прямой $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{2}$.

Решение. Для того чтобы решить задачу, воспользуемся формулой (2.16). Из уравнений прямой определяем точку $M_0(2;3;1)$ и направляющий вектор $\vec{S}=\{-1;3;2\}$. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}=\{-7;1;2\}$ и векторное произведение

$$\vec{S}\times\overrightarrow{M_0M}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ -7 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4\vec{i}-12\vec{j}+20\vec{k}=\{4;-12;20\}.$$

Тогда

$$d=\frac{\left|\vec{S}\times\overrightarrow{M_0M}\right|}{\left|\vec{S}\right|}=\frac{\sqrt{4^2+(-12)^2+20^2}}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{35}}{\sqrt{14}}=2\sqrt{10}.$$

Пример 2.2.7. Найдите координаты точки, симметричной точке $M_1(3;4;5)$ относительно плоскости $x-2y+z-6=0$.

Решение. Точка M_2, симметричная точке M_1 относительно плоскости, принадлежит прямой, перпендикулярной к плоскости (рис. 2.10), и является концом отрезка M_1M_2, который пересекает плоскость в точке M. Причём M – середина отрезка M_1M_2. Нормаль к плоскости $\vec{N}=\{1;-2;1\}$ параллельна прямой M_1M_2, поэтому является

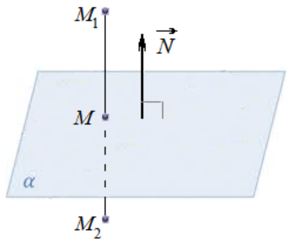


Рис. 2.10

для неё направляющим вектором. Составим параметрические уравнения (2.14) прямой M_1M_2 с помощью точки M_1 и направляющего вектора $\vec{N}$:

$$M_1M_2:\begin{cases} x=3+t, \\ y=4-2t, \\ z=5+t. \end{cases}$$

Найдём значение параметра *t*, при котором прямая M_1M_2 достигнет плоскости α (рис. 2.10) и получится точка *M*. Для этого подставим выражения для переменных из параметрических уравнений прямой в уравнение плоскости:

$$(3+t)-2(4-2t)+(5+t)-6=0 \quad \Rightarrow \quad t=1.$$

При данном значении параметра *t* получаем точку *M*, координаты которой

$$x=3+1=4,\ y=4-2=2,\ z=5+1=6 \quad \Rightarrow \quad M(4;2;6).$$

А так как точка *M* – середина отрезка M_1M_2, то её координаты точки M_2 можно найти по формулам (1.9), используя координаты точек $M_1(3;4;5)$ и $M(4;2;6)$:

$$4=\frac{3+x_2}{2},\ 2=\frac{4+y_2}{2},\quad 6=\frac{5+z_2}{2} \Rightarrow\ x_2=5,\ y_2=0,\ z_2=7.$$

Итак, точка M_2 имеет координаты: $M_2(5;0;7)$.

Пример 2.2.8. Найдите проекцию точки $M(1;2;8)$ на прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

Решение. Обозначим искомую точку через *P*. Эта точка является основанием перпендикуляра, проведённого из точки *M* на данную прямую *l*. Точку *P* получим, если пересечём прямую плоскостью α, проходящей через точку *M* перпендикулярно прямой *l* (рис. 2.11). Нормальный вектор плоскости α совпадает с направляющим вектором $\vec{S}=\{2;-1;1\}$ прямой *l*. Составим уравнение (2.10) плоскости α:

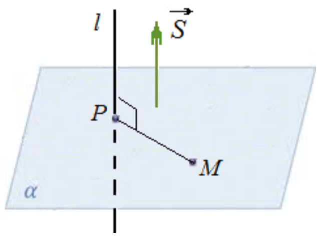


Рис. 2.11

$$2(x-1)-(y-2)+(z-8)=0,$$

$$\alpha: 2x-y+z-8=0.$$

Уравнения прямой *l* запишем в параметрической форме (2.14):

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t, \\ z = t, \end{cases}$$

и найдём точку пересечения P прямой l и плоскости α, подставив правые части уравнений прямой в уравнение плоскости:

$$2(2t+1) - (-t) + t - 8 = 0 \quad \Rightarrow t = 1 .$$

В точке P прямой l значение параметра $t = 1$, поэтому её координаты: $x = 3$, $y = -1$, $z = 1$. Таким образом, получим $P(3;-1;1)$.

Пример 2.2.9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ и точку $M_1(3;4;5)$.

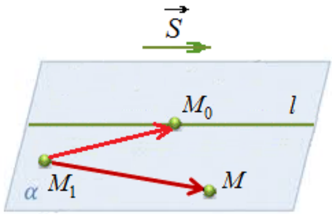


Рис. 2.12

Решение. По условию задачи прямая l лежит в плоскости, значит точка $M_0(2;3;4)$ на прямой также принадлежит этой плоскости (рис. 2.12), а направляющий вектор прямой $\vec{S} = \{2;-1;1\}$ параллелен искомой плоскости. Пусть $M(x;y;z)$ – текущая точка плоскости. Векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x-3; y-4; z-5\}$, $\overrightarrow{M_1M_0} = \{-1;-1;-1\}$ и $\vec{S}$ компланарны, условие их компланарности запишется в виде

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_0}\,\vec{S} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрываем определитель, получаем уравнение плоскости

$$-(x-3) + 2(y-4) - (z-5) = 0 \text{ или } x - 2y + z = 0 .$$

Индивидуальные задания[1]

1. Составьте уравнение плоскости α_1, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\vec{N}$.

2. Составьте общее уравнение плоскости α_2, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3, и найдите нормальный вектор этой плоскости, а также отрезки,

[1] Значения необходимых величин (M_1, $\vec{N}$ и др.) возьмите в соответствии с номером Вашего варианта из табл. 2.1.

отсекаемые этой плоскостью на координатных осях (считая от начала координат).

3. Составьте уравнение плоскости α_3, проходящей через точку M_1 перпендикулярно плоскостям α_1 и α_2.

4. Составьте уравнение плоскости α_4, проходящей через точку M_2 параллельно плоскости α_3 (см. предыдущие задачи), и найдите расстояние между плоскостями α_3 и α_4.

5. Пересечением плоскостей α_1 и α_2 является прямая l_2. Составьте уравнение плоскости, параллельной прямой l_2 и проходящей через прямую l_1, заданную каноническими уравнениями $\frac{x-7}{k-13}=\frac{y+2}{k-4}=\frac{z-3}{k-12}$ (параметр k равен номеру Вашего варианта).

6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую l_2 перпендикулярно плоскости α_1.

7. Найдите угол между прямой l_1 и плоскостью α_1.

8. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку M_2 параллельно прямой l_2.

9. Составьте общие уравнения прямой, проходящей через точку M_1 перпендикулярно плоскости α_2.

Таблица 2.1

№ варианта	k_1	b_1	k_2	b_2	$A(x_A; y_A)$	$\vec{N}$	M_1	M_2	M_3	$2c$	ε
1	0,25	–2	–0,5	2	(1; 5)	{1; –2; 4}	(1; 0; 4)	(1; –2; 0)	(2; 3;–2)	4	0,3
2	0,5	3	1,5	1	(–1; 2)	{–2; 1; 3}	(0; 0; 1)	(2; –2; 3)	(1; –2; –1)	2	1,2
3	1,0	–1	–3,0	1	(–2; 3)	{–1; 2; –3}	(1; 2; 1)	(–1; –2; –1)	(4; 3; 2)	6	0,9
4	2,0	–3	0,25	2	(1; 3)	{3; –2; 1}	(4; –2; –1)	(–2; 3; –1)	(5; 2; 1)	2	1,5
5	3,0	1	–1,0	3	(–3; 2)	{1; 2; –4}	(–3; 2; –4)	(1; 3; –1)	(–1; 2; 2)	8	2,0
6	0,5	–1	–0,3	2	(–3; 4)	{2; –2; 3}	(1; –1; 4)	(1; –2; 1)	(2; 3; –3)	6	0,2
7	0,25	3	1,25	–1	(–2; 2)	{–2; 1; 3}	(1; –2; 1)	(2; –2; 3)	(1; 3; –1)	4	1,4
8	1,0	–2	–2,0	4	(–1; 3)	{–1; 2; –3}	(3; 2; 1)	(–1; –2; –1)	(–2; 3; 2)	12	0,9
9	2,0	–4	–0,5	3	(1; 3)	{3; –2; 4}	(4; –2; 1)	(–2; 3; –1)	(5; 2; –3)	2	1,25
10	0,3	2	–1,0	–3	(–1; 2)	{1; 2; –3}	(3; 2; –4)	(1; 3; –1)	(–1; 2; 2)	8	0,8
11	0,4	–2	–2,5	4	(1; 2)	{1; –2; –3}	(1; 2; 4)	(1; –2; 0)	(2; 3; –2)	4	0,4
12	3,0	–3	1,5	1	(–1; 2)	{–2; 1; 3}	(1; –2; 1)	(2; –2; 3)	(1; 2; –3)	10	1,5
13	1,4	–2	–3	1	(–2; 3)	{–1; 2; –3}	(4; 2; 1)	(–1; –2; –1)	(4; 3; 2)	6	0,5

№ варианта	k_1	b_1	k_2	b_2	$A(x_A; y_A)$	$\vec{N}$	M_1	M_2	M_3	$2c$	ε
14	2,0	3	–0,5	–2	(1; –3)	{3; –2; 1}	(–4; 2; 2)	(–2; 3; 1)	(5; 2; –1)	2	0,5
15	–3,0	1	0,5	3	(–3; 2)	{–1; 2; –4}	(–3; 2; –3)	(1; 1; –1)	(–1; 2; 2)	4	1,2
16	0,4	–4	1,5	2	(–1; 3)	{1; 2; –2}	(1; 3; –4)	(1; –2; 0)	(2; 3; –2)	6	0,5
17	0,8	2	–1,5	4	(–1; 2)	{–2; 2; 3}	(–1; –1; 1)	(2; –2; 3)	(1; 2; 4)	8	1,25
18	1,0	–1	–2	4	(2; 3)	{–1; –2; –3}	(1; 2; 1)	(–1; 3; –1)	(4; 3; 2)	6	0,8
19	2,0	–3	0,5	1	(1; –3)	{3; 2; 1}	(4; –2; –1)	(–2; 3; –1)	(–1; 2; 1)	4	1,8
20	0,8	1	–2	–3	(3; 2)	{–1; 2; –4}	(–3; 2; 4)	(1; –3; –1)	(–1; 2; 2)	2	2,0
21	0,3	–2	–1,5	2	(–1; 5)	{1; –2; –3}	(1; –1; 4)	(1; –2; 2)	(2; 3; –2)	4	0,4
22	4,0	3	1	1	(1; –2)	{2; –1; 3}	(2; –3; 1)	(2; –2; 3)	(1; –2; –2)	2	1,5
23	3,0	–1	–2	1	(–1; 1)	{–1; 2; –3}	(1; 2; 1)	(–1; 4; –1)	(4; –1; 2)	4	0,8
24	–2,0	–3	0,4	2	(1; 3)	{3; 2; 3}	(4; –2; –1)	(–2; –3; –1)	(–3; 2; 1)	6	1,25
25	–3,0	1	–1	–3	(3; 5)	{1; –4; –4}	(–3; 2; –4)	(1; 4; –1)	(–1; 3; 2)	8	0,4

2.3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.3.1. Теоретические сведения

Кривые второго порядка – это линии, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второй степени. Рассмотрим линии второго порядка: окружность, эллипс, гиперболу и параболу.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром (рис. 2.13).

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами (рис. 2.14).

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами (рис. 2.15).

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом F, и от данной прямой l, называемой директрисой (рис. 2.16).

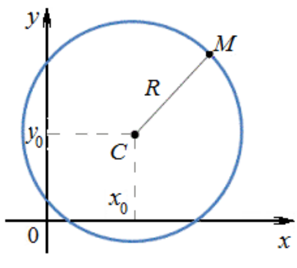


Рис. 2.13

Эллипс

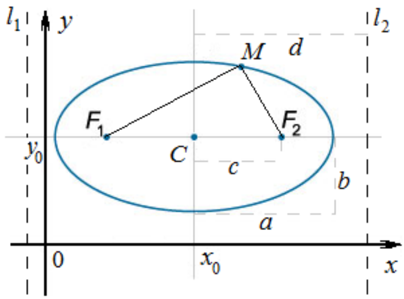


Рис. 2.14

Каноническое уравнение:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$

определение:

$$MF_1+MF_2=2a;$$

формулы:

$$a^2=b^2+c^2,\quad \varepsilon=\frac{c}{a},$$

$$0<\varepsilon<1,\quad d=\frac{a}{\varepsilon}.$$

Гипербола

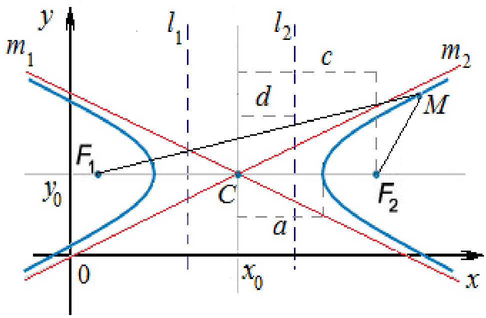


Рис. 2.15

Каноническое уравнение:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$

определение:

$$|MF_1-MF_2|=2a;$$

формулы:

$$c^2=a^2+b^2,\ \varepsilon=\frac{c}{a},$$

$$\varepsilon>1,\quad d=\frac{a}{\varepsilon},\ k=\pm\frac{b}{a}.$$

Парабола

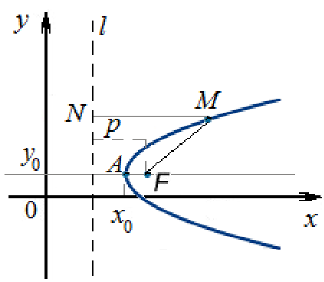


Рис. 2.16

Каноническое уравнение:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0);$$

определение:

$$MF=MN;$$

формулы:

$$\varepsilon=1,\ AF=\frac{p}{2}.$$

Линии второго порядка имеют *оси симметрии* (одну или более). Оси симметрии эллипса и гиперболы перпендикулярны, на одной из них лежат два фокуса F_1 и F_2 (*фокальная ось*); посередине между фокусами находится *центр* C кривой, в котором пересекаются оси симметрии. Точки пересечения кривой второго порядка с её осями называются *вершинами*. *Директрисами кривой* называются прямые, перпендикулярные фокальной оси эллипса и гиперболы (оси симметрии параболы) и обладающие свойством: отношение расстояния от любой точки кривой до фокуса к расстоянию от этой точки до ближайшей к фокусу директрисы есть величина постоянная. Эта величина называется *эксцентриситетом* и обозначается ε.

Для каждой из кривых выберем такую систему координат, чтобы оси кривой были параллельны координатным осям. Уравнение второй степени вида $ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$ (не содержащее члена xy с произведением переменных) определяет линию второго порядка с горизонтальными и вертикальными осями и называется *общим уравнением*. Общее уравнение приводится к более простому – *каноническому виду* методом выделения полных квадратов. Пусть фокальные оси эллипса, гиперболы и ось симметрии параболы параллельны оси абсцисс. Рассмотрим уравнения линий в каноническом виде.

Здесь введены обозначения: a – расстояние от центра до вершины на горизонтальной оси, b – расстояние от центра до вершины на вертикальной оси, c – расстояние от центра до фокуса, d – расстояние от центра до директрисы, k – угловой коэффициент асимптот гиперболы, p – расстояние от фокуса параболы до директрисы (*параметр параболы*), M – текущая точка на кривой.

Параметры a и b эллипса называются соответственно *большой* и *малой полуосями* (рис. 2.13). Эксцентриситет эллипса характеризует его форму: чем больше эксцентриситет, тем больше эллипс вытянут вдоль своей большей оси. Если фокальная ось эллипса параллельна оси Oy, то большая полуось будет b, а малая – a; во всех формулах эллипса в этом случае a и b меняются местами и эллипс вытянут вдоль вертикальной оси.

Если $a = b = R$, то каноническое уравнение эллипса примет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$

Это уравнение окружности радиусом R с центром в точке $C(x_0; y_0)$ (рис. 2.16), $CM = R$. Эксцентриситет окружности равен нулю.

Фокальная ось симметрии гиперболы называется также *действительной* осью, она пересекает гиперболу в двух точках (вершинах). Другая ось гиперболы не имеет с ней общих точек и называется *мнимой осью* гиперболы. Параметры a и b гиперболы называется соответственно *действительной* и *мнимой полуосями*. *Асимптотами* гиперболы называются прямые m_1 и m_2, проходящие через центр гиперболы (рис. 2.14), и обладающие свойством: при неограниченном удалении от центра точки гиперболы сколь угодно близко приближаются к асимптотам. Уравнения асимптот в системе координат, в которой оси гиперболы параллельны координатным осям, имеют вид $y = y_0 + k(x - x_0)$, где

$k = \pm b/a$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы: чем ε ближе к 1, тем более вытянута гипербола вдоль действительной оси.

Кривая, определяемая уравнением

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \qquad (2.16)$$

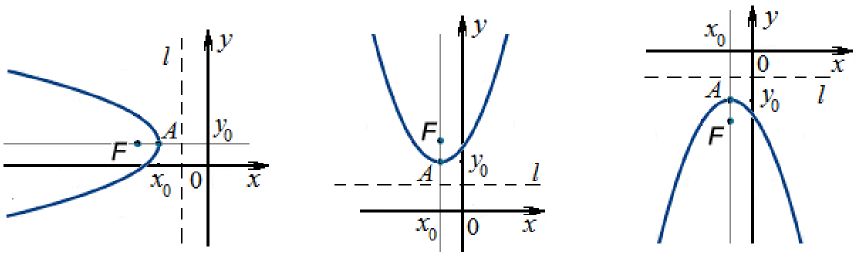
также есть гипербола, действительная ось которой расположена вертикально, параметр b является действительной полуосью, параметр a – мнимой. В этом случае в формулах вычисления ε и d параметр a заменяется параметром b.

Ось симметрии параболы проходит через фокус перпендикулярно директрисе. Вершина параболы A лежит на оси (рис. 2.15) и делит расстояние p между фокусом и директрисой пополам. Число p, параметр параболы, влияет на форму параболы, парабола тем шире, чем больше p.

Канонические уравнения:

$$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0),\ (x-x_0)^2=2p(y-y_0),\ (x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$$

также определяют параболы (рис. 2.17).



$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$ $\quad$ $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ $\quad$ $(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$

Рис. 2.17

2.3.2. Учебные занятия

2.3.1. Составьте уравнение окружности, если точки $A(5;-2)$ и $B(-1;2)$ являются концами одного из её диаметров.

2.3.2. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1;3)$, $B(0;2)$ и $C(1;-1)$.

Составьте каноническое уравнение линии второго порядка, если известны координаты фокусов и директриса, определите тип линии и эксцентриситет.

2.3.3. $F_1(2;1)$, $F_2(2;5)$, $l: y+2=0$.

2.3.4. $F_1(-3;1)$, $F_2(7;1)$, $l: x+1=0$.

2.3.5. $F_1(3;-5)$, $F_2(3;3)$, $l: y=2$.

2.3.6. $F_1(-5;-1)$, $F_2(3;-1)$, $l: x=5$.

Составьте каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот и один фокус, определите эксцентриситет и уравнения директрис.

2.3.7. $m: y=1\pm 0{,}75(x+2)$, $F(8;1)$.

2.3.8. $m: y=-1\pm 2{,}4(x-2)$, $F(2;12)$.

Составьте каноническое уравнение параболы, если известны уравнение директрисы и фокус, изобразите кривую на чертеже.

2.3.9. $l: x=3$, $F(1;0)$.

2.3.10. $l: y=2$, $F(2;-4)$.

Приведите уравнение линии к каноническому виду, определите тип линии, найдите эксцентриситет, координаты фокусов (a). Изобразите эту линию на чертеже.

2.3.11. $4x^2+25y^2+32x-150y+189=0$.

2.3.12. $4x^2+16y^2+8x-160y+340=0$.

2.3.13. $x^2-2x+6y+7=0$.

2.3.14. $16x^2-25y^2-64x+100y-436=0$.

2.3.15. $9x^2-9y^2-90x+72y=0$.

2.3.16. $9x^2+36y^2-18x+216y+9=0$.

2.3.17. $4x^2-36y^2-24x-288y-684=0$.

2.3.18. $y^2+8y+8x+8=0$.

Примеры решения задач

Пример 2.3.1. Приведите к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $x^2+9y^2-4x+18y+4=0$. Найдите эксцентриситет, координаты фокусов, сделайте чертёж.

Решение. Сгруппируем слагаемые с переменной x и слагаемые с переменной y, коэффициенты перед x^2 и y^2 вынесем за скобку:

$$(x^2-4x)+9(y^2+2y)+4=0.$$

Дополним выражения, стоящие в скобках, до полного квадрата и выделим полный квадрат:

$$(x^2-4x+4)-4+9(y^2+2y+1)-9+4=0,$$

$$(x-2)^2+9(y+1)^2=9.$$

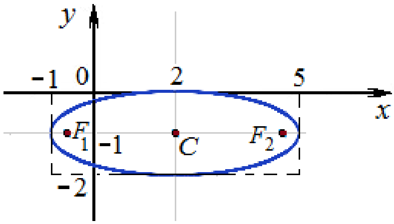


Рис. 2.18

Разделим обе части уравнения на 9:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{1}=1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с центром в точке $C(2;-1)$, с полуосями $a=3$, $b=1$. Для построения чертежа отметим на координатной плоскости точку C (рис. 2.18), проведём через точку C оси, параллельные координатным осям, и отложим на них вправо и влево от точки C значение параметра a, а вверх и вниз – значение параметра b, и построим основной прямоугольник эллипса. Впишем эллипс в этот прямоугольник. Найдём расстояние от центра до фокусов и эксцентриситет:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2};\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Фокусы лежат на большой оси (рис. 2.18):

$$F_1(-2\sqrt{2}+2;-1),\ F_2(2\sqrt{2}+2;-1).$$

Пример 2.3.2. Приведите к каноническому виду уравнение кривой $x^2+2y-6x+13=0$. Найдите координаты фокуса, сделайте чертёж.

Решение. Сгруппируем слагаемые, содержащие переменную x, и дополним выражение, стоящее в скобках, до полного квадрата.

$$(x^2-6x+9)-9+2y+13=0,\ (x-3)^2+2y+4=0.$$

Перенесём выражение $2y+4$ в левую часть и вынесем -2 за скобку:

$$(x-3)^2=-2(y+2).$$

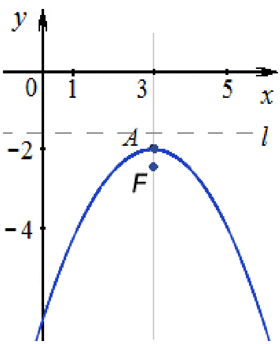


Рис. 2.19

Это каноническое уравнение параболы с вершиной $A(3;-2)$, параметр которой $p=1$. По виду уравнения определяем форму параболы, в соответствии с рис. 2.17. Парабола имеет вертикальную ось $x=3$. Для уточнения графика построим параболу по трём точкам: по вершине A и двум точкам, симметричным относительно оси параболы, например, при $y=-4$ имеем $x_1=1$, $x_2=5$. Строим чертёж параболы (рис. 2.19): вершина, ось параболы $x=3$, дополнительные точки. Фокус параболы имеет координаты F (3; –2,5), уравнение директрисы $y=-1{,}5$.

Пример 2.3.3. Фокусами гиперболы являются точки $F_1(2;-10)$ и $F_2(2;16)$, расстояние между вершинами равно 24. Составьте каноническое уравнение гиперболы.

Решение. Фокусы гиперболы лежат на прямой $x=2$ (рис. 2.20), поэтому её каноническое уравнение имеет вид уравнения (2.16). Центр расположен посредине между фокусами: $y_0=(16-10)/2=3$, поэтому его координаты $C(2;3)$, и расстояние от центра до фокусов легко найти: $c=13$ (рис. 2.20). Действительная ось равна 24, следовательно, действительная полуось равна $b=12$. Из соотношения между параметрами (см. формулы для гиперболы) находим мнимую полуось:

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{169-144}=5\ .$$

Составляем уравнение гиперболы.

Ответ: $-\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{144}=1$.

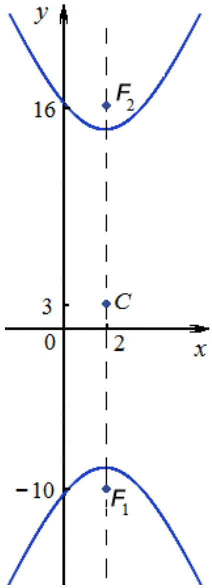


Рис. 2.20

Индивидуальные задания

1. Напишите каноническое уравнение кривой второго порядка на плоскости и постройте эту кривую, если известно расстояние $2c$ между её фокусами, эксцентриситет ε и центр A. Данные приведены в табл. 2.1. В вариантах с нечётными номерами большая и действительная оси являются горизонтальными, а с чётными номерами – эти оси вертикальные.

2. Составьте уравнение окружности с центром в точке C, которая касается прямой l:

1) $C(0;0)$, $l:3x-4y+20=0$; 2) $C(1;-1)$, $l:5x-12y+9=0$;

3) $C(-1;2)$, $l:3x+4y+5=0$; 4) $C(0;2)$, $l:5x+12y+2=0$;

5) $C(1;-3)$, $l:x-y+4=0$; 6) $C(1;2)$, $l:x+y+1=0$.

3. Составьте каноническое уравнение линии второго порядка, если известны координаты фокусов и директриса, определите тип линии и эксцентриситет:

1) $F_1(1;1)$, $F_2(7;1)$, $l:x-9=0$; 2) $F_1(1;1)$, $F_2(7;1)$, $l:x-3=0$;

3) $F_1(-2;1)$, $F_2(-2;9)$, $l:y+1=0$; 4) $F_1(-2;1)$, $F_2(-2;9)$, $l:y=3$;

5) $F_1(2;-3)$, $F_2(6;-3)$, $l:x=1$; 6) $F_1(2;-3)$, $F_2(6;-3)$, $l:x-5=0$.

4. Составьте каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот и один фокус, определите эксцентриситет и уравнения директрис:

1) $m: 3y = \pm 4(x-3)-3$, $F(3;9)$; 2) $m: y = 2 \pm 2{,}4(x+2)$, $F(11;2)$;
3) $m: 12y = 24 \pm 5(x-2)$, $F(2;-11)$; 4) $m: 7y = 7 \pm 15(x+1)$, $F(16;1)$.

5. Составьте каноническое уравнение эллипса, если известен эксцентриситет, один фокус и ближайшая к фокусу директриса:

1) $\varepsilon = 1/2$, $F(5;2)$, $l: x = 11$; 2) $\varepsilon = 1/2$, $F(1;1)$, $l: y = 10$.

6. Составьте каноническое уравнение параболы и изобразите кривую на чертеже, если известны уравнение директрисы и фокус:

1) $l: x+1=0$, $F(3;2)$; 2) $l: y=2$, $F(1;6)$; 3) $l: x=3$, $F(-1;4)$;
4) $l: y=0$, $F(2;-4)$; 5) $l: x=5$, $F(-3;3)$; 6) $l: y+4=0$, $F(-5;4)$;
7) $l: x=1$, $F(7;2)$.

7. Приведите к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, определите тип линии, найдите её эксцентриситет и уравнения директрис (или директрисы, если директриса одна). Уравнение кривой имеет вид:

1) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$; 2) $2y^2 - 3x + 4y + 8 = 0$;

3) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$; 4) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$;

5) $36x^2 - 25y^2 - 360x + 200y - 400 = 0$; 6) $x^2 - 4x - 6y + 28 = 0$;

7) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$; 8) $y^2 - 4x - 2y + 17 = 0$;

9) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$; 10) $x^2 - 4x - 2y - 2 = 0$;

11) $9x^2 + y^2 - 54x + 10y + 70 = 0$; 12) $2x^2 + 4x - 3y + 8 = 0$;

13) $25x^2 - 16y^2 - 100x + 160y + 100 = 0$; 14) $x^2 + 8x - 6y + 4 = 0$;

15) $4x^2 + 25y^2 - 24x - 100y + 36 = 0$; 16) $y^2 + 10x - 8y + 46 = 0$;

17) $4x^2 + 25y^2 + 32x - 150y + 189 = 0$; 18) $y^2 + 2x + 8y + 22 = 0$;

19) $16x^2 - 9y^2 + 32x + 72y + 16 = 0$; 20) $x^2 - y^2 - 4x - 10y - 25 = 0$;

21) $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$; 22) $x^2 - 4y^2 - 10x - 40y - 59 = 0$;

23) $9x^2 + 4y^2 - 90x + 8y + 85 = 0$; 24) $4x^2 - y^2 - 16x + 2y - 21 = 0$;

25) $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 1 = 0$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

3.1.1. Теоретические сведения

1. Областью определения $D(f)$ функции $y = f(x)$, заданной аналитически, т.е. формулой, называется множество всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл.

2. Свойства пределов функций в точке.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $B \neq 0$) также имеют пределы в точке x_0, причём

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = AB, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}. \qquad (3.1)$$

3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Если функция $\alpha(x)$ (не обращающаяся в ноль) – бесконечно малая в точке x_0, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая в точке x_0 и наоборот.

Учитывая определение бесконечно малой и бесконечно большой функций, можно записать

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty, \qquad (3.2)$$

или в условной форме:

$$\left[\frac{1}{0}\right] = \infty, \quad \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

4. Непрерывные функции. Для функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0, справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (3.3)$$

Эта формула показывает также, что знак предела $\lim\limits_{x\to x_0}$ и выражение непрерывной функции f можно переставлять местами. Все элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения (из этого факта на основании равенства (3.3) следуют формулы (3.1)).

5. Замечательные пределы функций:
– первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \tag{3.4}$$

– следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1; \tag{3.5}$$

– второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e; \tag{3.6}$$

– следствия:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{3.7}$$

6. Эквивалентные бесконечно малые функции:

– функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, бесконечно малые в точке x_0, называются эквивалентными, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,\ \alpha(x)\sim\beta(x); \tag{3.8}$$

– цепочка эквивалентных бесконечно малых:
при $x\to 0$ имеем

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg} x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg} x\sim e^x-1\sim\ln(1+x). \tag{3.9}$$

7. Точки разрыва функции – это такие точки, в проколотой окрестности которых (или в односторонней окрестности), функция определена, но не является непрерывной в самой точке. Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ может быть:

– точкой устранимого разрыва, если $f(x_0+)=f(x_0-)=A<\infty$, очевидно, что $f(x_0)\neq A$;

– точкой скачка, если $|f(x_0+)|<\infty$, $|f(x_0-)|<\infty$, $f(x_0+)\neq f(x_0-)$;

– точкой разрыва второго рода, если по крайней мере один из двух односторонних пределов функции, $f(x_0+)$ или $f(x_0-)$, обращается в бесконечность или не существует.

Точка устранимого разрыва и точка скачка называются точками разрыва первого рода.

3.1.2. Учебные занятия

1. ***Область определения функции.***

Найдите области определения функций:

3.1.1. $y=\dfrac{\sqrt{5-4x-x^2}}{\log_5(x+3)}$; **3.1.2.** $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\lg(4-x)$.

2. ***Неопределённость*** $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$**.**

Найдите пределы последовательностей:

3.1.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{1-2n}$; **3.1.4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n}{n^2+n+1}$; **3.1.5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-3n^5}{4n^2+8}$;

3.1.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^4+3n+1}}{n-1}$.

Найдите пределы функций:

3.1.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+1}{2x^5+3x^3-x}$; **3.1.8**. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$;

3.1.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sqrt[3]{8x^6+x}}{\sqrt[4]{x^8+x}}$; **3.1.10.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^5+2x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{3+8x^5}+1}$;

3.1.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+2x-3}+\sqrt[3]{x^6+1}}{3x^2+5x+7}$.

3. ***Предел функции в точке. Неопределённость*** $\left[\dfrac{0}{0}\right]$**.**

Найдите пределы рациональных функций:

3.1.12. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x+1}{x-3}$; **3.1.13.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3}{2x-6}$; **3.1.14.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x(x-3)}{x^2-9}$;

3.1.15. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$; **3.1.16.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x-3}$.

Найдите пределы иррациональных функций:

3.1.17. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; **3.1.18.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+7}-3}$; **3.1.19.** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{x+5}}{1-\sqrt{5-x}}$.

4. ***Неопределённость*** $[\infty-\infty]$**.**

Найдите пределы функций:

3.1.20. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$; **3.1.21.** $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

3.1.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; **3.1.23.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

5. ***Первый замечательный предел.***

Найдите пределы трансцендентных функций:

3.1.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{14x}$; **3.1.25.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 2x}$; **3.1.26.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cos 5x}{\operatorname{tg} x}$;

3.1.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$; **3.1.28.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; **3.1.29.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin 2x}{\operatorname{tg}^3 3x}$.

6. ***Второй замечательный предел.***

Найдите пределы функций и последовательностей:

3.1.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$; **3.1.31.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-2}\right)^{6n+5}$; **3.1.32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^{3x}$;

3.1.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2+3}\right)^{2x}$; **3.1.34.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^x$; **3.1.35.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{n+5}\right)^{3n}$.

7. ***Цепочка эквивалентных бесконечно малых.***

Найдите пределы функций:

3.1.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 5x}{3x\sin 2x\cos x}$; **3.1.37.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin^3 4x\operatorname{tg}^2 3x}{\cos x^2\arcsin 8x^6}$;

3.1.38. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$; **3.1.39.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$; **3.1.40.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}\sin 4x}{\ln(1+\sin x)}$.

8. ***Пределы функций. Разное.***

Найдите пределы функций:

3.1.41. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)$; **3.1.42.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-x^3}{2x^3+3x}$; **3.1.43.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-3x+7}{(x-7)^2}$;

3.1.44. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-x}\right)$; **3.1.45.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; **3.1.46.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{\operatorname{arctg} 2x}$;

3.1.47. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-x-15}$; **3.1.48.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$; **3.1.49.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{1-5x}$.

9. ***Точки разрыва.***

Найдите точки разрыва функций, установите их характер и постройте график функции в окрестности точек разрыва:

3.1.50. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; **3.1.51.** $y=\begin{cases}2x-1 & \text{при } x\in(-2;0],\\ -1 & \text{при } x\in(0;3),\\ -x+5 & \text{при } x\in[3;\infty);\end{cases}$ **3.1.52.** $y=\dfrac{\ln(x-3)}{x^2-7x+10}$.

3.1.3. Область определения функции

Для того чтобы найти область определения, нужно знать свойства основных элементарных функций. Например, логарифмическая функция $y=\log_a x$ определена при положительных значениях аргумента x. Корень чётной степени, например $\sqrt{x}$, существует, если подкоренное выражение неотрицательно: $x \ge 0$. Дробь $\frac{a}{b}$ существует, если $b \ne 0$. Обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ определены при $x\in[-1;1]$.

Пример 3.3.1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{4x-x^3}+\lg\left(x^2-1\right)$.

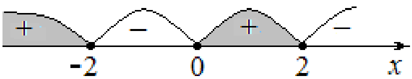
Решение. По свойствам элементарных функций составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x-x^3 \ge 0, \\ x^2-1>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x)(2+x)\ge 0, \\ (x-1)(x+1)>0. \end{cases}$$

Каждое неравенство решим методом интервалов (рис. 3.1, 3.2):

$x(2-x)(2+x)\ge 0$,
$x\in(-\infty,-2]\cup[0,2]$

$(x-1)(x+1)>0$,
$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.



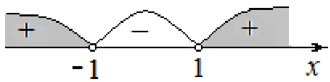


Рис. 3.1

Найдём пересечение этих множеств:

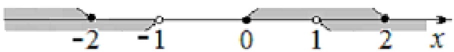


Рис. 3.2

Ответ: $x\in(-\infty,-2]\cup(1,2]$.

Индивидуальные задания

Найдите область определения функции:

1. $y=\sqrt{\frac{x+3}{5-x}}+\lg\left(x^2-4\right)$.

2. $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}+\log_2(1+x)$.

3. $y=\sqrt{x^2-5x+6}+\lg(6-x)$.

4. $y=\sqrt{x-1}+\lg\left(5x^2-8x-4\right)$.

5. $y=\sqrt{x^2+4x-5}\cdot\ln(6+x)$.

6. $y=\ln\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$.

7. $y=\dfrac{\lg x}{\sqrt{x^2-2x-63}}$.

8. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\log_3(x+10)^2}$.

9. $y=\dfrac{\lg\left(3-2x-x^2\right)}{\sqrt{x}}$.

10. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{\ln(x-1)}$.

11. $y=\sqrt{4x-x^2}+\lg\left(x^2-1\right)$.

12. $y=\sqrt{16x-x^5}+\log_2\left(x^2-4\right)$.

13. $y=\sqrt{-x^2+2x+3}+\log_3(x-1)$.

14. $y=\log_{2x-5}\left(x^2-3x-10\right)$.

15. $y=\dfrac{\sqrt{6x-x^2-5}}{5^{x-2}-1}$.

16. $y=\lg\dfrac{x}{x-2}-\sqrt{x-3}$.

17. $y=\sqrt{x-4}-\dfrac{x}{x-5}+\lg(39-x)$.

18. $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x)$.

19. $y=\arcsin\dfrac{3-2x}{5}+\sqrt{3-x}$.

20. $y=\dfrac{\sqrt{x+5}}{\lg(9-x)}$.

21. $y=\arcsin 3^x+\sqrt{x^2+7x+12}$.

22. $y=\log_{3-10x}\left(15+2x-x^2\right)$.

23. $y=\lg\left(4x^2-19x+12\right)+\dfrac{1}{\sqrt{10-x}}$.

24. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\lg\left(2x-x^2\right)}$.

25. $y=\sqrt{\dfrac{x+7}{4-x}}+\lg\left(x^2-9\right)$.

3.1.4. Пределы рациональных и иррациональных функций в точке

Свойства пределов (3.1) позволяют находить предел рациональной функции $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в точке x_0, если $Q_m(x_0)\neq 0$:

$$\lim_{x\to x_0} R(x)=R(x_0),$$

т.е. для того, чтобы найти предел, надо просто подставить вместо переменной x число x_0.

Пример 3.4.1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-5x+2}{x^4-3x+1}=\frac{1-5+2}{1-3+1}=2,$$

так как знаменатель дроби в точке $x=1$ отличен от нуля.

Аналогично можно найти предел любой элементарной функции в точке x_0, принадлежащей её области определения, используя равенство (3.3).

Пример 3.4.2.

$$\lim_{x\to\pi/6}\sin^2 2x=\sin^2\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

Наибольший интерес представляет вычисление предела функции, когда точка x_0 не принадлежит её области определения. Если при подстановке вместо переменной x числа x_0 получаем дробь вида $[a/0]$, число $a\neq 0$, тогда на основании свойства (3.2) бесконечно малых и бесконечно больших функций функция $f(x)$ в точке x_0 будет бесконечно большой и $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Пример 3.4.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{\sin x}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty.$$

Если же при подстановке x_0 получаем дробь вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, то говорят, что получили неопределённость. При нахождении пределов также появляются неопределённости $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty\cdot 0]$, $[\infty-\infty]$, $\left[1^\infty\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[0^0\right]$. Существуют методы, с помощью которых эти неопределённости можно раскрыть.

Если при нахождении предела рациональной $R(x)$ функции в точке x_0 получаем неопределённость $[0/0]$, то для её устранения следует в числителе и знаменателе выделить множитель $x-x_0$ и на него сократить дробь.

Пример 3.4.4.

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-4x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{3(x+1)(x-1/3)}{(x+1)(x-5)}=\lim_{x\to -1}\frac{3x-1}{x-5}=\frac{-3-1}{-1-5}=\frac{2}{3}.$$

Для выделения множителя $x+1$ в числителе и знаменателе использовали разложение на множители квадратного трёхчлена ax^2+bx+c:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Так, корнями уравнения $3x^2+2x-1=0$ являются числа $x_1=-1,\ x_2=1/3$, корнями уравнения $x^2-4x-5=0$ являются числа $x_1=-1,\ x_2=5$.

Если при нахождении предела иррациональной функции в точке x_0 получаем неопределённость $[0/0]$, то во многих случаях умножение числителя и знаменателя на сопряжённое выражение позволяет выделить множитель $x-x_0$ и на него сократить дробь.

Пример 3.4.5.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{1}=4\cdot 6=24\,.$$

В преобразованиях использована формула $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Индивидуальные задания

Найдите пределы рациональных и иррациональных функций в точке:

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+7x+8}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x-3}{x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2+4x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3+3x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^2-3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^5+x+3}{x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{4x^2-11x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{3x^3+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-1}{x^3-10x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2-5x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{13+x}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+7}{x^3-10x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{4x^2-3x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt{2x}-4}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-x-1}{x^3-3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{\sqrt{x+3}-3}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{3-\sqrt{7-x}}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+11}{x^2-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{6x^2-5x+1}{4x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^8-x^5+5x^3}{x^2+9}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x^2-4x+3}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-6x+1}{x^3-3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{3x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{3-\sqrt{5-2x}}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x+20}{-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+10}{3x^2-7x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{3x^2-7x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x-8}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x^2+x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x^2-x-2}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x-1}{x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{4-\sqrt{12+x}}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-5}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4x}{3-\sqrt{9+x}}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x+7}{x^3+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{7-x}-3}{4-\sqrt{14-x}}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-10}{x^2+2x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{6x^2+x-1}{2x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{x^2-4x+1}{4x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-\sqrt{6-x}}{2-\sqrt{1-x}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x+1}{x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x+15}{x^2-7x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-12x+4}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^3+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{\sqrt{8+2x}-3}{2-\sqrt{3+2x}}$.

3.1.5. Пределы функций на бесконечности и последовательностей

Последовательность – это функция натурального аргумента, поэтому все правила вычисления пределов на бесконечности для функций справедливы и для последовательностей.

При нахождении пределов функций на бесконечности, т.е. пределов вида $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, могут появиться неопределённости $[\infty/\infty]$ и $[\infty-\infty]$. Например, в случае рациональной функции имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Если в числителе и знаменателе вынести за скобку наибольшую степень переменной x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+a_1\dfrac{1}{x}+\ldots+a_{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}+a_n\dfrac{1}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+b_1\dfrac{1}{x}+\ldots+b_{m-1}\dfrac{1}{x^{m-1}}+b_m\dfrac{1}{x^m}\right)},$$

то все слагаемые в скобках, за исключением первых, окажутся бесконечно малыми функциями при $x\to\infty$, и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1\dfrac{1}{x}+\ldots+a_{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}+a_n\dfrac{1}{x^n}}{b_0+b_1\dfrac{1}{x}+\ldots+b_{m-1}\dfrac{1}{x^{m-1}}+b_m\dfrac{1}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

Поэтому для нахождения предела рациональной функции получаем правило

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}\infty, & \text{если } n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n=m,\\ 0, & \text{если } n<m.\end{cases}\qquad(3.10)$$

Пример 3.5.1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+27n+1}{4n^3+15}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\infty,$$

имеем бесконечно большую последовательность, так как по правилу (3.10) степень числителя больше степени знаменателя: $n=4>m=3$.

Пример 3.5.2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{2},$$

здесь, согласно правилу (3.10), степени числителя и знаменателя равны, поэтому предел функции равен отношению коэффициентов при наибольших степенях.

Аналогично раскрывается неопределённость $[\infty/\infty]$ для иррациональных функций.

Пример 3.5.3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}+x}{\sqrt[3]{8x^5+3x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=0,$$

здесь наибольшая степень числителя равна 1, а знаменателя – $\frac{5}{3}$, степень знаменателя больше, поэтому предел равен нулю.

Если при нахождении пределов функций на бесконечности приходим к неопределённости $[\infty-\infty]$, то, по ситуации, можно либо привести разность к общему знаменателю, либо умножить и разделить на сопряжённое выражение.

Пример 3.5.4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+x+1}-\frac{x^2}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3-x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3-x^2+x-1}{x^3-1}=-2,$$

привели разность дробей к общему знаменателю – получили неопределённость $[\infty/\infty]$, которую раскрыли по правилу (3.10), учитывая одинаковые степени числителя и знаменателя.

Пример 3.5.5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+6x}+x\right)}{\sqrt{x^2+6x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x-x^2}{\sqrt{x^2+6x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{6}{2}=3,$$

здесь числитель и знаменатель умножили на сопряжённое выражение, затем в числителе воспользовались формулой разности квадратов $a^2-b^2=$ $=(a-b)(a+b)$. Получили неопределённость $[\infty/\infty]$, которую раскрыли по правилу (3.10): числитель и знаменатель имеют первую степень, в знаменателе первая степень у двух слагаемых, поэтому коэффициенты при *x* сложили.

Индивидуальные задания

Найдите пределы функций на бесконечности и последовательностей:

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4+5n^3-2}{7n^3-n+8}$;

   б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{8x^2}+\sqrt[4]{x^2+1}}{(x+\sqrt{x})\sqrt{7+x}}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n)$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+5}{n^3+3}$;

   б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{8x^2}+\sqrt[4]{x^2+1}}{(x+\sqrt{x})\sqrt{7+x}}$;

   в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^4-7n^2+2}{3n^5+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt[4]{x^4+2}+\sqrt{x-2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-5})$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-n^4}{12n^2+3n-4}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}+7x^3}{\sqrt[4]{x^{12}+x+1}-x}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n-3})$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n^2+5}{3n^3+10n-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[7]{x^7+5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^7+5}+\sqrt{x-5}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n-1)})$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5}{n^3-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt[5]{x^5+3}+\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+3n-2})$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+3n^2+1}{8n^3+3n^2+12}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-9x^2}{3x+\sqrt[4]{16x^4+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2+5n-2}{n^3-n+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3-\sqrt[3]{x^5+1}}{\sqrt{4x^6+3}-x}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n)$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+5n^2-2n+3}{2n^4+7n^3+8}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x^4+1}}{3x+\sqrt[4]{x^4+8}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^3}{n^2+3n-100}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x-1}}{2+\sqrt[4]{x^5-2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n})$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n-1}{2n^3-3n^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-4n+1})$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-n-3n^2}{4-n+2n^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2n^2})$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4n^4}{n^3+3n+1}$;

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-5n^4}{6n^4+18}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[5]{x^6+x^3+1}-5x}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-7n+4})$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[4]{x^3+3x^2+2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2n^5}{8-3n-5n^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+5}{3n+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^5+2x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{3+8x^5}+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+4x}\right)$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+5}{n^3+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x-4-\sqrt{3x^2+3x}}{-x-5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-5}{4n^2-n+8}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x-7-\sqrt{8x^2-4x-4}}{2x+3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n(n^3-2)}-\sqrt{n^4-3})$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+5n^2+7}{3n^3+n}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x+7-\sqrt[3]{7x^3+x^2-3}}{4x-9}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3})$.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-3n^2}{5n^2-3n-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+3+\sqrt[3]{-6x^3-6x^2-1}}{9x-4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9})$.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-5n^2+2}{3-7n-n^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x+1+\sqrt{6x^2+7x}}{7x-7}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+3n-1}-\sqrt{n^3-5n})$.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{n^2+5n-7}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2-\sqrt[3]{8x^3-x^2-7x+6}}{-x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-4-\sqrt{x^2-3x+3}\right)$.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-7}{2n^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5-\sqrt{9x^2-5x+3}}{x+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0{,}01n^3-n^2+3n-4}{500n^2+n-10}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt[3]{8x}+4x\sqrt[4]{x^2+1}}{(2x+3)\sqrt{7+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{8x^2-x+2}-\sqrt{8x^2-8x-1}\right)$.

25. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+15n^2+n}{-16n-n^3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+2}+\sqrt[3]{x^2-3}}{3x+2\sqrt[4]{x^5+8}}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x+4-\sqrt{25x^2-x+2}\right)$.

3.1.6. Замечательные пределы функций

Первый замечательный предел (3.4) и следствия (3.5) представляют собой отношения бесконечно малых, т.е. раскрывают неопределённость $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. При использовании этого предела с функциями выполняются преобразования, приводящие выражение к виду (3.4) и (3.5), при этом часто используются тригонометрические формулы.

Пример 3.6.1.

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 6x}{\operatorname{tg}2x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\left(3\frac{\arcsin 6x}{6x}\frac{2x}{\operatorname{tg}2x}\frac{1}{\cos x}\right)=$$

$$=3\cdot\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 6x}{6x}\lim_{x\to0}\frac{2x}{\operatorname{tg}2x}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=3\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{\cos 0}=3.$$

Пример 3.6.2.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\operatorname{arctg}2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x\operatorname{arctg}2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\frac{\sin(x/2)}{x}\frac{x}{\operatorname{arctg}2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\lim_{x\to0}\frac{\sin(x/2)}{2x/2}\lim_{x\to0}\frac{2x}{2\operatorname{arctg}2x}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

числитель первой дроби преобразован по формуле $2\sin^2(x/2)=1-\cos x$.

Второй замечательный предел (3.6) раскрывает неопределённость $\left[1^\infty\right]$. Чтобы воспользоваться формулой (3.6), выражение в скобках можно представить в виде суммы единицы и бесконечно малой: $1+\alpha(x)$, а показатель степени – в виде $1/\alpha(x)$, тогда формула (3.6) примет вид

$$\lim_{x\to\infty}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}=e.$$

Пример 3.6.3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{4x}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x-5}-1\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{2x-5}\right)^{4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8}{2x-5}\right)^{(2x-5)/8}\right)^{4x\cdot8/(2x-5)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{32x}{2x-5}}=e^{\frac{32}{2}}=e^{16},$$

здесь использован второй замечательный предел в преобразованном виде

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{2x-5}\right)^{(2x-5)/8}=e$$

и возможность переставлять местами знак предела $\lim\limits_{x\to\infty}$ и функцию e^x на основании равенства (3.3).

Облегчает вычисление пределов отношений трансцендентных бесконечно малых функций, т.е. раскрытие неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$, цепочка эквивалентных бесконечно малых (3.9). Из определения (3.8) для бесконечно малых в точке x_0 функций следует утверждение

$$\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\ \beta(x)\sim\beta_1(x)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

которое позволяет при нахождении пределов заменять бесконечно малую функцию её аргументом, согласно цепочке (3.9).

Пример 3.6.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x\left(1-e^{-x}\right)}{x\ln\left(1+3x^2\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x\sin 2x\left(e^{-x}-1\right)}{x\ln\left(1+3x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cdot 2x(-x)}{x\cdot 3x^2}=\frac{4}{3},$$

по цепочке (3.9) имеем: $\sin 2x\sim 2x$, $e^{-x}-1\sim -x$, $\ln\left(1+3x^2\right)\sim 3x^2$.

Индивидуальные задания

Найдите пределы функций, используя замечательные пределы и эквивалентные бесконечно малые:

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin^3 2x\ln(x^2+1)}{\operatorname{arctg}(5x^3)\operatorname{tg}^2 4x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{1-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}^2 3x(e^{4x}-1)}{\cos x^2\sin^3 4x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}\pi x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}^2 3x(e^{4x}-1)}{\cos x^2\sin^3 4x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\arcsin 8x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x\sin^3 3x}{\arcsin 2x^4 e^x(e^{3x}-1)}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 2x}{1-\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{3+x}\right)^{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x\operatorname{tg}^3 2x\arcsin 3x}{\operatorname{arctg}3x^3\sin 4x\ln(x+1)}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{4+x}\right)^{0,5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x\arcsin 5x\,\mathrm{tg}\,3x}{\mathrm{arctg}\,3x^2x^2\cos 3x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{x\,\mathrm{ctg}\,2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+5}\right)^{1-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x\arcsin^2 3x\,\mathrm{tg}\,4x^2}{\mathrm{arctg}\,3x^2x\ln(2x+1)}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{1+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x\sin 4x^2\,\mathrm{arctg}^2\,3x}{\mathrm{tg}\,3x^2\ln(x^2+1)}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\mathrm{arctg}\,x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+3}\right)^{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x\,\mathrm{tg}\,3x^2e^{3x}}{\mathrm{arctg}^2\,3x(e^{2x}-1)x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,6x}{\mathrm{tg}\,x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+2}\right)^{2x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x\sin^2 3x^2\cos 4x}{\mathrm{arctg}^4\,x\ln(9x+1)}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\mathrm{arctg}\,3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{1-2x}\right)^{3-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 4x\,\mathrm{tg}\,3x^2e^{3x}}{\mathrm{arctg}^3\,2x(e^{3x}-1)}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{arctg}\,5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{1+3x}\right)^{1-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 3x\,\mathrm{arctg}\,2x}{\cos 2x\,\mathrm{tg}\,2x^2\ln(9x^2+1)}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{3+2x^2}\right)^{2x^2+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x\,\mathrm{tg}^2\,x^2}{\mathrm{arctg}^3\,5xe^{5x}(e^x-1)}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\mathrm{arctg}\,3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{ctg}\,x\sin^2 3x}{\mathrm{arctg}\,x(e^{2x}-1)}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,6x}{\arcsin 8x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-5}\right)^{x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x\,\mathrm{tg}\,5x^3}{\cos xx^2\arcsin 8x^4}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,3x}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x}{x^2+3}\right)^{2x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x\left(1-e^{2x}\right)\mathrm{tg}^3\,2x}{\sin 4x^2\ln(8x^2+1)}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-7}{9x+4}\right)^{8x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\,\mathrm{ctg}^2\,3x(e^{9x}-1)}{\cos 3x\sin^2 2x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}^2\,3x(e^{8x}-1)}{\cos x^2\arcsin^4 2x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+4}{8x-3}\right)^{x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,3x\sin^3 2x}{\arcsin 6x^4e^{3x}(e^{2x}-1)}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x-9}\right)^{9x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x\,\mathrm{tg}^3\,2x\arcsin 3x}{\mathrm{arctg}\,3x^24x\ln(x^2+1)}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+9}{x^2+3}\right)^{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x\sin^2 2x^2\cos x}{\operatorname{arctg}^4 x\ln(12x+1)}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+4}\right)^{3x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x\operatorname{tg} 3x^3 e^x}{\operatorname{arctg}^3 2x(e^{9x}-1)}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x\ln\left(\sin^2 x+1\right)}{\cos x\, x^2\arcsin 4x^3}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 7x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}^2 2x(e^{6x}-1)}{e^{x^2}\arcsin^4 2x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x}{\operatorname{arctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-5}{8x-2}\right)^{-6x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\arcsin^3 2xe^x}{\operatorname{tg}^4 3x\cos 5x}$.

3.1.7. Пределы функций. Разное

Основные вопросы, связанные с нахождением типовых пределов функций и последовательностей, рассмотрены. Однако вычисление пределов требует математической смекалки, знания алгебраических и тригонометрических формул, понимания, какую неопределённость мы получаем в результате преобразований или неопределённости уже нет, и пора писать ответ.

Пример 3.7.1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5+3x}{3+x}\right)^{4x}=[3^\infty]=\infty,$$

выражение напоминает второй замечательный предел, раскрывающий неопределённость $[1^\infty]$. Однако дробь в скобке по правилу (3.10) стремится к числу 3, получаем $[3^\infty]$, а это уже неопределённостью не является, перед нами бесконечно большая функция.

Пример 3.7.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(5x+1)}{4^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(5x+1)}{\ln 2}\frac{1}{e^{\ln 4^x}-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{\ln 2}\frac{1}{\ln 4^x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{\ln 2}\frac{1}{x\ln 4}\right)=\frac{5}{2\ln^2 2},$$

здесь функции $\log_2(5x+1)$ и 4^x-1 являются бесконечно малыми при $x\to 0$, но не входят в цепочку (3.8), поэтому в логарифмической функции перешли к натуральному основанию: $\log_2(5x+1)=\dfrac{\ln(5x+1)}{\ln 2}$, а в показательной – применили основное логарифмическое тождество: $4^{x}=e^{\ln 4^{x}}$. Далее использовали цепочку эквивалентных бесконечно малых:

$$\ln(5x+1)\sim 5x,\ e^{\ln 4^{x}}-1\sim \ln 4^{x}.$$

Пример 3.7.3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+2\cdot 5^{n}-7\cdot 4^{n-1}}{8+5^{n+1}-4^{n}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n}\left(5\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+2-\frac{7}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\right)}{5^{n}\left(8\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+5-\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\right)}=\frac{2}{5},$$

так как 5^{n} – показательное выражение с наибольшим основанием, то в числителе и знаменателе вынесли за скобки 5^{n}. Степени в скобках $\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^{n}$, основания которых меньше единицы, являются бесконечно малыми при $n\to\infty$, поэтому в числителе остаётся число 2, а в знаменателе – число 5.

Индивидуальные задания

Найдите пределы функций и последовательностей:

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{5^{3x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{3}+3x^{2}}{x^{2}+1}-x\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3+5^{n}}{2^{n}+5^{n+2}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}-2}{5+x}\right)^{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^{2}-1}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+0{,}3^{n+1}+0{,}2^{n}}{2+0{,}3^{n}+0{,}2^{n-1}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\operatorname{ctg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{3}+2}{x-1}-x^{2}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^{n-1}+2\cdot 4^{n}}{7+3^{n+2}+5\cdot 4^{n-1}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x\sin^{2}x}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n}+4^{n+1}+3^{n+2}}{5^{n+1}+4^{n+2}+3^{n+3}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^{3}-8}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n}+7^{n+1}}{7^{n-1}+4^{n+2}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{4x}-1}{\log_{3}(2x+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{3}+1}{x^{2}+x+1}-\dfrac{x^{2}}{x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0{,}4^{n}+0{,}7^{n-1}}{0{,}7^{n+1}+0{,}4^{n+2}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}3x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^{2}-4}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+3^{n}+5\cdot 4^{n-1}}{1+3^{n+1}-4^{n}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{x+5}\right)^{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}+7x+3}{x+5}-x\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0{,}5^{n}+0{,}4^{n+3}}{1+0{,}4^{n+1}-0{,}5^{n+1}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{-2x}-1}{\ln(3x+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+7^{n-1}}{3^{n+1}-7^n}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x-3}{x+5}}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x^2+6x+8}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0{,}3^{n+2}+0{,}4^{n-1}}{5\cdot 0{,}3^{n+1}-7\cdot 0{,}4^n}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{7x+5}\right)^{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2-1}-\dfrac{x^3}{x+1}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 2^n+5\cdot 6^{n-1}}{2^{n+1}-6^n+5}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+5^n+5\cdot 6^{n+1}}{1+5^{n-1}+2\cdot 6^n}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_7(3x+1)}{5^{6x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{3+2x^2}\right)^{2x^2+2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 0{,}3^{n-1}+5\cdot 0{,}2^{n+1}}{0{,}3^{n+1}-0{,}2^{n-1}}$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-10^n}{2+10^{n+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x-\sin 4x}{\sin 2x\cdot x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-3}-\dfrac{x^2-x}{x+3}\right)$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+0{,}5^n}{0{,}3^{n+1}+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}3x(\ln 2x-\ln(2x-3))$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x x^{-1}}{1-\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-n^4}{n^3-(1+n)^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-4x+3}-\dfrac{0{,}5}{x-6}\right)$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{5}{8-x^3}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+2}+5+4^n}{4\cdot 3^n+4^{n+1}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+0{,}4^{n+1}+0{,}5^n}{0{,}4^{n-1}+0{,}5^{n-1}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-x}}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 5^{n-1}+6\cdot 3^n}{10+5^{n+1}+5\cdot 3^{n-1}}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{5x^2+x}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$; в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\arcsin(9x+36)}{2x^2+5x-12}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)^{2x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(9x-27)}{-3x^2+10x-3}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-11)^{\frac{1}{4-x}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+0{,}5^n}{0{,}3^{n+1}+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+2-2\cos 2x}{x\sin x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{x\cos x}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^2+\sqrt{n^2}}}-n\right)$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+0{,}3^n+0{,}8^{n-1}}{0{,}8^{n+1}+0{,}3^{n+2}}$.

25. а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{2/n}-1\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cos x}{\sin^2 2x}-\dfrac{1}{2\sin^2 x}\right)$.

3.1.8. Точки разрыва

Так как элементарные функции непрерывны в своей области определения, то в точках разрыва функция или не определена, или аналитическая запись функции в этой точке меняется. Если x_0 – точка, в которой есть подозрение на разрыв функции, то для её исследования требуется найти односторонние пределы функций $f(x_0+)$ и $f(x_0-)$:

$$f(x_0+)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),\ \text{здесь}\ x>x_0;$$

$$f(x_0-)=\lim_{x\to x_0-0} f(x),\ \text{здесь}\ x<x_0.$$

Пример 3.8.1. Найдите точки разрыва функции $y=10^{\frac{x}{x-1}}$, установите их характер и постройте график функции в окрестности точек разрыва.

Решение. Функция не определена при $x-1=0$ или $x=1$. В точке $x_0=1$ функция может иметь разрыв. Найдём односторонние пределы в этой точке:

$$f(1+)=\lim_{x\to 1+0}10^{\frac{x}{x-1}}=\left[10^{\frac{1}{+0}}=10^{+\infty}\right]=+\infty,$$

$$f(1-)=\lim_{x\to 1+0}10^{\frac{x}{x-1}}=\left[10^{\frac{1}{-0}}=10^{-\infty}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\infty}\right]=0.$$

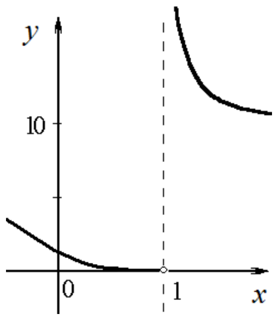


Рис. 3.3

Поскольку один из односторонних пределов не является конечным, то $x_0=1$ – точка разрыва второго рода. График функции в окрестности точки $x_0=1$ имеет вид, изображённый на рис. 3.3.

Пример 3.8.2. Найдите точки разрыва, установите их характер и постройте график в окрестности точек разрыва функции

$$y=\begin{cases} x-1 & \text{при}\ x<0,\\ x^3-1 & \text{при}\ 0\le x<1,\\ x+1 & x\ge 1.\end{cases}$$

Решение. Функция определена на всей числовой оси и на каждом из трёх участков является элементарной, поэтому точками разрыва могут быть только те, в которых меняется аналитическое выражение: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Найдём односторонние пределы функции в точке $x_1 = 0$:

$$f(0-) = \lim_{x\to -0} f(x) = \left|x \to 0,\ x < 0\right| = \lim_{x\to -0}(x-1) = -1,$$

$$f(0+) = \lim_{x\to +0} f(x) = \left|x \to 0,\ x > 0\right| = \lim_{x\to +0}\left(x^3-1\right) = -1.$$

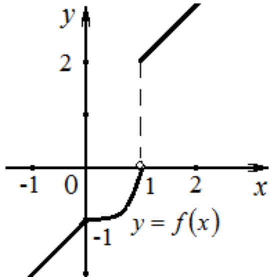


Рис. 3.4

Функция в точке $x_1 = 0$ принимает значение (вторая строка системы, определяющей функцию) $f(0) = -1$, тогда $f(0+) = f(0-) = f(0) < \infty$ и функция является непрерывной в точке $x_1 = 0$. Найдём односторонние пределы функции в точке $x_2 = 1$:

$$f(1-) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\left(x^3-1\right) = 0,$$

$$f(1+) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(x+1) = 2.$$

Имеем: $|f(1+)| < \infty$, $|f(1-)| < \infty$, $f(1+) \ne f(1-)$ и точка $x_2 = 1$ является точкой скачка функции. График функции на участке, содержащем отрезок $[0;1]$, изображён на рис. 3.4.

Индивидуальные задания

Найдите точки разрыва функции, установите их характер и постройте график функции в окрестности точек разрыва:

1. а) $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x-2}$;

   б) $y = \begin{cases} 5/(x+5) & \text{при } x \le 0, \\ e^x & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 2x - 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$

2. а) $y = \dfrac{x+1}{x^2-1} + \dfrac{\sin x}{x}$;

   б) $y = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0, \\ 2x & \text{при } 0 \le x < 1, \\ x+2 & \text{при } x \ge 1. \end{cases}$

3. а) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x+1}$;

   б) $y = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x & \text{при } x > 1. \end{cases}$

4. а) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$;

   б) $y = \begin{cases} 2^x & \text{при } x < 1, \\ x - 1 & \text{при } 1 \le x \le 4, \\ 12/x & \text{при } x > 4. \end{cases}$

5. а) $y=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$;

б) $y=\begin{cases}2-x & \text{при } x<0,\\ x^2+1 & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 3-x & \text{при } x>1.\end{cases}$

6. а) $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$;

б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{1}{x-2} & \text{при } x>0.\end{cases}$

7. а) $y=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$;

б) $y=\begin{cases}2 & \text{при } x<1,\\ x+1 & \text{при } 1\le x\le 3,\\ 5-x & \text{при } x>3.\end{cases}$

8. а) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

б)

$y=\begin{cases}3/(x-5) & \text{при } x\le -2,\\ e^{x+2} & \text{при } -2<x\le 1,\\ 3 & \text{при } x>1.\end{cases}$

9. а) $y=\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$;

б) $y=\begin{cases}3/(x+1) & \text{при } x\le 2,\\ x+1 & \text{при } 2<x\le 4,\\ 5 & \text{при } x>4.\end{cases}$

10. а) $y=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

б) $y=\begin{cases}1-x & \text{при } x<1,\\ 1 & \text{при } 1\le x<3,\\ x-2 & \text{при } x\ge 3.\end{cases}$

11. а) $y=\dfrac{x-3}{x^2-9x+20}$;

б) $y=\begin{cases}2 & \text{при } x\le 0,\\ x+1 & \text{при } 0<x<3,\\ 7-x & \text{при } x\ge 3.\end{cases}$

12. а) $y=4^{\frac{2}{x-3}}$;

б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{1}{3-x} & \text{при } x>1.\end{cases}$

13. а) $y=\dfrac{\lg(x-1)}{x^2-9}$;

б) $y=\begin{cases}2/(x+1) & \text{при } x\le 1,\\ e^{x-1} & \text{при } 1<x\le 3,\\ 3 & \text{при } x>3.\end{cases}$

14. а) $y=\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{\sin 2x}{x}$;

б) $y=\begin{cases}3-x & \text{при } x<3,\\ 1 & \text{при } 3\le x<5,\\ x-4 & \text{при } x\ge 5.\end{cases}$

15. а) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-4x+3}$;

б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-4}$.

16. а) $y=\dfrac{\ln(5-x)}{x^2-7x+6}$;

б) $y=\dfrac{|x-3|}{x^2-3x}$.

17. а) $y=\dfrac{\ln(3x-1)}{x^3-x}$;

б) $y=\begin{cases}1-2x & \text{при } x<1,\\ 1 & \text{при } 1\le x\le 3,\\ 2x-5 & \text{при } x>3.\end{cases}$

18. а) $y=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$;

б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & \text{при } x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-3} & \text{при } x>1.\end{cases}$

19. а) $y=\dfrac{\sqrt{4-x}+5}{x^2-36}$;

б) $y=\begin{cases}-1 & \text{при } x<-1,\\ x & \text{при } -1\le x\le 1,\\ 3-x & \text{при } x>1.\end{cases}$

20. а) $y=3^{\frac{x}{2-x}}$;

б) $y=\begin{cases}2^x & \text{при } x\le 2,\\ 2x-1 & \text{при } 2<x\le 4,\\ 7 & \text{при } x>4.\end{cases}$

21. а) $y=\dfrac{\lg(x-2)}{x^2-5x+4}$;

б) $y=\begin{cases}2\sqrt{x} & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 4-2x & \text{при } 1<x\le 4,\\ -2 & \text{при } x>4.\end{cases}$

22. а) $y=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

б) $y=\begin{cases}2-x & \text{при } x<1,\\ -1 & \text{при } 1\le x<3,\\ x-3 & \text{при } x\ge 3.\end{cases}$

23. а) $y=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-8x+15}$;

б) $y=\begin{cases}-2 & \text{при } x\le -1,\\ x+1 & \text{при } -1<x<2,\\ 5-x & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$

24. а) $y=5^{\frac{1}{x-1}}$;

б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{1}{2-x} & \text{при } x>0.\end{cases}$

25. а) $y=2^{\frac{x}{9-x^2}}$;

б) $y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & \text{при } -1\le x\le 3,\\ 2x-4 & \text{при } 3<x\le 5,\\ 2 & \text{при } x>5.\end{cases}$

3.2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.2.1. Теоретические сведения

1. Таблица производных:

1. $C'=0$, $C=\text{const}$;
2. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\,x^{\alpha-1}$;
3. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
4. $(\sin x)'=\cos x$;
5. $(\cos x)'=-\sin x$;
6. $(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

7. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; 8. $(a^x)' = a^x \ln a$; 9. $(e^x)' = e^x$;

10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$; 11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14. $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 15. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

2. Правила дифференцирования.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, $C = \mathrm{const}$, тогда:

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x); \tag{3.11}$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x);\ (Cu(x))' = Cu'(x); \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},\ \text{если}\ v(x)\neq 0. \tag{3.13}$$

3. Производная сложной функции.

Пусть функция $g(x)$ дифференцируема в точке *x*, функция $f(y)$ дифференцируема в точке $y = g(x)$, тогда справедливо равенство

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x). \tag{3.14}$$

4. Логарифмическое дифференцирование.

Предварительное логарифмирование часто упрощает нахождение производной; например, если функция имеет вид $y = f(x)^{g(x)}$, тогда

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}\ \text{и}\ \ln y = g(x)\ln f(x),$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}\ \text{и}\ \frac{y'}{y} = (g(x)\ln f(x))'.$$

5. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \tag{3.15}$$

при условии, что все рассматриваемые функции дифференцируемы.

6. Дифференцирование функций, заданных неявно.

Если уравнение $F(x,y)=0$ определяет y как неявную дифференцируемую функцию от x, тогда для нахождения производной $y'(x)$ надо продифференцировать по переменной x обе части уравнения $F(x,y)=0$ и выразить y'.

7. Производные высших порядков:

– производной второго порядка функции $y=f(x)$ является производная от её производной, т.е.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=(f'(x))';$$

– производной n-го порядка функции $y=f(x)$ является производная от производной $(n-1)$-го порядка, т.е.

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

8. Геометрический смысл производной.

Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0, $f'(x_0)$, равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в точке x_0 (рис. 3.5), т.е.

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Уравнение касательной (рис. 3.5) имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \qquad (3.16)$$

Уравнение нормали – прямой, перпендикулярной касательной, проведённой в точку касания M (рис. 3.5), имеет вид

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (3.17)$$

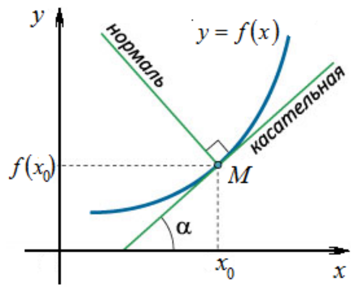


Рис. 3.5

9. Механический смысл производной.

Если материальная точка движется прямолинейно и $S(t)$ – путь, пройденный за время t, тогда скорость $v(t)$ в момент времени t есть производная от пути по времени, т.е.

$$v(t)=S'(t),$$

а ускорение $a(t)$ в момент времени t есть производная второго порядка от пути по времени, т.е.

$$a(t)=v'(t)=S''(t).$$

10. Дифференциал.

Выражение для дифференциала функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$dy(x_0) = f'(x_0)dx\,, \tag{3.18}$$

где $dx = \Delta x$ – приращение аргумента. Приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и её дифференциал $dy(x_0)$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$:

$$\Delta y \sim dy(x_0),$$

поэтому $\Delta y \approx dy(x_0)$ и

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy(x_0). \tag{3.19}$$

Соотношение (3.19) часто используют в приближённых вычислениях.

11. Правило Лопиталя.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $g(x) \neq 0$ в проколотой окрестности точки x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{3.20}$$

если второй предел существует. Равенство (3.20) справедливо и в случае $x \to \infty$. Аналогично раскрывается неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.2.2. Учебные занятия

1. ***Правила дифференцирования.***

Найдите производные функций:

3.2.1. $y = 2\,\mathrm{tg}\,x - 3\cos x + 7\sqrt[3]{x} + \dfrac{8}{\sqrt[5]{x^2}}$;

3.2.2. $y = \ln x \sqrt[3]{x}$;

3.2.3. $y = \dfrac{\ln x}{\cos x + 5} + 9$.

Найдите производные функций в точке:

3.2.4. $y = \dfrac{x^3 - 1}{2x + 5}$, $y'(0)$ – ?

3.2.5. $y = \left(x^3 - 3x\sqrt{x} + 5\right)e^{x-1}$, $y'(1)$ – ?

2. *Производная сложной функции.*
Найдите производные функций:

3.2.6. $y=\sqrt[3]{x^3-3}$; **3.2.7.** $y=\cos\dfrac{1}{x}$;

3.2.8. $y=\operatorname{tg}\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$;

3.2.9. $y=\cos\ln^2\operatorname{arctg}x$;

3.2.10. $y=\dfrac{\sin^3 x}{1+2^{x^2}}$;

3.2.11. $y=2^{\sqrt{x^2+3x+4}}$; $y'(0)-?$

3. *Логарифмическое дифференцирование.*
Найдите производные функций:

3.2.12. $y=x^{2x}$; **3.2.13.** $y=(\operatorname{arctg}3x)^{x^2+e^{2x}}$;

3.2.14. $y=\dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

4. *Производные функций, заданных параметрически или неявно.*
Найдите производные $\dfrac{dy}{dx}$ функций:

3.2.15. $\begin{cases} x=\sqrt{t}\cdot\ln t, \\ y=3\sin t+1; \end{cases}$ **3.2.16.** $\begin{cases} x=t-2^t, \\ y=1-\sin t; \end{cases}$ **3.2.17.** $x^4+y^4=x^2y^2$;

3.2.18. $2y\ln y=x\sin x$.

5. *Производные высших порядков.*
Найдите производные функций:

3.2.19. $y=\operatorname{arctg}x$, $y'''-?$ **3.2.20.** $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$; $y''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-?$

3.2.21. $y=x\sin 2x$, $y'''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-?$

6. *Геометрический и механический смысл производной.*

3.2.22. Определите, под каким углом кривая $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ пересекает ось абсцисс. Составьте уравнение касательной.

3.2.23. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $x^2-2xy^4+3y=3x-3$ в точке $M(2;1)$.

3.2.24. Точка движется по координатной оси, расстояние (в метрах) от начала координат определяется по формуле $x = t^3 - 4t^2 - 3t + 1$, где t – время (в секундах). Определите скорость и ускорение точки в конце второй секунды после изменения направления движения.

7. ***Дифференциал функции.***

Вычислите $dy(0)$ при $dx = 0{,}1$:

3.2.25. $y = \ln\left(1 + e^{10x}\right) + \sqrt{x^2 + 1}$; **3.2.26.** $y = (1 + \operatorname{tg} x)^8$.

Найдите приближённое значение с помощью дифференциала:

3.2.27. $\sqrt[3]{26{,}19}$; **3.2.28.** $\sqrt[4]{16{,}64}$; **3.2.29.** $\ln 0{,}9$.

8. ***Правило Лопиталя.***

Найдите пределы функций:

3.2.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$; **3.2.31.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x - 6}{x^5 - 3x^3 - 8}$;

3.2.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$; **3.2.33.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$; **3.2.34.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(\pi/2) - \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \left(1/x^2\right)\right)}$;

3.2.35. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$; **3.2.36.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \ln x\right)$; **3.2.37.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$;

3.2.38. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$; **3.2.39.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$; **3.2.40.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x - 1\right)}}$.

3.2.3. Дифференцирование функций

Для того чтобы найти производные следующих функций, достаточно знать таблицу производных, правила дифференцирования (3.11) – (3.13) и формулу (3.14) производной сложной функции.

Пример 3.3.1. Найдите производную функции $y = x^5 + 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Решение. Запишем третье слагаемое как степень переменной x и продифференцируем сумму функций по правилу (3.11), используя формулы 1 – 3 таблицы производных:

$$y = x^5 + 3\sqrt{x} - 2x^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$y' = 5x^4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} = 5x^4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

Пример 3.3.2. Найдите производную функции $y = \ln \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.

Решение. Данная функция является суперпозицией четырёх функций: $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\sqrt{x}$ и $1+x^2$, поэтому придётся находить четыре табличные производные и, согласно соотношению (3.14), их умножать. При этом следует помнить, что дифференцируется только сама функция, а аргумент не меняется. Так, у логарифмической функции аргументом является $\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$, поэтому её производная равна не $1/x$ (формула 11 в таблице производных), а $1\Big/\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$. Аналогично берутся производные остальных функций, поэтому получим

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\,\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\,2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\left(2+x^2\right)\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}.$$

Пример 3.3.3. Найдите производную функции $y = \sin x^2 \cos^3 5x + +\dfrac{\sqrt{x}}{5^{x^3+1}}$.

Решение. Функции $\sin x^2$, $\cos^3 5x$ и 5^{x^3+1} являются сложными, их нужно дифференцировать по правилу (3.14):

$$\left(\sin x^2\right)' = \cos x^2\, 2x\,;\ \left(\cos^3 5x\right)' = 3\cos^2 5x(-\sin 5x)\cdot 5\,;$$
$$5^{x^3+1} = 5^{x^3+1}\ln 5\cdot 3x^2.$$

Функция $y(x)$ является суммой произведения и частного, поэтому придётся использовать формулы (3.12), (3.13):

$$y' = 2x\cos x^2\cos^3 5x - 15\sin x^2\cos^2 5x\sin 5x +$$
$$+\frac{\left(1/\left(2\sqrt{x}\right)\right)\cdot 5^{x^3+1} - \sqrt{x}\,5^{x^3+1}\ln 5\cdot 3x^2}{5^{2x^3+2}} =$$
$$= 2x\cos x^2\cos^3 5x - 15\sin x^2\cos^2 5x\sin 5x + \frac{1-6x^3\ln 5}{2\cdot 5^{x^3+1}\sqrt{x}}.$$

Пример 3.3.4. Найдите производную функции $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Сначала найдём производную, используя таблицу производных и правило (3.14) дифференцирования сложной функции:

$$y' = \frac{1}{2} 2\operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - \operatorname{ctg} x .$$

Затем поставим $x_0 = \pi/4$:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4)}{\cos^2(\pi/4)} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1/2} - 1 = 2 - 1 = 1 .$$

Пример 3.3.5. Найдите производную третьего порядка функции $y = x \arcsin x$.

Решение. Сначала найдём производную первого порядка:

$$y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Производная первой производной даёт производную второго порядка:

$$y'' = \left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2} - x\left(-2x\Big/\left(2\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{\left(1-x^2\right)} =$$

$$= \frac{1-x^2+1-x^2+x^2}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-x^2}{\left(1-x^2\right)^{1,5}},$$

а производная второй производной даёт производную третьего порядка:

$$y''' = \left(\frac{2-x^2}{\left(1-x^2\right)^{1,5}}\right)' = \frac{-2x\left(1-x^2\right)^{1,5} - \left(2-x^2\right)\cdot 1,5\cdot\left(1-x^2\right)^{0,5}(-2x)}{\left(1-x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{-2x\left(1-x^2\right) + 3x\left(2-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^{2,5}} = \frac{4x - x^3}{\left(1-x^2\right)^{2,5}} .$$

Индивидуальные задания

Найдите производные функций:

1. а) $y = \frac{3}{x} - \frac{x^2-4x}{2x+1}$; б) $y = \cos x\left(x^3 - 2x\right)$; в) $y = \frac{\sqrt{x}}{5^{x^3+1}}$, $y'(1)$ – ?

г) $y = x^2 \sin 2x + \frac{e^{-x}}{x}$; д) $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{\ln x} + 3^{2^x}$; е) $y = e^{\sin^2 x} \sqrt[4]{x - 5x^2}$;

ж) $y = \ln \arccos \sqrt{x}$ з) $y = x \cos 2x$, y''' –? и) $y = \operatorname{arctg} x$, $y''(0)$ –?

2. а) $y=\sqrt[3]{x}-\dfrac{x^3+x+3}{x-2}$; б) $y=(x+1)^2e^{-x}$; в) $y=\ln\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

г) $y=3^{-x}\log_3(x^2+\sqrt{x})$; д) $y=\cos^2 x\operatorname{tg}7x^4$; е) $y=2^x\ln x+3\sin 8x\sqrt{x}$;

ж) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$, $y'(0)$ – ? з) $y=\ln(x+3)$, y''' –? и) $y=e^{2x}$, $y''(0)$ –?

3. а) $y=(3x+5)^4-\dfrac{7}{\sqrt[4]{x}}+2$; б) $y=\sin 3x\left(x^3-1\right)$; в) $y=\arcsin^2\sqrt{2+x}$;

г) $y=5^{2x+3}\cos(x^2+3)$; д) $y=\left(\ln\ln\dfrac{x}{2}\right)^3$; е) $y=\dfrac{\cos^3 x^2}{\sqrt[3]{x^2+x}}$;

ж) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})$, $y'(3)$ – ? з) $y=\sin^2 x$, y''' –? и) $y=x^2e^x$, $y''(1)$ –?

4. а) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{x+3}{x^2+2}$; б) $y=\cos 5x\sqrt{x+3}$; в) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$;

г) $y=\sqrt{\operatorname{tg}x^2+\ln(2x+1)}$; д) $y=\dfrac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}+\dfrac{\sqrt{3}}{5}$; е) $y=x\arcsin\log_2 x$;

ж) $y=2^{\operatorname{tg}^2 x}\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}$, $y'(0)$ – ? з) $y=xe^x$, y''' –? и) $y=x^3\ln x$, $y''(1)$ –?

5. а) $y=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}-\dfrac{x}{x^2-x+2}$; б) $y=\left(x^3+1\right)\ln x$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$;

г) $y=\sqrt[3]{x^5}\left(2\ln x-3^x\right)$; д) $y=\log_2\ln(7x+5)$; е) $y=e^{-3x}(x^3-5x+1)$;

ж) $y=\sqrt[3]{x^2}\operatorname{arcctg}x^2$, $y'(1)$ – ? з) $y=\dfrac{x}{5x+3}$, y''' –? и) $y=\ln(x-1)$, $y''(2)$ –?

6. а) $y=2\sqrt[4]{x}-\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$; б) $y=e^{2x}\operatorname{tg}3x$; в) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}$;

г) $y=\sqrt{2x+3}(2\ln x-3^x)$; д) $y=\cos\dfrac{\arcsin x}{2}$; е) $y=(\cos 2x+\sin 5x)x^3$;

ж) $y=\sqrt{x^2-3}\arcsin\left(\sqrt{3}/x\right)$, $y'(2)$ – ? з) $y=x^2\ln x$, y''' –? и) $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$, $y''(2)$ –?

7. а) $y=3\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{x+7}{x^3+1}$; б) $y=\arcsin x\sqrt{1-x^2}$; в) $y=\sin^2\sqrt{3x-2}$;

г) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}+\sqrt[5]{x^3}$; д) $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$; е) $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{\sin x^2}}$;

ж) $y=3x^3\log_2 x$, $y'(4)$ – ? з) $y=\mathrm{arctg}\,x^2$, y''' – ? и) $y=e^x\sin x$, $y''(0)$ – ?

8. а) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{2x+3}{x^4+3}$; б) $y=2^x(x^4-1)$; в) $y=\cos^2\log_3(5+\sqrt[3]{x+1})$;

г) $y=2^{\sqrt{\sin x^2}}\ln\arcsin\dfrac{x}{3}$; д) $y=\dfrac{x^2+3x-2}{x+5}$; е) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\arcsin e^x}}$;

ж) $y=2^{\mathrm{tg}^2 x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x+1}$, $y'(0)$ – ? з) $y=\cos^2 x$, y''' – ? и) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $y''(0)$ – ?

9. а) $y=2\sqrt{x^5}-\dfrac{x^2+x-7}{4x+5}$; б) $y=x^3\,\mathrm{tg}\,2x$; в) $y=x\arcsin\ln 7x$;

г) $y=e^{x+7}(\sin 7x-\cos 7x)$; д) $y=\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}}{x}$; е) $y=\sqrt{\mathrm{arctg}\,2^x}$;

ж) $y=2^{x^2}(x+1)$, $y'(1)$ – ? з) $y=x\sin x$, y''' – ? и) $y=(2x-1)\ln x$, $y''(1)$ – ?

10. а) $y=1+10x+\dfrac{1}{x^{98}}$; б) $y=\arccos x\cdot\sqrt{1-x}$; в) $y=\sqrt{3x+\ln^3(2x+1)}$;

г) $y=\arcsin\ln\mathrm{tg}\,x^3$; д) $y=\sin^3\cos\sqrt{x}$; е) $y=3^{x^2}(\ln x+\ln^2 x)$;

ж) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$, $y'(1)$ – ? з) $y=x^5\ln x$, y''' – ? и) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$, $y''(1)$ – ?

11. а) $y=\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{x^3-x}{2x+3}$; б) $y=\ln x\left(\sqrt{x}-x^2\right)$; в) $y=\left(\log_2\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+4\right)^4$;

г) $y=e^{2-3x}(x^5+2x^3+7)$; д) $y=\sin^4 x\,e^{\cos x}$; е) $y=\arccos^2 x-\sqrt{\cos x}$;

ж) $y=x\arcsin\ln x$, $y'(e)$ – ? з) $y=\dfrac{x+3}{2x+5}$, y''' – ? и) $y=x^2\cos x$, $y''(0)$ – ?

12. а) $y=\frac{x^2+1}{2x+3}-\frac{3}{x^5}$; б) $y=\sin 4x\cdot\left(x^2-\sqrt{2}\right)$; в) $y=5^{\arcsin\frac{1}{x}}$;

г) $y=5^{\mathrm{tg}2x}+\lg(3x+2)$; д) $y=\frac{1}{x^2}\mathrm{arctg}\frac{2}{3x}$; е) $y=e^{2x-1}\left(\cos 2x-\sin x^2\right)$;

ж) $y=\sqrt[3]{x^2-1}\cdot\ln\left(x^2+1\right)$, $y'(0)-?$ з) $y=\mathrm{arctg}\frac{x}{2}$, $y'''-?$ и) $y=\frac{1}{1+x^3}$, $y''(1)-?$

13. а) $y=\sqrt[4]{x^5}+\frac{x+2}{x-3}$; б) $y=5\sqrt{x+1}\left(x^3-1\right)$; в) $y=\ln\mathrm{arctg}\,5x+\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $y=e^{x^2+3}\,\mathrm{tg}^2\,2x$; д) $y=(5x+1)^4+\pi$; е) $y=3^{\ln x}+\log_3(\sqrt{x}+2)$;

ж) $y=\ln\log_3(7x+6)$, $y'(3)-?$ з) $y=\sin 2x+\cos 3x$, $y'''-?$ и) $y=\frac{x}{x^2-1}$, $y''(2)-?$

14. а) $y=\frac{x^5+2x^4+6}{x^2+1}-\sqrt[5]{2x-1}$; б) $y=(5x+1)^4e^{2x}$; в) $y=\left(\log_2\ln x+x\right)^5$;

г) $y=e^{2x}\sin\mathrm{arctg}\,x^3$; д) $y=\sqrt[3]{\cos^2 4x}$; е) $y=\frac{x^2e^{x^2}}{\sqrt{x+2}}$;

ж) $y=2^{\cos x}(x^3+4x-3)$, $y'(0)-?$ з) $y=\frac{x-3}{x+4}$, $y'''-?$ и) $y=xe^{-2x}$, $y''(0)-?$

15. а) $y=\frac{5}{x^2}-\frac{x-1}{x^2+4}$; б) $y=\mathrm{arcctg}\,x\left(1+x^2\right)$; в) $y=5\arcsin\sqrt{1-\sqrt{x}}$;

г) $y=2^{x^2}(x^4-2x^2+3)$; д) $y=\cos^3 x+\cos x^3$; е) $y=\mathrm{arctg}\ln 3x+e/2$;

ж) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$, $y'(2)-?$ з) $y=x\log_2(x+1)$, $y'''-?$ и) $y=\mathrm{tg}^3x$, $y''\left(\frac{\pi}{4}\right)-?$

16. а) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{2x+5}{x^3-1}-1$; б) $y=\log_3 x\left(x-x^4\right)$; в) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{\ln 2x}+\frac{1}{2}$;

г) $y=(1+\sin 4x)^6+\mathrm{tg}\,x^6$; д) $y=(x-1)^2e^{x^3}$; е) $y=\frac{5}{x^3+3x-1}-x\sin 2x$;

ж) $y=x\sqrt{2x-1}$, $y'(5)-?$ з) $y=\ln\left(x^2+1\right)$, $y'''-?$ и) $y=\ln\cos x$, $y''(\pi/6)-?$

17. а) $y=\dfrac{x^2+3x-2}{x+5}-\dfrac{1}{x}$; б) $y=\operatorname{arctg} x\sqrt{1+x^2}$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-2^x}$;

г) $y=0{,}5\operatorname{tg}^2 x+5+\ln\cos x$; д) $y=\dfrac{x^2e^x}{x^2+1}$; е) $y=6^{x^2+1}\ln(6x+7)$;

ж) $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$, $y'(\pi/2)$ – ? з) $y=x^2 3^x$, y''' – ? и) $y=\sqrt[3]{x^2}(\log_2 x+3)$, $y''(8)$ – ?

18. а) $y=3\sqrt[3]{x}+\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$; б) $y=x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; в) $y=\log_2\sin^2 x$;

г) $y=(3x^2+5x)^{11}-\sqrt[5]{7x+3}$; д) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$; е) $y=\sin^2 3x\cos x^2$;

ж) $y=e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$, $y'(2)$ – ? з) $y=(2x+3)\cos x$, y''' – ? и) $y=\ln\sin x$, $y''(\pi/6)$ – ?

19. а) $y=\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\dfrac{x+1}{x^2+2}$; б) $y=2^x(\sin x-\cos x)$; в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2-1}$;

г) $y=\dfrac{5}{x^2+1}-\dfrac{x^3-\sqrt[3]{x+2}}{2x+3}$; д) $y=e^{x^2}\operatorname{tg}^3 x$; е) $y=\dfrac{x^2e^{x^2}}{\sqrt{x+2}}$;

ж) $y=\ln\left(x^2+3x+4\right)$, $y'(1)$ – ? з) $y=\arccos x$, y''' – ? и) $y=\ln\operatorname{tg} x$, $y''(\pi/6)$ – ?

20. а) $y=\dfrac{\sqrt[7]{x^5}-x}{x^3}+\dfrac{1}{x^2+2}$; б) $y=\sqrt{x}\cos^2 x$; в) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}$;

г) $y=\dfrac{x^2+\sqrt{x-1}}{2x+\sqrt[3]{x}}$; д) $y=\sqrt{1+\arcsin x}$; е) $y=\sin^4 x e^{\cos x}+\pi$;

ж) $y=\ln^2\left(x^2-4x\right)$, $y'(5)$ – ? з) $y=\operatorname{tg} x$, y''' – ? и) $y=\log_3(4x+1)$, $y''(2)$ – ?

21. а) $y=\dfrac{2}{x^5}-\dfrac{x^2-x+1}{x+3}$; б) $y=x\operatorname{tg}\dfrac{3x+1}{5}$; в) $y=\arcsin^2\sqrt{x}$;

г) $y=\sqrt[3]{x^2}\operatorname{arctg} x^2$; д) $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$; е) $y=2^{\sin x}(x^4+2x-1)$;

ж) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-7})$, $y'(4)$ – ? з) $y=(2x+3)\cos x$, y''' – ? и) $y=e^{\sqrt[3]{x-1}}$, $y''(2)$ – ?

22. а) $y=2\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{x^3+2}{x-1}$; б) $y=\mathrm{tg}\,2x\left(x^2-x+3\right)$; в) $y=\arcsin\left(e^{x^2}\right)$;

г) $y=3x^2\ln x+\dfrac{x^2}{e^x}$; д) $y=\dfrac{2}{\sqrt{1+\sin 4x}}$; е) $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{\cos x^2}}$;

ж) $y=4^{\cos 2x}$, $y'(\pi/6)-?$ з) $y=\log_2(2x+1)$, $y'''-?$ и) $y=x^2e^{2x-1}$, $y''(1)-?$

23. а) $y=(3x+2)^5-\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}+5$; б) $y=\cos x\sqrt{2x+3}$; в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^x}$;

г) $y=10^{x\,\mathrm{tg}\,2x}+\sin^{10}x$; д) $y=\dfrac{5\sqrt{x+1}}{x}$; е) $y=x^3\,\mathrm{arctg}^2\,x$;

ж) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x+3}}$, $y'(1)-?$ з) $y=\ln^2 x$, $y'''-?$ и) $y=\log_3\left(x^2-2x+3\right)$, $y''(2)-?$

24. а) $y=\dfrac{8}{\sqrt[4]{x^3}}+\dfrac{x-2}{x^2+5}$; б) $y=\left(x^2+\sqrt{x}\right)\cdot\ln x$; в) $y=\sin\,\log_3\left(e^{2x}+1\right)$;

г) $y=(1+\cos 2x)^7+\mathrm{ctg}\,x^3$; д) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$; е) $y=3^{x^3+1}\ln(5x-2)$;

ж) $y=x^3\,\mathrm{arctg}\,x^2$, $y'(1)-?$ з) $y=\cos^4 x$, $y'''-?$ и) $y=\ln\left(x^3-x^2+4\right)$, $y''(2)-?$

25. а) $y=7\sqrt[7]{x^2}-\dfrac{x^2+x}{x-5}$; б) $y=\arcsin x\sqrt{1+x}$; в) $y=\ln\cos\,\mathrm{arctg}\,e^{2x}$;

г) $y=\cos^4 x+\sin x^3$; д) $y=x^2 2^{\frac{x}{\ln x}}$; е) $y=\sqrt{\ln\sin\dfrac{x+3}{4}}$;

ж) $y=e^{1-x}\left(x^2+x-1\right)$, $y'(1)-?$ з) $y=(3x-5)\log_2 x$, $y'''-?$ и) $y=\mathrm{ctg}^2\,x$, $y''(\pi/4)-?$

3.2.4. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически, логарифмическое дифференцирование

Логарифмическое дифференцирование описано в п. 3.2.1. Прежде чем дифференцировать функцию, логарифмируют обе части уравнения, определяющего функцию. Это упрощает дифференцирование в случаях, когда функция имеет вид $y=f(x)^{g(x)}$ и когда задаётся в виде произведения (частного) большого числа сомножителей в различных степенях.

Пример 3.4.1. Найдите производную функции $y=(\sin x)^x$.

Решение. Логарифмируем обе части уравнения:

$$\ln y=\ln(\sin x)^x \quad \text{или} \quad \ln y=x\ln(\sin x).$$

По свойствам логарифмов показатель степени вынесли перед логарифмом и получили произведение двух функций. Дифференцируем обе части последнего равенства (см. п. 3.2.1):

$$(\ln y)'=(x\ln(\sin x))'$$

$$\frac{y'}{y}=\ln(\sin x)+x\frac{1}{\sin x}\cos x,\ \ y'=y(\ln(\sin x)+x\operatorname{ctg}x).$$

Подставляем вместо переменной y выражение $(\sin x)^x$ и получаем

$$y'=(\sin x)^x(\ln(\sin x)+x\operatorname{ctg}x).$$

Пример 3.4.2. Найдите производную функции $y=\dfrac{\sqrt[4]{(6x+5)^3}\,(2x-1)^5}{(3x+2)^4}$.

Решение. Логарифмируем обе части уравнения:

$$\ln y=\ln\frac{\sqrt[4]{(6x+5)^3}\,(2x-1)^5}{(3x+2)^4},$$

$$\ln y=\frac{3}{4}\ln(6x+5)+5\ln(2x-1)-4\ln(3x+2).$$

Воспользовались свойствами логарифмов и выражение значительно упростилось. Теперь дифференцируем:

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{4}\frac{6}{6x+5}+5\frac{2}{2x-1}-4\frac{3}{3x+2},$$

$$y'=y\left(\frac{9}{12x+10}+\frac{10}{2x-1}-\frac{12}{3x+2}\right).$$

Подставляем выражение для переменной y, получаем

$$y'=\frac{\sqrt[4]{(6x+5)^3}\,(2x-1)^5}{(3x+2)^4}\left(\frac{9}{12x+10}+\frac{10}{2x-1}-\frac{12}{3x+2}\right).$$

Производная функции, заданной параметрическими уравнениями, находится по формуле (3.15). Дифференцирование неявно заданных функций описано в п. 3.2.1.

Пример 3.4.3. Найдите производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

Решение. Находим производные по параметру *t* переменных *x* и *y*:

$$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t, \quad y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t .$$

Далее, по формуле (3.15)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} .$$

Производная $y'(x)$ зависит от параметра *t*, поэтому в ответ лучше выписать её параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y'(x) = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}. \end{cases}$$

Пример 3.4.4. Найдите производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной неявно уравнением $e^{xy} + y^2 + 5x - 3 = 0$.

Решение. Дифференцируем уравнение по переменной *x*, учитывая зависимость $y(x)$ (*y* – функция переменной *x*):

$$e^{xy}(y + xy') + 2y \cdot y' + 5 = 0 .$$

Осталось из данного равенства выразить y' :

$$y'(e^{xy} \cdot x + 2y) = -e^{xy} y - 5 , \; y' = -\frac{e^{xy} y + 5}{e^{xy} x + 2y} .$$

Индивидуальные задания

Найдите производные $\frac{dy}{dx}$ функций:

1. а) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; б) $e^{xy} + x^2 - y^3 = 1$; в) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

2. а) $y = x^5 e^{x^2} \operatorname{tg}^3 x \arcsin 2x$; б) $y \ln x + \frac{x}{y} = 7$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \dfrac{t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}}. \end{cases}$

3. а) $y = x^{\sqrt{x}}$; б) $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$; в) $\begin{cases} x = (3t)/(1+t^3), \\ y = (3t^2)/(1+t^3). \end{cases}$

4. а) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$; б) $x\sin y - \cos y = \cos 2y$; в) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$

5. а) $y = (\cos x)^{\arcsin x}$; б) $xy = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

6. а) $y = (x^2+3)^{\sqrt{x}}$; б) $x^2 y + \operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x} = 3$; в) $\begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = t/(t+1). \end{cases}$

7. а) $y = \dfrac{(x-2)^2 e^{x^3}}{\sqrt{(x+3)^3(x^2+5)}}$; б) $\operatorname{arctg}(x+y) = xy$; в) $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

8. а) $y = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$; б) $\sqrt{x^2+y^2} = 4\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; в) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

9. а) $y = x^{1/x}$; б) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$; в) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

10. а) $y = x^{x^2}$; б) $3y^2 + e^{xy} = \sqrt{x+y}$; в) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \operatorname{arctg}(t+1). \end{cases}$

11. а) $y = x^{\ln x}$; б) $xy^3 - \sqrt{x+y} - x = 0$; в) $\begin{cases} x = t\sin t, \\ y = t^2 \sin t^2; \end{cases}$

12. а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^7(x^2-x)}{x^4+5}}$; б) $(x+y)^7 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{y} = 1$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}, \\ y = t^2 + t. \end{cases}$

13. а) $y = (\operatorname{tg} x)^x$; б) $5x^2 y = \sin(x+y)$; в) $\begin{cases} x = 2^t, \\ y = 2^{t^2}. \end{cases}$

14. а) $y = (\sin x)^{\cos x}$; б) $\sin(x-y) = x\ln y + e^{xy}$; в) $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2. \end{cases}$

15. а) $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sin x}$; б) $xy - x^2\sin y + e^{xy} = 2$; в) $\begin{cases} x = e^{t^2}, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

16. а) $y = x^{\sin 2x}$; б) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$; в) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

17. а) $y=(\ln x)^{x^2}$; б) $2^x+2^y=2^{x+y}$; в) $\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$

18. а) $y=\dfrac{(x+1)^3 e^{2x}\sqrt{x^3-3}}{\left(x^2-1\right)^5}$; б) $y\sin x-\cos(x-y)=0$; в) $\begin{cases} x=(t+1)/t, \\ y=(t-1)/t. \end{cases}$

19. а) $y=x^{x+1}$; б) $x^2+y=1+xe^y$; в) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3. \end{cases}$

20. а) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x^2+1}}$; б) $x\sin y+y\sin x=0$; в) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=t+2\sin t. \end{cases}$

21. а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}\sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x+1}}$; б) $e^x+e^y-2^{xy}=1$; в) $\begin{cases} x=2\ln\operatorname{ctg} t, \\ y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

22. а) $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$; б) $xe^y+y^2\ln x=xy$; в) $\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=t^2+t+1. \end{cases}$

23. а) $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin x}$; б) $x^2\sin y+y^2\cos x=1$; в) $\begin{cases} x=e^{-t}\sin t, \\ y=e^t\cos t. \end{cases}$

24. а) $y=(\cos x)^{\sqrt[3]{x}}$; б) $ye^{x+y}+(x+y)^3=1$; в) $\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=3t^5+5t^3+1. \end{cases}$

25. а) $y=\dfrac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}$; б) $\dfrac{y}{x}+\sin(xy)-y^2=0$; в) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}, \\ y=\operatorname{arctg} t. \end{cases}$

3.2.5. Геометрические и механические приложения производной

Из геометрических приложений производной рассмотрим уравнение касательной (3.16) и нормали (3.17) к графику функции, угол между кривыми, который равен углу между касательными к этим кривым. Напомним, что угол между прямыми на плоскости можно найти по формулам (2.7). Из механических приложений рассмотрим скорость и ускорение при прямолинейном неравномерном движении (п. 3.2.1).

Пример 3.5.1. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, проведённых в точке, для которой $t=\pi/4$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид уравнения (3.16), а нормали – (3.17). Найдём абсциссу x_0 и ординату $y_0=f(x_0)$ точки касания:

$$x_0=x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{8};\ y_0=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Далее находим производную параметрически заданной функции и её значение при $t=\pi/4$:

$$\begin{aligned} x' &= \cos t - t\sin t \\ y' &= \sin t + t\cos t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t},$$

$$f'(x_0)=y'(x_0)=\frac{y'(\pi/4)}{x'(\pi/4)}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{4}\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\pi}{4}\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4+\pi}{4-\pi}.$$

Тогда уравнение касательной принимает вид

$$y=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{4+\pi}{4-\pi}\left(x-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right) \quad \text{или} \quad 4(4+\pi)x-4(4-\pi)y-\sqrt{2}\pi^2=0,$$

а уравнение нормали –

$$y=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}-\frac{4-\pi}{4+\pi}\left(x-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right) \quad \text{или} \quad (4-\pi)x+(4+\pi)y-\sqrt{2}\pi=0.$$

Индивидуальные задания

Составьте уравнения касательной и нормали к кривой:

1. $y=\dfrac{3x-4}{2x-3}$ в точке $M(2;2)$.
2. $y=\dfrac{\ln x}{x}$ в точке $M(1;0)$.
3. $y=e^{1-x^2}$ при $x_0=-1$.
4. $y=x^2-5x+4$ при $x_0=-1$.
5. $y=x^3+2x$ в точке $M(1;3)$.
6. $y=xy+\ln y$ в точке $M(1;1)$.
7. $y=2+x-x^2$ при $x_0=2$.
8. $y=x^3+4x^2-1$ при $x_0=-1$.
9. $y=\sqrt{x}$ при $x_0=4$.
10. $y=\operatorname{tg}2x$ при $x_0=0$.
11. $y=\dfrac{2}{1+x^2}$ при $x_0=1$.
12. $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ в точке $M(-1;0)$.
13. $y=x^3+2x^2-4x-3$ при $x_0=-2$.
14. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ при $t=1$.
15. $y=x\ln 3x-2$ при $x_0=1/3$.
16. $x^3+y^2+2x-6=0$ при $y_0=3$.
17. $y=2\sqrt{2}\sin x$ в точке $M(\pi/4;2)$.
18. $x^5+y^5=2xy$ в точке $M(1;1)$.

Под каким углом пересекаются линии, заданные уравнениями:

19. $y = e^{x/2}$ и $x = 2$.

20. $y = 1 - e^{x/2}$ и $y = 0$.

21. $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

22. $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$.

23. $y = x - x^2$ и $y = 5x$.

24. $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

25. $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.

Пример 3.5.2. Известен закон движения точки по координатной оси $x = t^4/4 - t^3 - 2t^2 + 10$ (расстояние x измеряется в метрах, время t – в секундах). Определите скорость и ускорение точки в конце второй секунды после изменения направления движения.

Решение. Согласно механическому смыслу производной (п. 3.2.1), скорость и ускорение – это, соответственно, первая и вторая производная от пути. Найдём их:

$$v = x' = t^3 - 3t^2 - 2t\ ; \quad a = v' = 3t^2 - 6t - 2\ .$$

Направление движения изменяется, если меняется знак скорости, поэтому найдём точки, в которых скорость обращается в ноль:

$$t^3 - 3t^2 - 2t = 0 \quad \text{или} \quad t(t+1)(t-4) = 0\ .$$

Производная (скорость) меняет знак в точках $t_1 = -1,\ t_2 = 0,\ t_3 = 4$. Поскольку время принимает неотрицательные значения, и начальный момент нас не интересует, то $t = 4$. Скорость и ускорение в конце шестой секунды движения:

$$v(6) = 6^3 - 3 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 = 96 \text{ (м/с)}; \quad a(6) = 3 \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 - 2 = 70 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Индивидуальные задания

1. Известен закон движения точки по координатной оси (расстояние x измеряется в метрах, время t – в секундах). Определите скорость и ускорение точки в конце t_1 секунды после первого изменения направления движения.

1. $x = t^3/3 - 2t^2 + 3t$, $t_1 = 1$.

2. $x = t^4/4 - 4t^3 + 16t^2$, $t_1 = 3$.

3. $x = t^3/3 - 2t^2 - 5t + 10$, $t_1 = 4$.

4. $x = (3t^4)/4 - t^3 - 3t^2 + 7$, $t_1 = 3$.

5. $x = t^3/3 - 3t^2 + 5t - 2$, $t_1 = 2$.

6. $x = t^4/4 - 2t^2 + 5$, $t_1 = 2$.

7. $x = t^3/3 - t^2 - 3t + 7$, $t_1 = 4$.

8. $x = t^4/2 - 4t^3 + 5t^2$, $t_1 = 3$.

9. $x = 3t^3/4 - t + 5$, $t_1 = 1$.

10. $x = t^4/2 - 9t^2 + 10$, $t_1 = 2$.

2. По кривой $F(x;\ y)=0$ движется точка. Известен закон изменения одной из её координат от времени. Найдите скорость и ускорение изменения второй координаты в точке *M*.

1.	$y-x(8-x)=0,\ x=t\sqrt{t}$, $M(1;7)$.	2.	$y-x^3=0,\ y=8t^3$, $M(4;64)$.
3.	$x^2+y^2=4,\ x=2\cos t$, $M\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.	4.	$x^2+4y^2=4,\ y=\sin t$, $M(0;1)$.
5.	$y^2-x^3=0,\ y=t^3$, $M(4;8)$.	6.	$y^3-(x-1)^2=0,\ y=t^2$, $M(4;1)$.
7.	$x+y-1=0,\ x=1/(t+1)$, $M(3;-2)$.	8.	$3x+2y=6,\ x=2\cos^2 t$, $M(1;1{,}5)$.

3. Известен закон движения точки по координатной оси (расстояние *x* измеряется в метрах, время *t* – в секундах). Найдите моменты времени, в которые скорость равна v_1, и ускорение в эти моменты времени.

1.	$x=5\ln\left(t^2+1\right)$, $v_1=4$.	2.	$x=2(t-\sin t)$, $v_1=3$, $t\in[0;2\pi]$.
3.	$x=4\ln\left(t^2-1\right)$, $v_1=3$.	4.	$x=\left(2t^2+1\right)/t$, $v_1=1{,}75$.
5.	$x=(t+1)\ln(t+1)+4$, $v_1=5$.	6.	$x=5\ln\left(t^2-2t+5\right)$, $v_1=2$.
7.	$x=8\sqrt{t^2+3t+6}$, $v_1=7$.		

3.2.6. Дифференциал

Понятие дифференциала имеет большое теоретическое значение в математике. На практике его применяют, например, в приближённых вычислениях, используя формулу (3.19).

Пример 3.6.1. Вычислите приближённо $\sqrt[3]{7{,}64}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Значение функции легко находится в точке $x_0=8$, близко расположенной к точке $x=7{,}64$:

$$f(8)=\sqrt[3]{8}=2\ ;\quad 7{,}64=8-0{,}36=x_0+\Delta x\ .$$

Таким образом, $\Delta x=-0{,}36$. По формуле (3.19) получаем

$$\sqrt[3]{7{,}64}=f(7{,}64)=f(8-0{,}36)\approx f(8)+df(8)=2+df(8)\,.$$

Осталось найти значение дифференциала $df(8)$ по формуле (3.18):

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ ;\quad df(8)=f'(8)\Delta x=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}\cdot(-0{,}36)=-\frac{0{,}36}{12}=-0{,}03\,.$$

Тогда

$$\sqrt[3]{7{,}64}\approx 2+df(8)=2-0{,}03=1{,}97\,.$$

Индивидуальные задания

Вычислите приближённо с помощью дифференциала:

1. а) $\sqrt[3]{27{,}54}$; б) $\operatorname{arctg} 1{,}04$.
2. а) $\sqrt[3]{26{,}46}$; б) $\arcsin 0{,}08$.
3. а) $\sqrt{0{,}98^3}$; б) $e^{0{,}05}$.
4. а) $\sqrt[3]{1{,}24}$; б) $e^{-0{,}1}$.
5. а) $1/\sqrt{1{,}005}$; б) $\operatorname{ar}\sin 0{,}05$.
6. а) $\sqrt[3]{1{,}06^2}$; б) $\ln 1{,}15$.
7. а) $2{,}01^7$; б) $\sqrt{\dfrac{2{,}037^2-3}{2{,}037^2+5}}$.
8. а) $2{,}003^6$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{1-0{,}1}{1+0{,}1}}$.
9. а) $1{,}997^6$; б) $\operatorname{arctg} 1{,}06$.
10. а) $\sqrt[3]{7{,}76}$; б) $\operatorname{arctg} 1{,}02$.
11. а) $1/\sqrt{4{,}32}$; б) $e^{0{,}1}$.
12. а) $2{,}003^6$; б) $\sqrt[3]{8{,}36}$.
13. а) $\sqrt{0{,}96^3}$; б) $\arcsin 0{,}51$.
14. а) $2{,}998^5$; б) $\sqrt{1+\sin 0{,}02}$.
15. а) $\sqrt[5]{1{,}05^2}$; б) $e^{0{,}1}$.
16. а) $3{,}997^4$; б) $\sqrt[3]{e}$.
17. а) $\sqrt{16{,}02}$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}97$.
18. а) $\sqrt[4]{620}$; б) $0{,}998^{31}$.
19. а) $\sqrt[3]{121}$; б) $1{,}021^{15}$.
20. а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\operatorname{ar}\sin 0{,}1$.
21. а) $\sqrt[7]{129}$; б) $e^{-0{,}05}$.
22. а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}05$.
23. а) $\sqrt[4]{15{,}8}$; б) $2{,}03^5$.
24. а) $\sqrt[3]{26{,}55}$; б) $e^{-0{,}02}$.
25. а) $\sqrt{3{,}98}$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}95$.

3.2.7. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя позволяет при нахождении пределов раскрывать неопределённость $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Согласно формуле (3.20), предел отношения функций равен пределу отношения их производных.

Пример 3.7.1.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+x(1/x)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1}=1.$$

Аналогично раскрывается неопределённость $[\infty/\infty]$.

Пример 3.7.2.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{tg}3x)'}{(\operatorname{tg}x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3/\cos^2 3x}{1/\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}=\left[\frac{0}{0}\right],$$

пришли к неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$. Снова применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos x(-\sin x)}{6\cos 3x(-\sin 3x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 2x}{6\cos 6x}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}.$$

Правило Лопиталя применили несколько раз и, для того чтобы упростить выражение под знаком предела, использовали формулу синуса двойного угла: $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$.

Остальные неопределённости $([\infty\cdot 0], [\infty-\infty], [1^\infty], [\infty^0], [0^0])$ с помощью простейших преобразований, например, основного логарифмического тождества, приведения к общему знаменателю, сводятся к неопределённостям $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 3.7.3.

$$\lim_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{1/x}-1\right)}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{1/x}-1\right)'}{(1/x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{\left(-1/x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{1/x}=1.$$

Пример 3.7.4.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos 2x)^{1/x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}},$$

здесь использованы: основное логарифмическое тождество $e^{\ln a}=a$, свойство логарифма $\ln a^k=k\ln a$ и возможность переставлять местами знак предела $\lim\limits_{x\to 0}$ и непрерывную функцию e^x на основании равенства (3.3).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x/\cos 2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\cos 2x}=-2,$$

по цепочке (3.9) эквивалентных бесконечно малых имеем: $\sin 2x\sim 2x$. И окончательно получаем

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}}=e^{-2}.$$

Индивидуальные задания

Найдите пределы функций по правилу Лопиталя:

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin 2x}{\operatorname{tg}2x-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3-\operatorname{arctg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{\operatorname{tg}3x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2}{x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^5-3^5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^4+2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x^2\right)$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+7}{e^x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{4x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\ln(1+3x)}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3^x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x+\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2(x+1)}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x^3+5x-2}{x^3+2x^2-7x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x^2}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}3x}{\ln\sin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{2x}\sin\dfrac{7}{x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+7x^2-6}{x^4-3x^3+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{3x}-x^2}{x^3+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x+e^x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{ctg}\pi x)^{1-x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-3)}{\ln\left(e^x-e^3\right)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{tg}\dfrac{5}{x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4}{\arcsin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(5\pi x)}{\sin(2\pi x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{1/x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x$.

25. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^4+x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

ОТВЕТЫ

1.1. Матрицы и определители

1.1.1. а) –7; б) 26; в) $5a+2b$; г) –8; д) $1/\cos^2\alpha$. **1.1.2.** 4, 1, 3, 2. **1.1.3.** –2. **1.1.4.** а) 13; б) (2; –3). **1.1.5.** а) 0; б) -12; в) 40; г) 6. **1.1.6.** а) $-3; -5/2$; б) $x \geq -41/21$. **1.1.7.** а) –8; б) –6; в) 63; г) 20. **1.1.8.** а) $(-1)^{n\cdot(n+1)/2}$; б) $n!$.

1.1.9. а) $\begin{pmatrix} 33 & 3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -20 & 35 \end{pmatrix}$. **1.1.10.** а) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 3 & 35 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 13 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.11. а) $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^T A = (14)$; б) $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 20 \end{pmatrix}$,

$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 20 \end{pmatrix}$; в) $AA^T = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 21 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 21 & -3 & 26 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

1.1.12. Имеют смысл произведения матриц: BA, AC, AF, BF, FB, FD, CG, GC, BK. $BA = \begin{pmatrix} 14 & 33 & 13 \\ -21 & 39 & 10 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} 6 \\ -30 \\ 34 \end{pmatrix}$; $AF = \begin{pmatrix} 21 & -56 \\ -22 & 6 \\ 15 & -15 \end{pmatrix}$;

$BF = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -13 & -18 \end{pmatrix}$; $FB = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 \\ -20 & -5 & 25 \\ 19 & -9 & -5 \end{pmatrix}$; $FD = \begin{pmatrix} 9 & -26 \\ 0 & -35 \\ 15 & -13 \end{pmatrix}$; $CG = \begin{pmatrix} 0 & 28 & 35 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

$GC = (1)$; $BK = \begin{pmatrix} 13 & -6 & -27 & 33 \\ 5 & 3 & -24 & 39 \end{pmatrix}$. **1.1.13.** а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.14. а) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -4{,}5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 9/17 & -4/17 & -2/17 \\ -5/17 & 6/17 & 3/17 \\ -11/17 & 3/17 & 10/17 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3{,}5 \\ 1 & 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

1.1.15. а) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 15 & 5 & 13 \\ 33 & 10 & 31 \\ -150 & -46 & -140 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 15/7 \\ -16/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$.

1.1.16. а) 2; б) 3; в) 3; г) 3.

1.2. Системы линейных уравнений

1.2.1. 1. **1.2.2.** 3. **1.2.3.** –2. **1.2.4.** а) $x_1 = 3,\ x_2 = 2$; б) $x_1 = 4,\ x_2 = 0$. **1.2.5.** а) $(2;\ 1;\ 2)$; б) $(0;\ 0;\ 0)$; в) $(-1; 0; 1)$; г) $(3; 2; -2)$; д) нет решений. **1.2.6.** а) $(0;0;0;0)$; б) $x_1 = 2x_2 - 2/7\,x_4$, $x_3 = 5/7\,x_4$, $x_2, x_4 \in R$; в) $x_1 = 1{,}5x_2 + 0{,}5$, $x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_2 \in R$; г) $x_1 = -8$, $x_3 = -11,\ x_4 = -15$; д) $x_1 = 1 + 1/2\,x_2 + 5/16\,x_4$, $x_3 = 1 + 17/8\,x_4$, $x_2, x_4 \in R$; е) $x_1 = -11 - 5x_3 + 5x_4$, $x_2 = 8 + 3x_3 - 4x_4$, $x_3, x_4 \in R$.

1.3. Векторная алгебра

1.3.1. 1. **1.3.2.** а) $\{-8; 21; -14\}$, б) $\{8; 19; -18\}$. **1.3.3.** а) $\alpha = -4,\ \beta = 3/2$; б) $\alpha = 6,\ \beta = -2/3$. **1.3.4.** $2\sqrt{41}$, $\left\{1/\sqrt{41}; -2/\sqrt{41};\ 6/\sqrt{41}\right\}$; $2\sqrt{17}$, $\left\{2/\sqrt{17}; -3/\sqrt{17};\ 2/\sqrt{17}\right\}$. **1.3.5.** 5; 5. **1.3.6.** (–2; 3). **1.3.7.** (9; 1). **1.3.8.** C(–7; 3), D(–1; 6). **1.3.9.** $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **1.3.10.** 22. **1.3.11.** $3\sqrt{3}$. **1.3.12.** $\varphi = \arccos 2/7$. **1.3.13.** а) –62; б) 162. **1.3.14.** –29. **1.3.15.** 5. **1.3.16.** –4. **1.3.17.** –524. **1.3.18.** 45°. **1.3.19.** $\vec{x} = \{-3;3;3\}$. **1.3.20.** 14. **1.3.21.** $-7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. **1.3.22.** $2\sqrt{6}$. **1.3.23.** $\vec{F} = \{2;11;7\}$. **1.3.24.** 31. **1.3.25.** Да. **1.3.26.** 49. **1.3.28.** 11.

2.1. Прямая на плоскости

2.1.1. медиана: $5x - 6y + 32 = 0$; высота: $3x + 10y - 8 = 0$. **2.1.2.** $2x - 5y + 20 = 0$. **2.1.3.** а) $3x + 2y - 8 = 0$; б) $4x - 3y - 5 = 0$. **2.1.4.** $x - y + 2 = 0$; $2x + 3y - 11 = 0$; $2x - 7y - 1 = 0$. **2.1.5.** высота: $4x + y + 20 = 0$; медиана: $3x + 16y + 15 = 0$. **2.1.6.** $B^*\left(-\frac{7}{5}; -\frac{19}{5}\right)$. **2.1.7.** $\arccos\frac{28}{5\sqrt{65}}$. **2.1.8.** $x + 3y - 40 = 0$. **2.1.9.** $\frac{49}{13}$. **2.1.10.** $3x - y - 1 = 0$ или $x + 3y - 7 = 0$. **2.1.11.** $y = 2$. **2.1.12.** $5x - 6y - 28 = 0$. **2.1.13.** (2; –1).

2.2. Плоскость и прямая в пространстве

2.2.1. *B*. **2.2.2.** $2x+3y+5z-4=0$. **2.2.3.** $x-3y+z-7=0$. **2.2.4.** $4x+3y-6z+12=0$. **2.2.5.** $x+y+z+5=0$. **2.2.6.** $z-3=0$. **2.2.7.** (–2; –6; 2). **2.2.8.** $x-y-2z+22=0$. **2.2.9.** $x-2=0$. **2.2.10.** $y+2=0$. **2.2.11.** $2x-z=0$. **2.2.12.** $4x+5y-7=0$. **2.2.13.** $2x-3y+6z-25=0$. **2.2.14.** $2x-5y+4z+31=0$. **2.2.15.** $x+2y-3z+8=0$. **2.2.16.** $2x-3y-5z=0$. **2.2.17.** $-19x+8y+5z+39=0$. **2.2.18.** $2x+3y+4z-3=0$. **2.2.19.** $9x-5y-16z=0$. **2.2.20.** а) $\arccos\frac{14}{\sqrt{754}}$; б) $\arccos\frac{2}{\sqrt{42}}$. **2.2.21.** *B* = 3. **2.2.22.** *C* = –9. **2.2.23.** а) 60/13; б) 1. **2.2.24.** 6. **2.2.32.** а) $\arcsin\frac{5}{\sqrt{406}}$; б) $\arcsin\frac{8}{\sqrt{493}}$. **2.2.33.** $4x+3y+2z+4=0$. **2.2.34.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{-1}$. **2.2.35.** а) (6; 5; 4); б) (1; 7; –1); в) (2; 0; 1). **2.2.36.** $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+4}{2}$; (1; –7; 2). **2.2.39.** $2x-5y+7z+8=0$. **2.2.40.** $y-z-4=0$. **2.2.41.** $x+2y-2z-1=0$. **2.2.42.** $10x+13y+12z-47=0$. **2.2.43.** а) (5; –5; 0); б) (5; 5; 5). **2.2.44.** *A* = –1, *n* = –6. **2.2.45.** *A* = –1. **2.2.46.** *C* = 1,5; *m* = –6. **2.2.47.** *A* = 4; *B* = –8. **2.2.48.** *B* = –6; *D* = –27. **2.2.49.** (2; 9; 6).

2.3. Кривые второго порядка

2.3.1. $(x-2)^2+y^2=13$. **2.3.2.** $(x+4)^2+(y+1)^2=25$. **2.3.3.** эллипс: $\frac{(x-2)^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{10}=1$, $\varepsilon=\sqrt{10}/5$ **2.3.4.** $\frac{(x-2)^2}{15}-\frac{(y-1)^2}{10}=1$, гипербола, $\varepsilon=\sqrt{15}/3$. **2.3.5.** $-\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{12}=1$, гипербола, $\varepsilon=2\sqrt{3}/3$. **2.3.6.** $\frac{(x+1)^2}{24}+\frac{(y+1)^2}{8}=1$, эллипс, $\varepsilon=\sqrt{6}/3$. **2.3.7.** $\frac{(x+2)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$, $\varepsilon=5/4$, $x=-8{,}4$, $x=4{,}4$. **2.3.8.** $-\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{144}=1$, $\varepsilon=13/12$, $y=10\frac{1}{13}$, $y=-12\frac{1}{13}$. **2.3.9.** $y^2=-4(x-2)$, рис. 2.21. **2.3.10.** $(x-2)^2=-12(y+1)$, рис. 2.22.

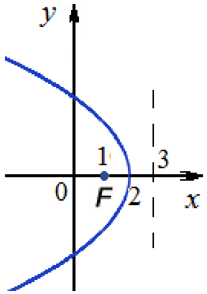


Рис. 2.21

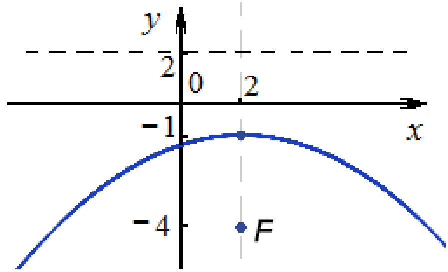


Рис. 2.22

3.1. Введение в анализ

3.1.1. $(-3;-2)\cup(-2;1]$. **3.1.2.** $[1;4)$. **3.1.3.** $-3/2$. **3.1.4.** 0. **3.1.5.** $-\infty$. **3.1.6.** 1. **3.1.7.** 0. **3.1.8.** 2. **3.1.9.** 3. **3.1.10.** $1/2$. **3.1.11.** $1/3$. **3.1.12.** – 3. **3.1.13.** ∞. **3.1.14.** $1/2$. **3.1.15.** $1/2$. **3.1.16.** 2/7. **3.1.17.** 1/4. **3.1.18.** 6. **3.1.19.** – 1/3. **3.1.20.** 1/6. **3.1.21.** ∞. **3.1.22.** 1/2. **3.1.23.** 1/2. **3.1.24.** 1/2. **3.1.25.** 1/2. **3.1.26.** 3. **3.1.27.** 4. **3.1.28.** 8. **3.1.29.** 2/27. **3.1.30.** e^5. **3.1.31.** e^6. **3.1.32.** e^{21}. **3.1.33.** e^2. **3.1.34.** 0. **3.1.35.** ∞. **3.1.36.** 25/6. **3.1.37.** 72. **3.1.38.** e. **3.1.39.** 3/2. **3.1.40.** 4. **3.1.41.** ln3. **3.1.42.** – 1/2. **3.1.43.** ∞. **3.1.44.** 1/2. **3.1.45.** – 2. **3.1.46.** 1. **3.1.47.** 6/11. **3.1.48.** 2/25. **3.1.49.** – 1/5. **3.1.50.** $x^0 = 0$ – точка устранимого разрыва, $x_n = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$ – точки разрыва второго рода (рис. 3.7). **3.1.51.** $x_0 = 3$ – точка скачка (рис. 3.8). **3.1.52.** $x_0 = 5$ – точка разрыва второго рода (рис. 3.9).

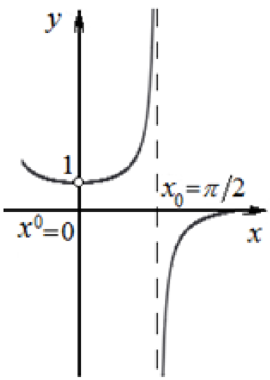


Рис. 3.7

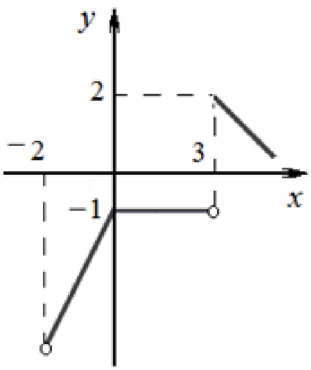


Рис. 3.8

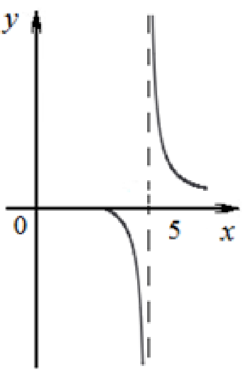


Рис. 3.9

3.2. Дифференциальное исчисление

3.2.1. $2/\cos^2 x + 3\sin x + 7/\left(3\sqrt[3]{x^2}\right) - 16/\left(5\sqrt[5]{x^7}\right)$. **3.2.2.** $(3+\ln x)/\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)$.

3.2.3. $(\cos x + 5 + x\ln x\cdot\sin x)/\left(x(\cos x+5)^2\right)$. **3.2.4.** 2/25. **3.2.5.** 1,5.

3.2.6. $x^2/\sqrt[3]{\left(x^3-3\right)^2}$. **3.2.7.** $\sin(1/x)/x^2$. **3.2.8.** $-1/\left(2(x+1)x\cos^2\ln\sqrt{(x+1/x)}\right)$.

3.2.9. $-\left(2\sin\ln^2\operatorname{arctg}x\cdot\ln\operatorname{arctg}x\right)/\left(\operatorname{arctg}x\left(1+x^2\right)\right)$.

3.2.10. $\left(3\sin^2\cos x\left(1+2^{x^2}\right) - \ln 2\cdot 2x\cdot 2^{x^2}\sin^3 x\right)/\left(1+2^{x^2}\right)^2$. **3.2.11.** $3\ln 2$.

3.2.12. $x^{2x}(2\ln x+2)$. **3.2.13.** $(\operatorname{arctg}3x)^{x^2+e^{2x}}\left(2x+2e^{2x}\right)\ln\operatorname{arctg}3x +$

$+(\operatorname{arctg}3x)^{x^2+e^{2x}}3\left(x^2+e^{2x}\right)/\left(\operatorname{arctg}3x\cdot\left(1+9x^2\right)\right)$.

3.2.14. $\left((x-2)^9/\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}\right)(9/(x-2)-5/(2x-2)-11/(2x-6))$.

3.2.15. $6\sqrt{t}\cos t/(\ln t+2)$. **3.2.16.** $\cos t/\left(2^t\ln 2-1\right)$.

3.2.17. $\left(xy^2-2x^3\right)/\left(2y^3-x^2y\right)$. **3.2.18.** $(\sin x + x\cos x)/(2\ln y+2)$.

3.2.19. $\left(6x^2-2\right)/\left(1+x^2\right)^3$. **3.2.20.** $-4\sqrt{3}$. **3.2.21.** – 12.

3.2.22. $\operatorname{arctg}(1/2)$; $x-2y-1=0$. **3.2.23.** касательная: $x+13y-15=0$; нормаль: $13x - y - 25 = 0$. **3.2.24.** $v = 32$, $a = 22$. **3.2.25.** 0,5.

3.2.26. 0,8. **3.2.27.** 2,99. **3.2.28.** 2,02. **3.2.29.** – 0,1. **3.2.30.** – 2.

3.2.31. 13/44. **3.2.32.** 1. **3.2.33.** 5/3. **3.2.34.** ∞. **3.2.35.** – 1.

3.2.36. 0. **3.2.37.** 1/2. **3.2.38.** e^2. **3.2.39.** 1. **3.2.40.** e.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учитывая общие принципы компетентностного подхода, заключающиеся в определении цели образования, отборе содержания образования, организации образовательного процесса и оценке образовательных результатов, в технических вузах возникает необходимость в модернизации качества методического обеспечения. Кроме того, компетентный бакалавр «на выходе» из университета должен быть готовым индивидуально мыслить и принимать самостоятельные решения.

В свете этого учебное пособие «Высшая математика в примерах и задачах. Часть 1» обеспечивает не только самостоятельную работу студентов, но и позволяет работать сугубо индивидуально. Каждая глава пособия содержит набор индивидуальных заданий, представленных в количестве 25-ти вариантов. Индивидуализация образования ведёт к максимально продуктивному овладению студентами технических и экономических направлений необходимыми компетенциями.

Краткое, фактически справочное изложение теоретических сведений позволяет быстро восстановить в памяти материал соответствующей лекции, а большой набор заданий полностью обеспечивает предусмотренный объём плановых практических занятий. Использование студентами представленного пособия позволит им наиболее грамотно и глубоко готовиться к практическим занятиям и плановым контрольным точкам.

Вышесказанное позволяет утверждать, что использование данного пособия в учебном процессе преподавания математики в техническом вузе является достаточно обоснованным и плодотворным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник / Д. В. Беклемишев. – 2-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2009. – 312 с. – URL : http://e.lanbook.com/. – Загл. с экрана.
2. **Клетеник, Д. В.** Сборник задач по аналитической геометрии [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. В. Клетеник. – 17-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2011. – 224 с. – URL : http://e.lanbook.com/. – Загл. с экрана.
3. **Применение** математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра. Ч. 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. пособие / Н. П. Пучков, Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова и др. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 96 с.
4. **Применение** математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра : в 4 ч. Ч. 3: Математический анализ : учеб. пособие / Н. П. Пучков, Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова и др. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 80 с.
5. **Жуковская, Т. В.** Дифференциальное исчисление функций одной переменной : учеб. пособие для студентов 1 курса инженерных направлений высших учебных заведений / Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, А. И. Урусов. – Тамбов: А. И. Урусов, 2012. – 155 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное электронное издание

ЖУКОВСКАЯ Татьяна Владимировна
МОЛОКАНОВА Елена Анатольевна
УРУСОВ Александр Иванович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию Т. Ю. Зотова

ISBN 978-5-8265-1710-9

9 785826 517109

Подписано к использованию 05.04.2017.
Тираж 100 шт. Заказ № 116

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08.
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru