Treći tjedan

Q

1. Definirati pojmove: tauotologija, kontradikcija.

   Tautologija ... za neku formulu P kažemo da je tautologija ako je uvijek istinita, u tom slučaju pišemo $\models P$.

   Kontradikcija ... za neku formulu Q kažemo da je kontradikcija ako nikad nije istinita, u tom slučaju pišemo $Q \equiv \perp$.

2. Zapisati formulama pa dokazati (algebarski i tablicom) sljedeća pravila zaključivanja: zakon isključenja trećega, pravilo silogizma, zakon neproturječnosti, zakon dvostruke negacije, pravilo kontrapozicije, zakoni apsorpcije.

   U matematičkoj logici vrijede sljedeća pravila zaključivanja:

   - zakon isključenja trećeg
   $$\models A \vee \neg A$$
   - tranzitivnost implikacije, odnosno pravilo silogizma
   $$\models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$
   - zakon proturječnosti
   $$\models \neg(A \wedge \neg A)$$
   - zakon dvostruke negacije
   $$\models \neg\neg A \Leftrightarrow A$$
   - pravilo kontrapozicije
   $$\models (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)$$
   - zakoni apsorpcije
   $$\models A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$$
   $$\models A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

   triba jos dokazat

3. Definirati pojam algebre sudova.

   Algebra sudova je skup S svih sudova zajedno s tri operacije na S: dvije binarne $\vee$, $\wedge$ i jednom unarnom $\neg$.

4. Definirati pojmove logička posljedica sudova, premise, zaključak.

   Kažemo da je A logička posljedica sudova $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ako iz prepostavke da su sudovi $P_1, P_2, \ldots, P_n$ istiniti slijedi da je i sud A istinit, pišemo
   $$P_1, P_2, \ldots, P_n \models A$$
   Sudovi $P_1, P_2, \ldots, P_n$ su premise, a sud A je zaključak.

5. Iskazati i dokazati teorem koji karakterizira pojam logičke posljedice sudova pomoću implikacije.

   Ako vrijedi $P_1, P_2, \ldots, P_n \models A$, onda je $\models P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow A$ i obratno.

   Dokažimo tvrdnju prvo u jednom smjeru.

   Neka je $P_1, \ldots, P_n \vdash A$, tada treba dokazati
   $$\models P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow A$$
   Iz pretpostavke vidimo da istinitost sudova $P_1, \ldots, P_n$ povlači istinitost suda A, pa uzmimo da vrijedi
   $$P_1 \equiv P_2 \equiv \ldots \equiv P_n \equiv \top$$

Ako pretpostavimo da je tvrdnja lažna onda mora vrijediti

$$\models P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \quad A \equiv \bot$$

odnosno,

$$P_1 \equiv P_2 \equiv \ldots \equiv P_n \equiv \top \quad A \equiv \bot$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom, stoga tvrdnja mora biti istinita.

Dokažimo sada tvrdnju u drugom smjeru.

6. Iskazati i dokazati pravila modus ponens i modus tollens.
7. Definirati pojam Booleove algebre (raspisati sva svojstva).
8. Dokazati da su u Booleovoj algebri nula i jedinica jedinstvene, te da vrijede pravila apsorpcije.
9. Definirati pojam izomorfizma Booleovih algebri.
10. Dokazati da izomorfizam Booleovih algebra čuva zbrajanje, nulu i jedinicu.