Treći tjedan

Q

1. Definirati pojmove: tauotologija, kontradikcija.

   Tautologija ... za neku formulu P kažemo da je tautologija ako je uvijek istinita, u tom slučaju pišemo $\vDash P$.

   Kontradikcija ... za neku formulu Q kažemo da je kontradikcija ako nikad nije istinita, u tom slučaju pišemo $Q \equiv \bot$.

2. Zapisati formulama pa dokazati (algebarski i tablicom) sljedeća pravila zaključivanja: zakon isključenja trećega, pravilo silogizma, zakon neproturječnosti, zakon dvostruke negacije, pravilo kontrapozicije, zakoni apsorpcije.

   U matematičkoj logici vrijede sljedeća pravila zaključivanja:

   - zakon isključenja trećeg
   $$\vDash A \lor \neg A$$
   - tranzitivnost implikacije, odnosno pravilo silogizma
   $$\vDash (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$
   - zakon neproturječnosti
   $$\vDash \neg(A \land \neg A)$$
   - zakon dvostruke negacije
   $$\vDash \neg\neg A \Leftrightarrow A$$
   - pravilo kontrapozicije
   $$\vDash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$
   - zakoni apsorpcije
   $$\vDash A \lor (A \land B) \Leftrightarrow A$$
   $$\vDash A \land (A \lor B) \Leftrightarrow A$$

   Pripadajući dokazi.

   - zakon isključenja trećeg

A	$\neg A$	$A \lor \neg A$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$

   - tranzitivnost implikacije, odnosno pravilo silogizma

   $$\begin{aligned} &(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \equiv \neg[(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C)] \lor (\neg A \lor C) \equiv \\ &\equiv \neg(\neg A \lor B) \lor \neg(\neg B \lor C) \lor (\neg A \lor C) \equiv (A \land \neg B) \lor (B \land \neg C) \lor \neg A \lor C \equiv \\ &\equiv [(A \lor \neg A) \land (\neg B \lor \neg A)] \lor \ [(B \lor C) \land (\neg C \lor C)] \equiv [\top \land (\neg B \lor \neg A)] \lor \ [(B \lor C) \land \top] \equiv \\ &\equiv \neg B \lor \neg A \lor B \lor C \equiv \neg B \lor B \lor \neg A \lor C \equiv \top \lor \neg A \lor C \equiv \top \end{aligned}$$

   - zakon neproturječnosti
   Pirmjenom DeMorganovih formula vidimo da su zakon neproturječnosti i zakon isključenja trećeg isti.
   $$\neg(\neg A \land A) \equiv \neg\neg A \lor \neg A \equiv A \lor \neg A$$

- zakon dvostruke negacije

A	$\neg\neg A$	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

ili

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A \equiv A \Leftrightarrow A \equiv (A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow A) \equiv$$
$$(\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A) \equiv \top \wedge \top \equiv \top$$

- pravilo kontrapozicije

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \equiv [\neg(A \Rightarrow B) \vee (\neg B \Rightarrow \neg A)] \wedge [\neg(\neg B \Rightarrow \neg A) \vee (A \Rightarrow B)] \equiv$$
$$\equiv [\neg(\neg A \vee B) \vee B \vee \neg A] \wedge [\neg(B \vee \neg A) \vee \neg A \vee B] \equiv [(A \wedge \neg B) \vee B \vee \neg A] \wedge [(\neg B \wedge A) \vee \neg A \vee B] \equiv$$
$$\equiv (A \wedge \neg B) \vee B \vee \neg A \equiv [(A \vee B) \wedge (\neg B \vee B)] \vee \neg A \equiv [(A \vee B) \wedge \top] \vee \neg A \equiv A \vee B \vee \neg A \equiv \top$$

- zakoni apsorpcije
  Prvi zakon:

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A \equiv [A \vee (A \wedge B) \Rightarrow A] \wedge [A \Rightarrow A \vee (A \wedge B)] \equiv$$
$$\equiv [\neg(A \vee (A \wedge B)) \vee A] \wedge [\neg A \vee A \vee (A \wedge B)] \equiv [(\neg A \wedge \neg(A \wedge B)) \vee A] \wedge [\top \vee (A \wedge B)] \equiv$$
$$\equiv [(\neg A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee A] \wedge \top \equiv [(\neg A \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg B)] \vee A \equiv \neg A \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee A \equiv \top$$

  Drugi zakon:

$$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A \equiv [A \wedge (A \vee B) \Rightarrow A] \wedge [A \Rightarrow A \wedge (A \vee B)] \equiv$$
$$\equiv [\neg(A \wedge (A \vee B)) \vee A] \wedge [\neg A \vee (A \wedge (A \vee B))] \equiv [\neg A \vee \neg(A \vee B) \vee A] \wedge [(\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee B)] \equiv$$
$$\equiv [\top \vee \neg(A \vee B)] \wedge [\top \wedge \top] \equiv \top \wedge \top \equiv \top$$

3. Definirati pojam algebre sudova.

   Algebra sudova je skup S svih sudova zajedno s tri operacije na S: dvije binarne $\vee$, $\wedge$ i jednom unarnom $\neg$.

4. Definirati pojmove logička posljedica sudova, premise, zaključak.

   Kažemo da je A logička posljedica sudova $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ako iz prepostavke da su sudovi $P_1, P_2, \ldots, P_n$ istiniti slijedi da je i sud A istinit, pišemo

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vDash A$$

   Sudovi $P_1, P_2, \ldots, P_n$ su premise, a sud A je zaključak.

5. Iskazati i dokazati teorem koji karakterizira pojam logičke posljedice sudova pomoću implikacije.

   Ako vrijedi $P_1, P_2, \ldots, P_n \vDash A$, onda je $\vDash P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow A$ i obratno.

   Dokažimo tvrdnju prvo u jednom smjeru.

   Neka je $P_1, \ldots, P_n \vDash A$, tada treba dokazati

$$\vDash P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow A$$

   Pretpostavimo da ono što trebamo dokazati nije tautologija, odnosno da vrijedi

$$P_1 \equiv \ldots \equiv \ P_n \equiv \top, \quad A \equiv \bot$$

   Ali sada uviđamo da se to protivi početnoj tvrdnji koja kaže da istinitost sudova $P_1, \ldots, P_n$ povlači istinitost suda A, stoga je $\vDash P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow A$ tautologija.

Dokažimo sada tvrdnju u drugom smjeru.

Neka je $\models P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow A$, tada treba dokazati

$$P_1, \ldots, P_n \models A$$

Ako je $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \equiv \top$, odnosno $P_1 \equiv \ldots \equiv \ P_n \equiv \top$, po pretpostavci mora vrijediti i $A \equiv \top$. Drugim riječima vrijedi $P_1, \ldots, P_n \models A$.

6. Iskazati i dokazati pravila modus ponens i modus tollens.

   Za sudove A i B vrijedi

   $$A, A \Rightarrow B \models B$$

   Takvo pravilo zaključivanja zove se modus ponens ili pravilo otkidanja.

   Dokaz:

   Ako za premise vrijedi $A \equiv \top$ i $A \Rightarrow B \equiv \top$, onda mora biti $B \equiv \top$.

   Za sudove A i B vrijedi

   $$\neg B, A \Rightarrow B \models \neg A$$

   Takvo pravilo zaključivanja zove se modus tollens.

   Dokaz:

   Ako po pravilu kontrapozicije zamijenimo $A \Rightarrow B$ sa $\neg B \Rightarrow \neg A$ onda tvrdnja vrijedi po pravilu modus ponens za $\neg A$ i $\neg B$.

7. Definirati pojam Booleove algebre (raspisati sva svojstva).

   Neka je B skup u kojem su istaknuta dva različita elementa 0 i 1, te neka su zadane dvije binarne operacije, zbrajanje i množenje, i jedna unarna operacija $\overline{}$ na B . Skup B zajedno s ove tri operacije zove se Booleva algebra ako su ispunjena sljedeća svojstva:

   (a) idempotentnost

   $$a + a = a, \quad a \cdot a = a$$

   (b) asocijativnost

   $$(a + b) + c = a + (b + c)$$

   $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

   (c) komutativnost

   $$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

   (d) distributivnost

   $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

   $$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

   (e) DeMorganove formula

   $$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

   $$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

   (f)

   $$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$

   (g)

   $$a + 1 = 1, \quad a \cdot 0 = 0$$

   (h) komplementiranost

   $$a + \overline{a} = 1, \quad a \cdot \overline{a} = 0$$

   (i) involutivnost komplementiranja

   $$\overline{\overline{a}} = a$$

8. Dokazati da su u Booleovoj algebri nula i jedinica jedinstvene, te da vrijede pravila apsorpcije.

   Pretpostavimo da 0 i 1 nisu jedinstveni u booleovoj algebri, odnosno da postoje $0_1, 0_2, 1_1, 1_2$. Tada iz svojstva f) vidimo:

$$0_1 + 0_2 = 0_1 \quad 0_2 + 0_1 = 0_2$$

$$1_1 \cdot 1_2 = 1_1 \quad 1_2 \cdot 1_1 = 1_2$$

   Nadalje iz c) je očito:

$$0_1 = 0_2 \quad 1_1 = 1_2$$

   Drugim riječima nule i jedinice su jedinstvene u Booleovoj algebri.

9. Definirati pojam izomorfizma Booleovih algebri.

   Neka su zadane dvije Booleove algebre $(B_1, +, \cdot, \overline{})$ i $(B_2, +, \cdot, \overline{})$. Za funkciju $f : B_1 \to B_2$ kažemo da je izomorfizam Booleovih algebra B_1 i B_2 ako je bijekcija i za sve $a, b \in B_1$ vrijedi:

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

$$f(\overline{a}) = f(a)$$

10. Dokazati da izomorfizam Booleovih algebra čuva zbrajanje, nulu i jedinicu.

   Ako je $f : B_1 \to B_2$ izomorfizam Booleovih algebra, onda vrijedi

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(0_1) = 0_2, \quad f(1_1) = 1_2$$

   Dokaz:

   Preko e) imamo $a + b = \overline{\overline{a+b}} = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$, nadalje preko uvjeta izomorfizma dobijemo

$$f(a+b) = f(\overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}) = \overline{f(\overline{a} \cdot \overline{b})} = \overline{f(\overline{a}) \cdot f(\overline{b})} = \overline{f(\overline{a})} + \overline{f(\overline{b})} = f(\overline{\overline{a}}) + f(\overline{\overline{b}}) = f(a) + f(b)$$

   Također vrijedi

$$f(0_1) = f(0_1 \cdot \overline{0_1}) = f(0_1) \cdot f(\overline{0_1}) = f(0_1) \cdot \overline{f(0_1)} = 0_2$$

$$f(1_1) = f(\overline{0_1}) = \overline{f(0_1) = \overline{0_2} = 1_2}$$