

Zapiski pri predmetu Verjetnost

Hvala ker bereš.

Ljubljana, 2017

Gregor Vavdi

1 Osnovna verjetnost

DEFINICIJA 1.1. *Klasična definicija verjetnosti:*

Naj bo $A \subseteq \Omega$ dogodek, n število ugodnih izidov in N vsi možni izidi. Potem je verjetnost definirana:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

IZREK 1.2. Naj bo Ω prostor izidov verjetnostnega eksperimenta. Dogodki tvorijo družino $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega = P(\Omega)$ z lastnostmi:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F} \quad (\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F})$
3. A_1, A_2, \dots števen nabor dogodkov iz \mathcal{F} . Potem je $\bigcup A \in \mathcal{F}$

TRDITEV 1.3. *Računanje z dogodki:*

- $A \cap A = A \quad A \cup A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Dogodka A in B sta **nezdružljiva**, če je $A \cap B = \emptyset$.

DEFINICIJA 1.4. Verjetnost je preslikava $\mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, ki zadošča lastnosti:

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A^C) = 1 - P(A) \quad (\Rightarrow P(\emptyset) = 0)$
- Naj bodo $(A_i)_{i \geq 1}$ paroma nezdružljivi dogodki $(A_i \cap A_j = \emptyset)_{i \neq j}$.
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

TRDITEV 1.5. *Princip vključevanja in izključevanja:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

TRDITEV 1.6. *Zveznost verjetnosti*

Če je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_k \supseteq \dots$ padajoče zaporedje dogodkov je

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k)$$

TRDITEV 1.7. Če je $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_k \subseteq \dots$ naraščajoče zaporedje dogodkov, velja:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(B_k)$$

2 Pogojna verjetnost

DEFINICIJA 2.1. Naj bo dogodek $A \subseteq \omega$ $P(A) > 0$. Potem je $B \in \mathcal{F}$ definiramo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B)$$

$P(A|B)$ pravimo pogojna verjetnost in jo beremo kot: verjetnost dogodka A pri pogoju B .

2.1 Večfazni ali relejski poskusi

2.2 Formula za popolno verjetnost

DEFINICIJA 2.2. H_1, H_2, H_3, \dots (končno mnogo) naborov dogodkov. \mathcal{F} je **popoln sistem dogodkov**, če velja:

- $H_i \cap H_j = \emptyset \quad i \neq j$
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i) = 1$ (Unija vseh dogodkov je cel prostor)
- $P(H_i) > 0 \quad \forall i$

IZREK 2.3. Formula za popolno verjetnost je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

IZREK 2.4. (Baynsova formula)

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)}$$

IZREK 2.5. Naj bosta dogodka A in $B \in \mathcal{F}$. Dogodka sta **neodvisna**, če velja

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

POSLEDICA 2.6. Naj bosta A in B neodvisna dogodka. Potem so neodvisni tudi naslednji dogodki:

- $\{A^c, B\}$
- $\{A, B^c\}$
- $\{A^c, B^c\}$

POSLEDICA 2.7. $A, B, C \in \mathcal{F}$ neodvisne $\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

V splošnem $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

3 Diskretne slučajne spremenljivke

DEFINICIJA 3.1. Naj bo (Ω, \mathcal{F}, P) verjetnostni prostor in funkcija $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ki lahko zavzema kvečjemu števno mnogo vrednosti w_1, w_2, \dots . Naj bo H_i množica vseh izidov za katere je vrednost funkcije enaka x_i . Povedano drugače: $H_i = \{\omega_i \ ; \ X(\omega) = x_i\}$. X je **slučajna spremenljivka**, če je $H_i \in \mathcal{F} \ \forall i$.

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$
$$p_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

3.1 Binomska porazdelitev

DEFINICIJA 3.2. Verjetnost, da bomo v n poskusih k -krat videli izid p . Oznaka: **$Bin(n, p)$** .

DEFINICIJA 3.3.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

POSLEDICA 3.4.

$$E(X) = n \cdot p$$
$$Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

3.2 Bernulijeva porazdelitev

DEFINICIJA 3.5. Indikator dogodka. **$Be(p)$**

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

POSLEDICA 3.6.

$$E(X) = p$$
$$Var(X) = p \cdot q$$

3.3 Geometrijska porazdelitev

DEFINICIJA 3.7. Število poskusov do prvega uspešnega izvida. **$Geom(p)$** .

DEFINICIJA 3.8.

$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1}$$

POSLEDICA 3.9.

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

OPOMBA 3.10. Geometrijska porazdelitev nima spomina!

3.4 Poissonova porazdelitev

DEFINICIJA 3.11. Število telefonskih klicev, nesreč v določenem času. **Po**(λ).

DEFINICIJA 3.12.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

POSLEDICA 3.13.

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

3.5 Matematično upanje

DEFINICIJA 3.14. Naj bo X slučajna spremenljivka s porazdelitveno shemo:

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

Matematično upanje je:

$$E[X] = \sum_k x_k \cdot p_k$$

pod pogojem, da je $\sum_k |x_k| \cdot p_k < \infty$

IZREK 3.15. Naj bo X, Y slučajni spremenljivki. Tedaj velja:

- $E[X]$ obstaja natanko tedaj, ko obstaja $E[|X|]$. Pri tem velja $|E[X]| \leq E[|X|]$.
- $E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$
- $0 \leq X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$
- Če obstaja $E[X]$ in $E[Y]$, takrat velja: $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

3.6 Pogojno matematično upanje in pogojna porazdelitev

DEFINICIJA 3.16. Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka in $A \in \mathcal{F}$, za katero velja $P(A) > 0$. **Pogojna porazdelitev X pri pogoju A :**

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ p_1 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

$$\text{Pri čemer je } p_k = \frac{P(X_k = x_k \cap A)}{P(A)}$$

DEFINICIJA 3.17. **Pogojno matematično upanje:**

$$E[X|A] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i|A) = \sum_i x_i \cdot \frac{P(\{X_k = x_k\} \cap A)}{P(A)} = \frac{E[X \cdot \mathcal{U}_A]}{P(A)}$$

DEFINICIJA 3.18. (**Formula za popolno matematično upanje**)

Naj bodo A_1, A_2, \dots paroma tuji dogodki in $P(\bigcup_{i=1} A_i) = 1$. Potem za vsako slučajno spremenljivko X velja

$$E[X] = \sum_i E[X|A_i] \cdot P(A_i)$$

4 Slučajni vektorji

DEFINICIJA 4.1. *slučajni vektor je n -terica slučajnih spremenljivk: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$*

$$\vec{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Porazdelitev posamične koordinate rečemo **robna porazdelitev**.

DEFINICIJA 4.2. *Slučajne spremenljivke X_1, X_2, \dots, X_n so neodvisne, če velja:*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n)$$

POSLEDICA 4.3. *Naslednje trditve so posledica zgornje definicije:*

- $\forall A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in A_n)$

OPOMBA 4.4.

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

- Če so X_1, \dots, X_n neodvisni, potem so za $\forall \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$, tudi $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}$ neodvisni.
- Če so X_1, \dots, X_n neodvisne, so za vsak $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ dogodki $\{X_1 \in A_1\} \dots \{X_n \in A_n\}$ neodvisni.
- Dogodki $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ so neodvisni natanko tedaj, ko so slučajne spremenljivke $\mathcal{U}_{B_1}, \dots, \mathcal{U}_{B_n}$ neodvisne.
- Če so X_1, \dots, X_n neodvisne in $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so tudi $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ neodvisne.
- Denimo, da sta X in Y neodvisna. Potem velja:

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$$

5 Splošne slučajne spremenljivke

DEFINICIJA 5.1. *Naj bo verjetnostni prostor definiran kot: (Ω, \mathcal{F}, P) . Nadalje naj bo $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Zahteva, da je X slučajna spremenljivka : $\{X \leq x\} = \{\omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$. Potem je*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

*dobro definirana funkcija $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in jo imenujemo **porazdelitvena funkcija**.*

TRDITEV 5.2. *Lastnosti porazdelitvene funkcije:*

- $F_X(x) \in [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\} \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$
- $\lim_{t \downarrow x} F_X(t) = F_x(x) \quad (\text{zvezna iz desne}).$
- $F_X(x-) = \lim_{t \uparrow x} F_X(t) \leq F_X(x) \quad (\text{ker je } F_X(x) \text{ nepadajoča ima } X \text{ v vsaki točki } x \text{ tudi levo limito}).$
- Če velja $F_X(x-) = F_X(x)$, potem je $F_X(x)$ zvezna v točki $x \in \mathbb{R}$, sicer pa ima skok v točki $x \in \mathbb{R}$.
- Točk, kjer je porazdelitvena funkcija nezvezna (ima skok) je kvečjemu števno mnogo.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

DEFINICIJA 5.3. *Slučajna spremenljivka X ima **gostoto** $p_X(x)$, če velja:*

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Takim spremenljivkam pravimo absolutno zvezne slučajne spremenljivke.

TRDITEV 5.4. *Če obstaja gostota, potem velja:*

$$(F_X(x))' = \left(\int_{-\infty}^x p_X(t) dt \right)' = p_X(x)$$

TRDITEV 5.5. *(Lastnosti gostote)*

- $p_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(t) dt = 1$

5.1 Enakomerno zvezna na $[a, b]$

DEFINICIJA 5.6. *Naj bo X enakomerno vzvena slučajna spremenljivka. $X \sim EZ[a, b]$. Potem je gostota enaka:*

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} : a \leq x \leq b \\ 0 : \text{ sicer} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5.2 Eksponentna porazdelitev

DEFINICIJA 5.7. Naj bo X eksponentna slučajna spremenljivka ($X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad \lambda > 0$). Definirana je kot čas čakanja na dogodek. Njena porazdelitvena funkcija je:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} : x > 0 \\ 0 : \text{ sicer} \end{cases}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} : x > 0 \\ 0 : \text{ sicer} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

OPOMBA 5.8. Eksponentna porazdelitev je brez spomina!

5.3 Standardna normalna porazdelitev ali Gaussova porazdelitev

DEFINICIJA 5.9. Naj bo X standardno normalna slučajna spremenljivka $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Njena gostota je enaka:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$E[X] = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \sigma$$

5.4 Porazdelitev slučajnih spremenljivk

DEFINICIJA 5.10. Naj bo $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ slučajni vektor.

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(x, y) dy dx$$

DEFINICIJA 5.11.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dy dx = 1$$

TRDITEV 5.12. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, če velja:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

TRDITEV 5.13. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki. Nadalje naj velja $Z = X + Y$. Gostota slučajne spremenljivke Z je:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{z-x} p_{X,Y}(x, y) dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x) dx$$

5.5 Matematično upanje zveznih slučajnih spremenljivk

DEFINICIJA 5.14. Če ima slučajna spremenljivka X gostoto $p_X(x)$ je

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx$$

pod pogojem da $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_X(x) dx < \infty$.

IZREK 5.15. Naj bo X slučajna spremenljivka in $p_X(x)$ gostota. Nadalje naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, razen morda v končno mnogo točkah. Iz tega sledi, da je $f(X)$ slučajna spremenljivka, njeno matematično upanje je:

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x) dx$$

pod pogojem da integral absolutno konvergira.

5.6 Pogojna porazdelitvena funkcija

DEFINICIJA 5.16. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka in naj bo A dogodek iz \mathcal{F} . Pogojna porazdelitvena funkcija je definirana kot:

$$F_{X|A}(x) = P(X \leq x|A) = \frac{P(X \leq x, A)}{P(A)}$$

DEFINICIJA 5.17. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka in naj bo A dogodek iz \mathcal{F} . Potem obstaja pogojna gostota definiran kot odvod pogojne porazdelitvene funkcije $F_{X|A}$

DEFINICIJA 5.18. Če sta X in Y slučajni spremenljivki na (Ω, \mathcal{F}, P) , potem obstaja pogojna porazdelitev X glede na Y ($P(X \leq x|Y \leq y)$) za skoraj vsak $y \in \mathbb{R}$. Pogojno gostota je tako:

$$p_{X|Y}(x, y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

pri čemer je

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dy$$

5.7 Mediana

DEFINICIJA 5.19. Naj bo X slučajna spremenljivka in $a \in \mathbb{R}$. Število a je **mediana**, če velja:

$$P(X \leq a) = \frac{1}{2}$$

5.8 Varianca

DEFINICIJA 5.20. *Varianca ali disprezija je mera, kako slučajna spremenljivka oscilira okrog svoje pričakovane vrednosti.*

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

DEFINICIJA 5.21. *(Standardni odklon):*

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

TRDITEV 5.22. *Naj bo X slučajna spremenljivka in naj $\text{Var}(X)$ obstaja. Potem sledi:*

- $\text{Var}(X) \geq 0$ in $\text{Var}(X) = 0 \iff x = \text{konst.}$
- $\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$

5.9 Kovarianca

DEFINICIJA 5.23. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki na (Ω, \mathcal{F}, P) . Nadalje naj obstaja $E[X], E[Y]$, ter $E[XY]$. **Kovarianca** je:*

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

TRDITEV 5.24. *Naj bojo X, Y, Z slučajne spremenljivke na (Ω, \mathcal{F}, P) . Nadlajše naj velja, da sta števili a in $b \in \mathbb{R}$. Potem velja:*

- $\text{Cov}(a \cdot X + b \cdot Y, Z) = a \cdot \text{Cov}(X, Z) + b \cdot \text{Cov}(Y, Z)$
- $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$

IZREK 5.25. *Naj bosta X in Y neodvisni (z drugim momentom). Takrat velja:*

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 0$$

POSLEDICA 5.26. *Naj bosta X in Y neodvisni. Takrat velja:*

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

DEFINICIJA 5.27. *(Korelacijski koeficient)*

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

za $\sigma(X) \cdot \sigma(Y) \neq 0$

6 Konvergenca slučajnih spremenljivk v porazdelitvi

DEFINICIJA 6.1. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ zaporedje slučajnih spremenljivk in naj X_n konvergira proti X , če velja

$$P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X \leq x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

za katerega je $F_X(x)$ zvezna funkcija.

Ekvivalentno:

$$E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$$

POSLEDICA 6.2. Če je $n \gg 0$ in $p \ll 1$, potem je $\text{Bin}(n, p) \approx \text{Pois}(n \cdot p)$

POSLEDICA 6.3. (Poseben primer centralno limitnega izreka) - Laplacova aproksimacija za fiksno p

$$\frac{\text{Bin}(n, p) - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$$

POSLEDICA 6.4. (Laplacova aproksimacija)

Za $n \gg 0$:

$$\text{Bin}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, np(1 - p))$$