# Zapiski pri predmetu Verjetnost

Hvala ker bereš.

Ljubljana, 2017 Gregor Vavdi

# 1 Osnovna verjetnost

IZREK 1.1. *Naj bo $\Omega$ prostor izidov verjetnostnega eksperimenta. Dogodki tvorijo družino $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega} = P(\Omega)$ z lastnostmi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F} \quad (\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F})$
3. $A_1, A_2, \ldots$ *števen nabor dogodkov iz* $\mathcal{F}$*. Potem je* $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$

TRDITEV 1.2. *Računanje z dogodki:*

- $A \cap A = A \quad A \cup A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

*Dogodka $A$ in $B$ sta **nezdružljiva**, če je $A \cap B = \emptyset$.*

DEFINICIJA 1.3. *Klasična definicija verjetnosti:*
*Naj bo $A \subseteq \Omega$ dogodek, $n$ število ugodnih izidov in $N$ vsi možni izidi. Potem je verjetnost definirana:*

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

DEFINICIJA 1.4. *Verjetnost je preslikava $\mathcal{F} \to [0,1]$, ki zadošča lastnosti:*

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A^C) = 1 - P(A) \quad (\Rightarrow P(\emptyset) = 0)$
- *Naj bodo $(A_i)_{i \geq 1}$ paroma nezdružljivi dogodki. Potem velja: $(A_i \cap A_j = \emptyset)_{i \neq j}$.*
- $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

TRDITEV 1.5. *Princip vključevanja in izključevanja:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

TRDITEV 1.6. *Zveznost verjetnosti*
*Če je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq \ldots$ padajoče zaporedje dogodkov je*

$$P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} P(A_k)$$

Trditev 1.7. *Če je $B_1 \subseteq B2 \subseteq ... \subseteq B_k \subseteq \dots$ naraščajoče zaporedje dogodkov, velja:*

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \lim_{k \to \infty} P(B_k)$$

# 2 Pogojna verjetnost

Definicija 2.1. *Naj bo dogodek $A \subseteq \omega \quad P(A) > 0$. Potem je za $B \in \mathcal{F}$ definirano*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B)$$

*$P(A|B)$ pravimo pogojna verjetnost in jo beremo kot: verjetnost dogodka $A$ pri pogoju $B$.*

## 2.1 Večfazni ali relejski poskusi

## 2.2 Formula za popolno verjetnost

Definicija 2.2. *$H_1, H_2, H_3, ...$ (končno mnogo) naborov dogodkov. $\mathcal{F}$ **je popoln sistem dogodkov**, če velja:*

- $H_i \cap H_j = \emptyset \quad i \neq j$
- $P(\bigcup_{i=1} H_i) = \Omega$ *(Unija vseh dogodkov je cel prostor)*
- $P(H_i) > 0 \quad \forall i$

Izrek 2.3. *Formula za popolno verjetnost je*

$$P(A) = \sum_{i=1} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

Izrek 2.4. *(Bayesova formula)*

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)}$$

Izrek 2.5. *Naj bosta dogodka $A$ in $B \in \mathcal{F}$. Dogodka sta **neodvisna**, če velja*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Posledica 2.6. *Naj bosta $A$ in $B$ neodvisna dogodka. Potem so neodvisni tudi naslednji dogodki:*

- $\{A^c, B\}$
- $\{A, B^c\}$
- $\{A^c, B^c\}$

Posledica 2.7. *$A, B, C \in \mathcal{F}$ neodvisne $\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$*
*V splošnem $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot ... \cdot P(A_{i_k})$*

# 3 Diskretne slučajne spremenljivke

DEFINICIJA 3.1. *Naj bo* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *verjetnostni prostor in funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *ki lahko zavzema kvečejmu števno mnogo vrednosti* $w_1, w_2, \ldots$. *Naj bo* $H_i$ *množica vseh izidov za katere je vrednost funkcije enaka* $x_i$. *Povedano drugače:* $H_i = \{\omega_i \quad ; \quad X(\omega) = x_i\}$. $X$ ***je slučajna spremenljivka***, *če je* $H_i \in F \quad \forall i$.

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$p_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

## 3.1 Binomska porazdelitev

DEFINICIJA 3.2. *Verjetnost, da bomo v n poskusih k-krat videli izzid p.*
*Oznaka:* ***Bin(n,p)***.

DEFINICIJA 3.3.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

POSLEDICA 3.4.

$$E(X) = n \cdot p$$
$$Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

## 3.2 Bernulijeva porazdelitev

DEFINICIJA 3.5. *Indikator dogodka.* ***Be(p)***

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

POSLEDICA 3.6.

$$E(X) = p$$
$$Var(X) = p \cdot q$$

## 3.3 Geometrijska porazdelitev

DEFINICIJA 3.7. *Število poskusov do prvega uspešnega izzida.* ***Geom(p)***.

DEFINICIJA 3.8.

$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1}$$

POSLEDICA 3.9.

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

OPOMBA 3.10. *Geometrijska porazdelitev nima spomina!*

### 3.4 Poissonova porazdelitev

Definicija 3.11. *Število telefonskih klicev, nesreč v določenem času.* ***Po($\lambda$).***

Definicija 3.12.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Posledica 3.13.

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

### 3.5 Matematično upanje

Definicija 3.14. *Naj bo $X$ slučajna spremenljivka s porazdelitveno shemo:*

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

***Matematično upanje*** *je:*

$$E[X] = \sum_k x_k \cdot p_k$$

*pod pogojem, da je* $\sum_k |x_k| \cdot p_k < \infty$

Izrek 3.15. *Naj bo $X, Y$ slučajni spremenljivki. Tedaj velja:*

- *$E[X]$ obstaja natanko tedaj, ko obstaja $E[|X|]$. Pri tem velja $|E[X]| \leq E[|X|]$.*
- $E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$
- $0 \leq X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$
- *Če obstaja $E[X]$ in $E[Y]$, takrat velja: $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$*

### 3.6 Pogojno matematično upanje in pogojna porazdelitev

Definicija 3.16. *Naj bo $X$ diskretna slučajna spremenljivka in $A \in \mathcal{F}$, za katero velja $P(A) > 0$.* ***Pogojna porazdelitev $X$ pri pogoju $A$****:*

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ p_1 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

$$\text{Pri čemer je} \quad p_k = \frac{P(X_k = x_k \cap A)}{P(A)}$$

Definicija 3.17. *Pogojno matematično upanje:*

$$E[X|A] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i|A) = \sum_i x_i \cdot \frac{P(\{X_k = x_k\} \cap A)}{P(A)} = \frac{E[X \cdot \mathcal{U}_A]}{P(A)}$$

Definicija 3.18. ***(Formula za popolno matematično upanje)***
*Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ paroma tuji dogodki in $P(\bigcup_{i=1} A_i) = 1$. Potem za vsako slučajno spremenljivko $X$ velja*

$$E[X] = \sum_i E[X|A_i] \cdot P(A_i)$$

# 4 Slučajni vektorji

Definicija 4.1. *Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljvik: $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$*

$$\vec{x} : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

*Porazdelitev posamične koordinate rečemo **robna porazdelitev**.*

Definicija 4.2. *Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ so neodvisne, če velja:*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$$

Posledica 4.3. *Naslednje trditve so posledica zgornje definicije:*

- $\forall A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in A_n)$

  Opomba 4.4.
  $$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

- *Če so $X_1, \ldots, X_n$ neodvisni, potem so za $\forall \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n$, tudi $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ neodvisni.*

- *Če so $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne, so za vsak $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ dogodki $\{X_1 \in A_1\} \ldots \{X_n \in A_n\}$ neodvisni.*

- *Dogodki $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ so neodvisni natanko tedaj, ko so slučajne spremenljivke $\mathcal{U}_{B_1}, \ldots, \mathcal{U}_{B_n}$ neodvisne.*

- *Če so $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne in $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so tudi $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ neodvisne.*

- *Denimo, da sta $X$ in $Y$ neodvisna. Potem velja:*

  $$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$$

# 5 Splošne slučajne spremenljivke

Definicija 5.1. *Naj bo verjetnostni prostor definiran kot: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nadalje naj bo $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Zahteva, da je $X$ slučajna spremenljivka : $\{X \leq x\} = \{\omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$. Potem je*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

*dobro definirana funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in jo imenujemo **porazdelitvena funkcija**.*

TRDITEV 5.2. *Lastnosti porazdelitvene funkcije:*

- $F_X(x) \in [0,1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\} \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y) \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$
- $\lim_{t \downarrow x} F_X(t) = F_x(x)$ *(zvezna iz desne).*
- $F_X(x-) = \lim_{t \uparrow x} F_X(t) \leq F_X(x)$ *(ker je $F_X(x)$ nepadajoča ima $X$ v vsaki točki $x$ tudi levo limito).*
- *Če velja $F_X(x-) = F_X(x)$, potem je $F_X(x)$ zvezna v točki $x \in \mathbb{R}$, sicer pa ima skok v točki $x \in \mathbb{R}$.*
- *Točk, kjer je porazdelitvena funkcija nezvezna (ima skok) je kvečejmu števno mnogo.*
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

DEFINICIJA 5.3. *Slučajna spremneljivka $X$ ima* ***gostoto*** $\mathbf{p_X(x)}$, *če velja:*

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)dt$$

*za vsak $x \in \mathbb{R}$.*
*Takim spremenljivkam pravimo absolutno zvezne slučajne spremneljivke.*

TRDITEV 5.4. *Če obstaja gostota, potem velja:*

$$(F_X(x))' = \left(\int_{-\infty}^{x} p_X(t)dt\right)' = p_X(x)$$

TRDITEV 5.5. *(Lastnosti gostote)*

- $p_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(t)dt = 1$

## 5.1 Enakomerno zvezna na [a,b]

DEFINICIJA 5.6. *Naj bo $X$ enakomerno zvzena slučajna spremneljivka. $X \sim EZ[a,b]$. Potem je gostota enaka:*

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} : a \leq x \leq b \\ 0 : \quad \text{sicer} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## 5.2 Eksponentna porazdelitev

Definicija 5.7. *Naj bo X eksponentna slučajna spremeneljivka ($X \sim Exp(\lambda) \quad \lambda > 0$). Definirana je kot čas čakanja na dogodek. Njena porazdelitvena funkcija je:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} : x > 0 \\ 0 : \quad \text{sicer} \end{cases}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} : x > 0 \\ 0 : \quad \text{sicer} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Opomba 5.8. *Eksponentna porazdelitev je brez spomina!*

## 5.3 Standardna normalna porazdelitev ali Gaussova porazdelitev

Definicija 5.9. *Naj bo X standardno normalna slučajna spremneljivka $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Njena gostota je enaka:*

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2$$

$$E[X] = \mu$$

$$Var(X) = \sigma$$

## 5.4 Porazdelitev slučajnih spremenljivk

Definicija 5.10. *Naj bo $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ slučajni vektor.*

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(x, y) dy dx$$

Definicija 5.11.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dy dx = 1$$

Trditev 5.12. *Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, če velja:*

$$P(X \le x, Y \le y) = F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Trditev 5.13. *Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki. Nadalje naj velja $Z = X + Y$. Gostota slučajne spremenljivke Z je:*

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \int_{-\infty}^{z-x} p_{X,Y}(x, y) dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z - x) dx$$

## 5.5 Matematično upanje zveznih slučajnih spremenljivk

Definicija 5.14. *Če ima slučajna spremenljivka $X$ gostoto $p_X(x)$ je*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)dx$$

*pod pogojem da $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_X(x)dx < \infty$.*

Izrek 5.15. *Naj bo $X$ slučajna spremenljivka in $p_X(x)$ gostota. Nadalje naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna, razen morda v končno mnogo točkah. Iz tega sledi, da je $f(X)$ slučajna spremenljivka, njeno matematično upanje je:*

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x)dx$$

*pod pogojem da integral absolutno konvergira.*

## 5.6 Pogojna porazdelitvena funkcija

Definicija 5.16. *Naj bo $X$ zvezna slučajna spremenljivka in naj bo $A$ dogodek iz $\mathcal{F}$. Pogojna porazdelitvena funckija je definirana kot:*

$$F_{X|A}(x) = P(X \leq x|A) = \frac{P(X \leq x, A)}{P(A)}$$

Definicija 5.17. *Naj bo $X$ zvezna slučajna spremenljivka in naj bo $A$ dogodek iz $\mathcal{F}$. Potem obstaja pogojna gostota definirana kot odvod pogojne porazdelitvene funkcije $F_{X|A}$*

Definicija 5.18. *Če sta $X$ in $Y$ slučajni spremenljivki na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, potem obstaja pogojna porazdelitev $X$ glede na $Y$ ( $P(X \leq x|Y \leq y)$ ) za skoraj vsak $y \in \mathbb{R}$. Pogojno gostota je tako:*

$$p_{X|Y}(x, y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}$$

*pri čemer je*

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)dx$$

## 5.7 Mediana

Definicija 5.19. *Naj bo $X$ slučajna spremenljvka in $a \in \mathbb{R}$. Število $a$ je* ***mediana****, če velja:*

$$P(X \leq a) = \frac{1}{2}$$

## 5.8 Varianca

DEFINICIJA 5.20. *Varianca ali disprezija je mera, kako slučajna spremenljivka oscilira okrog svoje pričakovane vrednosti.*

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

DEFINICIJA 5.21. *(Standardni odklon):*

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

TRDITEV 5.22. *Naj bo $X$ slučajna spremenljivka in naj $Var(X)$ obstaja. Potem sledi:*

- $Var(X) \geq 0$ *in* $Var(X) = 0 \iff x = konst.$
- $Var(X + b) = Var(X)$
- $Var(a \cdot X) = a^2 \cdot Var(X)$

## 5.9 Kovarianca

DEFINICIJA 5.23. *Naj bosta $X$ in $Y$ slučajni spremenljivki na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nadalje naj obstaja $E[X], E[Y]$, ter $E[XY]$.* ***Kovarianca*** *je:*

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

TRDITEV 5.24. *Naj bojo X,Y,Z slučajne spremenljivke na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nadalje naj velja, da sta števili $a$ in $b \in \mathbb{R}$. Potem velja:*

- $Cov(a \cdot X + b \cdot Y, Z) = a \cdot Cov(X, Z) + b \cdot Cov(Y, Z)$
- $|Cov(X, Y)| \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$
- $Cov(X, X) = Var(X)$

IZREK 5.25. *Naj bosta $X$ in $Y$ neodvisni (z drugim momentom). Takrat velja:*

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 0$$

POSLEDICA 5.26. *Naj bosta $X$ in $Y$ neodvisni. Takrat velja:*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

DEFINICIJA 5.27. *(Korelacijski koeficient)*

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

*za* $\sigma(X) \cdot \sigma(Y) \neq 0.$

# 6 Konvergenca slučajnih spremenljivk v porazdelitvi

Definicija 6.1. *$\{X_n\}_{n\geq 0}$ zaporedje slučajnih spremenljivk in naj $X_n$ konvergira proti $X$, če velja*

$$P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X \leq x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*za katerega je $F_X(x)$ zvezna funkcija.*
*Ekvivalentno:*

$$E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(X)]$$

Posledica 6.2. *Če je $n >> 0$ in $p << 1$, potem je $Bin(n,p) \approx Pois(n \cdot p)$*

Posledica 6.3. *(Poseben primer centralno limitnega izreka) - Laplacova aproksimacija za fiksen $p$*

$$\frac{Bin(n,p) - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(0,1)$$

Posledica 6.4. *(Laplacova aproksimacija)*
*Za $n >> 0$ :*

$$Bin(n,p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$$