Zapiski pri predmetu Verjetnost

Zahvala.

Ljubljana, 2016 Gregor Vavdi

1 Osnovna verjetnost

Definicija 1.1. *Klasična definicija verjstnosti:*
Naj bo $A \subseteq \omega$ dogodek, n število ugodnih izidov in N vsi možni izidi. Potem je verjetnost definirana:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Definicija 1.2. *Verjetnost je preslikava $\mathcal{F} \to [0,1]$, ki zadošča lastnosti:*

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A^C) = 1 - P(A) \quad (\Rightarrow P(\emptyset) = 0)$
- *Naj bodo $(A_i)_{i\geq 1}$ paroma nezdružljivi dogodki $(A_i \cap A_j = 0)_{i\neq j}$.*
- $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Izrek 1.3. *Naj bo Ω prostor izidov verjetnostnega eksperimenta. Dogodki tvorijo družino $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega} = P(\Omega)$ z lastnostmi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F} \quad (\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F})$
3. $A_1, A_2, \dots$ *števen nabor dogodkov iz $\mathcal{F}$. Potem je $\bigcup A \in \mathcal{F}$*

Trditev 1.4. *Računanje z dogodki:*

- $A \cap A = A \quad A \cup A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Dogodka A in B sta ***nezdružljiva****, če je $A \cap B = \emptyset$.*

Trditev 1.5. *Princip vključevanja in izključevanja:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Trditev 1.6. *Zveznost verjetnosti*
Če je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_k \supseteq \dots$ padajoče zaporedje dogodkov je

$$P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} P(A_k)$$

TRDITEV 1.7. *Če je $B_1 \subseteq B2 \subseteq ... \subseteq B_k \subseteq \dots$ naraščajoče zaporedje dogodkov, velja:*

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \lim_{k\to\infty} P(B_k)$$

2 Pogojna verjetnost

DEFINICIJA 2.1. *Naj bo dogodek $A \subseteq \omega \quad P(A) > 0$. Potem je $B \in \mathcal{F}$ definiramo*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B)$$

$P(A|B)$ pravimo pogojna verjetnost in jo beremo kot: verjetnost dogodka A pri pogoju B.

2.1 Večfazni ali relejski poskusi

2.2 Formula za popolno verjetnost

DEFINICIJA 2.2. *$H_1, H_2, H_3, ...$ (končno mnogo) naborov dogodkov. $\mathcal{F}$* ***je popoln sistem dogodkov****, če velja:*

- $H_i \cap H_j = \emptyset \quad i \neq j$
- $P(\bigcup_{i=1} H_i) = \Omega$ *(Unija vseh dogodkov je cel prostor)*
- $P(H_i) > 0 \quad \forall i$

IZREK 2.3. *Formula za popolno verjetnost je*

$$P(A) = \sum_{i=1} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

IZREK 2.4. *(Baynsova formula)*

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)}$$

IZREK 2.5. *Naj bosta dogodka A in $B \in \mathcal{F}$. Dogodka sta* ***neodvisna****, če velja*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

POSLEDICA 2.6. *Naj bosta A in B neodvisna dogodka. Potem so neodvisni tudi naslednji dogodki:*

- $\{A^c, B\}$
- $\{A, B^c\}$
- $\{A^c, B^c\}$

POSLEDICA 2.7. *$A, B, C \in \mathcal{F}$ neodvisne $\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$*
V splošnem $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot ... \cdot P(A_{i_k})$

3 Diskretne slučajne spremenljivke

DEFINICIJA 3.1. *Naj bo* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *verjetnostni prostor in funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*, ki lahko zavzema kvečejmu števno mnogo vrednosti* $w_1, w_2, \ldots$. *Naj bo* H_i *množica vseh izidov za katere je vrednost funkcije enaka* x_i. *Povedano drugače:* $H_i = \{\omega_i \quad ; \quad X(\omega) = x_i\}$. X ***je slučajna spremenljivka****, če je* $H_i \in F \quad \forall i$.

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$p_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

3.1 Binomska porazdelitev

DEFINICIJA 3.2. *Verjetnost, da bomo v n poskusih k-krat videli izzid p.*
Oznaka: ***Bin(n,p)****.*

DEFINICIJA 3.3.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

POSLEDICA 3.4.

$$E(X) = n \cdot p$$
$$Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

3.2 Bernulijeva porazdelitev

DEFINICIJA 3.5. *Indikator dogodka.* ***Be(p)***

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

POSLEDICA 3.6.

$$E(X) = p$$
$$Var(X) = p \cdot q$$

3.3 Geometrijska porazdelitev

DEFINICIJA 3.7. *Število poskusov do prvega uspešnega izzida.* ***Geom(p)****.*

DEFINICIJA 3.8.

$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1}$$

POSLEDICA 3.9.

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

OPOMBA 3.10. *Geometrijska porazdelitev nima spomina!*

3.4 Poissonova porazdelitev

DEFINICIJA 3.11. *Število telefonskih klicev, nesreč v določenem času.* ***Po(λ).***

DEFINICIJA 3.12.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

POSLEDICA 3.13.

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

3.5 Matematično upanje

DEFINICIJA 3.14. *Naj bo X slučajna spremneljivka s porazdelitveno shemo:*

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

Matematično upanje *je:*

$$E[X] = \sum_k x_k \cdot p_k$$

pod pogojem, da je $\sum_k |x_k| \cdot p_k < \infty$

IZREK 3.15. *Naj bo X, Y slučajni spremenljivki. Tedaj velja:*

- *$E[X]$ obstaja natanko tedaj, ko obstaja $E[|X|]$. Pri tem velja $|E[X]| \leq E[|X|]$.*
- $E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$
- $0 \leq X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$
- *Če obstaja $E[X]$ in $E[Y]$, takrat velja: $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$*

3.6 Pogojno matematično upanje in pogojna porazdelitev

DEFINICIJA 3.16. *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka in $A \in \mathcal{F}$, za katero velja $P(A) > 0$.* ***Pogojna porazdelitev*** *X* ***pri pogoju A****:*

$$\frac{X}{p} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ p_1 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

$$\text{Pri čemer je} \quad p_k = \frac{P(X_k = x_k \cap A)}{P(A)}$$

DEFINICIJA 3.17. *Pogojno matematično upanje:*

$$E[X|A] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i|A) = \sum_i x_i \cdot \frac{P(\{X_k = x_k\} \cap A)}{P(A)} = \frac{E[X \cdot \mathcal{U}_A]}{P(A)}$$

Definicija 3.18. *(Formula za popolno matematično upanje) Naj bodo* $A_1, A_2, \ldots$ *paroma tuji dogodki in* $P(\bigcup_{i=1} A_i) = 1$. *Potem za vsako slučajno spremenljivko* X *velja*

$$E[X] = \sum_i E[X|A_i] \cdot P(A_i)$$

4 Slučajni vektorji

Definicija 4.1. *slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljvik:* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\vec{\boldsymbol{x}} : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

*Porazdelitev posamične koordinate rečemo **robna porazdelitev**.*

Definicija 4.2. *Naj bo* X *slučajni vektor s koordiantami* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Slučajne spremenljivke* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *so neodvisne, če velja:*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$$

Posledica 4.3. *Naslednje trditve so posledica zgornje definicije:*

- $\forall A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in A_n)$

  Opomba 4.4.
  $$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

- *Če so* $X_1, \ldots, X_n$ *neodvisni, potem so za* $\forall \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n$, *tudi* $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ *neodvisni.*

- *Če so* $X_1, \ldots, X_n$ *neodvisne, so za vsak* $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ *dogodki* $\{X_1 \in A_1\} \ldots \{X_n \in A_n\}$ *neodvisni.*

- *Dogodki* $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ *so neodvisni natanko tedaj, ko so slučajne spremenljivke* $\mathcal{U}_{B_1}, \ldots, \mathcal{U}_{B_n}$ *neodvisne.*

- *Če so* $X_1, \ldots, X_n$ *neodvisne in* $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *so tudi* $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ *neodvisne.*

- *Denimo, da sta* X *in* Y *neodvisna. Potem velja:*

  $$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$$