Глава 2. Двойной математический маятник на вибрирующем по вертикали основании

Е. И. Кугушев

Т. В. Попова

Содержание

2.1. Цель практической работы

Целью данной работы является знакомство студентов с теоремами метода усреднения Крылова — Боголюбова, показать возможность стабилизации неустойчивого положения равновесия системы на вибрирующем основании.

2.2. Теоретическая часть работы

2.2.1. Метод усреднения Крылова — Боголюбова

Следуя [2], сформулируем некоторые теоремы метода усреднения. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + O(\varepsilon^2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

с правой частью, гладкой по всем переменным $\mathbf{x}$, t, ε и периодической по t с периодом s, не зависящим от ε. Будем считать, что параметр ε мал, поэтому $\mathbf{x}$ — медленные переменные. Если перейти к медленному времени $\tau = \varepsilon t$, то система (1) примет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{v}\left(\mathbf{x}, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \tag{1$'$}$$

Теорема 1. Найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует обратимая замена переменных $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$, близкая к тождественной,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{y}, t),$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ — гладкая по переменным $\mathbf{y}$, t и периодическая по t с периодом s функция, в результате которой система (1) принимает вид (2)

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon \overline{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon^2), \tag{2}$$

где черта над функцией означает среднее значение функции по переменной t за период

$$\overline{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{s} \int\limits_0^s \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)\, dt.$$

В медленном времени после замены переменных $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ система $(1')$ принимает вид $(2')$

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \overline{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon). \; (2')$$

Рассмотрим усреднённую систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \overline{\mathbf{v}}(\mathbf{y}). \tag{3}$$

Теорема 2. Пусть $\mathbf{y}(\tau)$ — решение системы (3) с начальным условием $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0$ на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant a$. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $c > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ решение $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ системы (1) с начальным условием $\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{x}_0$ существует на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \frac{a}{\varepsilon}$ и

$$\|\mathbf{x}(t, \varepsilon) - \mathbf{y}(\varepsilon t)\| < c\varepsilon$$

при $0 \leqslant t \leqslant \frac{a}{\varepsilon}$.

В медленном времени решение $\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)$ системы $(1')$ с начальным условием $\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{x}_0$ существует на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant a$ и

$$\|\mathbf{x}(\tau, \varepsilon) - \mathbf{y}(\tau)\| < c\varepsilon$$

при $0 \leqslant \tau \leqslant a$.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0$ — невырожденная особая точка усреднённой системы (3), то есть $\overline{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = 0$ и матрица $M = \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{y}}\right)\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}_0}$ невырождена. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ система (1) имеет невырожденное s-периодическое решение $\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{x}_0 + O(\varepsilon)$. Более того, если все собственные значения матрицы M имеют отрицательные вещественные части (решение $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}_0$ системы (3) асимптотически устойчиво), то это периодическое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Более подробно с методом усреднения, с доказательствами теорем и примерами, можно ознакомиться в [1—6].

2.2.2. Системы на вибрирующем основании

Рассмотрим систему N материальных точек на вибрирующем (быстро колеблющемся) основании. Основание движется поступательно вдоль неподвижной прямой и его положение относительно неподвижной системы координат задано радиус-вектором $\mathbf{w}(\nu t)$ некоторой точки O основания. Будем считать, что функция $\mathbf{w}(\tau)$ периодическая с периодом 2π, дважды непрерывно дифференцируемая и её норма имеет порядок $\frac{1}{\nu}$ при $\nu \to +\infty$, а среднее значение функции $\dot{\mathbf{w}}(\tau)$ за период равно нулю (например, $\mathbf{w}(\nu t) = \frac{a}{\nu}\cos(\nu t)\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — единичный направляющий вектор прямой). Пусть на систему наложены идеальные, голономные связи, и в отсутствие колебаний основания связи стационарны. На точки системы действуют консервативные силы, причем потенциальная энергия V системы на неподвижном основании и системы на вибрирующем основании одна и та же с точностью до калибровочного слагаемого. Исследуем поведение системы при стремлении частоты ν вибраций к бесконечности.

На систему наложены идеальные голономные связи, поэтому движение системы можно описать уравнениями Лагранжа второго рода. Обозначим через $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ радиус-векторы точек системы относительно точки O основания. Кинетическая энергия системы в неподвижной системе координат равна

$$T_{\text{абс}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{w}})^2 = T + m(\dot{\mathbf{r}}_S, \dot{\mathbf{w}}) + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{w}}^2.$$

Здесь $\mathbf{r}_S$ — радиус-вектор центра масс S системы относительно точки O основания; $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ — суммарная масса системы; $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2$ — кинетическая энергия системы в подвижной системе координат, связанной с основанием.

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — обобщённые координаты и $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q})$, $i = 1, \dots, N$. Тогда

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2}(A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \dot{\mathbf{r}}_S = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial q_j}\dot{q}_j.$$

С точностью до калибровочного слагаемого функция Лагранжа системы имеет вид

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) + m(\dot{\mathbf{r}}_S, \dot{\mathbf{w}}),$$

а уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} + m\frac{\partial(\mathbf{r}_S, \ddot{\mathbf{w}})}{\partial \mathbf{q}} = 0.$$

Таким образом, наличие вибраций приводит к появлению в уравнениях движения дополнительных слагаемых, зависящих от $\ddot{\mathbf{w}}$, причём норма $\ddot{\mathbf{w}}$ имеет порядок ν при $\nu \to +\infty$.

Перейдём к гамильтоновой форме уравнений движения. Введём обобщённые импульсы

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + m\frac{\partial(\dot{\mathbf{r}}_S, \dot{\mathbf{w}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A\dot{\mathbf{q}} + m\frac{\partial(\mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}})}{\partial \mathbf{q}}.$$

Отсюда

$$\dot{\mathbf{q}} = A^{-1}\left(\mathbf{p} - m\frac{\partial(\mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}})}{\partial\mathbf{q}}\right). \tag{4}$$

Тогда функция Гамильтона системы имеет вид

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \underbrace{\frac{1}{2}(A^{-1}\mathbf{p},\mathbf{p}) + V}_{H_0(\mathbf{q},\mathbf{p})} + \underbrace{\frac{1}{2}m^2\left(A^{-1}\frac{\partial(\mathbf{r}_S,\dot{\mathbf{w}})}{\partial\mathbf{q}}, \frac{\partial(\mathbf{r}_S,\dot{\mathbf{w}})}{\partial\mathbf{q}}\right) - m\left(A^{-1}\mathbf{p}, \frac{\partial(\mathbf{r}_S,\dot{\mathbf{w}})}{\partial\mathbf{q}}\right)}_{H_1(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}, \tag{5}$$

где $H_0(\mathbf{q},\mathbf{p})$ — функция Гамильтона невозмущённой вибрациями системы, а функция $H_1(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ содержит периодические по времени множители $\dot{\mathbf{w}}(\nu t)$. В функцию Гамильтона (5) зависимость от времени входит только в виде $\tau = \nu t$. Приняв за «новое время» переменную τ (быстрое время), запишем уравнения Гамильтона в виде

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{1}{\nu}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Это стандартная система уравнений вида (1) в методе усреднения Крылова — Боголюбова. Среднее значение функции $\dot{\mathbf{w}}(\tau)$ равно нулю, поэтому усреднённая система имеет вид

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{1}{\nu}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \mathbf{q}},$$

где

$$\overline{H} = H_0(\mathbf{q},\mathbf{p}) + \overline{H}_1(\mathbf{q},\mathbf{p},\tau) = H_0(\mathbf{q},\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\overline{m^2\left(A^{-1}\frac{\partial(\mathbf{r}_S,\dot{\mathbf{w}})}{\partial\mathbf{q}}, \frac{\partial(\mathbf{r}_S,\dot{\mathbf{w}})}{\partial\mathbf{q}}\right)}, \tag{6}$$

а черта над функцией означает среднее значение функции по переменной τ за период.

Используя теорему 2, получаем

Утверждение 1. Пусть функция Гамильтона (5) системы дважды непрерывно дифференцируема по переменным $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ в некоторой области G фазового пространства и непрерывно дифференцируема по t, функция $\dot{\mathbf{w}}(\tau)$ непрерывная периодическая с периодом 2π, причём её среднее значение за период равно нулю. Тогда при произвольных фиксированных начальных условиях $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ $((\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in G)$ на конечном отрезке времени $[0; t_1]$ при стремлении частоты ν вибраций к бесконечности решение уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона (5) равномерно по t стремится к решению уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона (6).

Отсюда виден простой способ получения предельных при $\nu \to +\infty$ (усреднённых) уравнений движения голономных систем на вибрирующем основании. Введя обобщённые координаты, нужно выписать кинетическую и потенциальную энергии невозмущённой вибрациями системы, к потенциальной энергии добавить слагаемое (вибрационную энергию)

$$V_{\text{вибр}} = \frac{1}{2}\overline{m^2\left(A^{-1}\frac{\partial(\mathbf{r}_S,\dot{\mathbf{w}})}{\partial\mathbf{q}}, \frac{\partial(\mathbf{r}_S,\dot{\mathbf{w}})}{\partial\mathbf{q}}\right)},$$

далее записать уравнения Лагранжа или Гамильтона. Функция Лагранжа, задающая предельные уравнения, имеет вид

$$\overline{L} = T - V_{\text{пред}} = T - \left(V + \frac{1}{2} \overline{m^2 \left(A^{-1} \frac{\partial(\mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}})}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial(\mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}})}{\partial \mathbf{q}} \right)} \right).$$

Замечание Обобщённые скорости определяются согласно (4). Пусть $\mathbf{q}(t,\nu)$, $\mathbf{p}(t,\nu)$ — решение уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона (5) с начальными условиями $\mathbf{q}(0,\nu) = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{p}(0,\nu) = \mathbf{p}_0$, а $\overline{\mathbf{q}}(t)$, $\overline{\mathbf{p}}(t)$ — решение уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона (6) с начальными условиями $\overline{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}_0$, $\overline{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{p}_0$. На отрезке $[0; t_1]$ функции $A^{-1}\mathbf{p}, A^{-1}, \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \mathbf{q}}\Big|_{\mathbf{q}(t,\nu),\mathbf{p}(t,\nu)}$ при $\nu \to +\infty$ сходятся равномерно по t к функциям $A^{-1}\mathbf{p}, A^{-1}, \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \mathbf{q}}\Big|_{\overline{\mathbf{q}}(t),\overline{\mathbf{p}}(t)}$. Среднее значение функции $\dot{\mathbf{w}}(\tau)$ за период равно нулю. Можно показать, что при $\nu \to +\infty$ функции $mA^{-1}\frac{\partial(\mathbf{r}_S,\dot{\mathbf{w}})}{\partial \mathbf{q}}\Big|_{\mathbf{q}(t,\nu),\mathbf{p}(t,\nu)}$ сходятся слабо по t в смысле L_2 к нулю. Следовательно, функции $\dot{\mathbf{q}}(t,\nu)$ при $\nu \to +\infty$ сходятся слабо по t в смысле L_2 к функции $\dot{\overline{\mathbf{q}}}(t)$.

Если на точки системы действуют непотенциальные обобщённые силы $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \tau)$, то уравнения движения в быстром времени $\tau = \nu t$ имеют вид

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau)}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \left(-\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau)}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau) \right). \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau) = \mathbf{Q}\big(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau), \tau\big)$, а зависимость $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau)$ определяется согласно (4). Усреднив систему, получим

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \overline{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \left(-\frac{\partial \overline{H}}{\partial \mathbf{q}} + \overline{\mathbf{P}} \right). \tag{8}$$

Используя теорему 3, получаем

Утверждение 2. Пусть $\mathbf{q}^*$, $\mathbf{p}^*$ — невырожденное состояние равновесия усреднённой системы (8). Тогда при достаточно больших ν система (7) имеет невырожденное периодическое решение с периодом 2π, которое при $\nu \to +\infty$ стремится к $\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*$. Если состояние равновесия $\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*$ системы (8) асимптотически устойчиво в линейном приближении, то соответствующее периодическое решение системы (7) асимптотически устойчиво.

2.2.3. Системы на вибрирующем по вертикали основании

Рассмотрим голономную систему на вибрирующем основании в однородном поле силы тяжести (других активных сил, действующих на точки системы, нет). Предположим, что вибрации основания вертикальны, то есть $\dot{\mathbf{w}} = ah(\nu t)\mathbf{e}_z$. Здесь $h(\tau)$ — отличная от константы гладкая периодическая функция с нулевым средним (например, $h(\tau) = \sin \tau$); $a > 0$ — постоянная, которую будем называть амплитудой скорости вибраций; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор восходящей вертикали.

Потенциальная энергия с точностью до калибровочного слагаемого имеет вид $V = mg(\mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z)$, а потенциальная энергия предельной системы

$$V_{\text{пред}} = mg(\mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z) + \frac{1}{2}m^2a^2\overline{h^2(\tau)}\left(A^{-1}\frac{\partial(\mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z)}{\partial\mathbf{q}}, \frac{\partial(\mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z)}{\partial\mathbf{q}}\right).$$

Утверждение 3. В однородном поле силы тяжести все положения равновесия, которые имела голономная система в отсутствие вибраций, при добавлении вертикальных вибраций основания сохраняются в предельной системе. Если положение равновесия системы в отсутствие вибраций невырождено и устойчиво, то это положение равновесия предельной системы также устойчиво при любой амплитуде скорости вибраций основания. Если положение равновесия системы в отсутствие вибраций невырождено и неустойчиво, а амплитуда скорости вибраций удовлетворяет неравенству

$$a^2 > \frac{g^2}{\overline{h^2(\tau)}|\lambda_*|}, \tag{9}$$

где λ_* — наименьший по модулю из отрицательных корней уравнения $\det(C - \lambda A) = 0$ (матрицы A и $C = \frac{\partial^2 V}{\partial\mathbf{q}^2}$ вычислены в положении равновесия), то это положение равновесия предельной системы является устойчивым.

Доказательство. Положения равновесия системы в отсутствие вибраций основания являются критическими точками функции V, то есть определяются из уравнения

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{\partial(\mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z)}{\partial\mathbf{q}} = 0.$$

Эти положения равновесия являются также критическими точками функции $V_{\text{пред}}$, поскольку

$$\frac{\partial V_{\text{пред}}}{\partial\mathbf{q}} = mg\mathbf{f} + m^2a^2\overline{h^2(\tau)}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{q}}\right)^T A^{-1}\mathbf{f} + O(\mathbf{f}^2).$$

Пусть положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ системы в отсутствие вибраций невырождено. Для устойчивости этого положения равновесия предельной системы достаточно, чтобы в нём была положительно определена матрица

$$B = \left.\frac{\partial^2 V_{\text{пред}}}{\partial\mathbf{q}^2}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = mg\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} + m^2a^2\overline{h^2(\tau)}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{q}}\right)^T A^{-1}\left.\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{q}}\right)\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = C + \frac{a^2\overline{h^2(\tau)}}{g^2}CA^{-1}C,$$

где $C = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\mathbf{q}^2}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}$. Матрица A кинетической энергии системы положительно определена, поэтому по теореме об одновременном приведении двух квадратичных форм к каноническому виду существует линейная замена переменных, в результате которой в новых переменных матрица A станет единичной в положении равновесия, а матрица C диагональной: $C = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Здесь λ_i, $i = 1, \ldots, n$, определяются из уравнения $\det(C - \lambda A) = 0$.

В новых переменных матрица B примет вид

$$B = \operatorname{diag}\left(\lambda_1 + \frac{a^2\overline{h^2(\tau)}}{g^2}\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n + \frac{a^2\overline{h^2(\tau)}}{g^2}\lambda_n^2\right).$$

Она положительно определена, если

$$\lambda_i > 0 \quad \text{или} \quad 1 + \frac{a^2\overline{h^2(\tau)}}{g^2}\lambda_i < 0$$

для любого $i = 1, \dots, n$. Если $\lambda_i > 0$ для любого i, то положение равновесия системы в отсутствие вибраций устойчиво и это положение равновесия предельной системы также устойчиво.

Пусть некоторые из значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ отрицательны и λ_* наименьшее по модулю из этих отрицательных значений. Тогда положение равновесия системы в отсутствие вибраций неустойчиво и это положение равновесия предельной системы будет устойчивым при выполнении неравенства

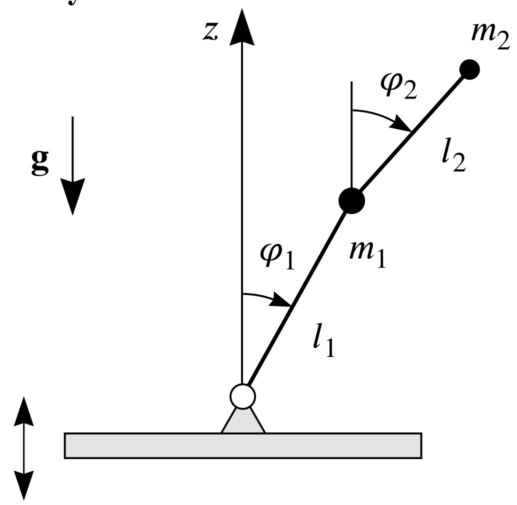
$$a^2 > \frac{g^2}{\overline{h^2(\tau)}|\lambda_*|}.$$

2.3. Практическая часть работы

В качестве тестовой задачи рассмотреть задачу о двойном математическом маятнике на вибрирующем по вертикали основании.

Двойной математический маятник состоит из двух точек с массами m_1 и m_2, соединённых невесомым стержнем длины l_2. Точка с массой m_1 соединена с неподвижной относительно основания точкой (точкой подвеса) невесомым стержнем длины l_1. Маятник может двигаться в неподвижной вертикальной плоскости в однородном поле силы тяжести. Основание движется поступательно по вертикали, его положение относительно неподвижной системы координат задано радиус-вектором $\mathbf{w}$ точки подвеса: $\mathbf{w} = \frac{a}{\nu}\cos\nu t\mathbf{e}_z$, где ν — частота вибраций, $a = \text{const} > 0$ — амплитуда скорости вибраций, $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор восходящей вертикали.

Рисунок 2.1.



1. Написать функцию Лагранжа (или Гамильтона) системы на вибрирующем основании; функцию Лагранжа (или Гамильтона) предельной (усреднённой) системы. Получить уравнения движения точной и предельной систем. В качестве обобщённых координат использовать углы отклонения стержней от восходящей вертикали.

2. Иллюстрация теоремы 2 метода усреднения.

   Для решений точной (при большой частоте вибраций) и предельной систем построить и сравнить графики зависимостей обобщённых координат от времени. Также для каждой обобщённой координаты найти разность решений точной и предельной систем, отвечающую данной обобщённой координате (будем называть эту разность ошибкой) и построить график зависимости этой разности от времени.

   Построить и сравнить графики зависимостей обобщённых скоростей от времени точной и предельной системы. Убедиться, что в некоторые моменты обобщённые скорости точной системы заметно отличаются от обобщённых скоростей предельной системы. Это соответствует тому, что нет равномерной сходимости обобщённых скоростей по времени.

   Выполнить задание при разных начальных условиях и при разных значениях a амплитуды скорости вибраций основания.

3. Для каждой обобщённой координаты убедиться, что ошибка (то есть разность решений точной и предельной систем, отвечающая данной обобщённой координате) имеет порядок $\frac{1}{\nu}$ следующим образом. Задать время наблюдения за движением системы (общее для всех ν), выбрать некоторое ν и вычислить максимальную ошибку за время наблюдения, умноженную на ν. Провести вычисления, увеличивая ν. Построить график зависимости от ν максимальной ошибки, умноженной на ν, и убедиться, что начиная с некоторого ν, поведение этой функции отвечает тому, что функция ограничена некоторой константой.

4. Воспользовавшись формулой (9), получить условие для амплитуды скорости вибраций a основания, при выполнении которого неустойчивое положение равновесия, бывшее у системы в отсутствие вибраций, становится устойчивым положением равновесия предельной системы. Продемонстрировать, что выбором значения a можно стабилизировать это неустойчивое положение равновесия.

   Выполнить задание для разных положений равновесия системы неустойчивых в отсутствие вибраций основания.

5. Иллюстрация теоремы 3 метода усреднения.

   Добавить в систему линейное вязкое трение, например, $Q_1 = -\mu\dot{q}_1$, $Q_2 = -\mu(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$. Убедиться, что устойчивое положение равновесия предельной системы становится асимптотически устойчивым и при $\nu \to +\infty$ ему отвечает асимптотически устойчивое положение равновесия точной системы.

Литература

[1] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Физматлит, 1963. 410 с..

[2] С. В. Болотин, А. В. Карапетян, Е. И. Кугушев, Д. В. Трещёв. *Теоретическая механика*. М.: Издательский центр «Академия», 2010.

[3] Б. П. Демидович. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967. 472 с..

[4] В. Ф. Журавлёв, Д. М. Климов. *Прикладные методы в теории колебаний*. М.: Наука, 1988. 328 с..

[5] В. Ф. Журавлёв, А. Г. Петров, М. М. Шундерюк. *Избранные задачи гамильтоновой механики*. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с..

[6] Ю. А. Митропольский. *Метод усреднения в нелинейной механике*. К.: Наукова думка, 1971. 440 с..

Глава 1. Маятник с колеблющейся точкой подвеса

Глава 3. Пример Пэнлеве — Клейна