

## Глава 1. Маятник с колеблющейся точкой подвеса



# Глава 1. Маятник с колеблющейся точкой подвеса

**Д. В. Трещёв**

## Содержание

[1.1. Цель практической работы](#)

[1.2. Постановка задачи](#)

[1.3. Теория](#)

[1.3.1. Отображение за период](#)

[1.3.2. Усреднение и стабилизация верхнего положения маятника](#)

[Литература](#)

## 1.1. Цель практической работы

Целью данной работы является знакомство студентов с отображением Пуанкаре как методом исследования динамических систем небольшой размерности с непрерывным временем. В качестве тестовой задачи выбран маятник с вертикально периодически колеблющейся точкой подвеса.

Отображение Пуанкаре позволяет свести исследование системы с непрерывным временем к исследованию системы с дискретным временем. Основной выигрыш состоит в том, что размерность фазового пространства понижается на единицу. Это в ряде ситуаций позволяет осуществить удобную визуализацию, при которой становятся видны качественные аспекты динамики. В частности, зоны хаотического и регулярного движений, аттракторы и вообще, качественная структура фазового портрета.

## 1.2. Постановка задачи

В вертикальной плоскости под действием силы тяжести движется материальная точка массы  $m$ , закреплённая на конце невесомого недеформируемого стержня длины  $l$ . Другой конец стержня совершает колебания по вертикали по закону  $x = 0$ ,  $y = A\epsilon \cos \frac{\omega t}{\epsilon}$ , где  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $A$  и  $\epsilon$  — параметры,  $g$  — ускорение силы тяжести. В точке подвеса маятника имеется вязкое трение с коэффициентом  $\mu$ . Система декартовых координат  $Ox$  неподвижна, оси  $Ox$  и  $Oy$  направлены соответственно вправо и вверх.

Будет разумно перейти к безразмерным величинам, полагая, что время измеряется в единицах  $\sqrt{\frac{l}{g}}$ . Для этого следует положить  $\omega = 1$ . Тем самым мы сократим количество параметров в задаче.

Механическая система имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты выбирается угол  $q$  между стержнем и вертикалью. Уравнения движения маятника принимают вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \mu \dot{q}.$$

Здесь  $p$  — обобщённый импульс, отвечающий обобщённой координате  $q$ ,  $H(q, p)$  — функция Гамильтона.

В процессе выполнения задачи студент должен:

1. Используя данные ему постановку задачи и систему обозначений, уметь находить выражение для гамильтониана  $H(q, p)$ , а также уравнения движения.
2. Написать программу, рисующую на экране компьютера (на фазовом цилиндре с координатами  $(q \bmod 2\pi, p)$ ) орбиту отображения за период с данными начальными условиями. При этом хотелось бы иметь следующие опции: возможность рисовать новую орбиту как сохраняя, так и уничтожая уже нарисованные траектории (полезно для построения «глобального» фазового портрета) и возможность рисовать орбиту, пропустив некоторое количество начальных точек (полезно для рисования аттрактора).
3. Продемонстрировать, что при  $\mu = 0$ ,  $A = 0$  программа рисует фазовый портрет обычного математического маятника.
4. Убедиться, что при  $\mu = 0$  и при ненулевых значениях  $A$  появляются хаотические траектории, выглядящие как плотно заполненные точками открытые области на фазовом цилиндре; увидеть, что при малых значениях  $A$  хаос в основном расположен около сепаратрис и сосуществует с квазипериодическими траекториями, заполняющими замкнутые гладкие кривые.
5. Построить фазовые портреты для усреднённой системы из раздела [1.3.2. «Усреднение и стабилизация верхнего положения маятника»](#) при различных значениях  $A$ , рассмотрев все принципиально различные случаи. Определить в каждом случае положения равновесия системы с потенциалом  $V$  и исследовать их на устойчивость.
6. Продемонстрировать, что при  $\mu = 0$  и при «не слишком маленьких»  $A$  верхнее положение равновесия  $q = \pi$  (его лучше называть периодическим движением) оказывается устойчивым. Показать, что эффект сохраняется при положительных ненулевых  $\mu$ .
7. Уметь определять для заданных значений параметров  $A$  и  $\mu$ , устойчиво ли верхнее положение равновесия.
8. Продемонстрировать, что при заданных значениях параметров на фазовом цилиндре появляется странный аттрактор (притягивающее множество со сложной внутренней динамикой). Посмотреть в Википедии и убедиться в том, что полученный аттрактор визуально аналогичен аттрактору Эно.

## 1.3. Теория

### 1.3.1. Отображение за период

Фазовый портрет не является удобным инструментом для исследования неавтономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы, поскольку фазовые траектории в плоскости фазового портрета имеют обыкновение пересекаться. Фазовые траектории неавтономной системы естественней рассматривать в расширенном фазовом пространстве, но полученную картину трудно визуализировать.

Если зависимость гамильтониана от времени  $\tau$ -периодическая, полезным будет разновидность отображения Пуанкаре — отображение за период. Напомним, что отображением за период называется отображение, которое ставит в соответствие начальному условию при  $t = 0$  решение соответствующей задачи Коши для уравнений движения в момент времени  $\tau$ , то есть результат переноса начальной фазовой точки фазовым потоком за время  $\tau$ . Во многом изучение неавтономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы сводится к изучению орбит её



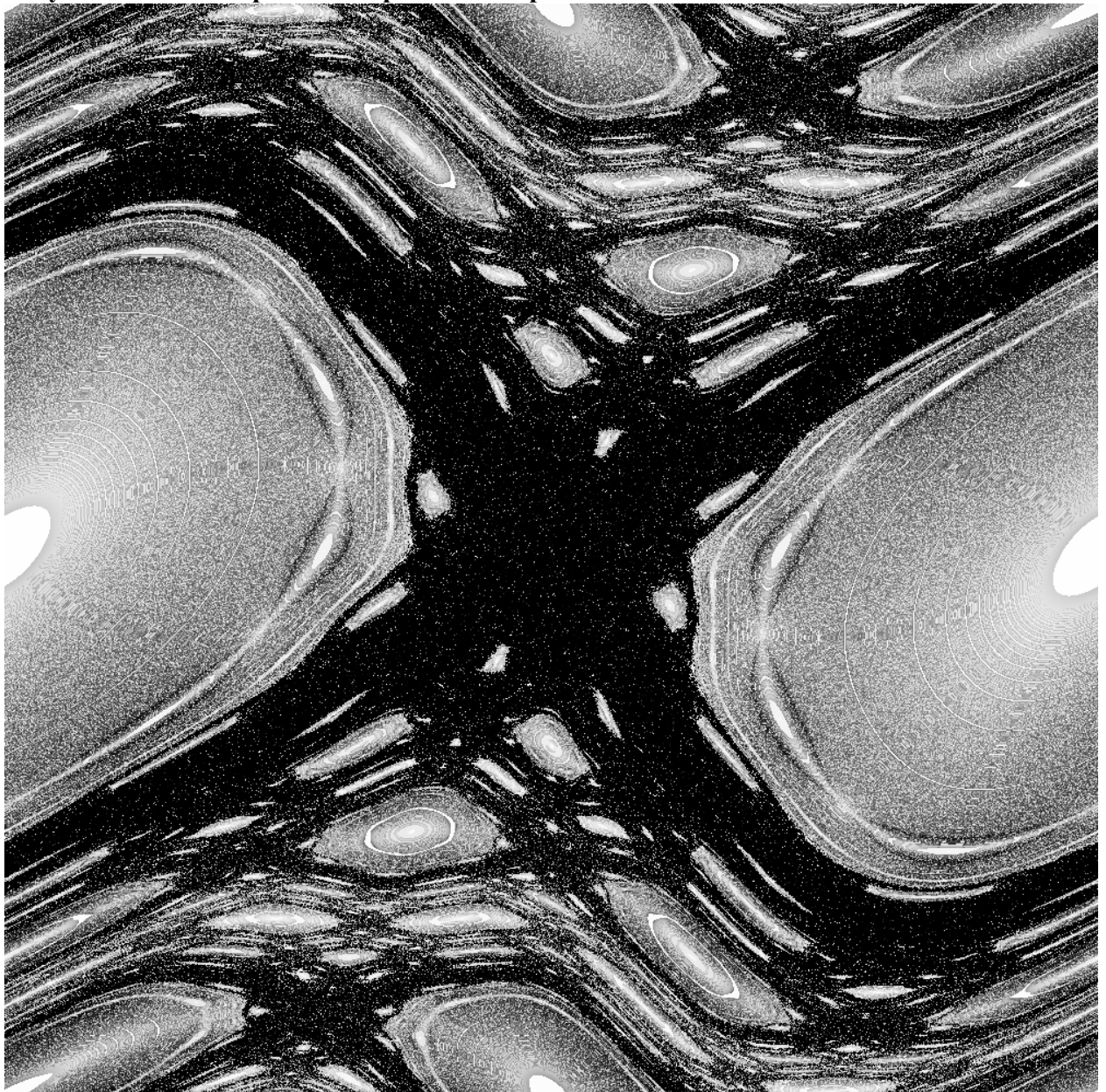
отображения за период. Следует отметить, что отображение за период гамильтоновой системы является симплектическим.

Для орбит симплектических отображений типичным является очень сложное, хаотическое поведение. Для примера рассмотрим так называемое стандартное отображение Чирикова, которое хорошо иллюстрирует описываемое явление. Это преобразование фазового цилиндра с координатами  $(q \bmod 2\pi, p)$ , заданное формулами

$$p \mapsto p + \varepsilon \sin q, \quad q \mapsto q + p + \varepsilon \sin q.$$

При нулевом  $\varepsilon$  все орбиты лежат на «параллелях» цилиндра и ведут себя очень регулярно. Ситуация меняется при ненулевых значениях  $\varepsilon$ . Орбита выбранной подходящим образом начальной точки становится густой сетью, пронизанной многочисленными дырками — так называемой стохастической паутиной. Посмотреть на построение орбиты в динамике можно с помощью нашего демонстрационного [приложения](#). Подобную картину студенты должны получить в ходе выполнения работы. Предлагаем также иллюстрацию, на которой точки фазового цилиндра изображаются в разных градациях серого цвета в зависимости от хаотичности орбит этих точек (понимаемой в некотором смысле):

**Рисунок 1.1. Стандартное отображение Чирикова**



(Подробнее об отображении Чирикова — в [1], стр. 384, об отображении Пуанкаре — в [1], стр. 289.)

### 1.3.2. Усреднение и стабилизация верхнего положения маятника

Если параметр  $\varepsilon$  в гамильтониане

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + Ap \sin q \sin \frac{t}{\varepsilon} + \frac{A^2}{2} \sin^2 q \sin^2 \frac{t}{\varepsilon} - \cos q$$

маятника считать малым, то подходящим каноническим преобразованием,  $\varepsilon$ -близким к тождественному, можно добиться того, что зависимость от  $t$  в новом гамильтониане будет содержаться в членах порядка  $\varepsilon$ . Нужное каноническое преобразование  $(q, p, t) \mapsto (\hat{q}, \hat{p}, t)$  зададим производящей функцией

$$W(q, \hat{p}, t) = \hat{p}q + \varepsilon f(q, \hat{p}, \theta), \quad \theta = \frac{t}{\varepsilon},$$

где функция  $f$   $2\pi$ -периодична по  $\theta$  (периодичность требуется для равномерной близости канонического преобразования к тождественному при всех  $t$ ). При этом

$$p = \hat{p} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \hat{q} = q + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \hat{p}}, \quad \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + H(q, p, t).$$

Отсюда получаем

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{\partial f(\hat{q}, \hat{p}, \theta)}{\partial \theta} + H(\hat{q}, \hat{p}, t) + O(\varepsilon).$$

Для того, чтобы  $\hat{H}$  не зависела от  $t$  в нулевом приближении по  $\varepsilon$ , нужно, чтобы функция

$$\frac{\partial f(\hat{q}, \hat{p}, \theta)}{\partial \theta} + A\hat{p} \sin \hat{q} \sin \theta + \frac{A^2}{2} \sin^2 \hat{q} \sin^2 \theta$$

не зависела от  $\theta$ . Достаточно выбрать

$$f(\hat{q}, \hat{p}, \theta) = A\hat{p} \sin \hat{q} \cos \theta + \frac{A^2}{8} \sin^2 \hat{q} \sin 2\theta.$$

Новый гамильтониан в новых переменных принимает вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} - \cos \hat{q} + \frac{A^2}{4} \sin^2 \hat{q} + O(\varepsilon),$$

где  $O(\varepsilon)$   $2\pi$ -периодично по  $t$ . Таким образом, выполнен один шаг усреднения в исходной гамильтоновой системе.

С помощью подобного приёма можно отправить зависимость от времени в гамильтониане в члены порядка  $O(\varepsilon^2)$  и даже  $O(\varepsilon^N)$ , где  $N$  — произвольное натуральное число. Можно неавтономную часть сделать порядка  $O\left(\exp\left(-\frac{c}{|\varepsilon|}\right)\right)$  для некоторой положительной постоянной  $c$ . Но большего достичь в принципе нельзя: какую бы  $2\pi$ -периодическую по  $\theta$  каноническую близкую к тождественной замену переменных мы ни сделали, зависимость от переменной  $\theta$  останется в членах, имеющих порядок больший, чем  $O\left(\exp\left(-\frac{C}{|\varepsilon|}\right)\right)$  для некоторой положительной постоянной  $C$ .

Исследуем полученную систему, пренебрегая величинами  $O(\epsilon)$ . Для этого заметим, что с точки зрения вида гамильтониана  $\hat{H}$  систему можно трактовать как движение материальной точки по прямой (или окружности  $\hat{q} \bmod 2\pi$ ) в поле сил с потенциалом

$$V(\hat{q}) = -\cos \hat{q} + \frac{A^2}{4} \sin^2 \hat{q}.$$

Оказывается, что при достаточно больших  $A$  в системе с потенциалом  $V$  верхние положения равновесия маятника могут стабилизироваться. Соответствующий эффект П. Л. Капица демонстрировал при помощи швейной машины, а В. И. Арнольд — при помощи вибрационной [электробритвы](#) (см. [2], стр. 34).

Эффект стабилизации верхнего положения равновесия обнаруживается для нулевого приближения по  $\epsilon$  в усреднённой системе. Сохранится ли эффект при учёте членов  $O(\epsilon)$ ? Этот вопрос требует отдельного изучения.

## Литература

[1] С. В. Болотин, А. В. Карапетян, Е. И. Кугушев, Д. В. Трещёв. *Теоретическая механика*. М.: «Академия», 2010.

[2] В. И. Арнольд. *Математическое понимание природы*. М.: МЦНМО, 2010.



Компьютерный практикум по специальности для группы теоретической механики



Глава 2. Двойной математический маятник на вибрирующем по вертикали основании