

Глава 3. Пример Пэнлеве — Клейна



Глава 3. Пример Пэнлеве — Клейна

А. А. Зобова

Содержание

[3.1. Цель практической работы](#)

[3.2. Теория](#)

[3.2.1. Уравнения движения системы с неидеальными связями](#)

[3.2.2. Линеаризованные уравнения движения системы при введении деформации](#)

[3.2.3. Нелинейная система. Интегрирование системы с переключениями](#)

[3.3. Задания для практикума](#)

[Литература](#)

3.1. Цель практической работы

Цель данной работы — изучить систему с неидеальными связями типа сухого трения Кулона. В этом случае касательная составляющая реакции зависит от нормальной составляющей, и стандартная для аналитической механики процедура исключения связей может привести к уравнению, из которого невозможно выразить реакцию связи или решение которого не единственно. В работе разбирается классический пример Пэнлеве — Клейна [1]. При отказе от одной из связей и введения деформируемого элемента с большой жесткостью возникает «удар трением», т. е. быстрое торможение системы [2]. Изложение задачи следует книгам [3], [4].

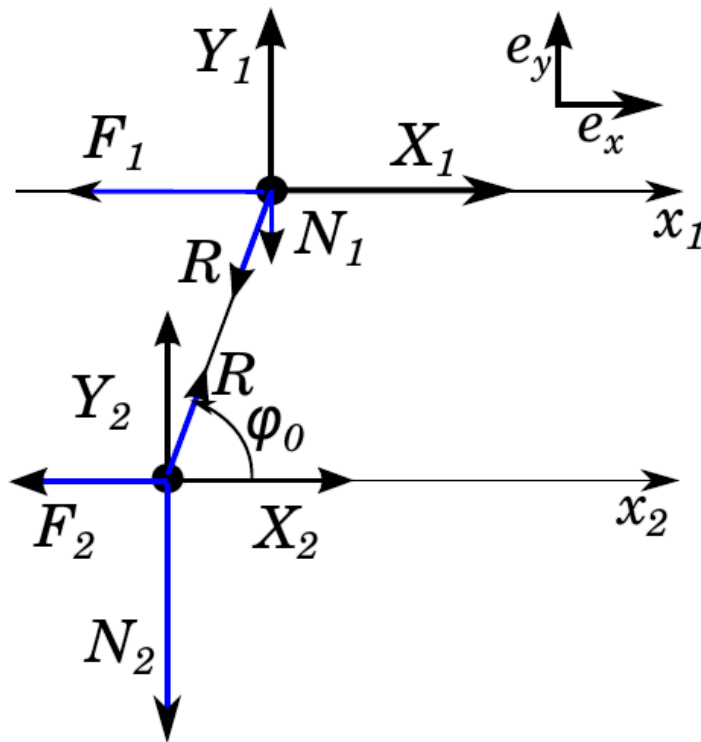
3.2. Теория

3.2.1. Уравнения движения системы с неидеальными связями

Рассмотрим движение двух материальных точек с массами, равными 1 (рис. [3.1. «Пример Пэнлеве — Клейна»](#)). Точки двигаются по параллельным шероховатым направляющим, расстояние между которыми равно d . Координаты материальных точек на направляющих обозначим x_1 и x_2 . На точки действуют внешние заданные силы: вдоль направляющих $X_1\mathbf{e}_x$ и $X_2\mathbf{e}_x$ и перпендикулярно направляющим $Y_1\mathbf{e}_y$ и $Y_2\mathbf{e}_y$. Точки соединены невесомым нерастяжимым стержнем длины l , угол φ_0 между стержнем и направляющими постоянен. Число степеней свободы равно 1, за обобщённую координату можно выбрать x_1 , а $x_2 = x_1 - l \cos \varphi_0$.

Рисунок 3.1. Пример Пэнлеве — Клейна

На рисунке точки движутся вправо, $N_i < 0$, $F_i < 0$, $X_i > 0$, $Y_i > 0$, $R > 0$.



Введём реакции связей. Обозначим реакцию стержня, действующую на точку 2, через $\mathbf{R} = R(\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y)$. Она направлена по стержню как реакция идеальной связи точек абсолютно твердого тела (см. [6], пример 3.11, пункт 3.2.5).

Направляющие, по которым двигаются точки, будем считать неидеальными связями. Разложим их реакции на нормальные $N_i \mathbf{e}_y$ и касательные $F_i \mathbf{e}_x$ компоненты. Для касательных составляющих реакций направляющих примем модель сухого трения Кулона:

$$\mathbf{F}_i = -\mu_i |N_i| \sigma_i \mathbf{e}_x, \text{ где } \begin{cases} \sigma_i = \text{sign } \dot{x}_i & \text{при } \dot{x}_i \neq 0, \\ \sigma_i \in [-1, 1] & \text{при } \dot{x}_i = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Величина касательной составляющей реакции зависит от величины нормальной составляющей, что и приводит, как будет показано далее, к неразрешимости системы уравнений относительно связей.

В случае скольжения системы влево ($\sigma = \sigma_i = -1$) или вправо ($\sigma = \sigma_i = 1$) уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x}_1 = X_1 - R \cos \varphi_0 - \mu_1 |N_1| \sigma_1, \quad (2.2)$$

$$\ddot{x}_2 = X_2 + R \cos \varphi_0 - \mu_2 |N_2| \sigma_2, \quad (2.3)$$

$$0 = Y_1 - R \sin \varphi_0 + N_1, \quad (2.4)$$

$$0 = Y_2 + R \sin \varphi_0 + N_2, \quad (2.5)$$

$$x_1 - x_2 = l \cos \varphi_0. \quad (2.6)$$

Если точки покоятся, то

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

а реакции связей должны удовлетворять системе неравенств:

$$|X_1 - R \cos \varphi_0| \leq \mu_1 |Y_1 - R \sin \varphi_0|, \quad (2.7)$$

$$|X_2 + R \cos \varphi_0| \leq \mu_2 |Y_2 + R \sin \varphi_0|. \quad (2.8)$$

Эти неравенства задают конусы трения — реакция направляющей $F_i \mathbf{e}_x + N_i \mathbf{e}_y$ должна попадать внутрь конуса трения для того, чтобы точка покоилась. При выходе реакции из конуса трения точка начинает скользить.

Рассмотрим случай скольжения точек. Разрешим систему (2.2)–(2.6) относительно реакции стержня R :

$$X_1 - X_2 = 2R \cos \varphi_0 + \sigma(\mu_1 |R \sin \varphi_0 - Y_1| - \mu_2 |R \sin \varphi_0 + Y_2|).$$

Введём параметры

$$X^* = \frac{X_1 - X_2}{\cos \varphi_0}, \quad \mu_i^* = \mu_i \operatorname{tg} \varphi_0, \quad Y_i^* = \frac{Y_i}{\sin \varphi_0} \quad (i = 1, 2),$$

тогда

$$X^* = \Phi(R), \quad \text{где } \Phi(R) = 2R + \sigma(\mu_1^* |R - Y_1^*| - \mu_2^* |R + Y_2^*|). \quad (2.9)$$

График $\Phi(R)$ представляет собой ломаную, состоящую не более чем из трех сегментов.

Предположим сначала, что при некоторых значениях параметров уравнение (2.9) имеет единственное решение R^* . Тогда после подстановки в (2.2) получаем замкнутое уравнение, описывающее равнозамедленное или равноускоренное движение системы. Заметим, что при $\mu_i = 0$ (идеальные связи, трения нет) решение всегда единственное.

Однако при некоторых значениях X^* и параметров системы уравнение либо не имеет решений, либо имеет более одного решения. В этом случае получаем, что стандартная процедура исключения реакций неидеальных связей приводит к неединственности или несуществованию решения, на что было указано в [1], [5]. Это затруднение и называют парадоксом Пэнлеве (подробное изложение истории вопроса и возникших дискуссий можно найти в [4]).

3.2.2. Линеаризованные уравнения движения системы при введении деформации

Чтобы понять, что происходит в системе в случае неединственности или несуществования решения уравнения (2.9), можно отказаться от одной или нескольких связей и ввести вместо них деформируемые элементы (о реализациях различных связей, в том числе пружинками с большой жесткостью, см. [7]). Число степеней свободы и порядок системы увеличивается. В задаче Пэнлеве — Клейна предлагались различные способы введения деформаций: продольные и изгибные деформации стержня, деформации направляющих (подробнее см. [4]).

В настоящей работе предлагается заменить несжимаемый стержень на вязко-упругий: введем продольную деформацию стержня δ и реакцию стержня R зададим явной формулой, зависящей от δ , $\dot{\delta}$:

$$R(\delta, \dot{\delta}) = k\epsilon^{-2}\delta + \nu\epsilon^{-1}\dot{\delta} \quad (3.1)$$

(параметры k и ν считаем порядка 1, $\epsilon \ll 1$, тогда характерный интервал времени для системы с такой пружинкой будет порядка ϵ , $\delta \sim \epsilon^2$, $\dot{\delta} \sim \epsilon$). При $\delta > 0$ стержень растянут, а $\delta < 0$ — сжат. Теперь система имеет две степени свободы, за координаты примем x_1, δ .

В уравнениях (2.2)–(2.5) параметры $\sigma_i = \operatorname{sign} \dot{x}_i$ могут иметь разные знаки, так как из-за деформации стержня точки могут двигаться в разные стороны. Угол между стержнем и направляющими зависит от деформации $\varphi = \varphi(\delta)$, причём $\varphi(0) = \varphi_0$. Уравнение (2.6) принимает вид:

$$x_1 - x_2 = (l + \delta) \cos \varphi. \quad (3.2)$$

При этом направляющие по-прежнему считаем недеформируемыми, то есть на систему наложена связь

$$d = (l + \delta) \sin \varphi = \text{const}. \quad (3.3)$$

Продифференцируем (3.2), (3.3) по времени два раза:

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = \dot{\delta} \cos \varphi - (l + \delta) \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad (3.4)$$

$$0 = \dot{\delta} \sin \varphi + (l + \delta) \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad (3.5)$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \ddot{\delta} \cos \varphi - \dot{\delta} \dot{\varphi} \sin \varphi - (l + \delta) \sin \varphi \ddot{\varphi} - (l + \delta) \cos \varphi (\dot{\varphi})^2 - \dot{\delta} \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad (3.6)$$

$$0 = \ddot{\delta} \sin \varphi - \dot{\delta} \dot{\varphi} \cos \varphi + (l + \delta) \cos \varphi \ddot{\varphi} - (l + \delta) \sin \varphi (\dot{\varphi})^2 - \dot{\delta} \cos \varphi \dot{\varphi}. \quad (3.7)$$

Умножим (3.6) на $\cos \varphi$, (3.6) на $\sin \varphi$ и сложим. Получим:

$$\ddot{\delta} - (l + \delta) \dot{\varphi}^2 = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \cos \varphi, \quad (3.8)$$

при этом

$$\varphi = \arcsin \frac{d}{l + \delta}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\delta} \operatorname{tg} \varphi}{l + \delta}.$$

Линеаризуем уравнение (3.8), считая деформации стержня малыми $\delta \sim \varepsilon^2$, $\dot{\delta} \sim \varepsilon$, а $l \sim 1$, $d \sim 1$. Заметим, что

$$\sin \varphi = \frac{d}{l} (1 + O(\varepsilon^2)), \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} (1 + O(\varepsilon^2)), \quad \dot{\varphi} = \frac{d \dot{\delta}}{l \sqrt{l^2 - d^2}} (1 + O(\varepsilon^2)) = O(\varepsilon).$$

Таким образом, угол φ с точностью до ε^2 постоянен и равен φ_0 , а уравнение (3.8) имеет вид:

$$\ddot{\delta} + O(\varepsilon^2) = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \cos \varphi_0.$$

Пренебрежем величинами порядка ε^2 и воспользуемся уравнениями (2.2—2.3). Используя обозначения из (2.9), получим:

$$\ddot{\delta} = \cos^2 \varphi_0 (X^* - 2R - (\sigma_1 \mu_1^* |R - Y_1^*| - \sigma_2 \mu_2^* |R + Y_2^*|))$$

или

$$\ddot{\delta} = \cos^2 \varphi_0 (X^* - \Phi(R)). \quad (3.9)$$

Полученное уравнение является кусочно-линейным с постоянными коэффициентами. Его положения равновесия при условии, что точки двигаются в одну сторону ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$), — решения уравнения (2.9). В случае, если решение уравнения (2.9) единственно (например, для гладких направляющих), оно соответствует глобально устойчивому положению равновесия уравнения (3.9). В этом случае после переходного процесса, который занимает время порядка ε , система с деформируемым стержнем ведет себя так же, как и система со связью (строгие утверждения можно найти в [3]).

Однако, при некоторых значениях параметров положений равновесия может не оказаться вовсе или могут появиться новые положения равновесия. При этом существуют такие решения, на которых $\delta(t)$ неограниченно растёт. Для таких решений недостаточно исследовать линейную систему.

3.2.3. Нелинейная система. Интегрирование системы с переключениями

Если начальное условие для δ , $\dot{\delta}$ не попало в область притяжения устойчивого положения равновесия, возможен неограниченный рост деформации δ , а вместе с ней и реакции стержня R , при которых уже нельзя пренебрегать изменением угла φ между стержнем и направляющим. Тогда вместо уравнения (3.9) необходимо интегрировать следующее уравнение:

$$\ddot{\delta} = \frac{\text{tg}^2 \varphi \dot{\delta}^2}{l + \delta} + \cos \varphi (X_1 - X_2 - 2R \cos \varphi - (\sigma_1 \mu_1 |Y_1 - R \sin \varphi| - \sigma_2 \mu_2 |Y_2 + R \sin \varphi|)), \quad (4.1)$$

где

$$\varphi = \arcsin \frac{d}{l + \delta}.$$

Необходимо заметить, что в нелинейном уравнении из-за того, что $\varphi = \varphi(\delta)$, могут измениться и исчезнуть положения равновесия кусочно-линейного уравнения (3.9).

Для того, чтобы численно решить задачу Пэнлеве — Клейна с деформируемым элементом с учетом остановок и трения покоя, удобно интегрировать систему (2.2)—(2.3), вычисляя δ , $\dot{\delta}$ и $R = R(\delta, \dot{\delta})$ из равенств (3.1)—(3.5):

$$(2.2): \ddot{x}_1 = X_1 - R \cos \varphi - \mu_1 |Y_1 - R \sin \varphi| \sigma_1,$$

$$(2.3): \ddot{x}_2 = X_2 + R \cos \varphi - \mu_2 |Y_2 + R \sin \varphi| \sigma_2$$

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + d^2} - l$$

$$\dot{\delta} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \frac{x_1 - x_2}{l + \delta}.$$

Во время численного интегрирования проверяем равенство нулю скоростей точек и, в зависимости от попадания силы трения в конус трения, переключаемся на уравнения движения или покоя:

1. $\dot{x}_1 \neq 0, \dot{x}_2 \neq 0$: вычислить $\sigma_i = \text{sign}(\dot{x}_i)$ и интегрировать систему (2.2), (2.3) до тех пор, пока какая-либо из скоростей \dot{x}_i не обратится в ноль. Условие выхода на многообразие $\dot{x}_i = 0$ можно вычислять по смене знака функции $\dot{x}_i(t)$, а время остановки и фазовые переменные в момент остановки — линейной интерполяцией.
2. $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 \neq 0$. Проверить условие на величину силы трения покоя (2.7):

$$(2.7): |X_1 - R \cos \varphi| \leq \mu_1 |Y_1 - R \sin \varphi|.$$
 - а. Условие (2.7) выполнено. Первая точка покоится, вторая скользит, $\sigma_2 = \text{sign}(\dot{x}_2) = \pm 1$.
Интегрировать систему уравнений

$$\ddot{x}_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 = X_2 + R \cos \varphi - \sigma_2 \mu_2 |Y_2 + R \sin \varphi|$$
 до тех пор, пока не нарушится условие (2.7) или условие $\dot{x}_2 \neq 0$.
 - б. Условие (2.7) не выполнено. Присвоить $\sigma_1 = \text{sign}(X_1 - R \cos \varphi)$. Перейти в пункт [1](#).
3. $\dot{x}_1 \neq 0, \dot{x}_2 = 0$. Проверить условие (2.8):

$$(2.8): |X_2 + R \cos \varphi| \leq \mu_2 |Y_2 + R \sin \varphi|$$
 - а. Условие (2.8) выполнено. Вторая точка покоится, первая скользит, $\sigma_1 = \text{sign}(\dot{x}_1) = \pm 1$.
Интегрировать систему уравнений

$$\ddot{x}_1 = X_1 - R \cos \varphi - \sigma_1 \mu_1 |Y_1 - R \sin \varphi|, \quad \ddot{x}_2 = 0$$
 до тех пор, пока не нарушится условие (2.8) или $\dot{x}_1 \neq 0$.
 - б. Присвоить $\sigma_2 = \text{sign}(X_2 + R \cos \varphi)$. Перейти в пункт [1](#).
4. $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$. Обе точки одновременно имеют нулевую скорость. Проверить условия (2.7) и (2.8).
 - а. Оба выполнены. Система в положении равновесия. Интегрирование закончено.
 - б. Нарушено (2.7). Присвоить $\sigma_1 = \text{sign}(X_1 - R \cos \varphi)$. Перейти в [3.а](#).
 - с. Нарушено (2.8). Присвоить $\sigma_2 = \text{sign}(X_2 + R \cos \varphi)$. Перейти в [2.а](#).

d. Нарушены оба условия. Присвоить $\sigma_1 = \text{sign}(X_1 - R \cos \varphi)$ и $\sigma_2 = \text{sign}(X_2 + R \cos \varphi)$.

Перейти в [1](#).

Пример. Рассмотрим два решения задачи Пэнлеве, для которых отличаются начальное значение деформации δ . Параметры системы таковы:

$$d = 0.8, \quad l = 1, \quad X_1 = 3.6, \quad Y_1 = 0.8, \quad \mu_1 = 0.525, \quad X_2 = 0, \quad Y_2 = -2.4, \quad \mu_2 = 2.85.$$

Начальные условия:

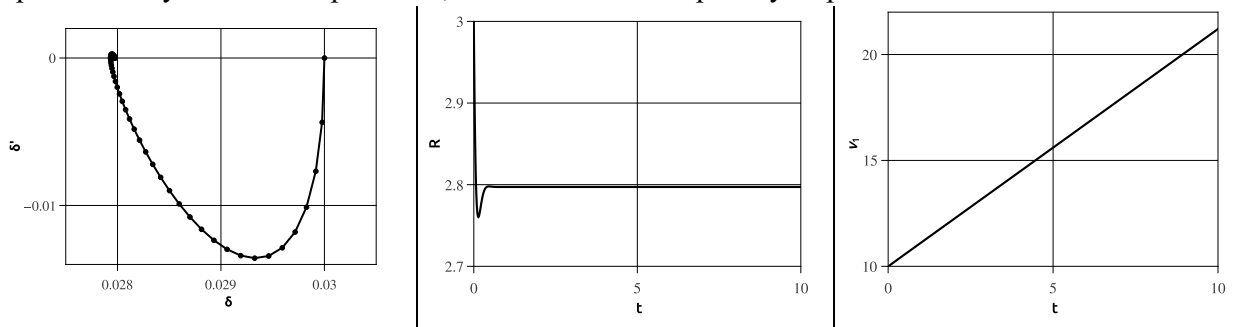
$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 10, \quad x_2(0) = -0.65, \quad \dot{x}_2(0) = 10, \quad \dot{\delta}(0) = 0.$$

На рис. [3.2. «Фазовая плоскость, реакция и скорость первой точки от времени»](#) сверху показано решение при $\delta(0) = 0.03$ — это значение из области притяжения устойчивого положения равновесия уравнения (4.1). Довольно быстро реакция R и ускорения точек выходят на постоянное значение, система движется вправо равноускоренно. Графики снизу соответствуют $\delta(0) = 0.12$. При $t = 0.802$ скорость второй точки обращается в 0, причем условия остановки выполнены (случай [3.a](#)), далее при $t = 0.803$ скорость первой точки обращается в ноль, но условия остановки не выполнены (случай [4.b](#)) и точка начинает двигаться влево. При $t = 1.403$ первая точка останавливается (случай [4.a](#)). Полученное движение системы демонстрирует удар трением — быструю остановку системы из-за наличия в ней трения.

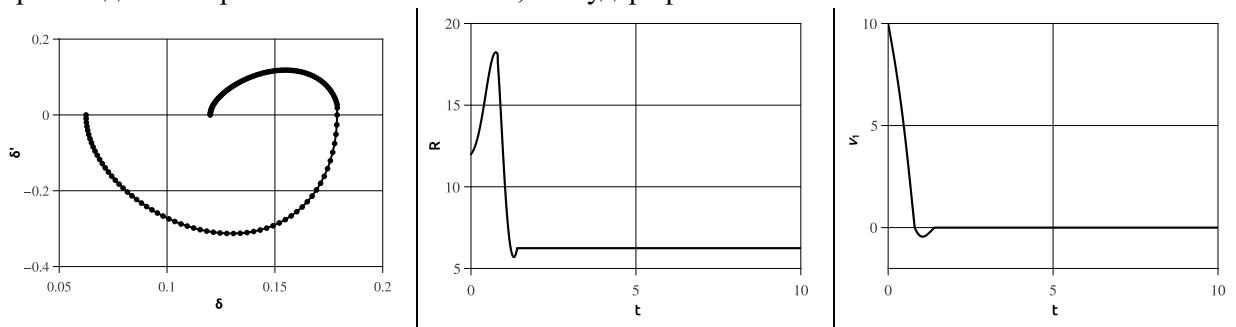
Рисунок 3.2. Фазовая плоскость, реакция и скорость первой точки от времени

Фазовая плоскость $(\delta, \dot{\delta})$, реакция R и скорость первой точки $v_1 = \dot{x}_1$ от времени

Равноускоренное движение. Начальное значение $\delta(0) = 0.03$ из области притяжения устойчивого решения, система движется равноускоренно



Удар трением. Начальное значение $\delta(0) = 0.12$ — вне области притяжения, происходит быстрая остановка системы, т. е. удар трением



3.3. Задания для практикума

1. Провести анализ $\Phi(R)$ для $\sigma = \pm 1$ и построить все качественно различные варианты графиков $\Phi(R)$, указав для каждого область параметров μ_i^*, Y_i^* , в которой такой график реализуется.

Качественно различными будем называть графики, для которых различны последовательности наклонов сегментов ломаной (наклон — это знак $\Phi'(R)$).

2. Определить устойчивость положений равновесия системы (3.9) в линейном приближении: для этого найти положения равновесия и посчитать численно корни характеристического многочлена линеаризованной системы.
3. Построить фазовый портрет уравнения (3.9) для тех вариантов параметров, которые были разобраны в задании 1, сначала когда коэффициент ν в выражении (2.9) для R равен нулю (диссипации нет), потом $\nu \neq 0$. Показать устойчивые и неустойчивые равновесия системы.
4. Построить решение уравнения (4.1) для начальных значений δ и $\dot{\delta}$ из области притяжения устойчивого положения равновесия системы (3.9) и вне её. В случае, если происходит остановка первой или второй точки системы, проверить условия для трения покоя (2.7), (2.8), и выяснить, будет ли точка двигаться после остановки в обратную сторону или остановится на направляющей.
5. *Дополнительное.* Написать программу полного интегрирования системы (с проверкой случаев остановки и автоматического переключения на интегрирование соответствующей системы уравнений).

Литература

- [1] P. Painlevé. *Leçons sur le frottement*. — Paris: Hermann, 1895. 111 p.. Пер. с фр.: Пэнлеве П. Лекции о трении. — М.: Гостехтеоретиздат, 1954. — 316 с.
- [2] В. А. Самсонов. *Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы*. М. — Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- [3] А. П. Иванов. *Основы теории систем с трением*. М. — Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.
- [4] А. С. Сумбатов, Е. К. Юнин. *Избранные задачи механики систем с сухим трением*. М.: Физматлит, 2013.
- [5] Ф. Клейн. *К критике Пенлеве кулоновых законов трения*. В книге: Пенлеве П. Лекции о трении, с. 249—257.
- [6] С. В. Болотин, А. В. Карапетян, Е. И. Кугушев, Д. В. Трещёв. *Теоретическая механика*. М.: «Академия», 2010.
- [7] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт. *Математические аспекты классической и небесной механики. Динамические системы — 3, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 3, ВИНТИ, М., 1985, 5—290.*

