

Vysoká škola ekonomická v Praze  
Fakulta informatiky a statistiky



# **Aplikace GARCH modelu na časových řadách měn a kryptoměn**

## **SEMESTRÁLNÍ PRÁCE**

Předmět: Pokročilá ekonometrie 2

Autor: Bc. Vojtěch Vávra

Cvičící: Ing. Andrea Čížků, Ph.D.

Praha, leden 2022

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Data</b>	<b>4</b>
1.1 Měny . . . . .	4
1.2 Kryptoměny . . . . .	4
<b>2 Teoretická část</b>	<b>7</b>
2.1 Model GARCH . . . . .	7
2.2 Maximální věrohodný odhad . . . . .	7
<b>3 Aplikace a výsledky</b>	<b>8</b>
3.1 GARCH v R . . . . .	8
3.2 Měny . . . . .	10
3.3 Kryptoměny . . . . .	11
<b>4 Závěr</b>	<b>12</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>13</b>

# Úvod

V této práci se podíváme pomocí modelu GARCH na modelování volatility finančních časových řad. Jedná se o model s parametry proměnlivými v čase.

V mém případě se bude jednat o vývoj kurzu amerického dolaru (USD) vůči kryptoměnám - bitcoin (BTC), Ethereum (ETH), Litecoin (LTC) a Zcash (ZEC).

Tento finanční ukazatel byl zvolen z toho důvodu, že kolem kryptoměn se v posledních několika letech hodně mluvilo, ale opět došlo k lehkému útlumu a přešel mediálně do pozadí. Jelikož již v historii došlo k dvěma velkými růstům hodnot nastává otázka kdy a jestli vůbec dojde k dalšímu nárůstu hodnoty. Zároveň jsou kryptoměny extrémně volatilní, což pomůže okořenit výsledky práce nebo naopak může i kompletně rozhodit model.

Pro porovnání této extrémní volatility s běžnou volatilitou byly vybrány běžné měny, které jsou hodnotnější než koruna česká. Hodnota jednotlivých kurzů je vůči koruně české. Jsou jimi euro (EUR), americký dolar (USD), britská libra (GBP), norská koruna (NOK), švýcarský frank (CHF) a dánská koruna (DKK).

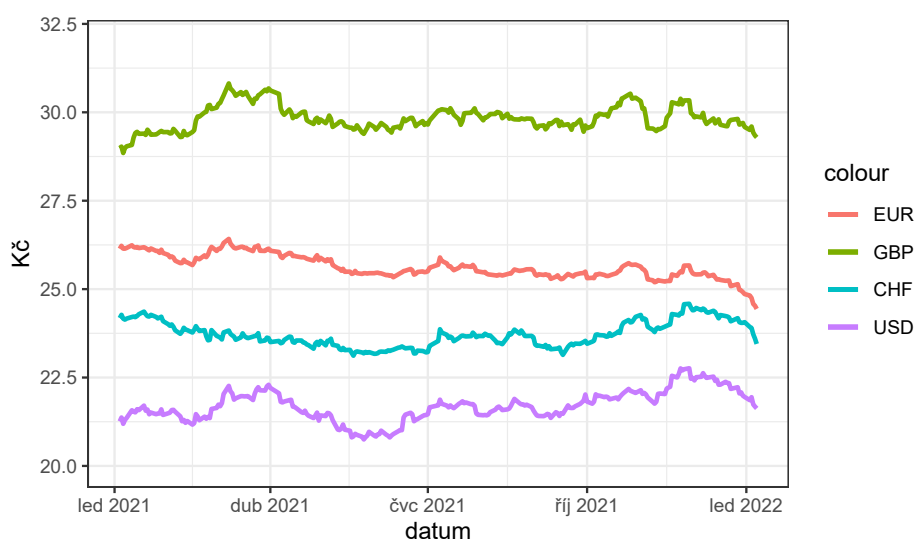
# 1. Data

Ať už se jedná o měny nebo kryptoměny, jejich hodnoty byly pozorovány pro účel této semestrální práce od 4. ledna 2021 do 7. ledna 2022. Jedná se o čerstvá data za poslední rok.

## 1.1 Měny

Data lze získat z internetové stránky (Kurzy.cz, 2022). Staženy byly kurzy měn CZK/EUR, CZK/USD, CZK/GBP, CZK/GBP, CZK/CHF a CZK/DKK. Nejsou však ve vhodném formátu a datový soubor musel být vytvořen ručně. Bylo nutné data očistit, protože byla brána jako slova, protože obsahovala zvláštní typ mezery. Zároveň bylo potřeba seřadit časovou osu vzestupně. Některé dny, například dny státních svátků, v datasetu chybí. Na doméně nebyl uveden důvod chybějících dnů.

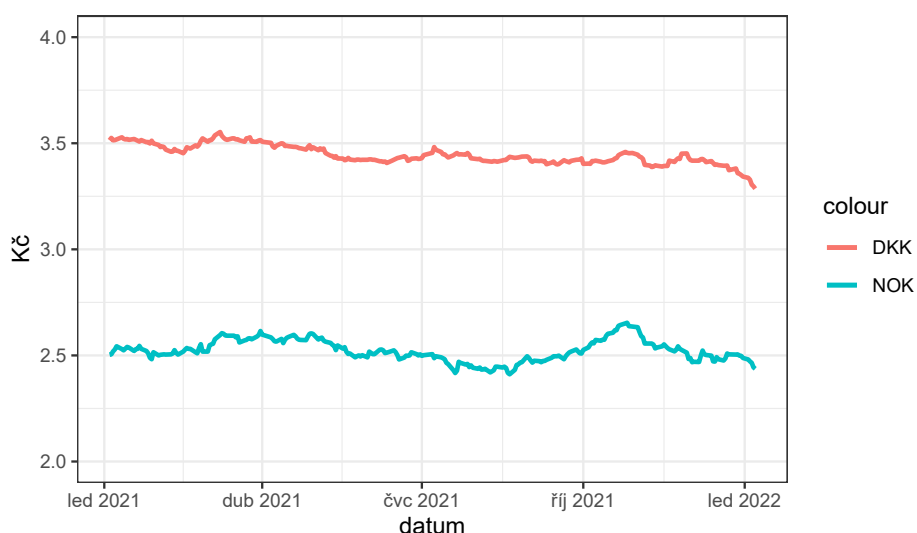
Vývoj jednotlivých měn vůči české koruně viz grafy na obrázcích 1.1 a 1.2. Všimněme si drobné závislosti, protože se jedná vždy o vztah vůči koruně české.



Obrázek 1.1: Výrazně hodnotnější kurz měny vůči Kč.

## 1.2 Kryptoměny

Data o jednotlivých kryptoměnách lze stáhnout z internetové stránky (CryptoDataDownload.com, 2022) v podobě „Daily“ - denní. Z této internetové stránky byla vybrána americká burza Gemini. Veškerá data jsou již naformátována podle potřeby, jen je potřeba seřadit vzestupně časovou osu. Z možností „Open“ (kurz na začátku dne), „High“ (nejvyšší hodnota dne), „Low“ (nejnižší hodnota dne) a „Close“ byla vybrána pro analýzu hodnota „Open“.

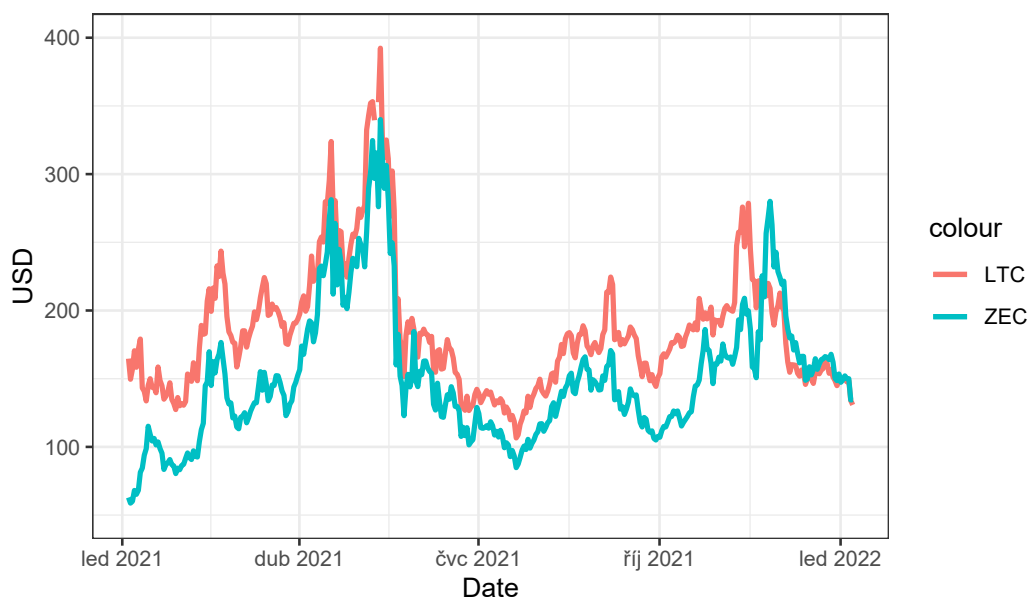


Obrázek 1.2: Lehce hodnotnější kurz měny vůči Kč.

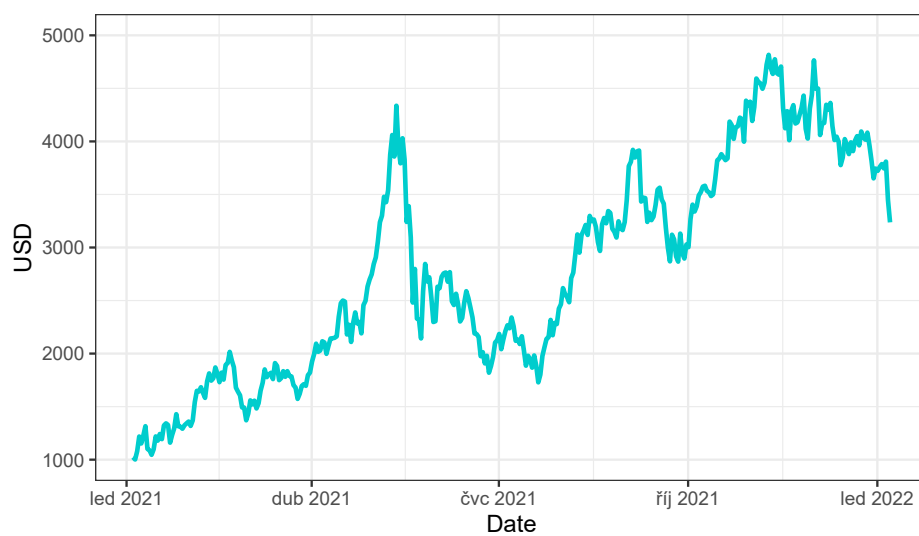
tedy hodnota kurzu kryptoměny vůči americkému dolaru na začátku dne ve 4 hodiny ráno koordinovaného světového času (UTC). Zároveň bylo potřeba datasety zkrátit na poslední rok pro vhodné porovnání s měnami.

Bitcoin je nejstarší kryptoměnou, která ovládá svým vývojem i všechny ostatní kryptoměny. Je také kryptoměnou nejhodnotnější. Ethereum je jednou z prvních kryptoměn, které přišli po bitcoinu. Litecoin a Zcash jsou kryptoměny, které přišli později a nenabývají tak velké hodnoty jako výše zmíněné kryptoměny.

Grafy jednotlivých kryptoměn viz obrázky 1.3, 1.4 a 1.5. Vývoj kurzu kryptoměn je vyobrazen do více grafů z důvodu různě vysokých hodnot jednotlivých kryptoměn.



Obrázek 1.3: Vývoj slabších kryptoměn oproti americkému dolaru.



Obrázek 1.4: Vývoj etheria (ETH) oproti americkému dolaru.



Obrázek 1.5: Vývoj bitcoinu (BTC) oproti americkému dolaru.

## 2. Teoretická část

### 2.1 Model GARCH

Model GARCH patří do skupiny skupiny modelů založených na pozorování (observation driven model). Zkratka GARCH znamená „generalized autoregressive conditional heteroskedasticity“. Publikoval jej (Bollerslev, 1986) a říká, že:

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \{\epsilon_t\} t \in \mathbb{Z} \sim N(0,1),$$
$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha y_t^2 + \beta \sigma_t^2,$$

kde  $\omega$ ,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou parametry k odhadu a  $\epsilon_t$  je náhodná složka z normovaného normálního rozdělení.

Pokud parametry budou splňovat podmínku  $\alpha + \beta < 1$ , jedná se o stacionární jev.

### 2.2 Maximální věrohodný odhad

Kvalitu modelu můžeme vyhodnotit pomocí hodnoty maximálního věrohodného odhadu výpočtem log likelihood. To se pro spojité rozdělení spočítá jako

$$\log \mathcal{L}(\hat{\theta} | X_1, X_2, \dots, X_n) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma^2) - \frac{y^2}{2\sigma^2}.$$

## 3. Aplikace a výsledky

### 3.1 GARCH v R

Surový přepis GARCH modelu pro optimalizaci parametrů do prostředí jazyka R viz níže. GARCH model zapsán jako funkce, pro opětovné použití a vrací hodnotu log likelihood, kterou se snažíme maximalizovat (minimalizujeme zápornou hodnotu) pomocí optimalizačního balíčku „nloptr“.

```
GARCH = function(theta,y) {  
  
  # pocet pozorovani  
  T = length(y)  
  
  # parametry  
  omega = theta[1]  
  alpha = theta[2]  
  beta = theta[3]  
  
  # volatilita  
  sig2 = rep(NA,T)  
  sig2[1] = var(y)  
  
  # GARCH model  
  for (t in 1:(T-1))  
  {  
    sig2[t+1] = omega + alpha * y[t]^2 + beta * sig2[t]  
  }  
  
  # log likelihood  
  l = -(1/2)*log(2*pi) - (1/2)*log(sig2) - (1/2)*y^2/sig2  
  llik = sum(l)  
  
  # budeme ve funkci minimalizovat  
  return(-llik)  
}
```

Při opakování výpočtů bylo dosaženo různých hodnot, ty se však držely v blízkém okruhu.



Skript pro simulaci GARCH modelu s již vypočtenými parametry níže. Je napsáno opět jako funkce a vrací data frame, který je připravený k tvorbě grafů.

```
SIMUL = function (theta,y) {  
  
  # pocet pozorovani  
  T = length(y)  
  
  # parametry  
  omega = theta[1]  
  alpha = theta[2]  
  beta  = theta[3]  
  sig1  = abs(omega/(1-alpha-beta))  
  # tady byl problem pro (alpha + beta) >= 1, proto abs()  
  
  # inovace  
  epsilon = rnorm(T)  
  
  # volatilita  
  sig = rep(0,T)  
  x = rep(0,T)  
  sig[1] = sig1  
  
  # GARCH model  
  for (t in 1:T) {  
    x[t] = sqrt(sig[t]) * epsilon[t]  
    sig[t+1] = omega + alpha * x[t]^2 + beta * sig[t]  
  }  
  # priprava pro graf  
  df = data.frame(sig = sqrt(sig[1:T]), y = x)  
  df_g = melt(df)  
  df_g$x = rep(1:T,2)  
  
  return(df_g)  
}
```

Nyní již stačí funkci vyvolat a graficky zobrazit.

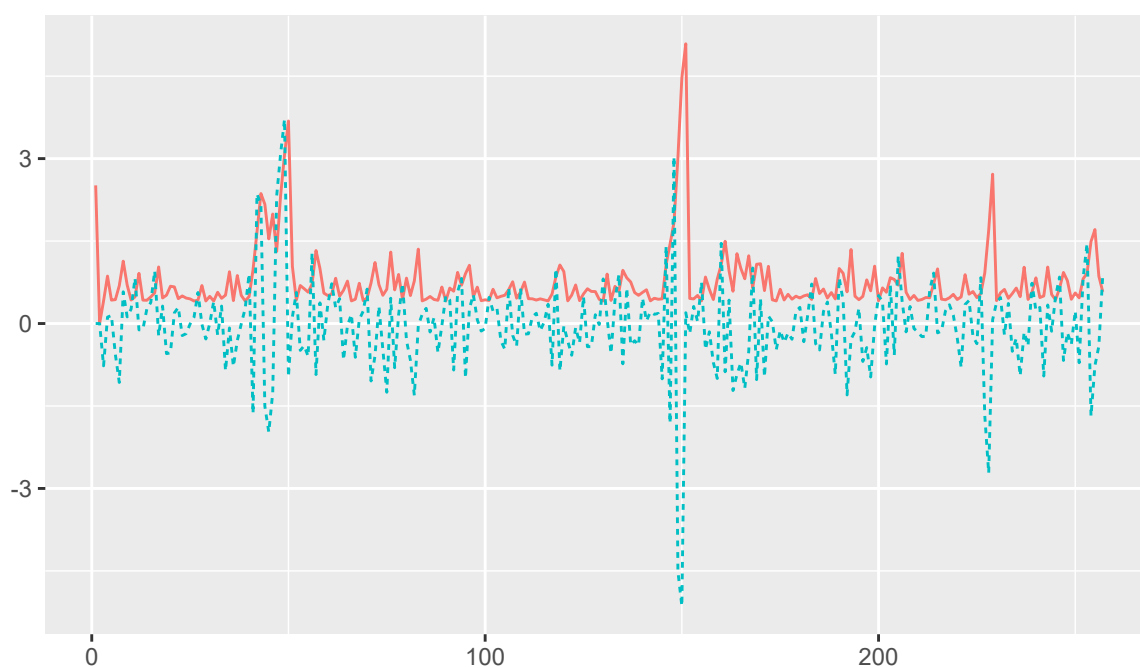
## 3.2 Měny

Výsledné parametry modelu GARCH jednotlivých měn viz tabulka 3.1. Vidíme, že se od ostatních měn výrazně liší britská libra. Oproti ostatním má nastavený výš parametr  $\beta$  a naopak níž parametr  $\alpha$ . Libra je tedy více ovlivněna volatilitou z předchozího období oproti ostatním měnám. Americký dolar zase dosahuje nejvyšší hodnoty parametru  $\omega$ .

Tabulka 3.1: Přehled parametrů GARCH modelu pro jednotlivé měny.

parametr	EUR	USD	GBP	NOK	CHF	DKK
$\omega$	0,0488	0,2385	0,0001	0,1119	0,0119	0,0061
$\alpha$	0,9993	0,9996	0,4250	0,9821	0,9997	0,9989
$\beta$	0,0001	0,0001	0,5777	0,0001	0,0001	0,0001

Simulace GRACH modelu s odhadnutými parametry již není náročná. Pro měny byl vybrán jako zástupce pro vyobrazení kurzu norské koruny vůči české koruně. Graf viz obrázek 3.1. Červeně vyobrazena variance a modře odhadované hodnoty CZK/NOK.



Obrázek 3.1: Simulace GARCH modelu kurzu CZK/NOK.

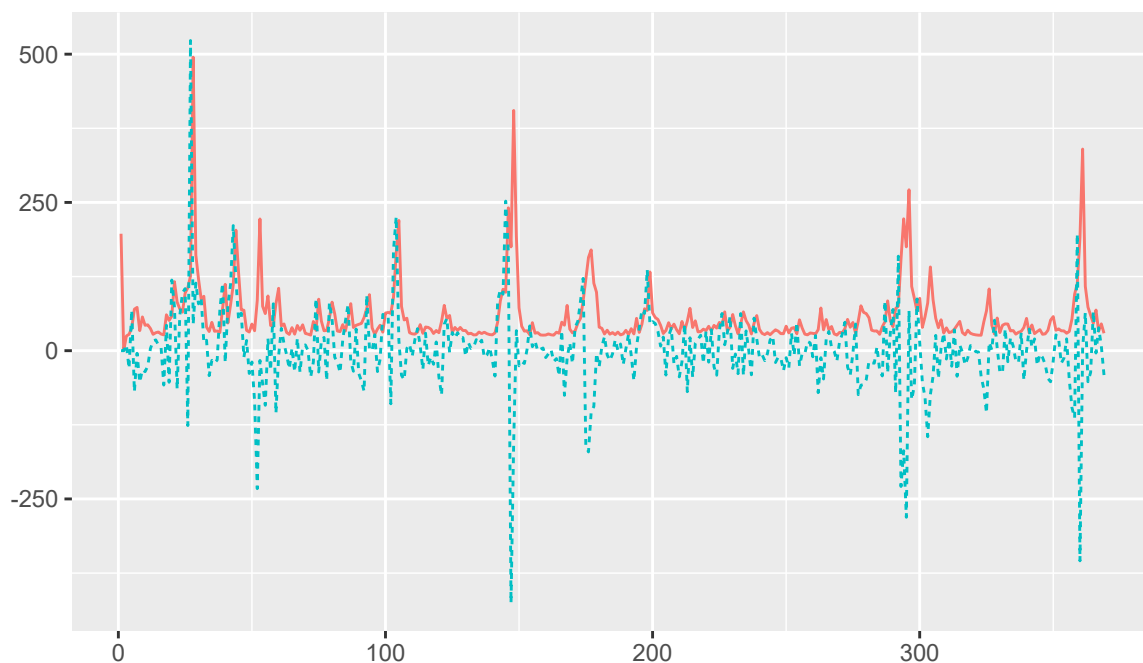
### 3.3 Kryptoměny

Vývybrazení sledné parametry modelu GARCH jednotlivých kryptoměn viz tabulka 3.2. Zcoin dosahuje nejvyšší hodnoty parametru  $\beta$ , ovšem pohybuje se v porovnání s ostatními kryptoměnami na podobných hodnotách. Ovšem parametr  $\omega$  se vymknul kontrole a dosahuje vysokých hodnot u všech kryptoměn kromě bitcoinu.

Tabulka 3.2: Přehled parametrů GARCH modelu pro jednotlivé kryptoměny.

parametr	BTC	ETH	LTC	ZEC
$\omega$	0,0162	221,4059	612,5347	440,7537
$\alpha$	0,9169	0,9279	0,8877	0,8566
$\beta$	0,0874	0,0830	0,0966	0,1300

Pro kryptoměny byl pro vizualizaci simulovaného GARCH modelu vybrána kryptoměna Litecoin. Graf viz obrázek 3.2. Červeně vyobrazena variance a modře odhadované hodnoty LTC.



Obrázek 3.2: Simulace GARCH modelu kryptoměny LTC.

## 4. Závěr

Ať už se jednalo o kryptoměny nebo měny parametr  $\alpha$  vždy převažoval před parametrem  $\beta$  až na jednu výjimkou, kterou byl kurz britské libry vůči české koruně. Tam lehce převažoval parametr  $\beta$ . Lze tedy vyvodit, že tento kurz více reaguje na dlouhodobou hodnotu kurzu oproti ostatním, které spíše reagují krátkodobě. Zároveň zde parametr  $\omega$  dosahoval nejnižší hodnoty - téměř nula.

Parametr  $\omega$  dosahoval různých hodnot pro kryptoměny. To mohlo být způsobeno extrémní volatilitou. Pro měny dosahoval v rámci měn podobných hodnot a překvapivě i bitcoin dosahoval podobné hodnoty. Pro Ethereum, Litecoin a Zcash má tedy obrovský vliv kubická expanze volatility.

Podařila se i simulace jednotlivých GARCH modelů s nastavenými odhadnutými parametry. Při porovnání s vývoji původních hodnot kurzů měn a kryptoměn se částečně podařilo predikovat záchvěvy.

# Seznam použité literatury

BOLLERSLEV, Tim, 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.  
*Journal of Econometrics*. Roč. 31, s. 307–327.

CRYPTODATADOWNLOAD.COM, 2022. *Historical OHLC price data includes volume*.  
2022-01. Dostupné také z: <https://www.cryptodatadownload.com/data/gemini/>.

KURZY.CZ, 2022. *Historie kurzů měn*. 2022-01.  
Dostupné také z: <https://www.kurzy.cz/kurzy-men/>.