Problem ruiny gracza

Gracz A - kapitał początkowy a $\in \mathbb{N}$

Gracz B - kapitał początkowy b $\in \mathbb{N}$

M = a + b

Gra składa się tur. Tura to wyłożenie jednej monety przez każdego gracza i zabranie obu monet przez zwycięzce. Gra trwa aż jeden z graczy straci wszystkie monety.

Prawdopodobieństwo, że A wygra 1 turę - p_A = p

Prawdopodobieństwo, że B wygra 1 turę - p_B = q = 1-p

Q_i - zdarzenie ruiny A przy a = i

Jakie jest prawdopodobieństwo ruiny gracza A?

P(Q_i) = P(Q_i|wygranie 1 tury przez A)P(wygranie tury przez A) +

+ P(Q_i|przegranie 1 tury przez A)P(przegranie tury przez A)

P(wygranie tury przez A) = p

P(przegranie tury przez A) = q

P(Q_i) = r_i

P(Q_i|wygranie 1 tury przez A) = r_{i+1}

P(Q_i|przegranie 1 tury przez A) = r_{i-1}

$r_i = r_{i+1}p + r_{i-1}q$

$r_i\,(p+q) = r_{i+1}p + r_{i-1}q$

$r_i p + r_i q = r_{i+1}p + r_{i-1}q$

$r_i q + r_{i-1}q = r_{i+1}p - r_i p$

$\frac{r_{i+1} - r_i}{r_i - r_{i-1}} = \frac{q}{p} = \text{const}$

$r_{i+1} - r_i = \left(\frac{q}{p}\right)(r_i - r_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^i (r_1 - r_0)$

$r_M - r_0 = \Sigma^{M-1}{}_{i=0}(r_{i+1} - r_i)$

$r_M = 0$

$r_0 = 1$

$-1 = \Sigma^{M-1}{}_{i=0}(r_{i+1} - r_i) = \Sigma^{M-1}{}_{i=0}\left(\frac{q}{p}\right)^i (r_1 - r_0)$

Dla p $\neq$ q

$\Sigma^{M-1}{}_{i=0}\left(\frac{q}{p}\right)^i (r_1 - r_0)$ traktujemy jako ciąg geometryczny o znanym wzorze na sumę

$-1 = (r_1 - r_0)\,\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M}{1-\left(\frac{q}{p}\right)}$

Analogicznie jeśli rozważymy $r_i - r_0$ otrzymamy

$r_i - r_0 = (r_1 - r_0)\,\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)}$

Dzieląc oba powyższe

$\frac{r_i - r_0}{r_M - r_0} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M}$

$\frac{r_i - 1}{0-1} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M}$

$r_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M}$

Dla $p = q = \frac{1}{2}$

Suma $\Sigma^{M-1}{}_{i=0}\left(\frac{q}{p}\right)^i(r_1 - r_0)$ upraszcza się do postaci M$(r_1 - r_0)$

-1 = $r_M - r_0$ = M$(r_1 - r_0)$

i analogicznie

r_i - 1 = $r_i - r_0$ = i$(r_1 - r_0)$

Dzieląc oba powyższe

$\frac{r_i - 1}{0-1} = \frac{r_i - r_0}{r_M - r_0} = \frac{i}{M}$

$r_i = 1 - \frac{i}{M}$

Czy gra się zakończy?

Dla $p = q = \frac{1}{2}$

Hipoteza: gra zawsze się zakończy ruiną A lub B

$r^A{}_a + r^B{}_b = (1 - \frac{a}{M}) + (1 - \frac{b}{M}) = 1 - \frac{a}{a+b} + 1 - \frac{b}{a+b} = 1$

Potwierdzone

Dla p ≠ q

Hipoteza: gra zawsze się zakończy ruiną A lub B

Proszę zwrócić uwagę że w przypadku mowy o ruinie gracza B ‘p’ - jest prawdopodobieństwem na wygraną tury przez A, a więc przegraniem tury przez B

$$r^A{}_a + r^B{}_b = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M} + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^M}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^M} = \frac{p^M\left[\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^M\right]}{p^M - q^M} + \frac{q^M\left[\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^M\right]}{q^M - p^M} =$$

$$\frac{p^M\left(\frac{q}{p}\right)^a - q^M - q^M\left(\frac{p}{q}\right)^b + p^M}{p^M - q^M} = \frac{p^M - q^M + p^a\, p^b\left(\frac{q}{p}\right)^a - q^a\, q^b\left(\frac{p}{q}\right)^b}{p^M - q^M} = 1$$

Potwierdzone

Problem nieskończenie bogatego przeciwnika

Gracz A - kapitał a

Gracz B - kapitał b → ∞

p - prawdopodobieństwo wygrania jednej tury przez A

q - prawdopodobieństwo przegrania jednej tury przez A

Dla $p = q = \frac{1}{2}$

P(wygrana B) = ${r^A}_a = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{a}{a+b}\right) = \lim_{b\to\infty} \frac{b}{a+b} = 1$

Dla p < q

P(wygrana B) = ${r^A}_a = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a \Big/ \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}{1\Big/\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}\right) = \frac{0-1}{0-1} = 1$

Dla p > q

P(wygrana B) = ${r^A}_a = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}\right) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 0}{1-0} = \left(\frac{q}{p}\right)^a$