Proces Markowa / Łańcuchy Markowa

Wykorzystywana literatura:

- Wykłady (3,4): https://kacpertopol.github.io/
- Załączone zdjęcia (data dostępu 28.11.2024):

http://statystyka.rezolwenta.eu.org/Materialy/Markowa.pdf

https://ww2.ii.uj.edu.pl/~spurek/publications/zbior.pdf

Łańcuchy Markowa to procesy dyskretne w czasie i o dyskretnym zbiorze stanów, "bez pamięci".

Zwykle będziemy zakładać, że zbiór stanów to podzbiór zbioru liczb całkowitych Z lub zbioru $\{0, 1, 2, ...\}$ jako uproszczenie zapisu $\{S_0, S_1, S_2, ...\}$.

Łańcuchem Markowa nazywamy proces będący ciągiem zmiennych losowych

$$X_0, X_1, \ldots$$

Określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przyjmujących wartości całkowite i spełniające warunek

$$P(X_n = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \\ = P(X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}) \qquad \bigwedge_n \quad \bigwedge_{i_0,\ldots,i_{n-1},j \subset \{0,1,2,\ldots\}}$$

Zatem dla łańcucha Markowa rozkład prawdopodobieństwa warunkowego położenia w n-tym kroku zależy tylko od prawdopodobieństwa warunkowego położenia w kroku poprzednim a nie od wcześniejszych punktów trajektorii (historia).

Niech

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

oznacza prawdopodobieństwo warunkowe przejścia w n-tym kroku ze stanu i do stanu j.

Jeśli $p_{ij}^{(n)}$ nie zależą od n to łańcuch nazywamy **jednorodnym (jednorodnym w czasie)** i stosujemy zapis p_{ij}.

Zakładając, że numery stanów są całkowite, nieujemne można prawdopodobieństwa przejść zapisać w macierzy

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

W pierwszym wierszu mamy kolejno prawdopodobieństwo pozostania w stanie 0 w n-tym kroku i prawdopodobieństwa przejścia w n-tym kroku ze stanu o numerze 0 do stanów o numerach 1, 2, itd. Analogicznie określone są pozostałe wiersze.

Dla łańcuchów jednorodnych powyższą macierz oznaczamy P i ma ona postać

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Własności macierzy prawdopodobieństw przejść:

a) $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ b) suma każdego wiersza jest równa 1.

Zauważmy też, że w macierzy tej nie może istnieć kolumna złożona z samych zer.

Każdą macierz spełniającą warunki a), b) nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Będziemy dalej przyjmować najczęściej, że rozpatrywane łańcuchy Markowa mają skończona liczbę stanów.

$p_i(n)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i po n krokach (rozkład zmiennej losowej X_n). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora p(n), jest to rozkład łańcucha Markowa po n krokach.

$p_i(0)$ - prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie i w chwili początkowej (rozkład zmiennej losowej X_0 - rozkład początkowy). Prawdopodobieństwa te stanowią składowe wektora p(0).

p_{ij} - prawdopodobieństwo przejścia od stanu i do stanu j w jednym (dowolnym) kroku,

P = [p_{ij}]- **macierz prawdopodobieństw przejść** (w jednym kroku), jest **to macierz stochastyczna**.

Przykład.

Błądzenie przypadkowe z odbiciem. Np. gdy stany 0 i 4 są odbijające

$$[0] \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} [1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [2] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [3] \underset{1}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [4]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład.

Błądzenie przypadkowe z pochłanianiem. Np. gdy stany 0 i 4 są pochłaniające

$$1 \circlearrowleft [0] \xleftarrow{q} [1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [2] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [3] \xrightarrow{p} [4] \circlearrowright 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem ruiny gracza jest szczególnym przypadkiem błądzenia przypadkowego z pochłanianiem. Gracz dysponuje początkowo kwotą k zł. W kolejnych etapach z prawdopodobieństwem p wygrywa 1zł albo z prawdopodobieństwem q = 1- p przegrywa 1zł. Gra kończy się gdy gracz osiągnie kwotę w > k zł lub przegra wszystko.

Zatem mamy dwa stany pochłaniające 0 i w.

Graf i macierz rozpatrywanego łańcucha są następujące.

$$1 \circlearrowleft [0] \xleftarrow{q} [1] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [k] \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} [w-1] \xrightarrow{p} [w] \circlearrowright 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

rozkład początkowy określa $X_0 = k$

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

i rozkładzie początkowym p(0) = (1, 0, 0).

Po pierwszym kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(1) = p(0)P = [1{,}0{,}0]\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} = [0{,}5;0;0{,}5]$$

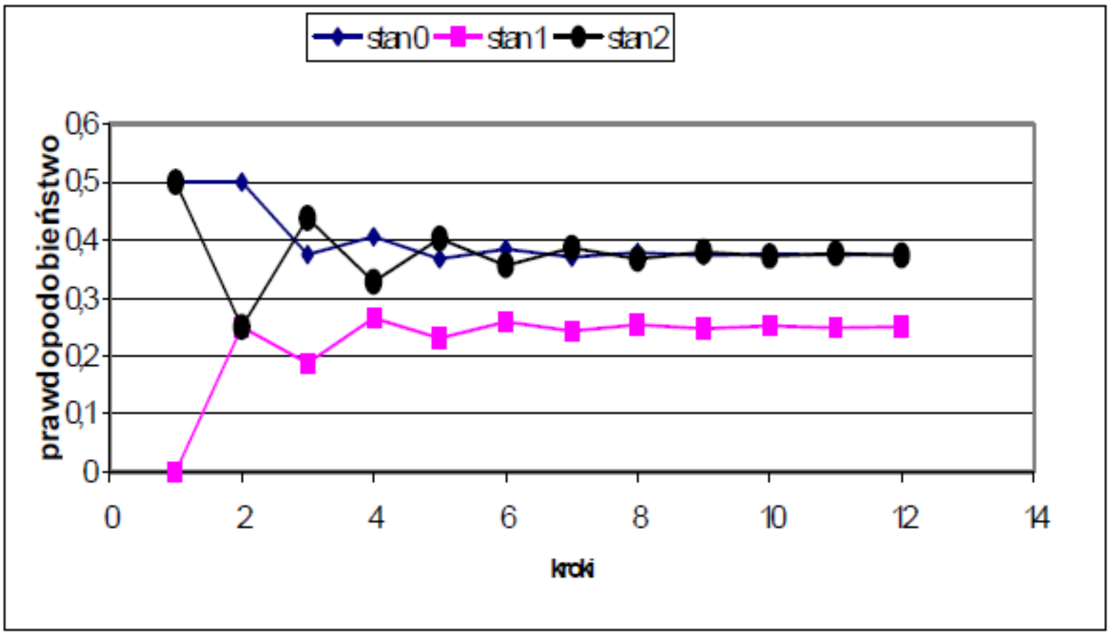
Po drugim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(2) = p(0)P^2 = [1{,}0{,}0]\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}375 & 0{,}438 & 0{,}188 \\ 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}625 \end{bmatrix} = [0{,}5;0{,}25;0{,}25]$$

Po trzecim kroku prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach są równe

$$p(3) = p(0)P^3 = [1{,}0{,}0]\begin{bmatrix} 0{,}375 & 0{,}188 & 0{,}438 \\ 0{,}281 & 0{,}203 & 0{,}516 \\ 0{,}438 & 0{,}344 & 0{,}219 \end{bmatrix} = [0{,}375;\ 0{,}188;\ 0{,}438]$$

Obliczając kolejne potęgi macierzy P możemy wyliczone wartości p(n) zestawić dla n = 1, ..., 12 w następującej tabeli i przedstawić na wykresie.

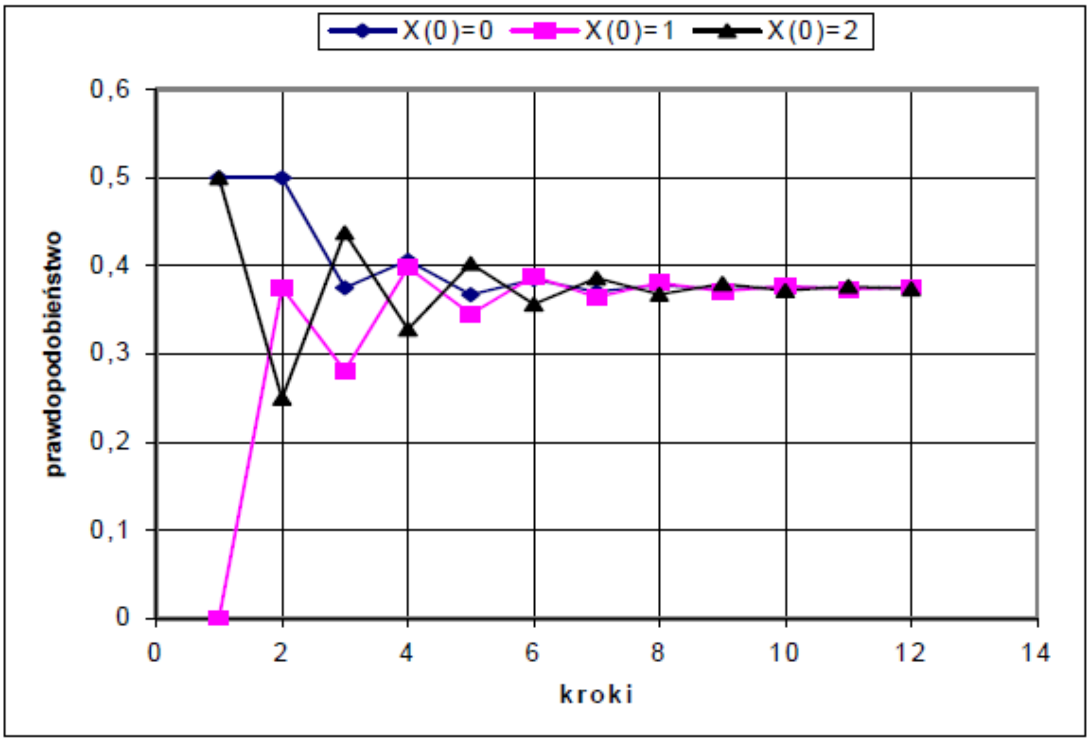


Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwa stabilizują się na określonym poziomie i dążą do pewnych granic, co związane jest z regularności rozpatrywanej macierzy stochastycznej.

Zobaczmy teraz jak zmienia się prawdopodobieństwo znalezienia się w ustalonym stanie w poszczególnych krokach, gdy zmienia się rozkład początkowy.

Rozpatrzmy stan 0 i rozkłady początkowe p(0) = (1, 0, 0), p(0) = (0, 1, 0), p(0) = (0, 0, 1).

Obliczone prawdopodobieństwa (w podobny sposób jak wyżej) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla $n = 1, \ldots, 12$.



Zauważmy, że rozpatrywane prawdopodobieństwo dla dużych n nie zależy od rozkładu początkowego.

Granicę $\Pi = p(\infty) = \lim_{n\to\infty} p(n)$ (o ile istnieje) nazywamy **rozkładem granicznym** łańcuch Markowa.

$$\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \ \Pi_2, \ldots).$$

Łańcuch Markowa dla którego istnieje rozkład graniczny niezależny od rozkładu początkowego p(0) nazywamy **łańcuchem ergodycznym**.

Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:

Sposób I.

Rozkład graniczny Π jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I)\,\Pi^T = 0,$$

$$\text{spełniającym warunek } \sum_{i=1} \Pi_i = 1,$$

Uwaga.

Z powyższej równości wynika, że $\Pi P = \Pi$ co oznacza, że wektor Π jest wektorem własnym macierzy P odpowiadającym wartości własnej równej 1.

Klasyfikacja stanów łańcucha Markowa.

Niekiedy będziemy utożsamiać stan s_k z liczbą k.

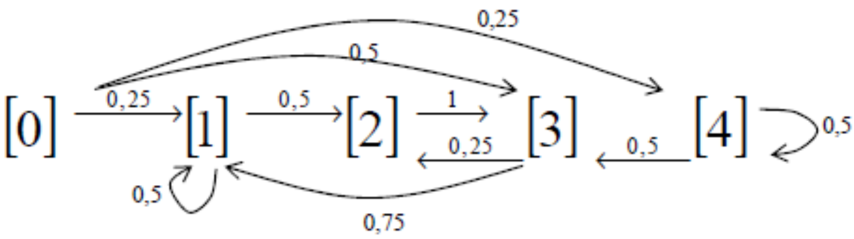
Stan s_k jest **osiągalny** ze stanu s_j jeśli $p_{jk}(n) > 0$ dla pewnego n,

Stany s_k i s_j nazywamy **wzajemnie komunikującymi się** jeśli stan s_k jest osiągalny ze stanu s_j, i odwrotnie.
Relacja wzajemnego komunikowania się określona na zbiorze stanów łańcucha Markowa jest:
- symetryczna,
- przechodnia (z równości Chapmana-Kołmogorowa).

Zbiór stanów C nazywamy **zamkniętym**, jeżeli żaden stan spoza C nie da się osiągnąć wychodząc z dowolnego stanu w C.

Stan s_k jest **stanem nieistotnym (chwilowym)** gdy istnieje stan s_j osiągalny ze stanu s_k a stan s_k nie jest osiągalny ze stanu s_j ,
Stan, który nie jest nieistotny nazywa się **istotny (powracający).**

Przykład.
Rozpatrzmy łańcuch Markowa



Jego macierz P ma postać

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Stany 0 i 4 są nieistotne.
Stany 1, 2 i 3 są istotne.
Zbiór stanów {1, 2, 3} jest zamknięty.

Pojedynczy stan zamknięty (musi być $p_{kk} = 1$) nazywamy stanem **pochłaniającym**.
Stan s_k jest **odbijający** gdy $p_{kk} = 0$. Stan odbijający może być zarówno chwilowy jak i powracający.

Łańcuch Markowa jest **nieprzywiedlny**, gdy wszystkie jego stany wzajemnie komunikują się, w przeciwnym przypadku łańcuch jest **przywiedlny**.

Łańcuchy okresowe.
Okresem stanu powracającego j nazywamy liczbę:

$$o(j) = NWD(n: p_{jj}(n)>0)$$

jest to największy wspólny dzielnik takich liczb n, że powrót do stanu j może nastąpić po n krokach.

Stan j nazywamy **okresowym** gdy ma okres większy od 1 i **nieokresowym** gdy ma okres 1.

Twierdzenie.
W skończonym nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.

Zatem nieprzywiedlny łańcuch Markowa nazywamy okresowym, gdy jego stany mają okres większy od 1, w przeciwnym przypadku łańcuch nazywamy nieokresowym.
Stan, który jest powracający, niezerowy i nieokresowy nazywa się **ergodyczny.**

Łańcuch ergodyczny.
Łańcuch jest **ergodyczny** jeśli istnieje

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \pi_j \qquad \sum_j \pi_j = 1 \qquad \Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \ldots)$$

Rozkład Π nazywamy **rozkładem granicznym**.

Twierdzenie Jeśli w łańcuchu Markowa o skończenie wielu stanach, wszystkie stany istotne są nieokresowe i tworzą jedną klasę, to istnieją prawdopodobieństwa ergodyczne, przy czym dla stanów istotnych są one dodatnie, zaś dla stanów chwilowych są one równe 0.

Łańcuch stacjonarny .
Jednorodny łańcuch Markowa jest **stacjonarny** gdy istnieje rozkład Π jego stanów, **zwany rozkładem stacjonarnym**, że

$$\Pi P = \Pi$$

(tzn. Π jest wektorem własnym macierzy P dla wartości własnej 1).
Zatem dla dowolnego n, $\Pi P^n = \Pi$, oznacza to, że jeśli rozkład początkowy jest równy Π, to **rozkład łańcucha po dowolnej liczbie kroków jest taki sam** i równy Π.

Jeśli macierz P łańcucha jest nierozkładalna to rozkład stacjonarny jest dokładnie jeden. Jeśli macierz P łańcucha jest rozkładalna to rozkładów stacjonarnych jest więcej niż jeden.

W łańcuchu ergodycznym rozkład stacjonarny (graniczny) nie zależy od rozkładu początkowego.

Uwaga.

ergodyczny $\Rightarrow$ **stacjonarny**

Odwrotna implikacja nie musi zachodzić.

Zadanie 9.1. *W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem* 0.7*, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem* 0.4*.*

Narysuj łańcuch markowa oraz wyznacz macierz przejścia dla niego.

Zadanie 9.2. *W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem* 0.7*, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem* 0.4*.*

W poniedziałek padało. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.

Oznaczenia: stan $1 =$ *dzień słoneczny,* $2 =$ *deszczowy.*

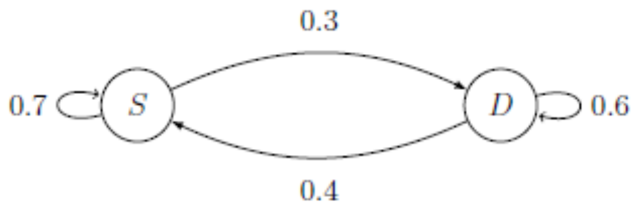
Zadanie 9.3. *W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem* 0.7*, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem* 0.4*.*

Meteorolodzy przewidują 80% *szans na deszcz w poniedziałek. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.*

Oznaczenia: stan $1 =$ *dzień słoneczny,* $2 =$ *deszczowy.*

Zadanie 9.4. *Znajdź rozkład stacjonarny dla łańcucha markowa z powyższych zadań.*

Rozwiązanie 9.1. *Zacznijmy od narysuj łańcucha markowa.*



Możemy teraz napisać macierz przejść

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że wiersze sumują się do 1.

Rozwiązanie 9.2. *Zauważmy, że mamy dokładnie taki sam łańcuch Markowa jak w poprzednim zadaniu. Wyznaczmy pogodę na kolejne dni*

1. *Wtorek*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

2. *Środa*

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

3. *Czwartek*

$$\begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.556 & 0.444 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 9.3. *Zauważmy, że mamy dokładnie taki sam łańcuch Markowa jak w poprzednim zadaniu. Wyznaczmy pogodę na kolejne dni*

1. *Wtorek*

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix}$$

2. *Środa*

$$\begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix}$$

3. Czwartek

$$\begin{bmatrix}0.538 & 0.462\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5614 & 0.4386\end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 9.4. *Zauważmy, że mamy dokładnie taki sam łańcuch Markowa jak w poprzednim zadaniu. Przypomnij, że macierz przejść jest postaci*

$$P = \begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}.$$

Aby wyznaczyć rozkład stacjonarny musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases}\pi P = \pi\\ \pi_1 + \pi_2 = 1\end{cases}$$

Obliczmy

$$\pi P = \begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 & 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2\end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases}0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1\\ 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 = \pi_2\\ \pi_1 = 1 - \pi_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-0.3\pi_1 + 0.4\pi_2 = 0\\ 0.3\pi_1 - 0.4\pi_2 = 0\\ \pi_1 = 1 - \pi_2\end{cases}$$

$$-0.3 + 0.3\pi_2 + 0.4\pi_2 = 0$$

$$0.7\pi_2 = 0.3$$

$$\pi_2 = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$$

$$\pi_1 = \frac{4}{7}.$$

Rozkład stacjonarny to:

$$\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}.$$

Ale też:

In[∘]:=
```
P = {{0.7, 0.3}, {0.4, 0.6}};
MatrixForm[P]
```
postać macierzy

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
P.P // MatrixForm
```
postać macierzy

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
P.P.P // MatrixForm
```
postać macierzy

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.583 & 0.417 \\ 0.556 & 0.444 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
P.P.P.P // MatrixForm
```
postać macierzy

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
P.P.P.P.P.P.P.P.P.P // MatrixForm
```
postać macierzy

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.571431 & 0.428569 \\ 0.571425 & 0.428575 \end{pmatrix}$$

In[∘]:= $N\left[\left\{\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right\}\right]$

przybliżenie numeryczne

Out[∘]= {0.571429, 0.428571}

Oraz:

Sposoby wyznaczania rozkładu granicznego:

Sposób I.

Rozkład graniczny Π jest jedynym niezerowym rozwiązaniem układu

$$(P^T - I)\,\Pi^T = 0,$$

$$\text{spełniającym warunek} \quad \sum_{i=1} \Pi_i = 1,$$

Uwaga.

Z powyższej równości wynika, że $\Pi P = \Pi$ co oznacza, że wektor Π jest wektorem własnym macierzy P odpowiadającym wartości własnej równej 1.

In[∘]:=
```
PT = Transpose[P];
MatrixForm[PT]
```
transpozycja

postać macierzy

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
PT - {{1, 0}, {0, 1}} // MatrixForm
```
postać macierzy

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
$$\begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi 1 \\ \pi 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-0.3\,\pi 1 + 0.4\,\pi 2 = 0$

$\pi 1 + \pi 2 = 1$

$\pi 1 = \frac{4}{7}$

$\pi 2 = \frac{3}{7}$

Uwaga!

Przykład.

Rozpatrzmy łańcuch Markowa

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, "1"] & {[1]} \arrow[r, "1"] & {[2]} \arrow[ll, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

Jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie stany mają okres 3.

Zauważmy, że wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$W(\lambda) = \lambda^3 - 1$$

i jej wartości własne są równe: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Ponieważ wszystkie wartości własne maja moduł 1 i $\lambda_1 = 1$ jest jednokrotną wartością własną to rozpatrywana macierz jest nierozkładalna i cykliczna.

Łańcuch ten jest stacjonarny, jego rozkładem stacjonarnym jest (1/3, 1/3, 1/3).

Rozkład ten można wyznaczyć I lub II sposobem obliczania rozkładów granicznych.

Kolejne potęgi macierzy P są równe

$$P^2 = P^{3n+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; P^3 = P^{3n+3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P^4 = P = P^{3n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

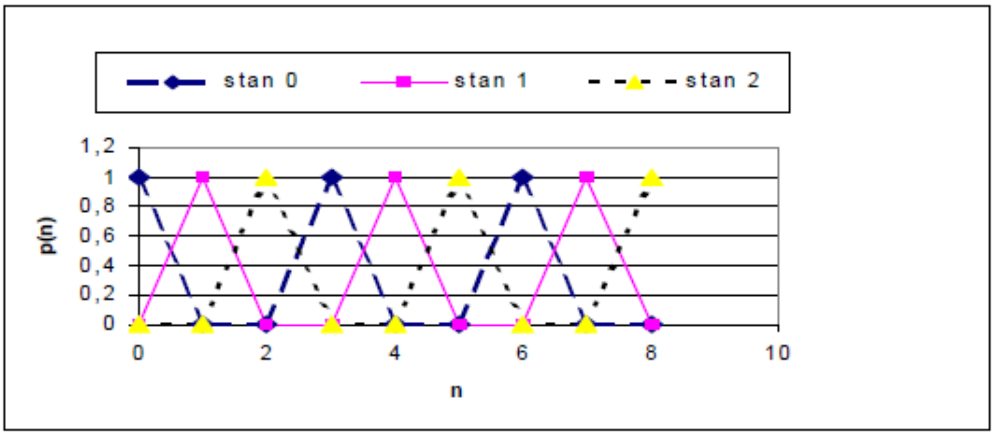
dla n = 0, 1, 2, ...

Zauważmy, że żadna kolumna P^n nie składa się wyłącznie z elementów dodatnich.

Rozkład graniczny nie istnieje.

Weźmy np. rozkład początkowy p(0) = (1, 0, 0).

Obliczone prawdopodobieństwa p(0) zestawiono w tabeli i przedstawiono na wykresie dla



n = 0, ..., 8.

p(n) \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Stan 0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
Stan 1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
Stan 2	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Jak widać $\lim_{n \to \infty} p(n)$ nie istnieje dla żadnej współrzędnej (dla żadnego stanu).

Wniosek.
Istnienie rozkładu stacjonarnego nie implikuje, że łańcuch jest ergodyczny.