LICENCIATURA EM

MATEMÁTICA

1ª edição

ÁLGEBRA LINEAR

FTC
FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS
ead
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Álgebra Linear

EQUIPE DE ELABORAÇÃO / PRODUÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO

♦ **Produção Acadêmica** ♦

Autor ♦ Tailson Jeferson Paim dos Santos
Gerente de Ensino ♦ Jane Freire
Supervisão ♦ Ana Paula Amorim
Coordenador de Curso ♦ Geciara da Silva Carvalho
Revisão Final ♦ Adriano Pedreira Cattai
Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.

♦ **Produção Técnica** ♦

Edição em LaTeX 2ε ♦ Adriano Pedreira Cattai
Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.
Revisão de Texto ♦ Carlos Magno
Coordenação ♦ João Jacomel
Equipe Técnica ♦ Cefas Gomes, Delmara Brito,
Fábio Gonçalves, Francisco França Júnior, Israel Dantas,
Lucas do Vale, Hermínio Filho, Alexandre Ribeiro e Diego Maia.

Sumário

Apresentação da Disciplina

Caro aluno,

Damos-lhe as boas vindas ao curso de Álgebra Linear. A nossa intenção é apresentar um texto gradativo, concatenado, escrito em linguagem simples e objetiva, com algumas conexões e aplicações a outras áreas de conhecimento, respeitando, porém, o rigor necessário ao nível que se destina, que é servir de referência aos educadores e estudantes da FTC-EAD que se preparam para exercer o magistério.

A Álgebra Linear constitui uma parte da matemática da qual necessitam matemáticos, engenheiros, físicos, programadores de computador e outros cientistas. Este requisito reflete a importância desta disciplina pelas suas múltiplas aplicações e pelo alcance de sua linguagem. Essa importância não se restringe apenas à área de exatas: muitas questões de grande atualidade na área biológica encontram na Álgebra Linear a ferramenta matemática apropriada para sua abordagem. Os objetos de que trata a Álgebra Linear são vetores e matrizes, que aparecem, por exemplo, quando procuramos as soluções para um sistema de equações lineares. Assim, são generalizações do conceito de número.

No Bloco Temático 1, veremos, ao longo do Tema 1, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. No Tema 2, estudaremos os Espaços e Subespaços vetoriais, suas propriedades, bem como conceitos fundamentais, como as Combinações Lineares, Base e Dimensão desses Espaços Vetoriais. Já no Bloco Temático 2, estudaremos no Tema 3, as Transformações Lineares, Diagonalização de Operadores, Autovalores, Autovetores e Aplicações. Por fim, no Tema 4, veremos os Espaços com Produto Interno.

Em relação às aplicações da teoria, inseriremos, em um primeiro momento, questões emergentes da geometria em duas e três dimensões, com objetivo de uma maior visualização e compreensão, de forma que uma solução geométrica, sempre que possível, será confrontada com a solução algébrica. Incluímos, também, exercícios resolvidos e atividades complementares, bem como, no final deste trabalho, um bloco de atividades orientadas como parte de sua avaliação individual.

E, é claro, registramos nossa gratidão, ainda que previamente, por quaisquer observações ou comentários sobre o trabalho, para que possamos aprimorá-lo continuamente. Uma boa leitura, determinação e constância em seu objetivo.

Prof. *Tailson Jeferson Paim dos Santos.*

Matrizes e Espaços Vetoriais

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Matrizes

Apresentação

É comum nos depararmos com conjuntos de números que são operados essencialmente da mesma maneira. Isto sugere tratá-los em bloco, de forma única. Esta forma de tratamento é possível através do uso de elementos matemáticos chamados Matrizes.

Foi apenas em meados do século XIX que as matrizes tiveram sua importância detectada e saíram da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Cauchy, por volta de 1.826. Ele as chamou de tableau (tabela).

O nome Matriz só veio com James Joseph Sylvester, 1.850. Seu amigo Cayley, com sua famosa *Memoir on the Theory of Matrices*, 1.858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade. O significado coloquial da palavra matriz é: *local onde algo se gera ou cria*. Sylvester as via como "*um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas...*". Observe que Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. É só com Cayley que elas passam a ter vida própria e, gradativamente, começam a suplantar os determinantes em importância. A referência mais antiga a matrizes, entretanto, data de aproximadamente do ano 2.500 a.C., no livro chinês Chui-Chang Suan-Shu (Nove capítulos sobre a arte matemática). Este livro apresenta problemas sobre a mensuração de terras, agricultura, impostos, equações, etc. Um destes problemas é resolvido com cálculos efetuados sobre uma tabela, tais como efetuamos hoje com as matrizes. Atualmente, as matrizes são muito utilizadas em várias áreas de conhecimento. Suas aplicações se dão na Matemática, Física, Engenharia e Computação, por exemplo.

1.1 Definição. Uma matriz é uma tabela retangular de números, ou outro tipo de objetos matemáticos, dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais). Dizemos assim que a matriz possui ordem $m \times n$ (lê-se: ordem m por n).

1.1 Representação de uma Matriz

Representamos uma matriz colocando os dados da tabela entre parênteses ou entre colchetes. Vejamos abaixo alguns exemplos de matrizes.

Exemplo **1.1.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -7 & 5 \\ 9 & 15 & -6 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

◇ A é uma matriz de uma linha e cinco colunas (matriz de ordem 1×5).

◇ B é uma matriz de cinco linhas e uma coluna (matriz de ordem 5×1)

◇ C é uma matriz de três linhas e quatro colunas (matriz 3×4)

◇ D é uma matriz de três linhas e quatro colunas (matriz 3×3). A matriz D possui o número de linhas igual ao de colunas. Dizemos, então, que ela é uma matriz quadrada de ordem 3×3 ou, simplesmente, matriz de ordem 3.

Uma matriz A de ordem $m \times n$, pode ser indicada como $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, em que a_{ij} é o elemento da linha i e da coluna j da matriz A. Desta forma podemos generalizar uma matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ por uma tabela da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Na matriz C do exemplo acima, temos, por exemplo, $c_{23} = -7$, $c_{33} = -6$ e $c_{31} = 9$.

***Exemplo* 1.2.** A matriz $B_{2\times 3} = [b_{ij}]_{2\times 3}$ definida por $b_{ij} = 3i - 2j$, é uma matriz real, representada por 2 linhas e 3 colunas. Assim,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} = 3\cdot 1 - 2\cdot 1 = 1 & b_{12} = 3\cdot 1 - 2\cdot 2 = -1 & b_{13} = 3\cdot 1 - 2\cdot 3 = -3 \\ b_{21} = 3\cdot 2 - 2\cdot 1 = 4 & b_{22} = 3\cdot 2 - 2\cdot 2 = 2 & b_{23} = 3\cdot 2 - 2\cdot 3 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Tipos de Matrizes

Existem matrizes que, por apresentarem características notáveis, merecem destaque. Vejamos, a seguir, algumas delas.

1.2.1 Matriz Coluna

A matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

de ordem $m \times 1$ é chamada *matriz coluna*.

1.2.2 Matriz Linha

A matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

de ordem $1 \times n$ é chamada *matriz linha*.

1.2.3 Matriz Quadrada

Chama-se *matriz quadrada*, toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

***Nota* 1.** A ordem da matriz quadrada é $n \times n$ ou, simplesmente, n.

Diagonal Principal

1.2 Definição. Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i = j$, constituem a *diagonal principal*.

Assim, em 1.1, os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ constituem a diagonal principal.

***Nota* 2.** Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem n. Denomina-se *traço* da matriz A, a soma $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$ dos elementos da diagonal principal de A, o qual indicamos por $\mathrm{tr}(A)$. Desse modo temos:

Diagonal Secundária

1.3 Definição. Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i + j = n + 1$, constituem a diagonal secundária da matriz.

Assim, em 1.1, os elementos $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1}$ constituem a diagonal secundária.

***Exemplo* 1.3.** A matriz

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 9 & -1 \\ 6 & 4 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

é quadrada de ordem 3. Sua diagonal principal é $\{8, 4, 2\}$ e sua diagonal secundária é $\{-1, 4, -2\}$. O traço da matriz M é dado por $\mathrm{tr}(M) = 8 + 4 + 2 = 14$.

1.2.4 Matriz Diagonal

1.4 Definição. A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n e que tem os elementos $a_{ij} = 0$, quando $i \neq j$, é chamada *matriz diagonal*, ou seja, é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{44} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1.2.5 Matriz Nula

1.5 Definição. É toda matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero.

***Exemplo* 1.4.**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz nula de ordem 2×3.

***Exemplo* 1.5.**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz nula de ordem 3×3.

1.2.6 Matriz Identidade ou Unidade

1.6 Definição. A matriz diagonal, de qualquer ordem e a qual os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1, é chamada de *matriz identidade*.

Indica-se a matriz identidade de ordem n por I_n ou simplesmente por I.

***Exemplo* 1.6.**

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 2.

***Exemplo* 1.7.**

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 3.

1.2.7 Matriz Transposta

1.7 Definição. Chama-se *transposta* de $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ a matriz $A^t = [a'_{ji}]_{n\times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j, ou seja, a transposta de A é a matriz obtida de A, trocando-se, "ordenadamente", suas linhas por colunas (ou, suas colunas por linhas).

Indica-se a matriz transposta de A por A^t.

***Exemplo* 1.8.**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1.2.8 Matriz Simétrica

1.8 Definição. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é dita *simétrica* se $a_{ij} = a_{ji}$.

***Nota* 3.** Observe que:

(a) A é simétrica se $A^t = A$;

(b) No caso de uma matriz simétrica, a parte superior é uma "reflexão" da parte inferior, em relação à diagonal principal.

***Exemplo* 1.9.** São simétricas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$$

1.2.9 Matriz Anti-Simétrica

1.9 Definição. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ diz-se *anti-simétrica* quando $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Assim,

i. os elementos da diagonal principal são todos nulos;

ii. os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

***Nota* 4.** Observe que a matriz quadrada A é *anti-simétrica* de ordem n se, e somente se,

$$A^t = -A.$$

***Exemplo* 1.10.** São anti-simétricas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -b & c & -d \\ b & 0 & -f & g \\ -c & f & 0 & -i \\ d & -g & i & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.10 Matriz Triangular Superior

1.10 Definição. A matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, que tem os elementos $a_{ij} = 0$, para $i > j$, é chamada de *triangular superior*, ou seja, quando todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

***Exemplo* 1.11.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1.2.11 Matriz Triangular Inferior

1.11 Definição. A matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, que tem os elementos $a_{ij} = 0$, para $i < j$, é chamada de *triangular inferior*, ou seja, quando todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

***Exemplo* 1.12.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

***Nota* 5.** Ao conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$, cujos elementos pertencem a $\mathbb{R}$, denotaremos por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^{m\times n}$.

1.3 Igualdade de Matrizes

1.12 Definição. Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

De outro modo, a definição anterior nos diz que A e B são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e os elementos correspondentes (entradas da matriz) são iguais. Indica-se: $A = B$.

***Exemplo* 1.13.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \text{ é igual a } B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix},$$

pois, $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

A igualdade de matrizes goza das seguintes propriedades:

✓ Reflexiva: $A = A$;

✓ Simétrica: Se $A = B$, então $B = A$;

✓ Transitiva: Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

1.4 Operações com Matrizes

1.4.1 Adição de Matrizes

1.13 Definição. Dada duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, chama-se *soma* $A + B$, a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j.

Isto significa que a soma de duas matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$, é uma matriz C, de mesma ordem, em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

***Exemplo* 1.14.**

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-2) & -1+0 \\ 0+(-1) & 4+3 \\ -2+1 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

***Exemplo* 1.15.**

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+1 \\ 11-2 \\ \frac{3}{4}+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

1.14 Teorema. A adição de matrizes do tipo $m \times n$ apresenta as seguintes propriedades:

1. é associativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$, quaisquer que sejam A, B e C do tipo $m \times n$;
2. é comutativa: $A+B = B+A$, quaisquer que sejam A e B, do tipo $m \times n$;
3. tem elemento neutro: $\exists M \mid A+M = A$, qualquer que seja A do tipo $m \times n$;
4. todo elemento tem simétrico: para toda A de ordem $m \times n : \exists A' \mid A + A' = M$.

Prova:

1. Fazendo $(A+B)+C = X$ e $A+(B+C) = Y$, temos:

$$x_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = y_{ij},$$

para todo i e todo j, pois, a associatividade é válida entre os números reais.

2. Fazendo $A+B = X$ e $B+A = Y$, temos:

$$x_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = y_{ij},$$

para todo i e todo j, pois, a comutatividade é válida entre os números reais.

3. Façamos $A+M = A$, para encontrarmos, caso exista o elemento neutro. Resulta que:

$$a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \Rightarrow m_{ij} = 0 \Rightarrow M = 0, \forall\, i, \forall\, j,$$

isto é, o elemento neutro existe e é a matriz nula do tipo $m \times n$.

4. Do mesmo modo, impondo $A + A' = M$, resulta:

$$a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Rightarrow a'_{ij} = -a_{ij}, \forall i, \forall\, j,$$

isto é, a simétrica da matriz A para a adição é a matriz A' de mesmo tipo que A, na qual cada elemento é simétrico da entrada correspondente em A.

□

1.15 Definição. Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chama-se *oposta* de A (indica-se $-\mathbf{A}$) a matriz A', tal que $A + A' = 0$.

***Exemplo* 1.16.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

***Exemplo* 1.17.**

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow -B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

1.4.2 Produto de uma Matriz por um Número

1.16 Definição. Dado um número k e uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chama-se o produto $k \cdot A$ a matriz $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo i e todo j.

Isto significa que multiplicar uma matriz A por um número real k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A, onde todas entradas são multiplicadas por k.

***Exemplo* 1.18.**

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 \\ 35 & -20 \end{bmatrix}$$

***Exemplo* 1.19.**

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

1.17 Teorema. O produto de um número por uma matriz apresenta as seguintes propriedades:

1. $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$;
2. $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$;
3. $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$;
4. $1 \cdot A = A$;

em que A e B são matrizes quaisquer do tipo $m \times n$ e a e b são números reais quaisquer.

Prova:

1. Fazer como exercício.
2. Suponhamos $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$. Então:
$$a \cdot ([a_{ij}] + [b_{ij}]) = a \cdot [a_{ij}] + a \cdot [b_{ij}] = a \cdot A + a \cdot B.$$
3. $$(a + b) \cdot A = [(a + b) \cdot [a_{ij}]] = a \cdot [a_{ij}] + b \cdot [a_{ij}] = a \cdot A + b \cdot A.$$
4. Fazer como exercício.

□

1.4.3 Produto de Matrizes

1.18 Definição. Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, chama-se o produto $A \cdot B$ a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times p}$, tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk},$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Matriz A $\quad$ Matriz B

$m \times n \quad n \times p$

iguais

$C_{m\times p}$

> **Nota 6.** ✓ A definição dada garante a existência do produto $A \cdot B$ se, e somente se, o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, pois, A é de ordem $m \times n$ e B, $n \times p$.
>
> ✓ O produto $A \cdot B$ é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, pois, $C = A \cdot B$ é do tipo $m \times p$.

Um elemento c_{ik} da matriz $C = AB$ deve ser obtido pelo procedimento a seguir:

1. toma-se a linha i da matriz A: $a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \ldots \quad a_{in}$ $\qquad$ (n elementos)
2. toma-se a coluna k da matriz B:

$$\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix} \qquad (n \text{ elementos})$$

3. calculam-se os n produtos dos elementos (conforme o esquema):

$$\begin{matrix} a_{i1} \cdot b_{1k} \\ a_{i2} \cdot b_{2k} \\ a_{i3} \cdot b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \cdot b_{nk} \end{matrix}$$

4. somam-se esses n produtos, obtendo c_{ik}.

***Exemplo* 1.20.** Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcular $A \cdot B$.

Solução: Sendo A de ordem 2×3 e B 3×1, decorre que existe $A \cdot B$ e é de ordem 2×1. Fazendo $A \cdot B = C$, devemos calcular c_{11} e c_{21}:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^{\text{a}} \text{ linha de } A \cdot \; 1^{\text{a}} \text{ coluna de } B \\ 2^{\text{a}} \text{ linha de } A \cdot \; 1^{\text{a}} \text{ coluna de } B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

***Exemplo* 1.21.** Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e calcule, se possível, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Solução: Como A é de ordem 3×2 e B 2×2, decorre que existe $A \cdot B$ e é de ordem 3×2. Fazendo $A \cdot B = C$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Já o produto $B \cdot A$ não pode ser obtido, porque o número de colunas da primeira é diferente do número de linhas da segunda.

Propriedades do Produto de Matrizes

O produto de matrizes, desde que sejam possíveis as operações, apresentam as seguintes propriedades:

1. $A \cdot I = I \cdot A = A$ (Isto justifica o nome matriz identidade);
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (distributividade à esquerda em relação à soma);
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (distributividade à direita da multiplicação em relação à soma);
4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
5. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (observe a ordem);
6. $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$, em que 0 é a matriz nula.

Prova:

1. Sendo $I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$, em que
$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & , \quad \text{se } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & , \quad \text{se } i = j \end{cases}$$
e $B = AI_n = [b_{ij}]_{m \times n}$. Temos:
$$b_{ij} = a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + a_{i3}\delta_{3j} + a_{ii}\delta_{ii} + \ldots + a_{in}\delta_{nj} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3}0 + \ldots + a_{in} \cdot 0 = a_{ii},$$
para todos i e j, então $A \cdot I_n = A$.
2. Fazer como exercício.
3. Fazendo $D = (A + B)C = (d_{ik})_{m \times p}$, temos:
$$\begin{aligned} d_{ik} &= \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot c_{jk} = A \cdot C + B \cdot C. \end{aligned}$$
Fazer os demais itens como exercício.

□

Nota 7. Em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$, ou seja, as matrizes não gozam da propriedade comutativa.

Exemplo 1.22. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Então, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B \cdot A = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Nota 8. Observe, ainda, que $A \cdot B = 0$, sem que, necessariamente, $A = 0$ ou $B = 0$.

Nota 9. No início deste tema, mencionamos um tipo de matriz chamada **matriz transposta**. Podemos, agora, apresentar as seguintes propriedades:

1. $(A^t)^t = A$, para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$;
2. Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, então $(A + B)^t = A^t + B^t$,
3. Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = kA^t$;
4. Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, então $(AB)^t = (BA)^t$.

Prova: Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, e considere $A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j.

1. Fazendo $(A^t)^t = (a''_{ij})_{m \times n}$, resulta:
$$a_{ij} = a'_{ji} = a_{ij}$$
para todos i, j.
2. Esta demonstração deixamos como exercício.
3. Fazendo $(kA)^t = (a''_{ij})_{m \times n}$, resulta:
$$ka''_{ij} = ka_{ij} = ka'_{ji},$$
para todos os valores de i e j.
4. Fazendo $AB = C = (c_{ik})_{m \times p}$ e $(AB)^t = C^t = (c'_{ki})_{p \times m}$, resulta: $c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj} a'_{ji}$,
para todo i e todo j.

$\square$

1.5 Operações Elementares sobre Linhas

1.19 Definição. Denomina-se *operações elementares sobre linhas* de uma matriz às seguintes:

1. Permutação de linhas;
2. Multiplicação de todos elementos de uma linha por um escalar não-nulo;
3. Substituição dos elementos de uma linha pela soma deles com os elementos correspondentes de outra linha previamente multiplicados por um escalar não-nulo.

Se A é uma matriz $m \times n$, cujas linhas são $L_1, L_2, \ldots, L_m$, indicaremos as operações acima com os seguintes símbolos:

1. $L_r \leftrightarrow L_s$, que significa permutar as linhas r e s.
2. $L_r \to k \cdot L_r$ significa que a r-ésima linha foi substituída por ela própria multiplicada pela constante não nula k.
3. $L_r \to L_r + k \cdot L_s$, ou seja, a r-ésima linha foi substituída por ela mais k vezes a s-ésima linha.

***Exemplo* 1.23.** Aplique as operações elementares na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

de modo a transformá-la na matriz identidade.

Solução: $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} L_1 \to \frac{1}{2}L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 + (-3)L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} L_2 \to (-1)L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 + (-2)L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + 6L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} L_3 \to \frac{1}{7}L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 + 3L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 + (-3)L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz possuem as propriedades: **reflexiva, simétrica e transitiva**.

1.20 Definição. Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ou seja, matrizes de ordem $m \times n$. Diz-se que B é linha equivalente a matriz A, quando B pode ser obtida de A por meio de uma seqüência finita de operações elementares sobre as linhas de A.

***Exemplo* 1.24.** Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. A seqüência de operações elementares a seguir mostra que B é linha equivalente a A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} L_2 \to \frac{1}{4}L_2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = B$$

1.5.1 Matriz Linha Reduzida Escalonada

1.21 Definição. Uma matriz $M_{m\times n}$ é dita linha reduzida escalonada ou reduzida à forma de escada (LRFE) se $A = 0$ ou satisfaz a todas as seguintes condições:

1. Primeiro elemento não-nulo de cada linha deve ser igual a 1.

2. Toda coluna que contém o primeiro elemento não-nulo de uma determinada linha deve ter todos os outros elementos dessa coluna nulos.

3. Toda linha nula deve ficar abaixo das linhas não-nulas.

4. Se $L_1, L_2, ...L_r$ são linhas não-nulas de M, e se o primeiro elemento não-nulo da linha L_i ocorre na linha $k_i$então $k_1 < k_2 < ... < k_r$, ou seja, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não-nulo de uma linha, aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver. Esta condição impõe a forma escada à matriz.

Podemos citar como exemplos de matrizes linha reduzida escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, as matrizes abaixo não são reduzida escalonada:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.22 Proposição. Toda matriz $A \in M_{m \times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida escalonada.

Prova: Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz não nula e suponha que A seja equivalente à duas matrizes LRFE, M e N. Assim, temos que: $A \sim M$ e $A \sim N$, pela propriedade transitiva temos que $N \sim A$. Assim, $A \sim M$ e $N \sim A$ ou então $N \sim A$ e $A \sim M$. Segue que, $N \sim M$. Mas, tanto M como N são matrizes LRFE, então $M = N$. □

1.23 Definição. Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz linha reduzida escalonada linha equivalente a A. Chama-se posto (ou característica) de A o número de linhas não-nulas da matriz B e é denotado por $P(A)$.

1.24 Definição. Chamamos de nulidade(ou grau de liberdade) de uma matriz A o número $N(A) = [n - P(A)]$, onde n é o número de colunas da matriz A.

***Exemplo* 1.25.** Encontre o posto e a nulidade da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: Observando que a matriz A é linha reduzida escalonada, como o número de linhas não nulas de A é igual a $2 \Rightarrow P(A) = 2$ e a nulidade $N(A) = [4 - 2] = 2$.

1.5.2 Matrizes Inversíveis

1.25 Definição. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é matriz inversível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

1.26 Definição. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

1.27 Teorema. Se A é inversível, então é **única** a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Prova: Admitamos que exista uma matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Temos:

$$C = I_nC = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

$\square$

1.28 Definição. Dada uma matriz inversível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

É evidente que A^{-1} deve ser também quadrada de ordem n, pois, A^{-1} comuta com A.

***Exemplo* 1.26.** A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, pois, $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

***Exemplo* 1.27.** Qual a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$?

Solução: Fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos:

$$A^{-1} \cdot A = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a+5b & 7a+11b \\ 3c+5d & 7c+11d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela definição de igualdade de matrizes, temos: $a = -\frac{11}{2}$, $b = \frac{7}{2}$, $c = \frac{5}{2}$, $d = -\frac{3}{2}$, isto é,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

pois temos também:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

1.29 Teorema. Se A é inversível, sua matriz linha reduzida escalonada é a identidade.

***Exemplo* 1.28.** Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ é inversível.

Solução: Devemos verificar, portanto, se a matriz linha reduzida escalonada de A é a identidade.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} L_1 \to \frac{1}{4}L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 + (-2L_1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} L_2 \to \frac{1}{5}L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como a matriz linha reduzida escalonada de A é a identidade, temos que A é inversível.

***Exemplo* 1.29.** Com base no teorema acima, verifique se a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ é ou não inversível.

Solução: $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 4L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo, a referida matriz não é inversível ou singular.

1.30 Teorema. Se A_n é inversível, então existe uma seqüência finita de operações elementares que torna A_n igual a matriz identidade (I_n). Estas mesmas sequências de operações aplicadas ao mesmo tempo em A_n e em I_n transformam I_n em A_n^{-1}.

***Exemplo* 1.30.** Encontre a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, caso seja possível.

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 + (-L_1) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 - L_2 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 + (L_2) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] L_3 \to \frac{1}{3}L_3 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] L_1 \to L_1 + (L_3) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] L_2 \to L_2 + (L_3) \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Concluímos que A é inversível e sua inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

1.5.3 Matrizes Elementares

1.31 Definição. Uma matriz elementar de ordem n é uma matriz E obtida de I_n (matriz identidade) por meio de uma só operação elementar.

As matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são elementares. A primeira se obtém de I_3 multiplicando-se por $\frac{1}{2}$, $\left(L_2 \to \frac{1}{2}L_2\right)$. A segunda se obtém de I_3 subtraindo à segunda linha desta matriz a sua primeira linha multiplicada por $3(L_2 \to L_2 - 3 \cdot L_1)$.

1.32 Proposição. Toda matriz elementar E é inversível.

> ***Nota* 10.** Quando efetuamos qualquer operação elementar nas linhas de uma matriz, estamos na verdade multiplicando a esquerda da matriz por uma matriz elementar.

***Exemplo* 1.31.** Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ uma matriz. Encontre uma matriz linha reduzida à forma escalonada (LRFE) à matriz A.

Solução: Iremos obter uma matriz linha reduzida a forma escalonada B. Observe as operações elementares realizadas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - L_1 \sim A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} L_2 \to -L_2 \sim A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - 2L_2 \sim I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como efetuamos 3 operações elementares, existirão 3 matrizes elementares envolvidas, as quais chamaremos de E_1, E_2 e E_3.

Aplicando a operação elementar $L_2 \to L_2 - L_1$ a $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtemos:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, aplicando a operação elementar $L_2 \to -L_2$ a $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtemos,

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$E_2 \cdot A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por fim, aplicando a operação elementar $L_1 \to L_1 - 2L_2$ a $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtemos:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$E_3 \cdot A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A''' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $E_1 \cdot A = A'$, $E_2 \cdot A = A''$ e $E_3 \cdot A''' = I$. Portanto,

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I.$$

Pelo fato que E_1, E_2 e E_3 foram obtidas da identidade de ordem 2×2 por uma operação elementar, temos que estas são inversíveis. Assim,

$$A^{-1} = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \text{ e } A = (E_3 \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}.$$

1.6 Exercícios Propostos

1.1. Sejam: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule, quando possível:

(a) $A + B$

(b) $B + F$

(c) $A \cdot C$

(d) $C \cdot A$

(e) $E^t + (-A)$

(f) $C \cdot D + 2E - A^t$

(g) $C^t \cdot E - 3D$

(h) $E \cdot F + A^t - B^t$

1.2. Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} i+j & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ se } i \neq j \end{cases}$ e $B = [b_{ij}]_{2\times 2}$, tal que $b_{ij} = 2i - 3j$, então $A + B$ é igual a:

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1.3. Se A e B são matrizes de tipo 2×3, qual das seguintes operações **não** pode ser efetuada?

(a) $A + B$ (b) $A^t - B^t$ (c) $(A + B) \cdot B^t$ (d) $B^t \cdot A$ (e) $A \cdot B$

1.4. Sendo as matrizes $M = (m_{ij})_{2\times 3}$, $N = (n_{ij})_{a\times b}$, $P = (p_{ij})_{c\times 4}$, $Q = (q_{ij})_{d\times e}$, é possível determinar $M + N$, $N \cdot P$ e $P - Q$, se:

(a) $b - a = c - d$

(b) $a = b = c = d = e - 1$

(c) $b = a + 1, c = d = e = 4$

(d) $a \cdot b = 6, a + 1 = b = c = d = e - 1$

(e) $b = c = d = \dfrac{a + c}{2}$

1.5. O valor de x para que o produto das matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ seja uma matriz simétrica é:

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) 3

1.6. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n e inversíveis. Mostre que também são inversíveis:

(a) A^{-1} e que $(A^{-1})^{-1} = A$. (b) AB e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (c) A^t e que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

1.7. Reduza as matrizes abaixo à forma reduzida escalonada e determine o posto e a nulidade das mesmas.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1.8. Com base no teorema 1.30, verifique se a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

é ou não inversível e determine sua inversa.

1.9. Dê exemplos, se possível, de matrizes satisfazendo as condições dadas abaixo. **Observação**: $N(A) =$ nulidade de A e $P(A) =$ posto de A.

(a) $B_{2\times 3}$, $P(B) = 2$

(b) $C_{3\times 2}$, $P(C) = 3$

(c) $D_{2\times 4}$, $P(D) = 3$

(d) $F_{2\times 3}$, $N(F) = 2$

(e) $G_{4\times 3}$, $N(G) = 0$

(f) H_3, $N(H) = 0$

(g) J_3, $P(J) = 2$

1.10. Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) O posto de uma matriz é um número natural maior ou igual a zero e menor ou igual ao número de linhas.

(b) O posto de uma matriz é um número natural maior ou igual a zero e menor ou igual ao número de colunas.

(c) Se C é uma matriz quadrada de ordem 3 e possui uma linha nula, então $P(C) = 2$.

(d) Se $P(D) = 3$ e $D_{n\times m}$ com $n \geq 3$, então $m \leq 3$.

1.11. Use as operações elementares sobre linhas para descobrir se A é inversível. Determine, se possível, A^{-1} nos casos abaixo:

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

1.6.1 Histórico sobre a Álgebra

Costuma-se associar a álgebra, mais do que outras partes da matemática, ao uso de símbolos específicos em sua linguagem - letras, em particular. Curiosamente, porém, o termo *álgebra* é oriundo do título de um livro sobre equações, especialmente as de segundo grau, escrito no século IX, onde não há emprego de nenhum símbolo matemático específico: até os números que nele aparecem são expressos em palavras.

Aliás, essa era, quase que invariavelmente, a maneira de se fazer matemática até então. E assim continuou sendo até o século XVI. Os babilônicos, por exemplo, uns 1.800 anos antes de Cristo, já resolviam equações do segundo grau. Mas, embora usassem um procedimento equivalente à técnica atual de resolução, não se baseavam em nenhuma fórmula, mas sim numa regra verbal.

Os primeiros artigos registrados de álgebra foram achados no Egito em 2.000 a.C, mas quem realmente desenvolveu a álgebra foi o antigo Islã. Al-Khwarizmi é considerado o fundador da álgebra como a conhecemos hoje.

Estranha e intrigante é a origem da palavra "álgebra". Ela não se sujeita a uma etimologia nítida como, por exemplo, a palavra "aritmética", que deriva do grego arithmos ("número"). O termo Álgebra é uma variante latina da palavra árabe al-jabr (às vezes transliterada al-jebr), usada no título de um livro, Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm), trabalho entitulado: Al-Jabr w'al-Muqabalah, isto é "O livro sumário sobre cálculos por transposição e redução". Este trabalho, freqüentemente citado, abreviadamente, como Al-jabr era extremamente didático e destinava-se ensinar soluções para os problemas matemáticos cotidianos da época. Uma tradução literal do título completo do livro é a "ciência da restauração (ou reunião),"conexão" ou "complementação e redução", mas, matematicamente, seria melhor "ciência da transposição e cancelamento" ou, conforme Boher, "a transposição de termos subtraídos para o outro membro da equação" e "o cancelamento de termos semelhantes (iguais) em membros opostos da equação".

Podemos, ainda, considerar a álgebra como o ramo que estuda as generalizações dos conceitos e operações de aritmética ou talvez a melhor tradução fosse, simplesmente, "a ciência das equações".

Ainda que originalmente "álgebra" refira-se a equações, a palavra, hoje, tem um significado muito mais amplo e pode se referir a várias áreas da matemática. De uma forma geral, podemos organizar a álgebra como: "Álgebra universal", "Álgebras abstratas", "Álgebra elementar", "Álgebra Computacional", "Álgebra Linear".

A notação algébrica utilizada hoje normalmente por nós, começa com Fraçois Viète e é configurada na forma atual por René Descartes. Assim, os processos para achar as raízes de equações dos babilônios, gregos, hindus, árabes e mesmo dos algebristas italianos do século XV eram formuladas com palavras e as vezes até com versos (Índia).

Uma álgebra como a de al-Khowarizmi, desprovida de símbolos específicos, costuma-se ser chamada *álgebra retórica*. Mas, por este aspecto, a obra de al-Khowarizmi era um retrocesso. Diofanto de Alexandria, às vezes chamado "o pai da álgebra", por exemplo, já usara alguns símbolos (abreviações) em sua obra: para a incógnita, potências da incógnita (até a sexta potência), igualdade, subtração e inversos. Mas, por vários motivos, sua notação não pegou.

Enfim, pensando na álgebra retórica de al-Khowarizmi e na influência que teve, pode-se entender por que no século XVI, *algebrista* significava popularmente, na Itália e na Espanha, o especialista em consertar ossos quebrados ou destroncados.

Determinantes

A toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ está associada um elemento de $\mathbb{R}$ chamado **determinante** de A, usualmente representado por

$$\det(A) \text{ ou } |A|.$$

A teoria dos determinantes teve origem em meados do século $XVIII$, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares de equações. Hoje em dia, embora não sejam um instrumento muito prático na resolução de sistemas, os determinantes são utilizados, por exemplo, para sintetizar certas expressões matemáticas complicadas. Veremos, nos próximos temas, que o determinante é um instrumento indispensável na investigação e obtenção das propriedades de um operador linear.

1.6.2 Breve Histórico

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições dos sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação - que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século 111 a.C.

Mas foi só em 1.683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a idéia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século $XVII$, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibnitz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibnitz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a_{12}, Leibnitz indicava por 12.

A conhecida regra de Crammer para encontrar o conjunto solução de um sistema de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin $(1.698 - 1.746)$, datando provavelmente de 1.729, embora só publicada postumamente em 1.748 no seu Treatise of algebra. Mas o nome do suíço Gabriel Crammer $(1.704 - 1.752)$ não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Crammer também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua Introdução à análise das curvas planas (1.750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$.

O francês Étienne Bézout $(1.730 - 1.783)$, autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1.764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde $(1.735 - 1.796)$, em 1.771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares - embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo".

O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1.812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1.841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes - meses antes J. F. M. Binet $(1.786 - 1.856)$ dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior.

Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi $(1.804 - 1.851)$, cognominado, às vezes, "o grande algorista". Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de jacobiano de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas.

Começaremos o estudo dos determinantes com uma discussão de *permutações*, que é necessária para a definição do determinante.

1.7 Permutações

Seja $n \geq 1$ um número natural. Consideremos o conjunto $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1.33 Definição. Toda aplicação bijetora $\sigma : N_n \to N_n$ chama-se permutação do conjunto N_n.

Se σ e φ são permutações de N_n, então σ o $\varphi : N_n \to N_n$ também é uma permutação. A aplicação idêntica de N_n (indicaremos por Id) é obviamente uma permutação. Além disso, a inversa σ^{-1} de uma permutação σ de N_n também é permutação de N_n.

Notação: indicaremos abreviadamente uma permutação σ de N_n por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

Observe que, como σ é injetora e sobrejetora, a seqüência $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ é simplesmente um rearranjo dos números $1, 2, \ldots, n$. Observamos que o número de tais permutações é $n!$ e que o conjunto delas é, usualmente, representado por S_n.

Se $n = 2$, existem duas $(2!)$ permutações do conjunto $N_2 = \{1, 2\}$ que são

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou, de outra maneira, podemos dizer que existem $2! = 2 \cdot 1 = 2$ permutações em S_2 : $(1\ 2)$ e $(2\ 1)$.

Existem $6(= 3!)$ permutações de $N_3 = \{1, 2, 3\}$. São elas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou de outro modo, podemos dizer que existem $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutações em S_3 :

$$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 1\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2), (3\ 2\ 1).$$

1.34 Definição. Consideremos uma permutação

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

de N_n. Seja r o número de pares ordenados (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Chama-se **sinal ou paridade** da permutação σ o número inteiro representado por $sgn(\sigma)$, que é

$$\begin{aligned} sgn(\sigma) &= 1, && \text{se r é par} \\ sgn(\sigma) &= -1, && \text{se r é ímpar.} \end{aligned}$$

***Exemplo* 1.32.** Seja $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Os pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq 3$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$ são $(1, 2)$ e $(1, 3)$. Logo, $r = 2$ e $sgn(\sigma) = 1$.

Exemplo **1.33.** Seja $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. O único par (i, j) com $1 \leq i < j \leq 3$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$ é $(2, 3)$. Logo, $r = 1$ e $sgn(\sigma) = -1$.

Exemplo **1.34.** Tomemos $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Neste caso os pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq 5$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$ são $(1, 2), (1, 3)$ e $(4, 5)$. Logo, $r = 3$ e $sgn(\sigma) = -1$.

Exemplo **1.35.** A permutação identidade $Id = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é par, porque nenhum par (i, j) pode satisfazer a condição $1 \leq i < j < 4$, ou seja, $r = 0$.

1.35 Definição. Uma permutação σ é par (respectivamente, ímpar) se $sgn(\sigma) = 1$ (respectivamente, $sgn(\sigma) = -1$).

1.36 Definição. Chama-se transposição uma permutação ψ em que existe apenas um par (i, j) de maneira que $i < j$ e $\psi(i) > \psi(j)$ e que deixa os demais elementos fixos, isto é, $\psi(k) = k$, $k \neq i, j$. Esta transposição é indicada por $(i \;\; j)$.

Exemplo **1.36.** Os exemplos abaixo representam tranposições de permutações.

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $(i = 1$ e $j = 2)$;
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $(i = 2$ e $j = 3)$;
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ (neste exemplo $i = 3$ e $j = 6$)

As transposições são permutações ímpares muito simples pois $n - 2$ elementos de $N_n = \{1, \ldots, n\}$ são inalterados por elas e, logicamente, os outros dois são invertidos ou transpostos.

1.37 Teorema. Toda permutação σ do conjunto N_n pode fatorar-se na forma $\sigma = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \ldots \circ \psi_s$ onde ψ_i são transposições. Se $\sigma = \psi'_1 \circ \psi'_2 \circ \ldots \circ \psi'_t$ é outra decomposição de σ em transposições, então s e t são ambos pares ou ambos ímpares. Além disso, $sgn(\sigma) = (-1)^s$.

Decorre desse teorema que $sgn(\sigma \circ \varphi) = sgn(\sigma) sgn(\varphi)$, onde σ e φ são permutações quaisquer do conjunto N_n. Em particular para toda transposição ψ, $sgn(\sigma \circ \psi) = -sgn(\sigma)$. A verificação destas fórmulas deixamos como exercício para o leitor.

1.8 Determinante

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz real de ordem n. Consideremos um produto da forma

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} * \ldots * a_{n\sigma(n)},$$

em que σ é uma permutação do conjunto N_n. Nesse produto aparece apenas um elemento de cada linha de A(pois os primeiros índices não se repetem) e apenas um elemento de cada coluna de A (pois os segundos índices também não se repetem, já que σ é bijetora). Vamos multiplicar esse produto pelo sinal de σ que é 1 ou -1:

$$sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} * \ldots * a_{n\sigma(n)}.$$

Finalmente somemos todos os números assim obtidos, de maneiras que σ percorra o conjunto de todas as permutações de N_n. Teremos portanto $n!$ parcelas no somatório

$$\sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} * \ldots * a_{n\sigma(n)}.$$

1.38 Definição. Chama-se determinante da matriz A de ordem n o número real

$$\det(A) = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} * \ldots * a_{n\sigma(n)} \text{ ou } |A| = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} * \ldots * a_{n\sigma(n)}.$$

É, freqüentemente, representado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nota 11. Não confundir a representação acima do determinante da matriz A com a própria matriz de A.

1.39 Proposição. Se $A = [a_{11}]$, então $\det(A) = a_{11}$.

1.40 Proposição. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Então, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Prova: As permutações do conjunto $\{1, 2\}$ e seus sinais são: $Id = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (sinal 1) e $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (sinal -1). Logo, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. □

1.41 Proposição. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Então

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Prova: As permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$ e seus respectivos sinais são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} (+1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} (+1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} (+1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} (-1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} (-1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} (-1).$$

Logo,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

□

Notemos que, como o número de parcelas de $\det(A)$ é $n!$, então o cálculo de determinantes através da definição se torna trabalhoso em demasia a medida que cresce o n. Portanto, usamos métodos indiretos para calcular determinantes, em vez da definição. Na verdade demonstraremos um número de propriedades sobre determinantes que nos permitirão encurtar consideralvelmente este cálculo. Em particular, mostraremos que um determinante de ordem n é igual a uma combinação linear de determinantes de ordem $n-1$.

Para as matrizes de ordem $n = 2$ e $n \geq 3$ existem dispositivos práticos para o cálculo dos respectivos determinantes, os quais serão estudados a seguir, tomando por filosofia que uma vez dominada a teoria que fundamenta os determinantes, utilizaremos estes dispositivos como ferramenta prática de cálculo dos mesmos.

1.8.1 Dispositivos Práticos para Determinantes de Ordem $n \leq 3$

1. Se A é de ordem $n = 1$, então $\det(A)$ é o único elemento de A.

$$A = [a_{11}] \Rightarrow \det(A) = a_{11}.$$

2. Se A é de ordem 2, $\det(A)$ é o produto dos elementos da diagonal principal subtraído do produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

***Exemplo* 1.37.** $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4(-1) = 10.$

3. **Regra de Sarrus**: Se A é de ordem $n = 3$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

definimos:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Podemos memorizar esta definição da seguinte forma:

(a) Repetimos, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.

(b) Os termos precedidos pelo sinal $\oplus$ são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33};\ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31};\ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}.$$

(c) os termos precedidos pelo sinal $\ominus$ são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária:

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31};\ -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32};\ -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

***Exemplo* 1.38.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49.$$

1.9 Menor Complementar e Complemento Algébrico

1.42 Definição. Consideremos uma matriz A de ordem $n \geq 2$; seja a_{ij} um elemento de A. Definimos o *menor complementar do elemento* a_{ij}, e indicamos por D_{ij}, como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de A.

***Exemplo* 1.39.** Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e calculemos D_{11}, D_{21} e D_{31}.

***Exemplo* 1.40.** Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ e calculemos D_{12}, D_{22}.

1.43 Definição. Consideremos uma matriz de ordem $n \geq 2$; seja a_{ij} um elemento de A. Definimos complemento algébrico do elemento a_{ij} (ou cofator de a_{ij}) e indicamos por A_{ij}, como sendo o número resultante do produto $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$.

1.44 Teorema. O determinante da matriz $A = [a_{ij}]$ é igual à soma dos produtos obtidos multiplicando os elementos de qualquer linha(coluna) pelos seus respectivos co-fatores:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

e

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

As fórmulas acima, chamadas desenvolvimento de **Laplace** do determinante de A, (teorema de Laplace) segundo a i-ésima linha e j-ésima coluna, respectivamente, oferecem um método de simplificar o cálculo de $|A|$. Isto é, adicionando um múltiplo de uma linha(coluna) a outra linha(coluna), podemos reduzir A a uma matriz contendo uma linha ou coluna com um elemento 1 e os outros elementos 0. Desenvolvendo segundo esta linha ou coluna, reduzimos o cálculo do $|A|$ ao cálculo de um determinante de ordem uma unidade inferior à ordem de $|A|$.

1.10 Propriedades dos Determinantes

A definição de determinante e o teorema de Laplace nos permite o cálculo de qualquer determinante. Contudo, é possível simplificar este cálculo empregando-se certas propriedades. Relacionamos, agora, propriedades básicas do determinante de uma matriz nos teoremas a seguir. Não nos atenhamos aqui com formalismos e o rigor das demonstrações.

P_1. O determinante de uma matriz A e o de sua transposta A^t são iguais, isto é, $\det(A) = \det(A^t)$.

***Exemplo* 1.41.** Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$ e $\det(A^t)$.

Solução: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3$ e $\det(A^t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3.$

Verificamos que, através desta, qualquer outra propriedade envolvendo o determinante de uma matriz A e suas linhas, a mesma também é válida para $\det(A)$ e suas colunas.

Em certos casos, o determinante pode ser obtido de imediato. Vejamos isso nas propriedades a seguir.

P_2. Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha (coluna) de zeros, então $\det(A) = 0$.

Exemplo **1.42.** Calcule o determinante das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & z & 0 \\ 2 & 2 & q & 0 \\ 5 & 3 & w & 0 \\ 7 & 1 & s & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: A segunda linha em A e a quarta coluna em B são nulas. Portanto, de acordo com a propriedade anterior, temos que $\det(A) = \det(B) = 0$.

P_3. Seja A uma matriz quadrada. Se A tem duas linhas (colunas) idênticas, então $\det(A) = 0$.

Exemplo **1.43.** Calcule o determinante das matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 5 & 7 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & z & 1 \\ 2 & 2 & q & 2 \\ 5 & 3 & w & 5 \\ 7 & 1 & s & 7 \end{bmatrix}$

Solução: A primeira e terceira linhas são idênticas em A e, em B, a primeira e a quarta coluna também. Portanto, de acordo com a propriedade anterior, temos que $\det(A) = \det(B) = 0$.

P_4. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Se A é triangular inferior ou superior, então $\det(A)$ é produto dos elementos diagonais $\left[\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}\right]$. Assim, em particular, $\det(I_n) = 1$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Exemplo **1.44.** Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: $\det(A) = 3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$.

Exemplo **1.45.** Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Solução: $\det(A) = 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 36$.

P_5. Se uma matriz A de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente proporcionais, então $\det(A) = 0$.

Exemplo **1.46.** Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & x \\ 2 & 2y & y \\ 3 & 2z & z \end{bmatrix}$.

Solução: Como a segunda coluna é igual ao dobro da terceira, $\det(A) = 0$.

1.10.1 As Operações Elementares Sobre Linhas e o Determinante

Veremos aqui como o determinante de uma matriz é afetado pelas operações elementares.

Seja B uma matriz obtida da matriz A por:

P_6. Seja B uma matriz obtida da multiplicação de uma linha (ou coluna) de A por um escalar k. Então, $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

***Exemplo* 1.47.** Qual a relação existente entre os determinantes das matrizes $A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$?

Solução: $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7\cdot 1 & 7\cdot 2 & 7\cdot 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$. Portanto, $\det(A) = 7 \cdot \det(B)$.

P_7. Troca entre si de duas linhas(respectivamente, colunas) de A; então $|B| = -|A|$.

***Exemplo* 1.48.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -22$ e $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 22$.

***Exemplo* 1.49.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -37$ e $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 37$.

P_8. Adicionando a uma linha ou coluna de uma matriz A, de ordem n, uma outra linha ou coluna paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz B tal que: $|B| = |A|$.

***Exemplo* 1.50.** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix}$. Adicionando, a 1ª coluna a (-3) vezes a 2ª coluna, obtemos um novo determinante $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -10 & 7 \\ 4 & -11 & -6 \end{vmatrix}$ tal que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -10 & 7 \\ 4 & -11 & -6 \end{vmatrix} = |B|$

***Nota* 12.** A importância desta propriedade reside no fato de que podemos “introduzir zeros” numa fila de uma matriz, sem alterar seu determinante: com isso, podemos facilitar bastante seu cálculo através do teorema de Laplace.

P_9. Se uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n, tem uma linha (ou coluna) que é combinação linear de outras linhas (ou colunas), então $\det(A) = 0$.

***Exemplo* 1.51.** Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 25 & 7 & 1 \\ 44 & 8 & 5 \\ 27 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Solução: Pode-se verificar, facilmente, que a primeira coluna é uma combinação linear da 2ª e 3ª colunas de A. De fato, usando os multiplicadores 3 e 4, respectivamente, temos:

$$\begin{array}{c} 3\cdot 7+4\cdot 1=25 \\ 3\cdot 8+4\cdot 5=44 \\ 3\cdot 1+4\cdot 6=27 \end{array}.$$

Assim, $\det(A)=0$.

***Exemplo* 1.52.** Sem calcular, dê uma justificativa plausível. Por quê o determinante das seguintes matrizes são nulos?

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & 12 & 23 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) É nulo, pois, a 3ª coluna é igual a soma da 1ª coluna com a 2ª coluna;

(b) É nulo, pois, a 3ª linha é igual a soma do dobro da 1ª linha com o triplo da 2ª linha.

P_{10}. **Teorema de Binet**: Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B).$$

***Exemplo* 1.53.** Verifique que $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$, sabendo que $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução: $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-3\cdot 2=-2$, $\det(B)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-0\cdot 3=10$ e $\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 6 & 29 \end{vmatrix}=58-78=-20$. Portanto, $\det(A)\cdot\det(B)=\det(AB)=-20$.

***Nota* 13.** Como conseqüência decorre de P_{10} que

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}.$$

De fato, se existe A^{-1}, então:

$$A\cdot A^{-1}=I_n\Rightarrow\det(A\cdot A^{-1})=\det(I_n)\Rightarrow\det(A)\cdot\det(A^{-1})=1\Rightarrow\det(A)\neq 0$$

e

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}.$$

1.11 Matriz Adjunta

1.45 Definição. Seja $A=[a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n, A_{ij} o cofator de a_{ij} e A' a matriz dos cofatores de A. Chamamos de *matriz adjunta* de A e indicamos por $\overline{A}$, a transposta da matriz A', isto é, $\overline{A}=(A')^t$.

Em resumo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } \overline{A} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

em que $B_{ij} = A_{ji}$, $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $\forall\, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

***Exemplo* 1.54.** Determine a matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Solução: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então $A' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, pois,

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot |4| = 4 \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot |3| = -3$$
$$A_{21} = (-1)^3 \cdot |2| = -2 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot |1| = 1$$

e concluímos que

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

***Exemplo* 1.55.** Determine a matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, então $A' = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, pois,

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$
$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$
$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

e concluímos que:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.12 Processo de Cálculo da Inversa de uma Matriz Quadrada

1.46 Teorema. Se A é uma matriz quadrada de ordem n e $\det(A) \neq 0$, então a inversa de A é:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \overline{A}.$$

1.47 Corolário. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A inversa da matriz A existe se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Prova: Se $\det(A) \neq 0$, pelo teorema anterior vimos que existe a inversa e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \overline{A}.$$

Se existe A^{-1}, então $A \cdot A^{-1} = I_n$ e $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1 \neq 0$. Portanto, $\det(A) \neq 0$. □

***Exemplo* 1.56.** Determine a inversa, se possível, da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, utilizando-se do resultado do teorema 1.46.

Solução: Como $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, temos que A é inversível. Segue que, $\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.
Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

1.13 Exercícios Propostos

1.12. O determinante de uma matriz é 42. Se multiplicarmos a primeira linha da matriz por três e dividirmos sua segunda coluna por nove, a nova matriz terá determinante igual a:

(a) 12 (b) 14 (c) 21 (d) 42

1.13. A e B são matrizes quadradas de ordem 3 e $B = K \cdot A$. Sabe-se que $\det(A) = 1,5$ e $\det(B^t) = 96$. Então:

(a) $K = 64$ (b) $K = 96$ (c) $K = \frac{1}{4}$ (d) $K = \frac{3}{2}$ (e) $K = 4$

1.14. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & 5 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{bmatrix}$, de determinantes não-nulos. Então, para quaisquer valores de a, b e c, temos:

(a) $\det(A) = 2\det(B)$ (b) $\det(A) = \det(B^t)$ (c) $\det(A^t) = \det(B)$ (d) $\det(B) = 2\det(A)$ (e) $\det(A) = \det(B)$

1.15. O valor do determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ é:

(a) -4 (b) -2 (c) 0 (d) 2 (e) 4

1.16. Considere as afirmativas:

1. Se A^t é a transposta da matriz quadrada A, então $\det(A^t) = \det(A)$.
2. Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $A \cdot A = 0$, então a matriz I-A é inversível.

3. Se A é uma matriz inversível, então $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

A soma dos números associados às afirmativas corretas é:

(a) 9 (b) 5 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 4

1.17. A matriz $A = \begin{bmatrix} a & a-1 & 1 \\ a+1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ é inversível se, e somente se:

(a) $a \neq 1$ e $a \neq 2$ (b) $a \neq -1$ e $a \neq -2$ (c) $a \neq -1$ e $a \neq 2$ (d) $a = -1$ e $a = -2$ (e) $a = -1$ ou $a = 2$

1.18. A e B são matrizes quadradas de ordem 3 e $B = cA$, sendo c um número real não-nulo. Se o determinante A é 3 e o determinante da transposta de B é 81, então o valor de c é:

(a) 6 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) 4

Sistemas Lineares

Muitos problemas na Álgebra Linear são equivalentes ao estudo de um sistema de equações lineares, por exemplo, a procura do núcleo de uma transformação linear e a caracterização do subespaço gerado por um conjunto de vetores. Assim, as técnicas introduzidas nesta seção serão aplicáveis aos temas subsequentes.

1.14 Equação Linear

1.48 Definição. Dados os números reais $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b$ $(n \geq 1)$, chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, toda equação do tipo

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b.$$

Os números $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$, são chamados *coeficientes* e b, é o *termo independente* da equação.

***Exemplo* 1.57.** São lineares as equações:

- $13x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 5;$
- $-10x_1 - x_2 - x_3 = 0$
- $0x_1 + 0x_2 - 0x_4 = 5$
- $0x_1 + 0x_2 - 0x_3 - 0x_4 = 0$

***Exemplo* 1.58.** Observemos que *não são lineares* as equações:

- $13x_1^2 + 4x_2 - 5x_3 = 0$
- $-10x_1x_2 - x_3 + x_4 = 3$
- $0x_1 - \sqrt{x_2} - x_3 = 5$

1.14.1 Solução de uma Equação Linear

Dizemos que a seqüência ou n-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução da equação linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$$

se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

***Exemplo* 1.59.** Seja a equação linear $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$. A seqüência $(1, 2, 3, -2)$ é solução, pois, $2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) - 3 + (-2) = 3$ é sentença verdadeira, porém, a seqüência $(1, 1, 2, 1)$ não é solução, pois, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 + 1 = 3$ é sentença falsa.

***Exemplo* 1.60.** Seja a equação linear $0x + 0y + 0z = 0$. É fácil observar que qualquer tripla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução da equação.

1.15 Sistemas Lineares

1.49 Definição. Um sistema de m equações lineares com n incógnitas $(m, n \geq 1)$ é um conjunto de m equações lineares, cada uma com n incógnitas, consideradas simultaneamente.

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Sistema Homogêneo

Um sistema linear é dito homogêneo se, e somente se, $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

***Exemplo* 1.61.** São homogêneos os sistemas:

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right. \quad \text{e } S_2 : \left\{ \begin{array}{c} 3x + 4y + z + t = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ x + 2y + z - 3t = 0 \\ 4x - z + t = 0 \end{array} \right.$$

Podemos observar que um sistema linear homogêneo admite sempre como solução a seqüência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, em que $\alpha_i = 0, \forall\, i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, chamada solução trivial.

Nos exemplos dados temos: $(0, 0, 0)$ é solução de S_1 e $(0, 0, 0, 0)$ é solução de S_2.

1.15.1 Representação na Forma Matricial

Considere o sistema:

$$S : \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Fazendo-se:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

podemos representar o sistema S na forma matricial por $A \cdot X = B$, onde A é matriz dos coeficientes (ou matriz incompleta), X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes.

***Exemplo* 1.62.** O sistema linear $S_1 : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

***Exemplo* 1.63.** O sistema linear $S_2 : \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.15.2 Matriz Ampliada do Sistema

Dado um sistema linear $S : A \cdot X = B$, a sua matriz ampliada é definida por:

$$M = [A|B] \text{ ou } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} & \vdots & b_1 \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

em que A é a matriz dos coeficientes e B a matriz dos termos independentes.

1.16 Conjunto Solução de um Sistema Linear

1.16.1 Solução de um Sistema Linear

1.50 Definição. Dizemos que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, em que $x_i \in \mathbb{R}$ é uma *solução do sistema S*, se satisfaz todas as equações de S. O conjunto de todas as soluções de um sistema linear é denominado *Conjunto Solução*.

***Exemplo* 1.64.** Dado o sistema $S_1 : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$; o par ordenado $(2, 0)$ é a solução desse sistema, pois, $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 0 \\ 2 - 0 = 2 \end{cases}$ são sentenças verdadeiras.

***Exemplo* 1.65.** O sistema $S_2 : \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$ admite como solução a tripla ordenada $(1,2,3)$, pois,

$\begin{cases} 1+2+3=6 \\ 2\cdot 1+2-3=1 \\ 3\cdot 1-2+3=4 \end{cases}$ são sentenças verdadeiras. Porém, S_2 não admite, como solução a tripla $(-5,11,0)$, pois a mesma não é solução da equação $3x-y+z=4$, ou seja, $3\cdot(-5)-11+0=4$ é uma sentença falsa.

1.16.2 Sistemas Equivalentes

1.51 Definição. Se um sistema linear S_1 foi obtido de um sistema linear S através de um número finito de operações elementares (ver 1.5), dizemos que S_1 é equivalente a S. Notação: $S_1 \sim S$.

Podemos observar que para a relação $\sim$ valem as seguintes propriedades:

(a) $S \sim S$ (reflexiva)

(b) $S_1 \sim S \Rightarrow S \sim S_1$

(c) $S_1 \sim S$ e $S \sim S_2 \Rightarrow S_1 \sim S_2$

***Nota* 14.** Sistemas lineares equivalentes possuem o mesmo conjunto solução.

Desta forma, criamos um mecanismo extremamente útil para a procura de soluções de um sistema linear S. Procuramos sempre encontrar um sistema linear equivalente a S e que seja "mais simples". Vejamos um exemplo.

***Exemplo* 1.66.** Consideremos o sistema:

$$S : \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=4 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$$

e observe a seqüência de operações elementares aplicadas.

Solução: Efetuando-se as operações $(L_2 = L_2 - 2L_1)$ e $(L_3 = L_3 - L_1)$ em S, temos:

$$S \sim S^{(1)} = \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ -y+z &= -1 \end{cases}$$

Neste, efetuando-se $L_3 = L_3 + L_1$, temos:

$$S^{(1)} \sim S^{(2)} = \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ y-z &= 2 \\ 0 &= 1 \end{cases}$$

Como este último sistema é impossível ou incompatível, o mesmo acontece com o sistema S dado inicialmente.

1.16.3 Sistemas Escalonados (Método de Gauss-Jordan)

As operações elementares sobre as linhas de um sistema são:

1. Permuta da i-ésima e j-ésima equações.

2. Multiplicação de uma equação por $k \in \mathbb{R}^*$.

3. Substituição da i-ésima equação por ela própria mais k vezes a j-ésima equação, com $i \neq j$.

Consideremos um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspecto:

$$S: \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{1r_1}x_{r_1} & + & a_{1r_2}x_{r_2} & + & a_{1r_3}x_{r_3} & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2r_2}x_{r_2} & + & a_{2r_3}x_{r_3} & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & a_{kr_k}x_{r_k} & + & \ldots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \\ & & & & & & & & 0x_n & = & b_{k+1} \end{array} \right. ,$$

em que, $a_{1r_1} \neq 0$, $a_{2r_2} \neq 0$, $\ldots$, $a_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$.

Se tivermos $1 \leq r_1 < r_2 \ldots < r_k \leq n$, ou seja, o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo, aumenta de equação para equação, dizemos que S é um sistema linear *escalonado*. Estão escalonados os sistemas:

$$S_1: \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 4 \\ & & & & 2z & = & 5 \end{array} \right. \qquad S_2: \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 4y & + & z & = & 5 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$S_3: \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 4x & - & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & 2t & = & 1 \end{array} \right.$$

1.52 Proposição. Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.

Sendo todo sistema equivalente a um sistema escalonado, bastará que saibamos lidar com os sistemas escalonados e saibamos reduzir um sistema qualquer a um escalonado.

> ***Nota* 15.** Convém observar que as equações do tipo $0 = 0$ que, por ventura, aparecerem no processo de escalonamento devem ser suprimidas.

***Exemplo* 1.67.** Escalonar o sistema:

$$S: \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & + & z & - & t & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 1 \\ 2x & - & y & - & z & - & t & = & 0 \\ 5x & + & & & & & 2t & = & 1 \end{array} \right.$$

Solução:

$$S \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ -z + 3x + 2y + 2t = 1 \\ -z + 2x - y - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ 4x - 2y - 2t = 4 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}t = 1 \\ 4x - 2y - 2t = 4 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}t = 1 \\ -\frac{14}{5}y - \frac{14}{5}t = 0 \\ -y + t = -4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ y + t = 0 \\ y - t = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} z + 2x - y - t = 4 \\ 5x + y + t = 5 \\ y + t = 0 \\ -2t = 4 \end{cases}$$

Observe o leitor que $(1, 2, 2, -2)$ é a única solução de S, pois, é a única solução do sistema escalonado.

1.16.4 Classificação dos Sistemas quanto ao Conjunto Solução

1.53 Teorema. Um sistema de m equações com n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada $(P(M))$ é igual ao posto da matriz dos coeficientes $(P(A))$.

De forma mais explicativa temos que:

i. Se $P(M) = P(A) = n$ (número de incógnitas) a solução será única e o sistema é classificado como determinado, compatível ou consistente;

ii. Se $P(M) = P(A) < n$ a solução será indeterminada, ou seja, existe um grau de liberdade. Chamando $P(M) = P(A) = p$, o grau de liberdade será $n - p$. Teremos na verdade infinitas soluções e o sistema é classificado como indeterminado.

Se $P(M) \neq P(A)$ o sistema não possui solução e o mesmo é classificado como Impossível, Inconsistente ou Incompatível.

***Nota* 16.** Um sistema homogêneo é sempre possível, pois admite, pelo menos, a solução trivial $(0, 0, \ldots, 0)$.

1.17 Discussão e Resolução de um Sistema Linear

Discutir um sistema linear S significa efetuar um estudo de S visando a classificá-lo em sistema possível determinado (SPD), sistema possível indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Procedendo ao escalonamento de S e retiradas as equações do tipo $0 = 0$, restam p equações com n incógnitas.

(I) Se a última das equações restantes é

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b_p \ (b_p \neq 0),$$

então o sistema é incompatível;

(II) Se $p = n$ o sistema é compatível determinado;

(III) Se $p < n$, então o sistema é compatível indeterminado. Assim, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas. Neste caso o sistema terá infinitas soluções.

***Exemplo* 1.68.** Discutir e resolver o seguinte sistema:

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \end{array} \right. .$$

Solução: Efetuemos em S as seguintes operações sobre linhas: $L_2 \to L_2 - 2L_1$ e $L_3 \to L_3 - 3L_1$ e obtenhamos $S_1 \sim S$

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & 3y & & & = & -2 \\ & & 2y & - & 2z & = & -2 \end{array} \right.$$

Com as operações sobre linhas $L_3 \to L_2$ e $L_2 \to \frac{1}{2}L_2$, encontramos $S_2 \sim S_1$

$$S_2 \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ & & 3y & & & = & -2 \end{array} \right.$$

Fazendo-se $L_3 \to L_3 - 3L_2$, encontramos $S_3 \sim S_2$

$$S_3 \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ & & & & 3z & = & 1 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 1 \\ y - z & = & -1 \\ z & = & \dfrac{1}{3} \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & \dfrac{2}{3} \\ y & = & -\dfrac{2}{3} \\ z & = & \dfrac{1}{3} \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{r} x = 0 \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

Portanto, nos restaram $p = 3$ equações e $n = 3$ incógnitas. Como $p = n$, o sistema é compatível determinado e $\left(0, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ é o vetor solução.

***Exemplo* 1.69.** Resolva, por escalonamento, os sistemas lineares:

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} 5x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 4z & = & -1 \\ 4x & - & 3y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & + & y & - & z & + & 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$

Solução:

$$S_1 \sim \begin{cases} y - 3x + 4z = -1 \\ -2y + 5x + 2z = 2 \\ -3y + 4x + z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ 11x + 10z = 0 \\ 13x + 13z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ 11x + 10z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x + 4z = -1 \\ x + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

De $z = 0$, tiramos $x = 0$ e daí teremos $y = -1$. Resposta: $(0, -1, 0)$ é a única solução; o sistema é compatível determinado.

Solução:

$$S_2 : \begin{cases} x + y + z + 3t = 1 \\ 2z + t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -2 + 5z - y \\ t = 1 - 2z \end{cases}$$

Resposta: $\{(-2 + 5z - y, y, z, 1 - 2z); y, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema. O sistema é compatível indeterminado, pois, tem infinitas soluções.

Solução: S_3 é equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y - 2z = 1 \\ -y - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = -1 \\ 2y + 2z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

O sistema, portanto, é incompatível, por causa da igualdade $0 = 1$.

***Exemplo* 1.70.** Discuta, em função de a, os sistemas:

$$S_1 : \begin{cases} 2x - 2y + az = 2 \\ 2x - y + az = 3 \\ x - ay + z = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + az = -2 \\ x - y - 2z = a \\ x + ay + 4z = -5 \end{cases}$$

Solução: Efetuemos a operação sobre linha $L_2 \to L_2 - L_1$ para obtermos um sistema $S_1^{(2)} \sim S_1$

$$S_1^{(2)} : \begin{cases} 2x - 2y + az = 2 \\ 0x - y + 0z = 3 \\ x - ay + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 2y + az = 2 \\ y = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2x + az = 4 \\ x + z = a \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = a \\ 2x + az = 4 \end{cases} L_2 \to L_2 - 2L_1 \sim \begin{cases} x + z = a \\ (a-2)z = 4 - 2a \end{cases}.$$

Se $a = 2$ temos $0z = 0$ e $x + z = 2$. Como descartamos equações do tipo $0z = 0$, ficamos com $p = 1$ (uma equação) e $n = 2$ (duas incógnitas). Portanto, $p < n$ e o sistema é possível e indeterminado. Porém, se $a \neq 2$ temos $p = n = 2$. Portanto, o sistema é possível e determinado, tendo como solução $S_1 = \{(a + 2, 1, -2)\}$, pois, da equação $(a - 2)z = 4 - 2a \Rightarrow z = \dfrac{4 - 2a}{a - 2} \Rightarrow z = -2$.

Solução: Para facilitar os cálculos esbocemos as matrizes apenas com os coeficientes das incógnitas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & -2 \\ 1 & -1 & -2 & a \\ 1 & a & 4 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_2 \to L_3 - L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & -2 \\ 0 & -1 & -2-a & a+2 \\ 0 & a & 4-a & -3 \end{array}\right] L_2 \to -L_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & -2 \\ 0 & 1 & 2+a & -a-2 \\ 0 & a & 4-a & -3 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - aL_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & -2 \\ 0 & 1 & 2+a & -a-2 \\ 0 & a & -a^2-3a+4 & a^2+2a-3 \end{array}\right]$$

Temos que analisar a expressões $-a^2 - 3a + 4$ e $a^2 + 2a - 3$ para fins de discussão do sistema. Se $-a^2 - 3a + 4 \neq 0$e $a^2 + 2a - 3 \neq 0$ teremos $n = p = 3$ e, portanto, o sistema é possível e determinado. Se $-a^2 - 3a + 4 = 0$ e $a^2 + 2a - 3 = 0$ temos que o sistema é possível e indeterminado. E se $-a^2 - 3a + 4 = 0$ e $a^2 + 2a - 3 \neq 0$ o sistema será impossível. Encontrando as raízes da equação $-a^2 - 3a + 4 = 0$, obtemos $a = 1$ e $a = -4$. Portanto se $a \neq 1$ e $a \neq -4$ então o sistema é possível, determinado. Se $a = -4$ o sistema é impossível. Se $a = 1$, o sistema é possível, indeterminado e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -z - 2; y = -3z - 3)\}$.

1.18 Sistemas de Crammer

1.54 Definição. Um sistema de Crammer é um sistema linear de n equações com n incógnitas cuja matriz dos coeficientes é inversível.

1.55 Proposição. Se $AX = B$ é um sistema de Crammer, então esse sistema é compatível determinado e sua única solução é dada por $A^{-1}B$. Em particular, um sistema quadrado e homogêneo cuja matriz dos coeficientes é inversível só admite a solução trivial.

Prova: De fato, se $AX = B$ é um sistema de Crammer, temos $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Segue que, $X = A^{-1}B$. □

1.18.1 Regra de Crammer

Consideremos um sistema de Crammer $AX = B$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall\ i, j$. De posse do conhecimento de que tais sistemas são compatíveis determinados com solução dada por $X = A^{-1}B$ e levando em consideração o teorema (1.46) temos: $X = \dfrac{1}{\det(A)}\overline{A}B$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{j1} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{jn} b_j \end{bmatrix}.$$

O termo $\sum_{j=1}^{n} A_{j1} b_j$ é o determinante da matriz

$$\triangle_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

desenvolvido pela sua primeira coluna. De um modo geral, o termo $\sum_{j=1}^{n} A_{jk}b_j$, $k = 1, 2, \ldots, n$, é o desenvolvimento, pela coluna k-ésima, do determinante da matriz

$$\triangle_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obtida de A, pela substituição de sua k-ésima coluna por B. Temos então, finalmente,

$$x_k = \frac{\det(\triangle_k)}{\det(A)}, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Esta fórmula dá a solução de $AX = B$ quando A é inversível e é conhecida como *regra de Crammer*.

***Exemplo* 1.71.** Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 5 \\ 4x + y + 2z = 1 \\ 8x - y + z = 5 \end{cases}$$

utilizando a regra de Crammer.

Solução: Neste caso

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \det(A) = 18.$$

Além disso,

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

com $\det(\Delta_1) = 18$, $\det(\Delta_2) = 18$ e $\det(\Delta_3) = -36$. Logo, $x = \frac{18}{18} = 1$, $y = \frac{18}{18} = 1$ e $-\frac{36}{18} = -2$.

1.19 Exercícios Propostos

1.19. Resolva os sistemas abaixo, usando o escalonamento:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y - 2z = -6 \\ 3x + 2y - 2z = -2 \\ 3x - 5z = -9 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3x + y + 4z = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ 3x + 6y - 4z = 3 \end{cases} \quad S_4 : \begin{cases} x - y - z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

1.20. Discuta em função de k os sistemas:

$$S_1 : \begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + y - kz = 0 \\ kx + y - z = 2 \end{cases}$$

1.21. Determine os valores de a e de b que tornam o seguinte sistema possível e determinado.

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

1.22. Utilize a Regra de Crammer para resolver os sistemas:

(a) $\begin{cases} -x + y + z = 6 \\ 2x + 5y - 2z = 6 \\ x + 7y - 7z = -10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ x - y = 0 \end{cases}$

1.20 Gabarito

1.1 (a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) não é possível; (c) $\begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$; (d) não é possível; (e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 8 & -5 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} 15 & 9 \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$. 1.2 (d) 1.3(e) 1.4 (d) 1.5 (c) 1.6 1.7 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $P(A) = 2; N(A) = [4 - 2] = 2$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P(A) = 2; N(A) = [3 - 2] = 1$. (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P(A) = 2; N(A) = [4 - 2] = 2$. 1.8 1.9 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) impossível (c) impossível (d) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $H = I_3$ (g) $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.10 V, V, F, F. 1.11 (i) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (iii) Matriz não inversível. 1.12 (b) 1.13 (e) 1.14 (a) 1.15 (e) 1.16 (c) 1.17 (b) 1.18 (c) 1.19 $S_1 = \{(2, -1, 3)\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = \frac{5-3z}{2}$ e $y = \frac{z-3}{2}\}$, $S_3 = \{(-\frac{3-4y}{2}, y, \frac{1}{2}), \forall\ y \in \mathbb{R}\}$ e $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y + 3$ e $z = -1\}$; 1.20 S_1: Se $k = -6$, então o sistema é possível determinado e $S_1 = \{(-8, -10)\}$. Se $k \neq -6$, o sistema é impossível. S_2: Se $k \neq 1$, então o sistema é possível e indeterminado. Se $k = 1$, o sistema é impossível. S_3 : Se $k \neq 2$, então o sistema é possível, determinado e $S_3 = \{(k + 2, 1, -2)\}$. Se $k = 2$, o sistema é indeterminado. S_4 : Se $k \neq 1$ e $k \neq -4$, então o sistema é possível, determinado. Se $k = -4$ o sistema é impossível. Se $k = 1$, o sistema é possível, indeterminado e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -z - 2; y = -3z - 3\}$. 1.21 $a = 2$ e $b = 4$ 1.22 $(a)\,\det(A) = 42$, $\begin{cases} \triangle_1 = 28 \\ \triangle_2 = 108 \\ \triangle_3 = 172 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{18}{7} \\ z = \dfrac{86}{21} \end{cases}$ (b) $\det(A) = -4$, $\begin{cases} \triangle_1 = -8 \\ \triangle_2 = -8 \end{cases}$ e $x = y = 2$.

tema 2 Espaços e Subespaços Vetoriais

Espaço Vetorial

Apresentação

Em várias partes da matemática, defrontamo-nos com um conjunto, tal que é, ao mesmo tempo, significativo e interessante lidar com “combinações lineares” dos objetos daquele conjunto. Por exemplo, em nosso estudo de equações lineares, foi bastante natural considerar combinações lineares das linhas de uma matriz.

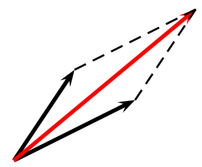
A grosso modo, a álgebra linear trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto mais uma noção razoável de uma “combinação linear” de elementos do conjunto. Neste tema estudaremos o ambiente dos Espaços Vetoriais que, como a experiência nos mostra, é a abstração mais útil deste tipo de sistema algébrico.

2.1 Introdução

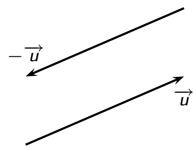
Em várias aplicações físicas aparecem certas grandezas tais como temperatura, massa e pressão, que possuem somente “magnitude”. Estas podem ser representadas por números reais e são chamadas *grandezas escalares*. Por outro lado, também há grandezas, como força, aceleração e velocidade, que possuem além de “magnitude”, “direção” e “sentido”. Estas podem ser representadas por flechas (tendo comprimento e direção apropriados e partindo de um dado ponto de referência 0) e são chamadas *vetores*.

Começamos por considerar as seguintes operações com vetores:

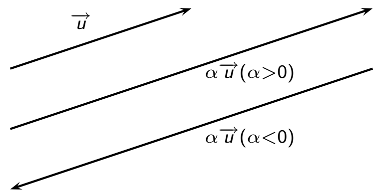
(i) Adição: A resultante $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ de dois vetores é obtida pela lei do paralelogramo, isto é, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ é a diagonal do paralelogramo formado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Essa adição é dotada das propriedades comutativa, associativa, além da existência do elemento neutro (vetor nulo) e do oposto para cada vetor.



O vetor nulo pode ser representado por qualquer ponto do espaço e o oposto $-\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{u}$ é um vetor de mesma direção e mesmo módulo, porém, de sentido contrário. Veja a figura ao lado.

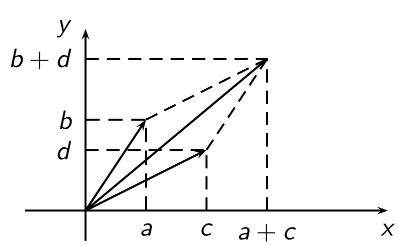


(ii) Multiplicação por escalar: O produto $\alpha\overrightarrow{u}$, de um número real α por um vetor $\overrightarrow{u}$ é obtido multiplicando a magnitude de $\overrightarrow{u}$ por α e mantendo o mesmo sentido, se $\alpha > 0$ ou, o sentido oposto, se $\alpha < 0$, como mostra o esquema abaixo:



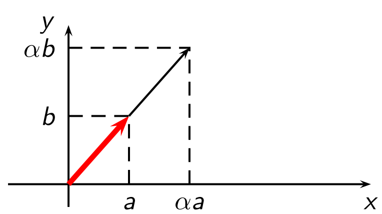
Supomos que o estudante esteja familiarizado com a representação de pontos no plano por pares ordenados de números reais. Se a origem dos eixos é escolhida no ponto de referência 0 como no exemplo acima, então cada vetor é determinado, de maneira única, pelas coordenadas da sua extremidade. As relações entre as operações acima e as extremidades dos vetores são as seguintes:

(i) Adição. Se (a, b) e (c, d) são as extremidades dos vetores u e v, então $(a + c, b + d)$ será extremidade de $u + v$, como mostra a figura ao lado.



(ii) Multiplicação por escalar. Se (a, b) é a extremidade do vetor u, então $(\alpha a, \alpha b)$ será a extremidade do vetor αu, como mostra a figura ao lado.

Matematicamente, identificamos um vetor com sua extremidade; isto é, chamamos o par ordenado (a, b), de números reais, um vetor. Na realidade, generalizaremos esta noção e chamaremos uma n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reais de vetor.



2.2 Espaços Vetoriais

A definição de um espaço vetorial envolve um corpo arbitrário cujos elementos no contexto da Álgebra Linear são chamados de *escalares*. Veremos a seguir a definição de corpo.

2.1 Definição. Um *corpo* é um conjunto K, munido de duas operações, uma chamada adição que, a cada par de elementos $a, b \in K$, associa um elemento $a + b \in K$, e outra chamada multiplicação, que a cada par de elementos $a, b \in K$, associa um elemento $a \cdot b \in K$, satisfazendo as seguintes condições:

K_1: $a + b = b + a, \forall\ a, b \in K$ (comutatividade da adição);

K_2: $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall\ a, b, c \in K$ (associatividade da adição);

K_3: existe um elemento $0 \in K$ tal que $a + 0 = a, \forall\ a \in K$ (existência do elemento neutro para a adição);

K_4: para cada $a \in K$ existe um elemento $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$ (existência do elemento simétrico para a adição);

K_5: $ab = ba, \forall\ a, b \in K$ (comutatividade da multiplicação);

K_6: $a(bc) = (ab)c, \forall\ a, b \in K$ (associatividade da multiplicação);

K_7: existe um elemento $1 \in K$ tal que $1 \cdot a = a, \forall\ \in K$ (existência do elemento neutro para a multiplicação);

K_8: para cada $a \in K, a \neq 0$, existe $a^{-1} \in K$, também denotado por $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$ (existência do elemento inverso para a multiplicação);

K_9: $a(b + c) = ab + ac, \forall\ a, b, c \in K$ (distributividade da multiplicação em relação a adição).

Os conjuntos $\mathbb{R}$ dos números reais, $\mathbb{C}$ dos números complexos, são exemplos de corpos. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros e $\mathbb{Q}$ dos números racionais são outros exemplos de corpos em relação às operações usuais de adição e multiplicação.

O conjunto M de todas as matrizes 2×2, com elementos reais não constituem um corpo. Lembre-se que não é válida a propriedade comutativa para a multiplicação de matrizes.

Ao longo do presente texto K denotará sempre um corpo.

2.2 Definição. Dizemos que um conjunto $V \neq \emptyset$, é um espaço vetorial sobre um corpo K se, e somente se,

I - Existe uma operação de adição $(u, v) \mapsto u + v$ em V, que verifica os seguintes axiomas:

A_1: $u + v = v + u, \forall\ u, v \in V$(comutativa);

A_2: $(u + v) + w = u + (v + w), \forall\ u, v, w \in V$ (associativa);

A_3: Existe em V um elemento neutro para essa adição o qual será simbolizado, genericamente, por 0. Ou seja:

$$\exists\ 0 \in V; u + 0 = u, \forall\ u \in V;$$

A_4: Para todo elemento u de V existe o oposto que é indicado por $(-u)$. Assim:

$$\forall\ u \in V, \exists(-u) \in V; u + (-u) = 0;$$

II - Está definida uma multiplicação de $K \times V$ em V, o que significa que a cada para (α, u) de $K \times V$ está associado um único elemento de V, que se indica por αu, e, para essa operação, os seguintes axiomas são verificados:

M_1: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \forall\ u \in V$ e $\forall\ \alpha, \beta \in K$;

M_2: $(\alpha + \beta)u = \alpha u \beta u, \forall\ u \in V$ e $\forall\ \alpha, \beta \in K$;

M_3: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall\ u, v \in V$ e $\forall\ \alpha \in K$;

M_4: $1u = u, \forall\ \in V$.

Os elementos de um espaço vetorial, independente de sua natureza, são chamados de vetores. O elemento neutro da adição, de vetor nulo desse espaço. Os elementos de K são denominados escalares. Naturalmente, o termo vetor é inspirado nos elementos de espaço euclidiano(espaço vetorial real), porém é também usado para designar, por exemplo, uma matriz ou uma função. Observe-se que o símbolo $+$ é usado indistintamente para representar a soma de escalares ou a soma de vetores, embora representando operações distintas. O estudante também deve está atento para distinguir entre o produto $\alpha\beta$ dos escalares $\alpha, \beta \in K$ e o produto αu do escalar α pelo vetor u.

Veremos, a seguir, alguns exemplos de espaços vetoriais. Onde em alguns desses exemplos verificaremos se as operações definidas nos espaços apresentados realmente satisfazem as condições A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4 da definição 2.2 e nos demais deixaremos como exercício. Na maioria dos casos, nos limitaremos a descrever o vetor nulo e, para cada vetor $u \in V$, o vetor $-u \in V$ é o simétrico de u em relação à soma em V.

Vejamos alguns exemplos de espaços vetoriais.

***Exemplo* 2.1.** Os espaços vetoriais euclidianos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.

Não é novidade que a adição de números reais verifica as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 da definição de espaço vetorial. Tão pouco que o produto de um número real por um outro é também um número real e que essa multiplicação obedece aos ítens M_1, M_2, M_3 e M_4 da definição mencionada. Logo, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $K = \mathbb{R}$.

O conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como sendo o plano $x0y$, onde $v = (x, y)$ identifica as coordenadas de P com as componentes de v. (Figura)

A origem do sistema $O(0, 0)$ representa o vetor nulo. (Figura)

O vetor oposto de $v = (x, y)$ é o vetor $v = (-x, -y)$.) (Figura)

2.3 Igualdade e Operações

2.3 Definição. Dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são iguais se, somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, e escreve-se $u = v$.

2.4 Definição. Sejam os vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

(a) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

(b) $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1)$.

Verifiquemos agora se com estas operações o conjunto $\mathbb{R}^2$ tem estrutura de um espaço vetorial, ou seja, satisfaz os axiomas da definição de espaço vetorial.

Dados os vetores $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, $w = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ temos:

A_1: $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$, pois as coordenadas são números reais onde é válida a propriedade comutativa. Segue que

$$(x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = v + u.$$

Portanto, $u + v = v + u$.

A_2: $(u+v)+w = (x_1+x_2, y_1+y_2)+(x_3, y_3) = [(x_1+x_2)+x_3, (y_1+y_2)+y_3] = [x_1+(x_2+x_3), y_1+(y_2+y_3)] = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = u + (v + w)$. Portanto, $(u + v) + w = u + (v + w)$.

A_3: Existe um só vetor nulo 0, o par ordenado $(0, 0)$ tal que, para todo vetor $u = (x_1, y_1)$, se tem:

$$u + 0 = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1) = u.$$

A_4: Qualquer que seja o vetor $u = (x_1, y_1)$, existe um só vetor $-u = (-x_1, -y_1)$(vetor oposto de u) tal que:

$$u + (-u) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0) = 0.$$

M_1: $(\alpha\beta)u = (\alpha\beta)(x_1, y_1) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1) = \alpha(\beta x_1, \beta y_1) = \alpha(\beta(x_1, y_1)) = \alpha(\beta u)$.

M_2: $(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1) = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1)) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1) = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1) = \alpha u + \beta u$.

M_3: $\alpha(u + v) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\alpha(x_1 + x_2), (\alpha(y_1 + y_2)) = ((\alpha x_1 + \alpha x_2), (\alpha y_1 + \alpha y_2)) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) = \alpha u + \alpha v$.

M_4: $1u = 1(x_1, y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1) = u$

Portanto, o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações acima definidas constitui um espaço vetorial.

O conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como sendo o espaço cartesiano tridimensional $Oxyz$ ou conjunto de todas as ternas ordenadas de números reais onde $v = (x, y, z)$ identifica as identifica as coordenadas de P com as componentes de v. (Figura)

A origem do sistema $O(0, 0, 0)$ representa o vetor nulo. (Figura)

O vetor oposto de $v = (x, y, z)$ é o vetor $v = (-x, -y, -z)$.) (Figura)

De fato, segue de forma análoga ao conjunto $\mathbb{R}^2$ o qual vimos acima, inclusive a igualdade entre vetores e as operações de adição e multiplicação. Assim a adição e a multiplicação por escalares são definidas no $\mathbb{R}^3$ por:

a) $u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

b) $\alpha u = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$.

Faremos, neste caso, apenas a verificação dos axiomas relativos à adição.

Dados os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$, $w = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ temos:

A_1: $u+v = (x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_2+x_1, y_2+y_1, z_2+z_1)$, pois as coordenadas são números reais onde é válida a propriedade comutativa. Segue que $(x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1) = (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1) = v + u$. Portanto, $u + v = v + u$.

A_2: $(u+v)+w = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)+(x_3, y_3, z_3) = [(x_1+x_2)+x_3, (y_1+y_2)+y_3, (z_1+z_2)+z_3] = [x_1+(x_2+x_3), y_1+(y_2+y_3), z_1+(z_2+z_3)] = (x_1, y_1, z_1)+(x_2+x_3, y_2+y_3, z_2+z_3) = u+(v+w)$. Portanto, $(u+v)+w = u+(v+w)$.

A_3: Existe um só vetor nulo 0, a terna ordenada $(0,0,0)$ tal que, para todo vetor $u = (x_1, y_1, z_1)$, se tem:

$$u+0 = (x_1, y_1, z_1)+(0,0,0) = (x_1, y_1, z_1) = u;$$

A_4: Qualquer que seja o vetor $u = (x_1, y_1, z_1)$, existe um só vetor $-u = (-x_1, -y_1, -z_1)$ (vetor oposto de u) tal que:

$$u+(-u) = (x_1, y_1, z_1)+(-x_1, -y_1, -z_1) = (0,0,0) = 0.$$

***Nota* 17.** Os elementos de $\mathbb{R}^2$ e os do $\mathbb{R}^3$ são de natureza distinta e assim sendo não deve o estudante cometer o engano de dizer que o $\mathbb{R}^2$ é subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Mais adiante será explicado que o $\mathbb{R}^2$ pode, de uma certa maneira, ser considerado idêntico ao subconjunto $\{(x, y, 0)|x, y \in \mathbb{R}\}$ do $\mathbb{R}^3$.

E de forma análoga a $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ podemos assim generalizar, mencionando o conjunto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n/x_j \in \mathbb{R}\}$, que é o conjunto de todas as n-uplas de números reais. O $\mathbb{R}^n$ pode ser visto como espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ desde que se definam adição e multiplicação da seguinte maneira:

$$(x_1, \ldots, x_n)+(y_1, \ldots, y_2) = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n);$$

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Ora, tal afirmação pressupõe que se tenham verificado os oito axiomas que constam da definição, o que deixaremos como exercício.

***Exemplo* 2.2.** Os espaços vetoriais complexos $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^2$.

Solução: Com a mesma argumentação utilizada para justificar o conjunto $\mathbb{R}$ como espaço vetorial, verifica-se que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{C}$(corpo dos números complexos). Mas $\mathbb{C}$ também é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Quanto à adição não há novidades: tudo como no caso anterior. O produto de um número complexo por um número real é um número complexo e para essa multiplicação valem M_1, M_2, M_3, M_4 como situações particulares das propriedades da multiplicação em $\mathbb{C}$.
Seja $\mathbb{C} = \{a+bi, a, b \in \mathbb{R}\}$ e dados os vetores $u = a+bi$ e $v = c+di$ temos que:

(a) $u+v = (a+b)+(c+d)i$

(b) $\alpha u = \alpha u + \alpha bi$

O vetor nulo dos complexos tem a forma $0+0i$, ou seja parte real e imaginária nula.
Dado $u = a+bi$, o vetor simétrico a u é $-u = -a-bi$.
Quanto ao conjunto $\mathbb{C}^2$ faz-se uma analogia ao conjunto $\mathbb{R}^2$ tendo atenção quanto a multiplicação de números complexos.
Seja $\mathbb{C}^2 = \{(a+bi, c+di)/a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ com soma e produto usuais dos números complexos e dados $u = (a_1+b_1i, c_1+d_1i)$ e $v = (a_2+b_2i, a_2+b_2i)$ temos então:

(a) $u+v = (a_1+b_1i, c_1+d_1i)+(a_2+b_2i, a_2+b_2i) = [(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i, (c_1+c_2)+(d_1+d_2)i]$

(b) $\alpha\cdot u = \alpha\cdot(a_1+b_1i, c_1+d_1i) = [\alpha a_1+(\alpha b_1)i, \alpha c_1+(\alpha d_1)i]$

Note que, assim como o espaço vetorial $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{R}$, pois, na definição, as constantes a e b podem ser reais ou complexas. Deixemos como exercício para o estudante a verificação das propriedades A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3 e M_4 de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^2$.

***Exemplo* 2.3.** O conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução: No conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ também está definida uma adição, a adição de matrizes estudadas no tema 1. Conforme vimos nesse tema, essa adição é associativa, comutativa, admite elemento neutro, que é a matriz nula

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

e toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tem uma oposta.
Pode-se também multiplicar uma matriz por um número real obtendo-se uma matriz da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Essa multiplicação apresenta as mesmas propriedades que as destacadas em $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$. Ou seja, valem sempre as igualdades:

M_1: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

M_2: $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;

M_3: $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;

M_4: $1A = A$.

***Nota* 18.** O vetor $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e o vetor $v = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ podem aparecer, às vezes, com a notação matricial (matriz-coluna $n \times 1$), ou seja, podemos ter o $\mathbb{R}^n$ na forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Sendo assim $u+v$ e αu na notação matricial são, respectivamente, os vetores

$$\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

Conforme acabamos de ver, os conjuntos $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}$, munidos desse par de operações, apresentam uma “estrutura” comum em relação a essas operações. Esse fato não vale apenas para esses conjuntos com essas operações mas para muitos outros, razão que justifica estudá-los simultaneamente a luz de uma estrutura comum entre eles que é a de um espaço vetorial.

2.3.1 Propriedades de um Espaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Provaremos, a seguir, algumas propriedades que são conseqüências praticamente imediatas da definição de espaço vetorial.

P_1. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha 0 = 0$.

Prova: Devido aos axiomas M_3 e A_3 da definição de espaço vetorial têm-se:

$$\alpha 0 = \alpha(0+0).$$

Somando a ambos os membros o vetor $-(\alpha 0)$ temos:

$$0 = -(\alpha 0) + \alpha 0 = -\alpha 0 + \alpha 0 + \alpha 0 = \alpha 0.$$

□

P_2. Para todo $u \in V, 0u = 0$.

A prova é deixada como exercício (análogo ao anterior).

P_3. Uma igualdade $\alpha u = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, só é possível se $\alpha = 0$ ou $u = 0$.

Prova: Suponha que $\alpha \neq 0$. Logo, existe o número real α^{-1}. Multiplicando-se a equação $\alpha u = 0$ por α^{-1}, temos:

$$\alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1} 0.$$

Levando-se em conta o axioma M_1, a propriedade P_1 e que $\alpha\alpha^{-1} = 1$, podemos concluir (usando o axioma M_4) que

$$u = 0.$$

□

P_4. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo u de V, $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$.

Prova: Notemos que

$$\alpha u + (-\alpha)u = (\alpha + (-\alpha))u = 0u = 0$$

usando o axioma M_2 e P_2. Por outro lado,

$$\alpha u + (-\alpha u) = 0.$$

Então:

$$\alpha u + (-\alpha)u = \alpha u + (-\alpha u).$$

Somando $-\alpha u$ a ambos os membros desta última igualdade acharemos:

$$(-\alpha)u = -\alpha u.$$

Um raciocínio análogo nos mostrará que $\alpha(-u) = -(\alpha u)$. □

***Nota* 19.** Define-se diferença entre dois vetores u e v do espaço V, assim:

$$u - v = u + (-v).$$

P_5. Quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$.

Prova: $(\alpha - \beta)u = (\alpha + (-\beta))u = \alpha u + (-\beta)u = \alpha u + (-(\beta u)) = \alpha u - \beta u$. □

P_6. Quaisquer que sejam α em $\mathbb{R}$ e u em V, $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Análoga à anterior. Fica como exercício.

P_7. Dados $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ em $\mathbb{R}$ e $u_1, \cdots, u_n$ em V, então:

$$\beta\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (\beta\alpha_j) u_j.$$

Prova: Faz-se por indução a partir dos axiomas M_1 e M_3 da definição de espaço vetorial. □

2.4 Subespaços Vetoriais

Às vezes, é necessário detectar, dentro de um espaço vetorial V, subconjuntos W que sejam eles próprios espaços vetoriais "menores". Tais conjuntos serão chamados subespaços de V. Isto acontece, por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, o plano, onde W é uma reta deste plano, que passa pela origem.

2.5 Definição. O subconjunto W de um espaço vetorial V chama-se subespaço de V, quando W por si próprio é um espaço vetorial sob as operações de soma e multiplicação por um escalar definidas em V.

Podemos de forma mais explícita, reescrever esta definição através do teorema abaixo.

2.6 Teorema. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto $W \subset V$, tal que:

i. $W \neq \emptyset$, ou $0 \in W$(vetor nulo);

ii. $\forall\ u, v \in W, u + v \in W$;

iii. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, e $\forall\ u \in W, \alpha u \in W$.

Vejamos alguns exemplos de subespaços vetoriais.

***Exemplo* 2.4.** $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subset V$, um plano passando pela origem.

Veja geometricamente que se $u, v \in W$, então $u + v \in W$; bem como, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in W$ e como W é um plano que passa pela origem, possui o vetor nulo.

Observe que se W não pela origem, ele não seria um subespaço. Na verdade, os únicos subespaços de $\mathbb{R}^3$ são a origem, as retas e planos que passam pela origem, e o próprio $\mathbb{R}^3$.

***Exemplo* 2.5.** Para todo espaço vetorial V é imediato que $\{0\}$ e V são subespaços de V. São os chamados subespaços impróprios ou triviais.

***Exemplo* 2.6.** $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$. Vejamos:

i. $0 = (0, 0, 0) \in W$, pois, satisfaz $x + y = 0 + 0 = 0$.

ii. se $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ estão em W, então $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = 0$. Como $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$, então $u + v \in W$.

iii. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, y_1, z_1)$, $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$. Se $u = (x_1, y_1, z_1) \in W$, então $x_1 + y_1 = 0$. Como $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ e $\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1) = \alpha \cdot 0 = 0$, então $\alpha u \in W$.

***Exemplo* 2.7.** A intersecção de dois subespaços vetoriais do mesmo espaço V é também um subespaço vetorial de V.

Solução: Sejam U e W esses subespaços.

i. $U \cap W \neq \emptyset$ pois $0 \in U$ e $0 \in W$. Logo $0 \in U \cap W$.

ii. Dados $u + v \in U \cap W$ então $u + v \in U$ e $u + v \in W$ sendo U e W subespaços de V. Portanto, $u + v \in U \cap W$.

iii. Tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in U \cap W$. Logo $u \in U$ e $u \in W$ (que são subespaços), então $\alpha u \in U$ e $\alpha u \in W$. Portanto, $\alpha u \in U \cap W$.

***Exemplo* 2.8.** $V = \mathbb{R}^3$. $U \cap W$ é a reta de interseção dos planos U e W.

***Exemplo* 2.9.** Seja $V = M_n$. Os conjuntos U das matrizes triangulares superiores e W das matrizes triangulares inferiores são subespaços de V. Então $U \cap W$ (conjunto das matrizes diagonais) é um subespaço de V.

***Exemplo* 2.10.** Mostrar que é subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ o seguinte subconjunto:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | y = -x \right\}.$$

Solução:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$, pois, $0 = -0$. Logo, $y = -x$

(ii) Sejam $u = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{bmatrix}$ elementos de V. Então

$$u + w = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & t_1 + t_2 \end{bmatrix}$$

Como $y_1 + y_2 = (-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2)$, então $u + w \in V$.

(iii) Sejam: $u = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ em V e $\alpha \in \mathbb{R}$. Daí $\alpha u = \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha t \end{bmatrix}$ Como $\alpha y = \alpha(-x) = -(\alpha x)$, então $\alpha u \in V$.

2.4.1 Soma de Subespaços

Uma vez que a interseção de dois subespaços ainda é um subespaço vetorial, poderíamos esperar o mesmo da reunião. Mas isso não acontece, como podemos ver no próximo exemplo.

Os espaços U e W são retas que passam pela origem. Então, $U \cap W = \{0\}$ e $U \cup W$ é o "feixe" formado pelas duas retas, que não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, se somarmos os dois vetores u e w, pertencentes a $U \cup W$, vemos que $u + w$ está no plano que contém U e W mas $u + w \notin U \cup W$.

Assim, $U \cup W$ não é subespaço de V. Entretanto podemos construir um conjunto tal que contenha U e W e seja subespaço de V, denominado $U + W$ onde será formado por todos os vetores de V que forem a soma de vetores de U com os vetores de W.

Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V.

2.7 Definição. Indicaremos por $U+W$ e chamaremos de soma de U com W o seguinte subconjunto de V:

$$U+W=\{u+w|u\in U \text{ e } w\in W\}.$$

Observe que $U+W=W+U$ e $U+\{0\}=U$, para todos os subespaços U e W de V. Assim como é verdade que $U\subset U+W$ e $W\subset U+W$.

2.8 Proposição. *Se U e W são subespaços vetoriais de V, então $U+W$ também é subespaço vetorial de W.*

Prova:

i. Como $0=0+0, 0\in U$ e $0\in V$, então $0\in U+W$.

ii. Sejam $v_1=(u_1+w_1)$ e $v_2=u_2+w_2)$ elementos de $U+W$, onde estamos supondo $u_1,u_2\in U$ e $v_1,v_2\in V$. Então,

$$v_1+v_2=(u_1+w_1)+(u_2+w_2)=(u_1+u_2)+(w_1+w_2).$$

Como u_1+u_2 e w_1+w_2 pertencem, respectivamente, a U e W, então $v_1+v_2\in U+W$.

iii. Exercício.

□

2.4.2 Soma Direta de dois Subespaços

2.9 Definição. Sejam U e W subespaços vetoriais de V, tais que $U\cap W=\{0\}$. Neste caso diz-se que $U+W$ é soma direta dos subespaços U e W. Notação: $U\oplus W$.

Se U e W são subespaços de V tais que $U\oplus W=V$ dizemos que U e W são suplementares ou que U é suplementar de W(ou W é suplementar de U).

2.10 Proposição. *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então $V=U\oplus W$ se, somente se, cada vetor $w\in W$ admite uma única decomposição $v=u+w$, com $u\in U$ e $w\in W$.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Por hipótese a decomposição existe. suponhamos $v=u+w=u_1+w_1$ $(u,u_1\in U ew, w_1\in W)$. Daí $u-u_1=w_1-w$. Como $w_1-w\in W$ (pois ambos os termos estão em W), então $u-u_1\in U\cap V=\{0\}$. Logo $u-u_1=0$ e então $u=u_1$. Levando em conta isto conclui-se que $w_1-w=0$ e portanto que $w_1=w$
$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $v\in U\cap W$. Tomando então $u\in U$ e $w\in W$, teremos:

$$u+w=(u+v)+(w-v).$$

Devido à unicidade que a hipótese menciona podemos afirmar que: $u=u+v$ e $w=w-v$. Logo $v=0$. Provamos pois que $U\cap W=\{0\}$. □

Exemplo **2.11.** O espaço $\mathbb{R}^3$ é soma direta dos subespaços $U=\{(x,0,0)|x\in\mathbb{R}\}$ e $W=\{(0,y,z)|y,z\in\mathbb{R}\}$.

É imediato que $U\cap W=\{(0,0,0)\}$; por outro lado,

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, (x,y,z)=(x,0,0)+(0,y,z)\in U+W.$$

***Exemplo* 2.12.** Dados os espaços vetoriais reais a seguir, diga em cada caso, se W é subespaço de V.

(a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z); x \geq 0\}$;

(b) $V = P_2 = \{a + bt + ct^2; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{a + bt + ct^2; a - 2b + c = 0\}$.

Solução: (a) i. $\forall\ u, v \in W\ u + v \in W$?
Seja $u \in W$. Então $u = (x_1, y_1, z_1)$, tal que $x_1 \geq 0$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, tal que $x_2 \geq 0$; $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2); x_1 + x_2 \geq 0$, pois, a soma de dois números reais positivos ou iguais a zero é um número positivo ou igual a zero.
ii. $\forall\ u \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}\ \alpha u \in W$?
$\alpha u = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z), \alpha x \geq 0$ somente se $\alpha \geq 0$; caso $\alpha < 0$, temos $\alpha x < 0$. Portanto, W não é um subespaço vetorial de V.
(b) i. $W = \{a + bt + ct^2; a = 2b - c\}$. Sejam $u = a_1 + b_1t + c_1t^2$; $a_1 = 2b_1 - c_1 \in W$ e $v = a_2 + b_2t + c_2t^2$; $a_2 = 2b_2 - c_2 \in W\ u + v = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)t + (c_1 + c_2)t^2 \in W$.
ii. Sejam $u = a + bt + ct^2 \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha u = \alpha(a + bt + ct^2) = \alpha a + \alpha bt + \alpha ct^2$. Chamando $\alpha a = x$, $\alpha b = y$ e $\alpha c = z$ temos: $\alpha u = x + yt + zt^2; \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$ pertence ao conjunto W. Logo, W é um espaço subespaço vetorial de P_2.

2.4.3 Combinações Lineares e Subespaço Gerado

Vamos agora comentar, agora uma das características mais importantes de um espaço vetorial, que é a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.

2.11 Definição. Sejam V um espaço vetorial real (ou complexo), $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais (ou complexos). Então, o vetor

$$a_1v_1, a_2v_2, \ldots, a_nv_n$$

é um elemento de V ao que chamamos combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Note que uma combinação linear envolve apenas um número finito de vetores!

Uma vez fixados vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes, é um subespaço vetorial. W é chamado **subespaço gerado** por $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e usamos a notação

$$W = [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

Note que, formalmente, podemos escrever

$$W = [v_1, v_2, \ldots, v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + a_2v_2, \ldots, a_nv_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}`.$$

Uma outra caracterização de um subespaço gerado é a seguinte: $W = [v_1, v_2, \ldots, v_n$ é o menor subespaço de V que contém o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, no sentido de que qualquer outro subespaço W' de V que contenha $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, satisfará $W' \supset W$.

***Exemplo* 2.13.** $V = \mathbb{R}^3, v \in V, v \neq 0$. Então $[v] = \{av : a \in \mathbb{R}\}$ é a reta que contém o vetor v

***Exemplo* 2.14.** Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ são tais que $\alpha v_1 \neq v_2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, então $[v_1, v_2]$ será o plano que passa pela origem e contém v_1 e v_2.

Observe que se $v_3 \in [v_1, v_2]$, então $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$, pois todo vetor que pode ser escrito como combinação linear de v_1, v_2, v_3 é uma combinação linear apenas de v_1 e v_2 (pois v_3 é combinação linear de v_1 e v_2).

***Exemplo* 2.15.** Os vetores $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Pois qualquer vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos e_i; especificamente,

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + a(0, 0, 1) = a\, e_1 + b\, e_2 + c\, e_3.$$

2.12 Definição. Dizemos que um espaço vetorial V é *finitamente gerado* se existe $S \subset V$, S finito, de maneira que $V = [S]$.

***Exemplo* 2.16.** O espaço V dos vetores da geometria definidos por segmentos orientados é finitamente gerado pois considerando a terna fundamental $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$, para todo $\overrightarrow{u} \in V$, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$, de maneira que $\overrightarrow{u} = a\, \overrightarrow{i} + b\, \overrightarrow{j}, + c\, \overrightarrow{k}$.

Ressalte-se que $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$, desde que se tenha identificado V e $\mathbb{R}^3$

***Exemplo* 2.17.** Se 0 indica o vetor nulo de um espaço vetorial qualquer, então $V = 0$ é finitamente gerado pois, fazendo $S = 0$, vale $V = [S]$.

2.5 Bases e Dimensão

Nosso objetivo principal é mostrar que em todo espaço vetorial finitamente gerado V existe um subconjunto finito W tal que todo elemento de V é combinação linear, de uma única maneira, desse subconjunto. E que todos os outros subconjuntos de V que têm também essa propriedade (sempre os há) possuem o mesmo número de elementos que W. Em outras palavras, queremos determinar um conjunto de vetores que gere V e tal que todos os elementos sejam realmente necessários para gerar V.

Passamos agora à tarefa de atribuir uma dimensão a certos espaços vetoriais. Apesar de associarmos usualmente "dimensão" a algo geométrico, precisamos encontrar uma definição algébrica adequada da dimensão. Elaboraremos daí então o conceito de "dimensão".

2.5.1 Dependência Linear e Independência Linear

Questionar sobre a existência de um conjunto de geradores para um espaço vetorial não trás conseqüências significativas, pois, a resposta é sim, basta considerar $W = V$. Uma questão mais relevante é examinar a existência de um conjunto de geradores satisfazendo determinadas propriedades, como ser finito ou não, enumerável, ortogonal, etc... Para isto apresentemos tais definições.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2.13 Definição. Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, uma igualdade do tipo

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$$

com os α_i em $\mathbb{R}$, só for possível para $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

2.14 Definição. Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ é linearmente dependente (L.D.) se, e somente se,

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$$

sem que os escalares α_i sejam todos iguais a zero.

***Exemplo* 2.18.** Sejam $v_1, v_2 \in V = \mathbb{R}^3$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é L.D. se, e somente se, v_1 e v_2 estiverem na mesma reta, que passa pela origem. $(v_1 = \lambda v_2)$. Veja a Figura

***Exemplo* 2.19.** Sejam $v_1, v_2, v_3 \in V = \mathbb{R}^3$. O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.D. se os três vetores estiverem no mesmo plano, que passa pela origem. Veja a Figura

***Exemplo* 2.20.** Considere o espaço $V = \mathbb{R}^2$ e os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. O conjunto $\{e_1, e_2\}$ é L.I., pois,

$$\begin{aligned} &\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0 \\ &\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0) \\ &(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0) \\ &\alpha_1 = 0 \text{ e } \alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

***Exemplo* 2.21.** O conjunto $\{(1,1,0,0); (0,2,1,0); (0,0,0,3)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I., pois:

$$x(1,1,0,0) + y(0,2,1,0) + z(0,0,0,3) = (0,0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x & & & & & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 0 & & \\ & & y & = & 0 & & \\ & & & & 3z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0.$$

***Exemplo* 2.22.** O conjunto $\{(1,1,0,0); (0,1,0,0); (2,1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.D., pois:

$$x(1,1,0,0)+y(0,1,0,0)+z(2,1,0,0) = (0,0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x & + & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

Sendo indeterminado o sistema obtido, então há outras soluções, além da trivial, para a igualdade condicional de que partimos.

***Nota* 20.** Convencionamos que o conjunto vazio ($\emptyset \subset V$) é L.I., pois não podemos exibir vetores distintos do conjunto vazio. Como para um subconjunto $L \subset V$ deve valer um, e uma só, das duas definições anteriores e a segunda destas pressupõe elementos em L, fica justificada esta convenção.

***Exemplo* 2.23.** Verificar quais dos seguintes conjuntos de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, são linearmente independentes.

(a) $\{(1,1,0), (1,4,5), (3,6,5)\}$ (b) $\{(1,2,3), (1,4,9), (1,8,27)\}$ (c) $\{(1,2,1), (2,4,2), (5,10,5)\}$

Solução: (a) Façamos: $x(1,1,0) + y(1,4,5) + z(3,6,5) = (0,0,0)$. Portanto:

$$\begin{cases} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & & 5y & + & 5z & = & 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & & 5y & + & 5z & = & 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

Esse sistema admite outras soluções além da trivial; daí o conjunto é linearmente dependente. Como $x = -2, y = -1$ e $z = 1$ é uma solução não trivial temos $-2(1,1,0) - (1,4,5) + (3,6,5) = (0,0,0)$. Esta é uma relação de dependência entre os 3 vetores dados.

Solução: (b) Façamos $x(1,2,3)+y(1,4,9)+z(1,8,27)=(0,0,0)$. Portanto,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & 6y & + & 24z & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Daí, a única solução é a trivial, e o conjunto é linearmente independente.

Solução: (c) Façamos: $x(1,2,1)+y(2,4,2)+z(5,10,5)=(0,0,0)$. Portanto,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 10z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

Escalonando o sistema, chegamos a: $x+2y+5z=0$ e o sistema é indeterminado, isto é, além da solução trivial admite outras soluções; portanto o conjunto é linearmente dependente. Achar uma relação de dependência entre os 3 vetores.

2.5.2 Propriedades da Dependência Linear

Consideremos um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$.

P_1. Se um conjunto finito $L \subset V$ contém o vetor nulo, então esse conjunto é L.D.

Prova: Seja $S=\{0,u_2,\ldots,u_n\}$. Então, evidentemente,

$$\alpha 0 + 0u_2 + \ldots + 0u_n = 0,$$

para todo $\alpha \neq 0$. Isso é suficiente para concluir que S é L.D. □

P_2. Se $S=\{u\} \subset V$ e $u \neq 0$, então S é L.I.

Prova: Suponhamos que $\alpha u = 0$. Como $u \neq 0$, então $\alpha = 0$ conforme já vimos nas propriedades dos espaços vetoriais. □

P_3. Se $S=\{u_1,\ldots,u_n\} \subset V$ é L.D., então um dos seus vetores é combinação linear dos outros.

Prova: Por hipótese existem números reais $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, nem todos iguais a zero, de modo que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0.$$

Suponhamos $\alpha_1 \neq 0$. Então existe o inverso de α_1 e multiplicando a igualdade acima por este inverso teremos:

$$u_1 + (\alpha_1^{-1}\alpha_2)u_2 + \ldots + (\alpha_1^{-1}\alpha_n)u_n = 0.$$

Daí,

$$u_1 = (-\alpha_1^{-1}\alpha_2)u_2 + \ldots + (-\alpha_1^{-1}\alpha_n)u_n,$$

o que mostra que u_1 é combinação linear de $u_2,\ldots,u_n$. Analogamente se procede quando $\alpha_j \neq 0$. □

P_4. Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_1 é L.D., então S_2 também é L.D.

P_5. Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_1 é L.I., então S_2 também é L.I.

P_6. Se $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é L.I., e para um certo $u \in V$ tivermos $S \cup \{u\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, u\}$ L.D., então o vetor u é combinação linear dos vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$, isto é, $u \in [S]$.

P_7. Se $S = \{u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n\}$ e $u_j = \alpha u_1 + \ldots + \alpha u_n$ (combinação linear dos demais vetores de S), então

$$[S] = [S - \{u_j\}].$$

A teoria de espaços vetoriais divide-se em duas linhas de estudos: se o espaço admite ou não admite um conjunto finito de geradores. Restringiremo-nos a examinar os que admitem um conjunto finito de geradores. Porém, existem espaços que não têm base finita. Isto acontece principalmente quando trabalhamos com espaços de funções. Nestes casos, precisaremos de um conjunto infinito de vetores para gerar o espaço. Isto não quer dizer que estamos trabalhando com combinações lineares infinitas, mas sim, que cada vetor do espaço é uma combinação linear finita daquela "base infinita".

2.5.3 Base de um Espaço Vetorial Finitamente Gerado

2.15 Definição. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de V é um subconjunto finito $W \subset V$ para o qual as seguintes condições se verificam:

i. $[W] = V$;

ii. W é linearmente independente.

Exemplo 2.24. $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.25. $\{(2,0),(3,0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$, pois é um conjunto L.D.

Exemplo 2.26. $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.27. $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$. É L.I., mas não gera todo $\mathbb{R}^3$, isto é, $[(1,0,0),(0,1,0)] \neq \mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.28. Os $n+1$ polinômios $1, t, \ldots, t^n$ formam uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.29. $\{(1,2,0),(0,1,-1),(2,0,1),(0,-4,1)\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^3$, pois, constitui um conjunto L.D.

Exemplo 2.30. Se indicamos por 0 o vetor nulo de um espaço vetorial qualquer, então uma base do espaço $\{0\}$ é, conforme nossas convenções a respeito, o conjunto $\emptyset$.

Exemplo 2.31. O conjunto das $m \times n$ matrizes reais

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma base do espaço $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

> ***Nota 21.*** As base dos exemplos 2.24, 2.26, 2.28 e 2.31 acima mencionados são chamadas bases canônicas dos espaços $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $P_n(\mathbb{R})$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

2.16 Proposição. *Todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.*

Prova: Indiquemos por V o espaço vetorial.

1. Se $V = \{0\}$, então $\emptyset$ é uma base de V devido às convenções.
2. Se $V \neq \{0\}$, então existe um subconjunto finito e não vazio $S \subset V$, de maneira que $V = [S]$. De fato, como $S \neq \{0\}$, então existem subconjuntos não vazios de S que são L.I. Tomemos um deles com o maior número possível de elementos. Indicando por B esse subconjunto, afirmamos que B é uma base de V. Dessa forma, para todo $u \in S - B$ temos que $B \cup \{u\}$ é L.D. Logo, u é combinação linear de B e por P_7, conclui-se que: $[B] = [S] = V$. Como B é L.I. (pela própria maneira como foi construído), então B é uma base de V.

□

2.5.4 Dimensão

2.17 Definição. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Denomina-se *dimensão* de V (notação: $\dim(V)$) o número de vetores de uma qualquer de suas bases (cardinalidade). Diz-se, também, neste caso, que V é um *espaço vetorial de dimensão finita*.

Podemos constatar, portanto, que:

1. $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$;
2. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$;
3. $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$;
4. $\dim(P_n(\mathbb{R}) = n + 1$;
5. $\dim(\{0\}) = 0$.

2.18 Teorema. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então todas as bases de V tem o mesmo número de elementos.

Exemplo 2.32. Toda base do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ tem cardinalidade 2.

2.19 Lema. *Suponhamos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ gera um espaço vetorial V. Se $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ é linearmente independente, então $m \leq n$ e V é gerado por um conjunto da forma*

$$\{w_1, w_2, \ldots, w_m, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-m}}\}.$$

Assim, em particular, quaisquer $n + 1$ ou mais vetores em V são linearmente dependentes.

2.20 Definição. Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V. Chamamos $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de *subconjunto independente maximal* de S se

i. ele é um subconjunto independente de S;

ii. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$ é dependente para qualquer $w \in S$.

Segue o seguinte teorema.

2.21 Teorema. Suponhamos que S gera V e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto independente maximal de S. Então $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base de V.

A principal relação entre a dimensão de um espaço vetorial e seus subconjuntos independentes está contida no teorema a seguir.

2.22 Teorema. Seja V de dimensão finita n. então,

i. Qualquer conjunto de $n+1$ ou mais vetores é linearmente dependente.

ii. Qualquer conjunto linearmente independente é parte de uma base, isto é, pode ser estendido a uma base.

iii. Um conjunto linearmente independente com n elementos é uma base.

***Exemplo* 2.33.** Os quatro vetores em $\mathbb{R}^4$:

$$(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)$$

são linearmente independentes, pois formam uma matriz na forma reduzida escalonada. Além disso, como $\dim(\mathbb{R}^4)=4$ eles formam uma base de $\mathbb{R}^4$. Ou seja, quatro vetores que geram o $\mathbb{R}^4$ formam uma base para este espaço.

***Exemplo* 2.34.** Os três vetores $(1,1),(2,3),(-1,1)$ em $\mathbb{R}^2$, são linearmente dependentes, pois, pertencem a um espaço vetorial de dimensão 3.

2.23 Teorema. Se U e W são subespaços de um mesmo espaço vetorial V que possui dimensão finita, então $\dim(U)\leq\dim(V)$ e $\dim(W)\leq\dim(V)$. Além disso:

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W).$$

***Nota* 22.** No caso em que $\dim(U\cap W)=\{0\}$ dizemos que U é soma direta com W e denotamos por $U\oplus W$.

***Exemplo* 2.35.** Suponhamos que U e W são, respectivamente, os planos xy e yz, em $\mathbb{R}^3$: $U=\{(a,b,0)\}$, $W=\{(0,b,c)\}$. Como $\mathbb{R}^3=U+W$, $\dim(U+W)=3$. Também $\dim(U)=2$ e $\dim(W)=2$. Pelo teorema acima,

$$3=2+2-\dim(U\cap W)\Rightarrow\dim(U\cap W)=1.$$

Observe que isso esta de acordo com o fato que $U\cap W$ é o eixo y, isto é, $U\cap W=\{(0,b,0)\}$. Logo, tem dimensão 1.

2.5.5 Coordenadas de um Vetor

2.24 Definição. Seja $W\subset V$ um conjunto com n elementos, $n>0$. *Ordenar* o conjunto W é escolher uma função injetiva e sobrejetiva $\mathbf{s}:\{1,2,\ldots,n\}\to W$. Observe que neste caso o conjunto imagem de s tem n elementos. Feito isso, indicamos o conjunto por $W=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ chamando-o de *conjunto ordenado*.

Dada uma base B de um espaço vetorial V de dimensão n, será sempre vantajoso considerar uma ordem em B que passará a ser chamada de **base ordenada**. Uma base ordenada é uma base na qual fixamos quem é o primeiro, o segundo, até o i-ésimo elemento da base ou a i-ésima coordenada do vetor relativo à B.

Vamos assumir que tenhamos ordenado a base B, digamos $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$. Como sabemos, existem escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in K$ tais que $v=\alpha_1v_1+\alpha_1v_2+\ldots+\alpha_nv_n$. Um fato importante é a unicidade dos coeficientes desta combinação linear, ou seja, eles estão bem definidos. Suponha que escrevamos o mesmo vetor como $v=\beta_1v_1+\beta_1v_2+\ldots+\beta_nv_n$. Por subtração das combinações lineares obtemos

$$0=(\alpha_1-\beta_1)v_1+(\alpha_2-\beta_2)v_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)v_n.$$

A independência linear da base implica nas igualdades

$$\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2,\ldots,\alpha_n=\beta_n.$$

2.25 Definição. Sejam $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V e $v \in V$ onde $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$. Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são chamados coordenadas do vetor v em relação à base ordenada B.

É conveniente, por outro lado, associar uma matriz às coordenadas do vetor v. Assim, se $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, em relação à base ordenada $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, considera-se a matriz $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_B \text{ ou } \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

apenas se não houver possibilidades de confusão, como a *matriz das coordenadas* de v em relação à base ordenada B.

***Exemplo* 2.36.** Considere $V = \mathbb{R}^2$ e $B = \{(1,0),(0,1)\}$. Seja $v = (-2,5)$. Segue que $(-2,5) = -2(1,0) + 5(0,1)$. Portanto, $[(-2,5)]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Se $B' = \{(-1,1),(0,1)\}$, então $(-2,5) = x(-1,1) + y(0,1)$, resultando $x = 2$ e $y = 3$. Então $(-2,5) = 2(-1,1) + 3(0,1)$ e, portanto, $[(-2,5)]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

***Nota* 23.** É importante notar que a ordem dos elementos de uma base também influi na matriz das coordenadas de um vetor em relação a esta base. Por exemplo, se tivermos $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B_2 = \{(1,0),(0,1)\}$, então

$$[(-2,5)]_{B_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad [(-2,5)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Em virtude disto, é evidente a necessidade de trabalhar com bases ordenadas de V (não apenas bases de V) para podermos considerar a matriz de coordenadas como foi definida acima. Sem ordenar a base, não saberíamos qual seria o α_1, o α_2, etc.

2.5.6 Mudança de Base

Na disciplina de Geometria Analítica você deve ter visto uma diversas situações em que a resolução de um problema torna-se muito mais simples se for escolhido um referencial conveniente. Por exemplo, a equação da elipse $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ torna-se muito simplificada se, ao invés de trabalharmos com os eixos x e y, (isto é, o referencial determinado pela base $\overrightarrow{i} = (1,0)$ e $\overrightarrow{j} = (0,1)$) utilizarmos um referencial que se apóia nos eixos focal e normal da elipse.

Neste novo referencial, a equação da elipse será mais simples:

$$3x_1^2 + 2y_1^2 = 6.$$

Numa situação desse tipo, existe uma questão pertinente: Uma vez escolhido o novo referencial, qual a relação entre as coordenadas de um ponto no antigo referencial e suas coordenadas no novo?

Passando a um contexto mais amplo, estamos interessados na seguinte situação.

Sejam $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$(\dagger) \begin{cases} v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \beta_n v_n \\ v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_n w_n \end{cases}$$

Como podemos relacionar as coordenadas de v em relação à base B,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor v em relação à base B',

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Como $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de V, podemos escrever os vetores w_i como combinação linear dos u_j, isto é,

$$(\dagger\dagger)\begin{cases} w_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{n1}u_n \\ w_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{n2}u_n \\ \vdots & \\ w_n &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n \end{cases}$$

Substituindo em $(\dagger)$ temos:

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n \\ &= \beta_1(a_{11}u_1 + \ldots + a_{n1}u_n) + \ldots + \beta_n(a_{1n}u_1 + \ldots + a_{nn}u_n) \\ &= (a_{11}\beta_1 + \ldots + a_{1n}\beta_n)u_1 + \ldots + (a_{n1}\beta_1 + \ldots + a_{nn}\beta_n)u_n \end{aligned}$$

Mas, $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, e como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{n1}\beta_1 \\ &\vdots \\ \alpha_n &= a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + a_{nn}\beta_n \end{aligned}$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Isto é, denotando

$$[I]_B^{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

temos

$$[v]_B = [I]_B^{B'}[v]_{B'}.$$

A matriz $[I]_B^{B'}[v]_{B'}$ é chamada matriz de *mudança de base da base* B' para a base B. Uma vez obtida $[I]_B^{B'}[v]_{B'}$ podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor v em relação à base B, multiplicando a matriz pelas coordenadas de v na base B' supostamente conhecidas.

***Exemplo* 2.37.** Sejam $B = \{(2, -1), (3, 4)\}$ e $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Encontre $[I]_B^{B'}[v]_{B'}$.

Solução: $w_1 = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4)$, donde $(1,0) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})$. O que implica que $a_{11} = \dfrac{4}{11}$ e $a_{11} = \dfrac{1}{11}$.

$w_2 = (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4)$. computando os cálculos, encontramos $a_{12} = -\dfrac{3}{11}$ e $a_{22} = \dfrac{2}{11}$.

Portanto,

$$[I]_B^{B'}[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{11} & -\dfrac{3}{11} \\ \dfrac{1}{11} & \dfrac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Observe que, ao encontrarmos a matriz mudança de base, podemos exibir qualquer vetor na base B. Por exemplo, $[v]_B$ para $v = (5,-8)$.

$$[(5,-8)]_B = [I]_B^{B'}[v]_{B'} \;\; [(5,-8)]_{B'} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{11} & -\dfrac{3}{11} \\ \dfrac{1}{11} & \dfrac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

O cálculo feito através da matriz de mudança de base é operacionalmente vantajoso quando trabalharmos com mais vetores, pois, neste caso, não teremos que resolver um sistema de equações para cada vetor.

2.6 Exercícios Propostos

2.1. Seja V o conjunto dos pares ordenados (a,b) de números reais com adição em V e multiplicação em V definidos por $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ e $\alpha(a,b) = (\alpha a, 0)$. Verifique se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, ou seja, satisfaz todos os axiomas de espaço vetorial.

2.2. Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ são subespaços:

(a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$; (b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$.

2.3. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços vetoriais: $U = \{(x,y,z) | x + y = 4x - z = 0\}$, $V = \{(x,y,z) | 3x - y - z = 0\}$, $S = [(1,-1,2),(2,1,1)]$ e $T = [(0,1,-1),(1,2,1)]$. Determinar as dimensões de cada um dos seguintes subespaços U, S, T, V, $S+T$, $S \cap T$.

2.4. Quais os subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:

(a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,5,3)\}$

(b) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$

(c) $\{(0,0,0),(1,2,3),(4,1,-2)\}$

(d) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$

2.5. Determinar m e n para que os conjuntos de vetores do $\mathbb{R}^3$ dados abaixo sejam L.I.

(a) $\{(3,5m,1),(2,0,4),(1,m,3)\}$ (b) $\{(1,3,5),(2,m+1,10)\}$ (c) $\{(6,2,n),(3,m+n,m-1)\}$

2.6. Quais são as coordenadas de $x = (1,0,0)$ em relação à base $\beta = \{(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$?

2.7. Sejam $\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_2 = \{(-1,1),(1,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Ache:

(a) $[I]_{\beta_2}^{\beta_1}$

(b) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$

2.7 Gabarito

2.1 O conjunto V satisfaz todos os axiomas de espaço vetorial exceto $[M_4] : 1u = u$. Portanto, $[M_4]$ não é conseqüência dos outros axiomas e V não é um espaço vetorial. 2.2 (a) i. Sejam $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W$. Então $v_1 + v_2$ ainda está em W. Vejamos: $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$. Testemos se este novo vetor satisfaz as condições que definem W : $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$ e $(z_1 + z_2) + (t_1 + t_2) = (z_1 - t_1) + (z_2 - t_2) = 0 + 0 = 0$, pois, v_1 e v_2 estão em W e satisfazem as condições implicando que $v_1 + v_2$ também o faça. Portanto, $v_1 + v_2 \in W$. ii. Seja $v = (x, y, z, t) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $\lambda \cdot v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$. Testemos as condições: $\lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda \cdot 0 = 0$ e $\lambda z - \lambda t = \lambda(z - t) = \lambda \cdot 0 = 0$. Assim, $\lambda v \in W$. Portanto, W é subespaço. (b) É um subespaço. Procedimento idem ao visto no item (a). 2.3 1. Os vetores de U são da seguinte forma: $(x, -x, 4x) = x(1, -1, 4)$. Logo, $\{(1, -1, 4)\}$ é uma base de U e $\dim(U) = 1$. 2. Escalonando os vetores do subespaço S, temos $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. Logo, $\dim(S) = 2$. 3. $\dim(T) = 2$. 4. $\dim(V) = 2$. 5. $\dim(S + T) = 3$. 6. $\dim(S \cap T) = 1$. 2.4 (a) Não; (b) Sim; (c) Não; (d) Sim. 2.5 (a) $m \neq 0$; (b) $m \neq 5$; (c) $n \neq 0$ ou $m \neq 1$ 2.6 $[x]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^t$.

2.7 (a) $[I]^{\beta_1}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (b) $[I]^{\beta_2}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

bloco temático 2 Transformações e Operadores Lineares. Produto Interno

tema 3 Transformações e Operadores Lineares

Transformações Lineares, Diagonalização de Operadores, Autovetores , Autovalores e Aplicações

Apresentação

Nos temas anteriores nos detivemos estudando alguns aspectos intrínsecos dos espaços vetoriais finitamente gerados: **base** e **dimensão**, principalmente. Neste tema, o nosso enfoque está em torno de analisar as correspondências entre espaços vetoriais. As transformações lineares que definiremos neste tema constituem o ponto mais importante desse estudo. Mas antes façamos algumas considerações preliminares.

3.1 Preliminares

3.1 Definição. Dados dois conjuntos U e V, ambos não vazios, uma aplicação de U em V é uma "lei" pela qual a cada elemento de U está associado um único elemento de V. Se F indica essa lei e u indica elemento genérico de U, então o elemento associado a u é representado por $F(u)$ (lê-se "F de u") e se denomina imagem de u por F.

O conjunto U é o *domínio* e o conjunto V é o *contra-domínio* da aplicação F. Para indicar que F é uma aplicação de U em V costuma-se escrever $F : U \to V$, ou ainda, indicado por u um elemento genérico de U, $u \mapsto F(u)$.

3.2 Definição. Duas aplicações $F : U \to V$ e $H : U \to V$ são iguais se, e somente se, $F(u) = H(u), \forall\, u \in U$.

Dado $W \subset U$ denomina-se *imagem* de W por F o seguinte subconjunto de V: $F(W) = \{F(u)|u \in W\}$. Se $W = U$, então $F(U)$ recebe o nome de imagem de F e a notação será $\text{Im}(F)$. Portanto, $\text{Im}(F) = \{F(u)|u \in U\}$.

3.3 Definição. Uma aplicação $F : U \to V$ se diz injetora se, e somente se,

$$\forall\, u_1, u_2 \in U, F(u_1) = F(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2,$$

ou ainda, equivalentemente,

$$\forall\, u_1, u_2 \in U, u_1 \neq u_2 \Rightarrow F(u_1) \neq F(u_2).$$

***Exemplo* 3.1.** A aplicação $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $R(x, y) = (x, -y)$, é injetora, pois, se $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$, então

$$F(u_1) = F(u_2) \Rightarrow (x_1, -y_1) = (x_2, -y_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2 Rightarrow u_1 = u_2.$$

***Exemplo* 3.2.** A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (0, x + y, 0)$ não é injetora, pois, temos, por exemplo,

$$(1, 1) \neq (2, 0) \text{ e } F(1, 1) = F(2, 0) = (0, 2, 0).$$

3.4 Definição. Uma aplicação $F : U \to V$ é sobrejetora se, e somente se, $\text{Im}(F) = V$, ou seja, para todo $v \in V$, existe $u \in U$ tal que $F(u) = v$.

***Exemplo* 3.3.** A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (0, x + y, 0)$ não é sobrejetora. Isto porque, por exemplo, $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ e não é imagem de por f de nenhum elemento $u \in \mathbb{R}^2$ (o primeiro termo de cada imagem é zero).

***Exemplo* 3.4.** A aplicação $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $R(x, y) = (x, -y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, é sobrejetora, pois, dado $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, basta tomarmos $u = (a, -b)$ para termos $R(u) = v$.

3.5 Definição. Uma aplicação $F : U \to V$ é bijetora se, e somente se, F é injetora e sobrejetora.

***Exemplo* 3.5.** A aplicação $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $R(x, y) = (x, -y), \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$, é injetora e sobrejetora.

Nota 24. Se $F : U \to V$ é bijetora, então cada elemento de V é do tipo $F(u)$, com $u \in U$, e se fizermos a associação $F(u) \mapsto u$ teremos uma aplicação de V em U, pois, não podemos ter $F(u_1) = F(u_2)$ e $u_1 \neq u_2$ já que F é injetora. Essa nova aplicação assim definida é chamada *aplicação inversa* de F e é indicada por F^{-1}. Tem-se então:

$$F^{-1}(F(u)) = u \text{ e } F(F^{-1}(v)) = v \forall\, u \in U \text{ e } \forall\, v \in V.$$

3.2 Transformações Lineares

3.6 Definição. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $T : U \to V$ é chamada transformação linear de U em V se, e somente se,

i. $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall\, u, v \in U$;

ii. $T(\alpha u) = \alpha T(u), \alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in U$, ou, de forma equivalente,

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v).$$

No caso em que $U = V$, uma transformação linear $T : U \to V$ é chamada também de *operador linear*.

A definição anterior pode ser resumida por:

***Exemplo* 3.6.** A transformação identidade $I : U \to U$, definida por $I(u) = u, \forall\, u \in U$ é um exemplo de transformação linear, pois,

i. $I(u + v) = u + v = I(u) + I(v)$;

ii. $I(\alpha u) = \alpha u = \alpha I(u)$.

I é também chamado o operador *idêntico* de U.

***Exemplo* 3.7.** A transformação linear nula $O : U \to V$, definida por $O(u) = 0$ (vetor nulo de V) $\forall\, u \in V$ é uma transformação linear, pois,

i. $O(u + v) = 0 = 0 + 0 = Ou + Ov$;

ii. $O(\alpha u) = 0 = \alpha 0 = \alpha O(u)$.

***Exemplo* 3.8.** Observemos que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T(x, y, z) \to (x + 1, y + z)$$

não é uma transformação linear. De fato, dados $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$

i. $T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$ enquanto que $T(u) + T(v) = (x_1 + 1, y_1 + z_1) + (x_2 + 1, y_2 + z_2) = (x_1 + x_2 + 2, y_1 + z_1 + y_2 + z_2)$. Portanto, $T(u + v) \neq T(u) + T(v)$, ou seja, não satisfaz i.

***Exemplo* 3.9.** A transformação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(u) = u^2$ não é linear. Vejamos que: $T(u + v) = (u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ e $T(u) + T(v) = u^2 + v^2$. Portanto, não satisfaz i.

***Exemplo* 3.10.** Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$ um espaço vetorial sobre R, $T : U \to U$ uma aplicação definida por $u \mapsto \beta u$ ($T(u) = \beta u$). Como $T(u + v) = \beta(u + v) = \beta u + \beta v = T(u) + T(v)$ e $T(\alpha u) = \beta(\alpha u) = \alpha(\beta u) = \alpha T(u)$, T é uma transformação linear.

Mais ainda, toda transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ só pode ser deste tipo. Observe que, $T(x) = T(x \cdot 1)$ e como T é uma transformação linear e x um escalar, pois T é de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, temos $T(x \cdot 1) = x \cdot T(1)$. Chamando $T(1) = \beta$, encontramos $T(x) = \beta x$. Assim, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear se, e somente se, seu gráfico é uma reta passando pela origem, o que nos induz a entender que o nome transformação linear certamente foi inspirado neste caso, $U = \mathbb{R}$.

***Nota* 25.** Decorre da definição que, uma transformação linear $T : U \to V$ leva o vetor nulo de U no vetor nulo de V, isto é, se $0 \in U$, $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = 0 + 0 = 0 \in V$. Isto nos auxilia a detectar transformações não lineares. Se $T(0) \neq 0$, T não é linear. Mas cuidado $T(0) = 0$ não é suficiente para que T seja linear. Assim, no exemplo (3.8) podemos detectar que T não é uma transformação linear pelo fato de $T(0) \neq 0$. Já no exemplo (3.9), apesar de $T(0) = 0$, T não é uma transformação linear.

3.3 Exemplo Geométrico das Transformações Lineares

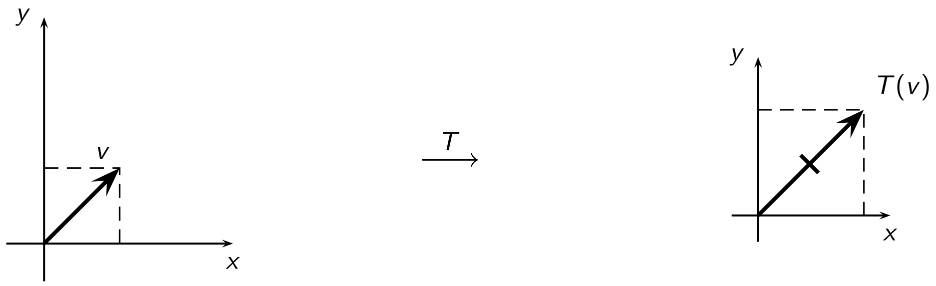
Apresentaremos uma visão geométrica das transformações lineares, exibindo exemplos de transformações do plano no plano ($\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$). Veremos assim que, por exemplo, uma expansão, uma rotação e certas deformações podem ser expressas por transformações lineares.

3.3.1 Expansão ou Contração Uniforme

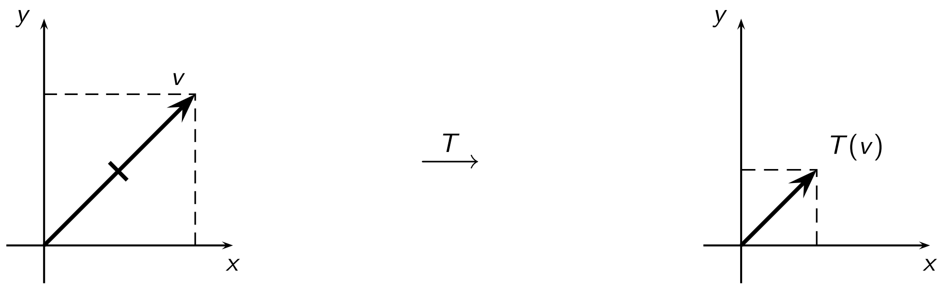
Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que a cada vetor v é associado um múltiplo deste, ou seja, $v \mapsto \alpha \cdot v$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, é denominada expansão ou contração, conforme o valor de $|\alpha|$. A saber, respectivamente, $|\alpha| > 1$ ou $0 < |\alpha| < 1$.

***Exemplo* 3.11.** A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = 2(x, y)$ leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de v, mas de módulo maior, exatamente o dobro. Na forma de matriz ou vetores coluna, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

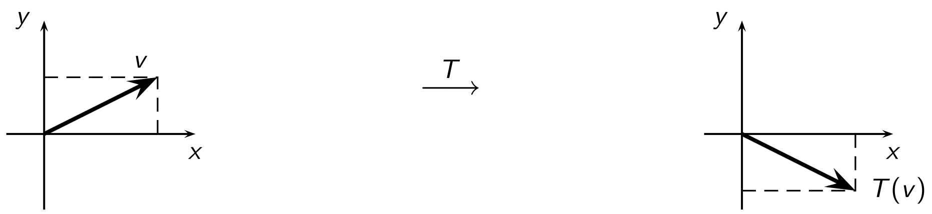


Se fizéssemos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = \dfrac{1}{2}(x, y)$, T seria uma contração.



3.3.2 Reflexão em Torno do Eixo-x

A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, -y)$ é chamada reflexão em torno do eixo x.



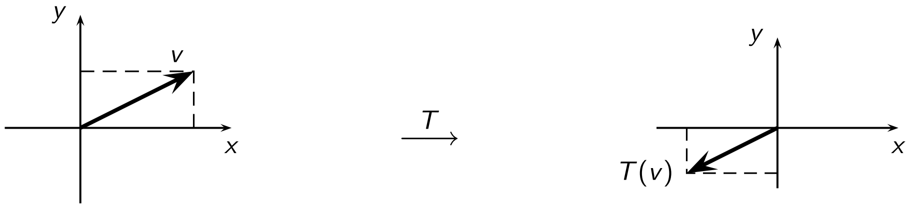
Podemos representar essa transformação por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

3.3.3 Reflexão em Torno da Origem

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-x, -y)$ leva um vetor v em seu simétrico, em relação à origem, $-v$.

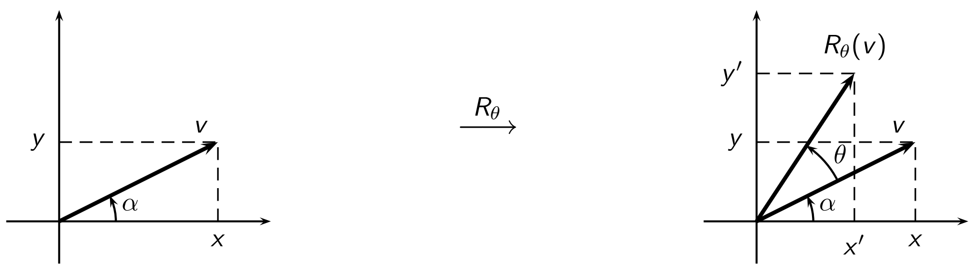
Escrevendo na forma de vetores-coluna, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



3.3.4 Rotação

Veremos aqui a transformação linear no plano que gira um vetor de um Ângulo θ no sentido anti-horário.



Observando a figura acima temos que: $x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta$. Mas, $r\cos\theta = x$ e $r\,\mathrm{sen}\,\theta = y$. Então, $x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$. Analogamente, tem-se que

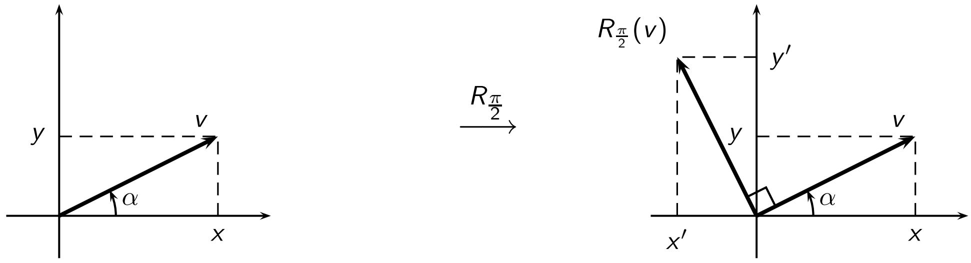
$$y' = r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta) = r(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta) = y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Assim, $R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta)$ ou na forma de coluna,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Consideremos o caso particular onde $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Neste caso, $\cos\theta = 0$ e $\mathrm{sen}\,\theta = 1$. Então,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



3.4 Principais Conceitos e Teoremas

Nesta seção exibiremos os resultados que darão uma estrutura para um estudo mais preciso e significativo das transformações lineares.

Dados $v_1, v_1, \ldots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = T(\alpha_1 v_1) + \ldots + T(\alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_n).$$

Dizemos então que T preserva combinações lineares. Um fato importante sobre as aplicações lineares é que elas são perfeitamente determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base, ou seja, uma transformação linear é determinada pelas imagens dos vetores de uma base qualquer do domínio.

3.7 Teorema. Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de V, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, sejam $w_1, \ldots, w_n$ elementos arbitrários de W. Então, existe uma única aplicação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1 \ldots, T(v_n) = w_n$. Esta aplicação é dada por: se $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$,

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$$

Verifique que T assim definida é linear e que é a única que satisfaz as condições exigidas.

Exemplo **3.12.** Sabendo que um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é tal que $T(1,0) = (3,-2)$ e $T(0,1) = (1,4)$, determine $T(x,y)$.

Solução: Observemos que $\{(0,1),(1,0)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Assim, um vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear $(x,y) = x(1,0) + y(1,0)$ e, portanto,

$$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(3,-2) + y(1,4) = (3x + y, -2x + 4y)$$

Exemplo **3.13.** Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,-2) = (0,1,0)$.

Solução: Um vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $(x,y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,-2)$. Primeiramente, busquemos encontrar α_1 e α_2. Multiplicando-se por α_1 e α_2 a equação anterior, o seguinte sistema é obtido:

$$\begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = y \end{cases}$$

Temos então que $\alpha_1 = x$ e $\alpha_2 = \dfrac{x-y}{2}$. Podemos então reescrever o vetor (x,y) da seguinte forma:

$$(x,y) = x(1,1) + \frac{x-y}{2}(0,-2).$$

Logo,

$$T(x,y) = xT(1,1) + \frac{x-y}{2}T(0,-2) = x(3,2,1) + \frac{x-y}{2}(0,1,0) = (3x, 2x, \frac{x-y}{2})$$

Exemplo **3.14.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, sendo $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (1,1,0)$. Determinar $T(5,3,-2)$, sabendo que $T(v_1) = (1,-2)$, $T(v_2) = (3,1)$ e $T(v_3) = (0,2)$.

Solução: Expressemos $v = (5, 3, -2)$ como combinação linear dos vetores da base:

$$(5, 3, -2) = \alpha_1(0, 1, 0) + \alpha_2(1, 0, 1) + \alpha_3(1, 1, 0),$$

ou

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 & = & 5 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = & 3 \\ \alpha_1 & = & -2 \end{cases}$$

sistema cuja solução é:

$$\alpha_1 = -4, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 7.$$

Então:

$$(5, 3, -2) = -4v_1 - 2v_2 + 7v_3.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} T(5, 3, -2) & = & -4T(v_1) - 2T(v_2) + 7T(v_3) \\ T(5, 3, -2) & = & -4(1, -2) - 2(3, 1) + 7(0, 2) \\ T(5, 3, -2) & = & (-10, 20) \end{array}$$

3.4.1 Núcleo de uma Transformação Linear

3.8 Definição. O *núcleo* de uma transformação linear $T : V \to W$ é o conjunto de todos os vetores $v \in V$ que são transformados em $0 \in W$. Indica-se esse conjunto por $N(T)$ ou $\ker(T)$.

$$\ker(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}.$$

Observemos que $\ker(T) \subset V$ e $\ker(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in \ker(T)$, tendo em vista que $T(0) = 0$.

***Exemplo* 3.15.** Determine o núcleo da transformação linear

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

Solução:

$$\ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; T(x, y) = (0, 0)\}.$$

O que implica:

$$(x + y, 2x - y) = (0, 0),$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y & = & 0 \\ 2x - y & = & 0. \end{cases}$$

Sistema cuja solução é:

$$x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Logo:

$$\ker(T) = \{(0, 0)\}.$$

***Exemplo* 3.16.** Determine o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + y + 8z)$.

Solução: Nesse caso, temos:

$$\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0)\},$$

isto é, um vetor $(x, y, z) \in \ker(T)$ se, e somente se,

$$(x - y + 4z, 3x + y + 8z) = (0, 0),$$

ou seja,

$$\begin{cases} x - y + 4z &= 0 \\ 3x + y + 8z &= 0. \end{cases}$$

Sistema linear homogêneo, cuja solução é $x = -3z$ e $y = z$. Logo,

$$\ker(T) = \{(-3z, z, z); z \in \mathbb{R}\} = \{z(-3, 1, 1); z \in \mathbb{R}\},$$

ou ainda,

$$\ker(T) = [(-3, 1, 1)].$$

Observe que este conjunto representa uma reta no $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e tal que todos os seus pontos têm por imagem a origem do $\mathbb{R}^2$.

3.4.2 Propriedades do Núcleo

3.9 Proposição. O núcleo de uma transformação linear $T : V \to W$ é um subespaço vetorial de V.

Prova: De fato. Sejam v_1 e v_2 vetores pertencentes ao $\ker(T)$ e α um número real qualquer. Então, $T(v_1) = 0$ e $T(v_2) = 0$. Assim:

I $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$, isto é: $v_1 + v_2 \in \ker(T)$;

II $T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha 0 = 0$, isto é: $\alpha v_1 \in \ker(T)$.

□

3.10 Proposição. Uma transformação linear $T : V \to W$ é injetora se, e somente se, $\ker(T) = \{0\}$.

Prova: Lembremos que uma aplicação $T : V \to W$ é injetora se

$$\forall\ v_1, v_2 \in V; T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$$

ou, de modo equivalente, se

$$\forall\ v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 \Rightarrow T(v_1) \neq T(v_2).$$

Primeiramente mostremos que se T é injetora, então $\ker(T) = \{0\}$.
Seja $v \in \ker(T)$, isto é, $T(v) = 0$. Por outro lado, sabe-se que $T(0) = 0$. Logo, $T(v) = T(0)$. Como T é injetora por hipótese, $v = 0$. Portanto, o vetor zero é o único elemento do núcleo, isto é, $\ker(T) = \{0\}$.
Agora vamos mostrar que se $\ker(T) = \{0\}$, então T é injetora.
Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Então, $T(v_1) - T(v_2) = 0$ ou $T(v_1 - v_2) = 0$ e, portanto, $v_1 - v_2 \in \ker(T)$. Mas, por hipótese, o único elemento do núcleo é o vetor 0 e, portanto, $v_1 - v_2 = 0$, isto é, $v_1 = v_2$. Como $T(v_1) = T(v_2)$ implica $v_1 = v_2$, ou seja, T é injetora. □

3.4.3 Imagem de uma Transformação Linear

3.11 Definição. A imagem de uma transformação linear $T : V \to W$ é o conjunto dos vetores $w \in W$ que são imagens de pelo menos um vetor $v \in V$. Indica-se esse conjunto por $\text{Im}(T)$ ou $T(V)$. Simbolicamente,

$$\text{Im}(T) = \{w \in W; T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

Observemos que $\text{Im}(T) \subset W$ e $\text{Im}(T) \neq \emptyset$, pois, $0 = T(0) \in \text{Im}(T)$. Se $\text{Im}(T) = W$, T diz-se sobrejetora, isto é, para todo $w \in W$ existe pelo menos um $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

***Exemplo* 3.17.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy.

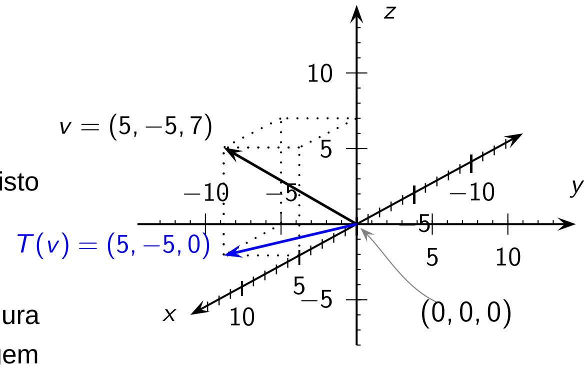
A imagem de T é o próprio plano xy, ou seja,

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Observemos que o núcleo de T é o eixo dos z, isto é,

$$\ker(T) = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\},$$

pois, $T(0, 0, z) = (0, 0, 0)$, para todo $z \in \mathbb{R}$. A figura ao lado apresenta o vetor $v = (5, -5, 7)$ e sua imagem $T(v) = (5, -5, 0)$.



***Exemplo* 3.18.** A imagem da transformação linear identidade $I : V \to V$ definida por $I(v) = v, \forall\ v \in V$, é todo o espaço V . O núcleo, neste caso, é $\ker(I) = \{0\}$.

***Exemplo* 3.19.** A imagem da transformação nula $O : V \to W$ definida por $O(v) = 0, \forall\ v \in V$, é o conjunto $\text{Im}(O) = \{0\}$. O núcleo, nesse caso, é todo espaço V.

3.4.4 Propriedades da Imagem

3.12 Proposição. A imagem de uma transformação $T : V \to W$ é um subespaço de W.

Prova: Sejam w_1 e w_2 vetores pertencentes a $\text{Im}(T)$ e α um número real qualquer. Devemos mostrar que $w_1 + w_2 \in Im(T)$ e que $\alpha w_1 \in \text{Im}(T)$, isto é, devemos mostrar que existem vetores u e v pertencentes a V tais que $T(v) = w_1 + w_2$ e $T(u) = \alpha w_1$.
Como $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$, existem vetores $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Fazendo $v = v_1 + v_2$ e $u = \alpha v_1$, tem-se:

$$T(v) = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

e

$$T(u) = T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha w_1$$

e, portanto, $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de W. □

3.4.5 Teorema do Núcleo e Imagem

3.13 Teorema. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então,

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V). \qquad (3.2)$$

Prova: Considere $v_1, \ldots, v_n$ uma base de $\ker(T)$. Como $\ker(T) \subset V$ é subespaço de V, podemos completar este conjunto de modo a obter uma base de V.
Seja $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ a base de V. Queremos mostrar que $T(w_1), \ldots, T(w_m)$ é uma base de $\text{Im}(T)$, isto é,

i $[T(w_1), \ldots, T(w_m)] = \text{Im}(T)$;

ii $\{T(w_1), \ldots, T(w_m)\}$ é linearmente independente.

Mostremos, primeiramente, i. Dado $w \in \text{Im}(T)$, existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Se $u \in V$, então

$$u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m.$$

Mas,

$$\begin{aligned} w &= T(u) = T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_m) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) + \beta_1 T(w_1) + \ldots + \beta_m T(w_m) \end{aligned}$$

Como os vetores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ pertencem ao $\ker(T)$, $T(v_i) = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Assim,

$$w = b_1 T(w_1) + \ldots + b_m T(w_m)$$

e a imagem de T é gerada pelos vetores $T(w_1), \ldots, T(w_m)$.
Mostremos, agora, ii. Consideremos, a combinação linear

$$\alpha_1 T(w_1) + \alpha_2 T(w_2) + \ldots + \alpha_m T(w_m) = 0$$

Como T é linear, $T(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_m w_m) = 0$. Logo $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_m w_m \in \ker(T)$. Então, $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_m w_m$ pode ser escrito como combinação linear da base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\ker(T)$, isto é, existem $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ tais que

$$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_m w_m = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n,$$

ou ainda,

$$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_m w_m - \beta_1 v_1 - \ldots - \beta_n v_n = 0.$$

Mas $\{v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m\}$ é uma base de V, e temos então $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$. □

3.14 Corolário. *Se* $\dim(V) = \dim(W)$*, então a transformação linear* T *é injetora se, e somente se, é sobrejetora.*

3.15 Corolário. *Seja* $T : V \to W$ *uma aplicação linear injetora. Se* $\dim(V) = \dim(W)$*, então* T *leva base em base.*

Suprimiremos as demonstrações dos corolários acima e exibiremos exercícios resolvidos sobre o assunto em questão.

3.4.6 Isomorfismo e Automorfismo

3.16 Definição. Se uma transformação linear $T : V \to W$ é bijetora, damos o nome de *isomorfismo*.

3.17 Definição. Dois espaços vetoriais U e V são *isomorfos* se existe um isomorfismo $T : U \to V$.

Sob o ponto de vista da Álgebra Linear, espaços vetoriais isomorfos são, por assim dizer, idênticos.

Observe que devido ao Teorema (3.2), espaços isomorfos devem ter a mesma dimensão. Portanto, pelo corolário (3.15), um isomorfismo leva base em base. Além disso, um isomorfismo $T : V \to W$ tem uma aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$ que é linear e também é um isomorfismo.

***Exemplo* 3.20.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x-2y, z, x+y)$. Mostre que T é um isomorfismo e calcule sua inversa T^{-1}.

Solução: Se pudermos mostrar que T é injetora, teremos que T é um isomorfismo (Corolário 3.14). Isto equivale a mostrar que $\ker(T) = \{(0, 0, 0)\}$. Mas $\ker(T) = \{(x, y, z); T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$ e $T(x, y, z) = \{(0, 0, 0)\}$ se, e somente se, $(x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0)$. Resolvendo o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

achamos que $x = y = z = 0$ é a única solução e, portanto, T é um isomorfismo.
Tomando a base canônica de $\mathbb{R}^3$, sua imagem pela T é

$$\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

que é ainda uma base de $\mathbb{R}^3$. Do fato de T ser um isomorfismo, calculemos a aplicação inversa de T.
Como $T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (-2, 0, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$, temos que $T^{-1}(1, 0, 1) = (1, 0, 0), T^{-1}(-2, 0, 1) = (0, 1, 0), T^{-1}(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$. Queremos calcular $T^{-1}(x, y, z)$. Para isto escrevemos (x, y, z) em relação à base $\{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, obtendo:

$$(x, y, z) = \frac{x + 2z}{3}(1, 0, 1) + \frac{z - x}{3}(-2, 0, 1) + y(0, 1, 0).$$

Então,

$$T^{-1}(x, y, z) = \frac{x + 2z}{3} T^{-1}(1, 0, 1) + \frac{z - x}{3} T^{-1}(-2, 0, 1) + y T^{-1}(0, 1, 0).$$

Ou seja,

$$T^{-1}(x, y, z) = (\frac{x + 2z}{3}, \frac{z - x}{3}, y).$$

3.4.7 Posto e Nulidade

Seja $T : V \to U$ uma transformação linear. Então,

3.18 Definição. o *posto* de T é a dimensão da sua imagem e a *nulidade* de T é a dimensão do seu núcleo. Assim,

$$\text{posto}(T) = \dim(\text{Im}(T)) \text{ e } \text{nulidade}(T) = \dim(\ker(T)).$$

Assim, o Teorema 3.2 produz a seguinte fórmula para um transformação T, quando V tem dimensão finita:

$$\text{posto}(T) + \text{nulidade}(T) = \dim(V).$$

3.4.8 Transformações Singulares e Não-Singulares

3.19 Definição. Diz-se que uma transformação linear $T : V \to U$ é *singular* se existe $v \in V$, com $v \neq 0$, mas $T(v) = 0$. Assim, $T : V \to U$ é *não-singular* se, e somente se, o vetor nulo de V é transformado no vetor nulo de v, ou equivalentemente, se seu núcleo consiste somente no vetor zero ($\ker(T) = \{0\}$).

***Exemplo* 3.21.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que gira um vetor de um ângulo θ em redor do eixo dos z,

$$T(x, y, z) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta, x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta, z).$$

Observe que somente o vetor zero é transformado no vetor zero. Portanto, T é não-singular.

Agora, se a transformação linear $T : V \to U$ é injetora, somente o vetor $0 \in V$ pode ser transformado em $0 \in U$ e então T é não-singular. A recíproca desta afirmação também é verdadeira. Suponhamos que T é não-singular e $T(v) = T(w)$, então $T(v - w) = T(v) - T(w) = 0$ e, portanto, $v - w = 0$ ou $v = w$. Assim, $T(v) = T(w)$ implica $v = w$, isto é, T é injetora. Este resultado é um importante teorema que enunciaremos a seguir.

3.20 Teorema. T é uma transformação linear injetora se, e somente se, $\ker(T) = \{0\}$.

3.4.9 Exercícios Resolvidos

***Exemplo* 3.22.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$. **(a)** Dar uma base e a dimensão de $ker(T)$; **(b)** Dar uma base e a dimensão de $Im(T)$.

Solução: (a) $\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x + y, 2x - y + z) = (0, 0)\}$. Como $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \sim$ $\begin{cases} x + y = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases}$ Cuja solução geral é $(-y, y, 3y), y \in \mathbb{R}$, então $\ker(T) = \{(-y, y, 3y); y \in \mathbb{R}\}$. Logo, $\ker(T) = [(-1, 1, 3)]$ e $\{(-1, 1, 3)\}$ é uma base de $\ker(T)$.
(b) Achemos um conjunto de geradores de $\text{Im}(T)$: $(x + y, 2x - y + z) = x(1, 2) + y(1, -1) + z(0, 1)$ do que segue $\text{Im}(T) = [(1, 2), (1, -1), (0, 1)]$. Para determinar uma base de $\text{Im}(T)$ usamos o processo prático que consiste em colocar os vetores geradores de $\text{Im}(T)$ em linha e escalonar. Vejamos abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0. \end{bmatrix}$$

Assim, uma base de $\text{Im}(T)$ é $\{(1, 2), (0, 1)\}$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 2$. Segue que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ e T é sobrejetora. Observe que T não é injetora, pois, seu núcleo $\ker(T) \neq \{(0, 0, 0)\}$.

***Exemplo* 3.23.** Determinar uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$Im(T) = [(1, 1, 2, 1), (2, 1, 0, 1)].$$

Solução: Como $\dim(\text{Im}(T)) = 2$. Lembrando do teorema 3.2

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V),$$

em que, $V = \mathbb{R}^3$. Temos então que $\dim(\ker(T)) = 1$. Podemos tomar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1, 2, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (2, 1, 0, 1)$. A imagem será o conjunto dado. Temos

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 1, 0) \\ &= y(1, 1, 2, 1) + z(2, 1, 0, 1) = (y + 2z, y + z, 2y, y + z). \end{aligned}$$

Vale observar que tomamos em $\mathbb{R}^3$, a base canônica, a qual fizemos o vetor $(1, 0, 0)$ pertencer ao núcleo de T. Portanto, segue que o exercício em questão admite várias soluções.

Exemplo 3.24. Seja T o operador linear de $M_2(\mathbb{R})$ definido por $T(X) = BX, \forall\ X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $B \in M_2(\mathbb{R})$. No caso de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ determine $\ker(T)$ e uma base da imagem de T.

Solução:

$$\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 2x - z & 2y - t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Como o sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases}$ só admite a solução trivial, T é injetora. Por outro lado, levando em conta o teorema do núcleo e da imagem, tiramos que

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\ker(T)) = 4 - 0 = 4.$$

Logo, $\mathrm{Im}(T) = M_2(\mathbb{R})$ e qualquer base deste espaço é base de $Im(T)$. Observe que T é um automorfismo de $M_2(\mathbb{R})$. Os mesmos resultados seriam obtidos para qualquer matriz B inversível.

Exemplo 3.25. Mostrar que o operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + z, x - z, y)$ é um automorfismo. Determinar T^{-1}.

Solução: Para achar o núcleo de T devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

cuja única solução é $(0, 0, 0)$. Logo, $\ker(T) = \{(0, 0, 0)\}$ e T é injetora. devido ao corolário do teorema do núcleo e da imagem podemos afirmar que T é um automorfismo. Supondo $T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$, então $(x, y, z) = T(a, b, c) = (a + c, a - c, b)$. Logo,

$$\begin{cases} a + c = x \\ a - c = y \\ y = 0 \end{cases}$$

do que resulta que $a = \dfrac{x + y}{2}$, $b = z$ e $c = \dfrac{x - y}{2}$. Logo:

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x + y}{2}, z, \frac{x - y}{2} \right) = \frac{1}{2}(x + y, 2z, x - y).$$

Exemplo 3.26. Mostrar que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T(x, y, z) = (x, x - y, y - z, z)$ é injetora mas não é isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$.

Solução: Primeiramente mostremos que T é linear. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(i) T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)\\
&= (x_1+x_2, x_1+x_2-(y_1+y_2), (y_1+y_2)-(z_1+z_2), (z_1+z_2))\\
&= (x_1+x_2, x_1-y_1+x_2-y_2, y_1-z_1+y_2-z_2, z_1+z_2)\\
&= (x_1, x_1-y_1, y_1-z_1, z_1)+(x_2, x_2-y_2, y_2-z_2, z_2) = T(u)+T(v).\\
(ii) T(\alpha u) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)\\
&= (\alpha x_1, \alpha x_1 - \alpha y_1, \alpha y_1 - \alpha z_1, \alpha z_1)\\
&= \alpha(x_1, x_1-y_1, y_1-z_1, z_1)\\
&= \alpha T(u)
\end{aligned}$$

Por outro lado, o sistema

$$\begin{cases} x = 0\\ x-y=0\\ y-z=0\\ z=0 \end{cases}$$

só admite a solução trivial. Logo, $\ker(T) = \{(0,0,0,0)\}$ e T é injetora, mas não é sobrejetora, pois, $\dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(T)) = 3$. Segue que $\operatorname{Im}(T) \neq \mathbb{R}^4$.

3.4.10 Aplicações Lineares e Matrizes

Veremos nesta seção que, em certo sentido, o estudo das transformações lineares pode ser reduzido ao estudo das matrizes. Já vimos em exemplos anteriores que a toda matriz $m \times n$ está associada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Vamos formalizar este resultado para espaços vetoriais V e W e também estabelecer o seu recíproco, isto é, veremos que uma vez fixadas as bases, a toda transformação linear $T : V \to W$ estará associada uma única matriz.

Inicialmente veremos como, dados dois espaços vetoriais V e W com bases β e β' e uma matriz A, podemos obter uma transformação linear.

***Exemplo* 3.27.** Encontre a transformação linear associada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ e que depende das bases $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1),(0,1)\}$.

Solução: Queremos associar a esta matriz A uma aplicação linear que depende de A e das bases dadas β e β', isto é,

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ v &\mapsto T_A(v). \end{aligned}$$

Considere $v = (x, y)$. Seja $X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$,

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x\\ y\end{bmatrix} = [T_A(v)]_{\beta'}$$

Então, $T_A(v) = 2x(1,1)+y(-1,1) = (2x-y, 2x+y)$. Por exemplo, se $v = (2,1)$, então $T_A(2,1) = (3,5)$. Note que se tivéssemos partido de $\beta = \beta' = \{(1,0),(0,1)\}$, teríamos obtido $T_A(v) = (2x, y) = Av$.

Nota 26. De modo geral, fixadas as bases $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \ldots, w_n\}$, à matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

podemos associar

$$\begin{array}{rcl} T_A : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ v & \mapsto & T_A(v) \end{array}.$$

Seja $X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Então, $T_A(v) = y_1 w_1 + \ldots + y_m w_m$, onde $y_i = A_i \cdot X$ e A_i é a i-ésima linha de A.

Em geral, dada a matriz $A_{m \times n}$, ela é encarada como uma aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

***Exemplo* 3.28.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,0,0), (0,0,1), (0,0,1)\}$, $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Encontremos a expressão desta transformação linear.

Seja $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 3y + 5z \\ 2x + 4y - z \end{bmatrix}$. Então,

$$T_A(x, y, z) = (x - 3y + 5z)(1, 0) + (2x + 4y - z)(0, 1) = (x - 3y + 5z, 2x + 4y - z)$$

Agora iremos encontrar a matriz associada a uma transformação linear. Seja $T : V \rightarrow V$ linear, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V e $b' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ base de W. Então, $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ são vetores de W e, portanto,

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & a_{11} w_1 + \ldots + a_{m1} w_m \\ T(v_2) & = & a_{12} w_1 + \ldots + a_{m2} w_m \\ & \vdots & \\ T(v_n) & = & a_{1n} w_1 + \ldots + a_{mn} w_m \end{array}$$

A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, denotada por $[T]^\beta_{\beta'}$ é chamada matriz de T em relação às bases β e β'.

$$[T]^\beta_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \ldots & a_{11} \end{bmatrix} = A$$

Observe que T passa a ser a aplicação linear associada à matriz A e bases β e β', isto é $T = T_A$.

***Exemplo* 3.29.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$ e as bases $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0\}$ e $\beta' = \{(1, 3), (1, 4)\}$. Encontre $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

Solução: Calculando T nos elementos da base β temos:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (2,5) = 3(1,3) - 1(1,4) \\ T(1,1,0) &= (3,1) = 11(1,3) - 8(1,4) \\ T(1,0,0) &= (2,3) = 5(1,3) - 3(1,4) \end{aligned}$$

Então,

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Observe que se fixarmos outras bases β e β', teremos uma outra matriz para a transformação T.

***Exemplo* 3.30.** Seja T a transformação linear do exemplo acima e sejam $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Calcule $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

Solução:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1) \\ T(0,1,0) &= (1,-2) = 1(1,0) - 2(0,1) \\ T(0,0,1) &= (-1,4) = -1(1,0) + (0,1) \end{aligned}$$

Então,

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

***Nota* 27.** Usa-se denotar simplesmente por $[T]$ à matriz de uma transformação linear $T : R^m \to R^n$ em relação às suas bases canônicas. Assim, neste exemplo $[T]^{\beta}_{\beta'} = [T]$. Também é comum usar-se a notação simplificada: $Tv = T(v)$.

***Exemplo* 3.31.** Seja $T : V \to V$, a transformação identidade, $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\beta' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ bases de V. Determine $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

Solução: Como
$$\begin{aligned} Tv_1 &= v_1 = a_{11}v'_1 + \ldots + a_{n1}v'_n \\ &\vdots \\ Tv_n &= v_n = a_{1n}v'_1 + \ldots + a_{nn}v'_n \end{aligned}$$

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = [I]^{\beta}_{\beta'}$$

a matriz mudança de base.

***Exemplo* 3.32.** Dadas as bases $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\beta' = \{(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz é

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução: Por definição, temos que:

$$\begin{aligned} T(1,1) &= 0(0,3,0) - 1(-1,0,0) - 1(0,1,1) = (1,-1,-1) \\ T(1,1) &= 2(0,3,0) + 0(-1,0,0) + 3(0,1,1) = (0,9,3) \end{aligned}$$

Devemos encontrar agora $T(x,y)$. Para isto, escrevemos (x,y) em relação à base β :

$$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$$

Aplicando T e usando a linearidade, temos:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= xT(1,1) + (y-x)T(0,1) \\ &= x(1,-1,-1) + (y-x)(0,9,3) \\ &= (x, 9y-10x, 3y-4x) \end{aligned}$$

O próximo resultado dá o significado da matriz de uma transformação linear.

3.21 Teorema. Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V , β base de W e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v \in V$ temos:

$$[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta \cdot [v]_\alpha.$$

Suprimiremos a demonstração acima e exibiremos exercícios resolvidos sobre o assunto em questão.

***Exemplo* 3.33.** Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

em que, $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ é a base do $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\}$ é a base do $\mathbb{R}^3$. Qual é a imagem do vetor $v = (2,-3)$ pela aplicação T?

Solução: Queremos saber qual é a imagem do vetor $v = (2,-3)$ pela aplicação T. Para isto, achamos as coordenadas do vetor v em relação à base α, obtendo $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. A seguir, de acordo com o teorema 3.21, temos

$$[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta \cdot [v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T(v) &= 5(1,0,1) - 3(-2,0,1) - 13(0,1,0) \\ &= (11,-13,2) \end{aligned}$$

***Exemplo* 3.34.** Sendo $\alpha = \{(2,1),(1,0)\}$ e β, a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: $T(2,1) = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(2,1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$

$T(1,0) = \alpha_5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_8 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(1,0) = \begin{bmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 \end{bmatrix}$

Do fato de $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ temos que $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = -3$, $\alpha_5 = 2$, $\alpha_6 = 1$, $\alpha_7 = 1$ e $\alpha_8 = 0$.

Escrevamos um vetor genérico do $\mathbb{R}^2$ como combinação linear da base α.

$$(x,y) = \alpha_1(2,1) + \alpha_2(1,0).$$

Segue que $\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 = y \end{cases}$ Portanto, $(x,y) = y(2,1) + x - 2y(1,0)$. Assim,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= y \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + (x-2y) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4y & 2y \\ 3y & 3y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x-4y & x-2y \\ x-2y & 0 \end{bmatrix} \\ T(x,y) &= \begin{bmatrix} 2y+2x & 4y+x \\ 3y & 3y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x-4y & x-2y \\ x+y & 3y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

***Exemplo* 3.35.** Sendo $\alpha = \{(2,1),(1,0)\}$, β a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ e $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear é tal que $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, calcule:

(a) $[T(2,1)]_{\beta}$ (b) $T(2,1)$ (c) $[T(1,0)]_{\beta}$ (d) $T(1,0)$ (e) $[T(5,3)]_{\beta}$

Solução: (a) $[T(2,1)]_{\beta}$. Temos que $T(2,1) = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(2,1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$. Portanto, $[T(2,1)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Solução: (b) $T(2,1)$. Pelo que foi visto acima, segue que $T(2,1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Solução: (c) $[T(1,0)]_\beta$

$T(1,0) = \alpha_5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_8 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(1,0) = \begin{bmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 \end{bmatrix}.$

Portanto $T(1,0)]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solução: (d) $T(1,0)$. De modo análogo ao ítem anterior, temos $T(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: (e) $[T(5,3)]_\beta$

Primeiramente encontremos o vetor $v = (5,3)$ na base β, ou seja, $[(5,3)]_\beta$.

$$(5,3) = \alpha_1(2,1) + \alpha_2(1,0).$$

Portanto, $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = -1$. Usando o teorema 3.21, temos que

$$[T(5,3)]_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3.5 Autovalores e Autovetores

Toda transformação linear possui uma matriz associada, fixando as bases. Assim, será que não existe uma forma mais simplificada de representar tal matriz?

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $T : V \to V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$. Neste caso $T(v)$ será um vetor de mesma "direção" que v. Por vetores de mesma "direção" entenderemos vetores sobre a mesma reta suporte.

Como $v = 0$ satisfaz a equação $T(v) = \lambda v$, para todo λ, iremos determinar vetores $v \neq 0$, tais que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ será chamado *autovalor* ou *valor característico de* T e o vetor v um *autovetor ou vetor característico de* T. Formalizemos este conceito. Lembre-se de que a designação usual de *operador linear* é atribuída a uma transformação linear de um espaço nele mesmo.

3.22 Definição. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existem $v \in V$, $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, λ é um *autovalor* de T e v é um autovetor de T associado a λ.

Observe que λ pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo. Daremos a seguir exemplos de como calcular autovalores e autovetores, usando esta definição.

***Exemplo* 3.36.** Determine os autovalores e os autovetores associados à transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (2x, 2y)$.

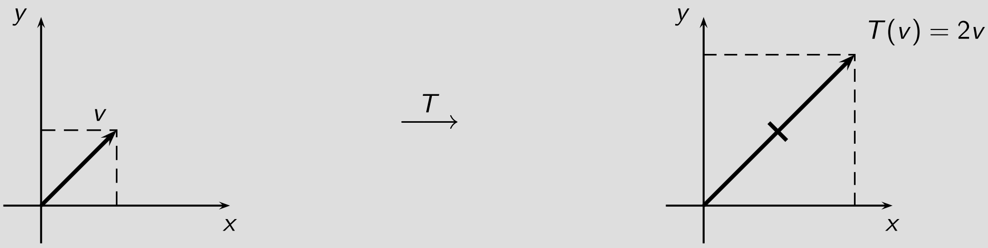
Solução:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

Observe que $T(x,y) = 2(x,y)$. Na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, 2 é um autovalor de T e qualquer $(x,y) \neq (0,0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2. Observe geometricamente:



***Nota* 28.** De um modo geral, toda transformação $\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ v & \mapsto & \alpha v, \alpha \neq 0 \end{array}$ tem α como autovalor e qualquer $(x,y) \neq (0,0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção que v. Ainda mais, se:

1. $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor;
2. $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor;
3. $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor;
4. $|\alpha| = 1$, T é a identidade.

***Exemplo* 3.37.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine os autovalores e os autovetores associados à transformação $T_A(x,y)$.

Solução: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ y \end{bmatrix}$ e $T_A(x,y) = (2x + 2y, y)$. Para procurar os autovalores e autovetores de T_A, devemos resolver a equação $T_A(v) = \lambda v$ ou

$$\begin{bmatrix} 2x+2y \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

Assim, temos o sistema de equações $\begin{cases} 2x+2y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$.

Consideremos os casos quando $(i) y \neq 0$ e $(ii) y = 0$.

(i) Se $y \neq 0$, então da segunda equação $\lambda = 1$. Logo, $2x + 2y = x$ e $y = -\frac{1}{2}x$. Obtemos, assim, para o autovalor $\lambda = 1$, os autovetores do tipo $(x, -\frac{1}{2}x)$.

(ii) Se $y = 0$, x deve ser diferente de 0, pois, senão, o autovalor (x,y) seria nulo, o que não pode acontecer pela definição de autovalor. Da primeira equação, $2x + 0 = \lambda x$ ou $\lambda = 2$. Portanto, outro autovalor é 2 e qualquer vetor não nulo $(x,0)$ é um autovetor correspondente. Então, todos os vetores sobre o eixo-x são levados em vetores de mesma direção: $T(x,0) = (2x,0)$ ou $T(v) = 2v$. Temos, assim, para esta transformação T, autovetores $\left(x, -\frac{1}{2}x\right)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 1 e autovetores $(x,0), x \neq 0$, associados ao autovalor 2. Todos os outros vetores do plano são levados por T em vetores de direções diferentes.

3.23 Teorema. Dada uma transformação $T : V \to V$ e um vetor v associado a um autovalor λ, qualquer vetor $w = \alpha v (\alpha \neq 0)$, ou seja, múltiplo de v, também é autovetor de T associado a λ.

Prova: $T(w) = T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$ □

3.24 Definição. Seja λ um autovalor de um operador $T : V \to V$. Então, o conjunto $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ é um subespaço vetorial de V associado ao autovalor λ. Além disso, a imagem $T(V_\lambda)$ do subespaço V_λ está contida em V_λ, isto é, V_λ é invariante sob T. O subespaço V_λ é chamado autoespaço de T associado a λ e é formado por autovetores associados a λ e pelo vetor nulo.

Recordando os exemplos 3.36 e 3.37 temos os seguintes autoespaços, respectivamente:

$V_{\lambda=2} = \mathbb{R}^2$, $V_{\lambda=1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -\frac{1}{2}x)\}$ e $V_{\lambda=2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$.

***Exemplo* 3.38.** Seja λ um autovalor de um operador $T : V \to V$. Seja V_λ o conjunto de todos os autovetores de T associados ao autovalor λ (chamado autoespaço de λ). Mostre que V_λ é um subespaço de V.

Solução: Suponha que $v, w \in V$; isto é, $T(v) = \lambda v$ e $T(w) = \lambda w$. Então, para quaisquer escalares $\alpha, \beta \in K$,

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w) = \alpha(\lambda w) + \beta(\lambda w) = \lambda(\alpha v + \beta w).$$

Assim, $\alpha v + \beta w$ é um autovetor associado a λ, isto é, $\alpha v + \beta w \in V_\lambda$. Portanto, $V_{\lambda=2}$ é um subespaço de V.

3.5.1 Autovalores e Autovetores de uma Matriz

3.25 Definição. Dada uma matriz quadrada, A, de ordem n, entendemos por *autovalor e autovetor* de A, o autovalor e autovetor da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada a matriz A em relação à base canônica, isto é, $T_A(v) = A \cdot v$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A, e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A \cdot v = \lambda v$, $v \neq 0$.

***Exemplo* 3.39.** Dada a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e dados os vetores $e_1 = (1, 0, 0 \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0 \dots, 1)$, temos

$$A \cdot e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11} e_1$$

e, em geral, $A \cdot e_i = a_{ii} e_i$. Então, estes vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são autovalores para A, e o autovetor e_i é associado ao autovalor a_{ii}. Veremos, a seguir, que dada uma transformação linear $T : V \to V$ e fixada uma base β, podemos reduzir o problema de encontrar autovalores e autovetores para T à determinação de autovalores para a matriz $[T]_\beta^\beta$.

3.5.2 Polinômio Característico

Observamos, nos exemplos anteriores, que se nos basearmos nas definições de autovalor e autovetor para efetuar os cálculos que determinam seus valores, estaremos adotando um processo complexo e trabalhoso. Por isto, desejamos procurar um método prático para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz A de ordem n. Faremos, a seguir, um exemplo para o caso em que $n = 2$, e em seguida generalizaremos para n qualquer.

***Exemplo* 3.40.** Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Procuramos vetores $v \in \mathbb{R}^2$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ (corpo) tais que $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Observe que se I for a matriz identidade de ordem 2, então a equação acima pode ser escrita na forma $A \cdot v = (\lambda I)v$, ou ainda, $(A - \lambda I)v = 0$.

Escrevendo, explicitamente,

$$\left[\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos, então, a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equações lineares equivalente a esta equação matricial, iremos obter um sistema homogêneo com duas equações e duas incógnitas.

$$\begin{cases} (5-\lambda)x - y = 0 \\ 2x + (3-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, sabemos que este sistema tem uma única solução, que é a solução trivial nula, ou seja, $x = y = 0$. Portanto neste caso temos que $v = (x, y) = (0, 0)$. Mas estamos interessados em calcular os autovalores de A, isto é, pela definição vetores $v \neq 0$, tais que $(A - \lambda I)v = 0$. Neste caso $\det(A - \lambda I)$ deve ser zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (5-\lambda)(3-\lambda) + 2 &= 0 \\ \lambda^2 - 8\lambda + 7 &= 0 \end{aligned}$$

Vemos que $\det(A-\lambda I)$ é um polinômio em λ. Este é chamado o *polinômio característico* de A. Prosseguindo com a resolução, temos

$$(\lambda - 1)(\lambda - 7) = 0.$$

Logo, $\lambda = 1$ ou $\lambda = 7$ são raízes do polinômio característico de A, e portanto os autovalores da matriz A são 1 e 7. Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes. Resolvendo a equação $Av = \lambda v$, para os casos:

i) $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x + y \\ -2x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = x \\ -2x + 2y = y \end{cases} \Rightarrow x = -2y$$

Os autovetores associados a $\lambda = 1$ são $(-2y, y)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(-2, 1)]$.

ii) $\lambda = 7$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2x+y \\ -2x-4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x \\ 7y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y = 7x \\ -2x-4y = 7y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{10}{11}y$$

Os autovetores associados associados a $\lambda = 7$ são do tipo $\left(\frac{10}{11}y, y\right)$, ou seja pertencem ao subespaço $\left[\left(\frac{10}{11}, 1\right)\right]$.

O que fizemos neste exemplo com a matriz A de ordem 2×2 pode ser generalizado. Seja A uma matriz de ordem n. Quais são os autovalores e autovetores correspondentes a A?

São exatamente aqueles que satisfazem a equação $Av = \lambda v$ ou $Av = (\lambda I)v$ ou $(A - \lambda I)v = 0$. Escrevendo esta última equação explicitamente, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chamemos de B a matriz dos coeficientes (primeira matriz). Então, $B \cdot v = 0$. Se $\det B = 0$, sabemos que o posto da matriz B é n e portanto o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem única solução. Como o sistema é homogêneo , então a única solução é a trivial nula, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (ou $v = 0$). Mas, sabemos que a definição de autovetor exclui $v = 0$, assim, impondo a condição $v \neq 0$, o sistema homogêneo $(A - \lambda I)v = 0$ tem solução (não trivial) se, e somente se, a matriz $B = A - \lambda I$ é não inversível, o que significa que $B = A - \lambda I$ não é linha equivalente à identidade ou $\det B = 0$, ou seja, $\det(A - \lambda I) = 0$.

Observamos que

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

é um polinômio em λ de grau n. $P(\lambda)$ é chamado *polinômio característico* da matriz A.

Nota 29. λ é um autovalor de A se e somente se, λ é uma raiz do polinômio característico de A, isto é $P(\lambda) = 0$.

O número de raízes do polinômio característico é no máximo n, grau do polinômio e depende do corpo K. Vejamos um exemplo enfocando este fato.

***Exemplo* 3.41.** Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule seu polinômio característico e autovalores.

Solução: $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$

Portanto, se $K = \mathbb{R}$ ou $K \subset \mathbb{R}$ a matriz A não possui autovalores. Porém se $K = \mathbb{C}$, a matriz A possui dois autovalores, $\lambda = i$ e $\lambda = -i$.

3.26 Proposição. Se V é um espaço vetorial complexo de dimensão n então um operador $T : V \to V$ tem n autovetores (distintos ou não).

3.5.3 Matrizes Semelhantes

3.27 Definição. Duas matrizes $A, B \in M_{n\times n}(K)$, ou seja, matrizes quadradas são semelhantes se existe uma matriz inversível $P \in M_{n\times n}(K)$ tal que $B = P^{-1}AP$.

3.28 Teorema. Duas matrizes A e B são semelhantes se, e somente se, possuem o mesmo determinante.

Prova:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A) \cdot \det(P) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

□

3.29 Lema. Matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores.

Prova: Sejam A e $B = P^{-1}AP$ matrizes semelhantes.

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - P^{-1}AP) \\ &= \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) = \det(\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det P = \det(\lambda I - A) \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

Os polinômios característicos de B e de A são iguais. Logo, os autovalores (raízes do polinômio característico) são os mesmos. □

3.5.4 Matrizes Diagonalizáveis

Uma matriz A é diagonalizável (sob semelhança) se existe uma matriz não-singular P tal que $D = P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal, isto é, se A é semelhante a uma matriz diagonal D.

3.30 Teorema. Uma matriz quadrada A de ordem n é semelhante a uma matriz diagonal D se, e somente se, A tem n autovetores linearmente independentes. Em tal caso, os elementos diagonais de D são os autovalores correspondentes e $D = P^{-1}AP$, onde P é a matriz cujas colunas são os autovetores.

Suponhamos que uma matriz A possa ser diagonalizada, ou seja, tenha a forma diagonal, $P^{-1}AP = D$, onde D é diagonal. Então, A admite a *fatoração diagonal*, extremamente útil, $A = PDP^{-1}$.

Utilizando-se esta fatoração, a álgebra de A reduz-se à álgebra da matriz diagonal D, que pode ser facilmente calculada. Especificamente, seja $D = \ diag\ (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Então,

$$A^m = ((PDP)^{-1})^m = PD^mP^{-1} = P\ \operatorname{diag}(k_1^m, k_2^m, \ldots, k_n^m)P^{-1}$$

e, mais geralmente, para qualquer polinômio $f(x)$,

$$f(A) = f(PDP^{-1}) = PD^mP^{-1} = Pf(D)P^{-1} = P\operatorname{diag}(f(k_1), \ldots, (f(k_n))P^{-1}.$$

Além disso, se os elementos diagonais de D são não-negativos, então a matriz seguinte B é uma “raiz quadrada” de A:

$$B = P\operatorname{diag}(\sqrt{k_1}, \ldots, \sqrt{k_1})P^{-1},$$

isto é, $B^2 = A$.

***Exemplo* 3.42.** Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ onde esta matriz tem dois autovetores linearmente independentes $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Façamos $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, e, assim, $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

Então, A é semelhante à matriz diagonal

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como era de se esperar, os elementos diagonais 4 e -1 da matriz diagonal B são os autovalores correspondentes aos autovetores dados. Em particular, A admite a fatoração

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente,

$$A^4 = PD^4P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103 & 102 \\ 153 & 154 \end{bmatrix}$$

Além disso, se $f(x) = x^3 - 7x^2 + 9x - 2$, então

$$f(A) = Pf(D)P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 2 \\ 3 & -16 \end{bmatrix}$$

***Nota* 30.** Utilizamos o fato de que a inversa da matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{\det(P)} & -\dfrac{b}{\det(P)} \\ -\dfrac{c}{\det(P)} & \dfrac{a}{\det(P)} \end{bmatrix},$$

isto é, P^{-1} se obtém permutando-se os elementos diagonais a e d de P, tomando os negativos dos elementos não-diagonais b e c, e dividindo cada elemento pelo determinante, $\det(P)$.

Até o momento definimos polinômio característico de uma matriz. Desejamos agora estender este conceito para qualquer transformação linear $T : V \to V$.

De modo geral, se $T : V \to V$ é um operador linear e β é uma base de V, então, para se determinar um valor λ tal que exista $v \neq 0$ de forma que $T(v) = \lambda v$, ou então, $[T(v)]_\beta = [\lambda v]_\beta$ devemos verificar se a equação matricial $\left[[T]_\beta^\beta - \lambda I\right][v]_\beta = 0$ o que pode ser visualizado através das seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} Tv = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad ([T]_\beta^\beta[v]_\beta &= \lambda[v]_\beta \\ \Leftrightarrow \quad \left[[T]_\beta^\beta - \lambda I\right][v]_\beta &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \det\left[[T]_\beta^\beta - \lambda I\right] &= 0 \end{aligned}$$

Observamos que a última condição é dada por $P(\lambda) = 0$ onde $P(\lambda)$ é o polinômio característico $[T]_\beta^\beta$. Neste caso $P(\lambda)$ também será chamado polinômio característico da transformação T e suas raízes serão os autovalores de T. O fator fundamental nesta definição é a sua não dependência da base β escolhida.

***Exemplo* 3.43.** Encontre os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.

Solução: Observemos que se α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$,

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e, portanto, podemos dar o polinômio característico de T como $P(\lambda) = \det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I)$. Segue que:

$$P(\lambda) = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 = -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)\cdot(\lambda-1).$$

Assim, $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, ou seja, $\lambda = -2$. Então, os autovalores do operador T são 1 e -2. Vejamos, agora, os autovalores associados.

◇ Para $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x+4y = 0 \\ -x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Portanto os autovalores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $v = (x,x)$, $x \neq 0$.

◇ Para $\lambda = -2$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+4y = 0 \\ -x+4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4y$$

Os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = -2$ são da forma $v = (4y, y)$, $y \neq 0$, ou equivalentemente $v = (x, \frac{1}{4}x)$.

As retas acima são "invariantes" em relação a esta aplicação.

3.31 Definição. Chamamos multiplicidade algébrica de um autovalor a quantidade de vezes que o autovalor aparece como raiz do polinômio característico.

***Exemplo* 3.44.**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Então, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$. Os autovalores associados à matriz A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. O autovalor $\lambda_1 = 3$ tem multiplicidade algébrica igual a 2, ou ainda, 3 é uma raiz dupla do polinômio característico. Já $\lambda_2 = -1$ tem multiplicidade algébrica igual a 1.

3.32 Definição. Chamamos multiplicidade geométrica de um autovalor λ a dimensão do autoespaço V_λ de autovetores associados a λ.

***Exemplo* 3.45.** No exemplo 3.44 acima desenvolvendo as equações matriciais encontramos para o autovalor $\lambda_1 = 3$ vetores do tipo $v = (x, y, 0)$. Note que

$$\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0) + y(0,1,0); x, y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0),(0,1,0)]$$

e, portanto, a dimensão deste subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$ é 2. E para o autovalor $\lambda_1 = -1$ vetores do tipo $v = (z, -\frac{5}{4}z, z)$; $z \neq 0$. Vejamos que $\{(z, -\frac{5}{4}z, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}^*\} = \{z(1, -\frac{5}{4}, 1); z \in \mathbb{R}^*\} = [(1, -\frac{5}{4}, 1)]$ e, portanto, a dimensão deste subespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$ é 1.

***Exemplo* 3.46.** Determine caso existam, os autovalores do operador linear T os autovetores associados sobre o corpo $K = \mathbb{R}$ e uma base para cada autoespaço:

(a) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} -16 & 10 \\ -16 & 8 \end{bmatrix}$, onde α é a base canônica;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z)$.

Solução: (a) O polinômio característico do operador T é: $\det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} -16-\lambda & 10 \\ -16 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$, isto é, $(-16 - \lambda)(8 - \lambda) + 160 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 8\lambda + 32 = 0$. As raízes dessa equação são: $\lambda_1 = -4 + 4i$ e $\lambda_2 = -4 - 4i$. As raízes $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$. Logo, T não possui autovalores nem autovetores associados.

Solução: (b) A equação característica do operador T é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

e assim $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$.

As soluções inteiras, caso existam, são divisoras do termo independente -36. Com as devidas substituições na equação acima, constata-se que $\lambda = 2$ é uma delas. Conseqüentemente, $\lambda - 2$ é um fator do polinômio característico $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36$. Se dividirmos esse polinômio por $\lambda - 2$, a equação poderá ser apresentada como $(\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$ e, portanto, as demais raízes são soluções da equação $\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$. Logo, os valores próprios do operador T são: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos autovetores é $(A - \lambda I)v = 0$. Considerando $v = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^t$ o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo λ por 2, obtém-se os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$. Vejamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções próprias, tal que $z = -x$, $y = 0$. Assim, os vetores do tipo $v_1 = (x, 0, -x)$ ou $v_1 = x(1, 0, -1)$, $x \neq 0$, são autovetores associados a $\lambda_1 = 2$. Agora vamos obter os autovetores associados a $\lambda_2 = 3$, substituindo λ por 3.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções próprias, tal que $y = x$, $z = x$. Assim, os vetores do tipo $v_2 = (x, x, x)$ ou $v_2 = x(1, 1, 1)$, $x \neq 0$, são autovetores associados a $\lambda_2 = 3$.

Por fim, vamos obter os autovetores associados a $\lambda_3 = 6$, substituindo λ por 6.

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções próprias, tal que $y = -2x$, $z = x$. Assim, os vetores do tipo $v_3 = (x, -2x, x)$ ou $v_3 = x(1, -2, 1)$, $x \neq 0$, são autovetores associados a $\lambda_3 = 6$.

3.6 Diagonalização de Operadores

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Estamos à procura de uma base β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ seja uma matriz diagonal, que neste caso é a forma mais simples possível para uma matriz de uma transformação. Observemos, inicialmente, a seguinte propriedade de autovetores.

3.33 Teorema. Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Prova: Vamos pensar primeiramente no caso de duas dimensões. Sejam λ_1 e λ_2 autovalores tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e v_1 e v_2 autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente.
Seja $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Queremos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Apliquemos à transformação linear $T - \lambda_2 I$, a $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Usando a linearidade de T e lembrando que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e $I v_i = v_i$ para $i = 1, 2$ temos que:

$$\begin{aligned}
T - \lambda_2 I(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= T - \lambda_2 I(0) \\
T - \lambda_2 I(\alpha_1 v_1) + T - \lambda_2 I(\alpha_2 v_2) &= 0 \\
T(\alpha_1 v_1) - \lambda_2 \alpha_1 v_1 + \alpha_2 T(v_2 - \lambda_2 \alpha_2 v_2 &= 0 \\
\alpha_1 T(v_1) - \lambda_2 \alpha_1 v_1 + \alpha_2 T(v_2) - \lambda_2 \alpha_2 v_2 &= 0 \\
\alpha_1 \lambda_1 v_1 - \lambda_2 \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 - \lambda \alpha_2 v_2 &= 0 \\
\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot v_1 &= 0
\end{aligned}$$

observe que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $v_1 \neq 0$ por definição de autovetor. Assim, $\alpha_1 = 0$.
Usando agora a transformação $T - \lambda_1 I$ a equação original $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_1) v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 &= 0 \\
\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) &= 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0
\end{aligned}$$

Assim, v_1 e v_2 são linearmente independentes.
Generalizando, se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ são autovalores distintos e $v_1, v_2, \ldots, \lambda_r$, respectivamente, então $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são linearmente independentes.
Se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_r v_r = 0$ e usando as transformações lineares $T - \lambda_i I$ $1 \leq i \leq n$ mostramos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$. □

3.34 Corolário. *Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ é um operador linear que possui n autovalores distintos então V possui uma base cujos vetores são todos de T. Ou seja, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.*

***Exemplo* 3.47.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$. Sejam $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ base canônica de $\mathbb{R}^2$, $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Temos que

$$P(\lambda) = \det\left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right).$$

Segue que

$$P(\lambda) = (-3 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) + 4 = -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Se $P(\lambda) = 0$ então $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ou $(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$ donde $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$. Calculando os autovalores associados.

$\diamond$ Para $\lambda_1 = -2$ temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -2x \\ -x + 2y = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2x + 4y = 0 \\ -x + 2y + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$$

logo $x = 4y$ e portanto os vetores associados são do tipo $(4y, y)$, $y \neq 0$.

$\diamond$ Para $\lambda_2 = 1$ temos:

$$\begin{cases} -3x + 4y = x \\ -x + 2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

logo os autovetores associados são do tipo (x, x).

Assim, pelo teorema anterior, os vetores: $(4, 1)$ e $(1, 1)$ formam uma base para $\mathbb{R}^2$, pois, são L.I.

Seja $\gamma = \{(4, 1), (1, 1)\}$ vamos agora encontrar $[T]_\gamma^\gamma$.

$$\begin{array}{rcrcl} T(4,1) & = & -2(4,1) & = & -2(4,1) + 0(1,1) \\ T(1,1) & = & 0(4,1) & = & -2(4,1) + 1(1,1) \end{array}.$$

Assim, $[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, é uma matriz diagonal. Logo, o operador T é diagonalizável.

***Nota* 31.** O fato de existir uma base de autovetores, significa diagonalizar a matriz do operador.

3.35 Definição. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base de V cujos elementos são autovalores de T.

Observemos que, se $\dim V = n$ e $T : V \to V$ tem n autovalores distintos então T é diagonalizável pois teremos n autovetores linearmente independentes.

Para verificar se um operador é diagonalizável, podemos calcular seus autovalores e autovetores associados e tentar construir, quando possível, uma base com os autovetores. Uma outra maneira veremos posteriormente com o estudo do polinômio minimal.

***Exemplo* 3.48.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação a base canônica α é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verifique se $[T]_\alpha^\alpha$ é diagonalizável.

Solução: Como $P(\lambda) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Associado a $\lambda_1 = -3$ encontramos apenas um autovetor L.I. Por exemplo, $v = (1, 0, 0)$. Associado a $\lambda_2 = -1$ temos o autovetor L.I, $u = (-1, 2, 16)$. Neste caso, temos apenas dois autovetores L.I para T e, portanto, não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só de autovetores. Isto significa que em nenhuma base a matriz de T é uma matriz diagonal, ou seja, *T não é diagonálizável.*

3.6.1 Polinômio Minimal

Nos exemplos vistos até agora, dizer que a matriz de um operador linear é diagonalizável significa que existe uma base de autovetores que a diagonaliza. Porém encontrar tal base se torna um trabalho árduo quando nos referimos a espaços de dimensão maiores que 2 ou 3 por exemplo. Assim, estaremos interessados em encontrar uma forma de saber se tal matriz do operador é diagonalizável ou não sem que seja necessário encontrar a base de autovetores.

3.36 Definição. Seja $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada. Então, $P(A)$ é a matriz

$$p(A) = a_n \cdot A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I.$$

Quando $p(A) = 0$ dizemos que $p(x)$ anula a matriz A.

Exemplo 3.49. Sejam $p(x) = x^2 - 9$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $p(A)$.

Solução:

$$p(A) = A^2 - 9I = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.37 Definição. Seja A uma matriz quadrada. O polinômio minimal de A é um polinômio

$$m(x) = x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0$$

tal que

(i) $m(A) = 0$, isto é, $m(x)$ anula a matriz A

(ii) $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam A

3.38 Teorema. Sejam $T : V \to V$ um operador linear e α uma base qualquer de V de dimensão n. Então, T é diagonalizável se e somente se o polinômio minimal de $[T]_\alpha^\alpha$ é da forma:

$$m(x) = (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n),$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ autovalores distintos.

Nota 32. O nosso problema de saber se um operador linear é diagonalizável ou não se resume ao de encontrar o polinômio minimal de T. Os resultados a seguir nos ajudarão a encontrar o polinômio minimal para cada operador linear.

3.39 Teorema. [Teorema de Cayley-Hamilton] Seja $T : V \to V$ um operador linear, β uma base de V e $p(x)$ o polinômio característico de T. Então, $p([T]_\beta^\beta) = 0$.

Exemplo 3.50. Seja $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$ onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ base canônica do $\mathbb{R}^2$ assim

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e o polinômio característico é:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 \\ &= -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p([T]_\beta^\beta) &= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.40 Teorema. As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes(distintas) do polinômio característico.

> ***Nota 33.*** Os resultados anteriores nos dizem que encontrar o polinômio minimal significa encontrar o polinômio característico de menor grau que anula $[T]_{\beta}^{\beta}$ onde β é uma base qualquer de V.

3.41 Teorema. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear de T. Então, T será diagonalizável se, e somente se, o polinômio

$$(x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)$$

anula a matriz de T.

***Exemplo* 3.51.** Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear definido por $T(x, y, z, t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t)$. T é diagonalizável?

Solução: Seja $\beta = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ a base canônica. Então, temos a matriz

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Seu polinômio característico é $p(\lambda) = \det([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 \cdot (-1 - \lambda)^2$.
Os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, ambos com multiplicidade 2. Então, os candidatos para o polinômio minimal são:

$$p_1(\lambda) = (3 - \lambda)^2 \cdot (-1 - \lambda)^2, \qquad p_3(\lambda) = (3 - \lambda)^2 \cdot (-1 - \lambda)$$

$$p_2(\lambda) = (3 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda)^2, \qquad p_4(\lambda) = (3 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda)$$

Assim, notamos que $p_4([T]_{\beta}^{\beta}) = 0$ e é, dentre as possibilidades, o de menor grau. Então,

$$p_4(x) = (x - 3)(x + 1)$$

é o polinômio minimal. Portanto, T é diagonalizável, isto é, existe uma base α de autovetores e nesta base

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.6.2 Exercícios Propostos

3.1. Determine quais das seguintes funções são aplicações lineares:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, x - y)$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = xy$;

(c) $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $N(x) = |x|$;

(d) $k : P_2 \to P_3$ dada por $k(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$.

3.2. Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,-2) = (0,1,0)$? Ache também $T(1,0)$ e $T(0,1)$.

3.3. Encontre a transformação T do plano que é uma reflexão em torno da reta $x = y$. Logo após, escreva sua forma matricial.

3.4. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quais são os autovalores e autovetores de A de um espaço vetorial: (a) Real; (b) Complexo.

3.5. Aplique o algoritmo da diagonalização a $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e dê:

(a) o polinômio característico;

(b) os autovalores e autovetores correspondentes;

(c) a matriz diagonal.

3.6. Encontre o polinômio característico $p(x)$ da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

3.7. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine:

(a) todos os autovalores de A e os correspondentes autovetores;

(b) $f(A)$, onde $f(t) = t^4 - 3t^3 - 7t^2 + 6t - 15$.

3.8. Determine o polinômio mínimo $m_A(x)$ e $m_B(x)$ das matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ onde $a \neq 0$

3.7 Gabarito

3.1 (a) é função linear; (b) não é função linear; (c) não é função linear; (d) é função linear. 3.2 $T(x,y) = (3x, \frac{5x-y}{2}, x)$; $T(1,0) = (3, \frac{5}{2}, 1)$; $T(0,1) = (0, -\frac{1}{2}, 0)$. 3.3 $T(x,y) = (y,x)$; $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 3.4 (a) $\lambda = -2$, $v = (2x, x, -x)$; (b) $\lambda_1 = -2$, $v_1 = (2x, x, -x)$; $\lambda_2 = i$, $v_2 = [(-1+i)y, y, (1+i)y]$; $\lambda_3 = -i$, $v_3 = [(-1-i)y, y, (1-i)y]$. 3.5 (a) $p(x) = (x-5)(x-2)$ (b) $\lambda_1 = 5$, $v_1 = [(2,1)y]$ e $\lambda_2 = -2$, $v_1 = [(-\frac{1}{3}, 1)y]$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 3.6 $p(x) = x^3 + x^2 - 8x + 62$. 3.7 (a) $\lambda_1 = 5$; $v_1 = [(1,1)y]$ e $\lambda_2 = -1$; $v_1 = [(-2,1)y]$; (b) $\begin{bmatrix} 14 & 76 \\ 38 & 52 \end{bmatrix}$ 3.8 (a) $m_A(x) = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$; (b) $m_b(x) = (x-\lambda)^3$.

Espaços com Produto Interno

Produto Interno

Apresentação

Um dos conceitos fundamentais quando se estudam os vetores da geometria é o de "produto escalar", o qual é uma aplicação que a cada par de vetores $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ associa um número real dado por

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cdot \cos(\theta),$$

em que θ é o ângulo formado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Se em relação à base canônica $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ temos $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{i} + x_2\overrightarrow{j} + x_3\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + y_3\overrightarrow{k}$, então

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Neste tema generalizaremos a definição de "produto escalar", visando formalizar os conceitos de *comprimento* de um vetor e de *ângulo* entre dois vetores. Com isto, teremos processos para introduzir o conceito de "distância" em situações bem gerais, ou seja, para que se possa "medir" num espaço vetorial, da mesma forma pela qual se mede no plano ou no espaço.

4.1 Produto Interno

4.1 Definição. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um produto interno sobre V é uma função que associa a cada par de vetores $(u, v) \in V \times V$ um número real indicado por $\langle u, v\rangle$. Ou mais explicitamente, $\forall\, u, v$ temos*

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

obedecendo aos seguintes axiomas:

1. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;
2. $\alpha\langle u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$
3. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$; $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

***Exemplo* 4.1.** Seja $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ e $w = (z_1, z_2)$. Verifique se

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

é um produto interno.

Solução: Temos que verificar se todos os 4 axiomas relativos a um produto interno estão satisfeitos.

1.
$$\begin{aligned} \langle u+v, w\rangle &= \langle (x_1+y_1, x_2+y_2), (z_1, z_2)\rangle \\ &= (x_1+y_1)\cdot z_1 + (x_2+y_2)\cdot z_2 \\ &= x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 \\ &= (x_1z_1 + x_2z_2) + (y_1z_1 + y_2z_2) \\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \langle \alpha u, v\rangle &= \langle (\alpha x_1, \alpha x_2), (y_1, y_2)\rangle \\ &= \alpha x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2) \\ &= \alpha\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

3.
$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = \langle v, u\rangle.$$

4.
$$\langle u, u\rangle = x_1^2 + x_2^2 \geq 0.$$

Vejamos a possibilidade do produto interno ser igual a zero.

$\Rightarrow \langle u, u\rangle = x_1^2 + x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow u = (0,0)$.

$\Leftarrow u = (0,0) \Leftrightarrow \langle u, u\rangle = 0^2 + 0^2 = 0 \Rightarrow \langle u, u\rangle = 0$.

***Exemplo* 4.2.** Verifique se a função

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle &\mapsto x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \end{aligned}$$

é um produto interno.

Solução: Sejam $V = \mathbb{R}^n$, $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n)$ e $w = (z_1, \ldots, z_n)$. Então

1.
$$\begin{aligned} \langle u+v, w\rangle &= \langle (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n), (z_1, \ldots, z_n)\rangle \\ &= (x_1+y_1)\cdot z_1 + (x_2+y_2)\cdot z_2 + \ldots + (x_n+y_n)\cdot z_n \\ &= x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + \ldots + x_nz_n + y_nz_n \\ &= (x_1z_1 + x_2z_2 + \ldots + x_nz_n) + (y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n) \\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \langle \alpha u, v\rangle &= \langle (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle \\ &= \alpha x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + \ldots + \alpha x_ny_n = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) \\ &= \alpha\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

3.
$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n = \langle v, u\rangle$$

4. Se $u \neq (0, 0, \ldots, 0)$, então um dos x_i, ao menos, é não nulo. Logo,

$$\langle u, u\rangle = x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0.$$

Logo, este $\langle , \rangle$ é um produto interno e é chamado de **produto interno usual**.

Agora observe este contra-exemplo.

Exemplo 4.3. Verifique se

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &\rightarrow x_1y_1-3x_2y_2 \end{aligned}$$

é um produto interno.

Solução: Seja $u=(0,1)$. Logo,

$$\langle u,u\rangle=\langle(0,1),(0,1)\rangle=0-3=-3<0.$$

Portanto, f não é produto interno, uma vez que o axioma 4 falhou.

4.1.1 Propriedades

4.2 Proposição. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $\langle,\rangle$.

i. $\langle u,0\rangle=0,\forall\ u\in V$;

ii. $\langle u,\alpha v\rangle=\alpha\langle u,v\rangle,\forall\ u,v\in V$ e $\alpha\in\mathbb{R}$;

iii. $\langle u,v+z\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle,\forall\ u,v,w\in V$;

iv. $\langle\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iu_i,\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_jv_j\rangle=\sum\limits_{i=1}\sum\limits_{j=1}\alpha_i\lambda_j\langle u_i,v_j\rangle,\forall\ u_i,v_j\in V$ e $\alpha\lambda\in\mathbb{R}$.

Prova:

i. $\langle u,0\rangle=\langle u,0u\rangle=\langle 0u,u\rangle=0\langle u,u\rangle=0$;

ii. $\langle u,\alpha v\rangle=\langle\alpha v,u\rangle=\alpha\langle v,u\rangle=\alpha\langle u,v\rangle$;

iii. $\langle u,v+w\rangle=\langle v+w,u\rangle=\langle v,u\rangle+\langle w,u\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$;

iv. $\langle\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iu_i,\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_jv_j\rangle=\sum\limits_{i=1}\sum\limits_{j=1}\alpha_i\lambda_j\langle u_i,v_j\rangle,\forall u_i,v_j\in V$ e $\alpha;\lambda\in\mathbb{R}$. Por exemplo para $n=2$ temos:

$$\begin{aligned} \langle\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,\lambda_1v_1+\lambda_1v_2\rangle &= \\ \langle\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,\lambda_1v_1\langle+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,\lambda_2v_2\rangle &= \\ \langle\alpha_1u_1,\lambda_1v_1\rangle+\langle\alpha_2u_2,\lambda_1v_1\rangle+\langle\alpha_1u_1,\lambda_2v_2\rangle+\langle\alpha_2u_2,\lambda_2v_2\rangle &= \\ \alpha_1\lambda_1\langle u_1,v_1\rangle+\alpha_2\lambda_1\langle u_2,v_1\rangle+\alpha_1\lambda_2\langle u,v_2\rangle+\alpha_2\lambda_2\langle u_2,v_2\rangle & \end{aligned}$$

□

4.2 Norma

4.3 Definição. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle,\rangle$. Chama-se norma de $v\in V$, em relação ao produto interno $\langle,\rangle$, ao número real não negativo $(\langle v,v\rangle)^{\frac{1}{2}}$ e indicaremos por $||v||$, ou seja,*

$$||v||=\sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

Exemplo 4.4. Seja $V=\mathbb{R}^3$ com produto interno usual. Calcule a norma de $u=(1,0,2)$.

Solução: $||u|| = \sqrt{\langle(1,0,2),(1,0,2)\rangle} = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$.

***Exemplo* 4.5.** Seja $V = P_1(\mathbb{R})$ com norma $||p(t)|| = \sqrt{\langle p(t), p(t)\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (p(t))^2\, dt}$ e $p(t) = 1+t$. Calcule $||p(t)||$.

Solução:

$$||p(t)|| = \sqrt{\int_0^1 (1+t)^2\, dt} = \sqrt{\int_0^1 (1+2t+t^2)\, dt} = \sqrt{(t+t^2+\frac{t^3}{3})\Big|_0^1} = \sqrt{1+1+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

***Nota* 34.** A norma de um vetor v depende do produto interno.

***Exemplo* 4.6.** Considere $V = \mathbb{R}^2$ e seja $u = (1,1)$. Calcule $||u||$, nos seguintes casos:

(a) V está munido do produto interno usual;

(b) V está munido do produto interno $\langle(x_1,x_2),(y_1,Y_2)\rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2$.

Solução:

(a) $||u|| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$;

(b) $||u|| = \sqrt{1^2+4\cdot 1^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

4.2.1 Propriedades

Sejam V um espaço vetorial real com produto interno $\langle , \rangle$. Então:

i. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||, \forall \ \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;

ii. $||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

***Nota* 35.** 1. Dizemos que um vetor $v \in V$, $v \neq \overline{0}$ (vetor nulo) é unitário quando $||v|| = 1$;

2. O vetor $\frac{1}{||v||} \cdot v$ $(v \neq \overline{0})$ é unitário. Com efeito,

$$\left|\left|\frac{1}{||v||} \cdot v\right|\right| = \left|\frac{1}{||v||}\right| \cdot ||v|| = \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = 1.$$

Esse vetor é chamado versor de v e denotado por v°.

***Exemplo* 4.7.** Determine o versor do vetor $u = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ com produto interno usual. Verifique se u° é unitário.

Solução: $||u|| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Logo, $u^\circ = \frac{1}{||u||} \cdot u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

É unitário, pois, $\left|\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|\right| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$.

4.4 Proposição. [Desigualdade de Cauchy-Schwarz] Seja V um espaço vetorial real com produto interno $\langle , \rangle$. Então,

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||, \forall\ u, v \in V.$$

Prova:

1. Se $u = 0$ ou $v = 0 \Rightarrow \langle u, v\rangle = 0$ e $||u|| = 0$ ou $||v|| = 0$. Então a desigualdade reduz-se a $0 \leq 0$ e é, portanto, verdadeira.

2. Supondo que $v \neq 0$; $||u + \alpha v||^2 \geq 0, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
||u + \alpha v||^2 &= \langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle \\
&= \langle u, u + \alpha v\rangle + \langle \alpha v, u + \alpha v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, \alpha v\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \langle \alpha v, \alpha v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \alpha\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \alpha^2\langle v, v\rangle \\
&= ||u||^2 + \alpha\langle u, v\rangle + \alpha\langle v, u\rangle + \alpha^2||v||^2 \\
&= ||u||^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + \alpha^2||v||^2 \\
&= ||v||^2\alpha^2 + 2\langle u, v\rangle\alpha + ||u||^2
\end{aligned}$$

Trata-se de uma equação do 2° grau em α, com o coeficiente $a = ||v||^2 \geq 0$. Como $||v||^2\alpha^2 + 2\langle u, v\rangle\alpha + ||u||^2 \geq 0$ implica em $\Delta \leq 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
(2\langle u, v\rangle)^2 - 4||v||^2 \cdot ||u||^2 &\leq 0 \\
4(\langle u, v\rangle)^2 - 4||v||^2 \cdot ||u||^2 &\leq 0 \ \ (\div 4) \\
(\langle u, v\rangle)^2 - (||u|| \cdot ||v||)^2 &\leq 0 \\
(\langle u, v\rangle)^2 &\leq (||u|| \cdot ||v||)^2 \\
\sqrt{(\langle u, v\rangle)^2} &\leq \sqrt{(||u|| \cdot ||v||)^2} \\
|\langle u, v\rangle| &\leq |||u|| \cdot ||v||| \\
|\langle u, v\rangle| &\leq ||u|| \cdot ||v||
\end{aligned}$$

□

4.2.2 Ângulos entre Dois Vetores

O cálculo do ângulo entre dois vetores é uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Sejam $u, v \neq \overline{0}$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v|| \Rightarrow \frac{|\langle u, v\rangle|}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1.$$

Relembremos, agora, que se $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$. Logo, voltando a aplicação em questão, temos que

$$-1 \leq \left|\frac{|\langle u, v\rangle|}{||u|| \cdot ||v||}\right| \leq 1.$$

Logo, existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle u, v\rangle|}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1,$$

em que θ é o ângulo entre os vetores u e v.

***Exemplo* 4.8.** Sejam $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno usual $\langle , \rangle$, $u = (1, 2)$ e $v = (0, 2) \in V$. Determine o ângulo θ entre os vetores u e v.

Solução: $\langle u, v\rangle = \langle(1,2),(0,2)\rangle = 0+4 = 4$, $||u|| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ e $||v|| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$. Assim,

$$\cos(\theta) = \frac{|4|}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

e $\theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

4.5 Corolário (Desigualdade Triangular)**.** *Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Então*

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall\, u, v \in V.$$

Prova:

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v+u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle v,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= ||u||^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||^2 \end{aligned}$$

Como $\langle u,v\rangle \leq ||u|| \cdot ||v||$, então

$$\begin{aligned} ||u||^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||^2 &\leq ||u||^2 + 2\cdot ||u||\cdot||v|| + ||v||^2 \\ ||u+v||^2 &\leq (||u|| + ||v||)^2. \end{aligned}$$

Extraindo-se a raiz quadrada, temos $||u+v||^2 \leq ||u|| + ||v||$. □

4.3 Espaços Complexos com Produto Interno

Nesta secção iremos considerar espaços vetoriais V sobre o corpo complexo $\mathbb{C}$. Recordemos importantes propriedades dos números complexos. Seja $z \in \mathbb{C}$, ou seja, $z = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Então

i. o conjugado de z é $\overline{z} = a - bi$;

ii. $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ e $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$;

iii. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ e $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$; $\overline{\overline{z}} = z$; $\forall\, z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

iv. z é real se, e somente se, $\overline{z} = z$.

4.6 Definição. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um produto interno sobre V é a função*

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u,v) &\mapsto \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

satisfazendo às seguintes condições:

(a) $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$;

(b) $\alpha\langle u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$;

(c) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$, *chamada de* ***propriedade simétrica conjugada****;*

(d) $\langle u,u\rangle \geq 0$; $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

O espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$ com produto interno é chamado de **espaço hermitiano**.

4.3.1 Espaço Hermitiano com Produto Interno Usual

Sejam $V = \mathbb{C}^2$, $u = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2) \in V$ e

$$\begin{array}{rcl} \langle , \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u, v) & \mapsto & \langle u, v \rangle = \langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} \end{array}$$

chamado produto interno usual.

***Exemplo* 4.9.** Sejam $V = \mathbb{C}^2$ com produto interno usual, $u = (1 + i, 1)$ e $v = (2, 3 + i) \in V$. Calcule $\langle u, v \rangle$ e $||u||$

Solução:

1. $\langle u, v \rangle = (1 + i) \cdot \overline{2} + 2 \cdot \overline{(3 + i)} = (1 + i) \cdot 2 + 1 \cdot (3 - i)$
   $= 5 + i$
2. $\langle u, u \rangle = (1 + i) \cdot \overline{(1 + i)} + 1 \cdot \overline{1} = (1 + i) \cdot (1 - i) + 1 = 1 - i^2 + 1 = 3.$
   Portanto, neste caso, $\langle u, u \rangle = ||u||^2 = 3 \Rightarrow ||u|| = \sqrt{3}$.

4.3.2 Propriedades

4.7 Proposição. Seja V um espaço vetorial hermitiano.

i. $\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle; \forall\ u, v \in V \alpha \in \mathbb{C}$;

ii. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

Prova:

i. $\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\langle \alpha v, u \rangle} = \overline{\alpha \langle v, u \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\langle v, u \rangle} = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle$.

ii. $\overline{\langle v + w, u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle w, u \rangle} = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

$\square$

4.4 Ortogonalidade

4.8 Definição. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle , \rangle$. Dizemos que $u, v \in V$ são ortogonais se, e somente se,*

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

***Exemplo* 4.10.** Sejam $V = \mathbb{C}^2$ com produto interno usual. Verifique se $u = (1 + i, i)$ e $v = (i, 1 - i)$ são ortogonais.

Solução:

$$\begin{array}{rcl} \langle u, v \rangle & = & (1 + i) \cdot \overline{i} + i \cdot \overline{(1 - i)} \\ & = & (1 + i)(-i) + i \cdot (1 + i) \\ & = & -i - i^2 + i + i^2 = 0 \end{array}$$

Logo, u, v são ortogonais.

***Exemplo* 4.11.** Sejam $V = P_2(\mathbb{R}), \langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$, $p(t) = t$ e $q(t) = t^2$. Calcule $\langle p, q\rangle$.

Solução: $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} t \cdot t^2 dt = \int_{-1}^{1} t^3 dt = \frac{t^4}{4}|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$

O conceito de ortogonalidade depende do produto interno. Vejamos o próximo exemplo.

***Exemplo* 4.12.** Sejam $V = P_2(\mathbb{R}), \langle p, q\rangle = \int_{0}^{1} p(t)q(t)dt$, $p(t) = t$ e $q(t) = t^2$. Verifique se p e q são ortogonais.

Prova:

$$\langle p, q\rangle = \int_{0}^{1} t \cdot t^2 dt = \int_{-1}^{1} t^3 dt = \frac{t^4}{4}|_{0}^{1} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Logo, p e q não são ortogonais com relação a esse produto interno. □

4.4.1 Propriedades

4.9 Proposição. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle , \rangle$. Então

i. $\langle 0, v\rangle = 0, \forall\, v \in V$, (o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor $v \in V$;

ii. $\langle v, u\rangle = 0, \forall\, u \in V, \Leftrightarrow v = 0$.

Prova:

i. $\langle 0, v\rangle = \langle 0u, v\rangle = 0\langle u, v\rangle = 0$;

ii. Como a propriedade é válida para todo $u \in V$, consideremos $u = v$. Então $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

□

4.4.2 Conjunto Ortogonal

4.10 Definição. *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle , \rangle$, $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Dizemos que S é um conjunto ortogonal se seus elementos são ortogonais dois a dois.*

***Exemplo* 4.13.** Verifique,em cada caso, se o conjunto S é ortogonal.

(a) $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$;

(b) $V = \mathbb{C}^3$ com o produto interno usual e $S = \left\{(1, i, 1), \left(\frac{2}{3}i, \frac{1-3i}{3}\right), \frac{3-i}{3}\right\}$.

Solução:

(a) $\langle (1,0),(0,1)\rangle = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$. Logo, S é ortogonal.

(b)

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= 1\cdot\overline{\frac{2}{3}i} + i\cdot\overline{\left(\frac{1}{3}-i\right)} + 1\cdot\overline{\left(1-\frac{i}{3}\right)}\\ &= -\frac{2}{3}i + i\left(\frac{1}{3}+i\right) + 1 + \frac{i}{3}\\ &= 1 - \frac{i}{3} + \frac{i}{3} + i^2 = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Logo S é um conjunto ortogonal.

4.4.3 Conjunto Ortonormal

4.11 Definição. *Trata-se de um conjunto ortogonal com a propriedade adicional de que $||v|| = 1, \forall\, v \in S$, ou seja, dado um conjunto $S = \{v_1,\dots,v_n\}$; S é ortonormal se*

$$\begin{cases}\langle v_i, v_j\rangle = 0\\ ||v_i|| = 1,\end{cases} \quad \forall\, i,j = 1,\dots,n.$$

As bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$, expressas, respectivamente, por $B_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ são ortonormais.

Nota 36. Seja $S = \{v_1,\dots,v_n\}$ ortogonal e $v_i \neq 0, \forall\, i$. Então $S' = \left\{\frac{1}{||v_1||}\cdot v_1,\dots,\frac{1}{||v_n||}\cdot v_n\right\}$ é ortonormal, ou seja, todos os vetores de S' são unitários e, portanto, ortonormais.

4.4.4 Base Ortogonal e Ortonormal

4.12 Definição. *Seja $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V com produto interno. Dizemos que B é uma base ortogonal (ortonormal) se B é um conjunto ortogonal (ortonormal).*

4.13 Proposição. Todo conjunto ortogonal de vetores não-nulos é linearmente independente.

Prova: Considere $S = \{v_1,\dots,v_n\}$, $v_i \neq 0$ e a combinação linear $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, então

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, v_1\rangle &= 0\\ \alpha_1\langle v_1,v_1\rangle + \alpha_2\langle v_2,v_1\rangle + \ldots + \alpha_n\langle v_n,v_1\rangle &= 0\end{aligned}$$

Segue que $\alpha_2\langle v_2,v_1\rangle = 0; \alpha_3\langle v_3,v_1\rangle = 0; \alpha_4\langle v_4,v_1\rangle = 0,\dots,\alpha_n\langle v_n,v_1\rangle = 0$, pois, o conjunto é ortogonal; restando $\alpha_1\langle v_1,v_1\rangle = 0$.
O fato de $\alpha_1\langle v_1,v_1\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1||v_1||^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$. Analogamente, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Logo, teremos todos os coeficientes nulos da combinação linear considerada. Portanto, S é linearmente independente. □

4.14 Proposição. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle,\rangle$ e $u,v \in V$, $v \neq 0$. Então, existe $\alpha_0 \in \mathbb{K}$ tal que $\langle u - \alpha_0 v, v\rangle = 0$.

Prova: Supondo que $\exists \alpha_0 \in \mathbb{K}, \langle u - \alpha_0 v, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle - \alpha_0 \langle v, v \rangle = 0$. Portanto,

$$\alpha_0 = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2},$$

em que α_0 é o coeficiente de Fourier do vetor u sobre v. □

4.4.5 Projeção Ortogonal

4.15 Definição. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle , \rangle$ e $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ um conjunto ortonormal. A projeção ortogonal de um vetor $v \in V$ sobre $W = [v_1, \ldots, v_n]$ é o vetor:*

$$\text{proj}_W \, v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \ldots + \langle v, u_n \rangle u_n.$$

***Exemplo* 4.14.** Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $u = (2, 1)$ e $v = (1, 0)$. Determine a projeção ortogonal de u sobre v.

Solução:

$$\alpha_0 = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{2^2 + 0^2} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$\alpha_0 \cdot v = 1 \cdot (2, 0) = (2, 0) = v.$$

$$\text{proj}_v \, u = \alpha_0 v = 1 \cdot v = v.$$

***Nota* 37.** Se o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for ortogonal,

$$\text{proj}_W \, v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{||u_1||^2} \cdot u_1 + \ldots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{||u_n||^2} \cdot u_n.$$

***Exemplo* 4.15.** Sejam $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^3$ e $v = (2, 1, -1)$. Determine $\text{proj}_W \, v$.

Solução: Observe que $\langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0$, ou seja, estes vetores são ortogonais. Assim,

$$\text{proj}_W \, v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{||u_1||^2} \cdot u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{||u_2||^2} \cdot u_2,$$

em que estamos denominando $u_1 = (1, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 0, 1)$.

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle (2, 1, -1), (1, 1, 0) \rangle = 2 + 1 = 3$$

$$\langle v, u_2 \rangle = \langle (2, 1, -1), (0, 0, 1) \rangle = -1$$

$$||u_1||^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = \langle (1, 1, 0), (1, 1, 0) \rangle = 1 + 1 = 2$$

$$||u_2||^2 = \langle u_2, u_2 \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1$$

Portanto,

$$\text{proj}_W \, v = \frac{3}{2} \cdot (1, 1, 0) - 1 \cdot (0, 0, 1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right)$$

4.16 Proposição. Seja $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto ortonormal de um espaço vetorial V com produto interno $\langle , \rangle$. Então, para qualquer $u \in V$, o vetor $v = u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \ldots - \langle u, u_n \rangle u_n$ é ortogonal a todo vetor do subespaço $[u_1, \ldots, u_n]$.

***Nota* 38.** $S = [u_1, \ldots, u_n]$, então $v = u - \text{proj}_S \, u$.

***Exemplo* 4.16.** Seja $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ e $u = (1,2,3)$. Determine o vetor v que é ortogonal aos vetores em S.

Solução:

$$\begin{aligned} v &= u - \langle u, u_1\rangle u_1 - \langle u, u_2\rangle u_2 \\ &= (1,2,3) - 1\cdot(1,0,0) - 2\cdot(0,1,0) = (0,0,3) \end{aligned}$$

4.17 Proposição. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle,\rangle$ e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortogonal de V. Então para todo $u \in V$ temos:

$$u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{||v_1||^2}\cdot v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{||v_2||^2}\cdot v_2 + \ldots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{||v_n||^2}\cdot v_n.$$

Prova: Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V (ortogonal). Se $u \in V \Rightarrow u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.

$$\begin{aligned} \langle u, v_1\rangle &= \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v_1\rangle \\ \langle u, v_1\rangle &= \alpha_1\langle v_1, v_1\rangle + \ldots + \alpha_n\langle v_n, v_1\rangle \\ \langle u, v_1\rangle &= \alpha_1 ||v_1||^2 \\ \alpha_1 &= \frac{\langle u, v_1\rangle}{||v_1||^2}. \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que

$$\alpha_i = \frac{\langle u, v_1\rangle}{||v_i||^2}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

□

***Nota* 39.**

1. O vetor u nada mais é que a soma das projeções ortogonais de u sobre os vetores da base B.
2. Se B é ortonormal então $u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \ldots \langle u, v_n\rangle v_n$, pois, $||v_i|| = 1, i = 1, \ldots, n$.

***Exemplo* 4.17.** Consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ o seguinte produto interno: $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$. Verifique se u e v são ortogonais em relação a este produto interno.

Solução:

(a) $u = (1,1)$ e $v = (2,-1)$; $\langle u, v\rangle = 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot(-1) = 2 - 2 = 0$. Portanto u e v são ortogonais com relação ao produto interno dado.

(b) $u = (2,1)$ e $v = (2,-i)$; $\langle u, v\rangle = 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot(-i) = 4 - 2i \neq 0$. Portanto u e v são ortogonais com relação ao produto interno dado.

***Exemplo* 4.18.** Determinar **m** de modo que $u = (m+1, 2)$ e $v = (-1, 4) \in \mathbb{R}^2$ sejam ortogonais com relação ao produto interno usual.

Solução: $\langle u, v\rangle = (m+1)\cdot(-1) + 2\cdot 4 = 0 \Rightarrow -m - 1 + 8 = 0 \Rightarrow m = 7$

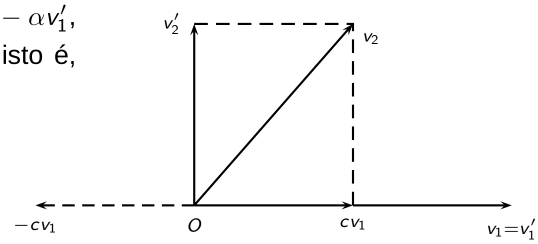
4.4.6 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Todo espaço vetorial de dimensão finita admite uma base ortogonal. Descreveremos um processo que, a partir de uma base qualquer de um espaço vetorial, iremos obter uma base ortonormal.

Vamos dar uma descrição deste processo de ortonormalização para uma base $B = \{v_1, v_2\}$.

Seja $v_1' = v_1$. Precisamos encontrar a partir de v_2 um novo vetor v_2 ortogonal a v_1', isto é, $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$. Para isto tomamos $v_2' = v_2 - \alpha v_1'$, em que α é o número escolhido de modo que $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, isto é, $\langle v_2 - \alpha v_1', v_1' \rangle = 0$. Isto significa que $\alpha = \dfrac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$.

Ficamos então com $v_1' = v_1$. Logo, $v_2' = v_2 - \dfrac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$.



Note que v_2' foi obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de v_1', $\dfrac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} \cdot v_1'$, e que v_1' e v_2' são vetores ortogonais não nulos. Podemos então normalizá-los,

$$u_1 = \frac{v_1'}{||v_1'||} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{v_2'}{||v_2'||}$$

obtendo uma base $B' = \{u_1, u_2\}$ que é ortonormal.

***Exemplo* 4.19.** Ortonormalizar a base $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$, pelo processo de Gram-Schmidt.

Solução: Vamos denominar de $B' = \{g_1, g_2, g_3\}$ a base ortonormalizada que desejamos encontrar. Seja $u_1' = u_1 = (1, 1, 1)$. Temos então que:

$$g_1 = \frac{u_1'}{||u_1'||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Segue que $u_2' = u_2 - \dfrac{\langle u_2, u_1' \rangle}{\langle u_1', u_1' \rangle} u_1'$ e, portanto,

$$u_2' = (1, -1, 1) - \frac{\langle (1,-1,1), (1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle}(1,1,1) = (1,-1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$g_2 = \frac{u_2'}{||u_2'||} = \frac{\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)}{2\frac{\sqrt{6}}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Prosseguindo, o vetor $u_3' = u_3 - \dfrac{\langle u_3, u_2' \rangle}{\langle u_2', u_2' \rangle} u_2'$ - $\dfrac{\langle u_3, u_1' \rangle}{\langle u_1', u_1' \rangle} u_1'$ e, portanto,

$$u_3' = (-1, 0, 1) - \frac{\left\langle (-1,0,1), \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\rangle} \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right) - \frac{\langle (-1,0,1), (1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle}(1,1,1)$$

$$u_3' = (-1, 0, 1) - 0 - 0 = (-1, 0, 1)$$

$$g_3 = \frac{u_3'}{||u_3'||} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Portanto,

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

é a base ortonormal procurada.

4.4.7 Complemento Ortogonal

4.18 Definição. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e $S \subset V, S \neq \emptyset$ (não necessariamente um subespaço). Chama-se complemento ortogonal de S ao seguinte conjunto:*

$$S^\perp = \{v \in V | \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in S\}.$$

***Exemplo* 4.20.** Considerando $S = \{u = (x, x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$, determine $S^\perp$.

Solução: $S^\perp = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | \langle v, u\rangle = 0\}, \forall\ u \in S$. Façamos o produto interno $\langle v, u\rangle = \langle (x, y), (x, x)\rangle = x^2 + xy = 0 \Rightarrow x(x + y) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -y$. Se $x = 0$ temos que $S = \{(0, 0)\} \Rightarrow S^\perp = V$. Se $x = -y$ temos que $S^\perp = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$.

***Exemplo* 4.21.** Seja $S = \{u = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | x, y \in \mathbb{R}\}$, determine $S^\perp$.

Solução: $\langle v, u\rangle = \langle (x, y, z), (x, y, 0)\rangle = x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow x = y = 0$. Portanto, $S^\perp = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in \mathbb{R}\}$.
S é o plano XOY. $S^\perp$ é o eixo Oz.

4.19 Proposição. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e $S \subset V, S \neq \emptyset$. Então $S^\perp$ é um subespaço de V.

Prova: $S^\perp = \{v \in V ; \langle v, w\rangle = 0, \forall\ w \in S\}$.

i. $\overline{0} \in S^\perp$; $\langle u, \overline{0}\rangle = 0, \forall\ u \in S$

ii. Considere $u, v \in S^\perp$. Mostremos que $u + v \in S^\perp$. $u \in S^\perp \Rightarrow \langle u, w\rangle = 0; \forall\ w \in S$. $v \in S^\perp \Rightarrow \langle v, w\rangle = 0; \forall\ w \in S$. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle v, w\rangle = 0 + 0 = 0 \in S^\perp ; \forall\ w \in S$

iii. Seja $u \in S^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\langle \alpha u, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle = \alpha \cdot 0 = 0 \in S^\perp .$$

Logo, $S^\perp$ é um subespaço.

□

4.20 Proposição. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Se W é subespaço de V, então $V = W \oplus W^\perp$.

Prova: Devemos tomar um elemento de V e escrever como soma de W e $W^\perp$. Seja $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ base ortonormal de W. Qualquer que seja $v \in V$ o vetor $u = v - \langle v, u_1\rangle u_1 - \ldots - \langle v, u_r\rangle u_r$, é ortogonal a todo vetor de W logo $u \in W^\perp$ pela proposição 4.16, logo, $u \in W^\perp$. Qualquer que seja $v \in V$, exibindo o valor de v em temos da base B.

$$v = u + \langle v, u_1\rangle u_1 + \ldots + \langle v, u_r\rangle u_r .$$

Portanto, $V = W + W^\perp$.
Agora, para finalizar a prova vamos mostrar que a soma é direta, ou seja, devemos demonstrar que $W \cap W^\perp = \{\overline{0}\}$. Tomemos $v \in W \cap W^\perp \Rightarrow v \in W, v \in W^\perp$ e $v \in V$.
$v \in W^\perp \Rightarrow \langle v, w\rangle = 0, \forall\ w \in W$, mas $v \in W$. Logo, $\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = \overline{0}$ (vetor nulo). Então,

$$V = W \oplus W^\perp .$$

□

4.21 Proposição. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Se S_1 e $S_2 \subset V$, então:

i. $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$

ii. $[S_1^{\perp}]^{\perp} = S_1$.

Prova: i. Seja $v \in S_2^{\perp} \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0, \forall\ w \in S_2$. Como $S_1 \subset S_2 \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0, \forall\ w \in S_1 \Rightarrow v \in S_1^{\perp} \Rightarrow S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$.
ii. $S_1 \subset [S_1] \Rightarrow [S_1]^{\perp} \subset S_1^{\perp}$ pelo que foi demonstrado no item i. Mostremos que $S_1^{\perp} \subset [S_1]^{\perp}$.
Seja $S_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, se $v \in S_1^{\perp} \Rightarrow \langle v, u_i \rangle = 0, i = 1, \ldots, n$. Qualquer que seja $w \in [S_1] \Rightarrow w = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, então

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle v, \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \rangle \\ &= \overline{\alpha_1}\langle v, u_1 \rangle + \ldots + \overline{\alpha_n}\langle v, u_n \rangle \\ \langle v, w \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Qualquer que seja $w \in [S_1] \Rightarrow v \in [S_1]^{\perp} \Rightarrow S_1^{\perp} \subset [S_1]^{\perp}$. Portanto, $[S_1]^{\perp} = S_1^{\perp}$. □

4.5 Exercícios Propostos

4.1. Considere o produto interno $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\ dt$ em $P_2(\mathbb{R})$. Sejam $f(t) = t + 2$ e $g(t) = t^2 - 2t + 3$. Determine:

(a) $\langle f, g \rangle$; (b) $||f||$; (c) $||g||$.

4.2. Seja a função $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + 5y_1y2 + 2z_1z_2$.

(a) Verifique se f é um produto interno;

(b) A partir da base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ache uma base ortonormal.

4.3. Seja V um espaço vetorial euclidiano. Dados $u, v \in V(v \neq 0)$ e $k = \dfrac{\langle u, v \rangle}{||v||^2}$. Mostrar que $u - kv$ é ortogonal a v.

4.4. Determinar $m \in \mathbb{R}$ a fim de que sejam ortogonais os vetores $u = (1, m+1, m)$ e $v = (m-1, m, m+1)$ do $\mathbb{R}^3$.

4.5. Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = 0\}$. Determinar uma base ortonormal de W.

4.6. Determinar a projeção ortogonal de $u = (1, 1)$ sobre o subespaço $V = [(1, 3)]$ do $\mathbb{R}^2$.

4.7. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$.

(a) Encontre $S^{\perp}$;

(b) Encontre uma base ortogonal para S e $S^{\perp}$.

4.6 Gabarito

4.1 (a) $\frac{23}{4}$; (b) $\sqrt{\frac{19}{3}}$; (c) $\sqrt{\frac{83}{15}}$. 4.2 (a) f é produto interno. (b) A base ortonormal é $\left\{(1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$. 4.4 $m = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ 4.5 $\left\{(0,0,1), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\}$ é uma base ortonormal de W. 4.6 A projeção é o vetor $\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 4.7 (a) $S^{\perp} = [(-1, 1, 1)]$; (b) não é subespaço.

Baruch Spinoza e Idealismo

Introdução

O pensamento de Descartes exercerá uma influência vasta no mundo cultural francês e europeu, diretamente até Kant e indiretamente até Hegel. E exerceu tal influência não tanto como sistema metafísico, quanto especialmente pelo espírito crítico, pelo método racionalista, implícito nas premissas do sistema e realizado apenas parcialmente pelo filósofo. O desenvolvimento lógico do cartesianismo é representado por alguns grandes pensadores originais: Spinoza, Malebranche, Leibniz. Spinoza é a mais coerente e extrema expressão do racionalismo moderno depois do fundador e antes de Kant; Malebranche e Leibniz encontram, ao contrário, nas suas preocupações práticas, religiosas e políticas, limitações ao desenvolvimento lógico e despreocupado do racionalismo. Ladeia estes três pensadores uma turma numerosa de cartesianos mais ou menos ortodoxos, particularmente na França na segunda metade do século XVII. Significativa é a influência que o criticismo e o racionalismo cartesianos exerceram sobre a cultura do século de Luís XIV, o século de ouro da civilização francesa; sobre a arte de Racine e de La Fontaine, sobre a poética de Boileau, a ética de La Bruyère, o pensamento de Bayle.

Descartes teve seguidores em determinados meios religiosos de orientação platônico - agostiniana, mais ou menos ortodoxos. Os dois centros principais desse sincretismo são representados pelo Jansenismo e pelo Oratório. Brás Pascal, porém, (se bem que, em parte, jansenista), grande físico e matemático, mas de um profundo sentimento religioso e cristão, parece ter tido intuição da falha da filosofia cartesiana. À razão matemática, científica - espírito geométrico - que vale para o mundo natural, mas não chega até Deus, contrapõe a razão integral - *esprit de finesse* - que leva até o cristianismo. Descartes teve numerosos adversários e críticos no campo filosófico, entre os quais Hobbes. Entretanto, as oposições maiores contra o cartesianismo surgiram no ambiente eclesiástico e político, quer católico quer protestante. Nesses ambientes, houve a intuição de um perigo revolucionário para a religião e a ordem social, por causa do criticismo, mecanismo e infinidade do universo, próprios daquela filosofia. E, no entanto, o cartesianismo forjou a mentalidade (racionalista-matemática) dos maiores filósofos até Kant. E também propôs os grandes problemas em torno dos quais girou a especulação desses filósofos, a saber: a relação entre substância finita de um lado, e entre espírito e matéria do outro. Daí surgiram o ontologismo e o ocasionalismo de Malebranche, a harmonia preestabelecida de Leibniz e o panteísmo psicofísico de Spinoza.

Baruch Spinoza (1.632 -1.677)

Baruch Spinoza nasceu em Amsterdam em 1.632, filho de hebreus portugueses, de modesta condição social, emigrados para a Holanda. Recebeu uma educação hebraica na academia israelita de Amsterdam, com base especialmente nas Sagradas Escrituras. Demonstrando muita inteligência, foi iniciado na filosofia hebraica (medieval-neoplatônico-panteísta) e destinado a ser rabino Segundo o historiador de filosofia Émile Brehier, não há doutrina que tenha excitado mais entusiasmo e também indignação do que a de Spinoza; para seus contemporâneos, Spinoza é a negação da Providência, autor de um panteísmo que submerge o indivíduo.

Como ocorre sempre, os contemporâneos se impressionam mais pelas negações de um sistema do que pelas afirmações. Tomada em conjunto, a doutrina spinozista é uma doutrina da salvação pelo conhecimento de Deus. Para Spinoza, o fim da filosofia é "buscar um bem capaz de comunicar-se, cuja descoberta fará desfrutar eternamente uma alegria contínua e suprema".

Baruch (Benedictus, em latim) Spinoza era de família judia de origem portuguesa. Seu pai era um comerciante abastado. Criado dentro do judaísmo, Baruch estudou a Bíblia Sagrada e o Talmude, o livro dos ensinamentos rabínicos. Entre os anos de 1.654 e 1.656, dirigiu os negócios de sua família, mas, em junho desse ano, foi acusado de heresia e excomungado, tendo de abandonar a comunidade judaica. Mudou-se, então, para Leyden e depois para Haia, onde passou a viver de seu trabalho como polidor de lentes.

Em 1.633, Spinoza publicou "Princípios da Filosofia de Descartes", obra expositiva dirigida a um jovem discípulo. Certamente já trabalhava, nessa época, na sua "Ética", obra-prima que só seria publicada postumamente.

Vivendo num período em que os princípios de tolerância da sociedade holandesa estavam ameaçados, Spinoza preferiu trabalhar no seu "Tratado Teológico-político". Essa obra foi publicada anonimamente em 1.670, causando escândalo. Em 1.673, foi convidado pelo rei Luís II a permanecer na França, recebendo uma pensão. Uma cátedra para lecionar na Universidade de Heidelberg lhe foi oferecida e também recusada. Spinoza preferiu a independência para elaborar sua obra.

Levou uma vida sóbria, limitada por sua saúde frágil.e faleceu em 1.677, aos 44 anos. Em sua obra mais importante, "Ética", o filósofo demonstrou, à maneira dos geômetras, a inteligibilidade de Deus. Segundo ele, espírito e matéria seriam apenas dois atributos da substância única, divina, de infinitos atributos. O pensamento de Baruch Spinoza exerce ainda hoje considerável influência.

Spinoza deixou como legado, ainda, a "Reforma do Entendimento", o "Tratado Político" e uma numerosa e rica correspondência.

O racionalismo cartesiano é levado a uma rápida, lógica, extrema conclusão por Spinoza. O problema das relações entre Deus e o mundo é por ele resolvido em sentido monista: de um lado, desenvolvendo o conceito de substância cartesiana, pelo que há uma só verdadeira e própria substância, a divina; de outro lado introduzindo na corrente racionalista-cartesiana uma preformada concepção neoplatônica de Deus, a saber, uma concepção panteísta-emanatista. O problema, pois, das relações entre o espírito e a matéria é resolvido por Spinoza, fazendo da matéria e do espírito dois atributos da única substância divina. Une os dois na mesma substância segundo um paralelismo psicofísico, uma animação universal, uma forma de pampsiquismo. Em geral, pode-se dizer que Descartes fornece a Spinoza o elemento arquitetônico, lógico-geométrico, para a construção do seu sistema, cujo conteúdo monista, em parte deriva da tradição neoplatônica, em parte do próprio Descartes.

Os demais racionalistas de maior envergadura da corrente cartesiana se seguem, cronologicamente, depois de Spinoza; entretanto, logicamente, estão antes dele, pois não têm a ousadia - em especial Malebranche - de chegar até às extremas conseqüências e conclusões racionalista-monista, exigidas pelas premissas cartesianas, detidos por motivos práticos-religiosos e morais, que não se encontram em Spinoza. Com isto não se excluem, por parte deles, desenvolvimentos em outro sentido. Por exemplo, não se excluem os desenvolvimentos idealistas do fenomenismo racionalista por parte de Leibniz.

Vida e Obras

Baruch Spinoza nasceu em Amsterdam, em 1.632, filho de hebreus portugueses, de modesta condição social, emigrados para a Holanda. Recebeu uma educação hebraica na academia israelita de Amsterdam, com base especialmente nas Sagradas Escrituras. Demonstrando muita inteligência, foi iniciado na filosofia hebraica (medieval-neoplatônico-panteísta) e destinado a ser rabino. Mas, depois de se manifestar o seu racionalismo e tendo ele recusado qualquer retratação, foi excomungado pela Sinagoga em 1.656. Também as autoridades protestantes o desterraram como blasfemador contra a Sagrada Escritura. Spinoza reitrou-se, primeiro, para os arredores de Amsterdam, em seguida para perto de Leida e enfim refugiou-se em Haia. Aos vinte e cinco anos de idade esse filósofo, sem pátria, sem família, sem saúde, sem riqueza, se acha também isolado religiosamente.

Os outros acontecimentos mais notáveis na formação espiritual especulativa de Spinoza são: o contacto com Francisco van den Ende, médico e livre pensador; as relações travadas com alguns meios cristão-protestantes. Van den Ende iniciou-o no pensamento cartesiano, nas línguas clássicas, na cultura da Renascença; e nos meios religiosos holandeses aprendeu um cristianismo sem dogmas, de conteúdo essencialmente moralista. Além destes fatos exteriores, nada encontramos de notável exteriormente na breve vida de Spinoza, inteiramente dedicada à meditação filosófica e à redação de suas obras. Provia pois às suas limitadas necessidades materiais, preparando lentes ópticas para microscópios e telescópios, arte que aprendera durante a sua formação rabínica; e também aceitando alguma ajuda do pequeno grupo de amigos e discípulos. Para não comprometer a sua independência especulativa e a sua paz, recusou uma pensão oferecida pelo "grande Condé" e uma cátedra universitária em Heidelberg, que lhe propusera Carlos Ludovico, eleitor palatino.

Uma tuberculose enfraquecera seu corpo. Após alguns meses de cama, Spinoza faleceu aos quarenta e quatro anos de idade, em 1.677, em Haia. Deixou uma notável biblioteca filosófica; mas a sua herança mal chegou para pagar as despesas do funeral e as poucas dívidas contraídas durante a enfermidade. Um traço característico e fundamental do caráter de Spinoza é a sua concepção prática, moral, de filosofia, como solucionadora última do problema da vida. E, ao mesmo tempo, a sua firme convicção de que a solução desse problema não é possível senão teoreticamente, intelectualmente, através do conhecimento e da contemplação filosófica da realidade. As obras filosóficas principais de Spinoza são: a *Ethica* (publicada postumamente em Amsterdam, em 1.677), que constitui precisamente o seu sistema filosófico; o *Tractatus theologivo-politicus* (publicado anônimo em Hamburgo, em 1.670), que contém a sua filosofia religiosa e política. A princípio desconhecido e atacado, o pensamento de Spinoza acabou por interessar e influenciar particularmente a cultura moderna depois de Kant (Lessing, Goethe, Schelling, Hegel, Schleiermacher, etc.), proporcionando ao idealismo o elemento metafísico monista, naturalmente filtrado através da crítica kantiana.

O Pensamento: Deus

A teologia de Spinoza é contida, substancialmente, no primeiro livro da *Ethica* (*De Deo*). Spinoza quereria deduzir de Deus racionalmente, logicamente, geometricamente toda a realidade, como aparece pela própria estrutura exterior da *Ethica ordine geometrico demonstrata*. Não nos esqueçamos de que o Deus spinoziano é a substância única e a causa única; isto é, estamos em cheio no panteísmo. A substância divina é eterna e infinita: quer dizer, está fora do tempo e se desdobra em número infinito de perfeições ou atributos infinitos. Desses atributos, entretanto, o intelecto humano conhece dois apenas: o espírito e a matéria, a *cogitatio* e a *extensio*. Descartes diminuiu estas substâncias, e no monismo spinoziano descem à condição de simples atributos da substância única. Pensamento e extensão são expressões diversas e irredutíveis da substância absoluta, mas nela unificadas e correspondentes, graças à doutrina spinoziana do paralelismo psicofísico.

A substância e os atributos constituem a *natura naturans*. Da *natura naturans* (Deus) procede o mundo das coisas, isto é, os modos. Eles são modificações dos atributos, e Spinoza chama-os *natura naturata* (o mundo). Os modos distinguem-se em primitivos e derivados. Os modos primitivos representam as determinações mais imediatas e universais dos atributos e são eternos e infinitos: por exemplo, o *intellectus infinitus* é um modo primitivo do atributo do pensamento, e o *motus infinitus* é um modo primitivo do atributo extensão. As leis do paralelismo psicofísico, que governam o mundo dos atributos, regem naturalmente todo o mundo dos modos, quer primitivos quer derivados. Cada corpo tem uma alma, como cada alma tem um corpo; este corpo constituiria o conteúdo fundamental do conhecimento da alma, a saber: a cada modo de ser e de operar na extensão corresponde um modo de ser e de operar do pensamento. Nenhuma ação é possível entre a alma e o corpo - como dizia também Descartes - e como Spinoza sustenta até o fundo.

A lei suprema da realidade única e universal de Spinoza é a necessidade. Como tudo é necessário na *natura naturans*, assim tudo também é necessário na *natura naturata*. E igualmente necessário é o liame que une entre si *natura naturans* e *natura naturata*. Deus não somente é racionalmente necessitado na sua vida interior, mas se manifesta necessariamente no mundo, em que, por sua vez, tudo é necessitado, a matéria e o espírito, o intelecto e a vontade.

O Homem

Do primeiro livro da *Ethica* - cujo objeto é Deus - Spinoza passa a considerar, no segundo livro (De mente), o espírito humano, ou, melhor, o homem integral, corpo e alma. A cada estado ou mudança da alma, corresponde um estado ou mudança do corpo, mesmo que a alma e o corpo não possam agir mutuamente uma sobre o outro, como já se viu. Não é preciso repetir que, para Spinoza, o homem não é uma substância. A assim chamada alma nada mais é que um conjunto de modos derivados, elementares, do atributo pensamento da substância única. E, igualmente o corpo nada mais é que um complexo de modos derivados, elementares, do atributo extensão da mesma substância. O homem, alma e corpo, é resolvido num complexo de fenômenos psicofísicos. Mesmo negando a alma e as suas faculdades, Spinoza reconhece várias atividades psíquicas: *atividade teorética* e *atividade prática*, cada uma tendo um grau sensível e um grau racional.

A respeito do conhecimento sensível (*imaginatio*), sustenta Spinoza que é ele inteiramente subjetivo: no sentido de que o conhecimento sensível não representa a natureza da coisa conhecida, mas oferece uma representação em que são fundidas as qualidades do objeto conhecido e do sujeito que conhece e dispõe tais representações numa ordem fragmentária, irracional e incompleta. Spinoza distingue, pois, o conhecimento racional em dois graus: *conhecimento racional universal* e *conhecimento racional particular*. A ordem oferecida pelo conhecimento racional particular nada mais é que a substância divina; abrange ela, na sua unidade racional, os atributos infinitos e os infinitos modos que a determinam. E desse conhecimento racional intuitivo, místico, derivam necessariamente a felicidade e virtude supremas. Das limitações do conhecimento sensível decorrem o sofrimento e a paixão, dada a universal correspondência spinoziana entre teorético e prático.

Visto o paralelismo psicofísico de Spinoza, é claro que o conhecimento, no sistema spinoziano, não é constituído pela relação de adequação entre a mente e a coisa, mas pela relação de adequação da mens do sujeito que conhece a mens do objeto conhecido.

A Moral

Como é sabido, Spinoza dedica ao problema moral e à sua solução os livros III, IV e V da Ethica. No livro III faz ele uma história natural das paixões, isto é, considera as paixões teoricamente, cientificamente, e não moralisticamente. O filósofo deve *humanas actiones non ridere, non lugere, neque detestari, sed intelligere*; assim se exprime Spinoza energicamente no proêmio ao II livro da *Ethica*. Tal atitude rigidamente científica, em Spinoza, é favorecida pela concepção universalmente determinista da realidade, em virtude da qual o mecanismo das paixões humanas é necessário como o mecanismo físico-matemático, e as paixões podem ser tratadas com a mesma serena indiferença que as linhas, as superfícies, as figuras geométricas.

Depois de nos ter oferecido um sistema do mecanismo das paixões no IV livro da *Ethica*, Spinoza esclarece precisamente e particularmente a escravidão do homem sujeito às paixões. Essa escravidão depende do erro do conhecimento sensível, pelo que o homem considera as coisas finitas como absolutas e, logo, em choque entre si e com ele. Então a libertação das paixões dependerá do conhecimento racional, verdadeiro; este conhecimento racional não depende, entretanto, do nosso livre-arbítrio, e sim da natureza particular de que somos dotados. No V e último livro da *Ethica*, Spinoza esclarece, em especial, a condição do sábio, libertado da escravidão das paixões e da ignorância. O sábio realiza a felicidade e a virtude simultânea e juntamente com o conhecimento racional. Visto que a felicidade depende da ciência, do conhecimento racional intuitivo - que é, em definitivo, o conhecimento das coisas em Deus - o sábio, aí chegado, amará necessariamente a Deus, causa da sua felicidade e poder. Tal amor intelectual de Deus é precisamente o júbilo unido com a causa racional que o produz, Deus. Este amor do homem para com Deus, é retribuído por Deus ao homem; entretanto, não é um amor como o que existe entre duas pessoas, pois a personalidade é excluída da metafísica spinoziana, mas no sentido de que o homem é idêntico panteisticamente a Deus. E, por conseguinte, o amor dos homens para com Deus é idêntico ao amor de Deus para com os homens, que é, pois, o amor de Deus para consigo mesmo (por causa precisamente do panteísmo).

Chegado ao conhecimento e à vida racionais, o sábio vive já na eternidade, no sentido de que tem conhecimento eterno do eterno. A respeito da imortalidade da alma, devemos dizer que é excluída naturalmente por Spinoza como sobrevivência pessoal porquanto pessoa e memória pertencem à *imaginação*. A imortalidade, então, não poderá ser entendida senão como a eternidade das idéias verdadeiras, que pertencem à substância divina. De sorte que imortais, ou eternas, ou pela máxima parte imortais, serão as almas ou os pensamentos dos sábios, ao passo que às almas e aos pensamentos dos homens vulgares, como que limitados ao conhecimento e à vida sensíveis, é destinado o quase total aniquilamento no sistema racional da substância divina.

A Política e a Religião

Spinoza tratou particularmente do problema político e religioso no *Tractatus theologico-politicus*. Considera ele o Estado e a Igreja como meios irracionais para o advento da racionalidade. As ações feitas - ou não feitas - em vista das penas ou dos prêmios temporais e eternos, ameaçados ou prometidos pelo estado e pela igreja, dependem do temor e da esperança, que, segundo Spinoza, são paixões irracionais. Elas, entretanto, servem para a tranquilidade do sábio e para o treinamento do homem vulgar. No Estado de natureza, isto é, antes da organização política, os homens se encontravam em uma guerra perpétua, em uma luta de todos contra todos. É o próprio egoísmo que impede os homens a se unirem, a se acordarem entre si numa espécie de pacto social, pelo qual prometem renunciar a toda violência, auxiliando-se mutuamente. No entanto, não basta o pacto apenas: precisa o homem do arrimo da força para sustentar-se. De fato, mesmo depois do pacto social, os homens não cessam de ser, mais ou menos, irracionais e, portanto, quando lhes fosse cômodo e tivessem a força, violariam, sem mais, o pacto. Nem há quem possa opor-se a eles, a não ser uma força superior, porquanto o direito sem a força não tem eficácia. Então, os componentes devem confiar a um poder central a força de que dispõem, dando-lhe a incumbência e o modo de proteger os direitos de cada um. Só então o estado é verdadeiramente constituído. Entretanto, o Estado, o governo, o soberano podem fazer tudo o que querem: para isso têm o poder e, portanto, o direito, e se acham eles ainda no estado de pura natureza, do qual os súditos saíram.

O Estado, porém, não é dominador supremo, porquanto não é o fim supremo do homem. Seu fim supremo é conhecer a Deus por meio da razão e agir de conformidade, de sorte que será a razão a norma suprema da vida humana. O papel do Estado é auxiliar na consecução racional de Deus. Portanto, se o Estado se mantivesse na violência e irracionalidade primitivas, pondo obstáculos ao desenvolvimento racional da sociedade, os súditos - quando mais racionais e, logo, mais poderosos do que ele - rebelar-se-ão necessariamente contra ele, e o Estado cairá fatalmente. Faltando-lhe a força, faltar-lhe-á também o direito. E de suas ruínas deverá surgir um Estado mais conforme à razão. E, assim, Spinoza deduz do estado naturalista o Estado racional.

O outro grande instituto irracional a serviço da racionalidade é, segundo Spinoza, a religião, que representaria um sucedâneo da filosofia para o vulgo. O conteúdo da religião positiva, revelada, é racional; mas é a forma que seria absolutamente irracional, pois o conhecimento filosófico de Deus decairia em uma revelação mítica; a ação racional, que deveria derivar do conhecimento racional com a mesma necessidade pela qual a luz emana do sol, decairia no mandamento divino heterônomo, a saber, a religião positiva, revelada, representaria sensivelmente, simbolicamente, de um modo apto para a mentalidade popular, as verdades racionais, filosóficas acerca de Deus e do homem; tais verdades podem aproveitar ao bem desse último, quando encarnadas nos dogmas. Por conseguinte, o que vale nos dogmas não seria a sua formulação exterior, e sim o conteúdo moral; nem se deveria procurar neles sentidos metafísicos arcanos, porque o escopo dos dogmas é essencialmente prático a saber: induzir à submissão a Deus e ao amor ao próximo, na unificação final de tudo e de todos em Deus.

Atividade Orientada

A Atividade Orientada tem por objetivo constituir mais uma ferramenta de aprendizagem para os estudantes da FTC-EaD. Nela apresentaremos aspectos relevantes vistos durante o curso de Álgebra Linear. As definições, conceitos, estruturas modeladas, entre outros aspectos presentes na atividade, são vistas em nossa percepção importantes tanto ao profissional que futuramente, ou desde já, encontra-se exercendo o magistério no ensino médio quanto aos profissionais que desejam prosseguir estudos na área.

Bons Estudos!

5.1 Etapa 1

5.1.1. Ana e Beto estão planejando comprar frutas para a próxima semana. Cada um deles quer comprar algumas maçãs, tangerinas e laranjas, porém em quantidades diferentes. **A Tabela** 1 mostra o que eles pretendem comprar. Nas proximidades existem duas bancas de frutas - a do Sr. José e a de D. Vera - cujos preços estão apresentados na **Tabela** 2.

(a) Quanto gastarão Ana e Beto para fazer suas compras em cada uma das duas bancas?

(b) Dê a representação matricial do problema exposto, ou seja, a representação matricial do cálculo utilizado para saber quanto irá gastar Ana e Beto.

Tabela 1

	Maçãs	Tangerinas	Laranjas
Ana	6	3	10
Beto	4	8	5

Tabela 2

	Sr. José	D. Vera
Maçã	$ 0, 10	$ 0, 15
Tangerina	$ 0, 40	$ 0, 30
Laranja	$ 0, 10	$ 0, 20

5.1.2. Dada as matrizes $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ tal que $a_{ij} = 2i + 4j - 1$, $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \geq j \\ 0, & \text{se } i < j \end{cases}$ e $C^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = I_3$ $E = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Determine, se for possível:

(a) A^t (b) $\text{tr}(B)$ (c) $\text{tr}(E)$ (d) $(B + D) \cdot E$ (e) $D \cdot F$

5.1.3. Encontre x, y, z e w se:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x + y \\ z + w & 3 \end{bmatrix}$$

***Exemplo* 5.1.** *Uma matriz quadrada A chama-se matriz simétrica quando $A^t = A$, e chama-se matriz anti-simétrica quando $A^t = -A$. Acompanhe o exemplo resolvido abaixo para fins de orientação para as duas questões subsequentes. Calcule x, y e z de modo que $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ x & 3 & y \\ z & 4 & 5 \end{bmatrix}$ seja uma matriz simétrica.*

Solução: Utilizando a definição de simetria e de igualdade entre matrizes, obtemos:

$$M^t = M \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ x & 3 & y \\ z & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = 4 \text{ e } z = 2.$$

***Exemplo* 5.2.** *Calcule a, b e c de modo que $P = \begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ b & c-3 \end{bmatrix}$ seja uma matriz anti-simétrica.*

Solução:

$$P^t = -P \Rightarrow \begin{bmatrix} a-1 & b \\ 2 & c-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+1 & -2 \\ -2 & -c+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-1 = -a+1 \\ b = -2 \\ c-3 = -c+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

5.1.4. Determine, se for possível, o valor de x para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 1 \\ x^2 & 0 & -x \\ x+1 & x^3 & 0 \end{bmatrix}$ seja:

(a) simétrica

(b) anti-simétrica

***Exemplo* 5.3.** *Usando as operações elementares sobre linhas verifique se $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ é inversível e, em caso afirmativo, determine sua inversa.*

Solução: Temos abaixo dois blocos de matrizes, a esquerda, a matriz a qual desejamos saber se existe a inversa e determiná-la, e a direita, a matriz identidade. O conjunto de operações elementares que transformam a matriz da direita na matriz identidade, transformam simultaneamente a matriz identidade na inversa da nossa matriz em questão.

$$\underset{L_1 \to \frac{1}{2}L_1}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{L_3 \to L_3 - 3L_2}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim$$

$$\underset{L_3 \to -\frac{1}{4}L_3}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{1}{2} & -3 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{L_1 \to L_1 - L_3}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]} \sim \underset{L_2 \to L_2 - L_3}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Observe que as operações elementares sobre as linhas resultaram na matriz identidade. Portanto a matriz é inversível e a inversa é a matriz da direita representada por:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

5.1.5. Usando as operações elementares sobre linhas, verifique, em cada item, se A é inversível e, em caso afirmativo, determine sua inversa.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

***Exemplo* 5.4.** *Usando o método de Gauss, resolva o sistema de equações lineares* $\begin{cases} 3x + 3y + 3z & = & 3 \\ -x + y + z & = & -2 \\ 2x + y + z & = & 3 \end{cases}$. *Em seguida, determinar o posto da matriz ampliada e o posto da matriz dos coeficientes.*

Solução: É importante lembrar que $P(M)$ é o posto da matriz ampliada, $P(A)$ é o posto da matriz dos coeficientes e n é o número de incógnitas do sistema. Colocando o sistema na forma matricial e escalonando, obtemos:

$$\underset{L_1 \to \frac{1}{3}L_1}{\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]} \sim \underset{L_2 \to L_2 + L_1}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]} \sim \underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]} \sim$$

$$\underset{L_2 \to \frac{1}{2}L_2}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{L_3 \to L_3 + L_2}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Temos que $P(M) = 3$ e $P(A) = 2$. Portanto, $P(M) \neq P(A)$ e o sistema é impossível.

5.1.6. Usando o método de Gauss, resolva os seguintes sistemas de equações lineares. Em cada caso, determinar o posto da matriz ampliada e o posto da matriz dos coeficientes.

(a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

***Exemplo* 5.5.** *Determine os valores de* $\mathbf{a}$ *tais que o sistema* $\begin{cases} x + y + \mathbf{a}z & = & 1 \\ (\mathbf{a}-1)y + (1-\mathbf{a})z & = & 1 \\ (\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} - 2)z & = & 0 \end{cases}$ *tenha:*

- *solução única*
- *nenhuma solução*
- *mais de uma solução*

Solução: • Se $\mathbf{a} - 1 \neq 0$ e $\mathbf{a}^2 + \mathbf{a} - 2 \neq 0$, isto é, se $\mathbf{a} \neq 1$ e $\mathbf{a} \neq -2$, o sistema é escalonado com igual número de equações e incógnitas sendo, portanto, compatível e determinado, possuindo solução única.

• Se $\mathbf{a} = 1$, o sistema fica: $\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ 0y + 0z & = & 1 \\ 0z & = & 1 \end{cases}$ e é incompatível. Logo, não possui soluções.

• Se $\mathbf{a} = -2$, o sistema fica: $\begin{cases} x + y - 2z & = & 1 \\ -3y - 3z & = & 1 \\ 0z = 0 \end{cases}$ e é compatível e indeterminado. Logo, possui infinitas soluções.

5.1.7. Determine os valores de **a** tais que os sistemas

(a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+\mathbf{a}z=3 \\ x+\mathbf{a}y+3z=2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+2y+\mathbf{a}z=1 \\ 2x+4y+8z=3 \end{cases}$

tenham:

(i) solução única (ii) nenhuma solução (iii) mais de uma solução

***Exemplo* 5.6.** *Calcule o determinante da matriz* $M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Solução: Utilizando o teorema de Laplace para determinantes, escolhemos, estrategicamente, a segunda linha, por possuir maior número de zeros. Assim, necessitamos calcular apenas o cofator dos elementos não nulos, visto que, todos os outros são zero e anularão os seus respectivos cofatores. De fato,

$$\det(M) = 1\cdot c_{21} + 0\cdot c_{22} + 0\cdot c_{23} + 0\cdot c_{24} = c_{21} = (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 6 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 87 = -87.$$

5.1.8. Calcule o determinante das matrizes abaixo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

***Exemplo* 5.7.** *Calcular, se existir, a matriz inversa de* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *(usando sua adjunta) e use essa inversa para resolver* $AX = B$*, com* $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solução: Calculemos a matriz dos cofatores de A.

$$A' = \begin{bmatrix} c_{11} = (-1)^1+1\cdot|0| & c_{12} = (-1)^1+2\cdot|-1| \\ c_{21} = (-1)^2+1\cdot|1| & c_{22} = (-1)^2+2\cdot|1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz adjunta de A é igual a transposta da matriz dos cofatores, temos que: $\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. É do nosso conhecimento que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot \mathrm{adj}(A) = 1\cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}BX = A^{-1}B$, segue que:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.1.9. Calcular, se existir, a matriz inversa de A (usando sua adjunta) e use essa inversa para resolver o sistema $Ax = B$, nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

***Exemplo* 5.8.** *Utilizando a regra de Crammer resolva o sistema*

$$\begin{cases} x + y + z &= 6 \\ x - y - z &= -4 \\ 2x - y + z &= 1 \end{cases}$$

Solução: Calculemos o determinante da matriz dos coeficientes A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Como $\det(A) \neq 0$ o sistema possui solução única. Para calcular, A_x, A_y e A_z, substituamos a coluna relativa aos coeficientes de x, y e z, pela coluna da matriz dos termos independentes. Neste exemplo temos que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^t$ corresponde a matriz coluna dos coeficientes de x e $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}^t$ corresponde a matriz coluna dos termos independentes. Assim,

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

De maneira análoga,

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \text{ e } \det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Desta forma, temos que $x = \dfrac{A_x}{A} = \dfrac{-4}{-4} = 1$; $y = \dfrac{A_y}{A} = \dfrac{-12}{-4} = 3$ e $z = \dfrac{A_z}{A} = \dfrac{-8}{-4} = 2$.

5.1.10. Resolva o sistema abaixo pela Regra de Crammer.

(a) $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$

5.2 Etapa 2

***Exemplo* 5.9.** *Verifique se o conjunto* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 2x + z\}$ *é um subespaço do* $\mathbb{R}^3$.

Solução: i. Verifiquemos, inicialmente, se o vetor nulo do $\mathbb{R}^3$ pertence a este conjunto. $(0,0,0) \in V$, pois, $2x + z = 2 \cdot 0 + 0 = 0 = y$.
ii. Verifiquemos, agora, se para quaisquer $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ em V, $u+v \in V$. Lembrando que $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e que $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + z_1 \\ y_2 = 2x_2 + z_2 \end{cases}$, segue que $y_1 + y_2 = 2x_1 + z_1 + 2x_2 + z_2 = 2x_1 + 2x_2 + z_1 + z_2 = 2(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)$. Logo, temos que $u + v \in V$.
iii. Por fim, Dados $k \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y, z) \in V$, devemos verificar se o vetor $k \cdot v$, dado por $(kx, ky, kz) \in V$. Temos que a segunda coordenada do vetor v é expressa por $y = 2x + z$. Daí, verificando para o vetor $k \cdot v$, temos que a segunda coordenada deste é expressa por $ky = k \cdot (2x + z) = k \cdot 2x + k \cdot z = 2 \cdot (kx) + kz$. Logo, temos que o vetor $kv \in V$. De i, ii e iii, concluímos que V é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

5.2.1. Verifique se os seguintes conjuntos V abaixo são subespaços do $\mathbb{R}^3$?

(a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\}$

(b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y + z\}$

(c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 1\}$

(d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$

(e) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}\}$

***Exemplo* 5.10.** *Determine as equações que caracterizam o subespaço $W = [(2,0,2), (-2,0,-2), (2,4,2)]$ do $V = \mathbb{R}^3$, se possível. Verifique se W é um subespaço próprio de V.*

Solução: Vamos verificar se o subespaço W não corresponde ao próprio $\mathbb{R}^3$. Para isto, dado um elemento qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, devem existir α, β, γ tais que $(x, y, z) = \alpha(2,0,2) + \beta(-2,0,-2) + \gamma(2,4,2)$. Esta igualdade nos leva equivale ao sistema de equações (nas variáveis α, β e γ):

$$\begin{aligned} 2\alpha - 2\beta + 2\gamma &= x \\ 4\gamma &= y \\ 2\alpha 2\beta + 2\gamma &= z \end{aligned}$$

Escalonando o sistema, por meio da sua matriz ampliada, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & x \\ -2 & 0 & -2 & y \\ 2 & 4 & 2 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2 & y \\ 1 & -1 & 1 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 0 & z - x \end{array}\right].$$

Não precisamos terminar o escalonamento para concluir que, pela última linha, o sistema não pode ser possível e determinado, o que significa que W, de fato, não corresponde ao próprio $\mathbb{R}^3$, nem é vazio, sendo, portanto, um subespaço próprio de $\mathbb{R}^3$. Além disso, o sistema só tem solução se $z - x = 0$ (caso contrário, o mesmo seria impossível), sendo esta, portanto, a equação que o caracteriza. Podemos escrever, então que:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z - x = 0\}.$$

5.2.2. Determine as equações que caracterizam os seguintes subespaços, se possível. Verifique se W_i é um subespaço próprio de V_i.

(a) $V_1 = \mathbb{R}^2$, $W_1 = [(2,-2), (-1,1)]$;

(b) $V_2 = \mathbb{R}^3$, $W_2 = [(1,0,1), (-1,0,-1), (1,2,1)]$;

(c) $V_3 = \mathbb{R}^3$, $W_3 = [(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,1)]$.

***Exemplo* 5.11.** *Dados os subespaços $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 0\}$ do espaço $\mathbb{R}^3$, determinar os subespaço gerador de $U \cap V$ e $U + V$.*

Solução: $u = (x, y, z) \in U \cap V \Leftrightarrow u \in U$ e $u \in V \Leftrightarrow x + y = 0$ e $x = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Logo, $U \cap V = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\} = [(0, 0, 1)]$.
Buscando os geradores de $U + V$ temos que para o subespaço $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 0\}$ temos o seguinte subespaço gerador. Da equação $x + y = 0$ extraimos que $x = -y$ e, portanto, o subespaço $U = [(-y, y, z)]$, ou seja, $U = [y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1)]$. Da mesma maneira, para o subespaço $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$ temos que $V = [(0, y, z)]$, ou seja, $V = [y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)]$. Assim, o conjunto $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

***Nota* 40.** Para o exemplo acima, é pertinente a verificação se o conjunto é linearmente independente. Para tal, basta colocar os vetores em linha e escalonar. Se ao final do escalonamento nenhuma linha for nula, isto implica que o conjunto é linearmente independente. Se, porventura, uma das linhas linhas for nula, o conjunto formado pelos vetores não nulos restantes, também é um gerador.

5.2.3. Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços:

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 0$ e $x - 2y = 0\}$;

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - 3z = 0\}$;

(c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y = 0\}$;

(d) $U \cap V$;

(e) $V + W$.

***Exemplo* 5.12.** *No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere U o plano xy e W o plano yz. Verifique se $U \oplus V = \mathbb{R}^3$. Determine a dimensão de $U \cap V$.*

Solução: $U = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, b, c); b, c \in \mathbb{R}\}$. Então $\mathbb{R}^3 = U + W$, pois todo vetor de $\mathbb{R}^3$ é a soma de um vetor de U e um vetor de W. Todavia, $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de U e W, pois, tais somas não são únicas. Por exemplo, $(3, 5, 7) = (3, 1, 0) + (0, 4, 7)$ e também $(3, 5, 7) = (3, -4, 0) + (0, 9, 7)$. Podemos entender $U = [a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0)]$ ou $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e, da mesma forma, o conjunto $W = [b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)]$ ou $[(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Portanto, $\dim(U) = 2$ e $\dim(W) = 2$. O conjunto dos geradores de $U \cap W$ é $U \cap W = [(0, 1, 0)]$. Portanto, a dimensão de $U \cap W$ é 1. Verificando o teorema das dimensões dos subespaços de dimensão finita temos que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \Leftrightarrow 3 = 2 + 2 - 1$.

5.2.4. Sejam $S = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)]$ e $T = [(0, 1, -1), (1, 2, 1)]$ subespaços de $V = \mathbb{R}^3$.

(a) Verifique se $\mathbb{R}^3 = S + T$;

(b) Determine as dimensões de S, T e $S + T$.

(c) Utilize a proposição: "Se U e V são subespaços de um espaço vetorial W que tem dimensão finita, então $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$" e verifique se $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

5.2.5. Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo:

(a) Dois vetores são L.D. se, e somente se, um deles é múltiplo do outro;

(b) Um conjunto que contém um subconjunto de vetores L.D. é L.D;

(c) Os vetores $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ são L.I em relação ao espaço $M_{2\times 2}$

(d) Um subconjunto de um conjunto L.I pode ser L. D.

(e) Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ é L.I então $\{u_3, u_2, u_1\}$ é L. I.

(f) Se $w_1 \in [w_2, w_3]$ então $\{w_1, w_2, w_3\}$ é L. D.

5.2.6. Verifique se os conjuntos de vetores dados a seguir são L.I. ou L.D.

(a) $V = \mathbb{R}^2, S_1 = \{(2,5),(4,10)\}$

(b) $V = \mathbb{R}^3, S_2 = \{(1,0,5),(0,4,10),(0,1,-2),(1,-2,3)\}$

(c) $V = \mathbb{R}^3, S_3 = \{(1,1,1),(1,0,1)(1,0,-2)\}$

(d) $V = \mathbb{R}^3, S_4 = \{(1,1,1),(0,0,0)(1,0,-2)\}$

(e) $V = \mathbb{P}_3(t), S_5 = \{1-3t+2t^2-3t^3; -3+9t-6t^2+9t^3\}$

5.2.7. Verifique, em cada caso, se o conjunto dado é uma base para o respectivo espaço. Caso não seja base, justifique o porquê.

(a) $V = \mathbb{R}^2, S_1 = \{(1,-1),(-2,2)\}$

(b) $V = \mathbb{R}^3, S_2 = \{(1,0,5),(0,1,-2),(1,-2,3)\}$

(c) $V = \mathbb{R}^3, S_3 = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$

(d) $V = M_{2\times 3}\mathbb{R}(S_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

(e) $V = \mathbb{R}^2, S_1 = \{(1,3),(-2,2)\}$

5.2.8. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços:

$U = \{(x,y,z); x+y = 4x-z = 0\}$; $S = [(1,-1,2),(2,1,1)]$ e

$V = \{(x,y,z); 3x-y-z = 0\}$; $T = [(0,1,-1),(1,2,1)]$.

Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços V, T, $U \cap V$ e $S+T$.

***Exemplo* 5.13.** *Determinar o vetor-coordenada e a matriz coordenada de $v = (5,4,2)$ em relação à base $B = \{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$.*

Solução: Devemos encontrar escalares α, β, γ tais que:

$$(5,4,2) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,1,2) + \gamma(0,0,1), \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ 2\alpha + \beta = 4 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $\alpha = 5$, $\beta = -6$ e $\gamma = -1$. Portanto, $v_B = (5,-6,-1)$ e $v_B = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \end{bmatrix}^t$.

5.2.9. Determinar as coordenadas do vetor $u = (4,-5,3) \in \mathbb{R}^3$, em relação às seguintes bases:

(a) canônica

(b) $\{(1,1,1),(1,2,0),(3,1,0)\}$

***Exemplo* 5.14.** *Sejam $\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta_2 = \{(2,-1),(3,4)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Compute $[I]_{\beta_2}^{\beta_1}$.*

Solução: Para determinarmos a matriz de mudança da base β_1 para β_2 devemos escrever cada vetor da base β_2 como combinação linear dos vetores de β_1 e tomarmos os coeficientes de cada um para constituir as colunas da matriz pedida. Assim, temos

$$(1,0) = \alpha(2,-1) + \beta(3,4) \text{ e } (0,1) = \gamma(1,0) + \lambda(3,4).$$

Da primeira equação, determinando α e β, temos que: $\alpha = \dfrac{4}{11}$ e $\beta = \dfrac{1}{11}$, valores que formam a 1ª coluna de $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$. Da 2ª equação, determinando γ e λ, vem que: $\gamma = -\dfrac{3}{11}$ e $\lambda = \dfrac{2}{11}$ valores que constituem a 2ª coluna de $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$. Portanto,

$$[I]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{11} & -\dfrac{3}{11} \\ \dfrac{1}{11} & \dfrac{2}{11} \end{bmatrix}$$

5.2.10. Sejam $\beta_1 = \{(1,0),(0,2)\}$, $\beta_2 = \{(-1,0),(1,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Determine: (a) $[I]_{\beta_2}^{\beta_1}$ e (b) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$. (c) Verifique se as matrizes $[I]_{\beta_2}^{\beta_1}$ e $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$ são uma a inversa da outra.

5.3 Etapa 3

***Exemplo* 5.15.** *Verifique se a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y,z) = (-x,-y)$, é linear.*

Solução: Lembrando que uma aplicação $T : V \to W$ é linear se $T(u+v) = T(u) + T(v)$ e $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$. Portanto, considere $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$i.\, T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (-x_1-x_2, -y_1-y_2) = (-x_1,-y_1)+(-x_2,-y_2) = T(u)+T(v).$$

$$ii.\, T(\alpha \cdot u) = T(\alpha(x_1,y_1,z_1)) = T(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1) = (-\alpha \cdot x_1, -\alpha \cdot y_1) = \alpha \cdot (-x_1,-y_1) = \alpha \cdot T(u).$$

Portanto, T é linear.

5.3.1. Dentre as seguintes funções, verificar quais são lineares:

$$(a) T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array};$$

$$(b) T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (|x|,y) \end{array};$$

$$(c) T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ (x,y) & \mapsto & \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(d) T : \begin{array}{rcl} M_{2\times 3}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} & \mapsto & (a+e, c+f) \end{array}.$$

***Exemplo* 5.16.** *Qual a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que: $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-2) = 1$ e $T(0,0,1) = 2$? Em seguida, determine $T(1,0,-3)$.*

Solução: Façamos $(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,-2) + \gamma(0,0,1)$ e assim encontramos, após a computação dos cálculos, $\alpha = x$, $\alpha + \beta = y \Rightarrow \beta = y - x$ e $\gamma = z - 3x + 2y$. Segue que:

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) & = & x(1,1,1) + y - x(0,1,-2) + z - 3x + 2y(0,0,1) \\ T(x,y,z) & = & xT(1,1,1) + y - xT(0,1,-2) + z - 3x + 2yT(0,0,1) \\ T(x,y,z) & = & 3x + y - x + 2 \cdot (z - 3x + 2y) \\ T(x,y,z) & = & -4x + 5y + 2z \end{array}$$

e, portanto, $T(1,0,-3) = -4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -10$.

5.3.2. Determine: (a) a transformação linear definida por $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(0,0,1) = (3,3)$; (b) $T(1,0,0)$ e $T(0,1,0)$.

5.3.3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,0,0) = (3,4)$. Determine: (a) $T(x,y,z)$; (b) $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-3,-2)$; (c) $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (0,0)$.

***Exemplo* 5.17.** *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(x,y,z) = (x+2y, y-z, x+2z)$. Determine o $\ker(T)$ e a $\text{Im}(T)$. T é injetora? T é sobrejetora?*

Solução: Em busca de obtermos a imagem de T, primeiramente iremos extrair o conjunto de vetores que caracterizam a transformação T. Como $T(x,y,z) = (x+2y, y-z, x+2z)$ temos que: $x(1,0,1) + y(2,0,1) + z(0,-1,2)$. A imagem de T é o conjunto definido por $\text{Im}(T) = \{w \in W; T(v) = w;\ \text{para algum } v \in V\}$.

Agora colocaremos os vetores $(1,0,1),(2,0,1),(0,-1,2)$ em linha e escalonaremos com a finalidade de obter o menor subespaço gerador da imagem de T, ou seja, uma base para $\text{Im}(T)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $B_{(\text{Im}(T))} = \{(1,0,1),(0,-1,2)\}$.

Lembremos que se a dimensão do subespaço gerado $(\text{Im}(T))$ é igual a dimensão de contradomínio $\mathbb{R}^3$ da aplicação linear T, temos que a aplicação T é sobrejetora. Para o exercício em questão T não é sobrejetora, pois, $\dim(\text{Im}(T)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Em relação ao núcleo de T faz-se importante o conhecimento que: $\ker(T) = \{u \in V; T(u) = 0\}$, em que V é o domínio da transformação, e que T é injetora se, e somente se, $\ker(T) = \{\overline{0}\}$. Façamos $T(u) = 0$. Assim, encontraremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y &= 0 \\ y - z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{cases}$$

Colocando na forma matricial e escalonando para fins de encontrar a solução do mesmo, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{cases} x + 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases}$$

o que implica $x = 2z$ e $y = z$. Segue que um vetor genérico do núcleo de T é $(x,y,z) = (2z,z,z) = z(2,1,1)$. Logo, $B_{\ker(T)} = \{(2,1,1)\}$ e, conseqüentemente, T não é injetora.

Para finalizar, verifiquemos o **Teorema de Núcleo e Imagem** para este caso. Pelo Teorema

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Segue que $V = \mathbb{R}^3$. Logo, $\dim(V) = 3$. A imagem de T é o conjunto $\text{Im}(T) = \{v \in \mathbb{R}^3; T(u) = v\}$, tendo como uma de suas bases $B_{(\text{Im}(T))} = \{(1,0,1),(0,-1,2)\}$. Logo, $\dim(\text{Im}(T)) = 2$. O núcleo de T é o conjunto $\ker(T) = \{u \in \mathbb{R}^3; T(u) = 0\}$, tendo como uma de suas bases $B_{\ker(T)} = \{(2,1,1)\}$. Logo, $\dim(\ker(T)) = 1$. Segue que: $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \Leftrightarrow 3 = 1 + 2$.

5.3.4. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-2,3) = (-1,0,1)$ e $T(1,-2) = (0,-1,0)$.

(a) Determinar $T(x,y)$; (b) $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ (c) T é injetora? E sobrejetora?

5.3.5. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação tal que $T(e_1) = (1,-2,1)$, $T(e_2) = (-1,0,-1)$, $T(e_3) = (0,-1,2)$ e $T(e_4) = (1,-3,1)$, sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^4$. (a) Determinar o núcleo e a imagem de T; (b) Determinar bases para o núcleo e para a imagem; (c) Verificar o Teorema do núcleo e imagem.

5.3.6. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Sabendo-se que $\dim(V) = 5$ e $\dim(\ker(T)) \cap \operatorname{Im}(T) = 2$: (a) Encontre $\dim(\ker(T) + \operatorname{Im}(T))$, justificando; (b) T pode ser injetora? Justifique.

***Exemplo* 5.18.** *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(x,y,z) = (x+z, x-z, y+6z)$. Determine T^{-1}.*

Solução: Para mostrar que T é um isomorfismo, precisamos verificar as seguintes condições: i. T é linear; ii. T é bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora.
Mostrar que T é injetora é equivalente a mostrar que $\ker(T) = \{\overline{0}\}$. Desta forma,

$$T(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x+z, x-z, y+6z) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Logo, $T(0,0,0) = (0,0,0)$ e T é injetora.
Mostremos que T é sobrejetora.

$$T(x,y,z) = (x+z, x-z, y+6z) = x(1,1,0) + y(0,0,1) + z(1,-1,6).$$

Buscando obter o conjunto dos geradores da imagem de T, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O menor subespaço gerador de $\operatorname{Im}(T)$ é o conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Portanto, $\dim(\operatorname{Im}(T) = 3$. Logo, T é sobrejetora, pois, a dimensão da imagem de T é igual a dimensão do contradomínio $\mathbb{R}^3$, cuja dimensão sabemos que é 3.
Satisfeitas as condições i e ii, T é bijetora. Encontremos, a seguir, a inversa da transformação.
Sendo T definida como acima temos que:

$$\begin{array}{l} T(1,0,0) = (1,1,0) \Rightarrow T^{-1}T(1,0,0) = T^{-1}(1,1,0) \Rightarrow T^{-1}(1,1,0) = (1,0,0) \\ T(0,1,0) = (0,0,1) \Rightarrow T^{-1}T(0,1,0) = T^{-1}(0,0,1) \Rightarrow T^{-1}(0,0,1) = (0,1,0) \\ T(0,0,1) = (1,-1,6) \Rightarrow T^{-1}T(0,0,1) = T^{-1}(1,-1,6) \Rightarrow T^{-1}(1,-1,6) = (0,0,1) \end{array}$$

Encontremos os escalares α, β e γ, tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(1,-1,6) \Leftrightarrow \alpha = \frac{x+y}{2}, \beta = z - 3x + 3y \text{ e } \gamma = \frac{x-y}{2}.$$

Segue que

$$\begin{array}{rcl} T^{-1}(x,y,z) & = & \left(\frac{x+y}{2}\right) T^{-1}(1,1,0) + (z-3x+3y)\, T^{-1}(0,0,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right) T^{-1}(1,-1,6) \\ T^{-1}(x,y,z) & = & \left(\frac{x+y}{2}\right)(1,0,0) + (z-3x+3y)(0,1,0) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(0,0,1) \\ T^{-1}(x,y,z) & = & \left(\frac{x+y}{2}, z-3x+3y, \frac{x-y}{2}\right) \end{array}$$

5.3.7. Verifique, em cada caso, se a transformação linear T_i é um isomorfismo e, caso afirmativo, determine a transformação inversa de T_i, dada por T_i^{-1}.

(a) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T_2(x,y) = (x-y, x-y)$.

(b) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T_3(x,y,z) = (x,y,-z)$.

***Exemplo* 5.19.** *Determine os polinômios característicos, os autovalores e os autovetores do operador* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x,y) = (-3x+4y, -x+2y)$.

Solução: O polinômio característico é dado pela equação $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ em que A é a matriz associada ao operador T, e assim, segue que, da transformação $T(x,y) = (-3x+4y, -x+2y)$ temos a matriz e o seguinte desenvolvimento:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$M = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - 2 = P(\lambda).$$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.
Agora façamos o cálculo dos autovetores de T.
i. $\lambda = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo, $\begin{bmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x+4y = 0 \\ -x+y = 0 \end{cases}$ Então, temos que $x = y$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $v = (x,x), x \neq 0$.
ii. $\lambda = -2$, temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} -3x+4y \\ -x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

Então, temos que $x = 4y$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda = -2$ são da forma $v = (4y, y), y \neq 0$.

5.3.8. Determine os polinômios característicos, os autovalores e os autovetores dos operadores a seguir:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T_1(x,y) = (x+y, x-y)$

(b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T_2(x,y) = (-x,-y)$

(c) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T_3(x,y) = (y, 2x+y)$

***Exemplo* 5.20.** *Seja* $Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. *Determine o valor de* Y^5.

Solução: Transformemos Y em outra matriz diagonal equivalente, em uma base conveniente, calculando seus autovalores. Assim, facilitaremos as operações com a mesma.

• Cálculo dos autovalores:

$$Y = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \det(Y - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\cdot(2-\lambda)+4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -2 \text{ e } \lambda_2 = 1 \text{ autovalores de } Y$$

Como os autovalores são distintos a matriz é diagonalizável e sua forma diagonal é dada por

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow D^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 \\ 0 & (-2)^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -32 \end{bmatrix}$$

• Cálculo da matriz P (matriz dos autovetores):

$$\text{Se } \lambda = 1 \Leftrightarrow M\cdot X = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x+y=0 \Rightarrow x = y$$

$$V_1 = \{(x,x), x\in\mathbb{R}\} = \{x(1,1), x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow v_1 = (1,1)$$

$$\text{Se } \lambda = -2 \Leftrightarrow M\cdot X = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x+4y=0 \Rightarrow x = 4y$$

$$V_{-2} = \{(4y,y), y\in\mathbb{R}\} = \{y(4,1), y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow v_2 = (4,1)$$

Portanto, $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Agora façamos o cálculo de P^{-1}

$$\underset{L_2 \to L_1 - L_2}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{L_2 \to \frac{1}{3}L_2}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]} \sim \underset{L_1 \to -4L_2 + L_1}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Logo, $Y^5 = P\cdot D^5 \cdot P^{-1}$. Então,

$$Y^5 = \begin{bmatrix} 1 & -128 \\ 1 & -32 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} - \frac{128}{3} & \frac{4}{3} + \frac{128}{3} \\ -\frac{1}{3} - \frac{32}{3} & \frac{4}{3} + \frac{32}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{129}{3} & \frac{132}{3} \\ -\frac{33}{3} & \frac{36}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43 & 44 \\ -11 & 12 \end{bmatrix}$$

5.3.9. Utilize a forma diagonal para encontrar A^5 nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

5.3.10. Determinar m a fim de que sejam ortogonais os vetores $u = (m+1, 2)$ e $v = (-1, 4)$ do $\mathbb{R}^2$.

5.3.11. Ortonormalizar a base $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,-1,1), u_3 = (-1,0,1)$ do $\mathbb{R}^3$, pelo processo de Gram-Schmidt.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard & RORRES, C.. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2.001.

[2] CALLIOLI, C.; CAROLLI, & e outros. **Álgebra Linear e Aplicações**. 7ª edição. São Paulo: Atual Editora, 2.000.

[3] BOLDRINI, José L.; , e outros; , . **Álgebra Linear**. 3ª edição. São Paulo: Harbra, 1.984.

[4] LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear**. 3ª edição. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1.997.

[5] LIMA, Elon L.. **Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária**. ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1.996.

[6] LAY, David C.. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 1.999.

[7] AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2.002.

[8] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. ª edição. Campinas: UNICAMP, 1.995.

[9] BOYER, Carl. B.. **História de Matemática**. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1.996.

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/algebra/glossario/glossario.htm>

<http://web.mit.edu/18.06/www/>

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz_(matem%C3%A1tica)>

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Produto_interno>

<http://www.somatematica.com.br/>

<http://www.mundodosfilosofos.com.br/spinoza.htm> (consultada 23/11/2.006)

<http://en.wikipedia.org/wiki/Baruch_Spinoza> (consultada 23/11/2.006.)

FTC – EaD

FTC – EaD
Faculdade de Tecnologia e Ciêcnias – Educação a Distância
Democratizando a educação.
www.ftc.br/ead

FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

www.ead.ftc.br