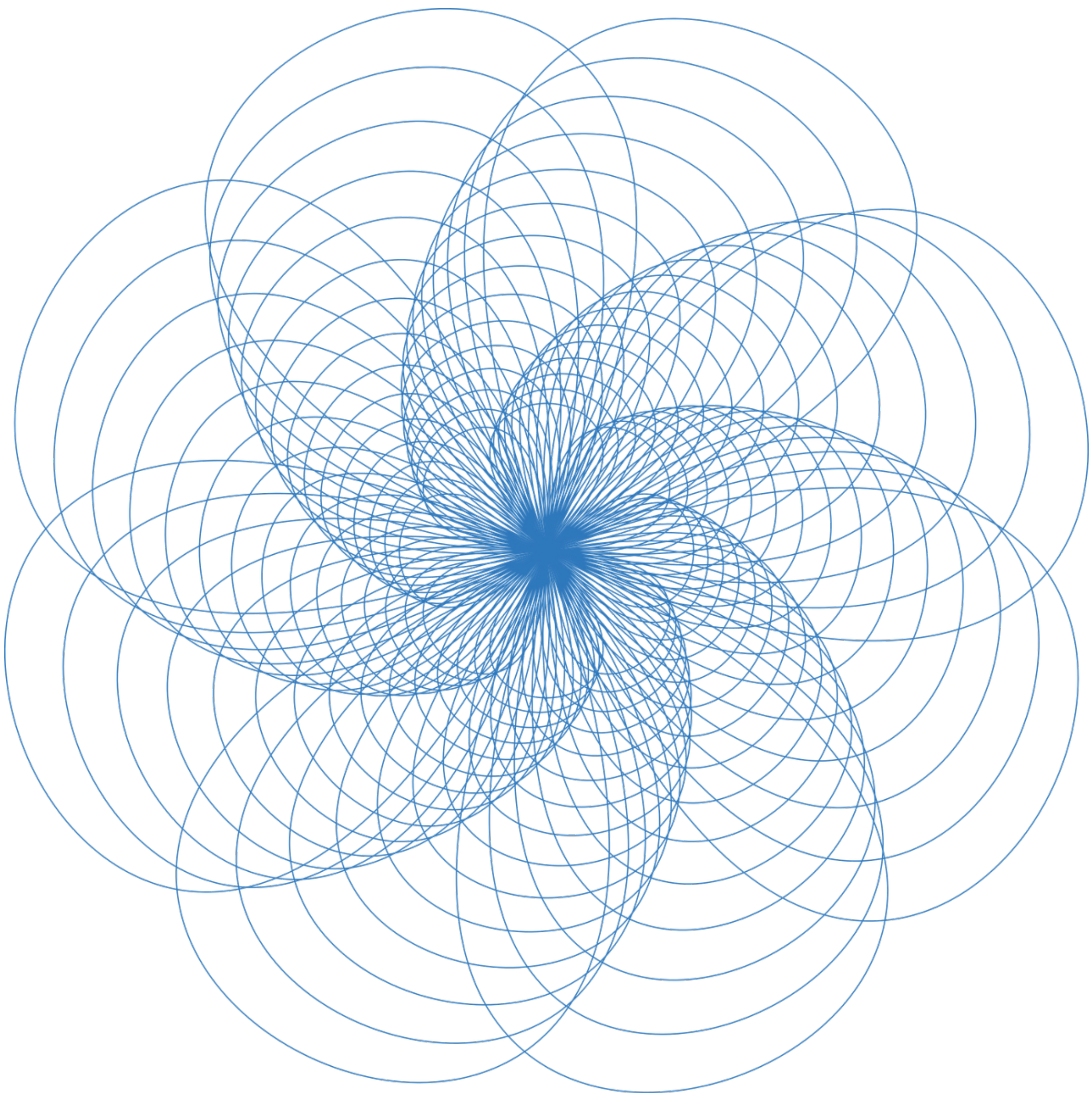
Mathématiques

Licence



Université Jean-François Champollion
Année 2022 - 2025

Table des matières

VIII — Introduction

Dans ce chapitre nous étudirons les propriétés des fonctions définies sur l'ensemble des complexes. En particulier nous chercherons à définir une notion de **différentielle** puis une notion **d'intégrale** pour ces fonctions et enfin étudier les propriétés des ces deux constructions.
On rapelle à tout fins utiles $\mathbb{C}$ est défini par la structure $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ avec une multiplication définie par:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

On rapelle aussi que l'on a $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ et en particulier la représentation des nombres complexes en tant que couple nous donne une représentation de la multiplication complexe par le produit matriciel suivant:

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc) \sim (ac - bd, ad + bc) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Applications conformes :

On appelle **application conforme** toute application qui préservent les angles. En particulier, si on se donne Γ une courbe paramétrée par γ sur I, et f un application, alors on dira:
est conforme si et seulement si

VIII — Fonctions Holomorphes

On définit ici la notion de **différentielle complexe**, qui sera une généralisation directe de la différentielle dans le cas réel, en effet on dira que f est **différentiable** en a si et seulement si le taux d'accroissement suivant, appelée dérivée de f en a existe:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$$

Où de manière équivalente si il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire L telle que dans un voisinage de a on ait:

$$f(z) - f(a) - L(z - a) = o(z - a)$$

On peut alors définir la différentielle de f en chaque point où elle existe par:

$$df : a \in \mathbb{C} \mapsto f'(a)dz$$

On dira alors que f est holomorphe sur un ouvert si elle y est holomorphe en tout point, et qu'elle est **entière** si elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Propriétés opératoires:

En particulier, vu que la définition de la différentielle est analogue à la différentielle réelle, on a alors (par les mêmes démonstrations) toutes les propriétés opératoires de l'opérateur de différentiation, en particulier:

- La différentiation est un opérateur linéaire.
- La différentiation d'un produit suit la règle de Leibniz.
- La différentiation d'une composée suit la règle réelle de différentiation d'une composée.
- Le théorème d'inversion local nous donne la différentielle d'une réciproque.

Différences avec la différentiation réelle :

Ici on remarque tout de suite la différence notable qui est que la différentielle, qu'on sait être un champ de formes linéaires, est en fait un champ de forme $\mathbb{K}$-linéaires selon le corps dans lequel on différentie, ici on nécéssite que la forme soit $\mathbb{C}$-linéaire, ce qui va changer ses propriétés.

En particulier, on considère une fonction holomorphe f et on va calculer sa dérivée (directionelle) en z selon deux restrictions, une par valeurs **réelles uniquement**, l'autre par valeurs **imaginaires uniquement**, on obtient alors les deux taux d'accroissements suivants:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ i\mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

On sait qu'à tout fonction complexe, on peut associer une fonction sur $\mathbb{R}^2$, et on va alors étudier les propriétés de ces taux d'accroissements en identifiant $f(z) \sim f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, qui est bien différentiable au sens réel. En développant les taux d'accroissements ci-dessus en (u, v), on obtient alors les deux égalités suivantes:

$$\begin{cases} f'(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ f'(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

Et enfin en regroupant ces égalités et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient alors que tout fonction holomorphe vérifie les **équations de Cauchy-Riemann**:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

Equations de Cauchy-Riemann:

En fait, on peut même montrer que ces équations caractérisent l'holomorphie, en effet pour $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on a:

Si est différentiable au sens réel et vérifie les équations de Cauchy-Riemann, alors elle est holomorphe et réciproquement.

Exemple: Considérons la fonction $f(z) = \overline{z}$, alors on a $f(z) \sim f(x, y) = x - iy$ différentiable sur tout son domaine de définition mais on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Donc nécéssairement, la fonction conjugué n'est donc **pas holomorphe**.

Equations de Laplace:

On appelle **équations de Laplace** une équation aux dérivées partielles de la forme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

Et on appelle alors **Laplacien** l'opérateur suivant:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

On appellera alors toute fonction solution des équations de Laplace **fonction harmonique**, et un des résultats intéressants de l'analyse complexe permet de montrer le résultat suivant:

Toute fonction analytique telle que ses dérivées partielles secondes soient continues est harmonique.

VIII — Intégration Complexe

On cherche maintenant à définir une notion **d'intégrale** pour les fonctions complexe, plus précisément nous allons définir l'intégrale d'une fonction continue f le long d'une courbe paramétrée par γ sur $[a\,;\,b]$, qui sera défini par l'intégrale suivante:

$$\int_\gamma f d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

L'intérprétation géométrique n'est pas évidente, mais peut s'éclaircir si on considère $f(z) \sim f(x,y)$ et $\overline{f}(z) = f(x,-y)$ le (champ vectoriel) conjugué de f apellé **champ de Pòlya**, alors on a pour des notations usuelles:

$$\int_\gamma f d\gamma = \int_\gamma \left\langle \overline{f}(\gamma(t))\,|\,T(t) \right\rangle dt + i \int_\gamma \left\langle \overline{f}(\gamma(t))\,|\,N(t) \right\rangle dt$$

En d'autres termes, cette intégrale encapsule **le travail et le flux du champ de Pòlya**.

Théorème fondamental de l'analyse complexe:

On se donne une fonction continue f tel que $f = F'$ pour une certaine fonction holomorphe F et on se donne un chemin paramétré par γ sur $[a\,;\,b]$ et on cherche à calculer l'intégrale le long de ce chemin, alors on trouve:

$$\int_\gamma f d\gamma := \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ce n'est pas surprenant quand on comprends la dualité qui existe entre fonction complexe et champ vectoriel, ce n'est alors qu'un cas particulier du **théorème du gradient** vu en analyse vectorielle. Et aussi, comme énoncé dans le chapitre en question, c'est aussi un cas particulier du **théorème de Stokes** pour la forme différentielle exacte $f(z)dz$.

VIII — Quelques extensions

VIII — Grands Théorèmes