Variétés différentielles

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

Table des matières

Chapter 0

Introduction

Dans ce projet d'étude, on cherche à généraliser le calcul différentiel usuel dans $\mathbb{R}^n$ sur des objets plus généraux, espaces courbes, qui ne seront pas des espaces vectoriels simples. En particulier, on cherche à définir le concept de **varitété différentielle**, qui est la formalisation mathématique de ce types d'espaces.

Le projet suivra la progression suivante:

- **Le chapitre 1 - Algèbre tensorielle:** Il pose les bases d'algèbre linéaire qui seront nécessaires pour construire la théorie dans l'espace connu $\mathbb{R}^n$.
- **Le chapitre 2 - Topologie:** Il pose le concept de partition de l'unité qui sera fondamental pour la suite
- **Le chapitre 3 - Variétés:** Il définit le concept de **variété topologique** puis **différentielle**, modèles d'espaces courbes généraux, qui seront les objets d'étude de cet exposé.
- **Le chapitre 4 - Variétés à bord:** Il s'attarrde sur la construction de tels espaces qui possèdent un "bord".
- **Le chapitre 5 - Exemples:** Une partie succinte pour présenter des variétés différentielles usuelles.
- **Les chapitres 6/7 - Espaces tangents:** Il pose le concept de vecteur tangent dans $\mathbb{R}^n$, puis dans une variété abstraite.
- **Le chapitre 8 - Espaces cotangents/exterieurs:** Il pose le concept de vecteur cotangent dans une variété abstraite ainsi que celui de tenseur d'ordre quelconque.
- **Le chapitre 9 - Formes différentielles:** Il pose le concept de formes différentielles sur un variété ainsi que leurs propriétés et des opérations fondamentales sur celles ci.
- **Le chapitre 10 - Orientation d'une variété à bord:** Il s'attarde sur le concept d'orientation d'une variété et comment celui-ci induit une orientation sur le bord de celle-ci.
- **Le chapitre 11 - Intégrale d'une forme:** Il définit le concept d'intégrale d'une forme différentielle sur la variété.
- **Le chapitre 12 - Théorème de Stokes:** Théorème-objectif de ce rapport, qui généralise le théorème fondamental de l'analyse dans un cadre trés général en toutes dimensions.
- **Le chapitre 13 - Applications:** Quelques applications de tout les outils théoriques développés dans divers domaines des mathématiques si le temps le permet.

Chapter 1

Elements d'algèbre tensorielle

On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors on appele **tenseur** d'ordre (p, q) une application multilinéaire de la forme suivante:

$$T : \underbrace{E^* \times \ldots \times E^*}_{\text{p}} \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{\text{q}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

Dans le contexte de ce projet, on s'intéressera surtout au cas où $p = 0$. On dira alors que T est un tenseur **covariant**. Si on a aussi $q = 0$, alors les tenseurs ainsi défini sont des fonctions sur l'espace nul, qui s'identifient aux scalaires du corps de base.

1.1 Structure de l'ensemble des tenseurs covariants

On note alors $\mathscr{T}^p(E)$ l'ensemble des p-tenseurs covariants, alors l'addition de deux formes et la multiplication par un scalaire étant bien définie, on peut montrer la propriété suivante:

L'espace $\mathscr{T}^p(E)$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Produit tensoriel de deux tenseurs covariants

On peut alors définir un produit sur des tels objets appelé **produit tensoriel** défini par:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathscr{T}^p(E) \times \mathscr{T}^q(E) &\longrightarrow \mathscr{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = \alpha(x_1, \ldots, x_p)\beta(y_1, \ldots, y_q)$$

1.3 Base et dimension

On peut alors se demander si on peut trouver une base de cet espace, et en effet si on note $(e_i)_{i \leq n}$ une base de E, alors on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} T(x_1, \ldots, x_p) &= T\left(\sum_{i_1 \leq n} x_{1,i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_p \leq n} x_{p,i_p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} x_{1,i_1} \ldots x_{p,i_p} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Mais on remarque alors que le produit $x_{1,i_1} \ldots x_{p,i_p}$ consiste alors en l'évaluation de $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$ en $(x_1, \ldots, x_p)$ et donc on obtient:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$$

En d'autres termes tout p-tenseur T est engendré par la famille de n^p vecteurs $(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p})_{i_1, \ldots, i_p \leq n}$. On peut alors montrer qu'elle est libre et donc que c'est une base de $\mathcal{T}^p(E)$.

1.4 Permutations des indices

Alors pour tout permuation $\sigma \in S_p$, on définit l'action d'une permutation sur un tenseur $T \in \mathscr{T}^p(E)$ par:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

1.5 Tenseurs antisymétriques

On appelle **tenseur antisymétrique** tout p-tenseur T tel que:

$$\forall i, j \in [\![1\ ;\ p]\!]\ ;\ T(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -T(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$$

On peut alors montrer une propriété naturelle de tels tenseurs:

$$\forall \sigma \in S_p\ ;\ T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) T(x_1, \dots, x_n)$$

1.6 Antisymétrisation

On se donne un tenseur T qui soit p-covariant, alors on chercher à construire un tenseur p-covariant **antisymétrique** à partir de T, et on peut alors montrer que le tenseur suivant convient:

$$\mathrm{Asym}(T)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

En d'autres termes que T est bien antisymétrique.

1.7 Produit extérieur

On peut alors définir un produit antisymétrique appelé surtout **produit extérieur** de deux tenseurs d'ordre respectifs p, q par:

$$(T \wedge T') = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathrm{Asym}(T \otimes T')$$

La présence du coefficient est motivée par des considérations techniques[1]. En d'autres termes:

$$(T \wedge T')(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) T'(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

1.8 Puissance extérieure

On appelle alors **p-ième puissance extérieure** l'ensemble de toutes les formes p-linéaires alternées qu'on note $\Lambda^p E^*$. Une base est alors donnée par l'ensemble:

$$\left\{ e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}\ ;\ 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \right\}$$

Si $T \in \Lambda^p E^*$ alors on le notera (selon que l'on explicite les indices ou qu'on utilise la notation multi-indices) sous une des deux formes différentes suivantes dans cette base:

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_I T_I dx^I$$

1.9 Propriétés algébriques du produit extérieur

On peut alors montrer que le produit extérieur est **bilinéaire et alterné**, en particulier, on peut montrer une expression explicite du produit extérieur de deux tenseurs T, T' d'ordre différents dans une base fixée:

$$\sum_I T_I dx^I \wedge \sum_J T'_J dx^J = \sum_{I,J} T_I T'_J dx^I \wedge dx^J$$

[1] Ce coefficient permet alors d'exprimer une base simple des tenseurs antisymétriques.

1.10 Déterminant

Si $\mathcal{B} = (e^i)_{i \leq n}$ est une base duale de E, on a:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E \ ; \ e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

En particulier on remarque alors que le déterminant canonique dans $\mathbb{R}^n$ n'est que l'application de la forme multinéaire alternée canonique $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$.

1.11 Cas dégénéré des 0-tenseurs

Dans le cas de $\mathscr{T}^0(E)$ toutes les définitions restent cohérentes:

- Le produit tensoriel se réduit en la multiplication sur $\mathbb{K}$.
- Le produit extérieur dévient alors une somme sur l'unique symétrie de S_0, qui n'agit pas sur T, ce qui se réduit aussi en la multiplication sur $\mathbb{K}$.
- La condition d'antisymétrie sur $\mathscr{T}^0(E)$ étant vide, on a aussi $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$ de base le produit extérieur vide, par convention égal à 1.

Chapter 2

Elements de topologie

On va dans toute la suite étudier des espaces topologiques tels qu'il sera souvement aisé de définir des objets **localement**, mais on aimera étendre cette définition en un objet **global** (ce sera par exemple le cas pour définir généraliser l'intégrale). Un des outils topologique trés puissant pour se faire est celui de **partition de l'unité**.

2.1 Partition de l'unité

Dans toute la suite, on considérera un espace topologique M compact et un recouvrement de cet espace par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$. On appelle **partition de l'unité** subordonée au recouvrement de M une famille de fonctions $(\rho_i)_{i\in I}$ de $M \longrightarrow [0\,;\,1]$ telles que $\mathrm{supp}(\rho_i) \subseteq U_i$ et:

$$\sum_{i\leq n} \rho_i = 1$$

Dans le cas général où le recouvrement n'est pas fini, on imposera un caractère **localement fini**, c'est à dire que pour tout point $x \in M$, il appartient à un nombre fini de cartes.

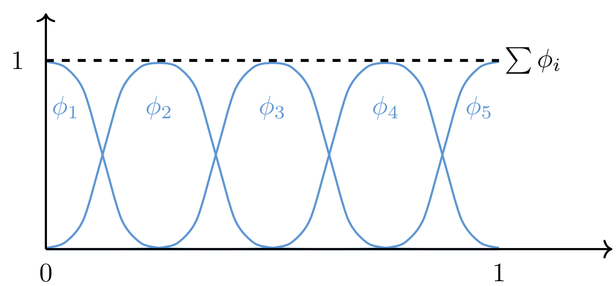


Figure 2.1: Partition de l'unité de l'intervalle $]0\,;\,1[$

En effet supposons que l'on considère par exemple une fonction f définie sur $]0\,;\,1[$, qu'on recouvre celui ci par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et qu'on considère une partition de l'unité subordonée, alors on a alors:

$$f = \sum \rho_i f = \sum \rho_i f\big|_{\mathrm{supp}(\rho_i)} = \sum \rho_i f\big|_{U_i}$$

Et donc en particulier $\int_{]0\,;\,1[} f = \sum \int_{U_i} \rho_i f$

Chapter 3

Variétés

Dans toute la suite, on considère un espace topologique compact et séparé M.

3.1 Cartes locales

On apelle **carte locale** de M un couple (U, ϕ) tel que:

- U soit un **ouvert** de M.
- ϕ soit un **homéomorphisme** de $U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ pour un n convenable.

On dira alors que l'application ϕ^{-1} paramétrise U, et que les **coordonées locales** des points de U sont leurs images par ϕ.

On apelle alors **atlas** de M une famille $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de cartes locales qui recouvrent M. Alors si un tel atlas existe on dira que l'espace M est une **variété topologique**.

3.2 Structure différentielle

On souhaite alors enrichir la structure de variété, et à terme munir M d'une structure permettant de différentier des fonctions sur celle-ci. On définit pour deux cartes $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ qui s'intersectent la notion de cartes $\mathcal{C}^k$**-compatibles** si et seulement si l'application suivante est de classe $\mathcal{C}^k$:

$$\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

L'application ϕ_{ij} est apellée **application de changement de cartes**, on peut la représenter comme ci-dessous:

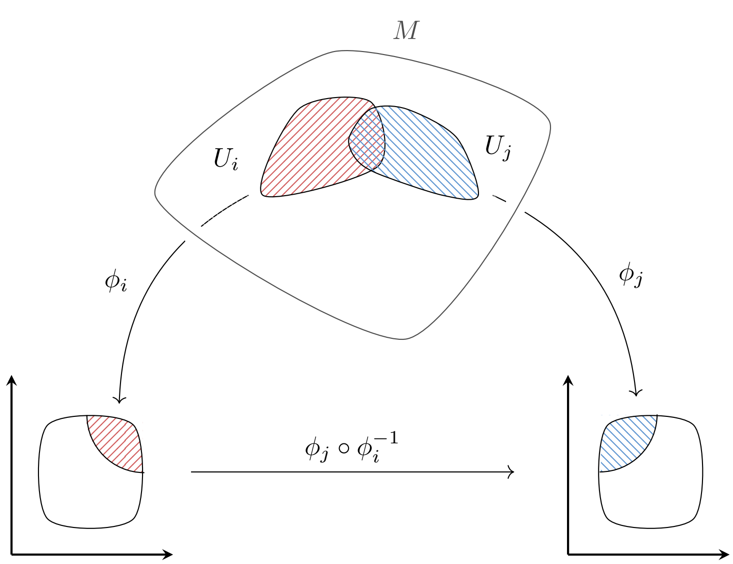


Figure 3.1: Exemple de deux cartes

En outre si M est muni d'un atlas tel que deux cartes sont systématiquement $\mathcal{C}^k$-compatibles, on dira que M est une **variété différentielle** (ou encore d'une structure différentielle) de classe $\mathcal{C}^k$.

3.3 Notion de différentiabilité

Etant donné une application $f : M \longmapsto \mathbb{R}$, la structure différentielle nous permet alors de généraliser la définition de différentiabilité dans $\mathbb{R}^n$ à une notion de différentiabilité dans M en un point x, en effet pour (U, ϕ) une carte qui contient x, on donne la définition suivante:

f est **différentiable** en x si et seulement si $f \circ \phi^{-1}$ est **différentiable** en $\phi(x)$

De manière plus générale on dira pour une application $f : M \longmapsto N$, une carte (U, ϕ) qui contient x et une carte (V, ψ) qui contient $f(x)$ alors on définit:

f est **différentiable** en x si et seulement si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est **différentiable** en $\phi(x)$

Ces deux définitions nécessitent alors de vérifier que ceci ne dépends pas des cartes choisies, et donc (dans le premier cas) que $f \circ \phi^{-1}$ est différentiable si et seulement si $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable. Ceci est vrai **exactement** grâce à la contrainte de régularité des application de changement de carte.

3.4 Partition de l'unité subordonnée à l'atlas

Alors un des résultats fondamentaux pour construire la théorie de l'intégration sur une variété est le suivant:

Il existe une partition de l'unité lisse subordonnée à l'atlas.

L'existence de telles partitions repose sur l'existence de **fonctions bosse lisses**, ie de fonctions à support compact et identiquement égales à 1 sur un ouvert inclu dans leur support.

Chapter 4

Variétés à bord

On veut alors pouvoir relaxer cette définition pour prendre en compte une catégorie plus large d'espaces topologiques, en particulier si on considère le disque ouvert D^1, c'est trivialement[1] une variété, mais le disque fermé $\text{adh}(D^1)$ ne l'est pas. La différence fondamentale étant qu'un ouvert qui contient un point du bord du disque fermé n'est pas homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ Mais à un ouvert du demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

4.1 Bord du demi-espace $\mathbb{R}^n_+$

On note $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n \geq 0\}$. Cet espace sera notre prototype de partie avec un bord, en effet si on considère cet espace en tant que partie de $\mathbb{R}^n$, son bord est bien défini:

$$\partial\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^n_+ \backslash \text{int}(\mathbb{R}^n_+) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n = 0\}$$

Par exemple dans le cas de $\mathbb{R}^2_+$, on a:

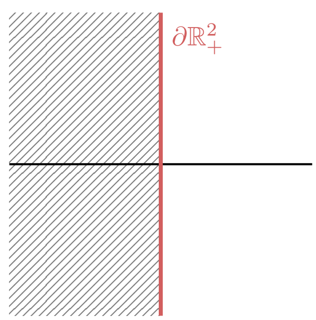


Figure 4.1: Le demi plan $\mathbb{R}^2_+$ et son bord

4.2 Variété à bord

On donne élargit alors notre définition d'une variété, qui sera notre définition générale pour la suite. On se donne une variété M muni de son atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ et on rajoute la contrainte suivante sur les cartes:

$$\forall i \in I \ ; \ \phi_i : U_i \longmapsto V_i \text{ avec } V_i \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^n_+$$

Ceci nous permet de définir le bord d'une variété par:

$$\partial M := \left\{x \in M \ ; \ \exists (U, \phi) \in \mathcal{A} \ ; \ x \in U \text{ et } \phi(x) \in \partial\mathbb{R}^n_+\right\}$$

Alors on peut montrer que c'est bien une généralisation du concept de variété, en effet si une variété définie de la sorte n'a pas de bords, ie si $\partial M = \emptyset$, alors on peut construire un atlas au sens du chapitre 2.

En particulier, on peut remarquer que $\mathbb{R}^n_+$ lui-même est bien une variété à bord ce qui est bien cohérent ...

[1] Comme graphe d'une fonction constante définie sur un ouvert.

Chapter 5

Exemples de variétés

Dans ce chapitre, on présente quelques exemples simples de variétés différentielles, leurs atlas et quelques unes de leurs propriétés.

5.1 Variété triviale

On considère l'espace topologique $\widetilde{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \backslash D$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x < 0\}$, alors il est muni de la carte triviale cartésienne de $\mathbb{R}^2$ par définition. On peut aussi considérer la carte (globale) polaire, on a donc deux cartes:

$$\begin{aligned} \phi : \widetilde{\mathbb{R}^2} &\longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}^2} \\ (x,y) &\longmapsto (x,y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \psi^{-1} :]0\,;+\infty[\times]-\pi\,;\pi[&\longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}^2} \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{aligned}$$

Alors l'application de changement de carte est facilement donnée par ψ^{-1} qui est bien un difféomorphisme. Ceci démontre alors que $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ muni de la carte cartésienne et polaire est muni d'une structure de variété différentielle.

5.2 Variétés simples

On peut montrer facilement que tout les objets suivants sont des variétés différentielles:

- Les **graphes de fonctions lisses**.
- Les **courbes paramétrées** par une application lisses et sans points critiques.

5.3 Le cercle $\mathbb{S}^1$

On considère le cercle unité $\mathbb{S}^1$, alors il existe de multiples manière de munir cet espace topologique d'une structure différentielle. La plus élégante consiste à fixer N, S le pôles nord et sud du cercle et à considérer les deux cartes correspondant à la **projection stéréographique** passant par ces points.

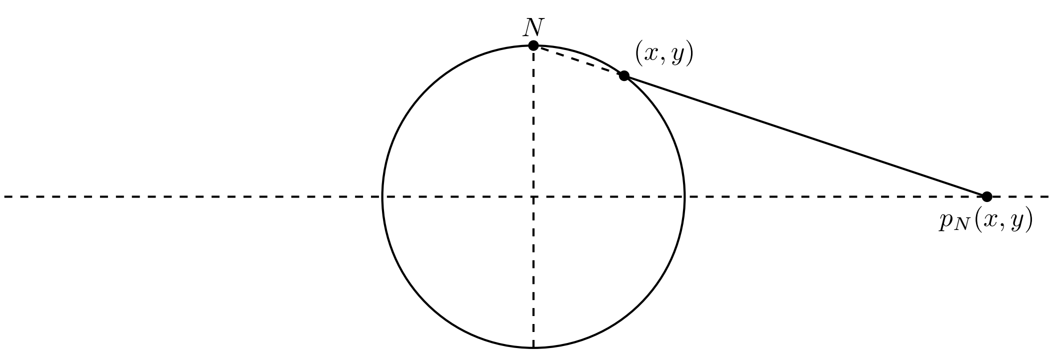


Figure 5.1: Projection stéréographique via le pôle Nord

Alors, des faits géométriques élémentaires permettent de trouver l'expression analytique de ces deux projections:

$$\begin{aligned} p_N : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{x}{1-y} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_S : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{x}{1+y} \end{aligned}$$

Alors on vérifie que ces deux applications sont des homéomorphismes sur leur image, d'inverses:

$$\begin{aligned} p_N^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{1-x^2}{x^2+1}\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_S^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

Ceci munit le cercle d'une structure de variété topologique, en outre on peut montrer que les applications de changement de cartes sont différentiables. Et donc le cercle est bien muni d'une structure différentielle.

5.4 La sphere $\mathbb{S}^2$

On considère la sphère unité $\mathbb{S}^2$, alors il existe de multiples manière de munir cet espace topologique d'une structure différentielle. La plus élégante consiste à nouveau à fixer N, S le pôles nord et sud de la sphère et à considérer les deux cartes correspondant à la **projection stéréographique** passant par ces points. On peut

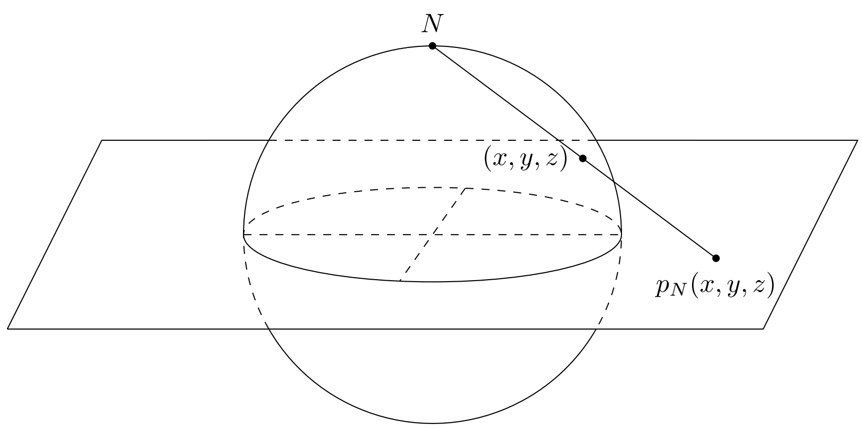


Figure 5.2: Projection stéréographique de la sphère par rapport au pôle Nord

alors de manière analogue au cercle, trouver l'expression analytique des deux projections et montrer qu'elles munissent $\mathbb{S}^2$ d'une structure de variété différentielle.

Chapter 6

Espaces tangents dans $\mathbb{R}^n$

On aimerait alors pouvoir généraliser la notion **d'espace tangent** à une courbe, surface ... lisse de $\mathbb{R}^n$ à des variétés abstraites comme définies dans les deux premiers chapitres. Pour ce faire, il est fondamental de comprendre que les variétés ainsi définies ne sont **pas** des objets de $\mathbb{R}^k$, donc la notion de vecteur tangent géométrique perd son sens.

L'approche fructueuse consiste alors à identifier **vecteurs** de $\mathbb{R}^n$ et **dérivations** via la notion de dérivée directionnelle. On considère tout d'abord le cas de $\mathbb{R}^n$, puis on généralise dans une variété quelconque.

6.1 Notion de dérivation:

Soit $p \in \mathbb{R}^n$, on dira qu'un opérateur linéaire $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une **dérivation** en p si et seulement si elle vérifie la **règle de Leibniz** donnée par:

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$$

En particulier, les opérateurs de dérivées partielles d'une fonction lisse sont des dérivations. On peut aussi facilement montrer que si f est constante $Df = 0$ pour toute dérivation D.

6.2 Espace tangent $T\mathbb{R}^n_p$:

On appelle alors **espace tangent** à $\mathbb{R}^n$ en p l'ensemble $T\mathbb{R}^n_p$ de toutes les dérivations en p de fonctions lisses. On pose alors l'application suivante:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T\mathbb{R}^n_p \\ v &\longmapsto \sum_{i \leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \end{aligned}$$

Où les v_i sont les coordonées de v dans la base canonique. Alors on montre la propriété fondamentale qui est que Φ est un **isomorphisme**. Ceci nous permet alors d'identifier vecteurs et dérivations, en outre, on en déduit une base de $T\mathbb{R}^n_p$ qui est alors donnée par:

$$\Phi(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

Les "vecteurs" ainsi définis agissent sur les fonctions lisses par dérivation directionelle, en effet si on considère par exemple $v = \frac{\partial}{\partial x}\big|_{(x,y)} + 2\frac{\partial}{\partial y}\big|_{(x,y)}$ et $f(x,y) = xy$, alors on peut définir:

$$vf = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y + 2x$$

Chapter 7

Espaces tangents sur une variété

On généralise l'approche du chapitre précédent au cas des variétés, et on en déduit une définition de l'espace tangent en un point, intrinsèque et qui ne dépends pas des cartes. Dans toute la suite, on considèrera une fonction $f : M \longrightarrow N$ point $p \in M$, une carte $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ et $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ qui contiennent respectivement p et $f(p)$

7.1 Espace tangent en un point:

On définit une **dérivation** sur M en un point p comme un opérateur linéaire sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui vérifie la règle de Leibniz. On définit alors de manière analogue au cas euclidien TM_p comme l'ensemble des telles dérivations. C'est alors un espace vectoriel pour les lois usuelles.

7.2 Différentielle

On considère alors une application lisse $f : M \longmapsto N$ et $p \in M$. On définit alors la **différentielle** de l'application f en p par l'application suivante:

$$\begin{aligned} df_p : TM_p &\longrightarrow TN_{f(p)} \\ D &\longmapsto \big(g \longmapsto D(g \circ f)\big) \end{aligned}$$

C'est moralement une application qui transporte les dérivations. On peut alors vérifier que cette application est bien définie et qu'elle vérifie les propriétés suivantes:

- Elle est **linéaire**.
- Elle vérifie la **règle de la chaîne:** $d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p$
- Si f est un **difféomorphisme**, alors $\forall p \in M$; df_p est un **isomorphisme**.

On peut alors montrer que pour ces définitions, si on considère une carte (U, ϕ) qui contient p, alors c'est un **difféomorphisme** et donc on a l'isomorphisme suivant:

$$d\phi_p : TM_p \longrightarrow T\mathbb{R}^n_{\phi(p)}$$

On en déduis donc que TM_p est un espace vectoriel de dimension n et qu'une base est donnée par:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p := d\phi^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\phi(p)}\right)$$

Ce sont des dérivations dont l'action sur une fonction lisse[1] f est définie par la dérivation partielle dans les coordonées locales:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p f = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

[1] Si $f : M \longrightarrow N$ alors on peut aussi définir une action de ces dérivées partielles en composantes en notant $f_j(p) = (\psi \circ f)_j(p)$ la j-ième composante de f, et alors $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p(f) := \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p(f_1), \dots, \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p(f_n)\right)$

7.3 Changement de représentation des vecteurs tangents

Dans la section précédente on a défini une représentation en coordonées locales d'un vecteur de l'espace tangent TM_p, une question naturelle est alors:

Quel est le lien entre deux telles représentations dans deux cartes différentes ?

On peut alors montrer la propriété suivante si $(U, \phi), (V, \psi)$ sont deux cartes qui contiennent un point p, alors si on note x_i, y_i les coordonées respectives dans la première et la deuxième carte et $c = \psi \circ \phi^{-1}$ l'application de changement de carte alors:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \sum_{j \leq n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p$$

7.4 Fibré tangent

On cherche alors a globaliser la notion d'espace tangent ponctuel et considérer **l'ensemble de tout les espaces tangents**. Ce point de vue est fructueux car il permettra de définir de manière simple la notion de champs de vecteurs sur une variété. On appelle cet ensemble le **fibré tangent** de M et il est défini par:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} TM_p = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times TM_p$$

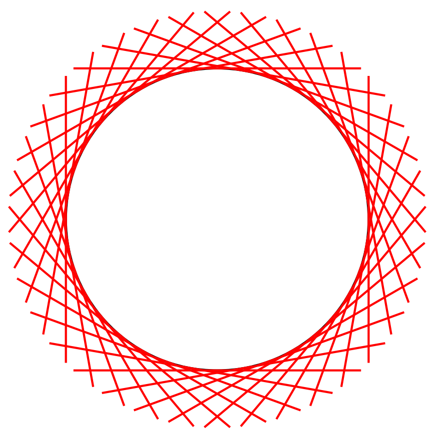


Figure 7.1: Fibré tangent du cercle $\mathbb{S}^1$

Le fibré tangent hérite alors de plusieurs propriétés:

- Une projection $\pi : (p, v) \in TM \mapsto p$ qui projete chaque vecteur sur son point base.
- Une topologie définie par la préimage de celle ci.

De ces propriétés, on peut alors montrer que TM peut être muni d'une structure de **variété différentielle** de dimension $2n$. En effet on considère une carte (U, ϕ) de M, alors on pose:

$$\left(\pi^{-1}(U), (p, v) \mapsto (\phi(p), d\phi_p(v))\right)$$

Alors en identifiant $T\mathbb{R}^n_p \cong \mathbb{R}^n$, ceci définit une carte locale sur l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ et on peut alors montrer que l'ensemble des cartes ainsi construites forme bien un atlas sur TM.

Un des intérêts de cette notion est qu'on peut alors identifier la différentielle comme une application globale sur les fibrés donnée par:

$$\begin{aligned} df : TM &\longrightarrow TN \\ (p, v) &\longmapsto (f(p), df_p(v)) \end{aligned}$$

En fait, les cartes de TM sont exactement les différentielles globales de celles ci ?

7.5 Champs de vecteurs

On peut alors définir la notion de **champs de vecteurs** sur une variété M par la donnée d'une application lisse de la forme:

$$\begin{aligned} V : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto (p, v) \end{aligned}$$

Où on identifiera $V(p) \triangleq v$. Alors plus précisément, si on fixe $p \in M$, alors en coordonées locales on a:

$$V(p) = \sum_{i=1}^{n} V_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p$$

Un tel champs de vecteurs est dit lisse au sens d'une application lisse entre les variétés M et TM, on note alors $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs lisse sur M. On peut caractériser le caractère lisse d'un tel champs par le caractère lisse de toutes ses composantes.

7.6 Opérations algébriques sur les champs de vecteurs

On peut alors définir les opérations algébriques usuelles sur les champs de vecteurs, notamment si X, Y sont deux champs de vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit:

$$X + Y : p \in M \longmapsto (p, X_p + Y_p) \in TM \qquad \lambda X : p \in M \longmapsto (p, \lambda X_p) \in TM$$

7.7 Restriction d'un champs de vecteurs

On se donne un champs de vecteurs $X \in \Omega^k(M)$, alors étant donnée une carte $U \subseteq M$, on peut se demander si ω se retreint un champs de vecteurs sur U, on définit:

$$(X|_U)(p) = \sum_{i=1}^{n} (X_i|_U)(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p$$

Alors les fonctions composantes sont lisses comme restriction sur un ouvert de fonctions réelles lisses.

7.8 Pushforward d'un champs de vecteurs

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application lisse, l'utilité principale de la différentielle est de pouvoir transporter des vecteurs tangents à M sur des vecteurs tangents à N, on peut alors se demander si on peut transporter un champs de vecteurs $X : M \longrightarrow TM$ de la sorte, on peut toujours définir:

$$g_X : p \in M \longmapsto (f(p), df_p(X_p)) \in TN$$

Mais ce n'est pas à proprement parler un champs de vecteurs sur N du fait du domaine de définition, néanmoins si f est une **difféomorphisme**, on peut définir le **pushforward** de X induit par f par:

$$f_* X : q \in N \longmapsto (q \ ; \ df_{f^{-1}(q)}(X_{f^{-1}(q)})) \in TN$$

On obtient bien ainsi un champs de vecteurs sur N.

Chapter 8

Espaces cotangents et exterieurs sur une variété

On peut alors considérer naturellement l'espace dual à l'espace tangent en un point $p \in M$ et on définit ainsi **l'espace cotangent** en un point. On notera une base de cet espace, dans des coordonées locales, par la famille $(dx_i)_{i \leq n}$ qui vérifie par définition pour la base associée à une carte fixée que:

$$dx_i \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) = \delta_{i,j}$$

On peut alors considérer sa k-ième puissance extérieure $\Lambda^k(TM_p^*)$ conformément au chapitre d'algèbre et on l'appelera **espace exterieur** (non-standard). On peut ainsi constuire des **tenseurs covariants antisymétriques** en un point de la variété. Etant donnée une carte locale, alors on peut définir une base de chacun de ces espaces de la même manière que dans le chapire d'algèbre et obtenir:

- Pour les vecteurs cotangents une expression de la forme $\sum_{i \leq n} \omega_i dx^i$.
- Pour les tenseurs covariants antisymétriques une expression de la forme $\sum_I \omega_I dx^I$.

8.1 Fibré cotangent

On cherche alors a globaliser la notion d'espace cotangent ponctuel et considérer **l'ensemble de tout les espaces cotangents**. Ce point de vue est fructueux car il permettra de définir de manière simple la notion de champs de covecteurs sur une variété. On appelle cet ensemble le **fibré cotangent** de M et il est défini par:

$$TM^* = \bigsqcup_{p \in M} TM_p^* = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times TM_p^*$$

Aussi, il vérifie des propriétés analogues au fibré tangent, c'est aussi une variété de dimension $2n$.

8.2 Fibré extérieur

On cherche alors a globaliser la notion d'espace extérieur ponctuel et considérer **l'ensemble de tout les espaces extérieurs**. Ce point de vue est fructueux car il permettra de définir de manière simple la notion de champs de tenseurs sur une variété. On appelle cet ensemble le **fibré extérieur** de M et il est défini par:

$$\Lambda^k(TM^*) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(TM_p^*) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \Lambda^k(TM_p^*)$$

Aussi, il vérifie des propriétés analogues aux précédents fibrés, c'est aussi une variété de dimension $n + \binom{k}{n}$.

8.3 Produit extérieur

On peut alors étendre la définition du produit extérieur aux tenseurs antisymétriques en un point de la variété et ce dernier respecte toutes les propriétés algébriques usuelles.

8.4 Différentielle abstraite et différentielle usuelle:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ s'identifie à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors on peut montrer l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{f(p)}$$

Or, en faisant l'identification usuelle entre les dérivations est les vecteurs, on peut identifier cette expression à un vecteur de $\mathbb{R}$ et on a aussi $v_i = dx_i(v)$ donc on a l'identification naturelle suivante:

$$df_p(v) \triangleq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx^i(v)$$

On remarque alors que $df_p \in TM_p^*$, on peut donc identifier la différentielle d'une fonction scalaire évaluée en un point à un vecteur cotangent, ie une forme linéaire sur l'espace tangent.

Plus généralement, l'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow N$ s'identifie aussi à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{f(p)}$$

Or, en faisant l'identification usuelle entre les dérivations est les vecteurs, on peut identifier cette expression à un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et on a aussi $v_i = dx_i(v)$ donc on a l'identification naturelle suivante:

$$df_p(v) \triangleq (df_{1,p}(v), \ldots, df_{m,p}(v))$$

De manière analogue on peut aussi remarque que la matrice de la différentielle dans les cartes est alors donnée par la jacobienne associée.

Chapter 9

Formes différentielles

On peut alors définir la notion de **champs de tenseurs contravariants** sur une variété M, appelés k-formes différentielles et dont l'ensemble est noté $\Omega^k(M)$. Elles sont définies par la donnée d'une application lisse de la forme:

$$\begin{aligned} \omega : M &\longrightarrow \Lambda^k TM^* \\ p &\longmapsto (p, \omega_p) \end{aligned}$$

Où on identifiera $\omega(p)$ et ω_p. Alors plus précisément, si on fixe $p \in M$, alors dans des coordonées locales autout de ce point, on a:

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(p) dx^i$$

Une telle forme est dite lisse au sens d'une application lisse entre les variétés M et $\Lambda^k TM^*$. On peut caractériser le caractère lisse d'une telle forme par le caractère lisse de toutes ses composantes.

9.1 Différentielle d'une fonction

On remarque alors qu'un exemple remarquable de 1-forme différentielle est celui de la différentielle elle même d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, en effet, on a expliqué plus haut que l'on peut identifier:

$$df_p \triangleq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx^i$$

9.2 Formes volumes

Le cas particulier des n-formes différentielles est fondamental, en effet soit ω une telle forme, alors elle vérifie en coordonées locales:

$$\omega_p = f(p) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Si f ne s'annule jamais, on dira alors que ω est une **forme volume**. C'est en fait la donnée en tout point de M d'un déterminant dans un base associée à la carte choisie. Dans le cas particulier $M = \mathbb{R}^n$, on peux alors identifier le déterminant canonique à la n-forme différentielle (constante) suivante:

$$\omega(p) = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \det$$

On a alors, par exemple:

- Dans $\mathbb{R}^1$, on a $\det = dx$
- Dans $\mathbb{R}^3$ on a $\det = dx \wedge dy \wedge dz$

En particulier, la formule du produit extérieur nous donne par exemple dans $\mathbb{R}^2$ comme on l'attendrais intuitivement que:

$$dx \wedge dy(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det(u, v)$$

9.3 Opérations algébriques sur les formes différentielles

On peut alors définir les opérations algébriques usuelles sur les formes différentielles, notamment si ω, η sont deux formes différentielles de même degré et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit:

$$\omega + \eta : p \in M \longmapsto (p, \omega_p + \eta_p) \in \Lambda^k TM^* \qquad \lambda\omega : p \in M \longmapsto (p, \lambda\omega_p) \in \Lambda^k TM^*$$

9.4 Restriction d'un forme

On se donne une k-forme $\omega \in \Omega^k(M)$, alors étant donnée une carte $U \subseteq M$, on peut se demander si ω se retreint en une forme différentielle lisse sur U, on définit:

$$(\omega|_U)_p = \sum_{i \leq n} (\omega_i|_U)(p) dx^i$$

Alors les fonctions composantes sont lisses comme restriction sur un ouvert de fonctions réelles lisses, donc la forme est lisse.

9.5 Evaluation d'un forme

Une 1-forme différentielle ω étant un champs de formes linéaires, si on fixe $p \in M$, on peut alors évaluer cette forme en un champs de vecteurs X, et cette opération est donnée par:

$$\omega(X) : p \longmapsto \omega_p(X_p)$$

Alors, on peut exprimer cette évaluation en coordonées locales, ie si on a une 1-forme différentielle ω et un champs de vecteurs X respectivement de la forme $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$ et $X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$, on a directement par définition de la base duale:

$$\omega(X)(p) = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i(p) x_i(p)$$

Donc on peut voir une 1-forme comme un objet qui prends un **champs de vecteurs** et retourne une **fonction**. De manière générale, on peut évaluer une $k-$ forme sur k champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_k$ pour obtenir une fonction.

9.6 Produit extérieur des formes

Ponctuellement, on sait définir le produit extérieur de deux tenseurs covariants antisymétriques, on peut alors définir le produit extérieur de deux formes ω, η d'ordre respectifs p, q par:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta : M &\longrightarrow \Lambda^{p+q} TM^* \\ p &\longmapsto (p, \omega_p \wedge \eta_p) \end{aligned}$$

Alors, il vérifie des propriétés analogues au produit extérieur classique, car il les vérifie en tout point. Notamment, il est bilinéaire alterné, et se réduit à la multiplication scalaire sur les 0-formes.

9.7 Pullback d'une forme

Dans la section sur les champs de vecteurs, on a vu que la différentielle d'une application $f : M \longrightarrow N$ permet de transporter ceux-ci par **pushforward**. On définit ici le concept dual (associé à l'adjoint de la différentielle) qui permet de transporter des champs de covecteurs dans le sens opposé.

Etant donnée une 1-forme ω sur N, on peut alors **toujours** définir le **pullback** de ω induit par f par:

$$f^*\omega : p \in M \longrightarrow (p, \omega_{f(p)} \circ df_p) \in TM^*$$

De manière générale pour une k-forme on définit en composant par un k-uplet de différentielles de f:

$$f^*\omega : p \in M \longrightarrow (p, \omega_{f(p)} \circ (df_p, \ldots, df_p)) \in TM^*$$

Alors ce sont bien des formes différentielles sur M.

9.8 Propriété du pullback

Le pullback sera fondamental dans la définition de l'intégrale sur une variété, on doit donc étudier ses nombreuses propriétés, en effet on peut montrer les propriétés suivantes:

- Le pullback est **linéaire**.
- Le pullback respecte le **produit extérieur**:

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$$

- Le pullback respecte la **différentielle** d'une fonction:

$$f^*(dx) = d(f^*x)$$

Muni de ces propriétés on peut montrer pour une $k-$forme sur N que l'expression de son pullback en coordonées locales est donnée par:

$$f^*\omega = \sum_I (\omega_I \circ f) df^{i_1} \wedge \ldots \wedge df^{i_n}$$

En particulier, si ω est une forme volume sur N et que f est un **difféomorphisme**, on peut montrer la propriété fondamentale suivante qui n'est pas sans rapeller celle du changement de variables:

$$f^*\omega = (\omega \circ f)\det(J_F) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

9.9 Opérateur local

Soit X un espace topologique et E un espace vectoriel, on considère alors l'espace de fonctions $\mathcal{F}(X, E)$ et on appelle **opérateur local** sur cet espace un opérateur linéaire D qui vérifie:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E) \ ; \ \exists U \text{ ouvert } \ ; \ f|_U = g|_U \implies Df|_U = Dg|_U$$

Moralement, les opérateurs locaux sont ceux tels que si f, g sont indistinguables localement, alors Df, Dg le seront aussi.

- Les exemples types d'opérateurs locaux sont par exemple les dérivations sur les fonctions lisses.
- Les contre-exemples types sont les opérateurs intégraux, par exemple l'opérateur ci-dessus n'est pas local:

$$\begin{aligned} T : C^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow C^1(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(t)dt \end{aligned}$$

9.10 Dérivée extérieure

Un des outils principaux pour démontrer le théorème de Stokes est alors la généralisation de la notion de différentielle en un opérateur capable de différentier les k-formes. On appelle alors **dérivée extérieure** sur M la donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'opérateurs linéaires de la forme:

$$d_k : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

On note généralement simplement d tout ces opérateurs, en rendant implicites le degré des formes évaluées, même si cette notation se formalise rigoureusement par la notion d'algèbre graduée. On impose en outre les conditions supplémentaires suivantes à celui-ci:

- **Généralisation:** Si $f \in \Omega^0(M)$, alors df correspond à la différentielle usuelle de f.
- **Propriété fondamentale:** C'est un opérateur idempotent, ie $d \circ d = 0$
- **Propriété de Leibniz:** Si $\omega \in \Omega^k(M)$ et $\eta \in \Omega^l(M)$, alors on a:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

9.11 Existence de la dérivée extérieure

On considère une carte (U, ϕ) de M, on cherche alors une forme nécessaire à un tel opérateur, on peut alors montrer que pour toute forme $\omega \in \Omega^k(U)$, alors:

$$d\omega_p = \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I = \sum_I \sum_{j \leq n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(p) dx^j \wedge dx^I$$

Réciproquement, si on définit un opérateur $d|_U$ par cette expression, alors il vérifie bien les axiomes d'une dérivée extérieure sur l'ouvert U. On aimerait alors pour définir une dérivée extérieure globalement grâce à cette expression locale, alors on fixe une carte (U, ϕ) et on définit $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$ tel que:

$$(d\omega)_p = \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I$$

Alors cette opérateur est bien défini, ie il ne dépends pas de la carte choisie pour exprimer d. En fait, on peut même montrer que cet opérateur est **unique**.

9.12 Propriétés fondamentale de la dérivée extérieure

On peut alors montrer que la dérivée extérieure généralise une propriété trés importante de compatibilité avec une des opérations principales sur les formes, le pullback. En effet le pullback respecte la **dérivée exterieure** d'une forme ω quelconque:

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

On note que si ω est une $0-$forme, ie une fonction, ce fait était déja vérifié car d coincide avec la différentielle usuelle dans ce cas.

Chapter 10

Orientation d'une variété

Dans le troisième chapitre, on a défini la notion de variété à bord, puis par la suite celle de forme volume qui définit si une variété est orientable ou non. On se pose alors les questions suivantes

- *Si une variété est orientable, qu'est ce qu'une "orientation" de celle ci ?*
- *Si une variété est orientable, est-ce que son bord l'est et comment l'orienter ?*

10.1 Notion d'orientation

Soit M une variété orientable, alors on définit la relation d'équivalence suivante sur les formes volumes:

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega^n(M)\ ,\ \omega \sim \omega' \iff \exists f > 0 \text{ telle que } \omega = f \cdot \omega'$$

On appelle **orientation** de M un choix d'une classe d'équivalence pour chaque composante connexe de M. Dans une de ces composantes connexes, on montre qu'il n'y a que **deux classes d'équivalences**.
Par exemple sur $\mathbb{R}^3$, voici deux représentants des deux classes d'équivalences:

$$\det = dx \wedge dy \wedge dz \qquad \overline{\det} = dy \wedge dx \wedge dz$$

On note alors (M, ω) une variété orientée par la forme volume ω. Si M est une variété orientée, ie telle qu'on a choisi une orientation sur celle-ci, on note $-M$ la variété d'orientation opposée.

10.2 Cas particulier des variétés de dimension nulle

Si M est de dimension nulle, alors c'est un ensemble fini de points, se pose alors la question suivante:

Que signifie alors une orientation sur une des composantes connexes (ie sur un point) ?

C'est un fait simplement la donnée d'un signe $\pm$ sur ce point, en effet une $0-$forme est un nombre et donc une forme volume correspond ici à un nombre qui ne s'annule jamais.

10.3 Atlas orienté

On considère dans tout la suite une variété orientable M muni d'une forme volume ω. On définit alors la notion de **carte orientée** et on dira:

- Une carte est orientée **positivement** si la forme volume a un coefficient positif dans celle-ci.
- Une carte est orientée **négativement** si la forme volume a un coefficient négatif dans celle-ci.

On appelle alors **atlas orienté** un atlas tel que:

- Les cartes sont orientées positivement.
- Les changement de cartes ont un jacobien positif.

Un résultat d'équivalence important est alors le suivant:

Une variété est orientable si et seulement si elle admet un atlas orienté.

10.4 Difféomorphismes qui préservent l'orientation

On peut alors considérer deux variétés $(M,\omega),(N,\eta)$ deux variétés orientées munies de leur atlas orienté. Alors on dira qu'un difféomorphisme $F : M \longrightarrow N$ **respecte l'orientation** si et seulement si:

$$F^*\eta \sim \omega$$

Or on peut caractériser ceci, en effet en évaluant ces deux expressions dans les cartes on peut monter que F respecte l'orientation si et seulement si:

$$\det(J_F) > 0$$

10.5 Produit intérieur d'une forme

En effet, étant donné un champs de vecteurs X, on peut construire une $k-1$ forme à partir d'une k forme par évaluation partielle en X sur la premier composante, cette opération apellée **produit intérieur** est définie par:

$$\iota_X(\omega) : p \mapsto \omega(X_p, \cdot, \dots, \cdot)$$

Ceci se généralise et on peut alors construire une $k-p$ forme avec la donnée de p champs de vecteurs.

10.6 Vecteurs entrants et sortants

Soit M une variété à bords, p un point du bord et (U,ϕ) une carte qui contient p, alors tout vecteur de $v = TM_p$ est de la forme:

$$v = \sum_{i\leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Alors on définit la notion de vecteur entrant et sortant:

- On dira que v est **entrant** si et seulement si $v_n > 0$.
- On dira que v est **sortant** si et seulement si $v_n < 0$.

On cherche alors à définir un champs de vecteurs sortant lisse X sur le bord de M, on peut alors montrer qu'un tel champ **existe toujours** et il nous permettra alors de définir l'orientation sur ∂M.

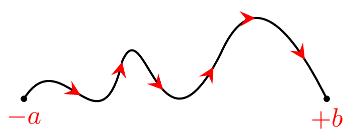
10.7 Orientation du bord d'une variété

Soit M une variété orientable de forme volume ω, X un champs de vecteurs sortants lisse sur le bord de M, alors on définit sur ∂M la $n-1$ forme $\iota_X(\omega)$ et on montre que c'est bien une forme volume sur le bord. En particulier, on a la propriété fondamentale suivante:

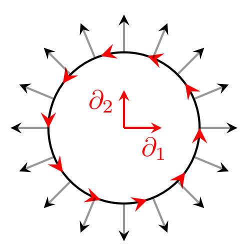
Le bord d'une variété orientable à bord est orientable.

10.8 Exemples pratiques d'orientation du bord d'une variété

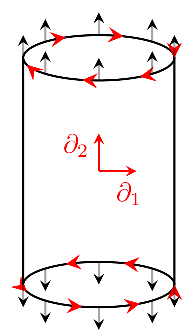
De manière plus concrète, on peut considérer quelques exemples usuels de variété à bord pour essayer de mieux comprendre comment s'oriente le bord d'une variété. Voici quelques exemples: En fait on comprends alors que pour orienter le bord sachant une orientation sur l'intérieur, il suffit de placer le premier vecteur de la base de l'intérieur dans la même direction que le vecteur sortant et l'orientation du bord est alors l'ajout de vecteurs tels que la base complétée coincide avec la base de l'intérieur. Une autre remarque que l'on puisse faire est que ceci justifie le fait que l'orientation trigonométrique du cercle est celle retenue en général en mathématiques.



(1) Cas d'une courbe



(2) Cas du cercle



(3) Cas du cylindre

Chapter 11

Intégrale d'une forme sur une variété

Dans ce chapitre, nous définissons le concept principal qui menera au théorème de Stokes, ie la notion **d'intégrale d'une forme volume sur une variété orientée**. L'optique étant de définir tout d'abord l'intégrale d'une telle forme dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{H}^n$, puis de s'y ramener dans le cas d'une variété.

11.1 Intégrale d'une fonction

Le problème principal dans la définition de l'intégrale sur une variété est le suivant, **intégrer une fonction dépends des cordonées choisies**. En effet on pourra imaginer définir l'intégrale d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ à support compact D et dont celui ci est inclu dans une carte (U, ϕ) par:

$$\int_D f = \int_{\phi(D)} f \circ \phi^{-1}$$

Mais en fait cette intégrale serait alors mal définie ! En effet si D est inclu dans deux cartes différentes $(U, \phi), (V, \psi)$, les deux intégrales correspondantes sont différentes ! Ceci permet alors de justifier l'assertion suivante: **Les fonctions ne sont en fait pas la bons objets à intégrer.**

11.2 Intégrale locale sur $\mathbb{R}^n$

Les objets naturels pour être intégrés sur une variété de dimension n sont donc en fait les n-formes. Dans le cas simple de $\mathbb{R}^n$, on considère une telle forme $\omega = f(x_1, \ldots, x_n)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors on dira que cette forme est **intégrable** et on définit son intégrale par:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)dx^1 \ldots dx^n$$

On notera alors plus simplement $\omega \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si la fonction coefficient de ω est intégrable, même si c'est un léger abus de notation.

11.3 Formule du changement de variable dans $\mathbb{R}^n$

Etant donnée une $n-$forme $\omega \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et un difféomorphisme $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on montrer la formule suivante:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^*\omega = \begin{cases} +\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \omega \text{ Si } F \textbf{ préserve} \text{ l'orientation.} \\ -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \omega \text{ Si } F \textbf{ inverse} \text{ l'orientation.} \end{cases}$$

En particulier, si F est de déterminant positif, on a égalité et la formule du changement de variable:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} (\omega \circ F)\det(J_F)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

11.4 Intégrale locale sur M

On souhaite alors définir l'intégrale d'une $n-$forme ω sur une variété orientée M et munie d'un **atlas orienté**. Si elle est telle que son support soit inclu dans une carte (U, ϕ). Alors on dira que ω est **intégrable** ssi $(\phi^{-1})^*\omega$ l'est, et alors on définit:

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega$$

Cette expression est bien définie, ie ne dépends pas du choix de la carte. En effet par construction, les changements de cartes sont de déterminant positif et on applique alors la formule du changement de variables.

11.5 Intégrale sur M

On peut alors finalement définir l'intégrale d'une $n-$forme sur toute la variété. En effet soit $\omega \in \Omega^n(M)$, alors on considère une partition de l'unité (ρ_α) subordonée à l'atlas. On dira alors que ω est **intégrable** si et seulement si $(\phi_\alpha^{-1})^*\rho_\alpha\omega$ l'est pour tout α et alors on définit son intégrale par:

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha\omega$$

On peut alors montrer que celle ci est bien définie, ie:

- Elle ne dépend pas du choix de l'atlas orienté.
- Elle ne dépend pas du choix de la partition de l'unité.

11.6 Exemples et cas particuliers

On peut alors chercher à exprimer l'intégrale d'une fonction lisse à support compact sur un domaine simple comme un cas particulier d'intégrale d'une forme différentielle, et en effet c'est le cas:

- Si on considère la 1-forme $\omega = f(x)dx$ et $\Gamma =]a\,;b[\subseteq \mathbb{R}$, on obtient:

$$\int_\Gamma \omega := \int_{]a\,;\,b[} \gamma^*\omega = \int_{]a\,;\,b[} \omega_t(\mathrm{Id}(t)) = \int_{]a\,;\,b[} f(t)dt$$

- Si on considère la 2-forme $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$ et $\Sigma =]0\,;1[^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, on obtient:

$$\int_\Sigma \omega := \int_{]0\,;\,1[^2} \Sigma^*\omega = \int_{]0\,;\,1[^2} \omega_{u,v}(\mathrm{Id}(u,v)) = \int_{]0\,;\,1[^2} f(u,v)dudv$$

Aussi, ces dernières intégrales s'interpètent à nouveau comme des intégrales sur les variétés $]a\,;b[,]0\,;1[^2$? Peut on toujours interpréter le signe intégrale comme l'intégrale d'une forme sur une variété ?

Néanmoins c'est bien une notion plus générale car elle nous permettra, à terme, de calculer l'intégrale de la 1-forme $xdy + ydx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ qui n'est pas de la forme $f(t)dt$ ceci sur une courbe (sous-variété de $\mathbb{R}^2$), mais ce concept sera probablement omis car non nécessaire à Stokes et le temps manquera probablement.

Chapter 12

Théorème de Stokes-Cartan

Dans tout les chapitres précédents, nous avons présenté un cadre théorique suffisant pour énoncer et comprendre le théorème fondamental de l'intégration, généralisation du théorème fondamental de l'analyse appellé **théorème de Stokes-Cartan**. On considère une variété M vérifiant plusieurs hypothèses:

- Elle est **compacte**.
- Elle est **orientable**.

On considère aussi une $n-1$ forme ω, alors on peut montrer le théorème suivant:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Où ici ∂M est munie de l'orientation induite par M. On peut alors faire plusieurs remarques sur cet énoncé:

- Si M est **sans bords**, alors on a $\partial M = \emptyset$ donc l'intégrale est nulle.
- Si M est de dimension 1, et notamment si $M = [a\,;\,b]$, on retrouve le théorème fondamental de l'analyse.

Chapter 13

Applications

13.1 Cas de la dimension 3

Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, on a la chaîne suivante:

$$\Lambda^0\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_0} \Lambda^1\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_1} \Lambda^2\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_2} \Lambda^3\mathbb{R}^3$$

On peut alors montrer facilement que les dimensions des différents espaces suivent la suite $(1, 3, 3, 1)$ et les propriétés surprenantes suivantes:

- On a d_0 qui s'identifie **au gradient de la fonction**.
- On a d_1 qui s'identifie **au rotationnel du champ de vecteurs**.
- On a d_2 qui s'identifie **à la divergence du champ de vecteurs**.

Et par la propriété fondamentale de la dérivée extérieure, on a alors les formules classiques suivantes comme simple conséquence:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}(\nabla f) = 0 \\ \mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0 \end{cases}$$

Chapter 14

Conclusion