

Variétés différentielles

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

TABLE DES MATIÈRES

Chapter 0

Introduction

Dans ce projet d'étude, on cherche à généraliser le calcul différentiel usuel dans \mathbb{R}^n sur des objets plus généraux, espaces courbes, qui ne seront pas des espaces vectoriels simples. En particulier, on cherche à définir le concept de **variété différentielle**, qui est la formalisation mathématique de ce types d'espaces.

Le projet suivra la progression suivante:

- **Le chapitre 1 - Algèbre tensorielle:** Il pose les bases d'algèbre linéaire qui seront nécessaires pour construire la théorie dans l'espace connu \mathbb{R}^n .
- **Le chapitre 2 - Topologie:** Il pose le concept de partition de l'unité qui sera fondamental pour la suite
- **Le chapitre 3 - Variétés:** Il définit le concept de **variété topologique** puis **différentielle**, modèles d'espaces courbes généraux, qui seront les objets d'étude de cet exposé.
- **Le chapitre 4 - Variétés à bord:** Il s'attarde sur la construction de tels espaces qui possèdent un "bord".
- **Le chapitre 5 - Exemples:** Une partie succincte pour présenter des variétés différentielles usuelles.
- **Les chapitres 6/7 - Espaces tangents:** Il pose le concept de vecteur tangent dans \mathbb{R}^n , puis dans une variété abstraite.
- **Le chapitre 8 - Espaces cotangents/extérieurs:** Il pose le concept de vecteur cotangent dans une variété abstraite ainsi que celui de tenseur d'ordre quelconque.
- **Le chapitre 9 - Formes différentielles:** Il pose le concept de formes différentielles sur un variété ainsi que leurs propriétés et des opérations fondamentales sur celles ci.
- **Le chapitre 10 - Orientation d'une variété à bord:** Il s'attarde sur le concept d'orientation d'une variété et comment celui-ci induit une orientation sur le bord de celle-ci.
- **Le chapitre 11 - Intégrale d'une forme:** Il définit le concept d'intégrale d'une forme différentielle sur la variété.
- **Le chapitre 12 - Théorème de Stokes:** Théorème-objectif de ce rapport, qui généralise le théorème fondamental de l'analyse dans un cadre très général en toutes dimensions.
- **Le chapitre 13 - Applications:** Quelques applications de tout les outils théoriques développés dans divers domaines des mathématiques si le temps le permet.

Chapter 1

Elements d'algèbre tensorielle

On se donne un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n , alors on appelle **tenseur** d'ordre (p, q) une application multilinéaire de la forme suivante:

$$T : \underbrace{E^* \times \dots \times E^*}_p \times \underbrace{E \times \dots \times E}_q \longrightarrow \mathbb{K}$$

Dans le contexte de ce projet, on s'intéressera surtout au cas où $p = 0$. On dira alors que T est un tenseur **covariant**. Si on a aussi $q = 0$, alors les tenseurs ainsi défini sont des fonctions sur l'espace nul, qui s'identifient aux scalaires du corps de base.

1.1 Structure de l'ensemble des tenseurs covariants

On note alors $\mathcal{T}^p(E)$ l'ensemble des p -tenseurs covariants, alors l'addition de deux formes et la multiplication par un scalaire étant bien définie, on peut montrer la propriété suivante:

L'espace $\mathcal{T}^p(E)$ a une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.2 Produit tensoriel de deux tenseurs covariants

On peut alors définir un produit sur des tels objets appelé **produit tensoriel** défini par:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{T}^p(E) \times \mathcal{T}^q(E) &\longrightarrow \mathcal{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \alpha(x_1, \dots, x_p) \beta(y_1, \dots, y_q)$$

1.3 Base et dimension

On peut alors se demander si on peut trouver une base de cet espace, et en effet si on note $(e_i)_{i \leq n}$ une base de E , alors on peut montrer qu'une base de $\mathcal{T}^p(E)$ est donnée par:

$$\left\{ e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} ; 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \right\}$$

1.4 Permutations des indices

Alors pour tout permutation $\sigma \in S_p$, on définit l'action d'une permutation sur un tenseur $T \in \mathcal{T}^p(E)$ par:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

1.5 Tenseurs antisymétriques

On appelle **tenseur antisymétrique** tout p -tenseur T tel que:

$$\forall i, j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket ; T(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -T(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$$

On peut alors montrer une propriété naturelle de tels tenseurs:

$$\forall \sigma \in S_p ; T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma)T(x_1, \dots, x_n)$$

1.6 Antisymétrisation

On se donne un tenseur T qui soit p -covariant, alors on cherche à construire un tenseur p -covariant **antisymétrique** à partir de T , et on peut alors montrer que le tenseur suivant convient:

$$\text{Asym}(T)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

En d'autres termes que T est bien antisymétrique.

1.7 Produit extérieur

On peut alors définir un produit antisymétrique appelé surtout **produit extérieur** de deux tenseurs d'ordre respectifs p, q par:

$$(T \wedge T') = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Asym}(T \otimes T')$$

La présence du coefficient est motivée par des considérations techniques¹. En d'autres termes:

$$(T \wedge T')(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) T'(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

1.8 Puissance extérieure

On appelle alors **p -ième puissance extérieure** l'ensemble de toutes les formes p -linéaires alternées qu'on note $\Lambda^p E^*$. Une base est alors donnée par l'ensemble:

$$\left\{ e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} ; 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \right\}$$

Si $T \in \Lambda^p E^*$ alors on le notera (selon que l'on explicite les indices ou qu'on utilise la notation multi-indices) sous une des deux formes différentes suivantes dans cette base:

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} = \sum_I T_I e^I$$

1.9 Propriétés algébriques du produit extérieur

On peut alors montrer que le produit extérieur est **bilinéaire et alterné**, en particulier, on peut montrer une expression explicite du produit extérieur de deux tenseurs T, T' d'ordre différents dans une base fixée:

$$\sum_I T_I e^I \wedge \sum_J T'_J e^J = \sum_{I, J} T_I T'_J e^I \wedge e^J$$

¹Ce coefficient permet alors d'exprimer une base simple des tenseurs antisymétriques.

1.10 Déterminant

Si $(e^i)_{i \leq n}$ est une base duale d'une base \mathcal{B} de E , on a :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E ; e^1 \wedge \dots \wedge e^n(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

En particulier on remarque alors que le déterminant canonique dans \mathbb{R}^n n'est que l'application de la forme multinéaire alternée $c^1 \wedge \dots \wedge c^n$ de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ où l'on a choisi l'ordre usuel (d'orientation directe) des vecteurs de la base canonique.

1.11 Cas dégénéré des 0-tenseurs

Dans le cas de $\mathcal{T}^0(E)$ toutes les définitions restent cohérentes :

- Le produit tensoriel se réduit en la multiplication sur \mathbb{K} .
- Le produit extérieur devient alors une somme sur l'unique symétrie de S_0 , qui n'agit pas sur T , ce qui se réduit aussi en la multiplication sur \mathbb{K} .
- La condition d'antisymétrie sur $\mathcal{T}^0(E)$ étant vide, on a aussi $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$ de base le produit extérieur vide, par convention égal à 1.

Chapter 2

Elements de topologie

On définit dans ce chapitre les outils principaux qui nous serviront à réaliser nos objectifs pour la suite, notamment pour pouvoir passer d'objets définis localement à des objets définis sur tout un espace, mais aussi le théorème d'invariance du domaine qui sera utile pour les constructions de base.

2.1 Fonction bosses

On appelle **fonction bosse** sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbb{R})$ et telle que:

$$f|_{\text{supp}(f)} = 1$$

Un résultat classique d'analyse affirme que de telles fonctions existent toujours. Celles ci nous permettront d'étendre des objets définis localement, en objets définis globalement.

2.2 Partition de l'unité

Dans toute la suite, on considérera un espace topologique M muni d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$. Une **partition de l'unité** induite par ce recouvrement est une famille de fonctions $(\rho_i)_{i \in I}$ de M dans $[0; 1]$ et telles que:

$$\begin{cases} \text{supp}(\rho_i) \subseteq U_i \\ \sum_{i \leq n} \rho_i = 1 \end{cases}$$

On imposera un caractère **localement fini** au recouvrement, c'est à dire que tout point $x \in M$ appartient à un nombre fini d'ouverts. Ceci permet la finitude (ponctuellement) de la somme considérée.

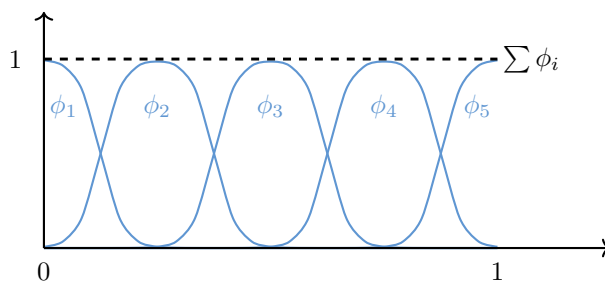


Figure 2.1: Partition de l'unité de l'intervalle $]0; 1[$

2.3 Opérateur local

Soit X un espace topologique et E un espace vectoriel, on considère alors l'espace de fonctions $\mathcal{F}(X, E)$ et on appelle **opérateur local** sur cet espace un opérateur linéaire D qui vérifie:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E) ; \exists U \text{ ouvert} ; f|_U = g|_U \implies (Df)|_U = (Dg)|_U$$

Moralement, les opérateurs locaux sont ceux tels que si f, g sont indistinguables localement, alors Df, Dg le seront aussi.

- Les exemples types sont les opérateurs de dérivation, par exemple $T : f \mapsto \frac{df}{dt}$
- Les contre-exemples types sont les opérateurs intégraux, par exemple $T : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$

2.4 Théorème de l'invariance du domaine

En outre, on aura besoin du résultat de topologie suivant, qui sera admis, appelé **théorème de l'invariance du domaine**:

Si $f : U \longrightarrow V$ est une **injection continue** (en particulier, si c'est un homéomorphisme), alors $f(U)$ est un **ouvert** de \mathbb{R}^n .

Chapter 3

Variétés

Dans toute la suite, on considère un espace topologique séparé M .

3.1 Cartes locales & Atlas

On appelle **carte locale** de M un couple (U, ϕ) tel que ϕ soit un homéomorphisme de $U \in \mathcal{T}_M$ sur une partie de \mathbb{R}^n pour un certain n .

- On dira alors que l'application ϕ^{-1} est un **paramétrage local** de U
- On dira alors que les images par ϕ des points de U sont les **coordonnées locales** de ceux-ci.

On appelle alors **atlas** de M un recouvrement localement fini de M par des cartes locales. Si un tel atlas existe on dira que l'espace M est une **variété topologique**.

3.2 Dimension

Sur une variété topologique M , il est possible que celle-ci ait des cartes différentes qui aient pour domaine d'arrivée des parties de deux \mathbb{R}^n de dimensions différentes. On requiera donc par la suite pour simplifier que les cartes aient toutes pour espace d'arrivée un ouvert du même \mathbb{R}^n .

On appelle alors ce nombre **dimension** de la variété.

3.3 Application de changement de cartes

On définit pour deux cartes qui s'intersectent $(U, \phi), (V, \psi)$ une **application de changement de cartes**:

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

Ce sont ces applications qui nous permettront de définir une structure différentielle sur la variété, on peut les représenter comme ci-dessous:

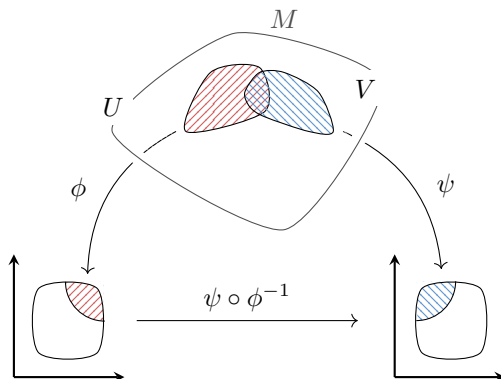


Figure 3.1: Exemple de deux cartes

3.4 Structure différentielle

On dira alors que l'atlas est de classe \mathcal{C}^k si et seulement si les applications de changement de cartes sont de classe \mathcal{C}^k .

En outre si M est muni d'un atlas de classe \mathcal{C}^k , on dira que M est une **variété différentielle** (ou encore qu'elle est munie d'une structure différentielle) de classe \mathcal{C}^k . Si $k = \infty$, on dira plus généralement que c'est une variété lisse.

3.5 Notion de différentiabilité

Etant donné une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, la structure différentielle nous permet alors de généraliser la définition de différentiabilité dans \mathbb{R}^n à une notion de différentiabilité dans M en un point p , en effet pour (U, ϕ) une carte qui contient p , on donne la définition suivante:

$$f \in \mathcal{D}(p) \iff f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{D}(\phi(p))$$

De manière plus générale on dira pour une application $f : M \rightarrow N$, une carte (U, ϕ) qui contient p et une carte (V, ψ) qui contient $f(p)$ alors on définit:

$$f \in \mathcal{D}(p) \iff \psi \circ f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{D}(\phi(p))$$

Pour que ces deux définitions aient un sens, il faut vérifier qu'elles ne dépendent pas des cartes choisies. Ceci est le cas **exactement** grâce à la contrainte de régularité des applications de changement de cartes. On utilise donc les notations suivantes:

- Si f est différentiable en un point p , on notera $f \in \mathcal{D}(p)$.
- Si f est différentiable en tout point d'une partie A , on notera $f \in \mathcal{D}(A)$.
- Si f est plus régulière, on étend la notation $f \in \mathcal{C}^k(A)$ aux variétés.

3.6 Fonctions définies sur une partie

Si on a une partie quelconque de $A \subseteq M$ et $f : A \rightarrow N$, alors A n'a pas de structure différentielle à priori, donc pas de notion de différentiabilité. On peut néanmoins étendre la notion de différentiabilité comme suit:

$$f \in \mathcal{D}(A) \iff \exists \tilde{f} : M \rightarrow N ; \tilde{f} \in \mathcal{D}(A) \text{ et } \tilde{f}|_A = f$$

En d'autres termes, une fonction définie seulement sur une partie d'une variété est différentiable si elle est restriction d'une fonction différentiable.

Exemple: $f : x \in \mathbb{Q} \mapsto x \in \mathbb{R}$ est différentiable comme restriction de l'identité qui est lisse.

3.7 Localité

Un fait immédiat mais important est le suivant, si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, et si U est un ouvert contenant p , alors on a la propriété suivante:

$$f \in \mathcal{D}(p) \iff f|_U \in \mathcal{D}(p)$$

En d'autres termes, la différentiabilité est une notion purement **locale**.

3.8 Partition de l'unité subordonnée à l'atlas

Un des résultats fondamentaux par la suite pour construire la théorie de l'intégration sur une variété est alors que si on considère l'atlas de (U_α, ϕ_α) , c'est un recouvrement localement fini, et donc on peut chercher si il existe une partition de l'unité associée, de préférence lisse. Et en effet c'est le cas:

Il existe une partition de l'unité lisse associée à l'atlas.

Ce théorème sera probablement admis dans le cas général, mais la preuve dans le cas où M est compacte est compréhensible.

Chapter 4

Variétés à bord

L'essence de la théorie des variétés consiste à modéliser un espace localement par un espace simple, ici \mathbb{R}^n , néanmoins on peut vouloir considérer d'autres espaces modèles pour prendre en compte une catégorie plus large d'espaces topologiques. Par exemple si on considère la boule ouverte unité \mathbb{B}^1 , c'est trivialement une variété, mais la boule fermée \mathbb{B}_f^1 ne l'est pas.

La différence fondamentale étant qu'un ouvert qui contient un point du bord de la boule fermée n'est pas homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 mais à un ouvert d'un espace-modèle plus général, le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

4.1 Demi-espace \mathbb{H}^n

On note $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n ; x_n \geq 0\}$. Cet espace sera notre espace-modèle de partie avec un bord, en effet si on considère cet espace en tant que partie de \mathbb{R}^n , son bord est bien défini par:

$$\partial\mathbb{H}^n := \mathbb{H}^n \setminus \text{int}(\mathbb{H}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_n = 0\}$$

Par exemple dans le cas de \mathbb{H}^2 , on a:

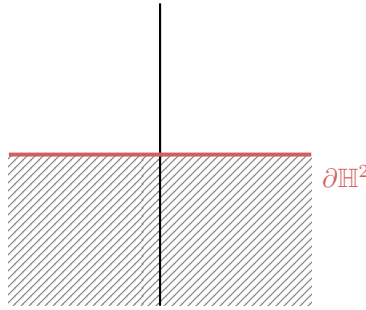


Figure 4.1: Le demi plan \mathbb{H}^2 et son bord

4.2 Variété à bord

On donne élargit alors notre définition d'une variété en la notion de **variété à bord**, qui sera notre définition générale pour la suite. On se donne un espace topologique séparé M , alors on dira que M est un variété à bords si et seulement si il existe un atlas de M dont l'espace-modèle est \mathbb{H}^n .

Alors on pourra montrer par la suite que c'est bien une généralisation du concept de variété, en effet si une variété définie de la sorte n'a pas de bords, alors on peut construire un atlas au sens du chapitre 3.

En outre, on montre de manière analogue au cas des variétés classiques qu'il existe toujours une partition de l'unité induite par ce nouveau type d'atlas.

4.3 Invariance par homéomorphisme

Une propriété intuitive mais non triviale est alors la suivante, si U, V sont deux ouverts de \mathbb{H}^n et si $F : U \longrightarrow V$ est un homéomorphisme, alors:

- Il envoie les points intérieurs de \mathbb{H}^n sur des points intérieurs \mathbb{H}^n .
- Il envoie les points du bord de \mathbb{H}^n sur des points du bord de \mathbb{H}^n .

4.4 Bord d'une variété

Ceci nous permet de définir les points du bord d'une variété, en effet si $p \in M$ et si (U, ϕ) est une carte qui le contient, on définit:

$$p \in \partial M \iff \phi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$$

Cette définition est bien intrinsèque, ie elle ne dépend pas de la carte choisie. C'est immédiat car les changement de cartes sont des homéomorphismes et donc préservent le bord.

4.5 Intérieur d'une variété

Ceci nous permet de définir les points de l'intérieur d'une variété, en effet si $p \in M$ et si (U, ϕ) est une carte qui le contient, on définit:

$$p \in \text{int} M \iff \phi(p) \in \text{int}(\mathbb{H}^n)$$

Cette définition est bien intrinsèque, ie elle ne dépend pas de la carte choisie. C'est immédiat car les changement de cartes sont des homéomorphismes et donc préservent l'intérieur.

4.6 Structure

On peut alors montrer que la structure de variété sur M induit des structures sur l'intérieur et le bord, ie on a:

- Le bord ∂M est muni d'une structure de variété différentielle sans bord de dimension $n - 1$ dont l'atlas est donné par:

$$(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{\partial M})$$

- L'intérieur $\text{int} M$ est muni d'une structure de variété différentielle sans bord de dimension n dont l'atlas est donné par:

$$(U_\alpha \cap \text{int} M, \phi_\alpha|_{\text{int} M})$$

4.7 Généralisations

A priori, rien ne nous empêche de nous arrêter en si bon chemin et on pourrais définir des variétés dont l'espace modèle est encore plus général. C'est en effet possible, et utile, mais pas pour le contenu de cet exposé. C'est par exemple le cas des **variétés à coins**, dont l'espace modèle est alors un quadrant de \mathbb{R}^n .

Chapter 5

Exemples de variétés

Dans ce chapitre, on présente quelques exemples simples de variétés différentielles, leurs atlas et quelques unes de leurs propriétés.

5.1 Variété triviale

On considère l'espace topologique $\widetilde{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \setminus D$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0\}$, alors il est muni de la carte triviale cartésienne de \mathbb{R}^2 par définition. On peut aussi considérer la carte (globale) polaire, on a donc deux cartes:

$$\begin{aligned} \phi : \widetilde{\mathbb{R}^2} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \psi^{-1} :]0 ; +\infty[\times]-\pi ; \pi[&\longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}^2} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y) & (r, \theta) &\longmapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Alors l'application de changement de carte est facilement donnée par ψ^{-1} qui est bien un difféomorphisme. Ceci démontre alors que $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ muni de la carte cartésienne et polaire est muni d'une structure de variété différentielle.

5.2 Variétés simples

On peut montrer facilement que tout les objets suivants sont des variétés différentielles:

- Les **graphes de fonctions lisses**.
- Les **courbes paramétrées** par une application lisse et sans points critiques.

5.3 Le cercle \mathbb{S}^1

On considère le cercle unité \mathbb{S}^1 , alors il existe de multiples manière de munir cet espace topologique d'une structure différentielle. La plus élégante consiste à fixer N, S le pôles nord et sud du cercle et à considérer les deux cartes correspondant à la **projection stéréographique** passant par ces points.

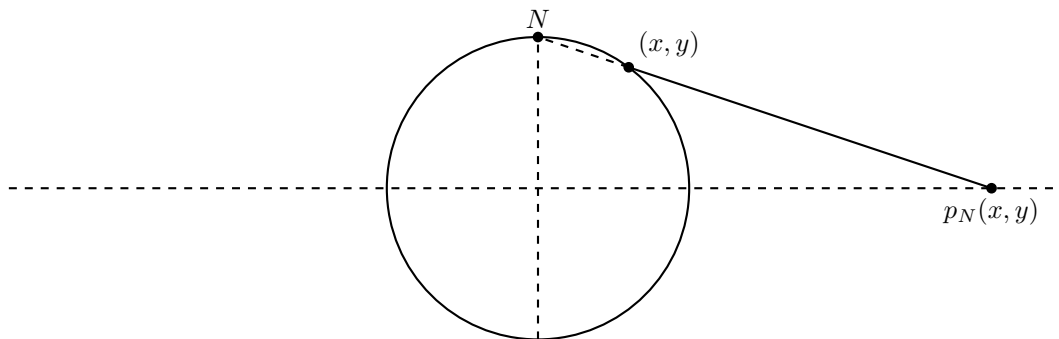


Figure 5.1: Projection stéréographique via le pôle Nord

Alors, des faits géométriques élémentaires permettent de trouver l'expression analytique de ces deux projections:

$$\begin{aligned} p_N : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} & p_S : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x}{1-y} & (x, y) &\longmapsto \frac{x}{1+y} \end{aligned}$$

Alors on vérifie que ces deux applications sont des homéomorphismes sur leur image, d'inverses:

$$\begin{aligned} p_N^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 & p_S^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{1-x^2}{x^2+1} \right) & x &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

Ceci munit le cercle d'une structure de variété topologique, en outre on peut montrer que les applications de changement de cartes sont différentiables. Et donc le cercle est bien muni d'une structure différentielle.

5.4 La sphere \mathbb{S}^2

On considère la sphère unité \mathbb{S}^2 , alors il existe de multiples manière de munir cet espace topologique d'une structure différentielle. La plus élégante consiste à nouveau à fixer N, S le pôles nord et sud de la sphère et à considérer les deux cartes correspondant à la **projection stéréographique** passant par ces points. On peut

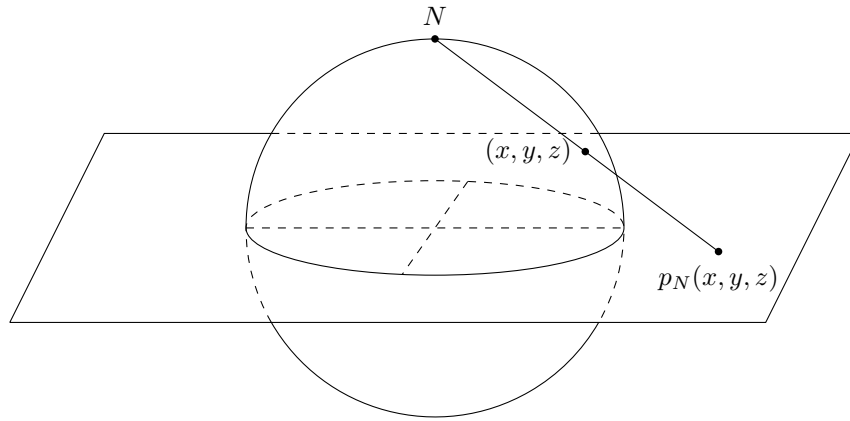


Figure 5.2: Projection stéréographique de la sphère par rapport au pôle Nord

alors de manière analogue au cercle, trouver l'expression analytique des deux projections et montrer qu'elles munissent \mathbb{S}^2 d'une structure de variété différentielle.

Chapter 6

Espaces tangents dans \mathbb{R}^n

On aimerait alors pouvoir généraliser la notion **d'espace tangent** à une courbe, surface ... lisse de \mathbb{R}^n à des variétés abstraites comme définies dans les deux premiers chapitres. Pour ce faire, il est fondamental de comprendre que les variétés ainsi définies ne sont **pas** des objets de \mathbb{R}^k , donc la notion de vecteur tangent géométrique perd son sens.

L'approche fructueuse consiste alors à identifier **vecteurs** de \mathbb{R}^n et **dérivations** via la notion de dérivée directionnelle. On considère tout d'abord le cas de \mathbb{R}^n , puis on généralise dans une variété quelconque.

6.1 Notion de dérivation:

Soit $p \in \mathbb{R}^n$, on dira qu'un opérateur linéaire $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ est une **dérivation** en p si et seulement si il vérifie la règle de Leibniz:

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) ; D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$$

En particulier, les opérateurs de dérivées partielles d'une fonction lisse sont des dérivations. On peut aussi facilement montrer que si f est constante $Df = 0$ pour toute dérivation D .

6.2 Espace tangent $T\mathbb{R}_p^n$:

On appelle alors **espace tangent** à \mathbb{R}^n en p l'ensemble $T\mathbb{R}_p^n$ de toutes les dérivations en p de fonctions lisses. On pose alors l'application suivante:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T\mathbb{R}_p^n \\ v &\longmapsto \sum_{i \leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \end{aligned}$$

Où les v_i sont les coordonnées de v dans la base canonique. Alors on montre la propriété fondamentale qui est que Φ est un **isomorphisme**. Ceci nous permet d'en déduire une base de $T\mathbb{R}_p^n$ qui est alors donnée par:

$$\Phi(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

Cette isomorphisme identifie donc les vecteurs et les dérivations. Les vecteurs ainsi définis agissent sur les fonctions lisses par dérivation directionnelle, en effet si on considère par exemple:

$$v = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \in T\mathbb{R}_{(x,y)}^n$$

Alors pour $f(x, y) = xy$, on a:

$$vf = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y + 2x$$

Chapter 7

Espaces tangents sur une variété

On généralise l'approche du chapitre précédent au cas des variétés, et on en déduit une définition de l'espace tangent en un point. Dans toute la suite, on considèrera une fonction $f : M \rightarrow N$ point $p \in M$, une carte $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ et $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ qui contiennent respectivement p et $f(p)$

7.1 Espace tangent en un point:

On définit une **dérivation** sur M en un point p comme un opérateur linéaire sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui vérifie la règle de Leibniz. On définit alors de manière analogue au cas euclidien TM_p comme l'ensemble des telles dérivations. C'est alors un espace vectoriel pour les lois usuelles.

7.2 Différentielle

On considère alors une application lisse $f : M \rightarrow N$ et $p \in M$. On définit alors la **différentielle** de l'application f en p par l'application suivante:

$$\begin{aligned} df_p : TM_p &\rightarrow TN_{f(p)} \\ D &\mapsto D(\cdot \circ f) \end{aligned}$$

C'est moralement une application qui transporte les dérivations. On peut alors vérifier que cette application est bien définie et qu'elle vérifie les propriétés suivantes:

- Elle est **linéaire**.
- Elle vérifie la **règle de la chaîne**: $d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p$
- Si f est un **difféomorphisme**, alors df_p est un **isomorphisme**.

7.3 Dimension et base

Alors en particulier si on considère une carte (U, ϕ) qui contient p , alors c'est un **difféomorphisme** et donc on a l'isomorphisme suivant:

$$d\phi_p : TM_p \rightarrow T\mathbb{R}_{\phi(p)}^n$$

On en déduit donc que TM_p est un espace vectoriel de dimension n et qu'une base est donnée par:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p := d\phi_p^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\phi(p)} \right)$$

On verra dans la section suivante que ces vecteurs ont une action naturelle sur les fonctions lisses, similaire à celle dans \mathbb{R}^n .

7.4 Action

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse, ces vecteurs de base agissent sur celle-ci par dérivation partielle dans les coordonnées locales:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p f = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

Si $f : M \rightarrow N$, alors étant donnée une carte ψ sur N , on définit les **composantes** $f_j = (f \circ \psi)_j$ de f dans cette carte et ceci permet de définir une action de ces dérivées partielles sur f par:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p f := \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p f_1, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p f_n \right)$$

7.5 Changement de représentation des vecteurs tangents

Dans la section précédente on a défini une représentation en coordonnées locales d'un vecteur de l'espace tangent TM_p , une question naturelle est alors:

Quel est le lien entre deux telles représentations dans deux cartes différentes ?

On peut alors montrer la propriété suivante si $(U, \phi), (V, \psi)$ sont deux cartes qui contiennent un point p , alors si on note x_i, y_i les coordonnées respectives dans la première et la deuxième carte et $c = \psi \circ \phi^{-1}$ l'application de changement de carte alors:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = \sum_{j \leq n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p$$

On peut alors en déduire que la matrice de passage de la base en x_i vers celle en y_i est la jacobienne du changement de cartes.

7.6 Fibré tangent

On cherche alors à globaliser la notion d'espace tangent ponctuel et considérer **l'ensemble de tout les espaces tangents**. Ce point de vue est fructueux car il permettra de définir de manière simple la notion de champs de vecteurs sur une variété. On appelle cet ensemble le **fibré tangent** de M et il est défini par:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} TM_p = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times TM_p$$

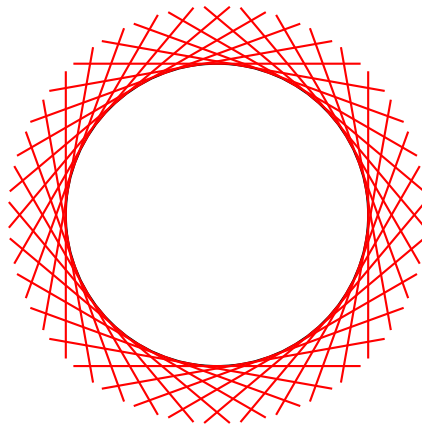


Figure 7.1: Fibré tangent du cercle \mathbb{S}^1

Le fibré tangent hérite alors naturellement d'une projection $\pi : (p, v) \in TM \mapsto p$ qui projette chaque vecteur sur son point base.

7.7 Structure du fibré tangent

De ces propriétés, on peut alors montrer que TM peut être muni d'une structure de **variété différentielle** de dimension $2n$. En effet on considère une carte (U, ϕ) de M , alors celle-ci induit l'application suivante:

$$\begin{aligned}\Phi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \phi(U) \times T\mathbb{R}_p^n \\ (p, v) &\longmapsto (\phi(p), d\phi_p(v))\end{aligned}$$

Alors cette application est bijective. L'atlas (U_α, ϕ_α) induit donc une famille $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$ qui possède les propriétés suivantes:

- La famille des Φ_α induit une **topologie séparée** sur TM .
- La famille des Φ_α est alors une famille d'**homéomorphismes** pour cette topologie.
- La famille des $\pi^{-1}(U_\alpha)$ est un **recouvrement localement fini** de TM .

Ceci munit TM d'une structure de variété topologique de dimension $2n$. En outre, on montre aussi que les changements de cartes sont lisses, et donc TM est muni d'une structure de variété différentielle.

Un des intérêts de cette notion est qu'on peut alors identifier la différentielle comme une application globale sur les fibrés donnée par:

$$\begin{aligned}df : TM &\longrightarrow TN \\ (p, v) &\longmapsto (f(p), df_p(v))\end{aligned}$$

En fait, les cartes de TM s'identifient alors exactement aux différentielles globales des cartes de M .

7.8 Champs de vecteurs

On peut alors définir la notion de **champs de vecteurs** sur une variété M par la donnée d'une application lisse de la forme:

$$\begin{aligned}V : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto (p, v)\end{aligned}$$

Où on identifiera $V(p) \triangleq v$. Alors plus précisément, si on fixe $p \in M$, alors en coordonnées locales on a:

$$V(p) = \sum_{i=1}^n V_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

Un tel champs de vecteurs est dit lisse au sens d'une application lisse entre les variétés M et TM , on note alors $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs lisse sur M . On peut caractériser le caractère lisse d'un tel champs par le caractère lisse de toutes ses composantes.

7.9 Opérations algébriques sur les champs de vecteurs

On peut alors définir les opérations algébriques usuelles sur les champs de vecteurs, notamment si X, Y sont deux champs de vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit:

$$X + Y : p \in M \longmapsto (p, X_p + Y_p) \in TM \quad \lambda X : p \in M \longmapsto (p, \lambda X_p) \in TM$$

On peut aussi restreindre un champs de vecteurs lisse à une partie quelconque $A \subseteq M$ en un champs de vecteurs lisse. Ceci vient directement du fait que la restriction d'une fonction lisse à une partie est lisse.

7.10 Pushforward d'un champs de vecteurs

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application lisse, l'utilité principale de la différentielle est de pouvoir transporter des vecteurs tangents à M sur des vecteurs tangents à N , on peut alors se demander si on peut transporter un champs de vecteurs $X : M \longrightarrow TM$ de la sorte, on peut toujours définir:

$$g_X : p \in M \longmapsto (f(p), df_p(X_p)) \in TN$$

Mais ce n'est pas à proprement parler un champs de vecteurs sur N du fait du domaine de définition, néanmoins si f est un **difféomorphisme**, on peut définir le **pushforward** de X induit par f par:

$$f_*X : q \in N \longmapsto (q, df_{f^{-1}(q)}(X_{f^{-1}(q)})) \in TN$$

On obtient bien ainsi un champs de vecteurs sur N .

Chapter 8

Espaces cotangents et puissances extérieures sur une variété

On peut alors considérer naturellement l'espace dual à l'espace tangent en un point $p \in M$ et on définit ainsi l'**espace cotangent** en un point. On notera une base de cet espace, dans des coordonnées locales, par la famille $(dx_i)_{i \leq n}$ qui vérifie par définition pour la base associée à une carte fixée que:

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \delta_{i,j}$$

On peut alors considérer sa k -ième puissance extérieure $\Lambda^k(TM_p^*)$ conformément au chapitre d'algèbre. On peut ainsi construire des **tenseurs covariants antisymétriques** en un point de la variété. Etant donnée une carte locale, alors on peut définir une base de chacun de ces espaces de la même manière que dans le chapitre d'algèbre et obtenir:

- Pour les vecteurs cotangents une expression de la forme $\sum_{i \leq n} \omega_i dx^i$.
- Pour les tenseurs covariants antisymétriques une expression de la forme $\sum_I \omega_I dx^I$.

Aussi, par un résultat d'algèbre linéaire élémentaire, la matrice de changement de base est alors donnée par la transposée de la matrice jacobienne.

8.1 Fibré cotangent

On cherche alors à globaliser la notion d'espace cotangent ponctuel et considérer l'**ensemble de tout les espaces cotangents**. Ce point de vue est fructueux car il permettra de définir de manière simple la notion de champs de covecteurs sur une variété. On appelle cet ensemble le **fibré cotangent** de M et il est défini par:

$$TM^* = \bigsqcup_{p \in M} TM_p^* = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times TM_p^*$$

Aussi, il vérifie des propriétés analogues au fibré tangent, c'est aussi une variété de dimension $2n$.

8.2 Fibré extérieur

On cherche alors à globaliser la notion d'espace extérieur ponctuel et considérer l'**ensemble de tout les espaces extérieurs**. Ce point de vue est fructueux car il permettra de définir de manière simple la notion de champs de tenseurs sur une variété. On appelle cet ensemble le **fibré extérieur** de M et il est défini par:

$$\Lambda^k(TM^*) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(TM_p^*) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \Lambda^k(TM_p^*)$$

Aussi, il vérifie des propriétés analogues aux précédents fibrés, c'est aussi une variété de dimension $n + \binom{k}{n}$.

8.3 Produit extérieur

On peut alors étendre la définition du produit extérieur aux tenseurs antisymétriques en un point de la variété et ce dernier respecte toutes les propriétés algébriques usuelles.

8.4 Différentielle abstraite et différentielle usuelle:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ s'identifie à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors on peut montrer l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)}$$

Or, en faisant l'identification usuelle entre les dérivations et les vecteurs, on peut identifier cette expression à un vecteur de \mathbb{R} et on a aussi $v_i = dx_i(v)$ donc on a l'identification naturelle suivante:

$$df_p(v) \triangleq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx^i(v)$$

On remarque alors que $df_p \in TM_p^*$, on peut donc identifier la différentielle d'une fonction scalaire évaluée en un point à un vecteur cotangent, ie une forme linéaire sur l'espace tangent.

Plus généralement, l'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow N$ s'identifie aussi à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}$$

Or, en faisant l'identification usuelle entre les dérivations et les vecteurs, on peut identifier cette expression à un vecteur de \mathbb{R}^m et on a aussi $v_i = dx_i(v)$ donc on a l'identification naturelle suivante:

$$df_p(v) \triangleq (df_{1,p}(v), \dots, df_{m,p}(v))$$

De manière analogue on peut aussi remarquer que la matrice de la différentielle dans les cartes est alors donnée par la jacobienne associée.

Chapter 9

Formes différentielles

On peut alors définir la notion de **champs de tenseurs contravariants** sur une variété M , appelés k -formes différentielles et dont l'ensemble est noté $\Omega^k(M)$. Elles sont définies par la donnée d'une application lisse de la forme:

$$\begin{aligned}\omega : M &\longrightarrow \Lambda^k TM^* \\ p &\longmapsto (p, \omega_p)\end{aligned}$$

Où on identifiera $\omega(p)$ et ω_p . Alors plus précisément, si on fixe $p \in M$, alors dans des coordonnées locales autour de ce point, on a:

$$\omega_p = \sum_I \omega_I(p) dx^I$$

Une telle forme est dite lisse au sens d'une application lisse entre les variétés M et $\Lambda^k TM^*$. On peut caractériser le caractère lisse d'une telle forme par le caractère lisse de toutes ses composantes (la preuve est la même que pour les champs de vecteurs).

9.1 Différentielle d'une fonction

On remarque alors qu'un exemple remarquable de 1-forme différentielle est celui de la différentielle elle-même d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, en effet, on a expliqué plus haut que l'on peut identifier:

$$df_p \triangleq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx^i$$

9.2 Formes volumes

Le cas particulier des n -formes différentielles est fondamental, en effet soit ω une telle forme, alors elle vérifie en coordonnées locales:

$$\omega_p = f(p) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Si f ne s'annule jamais, on dira alors que ω est une **forme volume**. Dans le cas particulier $M = \mathbb{R}^n$, on peut alors identifier le déterminant canonique à la n -forme différentielle (constante) suivante:

$$\omega(p) = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \det$$

On a alors, par exemple:

- Dans \mathbb{R}^1 , on a $\det = dx$
- Dans \mathbb{R}^3 on a $\det = dx \wedge dy \wedge dz$

En particulier, la formule du produit extérieur nous donne par exemple dans \mathbb{R}^2 comme on l'attendrais intuitivement que:

$$dx \wedge dy(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det(u, v)$$

9.3 Opérations algébriques sur les formes différentielles

On peut alors définir les opérations algébriques usuelles sur les formes différentielles, notamment si ω, η sont deux formes différentielles de même degré et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit :

$$\omega + \eta : p \in M \mapsto (p, \omega_p + \eta_p) \in \Lambda^k TM^* \quad \lambda \omega : p \in M \mapsto (p, \lambda \omega_p) \in \Lambda^k TM^*$$

On peut aussi restreindre une forme différentielle à une partie quelconque $A \subseteq M$ en une forme différentielle lisse. Ceci vient directement du fait que la restriction d'une fonction lisse à une partie est lisse.

9.4 Evaluation d'une forme

Une 1-forme différentielle ω étant un champ de formes linéaires, si on fixe $p \in M$, on peut alors évaluer cette forme en un champ de vecteurs X , et cette opération est donnée par :

$$\omega(X) : p \mapsto \omega_p(X_p)$$

Alors, on peut exprimer cette évaluation en coordonnées locales, ie si on a une 1-forme différentielle ω et un champ de vecteurs X respectivement de la forme $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$ et $X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$, on a directement par définition de la base duale :

$$\omega(X)(p) = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i(p) x_i(p)$$

Donc on peut voir une 1-forme comme un objet qui prend un **champ de vecteurs** et retourne une **fonction**. De manière générale, on peut évaluer une k -forme sur k champs de vecteurs X_1, \dots, X_k pour obtenir une fonction.

9.5 Produit extérieur des formes

Ponctuellement, on sait définir le produit extérieur de deux tenseurs covariants antisymétriques, on peut alors définir le produit extérieur de deux formes ω, η d'ordre respectifs p, q par :

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta : M &\longrightarrow \Lambda^{p+q} TM^* \\ p &\longmapsto (p, \omega_p \wedge \eta_p) \end{aligned}$$

Alors, il vérifie des propriétés analogues au produit extérieur classique, car il les vérifie en tout point. Notamment, il est bilinéaire alterné, et se réduit à la multiplication scalaire sur les 0-formes.

9.6 Pullback d'une forme

Dans la section sur les champs de vecteurs, on a vu que la différentielle d'une application $f : M \longrightarrow N$ permet de transporter ceux-ci par **pushforward**. On définit ici le concept dual (associé à l'adjoint de la différentielle) qui permet de transporter des champs de covecteurs dans le sens opposé.

Etant donnée une 1-forme ω sur N , on peut alors **toujours** définir le **pullback** de ω induit par f par :

$$f^* \omega : p \in M \longrightarrow (p, \omega_{f(p)} \circ df_p) \in TM^*$$

De manière générale pour une k -forme on définit en composant par un k -uplet de différentielles de f :

$$f^* \omega : p \in M \longrightarrow (p, \omega_{f(p)} \circ (df_p, \dots, df_p)) \in TM^*$$

Alors ce sont bien des formes différentielles sur M .

9.7 Propriété du pullback

Le pullback sera fondamental dans la définition de l'intégrale sur une variété, on doit donc étudier ses nombreuses propriétés, en effet on peut montrer les propriétés suivantes:

- Le pullback est **linéaire**.
- Le pullback respecte le **produit extérieur**:

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$$

- Le pullback respecte la **différentielle** d'une fonction:

$$f^*(dx) = d(f^*x)$$

Muni de ces propriétés on peut montrer pour une k -forme sur N que l'expression de son pullback en coordonnées locales est donnée par:

$$f^*\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\omega_{i_1, \dots, i_k} \circ f) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}$$

En particulier, si ω est n -forme sur N et que f est un **difféomorphisme**, on peut montrer la propriété fondamentale suivante qui n'est pas sans rappeler celle du changement de variables:

$$f^*\omega = (\omega \circ f) \det(\text{Jac}_f) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

9.8 Dérivée extérieure

Un des outils principaux pour démontrer le théorème de Stokes est alors la généralisation de la notion de différentielle en un opérateur capable de différentier les k -formes. On appelle alors **dérivée extérieure** sur M la donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'opérateurs linéaires de la forme:

$$d_k : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

On note généralement simplement d tout ces opérateurs, en rendant implicites le degré des formes évaluées. On impose en outre les conditions supplémentaires suivantes à celui-ci:

- **Généralisation:** Si $f \in \Omega^0(M)$, alors df correspond à la différentielle usuelle de f .
- **Propriété fondamentale:** C'est un opérateur idempotent, ie $d \circ d = 0$
- **Propriété de Leibniz:** Si $\omega \in \Omega^k(M)$ et $\eta \in \Omega^l(M)$, alors on a:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

On peut alors déduire de cette définition deux propriétés fondamentales:

- La propriété de Leibniz implique que c'est un **opérateur local**.
- La propriété de Leibniz implique que cet opérateur **commute avec le pullback**, ie:

$$\forall \omega \in \Omega^k(M) ; f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

9.9 Existence de la dérivée extérieure

On cherche alors une forme nécessaire, pour toute forme $\omega \in \Omega^k(M)$, si (U, ϕ) est une carte, on a:

$$d\omega|_U = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_I \sum_{j \leq n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^I$$

Sur U , il existe donc une unique dérivée extérieure définie par l'expression ci-dessus. On définit alors une dérivée extérieure $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$ globalement par l'expression trouvée ci-dessus dans la carte (U, ϕ) , ie:

$$d\omega_p = (d\omega|_U)_p$$

On montre alors que cette définition ne dépend pas de la carte (U, ϕ) choisie et que cet opérateur ainsi défini est **unique**.

Chapter 10

Orientation d'une variété

Dans le troisième chapitre, on a défini la notion de variété à bord, puis par la suite celle de forme volume qui définit si une variété est orientable ou non. On se pose alors les questions suivantes

- Si une variété est orientable, qu'est ce qu'une "orientation" de celle ci ?
- Si une variété est orientable, est-ce que son bord l'est et comment l'orienter ?

10.1 Notion d'orientation

Soit M une variété orientable, alors on définit la relation d'équivalence suivante sur les formes volumes:

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega^n(M), \omega \sim \omega' \iff \exists f > 0 \text{ telle que } \omega = f \cdot \omega'$$

On appelle **orientation** de M un choix d'une classe d'équivalence pour chaque composante connexe de M .

Dans une de ces composantes connexes, on montre qu'il n'y a que **deux classes d'équivalences**.

Par exemple sur \mathbb{R}^3 , voici deux représentants des deux classes d'équivalences:

$$\det = dx \wedge dy \wedge dz \quad \overline{\det} = dy \wedge dx \wedge dz$$

On note alors (M, ω) une variété orientée par la forme volume ω . Si M est une variété orientée, ie telle qu'on a choisi une orientation sur celle-ci, on note $-M$ la variété d'orientation opposée.

10.2 Cas particulier des variétés de dimension nulle

Si M est de dimension nulle, alors c'est un ensemble fini de points, se pose alors la question suivante:

Que signifie alors une orientation sur une des composantes connexes (ie sur un point) ?

C'est un fait simplement la donnée d'un signe \pm sur ce point, en effet une 0-forme est un nombre et donc une forme volume correspond ici à un nombre qui ne s'annule jamais.

10.3 Orientation de l'espace tangent

La donnée d'une orientation ainsi définie sur M et en fait exactement la donnée d'une même orientation sur chaque espace tangent. En particulier on dira qu'une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de TM_p est **directe** si et seulement si:

$$\omega_p(v_1, \dots, v_n) > 0$$

Aussi si on considère n champs de vecteurs X_1, \dots, X_n tels qu'en tout points, ils forment une base de TM_p , la fonction numérique suivante ne s'annule pas et est lisse:

$$p \mapsto \omega_p(X_1(p), \dots, X_n(p))$$

Donc en particulier, on peut faire en sorte qu'elle soit strictement positive, ie qu'elle munisse chaque espace tangent d'une base directe pour ω . Ceci donne une interprétation géométrique simple à la notion d'orientabilité et d'orientation.

10.4 Difféomorphismes qui préservent l'orientation

On peut alors considérer deux variétés $(M, \omega), (N, \eta)$ deux variétés orientées munies de leur atlas orienté. Alors on dira qu'un difféomorphisme $F : M \rightarrow N$ **respecte l'orientation** si et seulement si:

$$F^* \eta \sim \omega$$

10.5 Atlas orienté

On considère dans toute la suite une variété orientable M muni d'une forme volume ω . On munit toujours \mathbb{R}^n de sa forme volume canonique, on définit alors la notion de **carte orientée** et on dira:

- Une carte est orientée **positivement** si elle préserve l'orientation de \mathbb{R}^n , alors le coefficient de la forme volume est **positif**.
- Une carte est orientée **négativement** si elle ne préserve pas l'orientation de \mathbb{R}^n , alors le coefficient de la forme volume est **négatif**.

On appelle alors **atlas orienté** un atlas tel que les cartes soient orientées positivement. Un résultat d'équivalence important (que nous ne démontrerons pas car inutile pour nous) est alors qu'une variété est orientable si et seulement si elle admet un atlas orienté.

10.6 Propriétés des atlas orientés

On peut montrer que si M est muni d'un atlas orienté, alors les changements de cartes ont un **jacobien positif**.

En outre, si $F : (M, \omega) \rightarrow (N, \eta)$ est un difféomorphisme entre deux variétés orientées munies de tels atlas, on peut alors caractériser le fait qu'il préserve l'orientation par la positivité de son déterminant jacobien dans n'importe quelles cartes.

10.7 Produit intérieur d'une forme

En effet, étant donné un champs de vecteurs X , on peut construire une $k-1$ forme à partir d'une k forme par évaluation partielle en X sur la première composante, cette opération appelée **produit intérieur** est définie par:

$$\iota_X(\omega) : p \mapsto \omega(X_p, \cdot, \dots, \cdot)$$

Ceci se généralise et on peut alors construire une $k-p$ forme avec la donnée de p champs de vecteurs.

10.8 Vecteurs entrants et sortants

Soit M une variété à bords, p un point du bord et (U, ϕ) une carte qui contient p , alors tout vecteur de $v = TM_p$ est de la forme:

$$v = \sum_{i \leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Alors on définit la notion de vecteur entrant et sortant:

- On dira que v est **entrant** si et seulement si $v_n > 0$.
- On dira que v est **sortant** si et seulement si $v_n < 0$.

On cherche alors à définir un champs de vecteurs sortants lisse X sur le bord de M , on peut alors montrer qu'un tel champ **existe toujours** et il nous permettra alors de définir l'orientation sur ∂M .

10.9 Orientation du bord d'une variété

Soit M une variété orientable de forme volume ω , X un champs de vecteurs sortants lisse sur le bord de M , alors on définit sur ∂M la $n-1$ forme $\iota_X(\omega)$ et on montre que c'est bien une forme volume sur le bord. En particulier, on a la propriété fondamentale suivante:

Le bord d'une variété orientable à bord est orientable.

10.10 Expression de la forme volume induite

Si ω est la forme volume sur M , de coordonnées locales:

$$\omega = \tilde{\omega} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

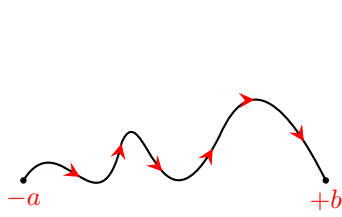
Alors $\iota_S(\omega)$ est la forme volume sur ∂M et a pour expression locale:

$$\iota_S(\omega) = \tilde{\omega}(-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

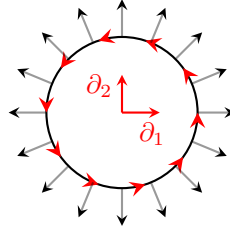
Par exemple sur $\partial\mathbb{H}^2$, on a la forme volume dx , mais on remarque que sur $\partial\mathbb{H}^3$, on obtient plutôt $dy \wedge dx$ qui est l'orientation opposée à celle de \mathbb{R}^2 .

10.11 Exemples pratiques d'orientation du bord d'une variété

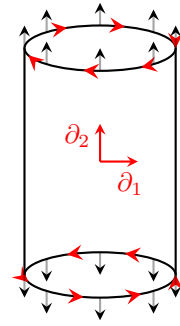
De manière plus concrète, on peut considérer quelques exemples usuels de variété à bord pour essayer de mieux comprendre comment s'oriente le bord d'une variété. Voici quelques exemples:



(1) Cas d'une courbe



(2) Cas du cercle



(3) Cas du cylindre

En fait on comprends alors que pour orienter le bord sachant une orientation sur l'intérieur, il suffit de placer le premier vecteur de la base de l'intérieur dans la même direction que le vecteur sortant et l'orientation du bord est alors l'ajout de vecteurs tels que la base complétée coïncide avec la base de l'intérieur.

10.12 Cas de $\partial\mathbb{H}^n$

Comme vu précédent le cas de $\partial\mathbb{H}^n$ est spécifique car sa forme volume induite est donnée par:

$$\omega = (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

En particulier on remarque deux cas:

- Si n est **pair**, alors l'orientation de $\partial\mathbb{H}^n$ est celle de \mathbb{R}^{n-1} .
- Si n est **impair**, alors l'orientation de $\partial\mathbb{H}^n$ est opposée à celle de \mathbb{R}^{n-1} .

Avec les notations définies plus haut, on note donc $\partial\mathbb{H}^n = \pm\mathbb{R}^{n-1}$ selon la parité de n . Ceci signifie aussi que le difféomorphisme suivant préserve l'orientation ssi n est pair:

$$Id : (\mathbb{R}^{n-1}, \det) \longrightarrow (\partial\mathbb{H}^n, \iota_S(\omega))$$

Chapter 11

Intégrale d'une forme sur une variété

Dans ce chapitre, nous définissons le concept principal qui mènera au théorème de Stokes, ie la notion **d'intégrale d'une forme volume sur une variété orientée**. L'optique étant de définir tout d'abord l'intégrale d'une telle forme dans \mathbb{R}^n et \mathbb{H}^n , puis de s'y ramener dans le cas d'une variété.

11.1 Intégrale d'une fonction

Le problème principal dans la définition de l'intégrale sur une variété est le suivant, **intégrer une fonction dépend des cordonnées choisies**. En effet on pourra imaginer définir l'intégrale d'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact D et dont celui ci est inclu dans une carte (U, ϕ) par:

$$\int_D f = \int_{\phi(D)} f \circ \phi^{-1}$$

Mais en fait cette intégrale serait alors mal définie ! En effet si D est inclu dans deux cartes différentes $(U, \phi), (V, \psi)$, les deux intégrales correspondantes sont différentes ! Ceci permet alors de justifier l'assertion suivante: **Les fonctions ne sont en fait pas la bons objets à intégrer**.

11.2 Intégrale sur \mathbb{R}^n

Les objets naturels pour être intégrés sur une variété de dimension n sont donc en fait les n -formes. Dans le cas simple de \mathbb{R}^n , on considère une telle forme $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors on dira que cette forme est **intégrable** et on définit son intégrale par:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx^1 \dots dx^n$$

On notera alors plus simplement $\omega \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si la fonction coefficient de ω est intégrable, même si c'est un léger abus de notation.

11.3 Formule du changement de variable dans \mathbb{R}^n

Etant donnée une n -forme $\omega \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et un difféomorphisme $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on montrer la formule suivante:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^* \omega = \begin{cases} + \int_{\mathbb{R}^n} \omega & \text{Si } F \text{ préserve l'orientation canonique.} \\ - \int_{\mathbb{R}^n} \omega & \text{Si } F \text{ inverse l'orientation canonique.} \end{cases}$$

En particulier, si F est de déterminant positif, on a égalité et la formule du changement de variable:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} (\omega \circ F) \det(J_F) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

11.4 Intégrale locale sur M

On souhaite alors définir l'intégrale d'une n -forme ω sur une variété orientée M et munie d'un **atlas orienté**. Si elle est telle que son support soit inclu dans une carte (U, ϕ) . Alors on dira que ω est **intégrable** ssi $\phi^*\omega$ l'est, et alors on définit:

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} \phi^* \omega$$

Cette expression est bien définie, ie ne dépend pas du choix de la carte. En effet par construction, les changements de cartes sont de déterminant positif et on applique alors la formule du changement de variables.

11.5 Intégrale sur M

On peut alors finalement définir l'intégrale d'une n -forme sur toute la variété. En effet soit $\omega \in \Omega^n(M)$, alors on considère une partition de l'unité (ρ_α) subordonnée à l'atlas. On dira alors que ω est **intégrable** si et seulement si $\phi_\alpha^*(\rho_\alpha \omega)$ l'est pour tout α et alors on définit son intégrale par:

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$$

On peut alors montrer que celle ci est bien définie, ie:

- Elle ne dépend pas du choix de l'atlas orienté.
- Elle ne dépend pas du choix de la partition de l'unité.

11.6 Propriétés de l'intégrale

On peut alors facilement montrer que l'intégrale ainsi définie est **linéaire** et vérifie:

$$\int_M \omega = - \int_{-M} \omega$$

Cette identité découle alors directement du fait que $\text{Id} : (M, \text{vol}) \rightarrow (M, -\text{vol})$ ne préserve pas l'orientation.

11.7 Intégrale sur M

L'intégrale ainsi définie a une utilité surtout théorique, dans les cas pratique où on veut calculer une intégrale explicitement elle est pour ainsi dire inutile. Si on veut pouvoir effectuer des calculs, on essaye plutôt de partitionner le support A en cartes bien choisies (ie telles que la différence entre l'union des cartes et A se ramène au pire à un ensemble de mesure nulle). De cette façon, on se ramène à une somme d'intégrales sur des cartes.

11.8 Intégrale usuelle comme cas particulier

On peut alors chercher à exprimer l'intégrale d'une fonction lisse à support compact sur un domaine simple comme un cas particulier d'intégrale d'une forme différentielle, et en effet c'est le cas:

- Si on considère la 1-forme $\omega = f(x)dx$ et $\Gamma =]a; b[\subseteq \mathbb{R}$, on obtient:

$$\int_\Gamma \omega := \int_{]a; b[} \gamma^* \omega = \int_{]a; b[} \omega_t(\text{Id}(t)) = \int_{]a; b[} f(t)dt$$

- Si on considère la 2-forme $\omega = f(x, y)dx \wedge dy$ et $\Sigma =]0; 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, on obtient:

$$\int_\Sigma \omega := \int_{]0; 1]^2} \Sigma^* \omega = \int_{]0; 1]^2} \omega_{u,v}(\text{Id}(u, v)) = \int_{]0; 1]^2} f(u, v)dudv$$

Néanmoins c'est bien une notion plus générale car elle nous permettra, à terme, de calculer l'intégrale de la 1-forme $x dy + y dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ qui n'est pas de la forme $f(t)dt$ ceci sur une courbe (sous-variété de \mathbb{R}^2), on donne un exemple dans la partie suivante sans expliquer la théorie sous-jacente.

11.9 Exemple moins simple

On considère le cercle \mathbb{S}^1 vu comme le bord de \mathbb{B}^1 . Alors si on note $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ l'inclusion, alors la forme de \mathbb{R}^2 suivante $xdy - ydx$ se ramène sur le cercle en la forme:

$$\eta = \iota^* \omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$$

On peut alors chercher à intégrer η sur le cercle. On paramétrise alors celui ci par:

$$\begin{cases} \gamma_1 : t \in]0; \pi[\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \\ \gamma_2 : t \in]\pi; 2\pi[\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{cases}$$

Alors ces paramétrages respectent bien l'orientation induite (on montre en effet qu'elle est trigonométrique), et on a alors:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \eta = \int_{]0; \pi[} \gamma_1^* \eta + \int_{] \pi; 2\pi[} \gamma_2^* \eta = 2\pi$$

Chapter 12

Théorème de Stokes-Cartan

Dans tout les chapitres précédents, nous avons présenté un cadre théorique suffisant pour énoncer et comprendre le théorème fondamental de l'intégration, généralisation du théorème fondamental de l'analyse.

On considère une variété orientable M dont on muni le bord de l'orientation induite. Alors si $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ et si on note $\iota : \partial M \hookrightarrow M$, on peut montrer le **théorème de Stokes-Cartan**:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega$$

12.1 Quelques remarques

On peut alors faire plusieurs remarques sur cet énoncé:

- Si M est **sans bords**, alors on a $\partial M = \emptyset$ donc l'intégrale est nulle.
- Si M est de dimension 1, alors $\omega = f(x)$ et on retrouve le théorème fondamental de l'analyse:

$$\int_{\Gamma} df = \int_{\partial \Gamma} f = \sum_{x \in \partial \Gamma} \pm f(x)$$

- Si M est de dimension 2, alors $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ et on retrouve le théorème de Green:

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial \Sigma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Chapter 13

Applications

13.1 Cas de la dimension 3

Dans le cas de \mathbb{R}^3 , on a la chaîne suivante:

$$\Lambda^0 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_0} \Lambda^1 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_1} \Lambda^2 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_2} \Lambda^3 \mathbb{R}^3$$

On peut alors montrer facilement que les dimensions des différents espaces suivent la suite $(1, 3, 3, 1)$ et les propriétés surprenantes suivantes:

- On a d_0 qui s'identifie **au gradient de la fonction**.
- On a d_1 qui s'identifie **au rotationnel du champ de vecteurs**.
- On a d_2 qui s'identifie **à la divergence du champ de vecteurs**.

Et par la propriété fondamentale de la dérivée extérieure, on a alors les formules classiques suivantes comme simple conséquence:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\nabla f) = 0 \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0 \end{cases}$$

Chapter 14

Conclusion & Bibliographie

Ce projet particulièrement intéressant m'a permis de découvrir beaucoup de nouvelles théories, de la géométrie différentielle, à l'algèbre tensorielle en passant par des perspectives de topologie algébrique. Les preuves et définitions de ce projet sont principalement tirées de deux ouvrages:

- *Introduction to Smooth Manifolds, Springer, 2012* de John M. Lee
- *An Introduction to Manifolds, Springer, 201* de Loring W. Tu

L'objectif était de réaliser une synthèse extrême de la théorie permettant de démontrer le théorème de Stokes dans le cadre le plus général possible. J'ai l'impression d'avoir réussi ce travail, j'ai fais en sorte de ne jamais reculer devant la généralité tout en essayant de faire le tri entre les notions pertinentes ou non pour l'objectif visé. On pourrait objecter qu'il manque beaucoup de choses importantes, par exemple et sans être exhaustif:

- *Quid des sous-variétés ?*
- *Quid des formes fermées, exactes ?*
- *Quid de variétés riemanniennes, à coins ?*
- *Quid des propriétés des champs de vecteurs, les flots, les courbes intégrales ?*
- *Quid de la cohomologie de De Rham ?*

De manière générale, je pense que la seule réponse à ces questions c'est que j'ai été obligé de faire des choix qui m'ont guidé tout le long de ce projet, et qui m'ont permis (d'essayer) de ne pas trop m'éparpiller. A terme, c'est un projet que je compte continuer dans tout les cas pour ma curiosité personnelle, et donc rajouter des sections à propos de tout ces sujets fascinants.

Enfin, je voudrais quand même remercier Mr. Berthomieux et Mr. Levy pour leur aide (très précieuse) pour la bonne réalisation de ce projet.