

Variétés différentielles - Preuves

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

Chapitre 0 - Elements d'algèbre tensorielle :

L'espaces des tenseurs est un espace vectoriel :

On considère l'espace $\mathcal{T}^p(E)$ l'espace des tenseurs p-covariants, montrons que c'est un sev de $\mathcal{F}(E^p, \mathbb{R})$, on a:

- L'application nulle est bien un tenseur p-covariant.
- Si $T, T' \in \mathcal{T}^p(E)$, alors $T + T' = (v_1, \dots, v_p) \mapsto T(v_1, \dots, v_p) + T'(v_1, \dots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.
- Si $T \in \mathcal{T}^p(E)$, alors $\lambda T = (v_1, \dots, v_p) \mapsto \lambda T(v_1, \dots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.

Le produit tensoriel est bien défini :

On considère:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{T}^p(E) \times \mathcal{T}^q(E) &\longrightarrow \mathcal{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \alpha(x_1, \dots, x_p) \beta(y_1, \dots, y_q)$$

Alors si $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in E^{p+q}$, par linéarité de chacun des tenseurs, on vérifie bien que $\alpha \otimes \beta$ est bien multilinéaire.

Base et dimension de l'espace des tenseurs :

Si on note $(e_i)_{i \leq n}$ une base de E et $T \in \mathcal{T}^p(E)$, alors on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, x_p) &= T \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq n} x_{1,i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{1 \leq i_p \leq n} x_{p,i_p} e_{i_p} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} x_{1,i_1} \dots x_{p,i_p} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Mais on remarque alors que le produit $x_{1,i_1} \dots x_{p,i_p}$ consiste alors en l'évaluation en (x_1, \dots, x_p) du tenseur:

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

Et donc on obtient:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

En d'autres termes, la famille $(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p})_{i_1, \dots, i_p \in \llbracket 1 ; n \rrbracket}$ engendre l'espace. Elle est aussi libre car si on considère une famille de scalaires $(\lambda_{i_1, \dots, i_p})$ tels que:

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} = 0 :$$

Alors si on évalue cette forme en $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, on annule tout les termes sauf $\lambda_{i_1, \dots, i_p}$ qui est donc nul. Et en répétant ceci, on trouve que les $(\lambda_{i_1, \dots, i_p})$ sont tous nuls. Cette famille est donc une base et la dimension de l'espace est alors p^n .

Propriété de signature d'un tenseur antisymétrique :

On se donne une permutation $\sigma \in S_p$ et un tenseur antisymétrique $T \in \mathcal{T}^p(E)$, montrons que:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma)T(x_1, \dots, x_n)$$

Alors on peut décomposer $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ en k transpositions et on a alors:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = T_{\tau_1 \dots \tau_k}(x_1, \dots, x_n) = T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Où la dernière égalité pose que τ_k permute x_i, x_j . Alors on trouve par antisymétrie:

$$T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

Alors par récurrence, on répète le processus pour obtenir:

$$T_\sigma = (-1)^k T$$

Où k est le nombre de transposition dans la décomposition de σ et ce coefficient est exactement $\varepsilon(\sigma)$.

L'antisymétrisation d'un tenseur est bien antisymétrique :

On se donne un tenseur $T \in \mathcal{T}^p(E)$, montrons que le tenseur suivant est bien antisymétrique:

$$\text{Asym}(T)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

On a que si on permute x_i, x_j avec $i \leq j$, on a:

$$\begin{aligned} \text{Asym}(T)(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\ &= -\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\ &= -T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Donc $\text{Asym}(T)$ est bien antisymétrique.

Base et dimension de l'espace des tenseurs antisymétriques :

On utilise la même approche que pour l'espace des tenseurs, soit T un p -tenseur antisymétrique, alors par multilinéarité:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

Mais T est antisymétrique, donc les indices des termes non nuls sont différents, ie on somme en fait sur $I = \{(i_1, \dots, i_p) ; \forall p, q \ i_p \neq i_q\}$. Aussi par un raisonnement combinatoire, il est équivalent de sommer sur des indices distincts et de sommer sur des indices strictement croissants puis sur toutes les permutations de ceux ci, ie on a:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} T(e_{\sigma(i_1)}, \dots, e_{\sigma(i_p)}) e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) p! \text{Asym}(e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_p)}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \end{aligned}$$

Donc la famille est génératrices des tenseurs antisymétriques. En outre elle est libre par un argument similaire à celui des tenseurs simples. En particulier, un tel tenseur est donc uniquement déterminé par son image sur toutes les vecteurs de la base indexés par une suite strictement croissante, et il y a $\binom{n}{p}$ telles suites, c'est donc la dimension de $\Lambda^p E^*$.

Propriétés algébriques du produit extérieur :

...

Déterminant :

Soit $\mathcal{B} = (e^i)_{i \leq n}$ une base duale de E ainsi), alors on a par définition:

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(n)}$$

Donc si on considère (x_1, \dots, x_n) des vecteurs de E , alors on évalue:

$$\begin{aligned} e^1 \wedge \dots \wedge e^n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)}(x_1) \dots e^{\sigma(n)}(x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) x_{1, \sigma(1)} \dots x_{1, \sigma(n)} \\ &= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Attention ici la notation $x_{i,j}$ signifie bien la j -ième coordonnée de x_i dans la base (non canonique a priori) des (e_i) .

Chapitre 4 - Variétés :

La différentiabilité est bien définie :

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, il s'agit de montrer que pour $p \in M$ et deux cartes $(U, \phi), (V, \psi)$ qui le contiennent, alors:

$$f \circ \phi \text{ différentiable} \iff f \circ \psi \text{ différentiable}$$

Alors on a:

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ c_{\psi, \phi}$$

Où c est l'application de changement de carte associée. On en déduit donc que si $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable alors $f \circ \phi^{-1}$. De manière analogue si $f : M \rightarrow N$ est différentiable pour deux cartes $(U, \phi), (V, \psi)$ de $p, f(p)$, alors par composition, on en déduit de même.

Chapitre 7 - Espaces tangents dans \mathbb{R}^n :

Propriété des dérivations :

Si f est une fonction lisse constante égale à $c \in \mathbb{R}$, et D une dérivation au point $p \in \mathbb{R}^n$, alors $Df = 0$, en effet on a:

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g) \iff$$

$$D(cg) = D(f)g(p) + cD(g) \iff \quad (\text{Car } fg = cg \text{ en tant que fonction.})$$

$$cD(g) = D(f)g(p) + cD(g) \quad (\text{Linéarité de } D.)$$

On conclut de la dernière égalité que $D(f)g(p) = 0$ et il suffit alors de choisir g de telle sorte qu'elle ne s'annule pas en p pour conclure.

$T\mathbb{R}_p^n$ est un espace vectoriel isomorphe à \mathbb{R}^n :

On considère l'application suivante:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_p^n &\longrightarrow T\mathbb{R}_p^n \\ v &\longmapsto \sum_{i \leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \end{aligned}$$

Linéarité: Découle directement de la définition ..

Injectivité: Supposons que $v \in \mathbb{R}_p^n$ soit tel que:

$$D = \Phi(v) = 0$$

Alors pour toute fonction lisse $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_p^n, \mathbb{R})$, on a $Df = 0$. Alors en particulier pour les fonctions coordonnées $(x_i)_{i \leq n}$, on a:

$$\sum_{j \leq n} v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \Big|_p = v_i = 0$$

Donc toutes les composantes de v sont nulles et $v = 0$.

Surjectivité: **A finir !**

Chapitre 8 - Espaces tangents dans M :

Propriété de la différentielle :

On considère $f : M \rightarrow N$ lisse et un point $p \in M$, et on considère l'application suivante:

$$df_p : D \in TM_p \longmapsto D(\cdot \circ f) \in TN_{f(p)}$$

- **Bien définie:** Si D est une dérivation en p , alors $g \circ f$ est bien lisse et on a:

$$\begin{aligned} df_p(D)(gh) &= D(gh \circ f) \\ &= D((g \circ f)(h \circ f)) \\ &= D(g \circ f)(h \circ f)(p) + (g \circ f)(p)D(h \circ f) && (\text{Car } D \text{ est une dérivation en } p.) \\ &= df_p(g)h(f(p)) + g(f(p))df_p(h) \end{aligned}$$

Et donc $df_p(D)$ est bien une dérivation en $f(p)$.

- **Linéarité:** Découle directement de la définition.
- **Règle de la chaîne:** Soit $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow L$ deux applications lisses entre des variétés. Soit $p \in M$, alors par définition:

$$d(g \circ f)_p : D \in TM_p \longmapsto D(\cdot \circ g \circ f) \in TL_{g(f(p))}$$

Il s'agit de montrer que cette fonction est égale à $dg_{f(p)} \circ df_p$, les domaines de définition coïncident bien, soit D une dérivation de TM_p , alors on a:

$$dg_{f(p)} \circ df_p(D) = dg_{f(p)}(df_p(D)) = dg_{f(p)}(D(\cdot \circ f)) = D(\cdot \circ g \circ f)$$

On a donc égalité des images et donc égalité des fonctions.

Propriété de structure :

Finalement montrons que si $f : M \longrightarrow N$ est un **difféomorphisme**, alors df_p est un **isomorphisme** en tout point. On utilisera le lemme (presque évident) suivant:

$$d(Id_M)_p = Id_{TM_p}$$

Alors si f est un difféomorphisme, en tout point p , on a:

$$\begin{cases} d(f^{-1} \circ f)_p = df_{f(p)}^{-1} \circ df_p = Id_{TM_p} \\ d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = df_p \circ df_{f(p)}^{-1} = Id_{TN_{f(p)}} \end{cases}$$

Finalement, ceci montre que df_p est bijective d'inverse $df_{f(p)}^{-1}$ et linéaire par définition, on a donc bien:

$$TM_p \cong TN_{f(p)}$$

On en déduit directement en utilisant que toute carte ϕ est un difféomorphisme et donc qu'en tout point d'une variété on a:

$$TM_p \cong T\mathbb{R}_{\phi(p)}^n \cong \mathbb{R}^n$$

Changement de représentation des vecteurs tangents :

Si $(U, \phi), (V, \psi)$ sont deux cartes qui contiennent un point p , alors si on note x_i, y_i les coordonnées respectives dans la première et la deuxième carte et $c = \psi \circ \phi^{-1}$ l'application de changement de carte alors pour toute fonction lisse g , on a:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p g &= \frac{\partial g \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p)) \\ &= \frac{\partial g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p)) \\ &= \sum_{j \leq n} \frac{\partial g \circ \psi^{-1}}{\partial y_j}(\psi(p)) \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) && \text{(Règle de la chaîne dans } \mathbb{R}^n) \\ &= \sum_{j \leq n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p g \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute application g , on a donc:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = \sum_{j \leq n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p$$

Si on note (x_1, \dots, x_n) les composantes de $\phi(p)$, on a donc:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)} = \sum_{j \leq n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_{\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)}$$

Le fibré tangent est un variété de dimension $2n$ - Partie 1 :

On définit donc le fibré tangent à M comme la réunion disjointe $\bigsqcup_{p \in M} TM_p$, alors le seul objet à notre disposition est la projection:

$$\begin{aligned}\pi : TM &\longrightarrow M \\ (p, v) &\longmapsto p\end{aligned}$$

On procède par étapes:

- Tout d'abord on définit une **topologie** sur TM grâce à π en effet, on considère la topologie engendrée par la famille suivante:

$$\left\{ \pi^{-1}(\mathcal{O}) ; \mathcal{O} \in \mathcal{T}_M \right\}$$

C'est en fait la plus petite topologie qui rende π continue.

- On doit alors construire un atlas de TM , soit $(p, v) \in TM$, alors étant donnée une carte (U, ϕ) qui contient p , on remarque que $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de TM , et on définit un prototype de carte locale pour un point du fibré par:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\longmapsto (\phi(p), v_1, \dots, v_n)\end{aligned}$$

Où ici les (v_i) sont les coordonnées du vecteur $v \in TM_p$ dans la base associée à la carte locale ϕ .

Définissons maintenant l'atlas sur TM , on considère l'atlas (U_i, ϕ_i) de M , alors elles recouvrent M . On pose alors $(\pi^{-1}(U_i), \Phi_i)$ où Φ_i est la carte locale définie plus haut. On doit montrer que:

1. Les $\pi^{-1}(U_i)$ recouvrent TM .
2. Les Φ_i sont des homéomorphismes sur leurs images.
3. Les applications de changement de cartes sont lisses.

Le fibré tangent est un variété de dimension $2n$ - Partie 2 :

1. Soit (p, v) un point de TM , alors si (U, ϕ) est une carte qui contient p , on a que $(p, v) \in \pi^{-1}(U)$, donc on a bien un recouvrement.
2. Les $\tilde{\phi}_i$ sont des bijections sur leurs images, en effet on peut écrire l'inverse pour tout $(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^n$, on pose:

$$\tilde{\phi}^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = \left(\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n), \sum_{i \leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)} \right)$$

Aussi, $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^{-1}$ sont continues par composantes, pour la première composante car ϕ est continue, et pour les autres ?

3. Les applications de changement de cartes sont lisses, en effet soit $(U, \phi), (V, \psi)$ deux cartes qui contiennent p , alors $(\pi^{-1}(U), \Phi), (\pi^{-1}(V), \Psi)$ sont les cartes correspondantes de TM , alors:

$$\begin{cases} E = \Phi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \\ F = \Psi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Et donc on peut calculer l'application de changement de cartes:

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) &= \Psi \left(\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n), \sum_{i \leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)} \right) \\ &= \left(\psi \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n), \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq n} v_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)} \right)\end{aligned}$$

Chapitre 9 - Espaces cotangents dans M :

Différentielle abstraite et différentielle usuelle - Partie 1:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ s'identifie à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors pour toute fonction lisse $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} df_p(v)(g) &= \sum_{i=1}^n v_i df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (g) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial g}{\partial t}(f(p)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)} \right) (g) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute fonction lisse g , on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{f(p)}$$

Différentielle abstraite et différentielle usuelle - Partie 2:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow N$ s'identifie aussi à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors pour toute fonction lisse $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} df_p(v)(g) &= \sum_{i=1}^n v_i df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (g) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(p)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} \right) (g) \end{aligned}$$

Où ici f_j représente les coordonnées locales de f au voisinage de $f(p)$, ie $f_j = (\psi \circ f)_j(p)$. Ceci étant vrai pour toute fonction lisse g , on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}$$

Chapitre 10 - Formes différentielles dans M :

Existence de la dérivée extérieure locale - Analyse :

On procède par analyse-synthèse, et on considère une dérivée extérieure d qui vérifie les axiomes. Alors pour toute k -forme $\omega \in \Omega^k(U)$, on a nécessairement:

$$\begin{aligned} d\omega_p &= d \left(\sum_I \omega_I(p) dx^I \right) \\ &= \sum_I d(\omega_I(p) dx^I) && \text{(Linéarité)} \\ &= \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I + \omega_I(p) d(dx^I) && \text{(Leibniz)} \\ &= \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I \end{aligned}$$

La dernière ligne venant du fait que $d(dx^I) = 0$, en effet on explicite les indices et par une récurrence assez évidente et $d^2 = 0$ on conclut.

Existence de la dérivée extérieure locale - Synthèse :

Pour tout $p \in M$, pour toute k -forme $\omega \in \Omega^k(U)$, alors on définit dans les coordonnées locales associées à une carte (U, ϕ) l'opérateur suivant:

$$d\omega_p = \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I$$

Alors on doit montrer que cet opérateur est bien une dérivée extérieure.

Généralisation de la différentielle :

Si $f \in \Omega^0(M)$, c'est une fonction lisse, et alors d agit par définition par différentiation des coefficients, l'unique coefficient de la 0-forme f , étant elle-même, on conclut.

Linéarité de la dérivée extérieure :

On se donne ω, η deux k -formes sur M ainsi que λ un scalaire, alors on a:

$$d(\omega + \lambda\eta)_p = d \left(\sum_I (f_I + \lambda g_I)(p) dx^I \right) = \sum_I d(f_I + \lambda g_I)(p) \wedge dx^I = d\omega_p + \lambda d\eta_p$$

Formule de Leibniz :

On se donne ω, η respectivement une k -forme et une l -forme sur M alors on a:

$$\begin{cases} \omega_p = \sum_I \omega_I(p) dx^I \\ \eta_p = \sum_J \eta_J(p) dx^J \end{cases}$$

On a alors:

$$(\omega \wedge \eta)_p = \sum_{I,J} (\omega_I \eta_J)(p) dx^I \wedge dx^J$$

Appliquons la dérivée extérieure:

$$d(\omega \wedge \eta)_p = \sum_{I,J} d(\omega_I \eta_J)(p) \wedge dx^I \wedge dx^J$$

Les fonctions différentiées sont scalaires, donc on applique la règle du produit:

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta)_p &= \sum_{I,J} (d\omega_I(p)\eta_J(p) + \omega_I(p)d\eta_J(p)) \wedge dx^I \wedge dx^J && \text{(Par définition.)} \\
&= \sum_{I,J} d\omega_I(p)\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J + \sum_{I,J} \omega_I(p)d\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J && \text{(Distributivité du produit extérieur.)} \\
&= \sum_{I,J} d\omega_I(p) \wedge dx^I \wedge \eta_J(p)dx^J + \sum_{I,J} d\eta_J(p) \wedge \omega^I(p)dx^I \wedge dx^J && \text{(Bilinéarité du produit extérieur.)} \\
&= d(\omega \wedge \eta)_p + (-1)^k \sum_{I,J} \omega_I(p)dx^I \wedge d\eta_J(p) \wedge dx^J && (*) \\
&= d(\omega \wedge \eta)_p + (-1)^k (\omega \wedge d\eta)_p \\
&= (d\omega \wedge \eta + (-1)^k (\omega \wedge d\eta))_p
\end{aligned}$$

Où pour trouver (*), on identifie le premier terme, et on utilise le fait que $\eta_J(p)$, dx_I sont respectivement une 1-forme et une k -forme et il y a donc k échanges à faire et donc k application de l'antisymétrie.

Propriété fondamentale de la dérivée extérieure :

On considère une k forme $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$, alors on a:

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_I \sum_{i \leq n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I$$

Et donc si on dérive à nouveau on obtient:

$$dd\omega = \sum_I \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I$$

On peut alors montrer que pour I fixé, on a:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i = 0$$

En effet si $i = j$ c'est évident, mais si $i \neq j$, on a que:

$$\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i + \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} dx^i \wedge dx^j = 0$$

En effet, ω_I est une fonction lisse donc on applique Schwartz et les dérivées croisées sont égales, mais les produits extérieurs $dx^i \wedge dx^j$ sont opposés. Ceci nous permet d'appairer les termes en n sommes nulles (il y a $2n$ termes dans la somme).

Existence de la dérivée extérieure globale:

Pour tout $p \in M$, pour toute k -forme $\omega \in \Omega^k(M)$, alors on définit dans les coordonnées locales associées à une carte (U, ϕ) l'opérateur suivant:

$$d\omega_p = \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I$$

Alors on doit montrer que cet opérateur est bien défini, ie que $d\omega_p$ ne dépend pas de la carte (U, ϕ) choisie.

Bonne définition :

Soit $\omega \in \Omega^k(M)$, soit $(U, \phi), (V, \psi)$ deux cartes qui contiennent p , montrons que $d\omega_p$ est bien définie, on a dans les deux cartes:

$$\begin{cases} \omega_p = \sum_I a_I(p) dx^I \\ \omega_p = \sum_I b_I(p) dy^I \end{cases}$$

Mais alors sur l'intersection de ces cartes, il existe une dérivée extérieure comme définie plus haut, et c'est un opérateur local donc on a l'implication suivante sur $U \cap V$:

$$\sum_I a_I(p) dx^I = \sum_I b_I(p) dy^I \implies \sum_I da_I(p) \wedge dx^I = \sum_I db_I(p) \wedge dy^I$$

Chapitre 11 - Orientation d'une variété à bord :

Propriétés du produit intérieur :

Expression en coordonnées :

Existence du champs de vecteurs sortant :

Soit M une variété à bords, on souhaite montrer l'existence d'un champs de vecteurs $X : p \rightarrow TM$ **sortant** sur une variété. Dans chaque carte (U_α, ϕ_α) , on peut construire une fonction f_α qui soit nulle sur $U_\alpha \cap \partial M$ et strictement positive en dehors du bord. On considère par la suite une partition de l'unité (ρ_α) induite par l'atlas, alors:

$$f = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} f_{\alpha}$$

Alors par construction $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$ et donc en tout point de son domaine de définition, cette fonction coïncide avec les f_α et sa n -ième dérivée partielle est donc un vecteur entrant. Donc:

$$p \mapsto (p, -\frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p) \in TM$$

C'est bien un champs de vecteurs sortant.

Le produit intérieur avec le champs sortant oriente bien le bord :

Chapitre 12 - Intégrale locale d'une forme :

Chapitre 13 - Intégrale d'une forme :

Chapitre 14 - Théorème de Stokes :

Chapitre 11 - Orientation d'une variété à bords :

Chapitre 12 - Intégrale locale d'une forme :

Chapitre 13 - Intégrale globale d'une forme :

Chapitre 14 - Théorème de Stokes-Cartan :