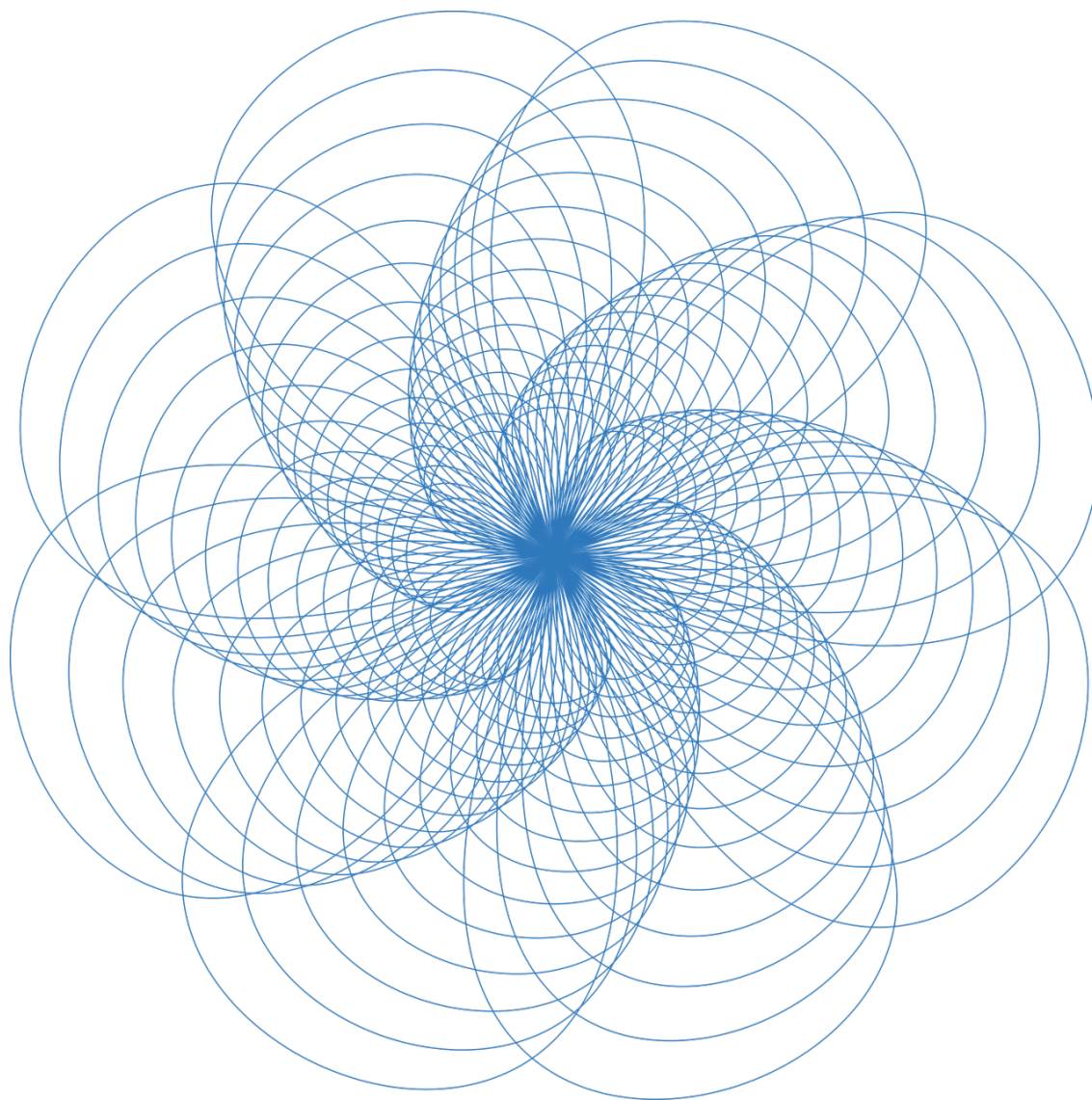


MATHÉMATIQUES

LICENCE



UNIVERSITÉ JEAN-FRANÇOIS CHAMPOLLION
ANNÉE 2022 - 2025

TABLE DES MATIÈRES

XI — INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on cherchera à définir une notion analytique qui généralise le concept de **continuité** et d'**espaces topologiques** en une notion plus générale et qui permettra de démontrer des théorèmes plus généraux et plus puissants ainsi que de développer une théorie de l'intégration plus générale et qui permettra d'intégrer sur des espaces plus complexes.

On appellera alors ces fonctions des fonctions **mesurables** et les espaces considérés les **espaces mesurables**.

Inconvénients de la notion de continuité:

La notion de continuité présente plusieurs problèmes analytiques profonds:

- La limite d'une suite de fonctions continues ne l'est pas forcément.
- La limite d'une suite de fonctions Riemann-intégrables ne l'est pas forcément.
- La limite d'une suite d'intégrales n'est pas nécessairement l'intégrale de la limite.
- L'intégrale sur une partie non-compacte est péniblement gérée par les intégrales généralisées dans les cas simples.
- L'intégrale sur un segment d'une fonction très irrégulière n'est souvent pas définie.
- L'espace des fonctions Riemann-intégrables n'a pas de structure forte.

De manière générale, quand on considère des objets très réguliers (fonctions définies sur des compacts, limites uniformes de suites de fonctions, intégrale sur des domaines compacts), la continuité permet d'obtenir les résultats souhaités mais dans des cas plus exotiques, elle n'est plus suffisante. Considérons par exemple:

$$\begin{aligned} f : I = [a ; b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \end{aligned}$$

Où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ désigne la fonction indicatrice des rationnels, alors on montre facilement que cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann, en effet on a $\int_I^- f = 0 \neq 1 = \int_I^+ f$, mais on pourra définir cette intégrale grâce à la théorie de Lebesgue.

XI — ESPACES MESURABLES

On définit tout d'abord dans ce chapitre le concept fondamental de **tribu** sur un ensemble, qui est un concept analogue à celui de topologie, mais beaucoup moins restrictif, les morphismes de tels espaces seront alors les fonctions mesurables, en lieu et place des fonctions continues.

Définition :

On se donne un ensemble E , on appelle **tribu** sur E tout ensemble de parties \mathcal{A} qui vérifie:

- L'ensemble vide et total appartient à \mathcal{A} .
- La tribu est **stable par passage au complémentaire**.
- La tribu est **stable par union dénombrable**.

On appelle le couple (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et les éléments de la tribu parties mesurables.

Exemples de tribus :

On peut alors construire plusieurs exemples simples de tribu sur E :

- La tribu $\{\emptyset, E\}$ appelée **tribu grossière**.
- La tribu $\mathcal{P}(E)$ appelée **tribu discrète**.

Notion de finesse :

On définit alors une notion de comparaison entre deux tribus \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 , et on dira que \mathcal{A}_2 est **plus fine** que \mathcal{A}_1 si et seulement si on a:

$$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$$

Cela signifie moralement que \mathcal{A}_2 a plus d'ensembles mesurables, par exemple la tribu discrète est la plus fine de toutes les topologies. Cette relation définit alors **une relation d'ordre** sur l'ensemble des tribus.

Tribu engendrée :

On se donne A un ensemble de parties de E , alors on cherche à savoir si il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) telle que les éléments de A soient mesurables, ie la tribu la moins fine qui contienne A .

On peut alors montrer facilement que l'intersection de deux tribus est une tribu et donc que la plus petite tribu qui contienne A existe, c'est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent A . On l'appellera alors **tribu engendrée** par A .

Tribu induite :

Soit $P \subseteq E$, alors E induit une tribu naturelle sur P appelée **tribu induite** définie par:

$$\mathcal{A}_P := \{A \cap M ; M \in \mathcal{A}\}$$

Une partie mesurable de P pour la tribu induite est simplement la trace sur P des parties mesurables de E .

Tribu borélienne :

On considère maintenant que E n'est plus quelconque mais muni d'une **topologie** \mathcal{T} , alors on définit la **tribu borélienne** sur E comme étant la tribu **engendrée par les ouverts de la topologie**. On appelle alors les parties mesurables pour cette tribu les **boréliens**.

Par exemple voici une liste non exhaustive d'exemples sur \mathbb{R} de boréliens :

- Les intervalles ouverts et fermés et leurs unions.
- Les singletons.
- Les intervalles semi-ouverts comme union singleton/intervalle ouvert.
- Les ensembles finis.
- Les ensembles dénombrables.

On voit alors que la tribu des boréliens contient **beaucoup de parties**, en particulier (hautement non-trivial), elle a la cardinalité de \mathbb{R} .

XI — ESPACES MESURÉS

Dans ce chapitre on définit le premier concept fondamental qui ne permettra de mesurer le "volume" d'une partie complexe d'un espace mesurable, en particulier, on appellera **mesure** sur l'espace mesurable (X, \mathcal{A}) tout fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les deux propriétés suivantes:

- **Mesure du vide:** $\mu(\emptyset) = 0$
- **Sigma additivité:** $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$ pour toute famille **dénombrable disjointe**.

On appelle alors le triplet (X, \mathcal{A}, μ) **espace mesuré** et en particulier si $\mu(X) = 1$, on l'appelle alors **espace probabilisé** et on dira alors que μ est une mesure de probabilité.

Propriétés :

On peut alors montrer les propriétés suivantes des mesures sur un espace mesurable:

- **Croissance:** $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- **Sous-additivité:** $\mu(\bigcup A_i) \leq \sum \mu(A_i)$ pour une famille dénombrable de parties quelconques.
- **Limite de mesure croissante:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup A_n)$ pour une famille **croissante**.
- **Limite de mesure décroissante:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap A_n)$ pour une famille **décroissante**.

Mesure de comptage :

Un premier exemple de mesure sur un ensemble non vide X qu'on dote de la tribu discrète $\mathcal{P}(X)$, est défini par la fonction suivante appelée **mesure de comptage**:

$$\begin{aligned} c : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ A &\longmapsto |A| \end{aligned}$$

Cette fonction est donc la **fonction cardinal**.

Mesure de Lebesgue :

On cherche alors à définir une mesure sur la **tribu borélienne** de \mathbb{R} , qui vérifierait la propriété naturelle que $\mu([a; b]) = b - a$, on peut alors montrer le théorème suivant:

Il existe une unique mesure sur les boréliens qui vérifie cette propriété, on l'appelle la mesure de Lebesgue.

On note alors cette mesure λ , illustrons celle-ci en calculant quelques mesures d'ensembles remarquables:

- Mesure des réels: $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup_n]-n; n]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda([-n; n]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = \infty$
- Mesure des rationnels: $\lambda(\mathbb{Q}) = \lambda(\bigcup_n q_n) = \sum_n \lambda(\{q_n\}) = \sum_n \lambda(\{[q_n; q_n]\}) = 0$

En particulier, on a illustré¹ ici que toutes les parties dénombrables (et donc les parties finies) sont de **mesure nulle**. Une prise de recul sur ce concept nous permet alors de voir une différence majeure avec la topologie:

Une partie "grande" pour la topologie (dense) peut être "petite" pour la théorie de la mesure (négligeable).

Propriétés :

Tout d'abord on définit quelques notions de vocabulaire:

- Si $\mu(A) = 0$, on dira que cette partie est **négligeable**.
- Si $\mu(A^c) = 0$, on dira que cette partie est **pleine**.

¹La réciproque est fautive, en effet il existe des ensembles non dénombrables de mesure nulle. L'ensemble de Cantor est l'exemple canonique.

On définit maintenant le concept fondamental de **propriété mesurable**, en effet on définit les concepts suivants:

- On dira qu'une propriété est mesurable si $\{x \in X ; P(x)\}$ est mesurable.
- On dira qu'une propriété est vraie **presque partout** (qu'on abrégera souvent en p.p.) si cette partie est pleine.

Exemple: La fonction $f : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mapsto x$ est définie p.p. car son ensemble de définition est plein.

XI — FONCTIONS MESURABLES

On définit dans ce chapitre le concept fondamental de **fonction mesurable** qui sera l'analogue des fonctions continues en topologie, en effet ce seront les morphismes sur les espaces mesurables. Aussi ce seront les objets intégrables pour cette théorie.

Définition :

On se donne (E, \mathcal{A}_1) et (F, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables et une fonction:

$$f : (E, \mathcal{A}_1) \longrightarrow (F, \mathcal{A}_2)$$

Alors on dira que f est **mesurable** si et seulement si:

$$\forall A \in \mathcal{A}_2 ; f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$$

Une fonction mesurable pour des tribus boréliennes est appelée **fonction borélienne**, en particulier **toute fonction continue est borélienne**. Par ailleurs, on peut facilement montrer que **la composée de fonction mesurables est mesurable**.

On note alors $\mathcal{M}(X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{B}})$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans Y pour leurs tribus respectives et quand le contexte rends évidentes les tribus considérées on note alors cet ensemble $\mathcal{M}(X, Y)$.

Compatibilité avec le recollement :

Contrairement à la continuité, on a la propriété suivante, on se donne une **famille dénombrable** $(A_n)_{n \in I}$ de parties mesurables de E qui partitionnent E , alors:

$$\forall n \in I ; f|_{A_n} \text{ est mesurable} \implies f \text{ est mesurable.}$$

En particulier, il n'y a pas de *problème de recollement*. Plus généralement, c'est vrai pour tout recouvrement dénombrable par des parties mesurables, et donc en particulier pour tout recouvrement par des parties où la fonction est continue.

Lien avec les indicatrices :

On peut alors caractériser la mesurabilité d'une partie A par la mesurabilité de son indicatrice (pour la tribu borélienne de \mathbb{R}), en effet on a la propriété suivante:

$$A \in \mathcal{A} \iff \mathbb{1}_A \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R})$$

XI — FONCTIONS BORÉLIENNES

On s'attarde dans ce chapitre sur le concept de fonctions boréliennes sur (X, \mathcal{A}) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on notera l'ensemble de telles fonctions $\mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mathbb{K})$ ou quand le contexte¹ est évident $\mathcal{M}(X, \mathbb{K})$. Alors dans ce cas on a des propriétés de stabilité très fortes:

- La somme de fonctions boréliennes est borélienne.
- Le produit de fonctions boréliennes est borélienne.
- L'inverse d'une fonction borélienne qui ne s'annule pas est borélienne.

Mais plus encore, on peut alors montrer la propriétés ci-dessous qui donne son utilité au concept de fonction mesurable:

La limite simple d'une suite de fonction mesurable est mesurable.

Fonctions mesurables positives et étendues :

Pour des questions d'intégration nous tout d'abord définir l'intégrale sur les **fonctions mesurables positives étendues** puis sur les fonctions mesurables en général. Quelques définitions supplémentaires:

- On appelle **fonctions mesurables positives** l'ensemble $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}_+)$, aussi noté $\mathcal{M}_+(X)$.
- On appelle **fonctions mesurables positives étendues** l'ensemble $\mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$, aussi noté $\overline{\mathcal{M}}_+(X)$.

Ici on note $\overline{\mathbb{R}}_+$ la demi-droite ie, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0; \infty]$, on étends les propriétés algébriques classique à cet ensemble par:

- $\forall a \in [0; \infty] ; a + \infty = \infty$.
- $\forall a \in]0; \infty] ; a \times \infty = \infty$.
- Enfin l'opération **conventionnelle**² donnée par: $0 \times \infty = 0$.

On note alors que cette demi-droite est le compactifié de la demi-droite classique, et on peut donc étendre la topologie de la demi-droite à la demi-droite étendue. On peut alors définir une **tribu borélienne** sur cette demi-droite.

Propriétés des fonctions mesurables positives étendues :

On note tout d'abord que toute partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est **majorée**, donc on a la propriété suivante:

Toute partie non-vide admet une borne supérieure.

En particulier on a donc que les suites de fonctions mesurables positives étendues sont **stables** par sup et inf, ie on a:

$$(f_n) \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+) \implies \begin{cases} \sup\{f_n\} \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+) \\ \inf\{f_n\} \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+) \end{cases}$$

Où on définit les fonctions suivantes:

$$\begin{cases} \sup\{f_n\} : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} \\ \inf\{f_n\} : x \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} \end{cases}$$

¹Ici on munira **toujours** les fonctions mesurables réelles ou complexe de leur tribu borélienne à l'arrivée.

²**En théorie de la mesure uniquement**, en effet on voudrait pouvoir dire que la mesure de l'aire de la fonction nulle est nulle, néanmoins on a $f^{-1}(0) = \mathbb{R}$ de mesure infinie, donc par convention on dira que la hauteur nulle multipliée par cette longueur infinie est nulle.

Exemple: On se donne la suite $f_n(x) = \arctan(nx^2)$, alors on a:

$$\sup\{f_n\}(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\arctan(nx^2)\}$$

Donc par exemple:

- $\sup\{f_n\}(0) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\arctan(0)\} = \sup\{0\} = 0$
- $\sup\{f_n\}(1) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\arctan(n)\} = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\arctan(n)\} = \frac{\pi}{2}$

Fonctions étagées :

On peut maintenant définir l'objet principal qui va nous permettre de définir notre nouvelle notion d'intégrale, on rappelle tout d'abord qu'une **fonction en escalier** est, pour une famille de n **intervalles** (A_i) de X et de scalaires (λ_i) est une fonction de la forme suivante:

$$e = \sum_{i \leq n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$$

C'est cette forme que l'on veut généraliser en considérant non plus des intervalles mais des parties **mesurables** de X , en particulier on définit alors une **fonction étagée**, pour une famille de n **parties mesurables** (A_i) de X et de scalaires (λ_i) les fonctions de la forme suivante:

$$e = \sum_{i \leq n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Théorème d'approximation :

On peut alors montrer le résultat fondamental suivant, l'analogue du théorème de Stone-Weierstrass pour les fonctions continues qui affirme la proposition suivante:

Toute fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées.

XI — INTÉGRALE DE LEBESGUE

Dans ce section nous définissons l'objet fondamental de ce chapitre à savoir **l'intégrale associée à une mesure** sur un espace mesure (X, \mathcal{A}, μ) , en partant de l'intégrale de fonctions élémentaires, les fonctions étagées jusqu'à l'intégrale d'une fonction mesurable quelconque. En particulier on définira l'intégrale des fonctions selon la progression suivante:

Fonctions étagées \rightarrow Fonctions mesurables positives étendues \rightarrow Fonctions mesurables

Intégrale d'une fonction étagée:

On se donne une fonction étagée e , alors on sait qu'il existe une famille dénombrable de parties mesurables (A_i) et de scalaires (λ_i) telles que:

$$e = \sum \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Alors on définit l'intégrale de cette fonction pour la mesure μ par:

$$\int_X e d\mu = \sum \lambda_i \mu(\mathbb{1}_{A_i})$$

C'est l'intégrale de ces fonctions élémentaires qui nous permettront de construire l'intégrale générale.

Intégrale d'une fonction positive:

On considère alors une fonction $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$, alors on définit:

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X e d\mu ; e \text{ positive et étagée, } e \leq f \right\}$$

On note alors que cette borne supérieure est bien un réel **étendu**, ie elle peut être infinie. En outre, on a d'après le théorème d'approximation l'existence d'une suite qui converge vers cette borne et donc vers l'intégrale. On peut donc définir la fonction suivante:

$$\begin{aligned} \int : \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ f &\longmapsto \int_X f d\mu \end{aligned}$$

On a alors les deux propriétés élémentaires suivantes:

- **Extension de la mesure:** Pour tout mesurable A , on a $\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$
- **Croissance:** Pour toutes fonctions positives mesurables $f \leq g$, on a $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$
- **Linéaire positive:** Pour toutes fonctions positives mesurables f, g et réel **positif** α , on a:

$$\int_X (f + \alpha g) d\mu = \int_X f d\mu + \alpha \int_X g d\mu$$

- **Convergence:** Si (f_n) est une suite **croissante** de fonctions mesurables, alors:

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_n f_n d\mu$$

C'est alors un des résultat principaux de la théorie de la mesure, en effet on a alors qu'une suite de fonctions intégrables au sens de la mesure converge bien vers une fonction intégrable. En outre il est important de noter au préalable que la fonction intégrée est bien définie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ et mesurable:

$$\lim_n f_n : x \longmapsto \lim_n f_n(x)$$

Intégrabilité:

On dira alors qu'une fonction mesurable sur X à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} est **intégrable** si et seulement si on a:

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Dans ce cas, l'intégrale existe et on la définit¹ par:

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Où on rappelle que la définition des fonctions partie positive/négative et qu'elles sont toutes deux positives:

$$\begin{cases} f^+ := \sup(0, f) \\ f^- := -\inf(0, f) \end{cases}$$

On note alors $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur X , alors on peut définir la fonction suivante:

$$\begin{aligned} \int : \mathcal{L}^1(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_X f d\mu \end{aligned}$$

Alors l'espace $\mathcal{L}^1(X)$ est un **espace vectoriel** et l'intégrale est une **forme linéaire croissante**² sur celui-ci.

Intégrale sur une partie:

On peut alors remarquer qu'on a défini l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{M}(X)$ sur X tout entier uniquement, on aimerait pouvoir calculer l'intégrale de f sur $A \subseteq X$, on définit alors:

$$\int_A f d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu$$

Où encore pour le problème inverse si $f \in \mathcal{M}(A)$, alors on définit simplement l'intégrale de f par extension par zéro sur X via:

$$\int_A f d\mu = \int_X e_X(f) d\mu$$

Alors on a plusieurs propriétés fondamentales:

- L'intégrale **ignore les parties négligeables** ie on a pour une partie négligeable N que:

$$\int_N f d\mu = 0$$

- L'intégrale vérifie **la relation de Chasles généralisée**, ie pour toute famille disjointe de parties mesurables (A_n) , alors f est intégrable sur cette union si l'objet de droite dans l'égalité ci-dessous est bien défini³:

$$\int_{\cup_n A_n} f d\mu = \sum_n \int_{A_n} f d\mu$$

¹**Attention:** C'est une définition et pas un potentiel usage de la linéarité (qui n'est que positive) sur l'égalité $f = f^+ - f^-$

²En particulier, on a l'inégalité triangulaire $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$.

³En d'autres termes si f est intégrable sur toutes les A_n et si la série des intégrales converge. En particulier, si f est positive, alors l'égalité est toujours vraie mais peut être infinie.

Intégrale sur un intervalle non compact:

On peut facilement montrer que sur un segment, l'intégrale de Riemann et de Lebesgue coïncident, on considère maintenant le problème de l'intégrale généralisée de Riemann sur intervalle $[a; c[$, alors l'intégrale sur ce domaine est définie par:

$$\int_{[a; c[} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow c} \int_{[a; b]} f(x)dx$$

On se ramène donc de la même manière que pour Riemann à une limite d'intégrales.

Intégrabilité locale:

On cherche maintenant à déterminer des méthodes pour montrer qu'une fonction est intégrable sur un domaine quelconque X , on définit alors les deux concepts suivants:

- Une fonction est **localement intégrable** si elle est intégrable sur tout compact de X .
- Une fonction est **intégrable au voisinage** de $a \in \text{adh}(X)$ si elle est intégrable sur un voisinage de a .

En outre on a alors par exemple pour les fonctions réelles qu'une fonction sera intégrable sur \mathbb{R} si elle est localement intégrable et intégrable au voisinage des infinis. Cela nous donne donc une méthode pour montrer l'intégrabilité d'une fonction, mais on a une condition suffisante encore plus simple, en effet si il existe une fonction intégrable g telle que:

$$\forall x \in X ; |f(x)| \leq g(x)$$

Alors évidemment, f est intégrable.

Théorèmes de changement de variable:

Comme pour le cas de l'intégrale de Riemann, on a que pour f une fonction intégrable sur X , alors pour toute bijection $\phi : X \rightarrow X'$, alors:

$$\int_X f(x)dx = \int_{X'} f \circ \phi |\phi'| dx$$

Plus précisément, alors la fonction de droite est intégrable et leurs intégrales sont égales. En outre on peut retrouver l'expression usuelle du changement de variable en considérant l'intégrale signée sur un segment.

XI — GRANDS THÉORÈMES

Dans ce chapitre, on aborde les théorèmes principaux relatifs à l'intégrale de Lebesgue et qui font toute sa force, en effet les propriétés précédentes et notamment le **théorème de convergence monotone** ont le problème suivant:

L'interversion limite-intégrale n'est possible que sous les hypothèses que la suite de fonction est croissante et positive.

On aimerait trouver une condition suffisante plus générale pour pouvoir intervenir ces deux opérateurs, c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème de convergence dominée:

On se donne une suite de fonctions mesurables (f_n) qui admet une limite simple f , alors on peut montrer que si (f_n) satisfait la **condition de domination** suivante:

$$\exists g \in \mathcal{L}(X), \forall n \in \mathbb{N}; |f_n| \leq g$$

Alors on a que toutes les f sont intégrables et:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

Ce théorème appelé **théorème de convergence dominée** est le théorème principal qui nous permettra d'effectuer une intervention limite-intégrale. En outre, sachant que l'intégrale ignore les parties négligeables, on peut même généraliser le théorème et demander que la suite de fonctions converge simplement presque partout et que la majoration soit vraie presque partout.

Théorème de convergence dominée pour les séries:

On peut appliquer ce théorème à la suite des sommes partielles d'une série de fonctions et on obtient alors comme condition suffisante d'intervention qu'il existe une fonction intégrable g telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq g$$

Mais on peut affaiblir légèrement le théorème en rajoutant les hypothèses

XI — INTÉGRALES À PARAMÈTRES

Dans ce chapitre on considère des fonctions de la forme suivante:

$$F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \int_X f(x, t) dx$$

Pour que cette fonction soit bien définie, il faut alors que pour tout $t \in I$, les fonctions $f(\cdot, t)$ soient bien intégrables sur X . On appelle alors F une **intégrale à paramètre**. On cherche alors à savoir si les propriétés de régularité de f vont se transmettre à F , en d'autres termes:

- Si pour tout $x \in X$ on a $t \mapsto f(x, t)$ continue, est-ce que F est continue ?
- Si pour tout $x \in X$ on a $t \mapsto f(x, t)$ de classe \mathcal{C}^1 , est-ce que F est de classe \mathcal{C}^1 ?

Dans toute la suite on considère une famille de fonctions $(x, t) \mapsto f(x, t)$ telle que $f(\cdot, t)$ est intégrable pour tout $t \in I$.

Théorème d'interversion 1:

Soit $x \in X$, alors si la fonction $f(x, \cdot)$ admet une limite en un point $a \in \text{adh}(I)$ et qu'elle vérifie l'hypothèse de domination suivante:

$$\exists g \in \mathcal{L}(X) ; \forall t \in I ; |f(\cdot, t)| \leq g$$

Alors on a l'interversion et on a:

$$\lim_{t \rightarrow a} \int_X f(x, t) dx = \int_X \lim_{t \rightarrow a} f(x, t) dx$$

En particulier, si f est continue en un point ou sur une partie, le résultat reste vrai.

Théorème d'interversion 2:

Soit $x \in X$, alors si la fonction $f(x, \cdot)$ est de classe \mathcal{C}^1 en un point $a \in I$ et qu'elle vérifie l'hypothèse de domination suivante:

$$\exists g \in \mathcal{L}(X) ; \forall t \in I ; |\partial_t f(\cdot, t)| \leq g$$

Alors on a l'interversion et on a:

$$\frac{d}{dt} \int_X f(x, t) dx = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

Ces deux théorèmes sont en fait simplement une application directe du théorème de convergence dominée. Et le second se déduit du premier après utilisation de l'inégalité des accroissements finis.

Remarque:

La notion de continuité et de dérivabilité étant locale, pour montrer qu'une intégrale à paramètres est continue ou dérivable il est souvent utile de restreindre le domaine de définition **du paramètre** pour se ramener à des intervalles plus petits, souvent compacts, pour trouver la majoration et conclure. Exemple On considère

$F : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(x, t) dx$ avec $f(x, t) = e^{-tx}$, alors $f(x, \cdot)$ est clairement continue sur tout \mathbb{R}_+ , on doit trouver une fonction intégrable g telle que:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ ; |f(\cdot, t)| = e^{-tx} \leq g$$

On considère alors que $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{b>0} [b; +\infty[$ et que sur chaque intervalle, $e^{-tx} \leq e^{-bx}$ qui ne dépend pas de t et donc sur chacun de ses intervalles F est continue, et ceci étant vrai pour tout b , c'est donc vrai sur \mathbb{R}_+ tout entier.

XI — INTÉGRALES SUR UN ESPACE PRODUIT

Dans ce chapitre, on cherche à définir une mesure sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n et ainsi pouvoir définir l'intégrale des fonctions de la forme:

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Tribu produit:

Etant donné l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$, on cherche à construire une tribu sur le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors de manière analogue à la topologie produit on définit:

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la **tribu engendrée** par les produit cartésiens de mesurables.

On généralise alors en définissant une tribu produit sur un produit cartésien fini. Et on peut donc ainsi définir une tribu sur \mathbb{R}^n . Par ailleurs, dans le cas de \mathbb{R}^n et des espaces à base dénombrable, on a l'équivalence suivante:

$$A \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B} \iff A = A_1 \times \dots \times A_n ; (A_i) \in \mathcal{B}$$

En d'autres termes, pour ces espaces raisonnables, les mesurables de l'espace produit sont **exactement** les produits de mesurables. En outre, on peut noter que la tribu produit rends les **projections canoniques** mesurables.

Mesure produit:

On se donne alors deux espaces mesurables $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$, on peut alors définir une tribu produit sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, et on définit alors une mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2 : \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ par la mesure qui vérifie:

$$\forall A, B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 ; (\mu_1 \otimes \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A) \mu_2(B)$$

En d'autres termes, la mesure d'un mesurable du produit correspond à produit des mesures de chacune des composantes et on peut alors montrer le théorème suivant pour l'espace qu'on considère:

Il existe une unique mesure sur la tribu borélienne produit qui vérifie cette propriété, on l'appelle la mesure de Lebesgue.

En conclusion, on a généralisé la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R} en une mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n et elle correspond au produit des mesures des composantes.

Intégration dans \mathbb{R}^n :

On considère alors l'espace mesure $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$, alors on peut définir l'intégrale d'une fonction f **positive**, et donc par suite d'une fonction quelconque comme dans le cas en dimension 1, ie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e_n ; e_n \text{ étagée et } e_n \leq f \right\}$$

Mais on souhaite pouvoir ramener le **calcul** de telles intégrales à des calculs d'intégrales simples, en effet, on ne sait pas à priori calculer facilement d'intégrales sur \mathbb{R}^n . On a alors deux puissants théorèmes qui permettent de ramener le calcul d'une intégrable sur un produit au calcul d'intégrales (simples) successives.

Théorème de Tonelli:

On se place pour le premier théorème dans le cas de \mathbb{R}^2 et d'une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ **mesurable positive**. Alors l'intégrale de cette fonction par rapport à chacune des deux variables existe, et on peut définir les intégrales à paramètres suivantes:

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

Le théorème de Tonelli affirme alors que ces intégrales sont **mesurables** et que si on intègre ces intégrales à paramètres par rapport à leur paramètre, alors les intégrales obtenues sont **égales entre elles et égale à l'intégrale de f** , ie on a:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

Théorème de Fubini:

On se place pour le second théorème dans le cas de \mathbb{R}^2 et d'une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ **intégrable**. Alors les applications partielles $f(x, \cdot), f(\cdot, y)$ sont **intégrables** et on peut définir les intégrales à paramètres suivantes:

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

Le théorème de Fubini affirme alors que ces intégrales à paramètres sont **intégrables** par rapport à leur paramètre et que les intégrales obtenues sont **égales entre elles et égale à l'intégrale de f** , ie on a:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

Calcul intégral:

Ces deux théorèmes nous permettent alors facilement de calculer une intégrale sur \mathbb{R}^n ou sur un produit cartésien par intégration successive, par exemple soit à intégrer la fonction $(x, y) \mapsto xy$ sur $D = [0; 1]^2$, alors d'après Fubini, on a:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy dx \right) dy = \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{4}$$

Le problème est que souvent les domaine d'intégration ne sont absolument pas des produits cartésiens, mais on peut alors se ramener à un produit cartésien par:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mathbb{1}_D(x, y) dx dy$$

Puis à exprimer l'indicatrice obtenue comme produit d'indicatrices simples, ie si par exemple on considère:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, x-1 \leq y \leq x+1 \right\}$$

Alors on a:

$$\mathbb{1}_D(x, y) = \mathbb{1}_{[a; b]}(x) \mathbb{1}_{[x-1; x+1]}(y)$$

Donc finalement en choisissant un ordre d'intégration adapté et en utilisant la linéarité et les propriétés des indicatrices sur les intégrales réelles:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mathbb{1}_{[a; b]}(x) \mathbb{1}_{[x-1; x+1]}(y) dx dy = \int_a^b \int_{x-1}^{x+1} f(x, y) dy dx$$

Théorème de changement de variable:

On considère $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme d'un ouvert U vers $\psi(U)$, alors si f est une fonction intégrable, on a:

$$\int_{\psi(U)} f(x) dx = \int_U f(\psi(u)) |J_\psi(u)| du$$

De plus une de ces fonctions est intégrable si et seulement si l'autre l'est.

Coordonnées polaires:

Un changement de coordonnées usuel en dimension 2 est celui du **passage en coordonnées polaires**, en effet chaque point (x, y) du plan cartésien peut être repéré par sa distance euclidienne à l'origine et son angle orienté par rapport au demi-axe des abscisses. On définit alors le changement de variables:

$$\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = (x, y)$$

Alors cette fonction est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme¹, et c'est donc un changement de variable qui permet d'exploiter les **symétries circulaires** du domaine de définition, par exemple si on intègre une fonction sur un secteur annulaire.

Coordonnées cylindriques:

Un changement de coordonnées usuel en dimension 3 est celui du **passage en coordonnées cylindriques**, en effet chaque point (x, y, z) de l'espace cartésien peut être repéré par les coordonnées polaires du point $(x, y, 0)$ et sa hauteur z . On définit alors le changement de variable:

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) = (x, y, z)$$

Alors cette fonction est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme², et c'est donc un changement de variable qui permet d'exploiter les **symétries cylindriques** du domaine de définition, par exemple si on intègre une fonction sur un secteur cylindrique.

Coordonnées sphériques:

Un changement de coordonnées usuel en dimension 3 est celui du **passage en coordonnées sphériques**, en effet chaque point (x, y, z) de l'espace cartésien peut être repéré par sa distance euclidienne à l'origine, sa **longitude** θ et sa **latitude** ϕ . On définit alors le changement de variables:

$$\phi(r, \theta, \phi) = (r \cos(\phi) \cos(\theta), r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi)) = (x, y, z)$$

Alors cette fonction est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme³, et c'est donc un changement de variable qui permet d'exploiter les **symétries sphériques** du domaine de définition, par exemple si on intègre une fonction sur un secteur sphérique.

¹De $]0; +\infty[\times]-\pi; \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$

²De $]0; +\infty[\times]-\pi; \pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$

³De $]0; +\infty[\times]-\pi; \pi[\times]0; \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$

XI — ESPACES DE LEBESGUE

Un des grands intérêts de la théorie de la mesure est que l'on peut construire un espace de fonctions ayant de très bonnes propriétés analytiques. Dans tout la suite, on considère (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré et $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des fonctions mesurables définies sur celui-ci, on considère alors la relation d'équivalence:

$$f \sim g \iff f = g \text{ presque partout}$$

Alors cette relation est **compatible avec la structure d'algèbre** de $(\mathcal{M}(X), +, \times, \cdot)$, ie on a que si $f \sim f'$ et $g \sim g'$ que:

$$\begin{cases} f + f' \sim g + g' \\ ff' \sim gg' \\ \lambda f \sim \lambda f' \end{cases}$$

On peut donc considérer **l'ensemble quotient** pour cette relation noté $M(X)$, c'est **l'ensemble des fonctions mesurables modulo égalité presque partout**. Les éléments de cet ensemble sont donc des classes, mais en pratique, il arrive souvent que l'on identifie la classe à un de ses représentant, et dès lors qu'une relation \mathcal{R} entre deux fonctions est vraie **presque partout**, alors elle induit une relation dans $M(X)$ vraie **partout** pour les classes, ie:

$$f_1 \mathcal{R} f_2 \text{ presque partout} \iff f \mathcal{R} g$$

Par exemple si $f_1 \leq f_2$ presque partout, alors $f \leq g$ et a donc une relation d'ordre sur $M(X, \mathbb{R})$

Convergence :

On peut munir $M(X)$ d'une notion de convergence en disance qu'une suite (f_n) de classes converge si et seulement si il existe une suite de représentants qui converge (simplement) presque partout, en effet la limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable et définie presque partout. Donc cette limite ne dépends pas des représentant de la suite et on la note $\lim f_n$

De même, on peut définir pour $(f_n) \in M(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$ la classe $\sup f_n$ par la borne supérieur d'une suite de représentants.

Intégrabilité :

On peut alors remarquer que toutes les propriétés et théorèmes de l'intégration de Lebesgue peuvent se reformuler sur cet espace car l'intégrale ne distingue pas deux intégrandes égales presque partout en particulier, on peut reformuler:

- La définition de l'intégrale d'une fonction (positive ou non).
- La relation de Chasles et les propriétés de l'intégrale.
- Le théorème de convergence monotone.
- Le théorème de convergence dominée.
- La finitude presque partout d'une fonction intégrable.
- La nullité presque partout d'une fonction d'intégrale nulle.

En particulier pour le premier cas, on dira que $f \in M(X)$ est **intégrable** si et seulement si:

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Et en particulier, on notera l'ensemble des fonctions (classes de fonctions) intégrables $L^1(X)$, c'est en fait le premier **espace de Lebesgue**.

Normes :

On généralise alors et on comprends qu'on peut essayer de définir plusieurs **normes** sur $M(X)$, analogues aux normes fonctionnelles sur $C^0([a; b])$ pour $p \in [1; \infty[$ par:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Et pour $p = \infty$, on généralise la norme infinie dans $C^0([a; b])$ par la définition de **borne supérieure essentielle**, ie le plus petit réel étendu qui soit un **presque majorant**¹:

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ C \in \overline{\mathbb{R}}_+ ; f < C \right\} = \text{ess sup}_X |f|$$

Mais on voit alors que ces applications ne sont à priori pas à valeurs finies, donc ce ne sont pas des normes, on définit alors les **les espaces de Lebesgue** par:

$$L^p(X) := \left\{ f \in M(X) ; \|f\|_p < \infty \right\}$$

Inégalité de Hölder :

Soit $p, q \in [1; \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, alors pour $r \in [1; \infty]$ tel que:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

On a l'**inégalité de Hölder**, généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui nous donne pour toutes $f, g \in M(X)$ que:

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Cette inégalité nous permet d'obtenir une multitude de comparaisons entre le produit d'espaces de Lebesgue et l'espace de Lebesgue du produit, par exemple:

- **Relation de conjugaison :** $L^p L^q \subseteq L^r$
- **Cauchy-Schwarz :** $L^2 L^2 \subseteq L^1$
- **Stabilisation par les fonctions bornées :** $L^\infty L^p \subseteq L^p$

Ici l'ensemble $L^a L^b$ est défini par $\{fg ; (f, g) \in L^a \times L^b\}$, ce n'est **pas** un produit cartésien.

Structure des espaces de Lebesgue :

On peut alors montrer que les application ci-dessus sont bien des normes sur les espaces $L^p(X)$, en outre ces espaces ont plusieurs particularités remarquables:

- Ce sont des **sous espaces vectoriels** de $M(X)$.
- Ce sont des **espaces normés** pour les applications définies ci-dessus.
- Ce sont des **espaces complets**.

On appelle alors de tels espaces **espaces de Banach**.

Structure de l'espace $L^2(X)$:

Dans le cas particulier de $L^2(X)$, on a même une structure bien plus forte, en effet on peut montrer que la norme 2 est en fait issue d'un **produit scalaire** (hermitien) défini par:

$$\langle f | g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu$$

Un espace de Banach dont la norme est issue d'un produit scalaire est appelé **espace de Hilbert**.

¹Un presque majorant étant un réel qui majore la fonction presque partout.

Espaces particuliers :

Dans le cas où l'espace est de la forme $(D, \mathcal{P}(D), c)$ avec D un ensemble dénombrable et la mesure de comptage, alors les espaces sont notés $\ell^p(D)$ où tout simplement ℓ^p si $D = \mathbb{N}$, on a alors par les propriétés de la mesure de comptage que par définition $\ell^p = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et les normes se reformulent par:

$$\|u\|_p := \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |u_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Et pour la norme infinie, on a équivalence avec la norme infinie classique sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Injections canoniques dans le cas de \mathbb{R}^n :

On peut alors montrer que certaines classes de $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'identifient naturellement à des fonctions, en effet:

- L'espace des fonctions constantes s'injecte naturellement dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
- L'espace des fonctions continues, et même $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ s'injecte naturellement dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En effet si deux constantes sont égales presque partout, elles sont égales. Et si deux fonctions continues sont égales presque partout, alors en utilisant le fait évident que la mesure d'un ouvert est strictement positive, elle sont égales. En particulier, on identifiera alors par la suite \mathbb{C} et $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ comme des *parties* de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

XI — CONVOLUTION

On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$ et on considère deux fonctions $f, g \in \overline{\mathcal{M}}_+$, alors on définit le **produit de convolution** de f et g par la fonction:

$$\begin{aligned} f * g : X &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \end{aligned}$$

Domaine de définition :

On peut alors montrer que le produit de convolution $*$ est bien défini sur $L^1 \times L^1$, mais on peut étendre cette même définition à d'autres espaces et on a que l'opérateur $*$ est bien défini sur:

- **Relation de conjugaison duale:** $L^p * L^q \subseteq L^r$ mais pour la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$
- **Cauchy-Schwarz dual:** $L^2 * L^2 \subseteq L^\infty$
- **Stabilisation par les fonctions intégrables :** $L^1 * L^p \subseteq L^p$

On peut alors remarquer une dualité entre le **produit classique** et le **produit de convolution**, en effet on a remplacé les symboles 1 et ∞ et on a laissé invariant 2. En fait cette dualité est bien réelle et le passage à la dualité est fait par la **transformée de Fourier** que l'on verra au prochain chapitre.

Propriétés :

On peut alors montrer que la convolution est une opération **bilinéaire, associative et commutative**. Une propriété beaucoup plus remarquable est que la convolution **préserve la régularité** des fonctions en jeu, par exemple si $f \in C^\infty$ et $g \in L^1$, alors $f * g \in C^\infty$ et on a:

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha (f) * g$$

Interprétation :

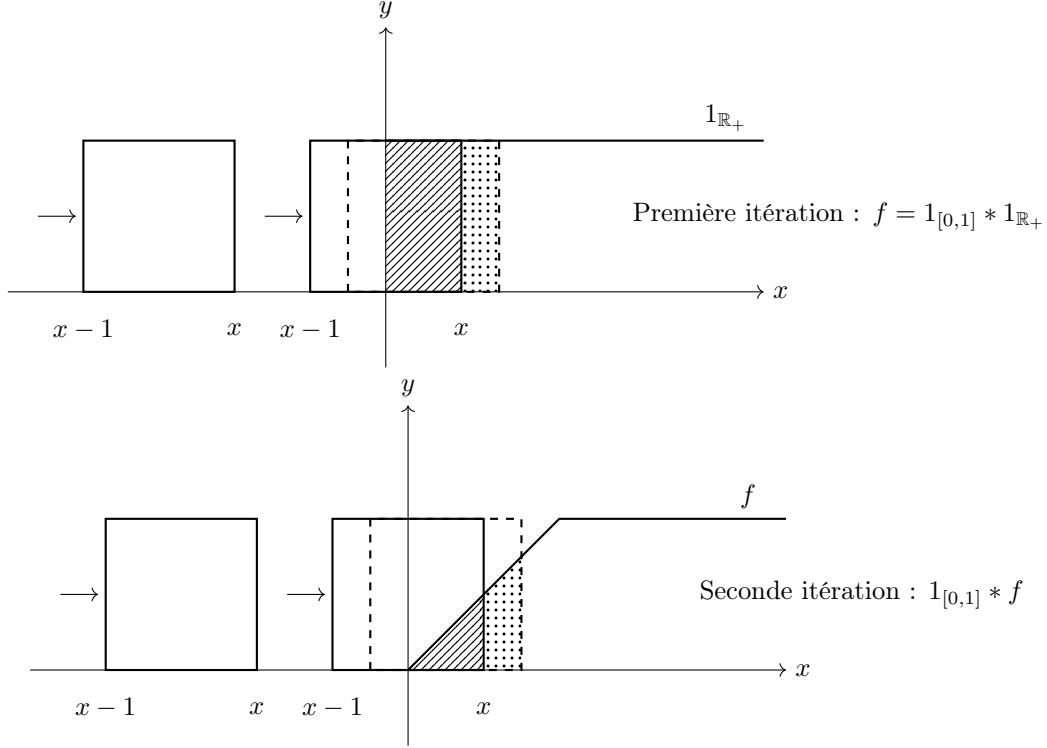
Ce produit, est un procédé qui permet de "lisser" une fonction irrégulière g par une **fonction de pondération** f , en effet si on considère l'exemple de la fonction porte $f = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}$ et qu'on considère la fonction suivante pour $x \in \mathbb{R}$:

$$h_x : y \longmapsto f(x-y)g(y)$$

Alors faire varier le paramètre x revient à réaliser un **fenêtrage** de la fonction g sur un intervalle glissant. La convolution revient alors à calculer l'aire sous la courbe fenêtrée, ie une **moyenne** des valeurs de g sur la fenêtre où tout les points ont le même poids. Si on considère une fonction de pondération différente, les poids accordés aux valeurs selon leurs positions dans la fenêtre peut varier. On peut aussi tout à fait considérer une fonction de pondération qui soit une fenêtre infinie et l'interprétation reste cohérente

Illustration du phénomène :

On considère f la fonction porte comme fonction de pondération et la fonction $g = 1_{\mathbb{R}_+}$ comme notre signal irrégulier. Alors on illustre $f * g$ et $f * (f * g)$:



Element neutre et suites régularisantes:

Soit $f \in L^p$, on pourrait alors se demander si il existe un **élément neutre** pour cette opération. Et il se trouve qu'on montrera dans le chapitre suivant qu'il n'en existe pas. On souhaite alors approcher un tel élément neutre, en effet si il existait une suite de fonctions 1_n *proche* de cet élément, ie telle que:

$$\|1_n * f - f\|_p \longrightarrow 0$$

Alors la fonction $1_n * f$ serait proche de f mais gagnerait la régularité de 1_n , cela motive la définition d'une **approximation de l'unité** comme étant une suite de fonctions positives intégrables $(\phi_n)_n$ telles que pour tout ε positif:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n(x) dx = 1 \\ \int_{B(0,\varepsilon)^c} \phi_n(x) dx \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Exemple: Une suite de fonctions portes de longueurs $1/n$ et de hauteurs n vérifient bien ces hypothèses, ce sont donc des approximations de l'unité.

Si de plus les $(\phi_n)_n$ sont lisses, on l'appellera alors **suite régularisante**, et si on a f une fonction d'intégrale 1, on peut construire une suite régularisante (si f est lisse) en posant (pour n la dimension de l'espace):

$$\phi_k(x) = k^n f(kx)$$

Finalement étant muni de cette construction, on peut alors montrer qu'une telle suite régularisante vérifie bien la propriété asymptotique initiale de cette section, et approxime donc bien un élément neutre pour la convolution.

XI — TRANSFORMÉE DE FOURIER

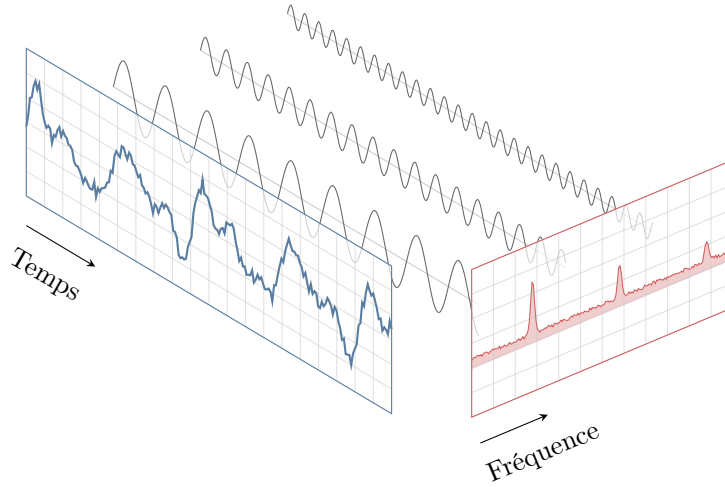
On se place dans l'espace mesuré¹ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$, on notera \mathcal{C}_b l'ensemble des fonctions continues bornées, alors on définit la **transformée de Fourier** de f par la fonction:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^1 &\longrightarrow \mathcal{C}_b \\ f &\longmapsto \hat{f}\end{aligned}$$

Où \hat{f} est la fonction suivante:

$$\begin{aligned}\hat{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx\end{aligned}$$

L'intérêt de cette transformation est d'exploiter les symétries circulaires des fonctions $x \mapsto e^{-2\pi i \xi x}$ pour détecter le spectre fréquentiel d'une fonction f donnée, qu'on appellera souvent **signal** dans ce contexte. On dira alors que f est dans le **domaine temporel** et \hat{f} dans le **domaine fréquentiel**. Voici une représentation heuristique de la transformation:



Lemme de Riemann-Lebesgue :

Une résultat fondamental de cette transformation est la suivante:

La transformée de Fourier d'une fonction est un fonction qui tends vers zéro à l'infini.

On notera \mathcal{C}_0 les fonctions qui tendent vers 0 à l'infini.

¹Elle se définit en toute généralité dans \mathbb{R}^n en remplaçant ξx par $\xi \cdot x$, mais on choisit ici de simplifier l'exposition.

Propriétés :

On peut alors montrer plusieurs propriétés de cette transformation, en notant $P(x) = 2i\pi x$, on a :

- C'est une **opérateur linéaire continu** pour la norme infini sur \mathcal{C}_0 .
- C'est une **opérateur autoadjoint** pour le produit scalaire de L^2 .
- C'est une **opérateur injectif**.
- Elle transforme les **produits par des polynômes en dérivées**, ie si $f \in L^1$, alors :

$$\mathcal{F}(Pf) = -(\mathcal{F}(f))'$$

- Elle transforme les **dérivées en produit par des polynômes**, ie si $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1$ et que $f' \in L^1$, alors :

$$\mathcal{F}(f') = P\mathcal{F}(f)$$

La dernière propriétés est très puissante dans l'étude des équations différentielles, en effet si on considère une fonction lisse y vérifiant par exemple :

$$y''(t) + y'(t) = f(t)$$

Alors on pourrait penser à appliquer la transformation de Fourier à cette équation, et ainsi transformer l'équation différentielle en équation algébrique :

$$P^2(t)\hat{y}(t) + P(t)\hat{y}(t) = \hat{f}(t)$$

Et finalement obtenir

$$\hat{y}(t) = \frac{\hat{f}(t)}{P^2(t) + P(t)}$$

Alors si on arrivait à **inverser** la transformation de Fourier, on pourrait reconstituer y et conclure. On cherche donc à trouver une partie de \mathcal{C}_0 telle que la transformation restreinte soit surjective.

Inverse :

La transformation est injective, donc en particulier si on restreint \mathcal{F} à son image $\mathcal{F}(L^1)$, alors on obtient une **bijection**, mais on préfère se restreindre à la partie $\mathcal{A} := L^1 \cap \mathcal{F}(L^1)$ des fonctions dites **Fourier-intégrables**, alors on peut montrer que son inverse est donné par la formule :

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} \hat{f}(x) dx$$

Propriétés de l'ensemble des fonctions Fourier-intégrables :

On peut alors montrer que $\mathcal{A} \subseteq L^1 \cap \mathcal{C}_0$ donc $\mathcal{A} \subseteq L^1 \cap L^\infty \subseteq L^p$ et en outre, \mathcal{A} est **stable par produit simple et de convolution**. En outre on a la propriété suivant entre le produit simple et le produit de convolution :

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$$

Egalité de Plancherel :

En particulier si deux fonctions $f, g \in \mathcal{A}$, on a alors **l'égalité de Plancherel** :

$$\langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle$$

En d'autres termes, la transformée de Fourier est une **isométrie** de \mathcal{A} sur lui même pour la norme 2. On peut alors montrer que la transformée de Fourier est **continue** sur \mathcal{A} et en utilisant le **théorème de prolongement uniforme**, ainsi que le fait que $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 , on peut alors montrer qu'il existe un unique prolongement de Fourier sur tout L^2 et c'est une isométrie bijective.

XI — SÉRIES DE FOURIER

Dans ce chapitre, on cherche à repliquer le concept de la transformée de Fourier dans le cadre des signaux **périodiques**. En d'autres termes de décomposer un tel signal en somme de signaux élémentaires. Dans toute la suite, on étudiera sans perte de généralité les fonctions 1-périodiques, celles-ci s'identifient alors à des fonctions sur le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} , ou encore aux fonctions définies sur le segment $[0; 1]$.

Famille de Fourier :

L'idée principale, à nouveau, est de considérer la famille particulières dite **famille de Fourier** suivante:

$$\mathcal{F} := (e^{2i\pi kx})_{k \in \mathbb{Z}} = (e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

On peut alors montrer que \mathcal{F} est une **base Hilbertienne** de l'espace des fonctions périodiques $L^2([0; 1])$.

Coefficients de Fourier :

En particulier d'après la théorie hilbertienne, si $f \in L^2([0; 1])$, alors on appelle **coefficients de Fourier** de f et on note $c_k(f)$ la famille de terme général $\langle e_k | f \rangle$ et on a:

- L'égalité de décomposition:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle e_n | f \rangle e_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$$

- Le théorème de Pythagore:

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle e_n | f \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

On appelle alors la série ci-dessus **série de Fourier** de f .

Symmétrisation des coefficients :

Si on considère la série de Fourier d'une fonction, on peut écrire:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) e^{2i\pi nx} + c_{-n}(f) e^{-2i\pi nx} \quad (\text{Les termes de la somme sont appelés } n\text{-ième } \mathbf{harmoniques} \text{ de } f) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(2\pi nx) + (i(c_n(f) - c_{-n}(f))) \sin(2\pi nx) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(2\pi nx) + b_n(f) \sin(2\pi nx) \end{aligned}$$

Ainsi on peut aussi décomposer f dans la base $(\cos(2\pi kx), \sin(2\pi kx))_{k \in \mathbb{N}}$ et écrire f comme une **série trigonométrique**. Ceci simplifie alors grandement certaines applications nécessitant de représenter la série par exemple. Les relations entre les coefficients étant par ce qui précède:

$$\begin{cases} a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = 2 \int_0^1 \cos(2\pi kx) f(x) dx \\ b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f)) = 2 \int_0^1 \sin(2\pi kx) f(x) dx \end{cases}$$

En outre ceci permet d'utiliser la parité de la fonction, en effet on a:

- Si f est **paire**, on a $\forall k \in \mathbb{N}^* ; b_k = 0$
- Si f est **impaire**, on a $\forall k \in \mathbb{N}^* ; a_k = 0$

Transformée de Fourier périodique :

Néanmoins de manière générale, on étends cette définition au cas des fonctions $f \in L^1([0; 1])$ et on définit la transformée de Fourier périodique par:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^1([0; 1]) &\longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

On peut alors montrer les propriétés suivantes analogues à la transformée de Fourier non-périodique:

- **Lemme de Riemann-Lebesgue:** La transformée de Fourier est une famille qui tends vers 0 aux infinis.
- **Injectivité:** La transformée de Fourier est une fonction injective.
- **Dérivations:** La transformée de Fourier transforme aussi les dérivées en produits par des polynômes de manière analogue au cas non-périodique, ie on a:

$$\mathcal{F}(f') = (2i\pi k c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$$

Modes de convergence de la série de Fourier :

On appelle **somme partielle de Fourier** la somme:

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$$

Alors le cas où $f \in L^2([0; 1])$, on a égalité de décomposition dans $L^2([0; 1])$ et donc plus précisément, la famille est sommable et donc pour l'énumération de cette somme partielle, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$$

Ceci nous dit alors que la somme partielle de Fourier convergence dans cet espace, donc presque partout, mais ne dit rien de sa convergence **ponctuelle ou uniforme**. Ces problèmes difficiles font l'objet des sections suivantes.

Convergence uniforme :

On définit l'**algèbre de Wiener** par l'ensemble suivant:

$$W([0; 1]) := \left\{ f \in L^1([0; 1]) ; \left(\|c_k(f) e_k\|_\infty \right)_{k \in \mathbb{Z}} = (|c_k(f)|)_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est sommable.} \right\}$$

Alors si une fonction f appartient à cet ensemble, on peut montrer que la série de Fourier de celle-ci **converge uniformément**, et donc ponctuellement, et on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_\infty = 0$$

On peut alors montrer une condition nécessaire à l'appartenance à $W([0; 1])$, en effet on a:

$$\mathcal{C}^0([0; 1]) \cap \mathcal{C}_{pm}^1([0; 1]) \subseteq W([0; 1])$$

En particulier $\mathcal{C}^1([0; 1]) \subseteq W([0; 1])$ et les fonctions périodiques \mathcal{C}^1 admettent une série de Fourier uniformément convergente.

Convergence ponctuelle :

De manière encore plus générale, si $f \in \mathcal{C}_{pm}^1([0; 1])$, alors on peut montrer le résultat suivant:

$$S_n(f) \longrightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ représentent la limite par valeurs supérieures et inférieures de f en chaque point.