Variétés différentielles

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

Table des matières

Chapter 1

Introduction

Dans ce projet d'étude, on cherche à généraliser le calcul différentiel usuel dans $\mathbb{R}^n$ sur des objets plus généraux, espaces courbes, qui ne seront pas des espaces vectoriels simples. En particulier, on cherche à définir le concept de **variété différentielle**, qui est la formalisation mathématique de ce types d'espaces.

Le projet suivra la progression suivante:

- Tout d'abord nous définirons le concept de **variété topologique** puis **différentielle** ainsi leurs propriétés, une partie spécifique sera dédiée à la construction d'espace courbes qui possèdent un "bord".
- Nous préseterons ensuite quelques exemples de tels objets.
- Par la suite nous chercherons à construire une **structure différentielle** sur ces objets, ce qui reviendra à définir la notion **d'espace tangent** en un point de l'objet et à étudier ses propriétés.
- Ensuite, nous pourrons définir le concept de **forme différentielle** sur un variété qui sera l'objet fondamental qui nous servivra à généraliser la théorie de l'intégration.
- Enfin, aprés avoir définit l'intégrale de tels objets, on pourra alors montrer le **théorème de Stokes**, généralisation du théorème fondamental de l'analyse à toute variété à bord orientée et compacte.

Chapter 2

Variétés

Dans toute la suite, on considère un espace topologique séparé M.

2.1 Cartes locales

On apelle **carte locale** de M un couple (U, ϕ) tel que:

- U soit un **ouvert** de M.
- ϕ soit un **homéomorphisme** de $U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ pour un n convenable.

On dira alors que l'application ϕ^{-1} paramétrise U, et que les **coordonées locales** des points de U sont leurs images par ϕ.

On apelle alors **atlas** de M une famille $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de cartes locales qui recouvrent M. Alors si un tel atlas existe on dira que l'espace M est une **variété topologique**.

2.2 Structure différentielle

On souhaite alors enrichir la structure de variété, et à terme munir M d'une structure permettant de différentier des fonctions sur celle-ci. On définit pour deux cartes $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ qui s'intersectent la notion de cartes $\mathcal{C}^k$**-compatibles** si et seulement si l'application suivante est de classe $\mathcal{C}^k$:

$$\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

L'application ϕ_{ij} est apellée **application de changement de cartes**, on peut la représenter comme ci-dessous:

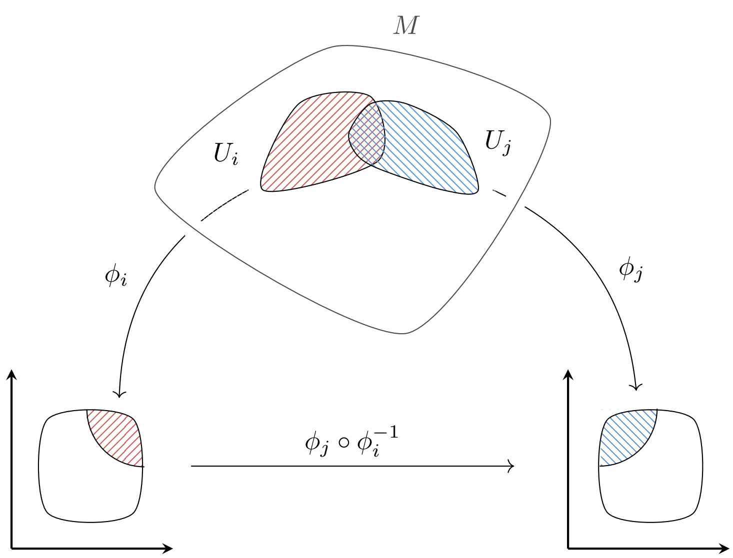

Figure 2.1: Exemple de deux cartes

En outre si M est muni d'un atlas tel que deux cartes sont systématiquement $\mathcal{C}^k$-compatibles, on dira que M est une **variété différentielle** (ou encore d'une structure différentielle) de classe $\mathcal{C}^k$.

2.3 Notion de différentiabilité

Etant donné une application $f : M \longmapsto \mathbb{R}$, la structure différentielle nous permet alors de généraliser la définition de différentiabilité dans $\mathbb{R}^n$ à une notion de différentiabilité dans M en un point x, en effet pour (U, ϕ) une carte qui contient x, on donne la définition suivante:

f est **différentiable** en x si et seulement si $f \circ \phi^{-1}$ est **différentiable** en $\phi(x)$

De manière plus générale on dira pour une application $f : M \longmapsto N$, une carte (U, ϕ) qui contient x et une carte (V, ψ) qui contient $f(x)$ alors on définit:

f est **différentiable** en x si et seulement si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est **différentiable** en $\phi(x)$

Ces deux définitions nécessitent alors de vérifier que ceci ne dépends pas des cartes choisies, et donc (dans le premier cas) que $f \circ \phi^{-1}$ est différentiable si et seulement si $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable. Ceci est vrai **exactement** grâce à la contrainte de régularité des application de changement de carte.

Chapter 3

Variétés à bord

On veut alors pouvoir relaxer cette définition pour prendre en compte une catégorie plus large d'espaces topologiques, en particulier si on considère le disque ouvert D^1, c'est trivialement[1] une variété, mais le disque fermé $\mathrm{adh}(D^1)$ ne l'est pas. La différence fondamentale étant qu'un ouvert qui contient un point du bord du disque fermé n'est pas homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ Mais à un ouvert du demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

3.1 Bord du demi-espace $\mathbb{R}^n_+$

On note $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n \geq 0\}$. Cet espace sera notre prototype de partie avec un bord, en effet si on considère cet espace en tant que partie de $\mathbb{R}^n$, son bord est bien défini:

$$\partial\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^n_+ \backslash \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n = 0\}$$

Par exemple dans le cas de $\mathbb{R}^2_+$, on a:

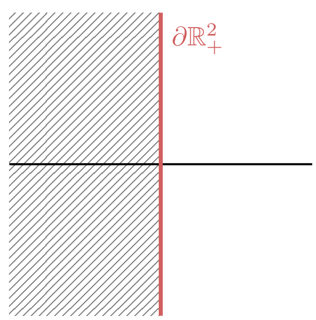

Figure 3.1: Le demi plan $\mathbb{R}^2_+$ et son bord

3.2 Variété à bord

On donne élargit alors notre définition d'une variété, qui sera notre définition générale pour la suite. On se donne une variété M muni de son atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ et on rajoute la contrainte suivante sur les cartes:

$$\forall i \in I \ ; \ \phi_i : U_i \longmapsto V_i \text{ avec } V_i \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^n_+$$

Ceci nous permet de définir le bord d'une variété par:

$$\partial M := \left\{x \in M \ ; \ \exists (U, \phi) \in \mathcal{A} \ ; \ x \in U \text{ et } \phi(x) \in \partial\mathbb{R}^n_+\right\}$$

Alors on peut montrer que c'est bien une généralisation du concept de variété, en effet si une variété définie de la sorte n'a pas de bords, ie si $\partial M = \emptyset$, alors on peut construire un atlas au sens du chapitre 2.

En particulier, on peut remarquer que $\mathbb{R}^n_+$ lui-même est bien une variété à bord ce qui est bien cohérent ...

[1] Comme graphe d'une fonction constante définie sur un ouvert.

Chapter 4

Exemples de variétés

Dans ce chapitre, on présente quelques exemples simples de variétés différentielles, leurs atlas et quelques unes de leurs propriétés.

4.1 Le cercle S^1

4.2 La sphere S^2

4.3 Plan projectif $\mathbb{R}P^2$?

Chapter 5

Espaces tangents

On aimerait alors pouvoir généraliser la notion **d'espace tangent** à une courbe, surface ... lisse de $\mathbb{R}^n$ à des variétés abstraites comme définies dans les deux premiers chapitres. Pour ce faire, il est fondamental de comprendre que les variétés ainsi définies ne sont **pas** des objets de $\mathbb{R}^k$ et donc on doit définir cette notion purement intrinséquement, via l'atlas notamment.

5.1 Courbe sur une variété

On définit la notion de **courbe paramétrée** de classe $\mathcal{C}^k$ sur une variété M par la donnée d'une application $\gamma : I \longmapsto M$ d'une intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ dans M, qui soit de classe $\mathcal{C}^k$.

Par exemple si on considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \backslash N$ paramétrée par l'inverse de la projection stéréographique qu'on notera $S(u,v)$, alors l'application suivante est une courbe sur la sphère:

$$\gamma : t \in]0\,;\,1[\longmapsto S(2t^3, t^2)$$

Par la suite il sera utile de contraindre ce type de courbes à un domaine "standard" de la forme $]-\varepsilon\,;\,\varepsilon[$, ie tel que $0 \in \text{int}(I)$. Dans toute la suite on considèrera donc que les courbes sont définies de la sorte.

5.2 Vecteurs tangents

On fixe un point $x \in M$ et on veut maintenant définir un espace vectoriel associé à ce point, qui correspondrait aux vecteurs tangents à la variété en ce point. Pour ceci, on définit une relation d'équivalence sur les courbes sur M telles que $\gamma(0) = x$, en particulier, pour deux telles courbes γ_1, γ_2, alors on définit:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \exists (U, \phi) \in \mathcal{A}\ ;\ x \in U \text{ et } (\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$$

Cete définition ne dépends pas de la carte choisie, en effet si la propriété est vraie pour **une carte** (U, ϕ), et qu'on a une autre carte (V, ψ) alors par changement de carte qu'on note c et la règle de la chaîne on a que:

$$d(\psi \circ \gamma_1)_{t_0} = d(c \circ \phi \circ \gamma_1)_{t_0} = dc_{\phi(\gamma_1(t_0))}\big((\phi \circ \gamma_1)'(t_0)\big)$$

Donc si $(\phi \circ \gamma_1)'(t_0) = (\phi \circ \gamma_2)'(t_0)$, par application de la différentielle de l'application de changement de cartes, on a que $(\psi \circ \gamma_1)'(t_0) = (\psi \circ \gamma_2)'(t_0)$ et les classes sont invariantes par changement de cartes.

On appelle une classe d'équivalence pour cette relation **vecteur tangent** à la courbe en x. L'ensemble quotient est donc **l'ensemble des vecteurs tangents** ou plus formellement **l'espace tangent** au point x définit par:

$$TM_x := \Big\{ [\gamma] \;\big|\; \exists \varepsilon > 0\ ;\ \gamma \in \mathcal{D}(]-\varepsilon\,;\,\varepsilon[, M)\ ;\ \gamma(0) = x \Big\}$$

5.3 Structure de l'espace tangent

Il faut maintenant montrer que l'espace tangent forme bien un espace vectoriel et est bien isomorphe à $\mathbb{R}^n$ conformément à l'intuition. On considère alors naturellement l'application:

$$\begin{aligned} \Phi : TM_x &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [\gamma] &\longmapsto (\phi \circ \gamma)'(0) \end{aligned}$$

Alors c'est une bijection, en effet étant donné un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on construit une courbe qui le réalise comme vecteur tangent par l'application suivante:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{D}(I_u, M) \\ u &\longmapsto (t \in I_u \longmapsto \phi^{-1}(tu + \phi(x))) \end{aligned}$$

En effet pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, il existe bien un intervalle ouvert I tel que la courbe soit bien définie par définition de la carte ϕ, alors on vérifie bien, aprés passage au quotient, que $\Psi = \Phi^{-1}$. On peut alors transporter la structure de $\mathbb{R}^n$ sur TM_x et on définit:

$$\begin{cases} [\gamma_1] + [\gamma_2] := \Phi^{-1}(\Phi([\gamma_1]) + \Phi([\gamma_2])) \\ \lambda[\gamma] := \Phi^{-1}(\lambda\Phi([\gamma])) \end{cases}$$

Ainsi définie, Φ est (par construction) un **isomorphisme d'espaces vectoriels** et donc on a bien $TM_x \cong \mathbb{R}^n$.

5.4 Applications entre variétés - EN COURS

On sait comment vérifier qu'une application $f : M \longmapsto N$ est différentiable gràce à la structure différentielle donné par les cartes. On définit alors, de manière intrinsèque la différentielle comme la fonction suivante:

$$\begin{aligned} df_x : TM_x &\longrightarrow TN_{f(x)} \\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

En effet $f \circ \gamma$ est bien une courbe sur N donc on peut considèrer sa classe. Ceci ne dépend pas du choix du représentant γ et la différentielle vérifie alors les propriétés suivantes:

- Elle est **linéaire** de $TM_x \mapsto TN_{f(x)}$.
- Elle vérifie la **règle de la chaîne:** $d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p$.
- Si f est un **difféomorphisme**, alors df_p est un **isomorphisme**.

En particulier, on vérifie facilement qu'une carte ϕ est un difféomorphisme, et donc sa différentielle $d\phi_p$ est un isomorphisme, ie on retrouve $\mathbb{R}^n \cong TM_p$. En outre, si on note $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ceci nous permet de définir une base de l'espace TM_p **par rapport à la carte** ϕ en posant:

$$\mathcal{B}_\phi = (d\phi_p^{-1}(e_1), \ldots, d\phi_p^{-1}(e_n))$$

On a alors une représentation en coordonnée locales de la différentielle dans deux cartes donnée par:

$$d(\psi \circ f \circ \phi)_{\phi(x)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

Chapter 6

Elements d'algèbre tensorielle

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'object d'étude du domaine appelé **algèbre multilinéaire**, qui sont les **formes multilinéaires**, en particulier, on se donne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n, alors on appele **tenseur** d'ordre (p, q) une application de la forme suivante:

$$T : \underbrace{E^* \times \ldots \times E^*}_{\text{p}} \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{\text{q}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

Dans le contexte de ce projet, on s'intéresse principalement à la construction des fromes différentielles, et donc on s'intéressera surtout au cas où $p = 0$. On dira alors que T est un tenseur **covariant**.

6.1 Structure de l'espace des tenseurs covariants

On note alors $\mathscr{T}^p(E)$ l'ensemble des p-tenseurs covariants, alors l'addition de deux formes et la multiplication par un scalaire étant bien définie, on peut montrer la propriété suivante:

L'espace $\mathscr{T}^p(E)$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

6.2 Produit tensoriel de deux tenseurs covariants

On peut alors définir un produit sur des tels objets appelé **produit tensoriel** défini par:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathscr{T}^p(E) \times \mathscr{T}^q(E) &\longrightarrow \mathscr{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = \alpha(x_1, \ldots, x_p)\beta(y_1, \ldots, y_q)$$

6.3 Base et dimension

On peut alors se demander si on peut trouver une base de cet espace, et en effet si on note $(e_i)_{i \leq n}$ une base de E, alors on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} T(x_1, \ldots, x_p) &= T\left(\sum_{i_1 \leq n} x_{1,i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_p \leq n} x_{p,i_p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_p \leq n} x_{1,i_1} \ldots x_{p,i_p} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Mais on remarque alors que le produit $x_{1,i_1} \ldots x_{p,i_p}$ consiste alors en l'évaluation de $e^*_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{i_p}$ en $(x_1, \ldots, x_p)$ et donc on obtient:

$$T = \sum_{i_1, \ldots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e^*_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{i_p}$$

En d'autres termes tout p-tenseur T est engendré par la famille de n^p vecteurs $(e^*_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{i_p})_{i_1, \ldots, i_p \leq n}$. On peut alors montrer qu'elle est libre et donc que c'est une base de $\mathcal{T}^p(E)$.

6.4 Tenseurs antisymétriques

On appelle **tenseur antisymétrique** tout p-tenseur T tel que:

$$\forall i,j \in [\![1\ ;\ p]\!]\ ;\ T(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots) = -T(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)$$

6.5 Antisymétrisation

On se donne un tenseur T qui soit p-covariant, alors on chercher à construire un tenseur p-covariant **antisymétrique** à partir de T, et on peut alors montrer que le tenseur suivant convient:

$$\mathrm{Asym}(T)(x_1,\ldots,x_p) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon(\sigma)T(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})$$

En d'autres termes que T est bien antisymétrique.

6.6 Produit extérieur

On peut alors définir un produit antisymétrique appelé surtout **produit extérieur** de deux tenseurs par <u>**Problème**</u>**: Il manque un coefficient pour que la base de la section d'aprés soit correcte ?**:

$$(T\wedge T') = \mathrm{Asym}(T\otimes T')$$

En d'autres termes:

$$(T\wedge T')(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\varepsilon(\sigma)T(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})T'(x_{\sigma(p+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q)})$$

C'est ce produit extérieur qui nous sera surtout utile pour définir les formes différentielles.

6.7 Algèbre extérieure

On appelle alors **p-ième puissance extérieure** l'ensemble de toutes les formes p-linéaires alternées qu'on note $\Lambda^p E^*$. Une base est alors donnée par l'ensemble:

$$\left\{e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_p}\ ;\ 1\le e^*_{i_1}<\ldots<e^*_{i_p}\le n\right\}$$

En effet, on utilise la même approche que pour le produit tensoriel, soit T un p-tenseur antisymétrique, alors:

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_p\le n} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_p})e^*_{i_1}\otimes\ldots\otimes e^*_{i_p}$$

Mais T est antisymétrique, donc les indices des termes non nuls sont différents, ie on somme en fait sur $I = \left\{(i_1,\ldots,i_p)\ ;\ \forall p,q\ i_p\neq i_q\right\}$. Aussi par un raisonnement combinatoire, il est équivalent de sommer sur des indices distincts et de sommer sur des indices strictement croissants puis sur toutes les permutations de ceux ci, ie on a:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n}\sum_{\sigma\in S_p} T(e_{\sigma(i_1)},\ldots,e_{\sigma(i_p)})e^*_{\sigma(i_1)}\otimes\ldots\otimes e^*_{\sigma(i_p)}\\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_p})\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon(\sigma)e^*_{\sigma(i_1)}\otimes\ldots\otimes e^*_{\sigma(i_p)}\\
&= p!\sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_p})e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_p}
\end{aligned}$$

En particulier, un tel tenseur est uniquement déterminé par son image sur toutes les vecteurs de la base indéxés par une suite strictement croissante, et il y a $\binom{n}{p}$ telles suites, c'est donc la dimension de $\Lambda^p E^*$.

<u>Exemple:</u> Si $E=\mathbb{R}^3$, on note la base duale (dx,dy,dz), alors on a que:

$$\Lambda^2 E^* = \mathrm{Vect}(dx\wedge dy, dx\wedge dz, dy\wedge dz)$$

On appele aussi les éléments de la p-ième puissance extérieure des **multivecteurs**.

Chapter 7

Formes différentielles dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre on peut maintenant définir un object fondamental de la géométrie différentielle, le concept de **p-forme différentielle** sur $\mathbb{R}^n$ qui sera simplement définie par:

Une p-forme différentielle est un champs de tenseurs covariants antisymétriques.

Ceci s'intérprète alors comme la donnée en chaque point x de $\mathbb{R}^n$ d'un tenseur covariant antisymétrique. Formellement, on a:

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Enfin, on considérera pour simplifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on note alors $\Omega^k(E)$ l'ensemble des fonctions lisses de E dans $\Lambda^k E^*$, ie l'ensemble des k-formes différentielles sur E.

7.1 Dérivée extérieure

On introduit alors un opérateur sur les p-formes appelée **dérivée extérieure** qu'on définit par:

$$\begin{aligned} d_k : \Omega^k(E) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(E) \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

Il agit alors sur une k-forme par différentiation de la fonction coefficients, ie on a:

$$d\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

<u>Exemple 1:</u> Si on considère la 1 forme de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\omega = ydx$$

Alors on différentie simplement la fonction coefficient et on obtient:

$$d\omega = d(ydx) = \left(\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial y} dy \right) \wedge dx = dy \wedge dx$$

<u>Exemple 2:</u> On considère la 2-forme de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\omega = A(x,y,z) dx \wedge dy$$

Alors on différentie simplement la fonction coefficient et on obtient:

$$\begin{aligned} d\omega = d(A(x,y,z)dx \wedge dy) &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy - \frac{\partial A}{\partial z} dx \wedge dz - \frac{\partial A}{\partial z} dy \wedge dz \end{aligned}$$

7.2 Propriétés de la dérivée

On peut alors montrer que la dérivée extérieure est bien définie et possède les propriétés suivantes:

- On a que la dérivée est un opérateur linéaire.
- On a la **formule de Leibniz généralisée**, pour ω une k-forme et α une l-forme :

$$d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha$$

- On a la **propriété fondamentale** de la dérivée extérieure:

$$d_{k+1} \circ d_k = 0$$

7.3 Forme volume

Dans $\mathbb{R}^n$, le cas particulier des n-formes différentielles est fondamental, en effet on appelle ces formes **formes volumes** et si on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, elles s'écrivent toutes de la forme:

$$\mathrm{vol}_{\mathcal{B}} = f(e_1, \ldots, e_n) e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$$

En particulier $\dim(\Lambda^n(\mathbb{R}^n)) = 1$ et si on fixe la contrainte que $\mathrm{vol}_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$, on retrouve:

$$\mathrm{vol}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \ldots x_{n,\sigma(n)} = \det_B(x_1, \ldots, x_n)$$

De manière générale dans $\mathbb{R}^n$, on fixe la base canonique $\mathcal{C}$ comme base de référence et on a alors, par exemple:

- Dans $\mathbb{R}^1$, on a $\det = dx$
- Dans $\mathbb{R}^3$ on a $\det = dx \wedge dy \wedge dz$

En particulier, on a par exemple dans $\mathbb{R}^2$, que $\mathrm{vol}(u, v) = (dx \wedge dy)(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det_{\mathcal{C}}(u, v)$ comme on l'attendrais intuitivement.

Chapter 8

Formes différentielles sur une variété

Dans ce chapitre et le chapitre précédent, on a défini les tenseurs, les formes différentielles et la dérivée extérieure sur un espace vectoriel E de dimension n et plus simplement sur $\mathbb{R}^n$. Le cas qui nous intéressera alors dans toute la suite est celui où $E = TM_x$, alors dans ce cas, on peut étendre ces notions au cas des variétés en définissant un tenseur d'un espace tangent, une forme différentielle d'un espace tangent.

Alors, par exemple, une forme différentielle sur un espace tangent sera un champs de p-tenseurs anti-symétriques, ie un champs d'éléments de $\Lambda^p(TM_x^*)$.

Et la dérivée extérieure sur un espace tangent sera de la forme:

$$\begin{aligned} d : \Omega^k(TM_x) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(TM_x) \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

Chapter 9

Orientation d'une variété

Dans ce chapitre on s'intéresse plus particulière aux **formes volumes** sur une variété M, en effet celles ci permettent de définir l'orientabilité d'une variété, et si c'est le cas de convenir d'une orientation. En outre, si la variété est à bord, alors l'orientation d'une variété induit une orientation du bord de celle-ci.

Chapter 10

Intégrale d'une forme dans $\mathbb{R}^n$

Chapter 11

Intégrale d'une forme sur une variété

Chapter 12

Théorème de Stokes-Cartan

Chapter 13

Applications de la théorie des formes

13.1 Cas de la dimension 3

Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, on a la chaîne suivante:

$$\Lambda^0\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_0} \Lambda^1\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_1} \Lambda^2\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_2} \Lambda^3\mathbb{R}^3$$

On peut alors montrer facilement que les dimensions des différents espaces suivent la suite $(1, 3, 3, 1)$ et les propriétés surprenantes suivantes:

- On a d_0 qui s'identifie **au gradient de la fonction**.
- On a d_1 qui s'identifie **au rotationnel du champ de vecteurs**.
- On a d_2 qui s'identifie **à la divergence du champ de vecteurs**.

Et par la propriété fondamentale de la dérivée extérieure, on a alors les formules classiques suivantes comme simple conséquence:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}(\nabla f) = 0 \\ \mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0 \end{cases}$$

Chapter 14

Applications du théorème de Stokes-Cartan

Chapter 15

Conclusion