Variétés différentielles

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

Table des matières

Chapter 1

Introduction

Dans ce projet d'étude, on cherche à généraliser le calcul différentiel usuel dans $\mathbb{R}^n$ sur des objets plus généraux, espaces courbes, qui ne seront pas des espaces vectoriels simples. En particulier, on cherche à définir le concept de **varitété différentielle**, qui est la formalisation mathématique de ce types d'espaces.

Le projet suivra la progression suivante:

- Tout d'abord nous exposerons un chapitre **d'algèbre tensorielle** dans l'espace connu $\mathbb{R}^n$, ceci aura pour but de poser les bases d'algèbre linéaire qui seront nécessaires pour construire la théorie.
- Ensuite nous définirons le concept fondamental de **variété topologique** puis **différentielle**, modèles d'espaces courbes généraux, une partie spécifique sera dédiée à la construction de tels espaces qui possèdent un "bord".
- Une partie succinte pour présenter des variétés différentielles usuelles.
- Nous chercherons ensuite à construire des objets de calcul différentiel sur ces espaces, ie des **champs de vecteurs, des fonctions différentiables, des vecteurs tangents**. Ceci reviendra à définir la notion **de fibré tangent et cotangent** et étudier leurs propriétés.
- Ensuite, nous pourrons étendre les notions d'algèbre tensorielle aux variétés abstraites, en définissant le concept de **forme différentielle** sur un variété qui sera l'objet fondamental qui nous servivra à généraliser la théorie de l'intégration.
- Enfin, aprés avoir définit l'intégrale de tels objets, on pourra alors montrer le **théorème de Stokes**, généralisation du théorème fondamental de l'analyse à toute variété à bord orientée et compacte.
- Finalement, le dernier chapitre sera uniquement consacré aux différentes applications de la théorie, idéalement à la fois dans des cas concrets et théoriques.

Chapter 2

Elements d'algèbre tensorielle

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'object d'étude du domaine appelé **algèbre multilinéaire**, qui sont les **formes multilinéaires**, en particulier, on se donne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n, alors on appele **tenseur** d'ordre (p, q) une application de la forme suivante:

$$T : \underbrace{E^* \times \ldots \times E^*}_{\text{p}} \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{\text{q}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

Dans le contexte de ce projet, on s'intéresse principalement à la construction des fromes différentielles, et donc on s'intéressera surtout au cas où $p = 0$. On dira alors que T est un tenseur **covariant**.

2.1 Structure de l'espace des tenseurs covariants

On note alors $\mathscr{T}^p(E)$ l'ensemble des p-tenseurs covariants, alors l'addition de deux formes et la multiplication par un scalaire étant bien définie, on peut montrer la propriété suivante:

L'espace $\mathscr{T}^p(E)$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.2 Produit tensoriel de deux tenseurs covariants

On peut alors définir un produit sur des tels objets appelé **produit tensoriel** défini par:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathscr{T}^p(E) \times \mathscr{T}^q(E) &\longrightarrow \mathscr{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = \alpha(x_1, \ldots, x_p)\beta(y_1, \ldots, y_q)$$

2.3 Base et dimension

On peut alors se demander si on peut trouver une base de cet espace, et en effet si on note $(e_i)_{i\leq n}$ une base de E, alors on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} T(x_1, \ldots, x_p) &= T\left(\sum_{i_1 \leq n} x_{1,i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_p \leq n} x_{p,i_p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_p \leq n} x_{1,i_1} \ldots x_{p,i_p} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Mais on remarque alors que le produit $x_{1,i_1} \ldots x_{p,i_p}$ consiste alors en l'évaluation de $e^*_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{i_p}$ en $(x_1, \ldots, x_p)$ et donc on obtient:

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e^*_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{i_p}$$

En d'autres termes tout p-tenseur T est engendré par la famille de n^p vecteurs $(e^*_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{i_p})_{i_1,\ldots,i_p \leq n}$. On peut alors montrer qu'elle est libre et donc que c'est une base de $\mathcal{T}^p(E)$.

2.4 Tenseurs antisymétriques

On appelle **tenseur antisymétrique** tout p-tenseur T tel que:

$$\forall i,j \in [\![1\ ;\ p]\!]\ ;\ T(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots) = -T(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)$$

2.5 Antisymétrisation

On se donne un tenseur T qui soit p-covariant, alors on chercher à construire un tenseur p-covariant **antisymétrique** à partir de T, et on peut alors montrer que le tenseur suivant convient:

$$\mathrm{Asym}(T)(x_1,\ldots,x_p) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_p} \varepsilon(\sigma)T(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})$$

En d'autres termes que T est bien antisymétrique.

2.6 Produit extérieur

On peut alors définir un produit antisymétrique appelé surtout **produit extérieur** de deux tenseurs par **Problème: Il manque un coefficient pour que la base de la section d'aprés soit correcte ?**:

$$(T\wedge T') = \mathrm{Asym}(T\otimes T')$$

En d'autres termes:

$$(T\wedge T')(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma)T(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})T'(x_{\sigma(p+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q)})$$

C'est ce produit extérieur qui nous sera surtout utile pour définir les formes différentielles.

2.7 Algèbre extérieure

On appelle alors **p-ième puissance extérieure** l'ensemble de toutes les formes p-linéaires alternées qu'on note $\Lambda^p E^*$. Une base est alors donnée par l'ensemble:

$$\left\{e_{i_1}^*\wedge\ldots\wedge e_{i_p}^*\ ;\ 1\leq e_{i_1}^* < \ldots < e_{i_p}^* \leq n\right\}$$

En effet, on utilise la même approche que pour le produit tensoriel, soit T un p-tenseur antisymétrique, alors:

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_p\leq n} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_p})e_{i_1}^*\otimes\ldots\otimes e_{i_p}^*$$

Mais T est antisymétrique, donc les indices des termes non nuls sont différents, ie on somme en fait sur $I = \left\{(i_1,\ldots,i_p)\ ;\ \forall p,q\ i_p\neq i_q\right\}$. Aussi par un raisonnement combinatoire, il est équivalent de sommer sur des indices distincts et de sommer sur des indices strictement croissants puis sur toutes les permutations de ceux ci, ie on a:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n}\sum_{\sigma\in S_p} T(e_{\sigma(i_1)},\ldots,e_{\sigma(i_p)})e_{\sigma(i_1)}^*\otimes\ldots\otimes e_{\sigma(i_p)}^* \\
&= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_p})\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon(\sigma)e_{\sigma(i_1)}^*\otimes\ldots\otimes e_{\sigma(i_p)}^* \\
&= p!\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_p})e_{i_1}^*\wedge\ldots\wedge e_{i_p}^*
\end{aligned}$$

En particulier, un tel tenseur est uniquement déterminé par son image sur toutes les vecteurs de la base indéxés par une suite strictement croissante, et il y a $\binom{n}{p}$ telles suites, c'est donc la dimension de $\Lambda^p E^*$.

Exemple: Si $E=\mathbb{R}^3$, on note la base duale (dx,dy,dz), alors on a que:

$$\Lambda^2 E^* = \mathrm{Vect}(dx\wedge dy, dx\wedge dz, dy\wedge dz)$$

On appele aussi les éléments de la p-ième puissance extérieure des **multivecteurs**.

Chapter 3

Formes différentielles dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre on peut maintenant définir un object fondamental de la géométrie différentielle, le concept de **p-forme différentielle** sur $\mathbb{R}^n$ qui sera simplement définie par:

Une p-forme différentielle est un champs de tenseurs covariants antisymétriques.

Ceci s'intérprète alors comme la donnée en chaque point x de $\mathbb{R}^n$ d'un tenseur covariant antisymétrique. Formellement, on a:

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Enfin, on considérera pour simplifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on note alors $\Omega^k(E)$ l'ensemble des fonctions lisses de E dans $\Lambda^k E^*$, ie l'ensemble des k-formes différentielles sur E.

3.1 Dérivée extérieure

On introduit alors un opérateur sur les p-formes appelée **dérivée extérieure** qu'on définit par:

$$\begin{aligned} d_k : \Omega^k(E) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(E) \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

Il agit alors sur une k-forme par différentiation de la fonction coefficients, ie on a:

$$d\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

<u>Exemple 1:</u> Si on considère la 1 forme de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\omega = y dx$$

Alors on différentie simplement la fonction coefficient et on obtient:

$$d\omega = d(ydx) = \left(\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial y} dy\right) \wedge dx = dy \wedge dx$$

<u>Exemple 2:</u> On considère la 2-forme de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\omega = A(x,y,z) dx \wedge dy$$

Alors on différentie simplement la fonction coefficient et on obtient:

$$\begin{aligned} d\omega = d(A(x,y,z)dx \wedge dy) &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz\right) \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy - \frac{\partial A}{\partial z} dx \wedge dz - \frac{\partial A}{\partial z} dy \wedge dz \end{aligned}$$

3.2 Propriétés de la dérivée

On peut alors montrer que la dérivée extérieure est bien définie et possède les propriétés suivantes:

- On a que la dérivée est un opérateur linéaire.
- On a la **formule de Leibniz généralisée**, pour ω une k-forme et α une l-forme :

$$d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha$$

- On a la **propriété fondamentale** de la dérivée extérieure:

$$d_{k+1} \circ d_k = 0$$

3.3 Forme volume

Dans $\mathbb{R}^n$, le cas particulier des n-formes différentielles est fondamental, en effet on appelle ces formes **formes volumes** et si on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, elles s'écrivent toutes de la forme:

$$\mathrm{vol}_{\mathcal{B}} = f(e_1, \dots, e_n) e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

En particulier $\dim(\Lambda^n(\mathbb{R}^n)) = 1$ et si on fixe la contrainte que $\mathrm{vol}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$, on retrouve:

$$\mathrm{vol}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)} = \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

De manière générale dans $\mathbb{R}^n$, on fixe la base canonique $\mathcal{C}$ comme base de référence et on a alors, par exemple:

- Dans $\mathbb{R}^1$, on a $\det = dx$
- Dans $\mathbb{R}^3$ on a $\det = dx \wedge dy \wedge dz$

En particulier, on a par exemple dans $\mathbb{R}^2$, que $\mathrm{vol}(u, v) = (dx \wedge dy)(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det_{\mathcal{C}}(u, v)$ comme on l'attendrais intuitivement.

Chapter 4

Variétés

Dans toute la suite, on considère un espace topologique séparé M.

4.1 Cartes locales

On apelle **carte locale** de M un couple (U, ϕ) tel que:

- U soit un **ouvert** de M.
- ϕ soit un **homéomorphisme** de $U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ pour un n convenable.

On dira alors que l'application ϕ^{-1} paramétrise U, et que les **coordonées locales** des points de U sont leurs images par ϕ.

On apelle alors **atlas** de M une famille $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de cartes locales qui recouvrent M. Alors si un tel atlas existe on dira que l'espace M est une **variété topologique**.

4.2 Structure différentielle

On souhaite alors enrichir la structure de variété, et à terme munir M d'une structure permettant de différentier des fonctions sur celle-ci. On définit pour deux cartes $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ qui s'intersectent la notion de cartes **$\mathcal{C}^k$-compatibles** si et seulement si l'application suivante est de classe $\mathcal{C}^k$:

$$\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

L'application ϕ_{ij} est apellée **application de changement de cartes**, on peut la représenter comme ci-dessous:

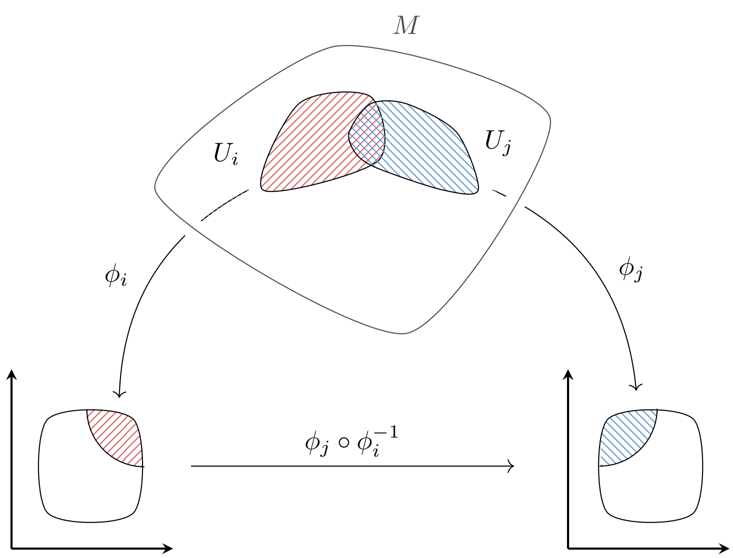

Figure 4.1: Exemple de deux cartes

En outre si M est muni d'un atlas tel que deux cartes sont systématiquement $\mathcal{C}^k$-compatibles, on dira que M est une **variété différentielle** (ou encore d'une structure différentielle) de classe $\mathcal{C}^k$.

4.3 Notion de différentiabilité

Etant donné une application $f : M \longmapsto \mathbb{R}$, la structure différentielle nous permet alors de généraliser la définition de différentiabilité dans $\mathbb{R}^n$ à une notion de différentiabilité dans M en un point x, en effet pour (U, ϕ) une carte qui contient x, on donne la définition suivante:

$$f \text{ est } \textbf{différentiable} \text{ en } x \text{ si et seulement si } f \circ \phi^{-1} \text{ est } \textbf{différentiable} \text{ en } \phi(x)$$

De manière plus générale on dira pour une application $f : M \longmapsto N$, une carte (U, ϕ) qui contient x et une carte (V, ψ) qui contient $f(x)$ alors on définit:

$$f \text{ est } \textbf{différentiable} \text{ en } x \text{ si et seulement si } \psi \circ f \circ \phi^{-1} \text{ est } \textbf{différentiable} \text{ en } \phi(x)$$

Ces deux définitions nécessitent alors de vérifier que ceci ne dépends pas des cartes choisies, et donc (dans le premier cas) que $f \circ \phi^{-1}$ est différentiable si et seulement si $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable. Ceci est vrai **exactement** grâce à la contrainte de régularité des application de changement de carte.

Chapter 5

Variétés à bord

On veut alors pouvoir relaxer cette définition pour prendre en compte une catégorie plus large d'espaces topologiques, en particulier si on considère le disque ouvert D^1, c'est trivialement[1] une variété, mais le disque fermé $\text{adh}(D^1)$ ne l'est pas. La différence fondamentale étant qu'un ouvert qui contient un point du bord du disque fermé n'est pas homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ Mais à un ouvert du demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

5.1 Bord du demi-espace $\mathbb{R}^n_+$

On note $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_n \geq 0\}$. Cet espace sera notre prototype de partie avec un bord, en effet si on considère cet espace en tant que partie de $\mathbb{R}^n$, son bord est bien défini:

$$\partial\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^n_+ \backslash \text{int}(\mathbb{R}^n_+) = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_n = 0\}$$

Par exemple dans le cas de $\mathbb{R}^2_+$, on a:

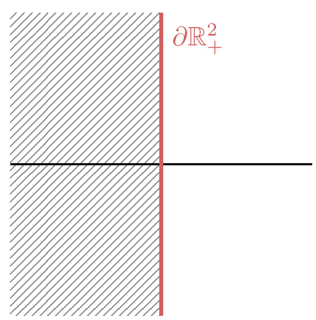

Figure 5.1: Le demi plan $\mathbb{R}^2_+$ et son bord

5.2 Variété à bord

On donne élargit alors notre définition d'une variété, qui sera notre définition générale pour la suite. On se donne une variété M muni de son atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ et on rajoute la contrainte suivante sur les cartes:

$$\forall i \in I \; ; \; \phi_i : U_i \longmapsto V_i \text{ avec } V_i \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^n_+$$

Ceci nous permet de définir le bord d'une variété par:

$$\partial M := \left\{x \in M \; ; \; \exists (U, \phi) \in \mathcal{A} \; ; \; x \in U \text{ et } \phi(x) \in \partial\mathbb{R}^n_+\right\}$$

Alors on peut montrer que c'est bien une généralisation du concept de variété, en effet si une variété définie de la sorte n'a pas de bords, ie si $\partial M = \emptyset$, alors on peut construire un atlas au sens du chapitre 2.

En particulier, on peut remarquer que $\mathbb{R}^n_+$ lui-même est bien une variété à bord ce qui est bien cohérent ...

[1]Comme graphe d'une fonction constante définie sur un ouvert.

Chapter 6

Exemples de variétés

Dans ce chapitre, on présente quelques exemples simples de variétés différentielles, leurs atlas et quelques unes de leurs propriétés.

6.1 Le cercle S^1

6.2 La sphere S^2

6.3 Plan projectif $\mathbb{R}P^2$?

Chapter 7

Espaces tangents dans $\mathbb{R}^n$

On aimerait alors pouvoir généraliser la notion **d'espace tangent** à une courbe, surface ... lisse de $\mathbb{R}^n$ à des variétés abstraites comme définies dans les deux premiers chapitres. Pour ce faire, il est fondamental de comprendre que les variétés ainsi définies ne sont **pas** des objets de $\mathbb{R}^k$, donc la notion de vecteur tangent géométrique perd son sens.

L'approche fructueuse consiste alors à identifier **vecteurs** de $\mathbb{R}^n$ et **dérivations** via la notion de dérivée directionnelle. On considère tout d'abord le cas de $\mathbb{R}^n$, puis on généralise dans une variété quelconque.

7.1 Notion de dérivation:

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on dira qu'un opérateur linéaire $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une **dérivation** en x si et seulement si elle vérifie la **règle de Leibniz** donnée par:

$$D(fg) = D(f)g(x) + f(x)D(g)$$

En particulier, les opérateurs de dérivées partielles d'une fonction lisse sont des dérivations.

7.2 Vecteurs géométriques:

On considère l'espace $\mathbb{R}^n_p := \{p\} \times \{v \ ; \ v \in \mathbb{R}^n\}$ des vecteurs **tangents géométriques**. On note ses éléments $u_p \in \mathbb{R}^n_p$, alors on munit cet ensemble des opérations naturelles suivantes:

- $u_p + v_p = (p, u + v)$
- $\lambda u_p = (p, \lambda u)$

Alors cet espace est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel de base canonique évidente $(p, e_i)_{i \leq n}$.

7.3 Espace tangent $T\mathbb{R}^n_p$:

On appelle alors **espace tangent** à $\mathbb{R}^n_p$ l'ensemble $T\mathbb{R}^n_p$ de toutes les dérivations de fonctions lisses définies sur $\mathbb{R}^n$. On pose alors l'application suivante:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n_p &\longrightarrow T\mathbb{R}^n_p \\ v_p &\longmapsto \left(f \mapsto \sum_{i \leq n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right) \end{aligned}$$

Alors on remarque plusieurs propriétés:

- L'espace $T\mathbb{R}^n_p$ est trivialement un espace vectoriel.
- L'application ci-dessus est un isomorphisme.

Ceci nous permet alors d'identifier vecteurs et dérivations, en outre, on en déduit une base de $T\mathbb{R}^n_p$ qui est alors donnée par:

$$\Phi(e_i) = \left(f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right) =: \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$$

Chapter 8

Espaces tangents sur une variété

On généralise l'approche du chapitre précédent au cas des variétés, et on en déduit une définition de l'espace tangent en un point, intrinsèque et qui ne dépends pas des cartes. Dans toute la suite, on considèrera une fonction $f : M \longrightarrow N$ point $p \in M$, une carte $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ qui contiennent respectivement p et $f(p)$

8.1 Espace tangent en un point:

On définit une **dérivation** sur M comme un opérateur linéaire sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui vérifie la règle de Leibniz. On définit alors de manière analogue au cas euclidien TM_p comme l'ensemble des dérivations au point p. C'est alors un espace vectoriel pour les lois usuelles.

8.2 Différentielle

On considère alors une application lisse $f : M \longmapsto N$ et $p \in M$. On définit alors la **différentielle** de l'application f en p par l'application suivante:

$$\begin{aligned} df_p : TM_p &\longrightarrow TN_{f(p)} \\ D &\longmapsto \big(g \longmapsto D(g \circ f)\big) \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que cette application est bien définie et qu'elle vérifie les propriétés suivantes:

- Elle est **linéaire**.
- Elle vérifie la **règle de la chaîne:** $d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p$
- Si f est un **difféomorphisme**, alors $\forall p \in M$; df_p est un **isomorphisme**.

On peut alors montrer que pour ces définitions, si on considère une carte (U, ϕ) qui contient p, alors c'est un **difféomorphisme** et donc on a l'isomorphisme suivant:

$$d\phi : TM_p \longrightarrow T\mathbb{R}^n_{\phi(p)}$$

On en déduis donc que TM_p est un espace vectoriel de dimension n et qu'une base est donnée par:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p := d\phi^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\phi(p)}\right)$$

Ce sont des dérivations dont l'action sur une fonction lisse[1] f est définie par la dérivation partielle dans les coordonées locales:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$$

[1] Si $f : M \longrightarrow N$ alors on peut aussi définir une action de ces dérivées partielles en composantes en notant $f_j(p) = (\psi \circ f)_j(p)$ la j-ième composante de f, et alors $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p(f) := \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p(f_1), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p(f_n)\right)$

8.3 Fibré tangent

On cherche alors a globaliser la notion d'espace tangent et considérer **l'ensemble de tout les espaces tangents**. Ce point de vue est fructueux car il permettra de définir de manière simple la notion de champs de vecteurs sur une variété.

On appelle cet ensemble le **fibré tangent** de M et il est défini par:

$$TM = \bigsqcup_{p\in M} TM_p = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times TM_p$$

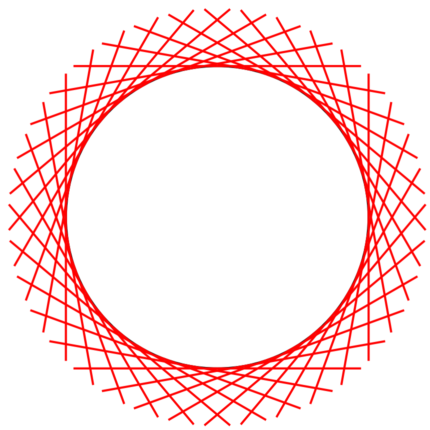

Figure 8.1: Fibré tangent du cercle $\mathbb{S}^1$

Le fibré tangent hérite alors de plusieurs propriétés:

- Une projection $\pi : (p, v_p) \in TM \mapsto p$ appelée **trivialisation locale**.
- Une topologie définie par la préimage de celle ci.

De ces propriétés, on peut alors montrer que TM peut être muni d'une structure de **variété différentielle** de dimension $2n$. En effet on considère une carte (U, ϕ) de M, alors on pose:

$$\Big(\pi^{-1}(U), (p, v_p) \mapsto (\phi(p), v_{p,1}, \dots, v_{p,n})\Big)$$

Alors ceci définit une carte locale sur l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ et on peut alors montrer que l'ensemble des cartes ainsi construites forme bien un atlas sur TM (admis car non nécessaire pour la suite ?).

Un des intérêts de cette notion est qu'on peut alors identifier la différentielle comme une application globale sur les fibrés donnée par:

$$\begin{aligned} df : TM &\longrightarrow TN \\ (p, v_p) &\longmapsto (f(p), df_p(v_p)) \end{aligned}$$

8.4 Champs de vecteurs

On peut alors définir la notion de **champs de vecteurs** sur une variété M par la donnée d'une application lisse de la forme:

$$\begin{aligned} V : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto (p, v_p) \end{aligned}$$

Où on identifiera $V(p) \triangleq v_p$. Alors plus précisément, si on fixe $p \in M$, alors en coordonées locales on a:

$$V(p) = \sum_{i=1}^{n} V_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

8.5 Pushforward d'un champs de vecteurs

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application lisse, l'utilité principale de la différentielle est de pouvoir transporter des vecteurs tangents à M sur des vecteurs tangents à N, on peut alors se demander si on peut transporter un champs de vecteurs $X : p \longrightarrow TM$ de la sorte, on peut toujours définir:

$$g_X : p \in M \longmapsto (f(p), df_p(X_p)) \in TN$$

Mais ce n'est pas à proprement parler un champs de vecteurs sur N du fait du domaine de définition, néanmoins si f est une **difféomorphisme**, on peut définir le **pushforward** de X induit par f par:

$$f_*X : q \in N \longmapsto (q\ ;\ df_{f^{-1}(q)}(X_{f^{-1}(q)})) \in TN$$

On obtient bien ainsi un champs de vecteurs sur N.

Chapter 9

Espaces cotangents sur une variété

On peut alors considérer naturellement l'espace dual à l'espace tangent en un point $p \in M$ et on définit ainsi **l'espace cotangent** en un point. On notera une base de cet espace, dans des coordonées locales, par la famille $(dx_i)_{i \leq n}$ qui vérifie par définition pour la base définie dans le chapitre précédent que:

$$dx_i \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) = \delta_{i,j}$$

9.1 Fibré cotangent

On peut alors de manière analogue globaliser la notion d'espace cotangent et considérer **l'ensemble de tout les espaces cotangents**. Ce point de vue est fructueux car il permettra de définir de manière simple la notion de champs de covecteurs, de formes différentielles et de manière générale d'étendre l'algèbre tensorielle aux variétés.

On appelle cet ensemble le **fibré cotangent** de M et il est défini par:

$$TM^* = \bigsqcup_{p \in M} TM_p^* = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times TM_p^*$$

C'est, par définition du dual d'un fibré vectoriel[1], le dual de TM. Aussi, il vérifie des propriétés analogues au fibré vectoriel et c'est aussi une variété de dimension $2n$.

9.2 Identification de la différentille à une forme:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ s'identifie à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors pour toute fonction lisse $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} df_p(v)(g) &= \sum_{i=1}^{n} v_i df_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) (g) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g}{\partial t}(f(t)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{f(p)} \right) (g) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute fonction lisse g, on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{f(p)}$$

[1] Le dual du fibré, c'est le fibré des duals (:

Or, le vecteur de base $\frac{\partial}{\partial t}$ de $T\mathbb{R}_{f(p)}$ s'identifie naturellement à la base canonique de $\mathbb{R}$, on a aussi $v_i = dx_i(v)$ donc on a l'identification naturelle suivante:

$$df_p(v) \triangleq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)dx_i(v)$$

On remarque alors que $df_p \in TM_p^*$, on peut donc identifier la différentielle d'une fonction scalaire évaluée en un point à un vecteur cotangent, ie une forme linéaire sur l'espace tangent.

9.3 Identification de la différentille dans le cas général:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow N$ s'identifie aussi à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors pour toute fonction lisse $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$on a:

$$\begin{aligned}
df_p(v)(g) &= \sum_{i=1}^{n} v_i df_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right)(g) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(p)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_{f(p)} \right)(g)
\end{aligned}$$

Où ici f_j représente les coordonées locales de f au voisinage de $f(p)$, ie $f_j = (\psi \circ f)_j(p)$. Ceci étant vrai pour toute fonction lisse g, on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_{f(p)}$$

Or, le vecteur de base $\frac{\partial}{\partial y_j}$ de $TN_{f(p)}$ s'identifiant naturellement au vecteur la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a l'identification naturelle suivante:

$$df_p(v) \triangleq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(p) \right) dx_i(v) = (df_{1,p}(v), \ldots, df_{m,p}(v))$$

De manière analogue on peut aussi remarque que la matrice de la différentielle dans les cartes est alors donnée par la jacobienne associée.

Chapter 10

Formes différentielles sur une variété

On peut alors définir la notion de **champs de covecteurs** sur une variété M, ie la notion de 1-forme différentielle. Elle est définie par la donnée d'une application lisse de la forme:

$$\begin{aligned} \omega : M &\longrightarrow TM^* \\ p &\longmapsto (p, \omega_p) \end{aligned}$$

Où on identifiera $\omega(p)$ et ω_p. Alors plus précisément, si on fixe $p \in M$, alors en coordonées locales on a:

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(p) dx_i$$

10.1 Différentielles d'une fonction

On remarque alors qu'un exemple remarquable de 1-forme différentielle est celui de la différentielle elle même d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, en effet, on a expliqué plus haut que l'on peut identifier:

$$df_p \triangleq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i$$

10.2 Formes différentielles de degré k

Plus généralement, l'espace tangent TM_k est un espace vectoriel, donc on peut considèrer l'ensemble des k-tenseurs covariants sur celui-ci, qu'on notera $\Lambda^k(TM_p^*)$, et de manière analogue aux constructions précédentes, on construit la k-ième puissance extérieur du fibré cotangent par:

$$\Lambda^k(TM^*) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(TM_p^*) = \bigcup_{i \in M} \{p\} \times \Lambda^k(TM_p^*)$$

Et finalement définir l'ensemble des k-formes différentielles, noté $\Omega^k(M)$ comme l'ensemble des applications de la forme:

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^k(TM^*)$$

Qui, d'aprés le chapitre introductif sur l'algèbre tensorielle, s'écrivent dans la base locale sous la forme suivante:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \ldots, i_k}(p) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

10.3 Formes volumes

On appelle **forme volume** sur M tout élément de $\Omega^n(M)$ qui ne **s'annule pas**. On dira alors que M est **orientable**.

10.4 Evaluation d'un forme

Une 1-forme différentielle ω étant un champs de formes linéaires, si on fixe $p \in M$, on peut alors évaluer cette forme en un champs de vecteurs X, et cette opération est donnée par:

$$\omega(X) : p \longmapsto \omega_p(X_p)$$

Alors, on peut exprimer cette évaluation en coordonées locales, ie si on a une forme différentielle d'ordre k et un champs de vecteurs de la forme suivante:

$$\omega(p) = \sum_{i \leq n} \omega_i(p) dx_i \qquad X = \sum_{i \leq n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\phi(p)}$$

Alors on a par définition de la base duale:

$$\begin{aligned} \omega(X)(p) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i(p) dx_i \left(\sum_{j \leq n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{\phi(p)} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i(p) x_i \end{aligned}$$

Donc pour un point p fixé, une 1-forme est un objet qui prends un **champs de vecteurs** et retourne une **fonction** de p. De manière analogue on peut généraliser et évaluer une k-forme sur k champs de vecteurs et obtenir une fonction.

10.5 Dérivée extérieure locale

En un point $p \in M$, on peut alors définir l'opérateur de **dérivée extérieure** (au voisinage du point p) conformément au chapitre I par:

$$\begin{aligned} d_p^k : \Omega_p^k(M) &\longrightarrow \Omega_p^{k+1}(M) \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

Où $d\omega$ est défini encoordonées locales conformément à la définition usuelle par différentiation de la fonction coefficients:

$$d\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} d\omega_{i_1, \ldots, i_k}(p) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

On peut alors faire une remarque sur cette définition, si f est une fonction lisse alors la différentielle df_p s'identifie bien à l'application de cet opérateur à f en tant que 0-forme. En particulier si x_i est la fonction i-ème coordonée, alors ceci justifie la notation dx_i pour la base de l'espace cotangent.

10.6 Dérivée extérieure globale

On aimerait alors pouvoir définir cet opérateur globalement, comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, on montre alors que cette définition locale ne dépends pas du choix de la carte et donc on peut définir cet opérateur globalement:

$$\begin{aligned} d^k : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(M) \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

Et alors il vérifie toutes les propriétés de la dérivée extérieure de $\mathbb{R}^n$.

10.7 Pullback d'un champs de covecteurs

Dans la section sur les champs de vecteurs, on a vu que la différentielle d'une application $f : M \longrightarrow N$ permet de transporter ceux-ci par **pushforward**. On définit ici le concept dual (associé à l'adjoint de la différentielle) qui permet de transporter des champs de covecteurs dans le sens opposé.

Etant donnée une 1-forme différentielle ω sur N, on peut alors **toujours** définir le **pullback** de ω induit par f par:

$$f^*\omega : p \in M \longrightarrow (p, \omega_{f(p)} \circ df_p) \in TM^*$$

Alors c'est bien une forme différentielle sur M.

10.8 Pullback d'une forme différentielle

De manière générale pour une k-forme on définit en composant par un k-uplet de différentielles de f:

$$f^*\omega : p \in M \longrightarrow (p, \omega_{f(p)} \circ (df_p, \ldots, df_p)) \in TM^*$$

10.9 Propriétés du pullback

Le pullback d'une k-forme sera un des outils principaux pour construire la théorie de l'intégration sur une variété. On a donc besoin d'étudier ses propriétés, alors on peut montrer qu'on a:

- Le pullback est **linéaire**.
- Le pullback respecte le **produit extérieur**:

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$$

- Le pullback respecte la **dérivée extérieure**:

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

Chapter 11

Orientation d'une variété à bord

Dans le troisième chapitre, on a définit la notion de variété à bord, puis par la suite celle de forme volume qui définit une orientation sur une variété M. On se pose alors la question suivante:

Est-il possible de construire une orientation sur ∂M étant donnée une orientation sur M ?

On considère par la suite une variété à bord de dimension n

Chapter 12

Intégrale locale d'une forme sur une variété

Dans ce chapitre, nous définissons le concept principal qui menera au théorème de Stokes, ie la notion **d'intégrale d'une k-forme différentielle** sur une variété ORIENTEE (donc problème avec la version actuelle) M de dimensions k. On expliquera alors pourquoi les formes différentielles sont les candidats les plus naturels à êtres intégrés. Puis on énoncera plusieurs propriétés fondamentales de l'intégrale dans ce cadre.

12.1 Intégrale d'une fonction

Le problème principal dans la définition de l'intégrale sur une variété est le suivant, **intégrer une fonction dépends des cordonées choisies**. En effet on pourra imaginer définir l'intégrale d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ à support compact D et dont celui ci est inclu dans une carte (U, ϕ) par:

$$\int_D f = \int_{\phi(D)} f \circ \phi^{-1}$$

Mais en fait cette intégrale serait alors mal définie ! En effet si D est inclu dans deux cartes différentes $(U, \phi), (V, \psi)$, on a:

$$\int_{\phi(D)} f \circ \phi^{-1} = \int_{\psi(D)} f \circ \psi^{-1} \, |\det J\Phi| \neq \int_{\psi(D)} f \circ \psi^{-1}$$

Ceci permet alors de justifier l'assertion suivante:

Les fonctions ne sont en fait pas la bons objets à intégrer.

12.2 Intégrale locale

L'objet naturel pour être intégré sur une variété de dimension k sont donc en fait les k-formes. Nous commençons par définir leur intégrale dans le cas simple $\omega \in \Omega_c^k(M)$ dont le support est inclu dans une carte locale (U, ϕ). La définition de l'intégrale de ω consiste alors à intégrer son expression en coordonées locales:

$$\int_M \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega$$

Alors cette expression est bien définie et ne dépends pas du choix de la carte (SAUF ORIENTATION, AU SIGNE PRES). Ceci s'explique par le fait que la règle de transformation de la mesure est encapsulée dès le départ dans le concept de forme différentielle. En outre l'intégrale de droite est bien finie car le support de la forme est compact donc l'image de celui ci par la carte est un compact.

12.3 Exemples et cas particuliers

On peut alors chercher à exprimer l'intégrale d'une fonction lisse à support compact sur un domaine simple comme un cas particulier d'intégrale d'une forme différentielle, et en effet c'est le cas:

- Si on considère la 1-forme $\omega = f(x)dx$ et $\Gamma =]a\,;\,b[\subseteq \mathbb{R}$, on obtient:

$$\int_\Gamma \omega := \int_{]a\,;\,b[} \gamma^*\omega = \int_{]a\,;\,b[} \omega_t(\mathrm{Id}(t)) = \int_{]a\,;\,b[} f(t)dt$$

- Si on considère la 2-forme $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$ et $\Sigma =]0\,;\,1[^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, on obtient:

$$\int_\Sigma \omega := \int_{]0\,;\,1[^2} \Sigma^*\omega = \int_{]0\,;\,1[^2} \omega_{u,v}(\mathrm{Id}(u,v)) = \int_{]0\,;\,1[^2} f(u,v)dudv$$

Aussi, ces dernières intégrales s'interpètent à nouveau comme des intégrales sur les variétés $]a\,;\,b[,]0\,;\,1[^2$? Peut on toujours interpréter le signe intégrale comme l'intégrale d'une forme sur une variété ?

Néanmoins c'est bien une notion plus générale car elle nous permettra, à terme, de calculer l'intégrale de la 1-forme $xdy + ydx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ qui n'est pas de la forme $f(t)dt$ ceci sur une courbe (sous-variété de $\mathbb{R}^2$), mais ce concept sera probablement omis car non nécessaire à Stokes et le temps manquera probablement.

12.4 Changement de variables

Si ω est un k-forme sur la variété M et que ϕ est une application lisse

Chapter 13

Intégrale d'une forme sur une variété

Dans ce chapitre, pour une k-forme donnée, on cherche à définir son intègrale sur la variété M, c'est une version **globale** de l'intégrale définie dans le chapitre ci-dessus et elle découle d'un concept topologique puissant appelé **partition de l'unité**. Dans tout la suite, on considérera pour simplifier que M est compacte, et donc qu'on peut la recouvrir par un nombre fini de cartes $(U_i)_{i \leq n}$.

13.1 Définition

On appelle **partition de l'unité** subordonée au recouvrement fini $(U_i)_{i \leq n}$ de M une famille de fonctions $(\rho_i)_{i \leq n}$ de $M \longrightarrow [0\,;\,1]$ telles que $\text{supp}(\rho_i) \subseteq U_i$ et:

$$\sum_{i \leq n} \rho_i = 1$$

Dans le cas général où l'atlas n'est pas fini, on imposera un caractère **localement fini**, c'est à dire que pour tout point $x \in M$, il appartient à un nombre fini de cartes. L'intérêt de ce concept est de pouvoir "recoller" les données de la forme dans chaque carte globale.

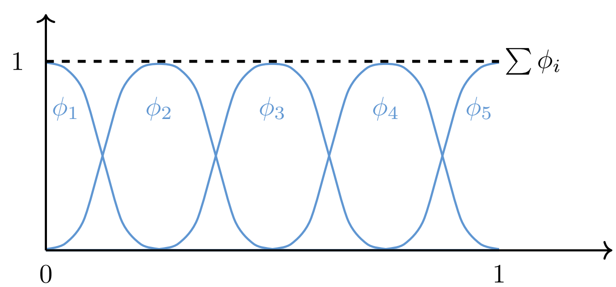

Figure 13.1: Partition de l'unité de l'intervalle $]0\,;\,1[$

En effet supposons que l'on considère par exemple une fonction f définie sur $]0\,;\,1[$, qu'on recouvre celui ci par des ouverts $(U_i)_{i \in I}$ et qu'on considère une partition de l'unité subordonée, alors on a alors:

$$f = \sum \rho_i f = \sum \rho_i f\big|_{\text{supp}(\rho_i)} = \sum \rho_i f\big|_{U_i}$$

Et donc en particulier $\int_{]0\,;\,1[} f = \sum \int_{U_i} \rho_i f$

13.2 Théorème fondamental

Alors un des résultats fondamental pour construire la théorie de l'intégration sur une variété est le suivant:

Pour toute variété différentielle, il existe une partition de l'unité lisse subordonnée à son atlas.

La preuve de cette existence démontre tout d'abord l'existence de "bump functions", fonction simples qui sont nulles sauf sur une carte donnée. Puis grâce à ces fonctions, on peut construire la partition de l'unité.

13.3 Intégrale d'une forme sur une variété

On considère alors une variété M de dimension k muni de son atlas $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$. Alors il existe $(\rho_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à l'atlas. Soit ω une k-forme, alors on définit l'intégrale de ω sur M par:

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I} \int_{U_i} \rho_i \omega\big|_{U_i}$$

Alors on se ramène à une somme (finie) d'intégrales de k-formes restreintes à une carte, qu'on peut donc intégrer en coordonées locales par le chapitre précédent.

Chapter 14

Théorème de Stokes-Cartan

Dans tout les chapitres précédents, nous avons présenté un cadre théorique suffisant pour énoncer et comprendre le théorème fondamental de l'intégration, généralisation du théorème fondamental de l'analyse appellé **théorème de Stokes-Cartan**. On considère une variété M vérifiant plusieurs hypothèses:

- Elle est **compacte**.
- Elle est **orientable**.

On considère aussi une $n-1$ forme ω, alors on peut montrer le théorème suivant:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Où ici ∂M est munie de l'orientation induite par M. On peut alors faire plusieurs remarques sur cet énoncé:

- Si M est **sans bords**, alors on a $\partial M = \emptyset$ donc l'intégrale est nulle.
- Si M est de dimension 1, et notamment si $M = [a\,;\,b]$, on retrouve le théorème fondamental de l'analyse.

Chapter 15

Applications de la théorie des formes

15.1 Cas de la dimension 3

Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, on a la chaîne suivante:

$$\Lambda^0\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_0} \Lambda^1\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_1} \Lambda^2\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_2} \Lambda^3\mathbb{R}^3$$

On peut alors montrer facilement que les dimensions des différents espaces suivent la suite $(1, 3, 3, 1)$ et les propriétés surprenantes suivantes:

- On a d_0 qui s'identifie **au gradient de la fonction**.
- On a d_1 qui s'identifie **au rotationnel du champ de vecteurs**.
- On a d_2 qui s'identifie **à la divergence du champ de vecteurs**.

Et par la propriété fondamentale de la dérivée extérieure, on a alors les formules classiques suivantes comme simple conséquence:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}(\nabla f) = 0 \\ \mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0 \end{cases}$$

Chapter 16

Applications du théorème de Stokes-Cartan

Chapter 17

Conclusion