

Variétés différentielles - Preuves

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

Elements d'algèbre tensorielle :

L'espaces des tenseurs est un espace vectoriel :

On considère l'espace $\mathcal{T}^p(E)$ l'espace des tenseurs p-covariants, montrons que c'est un sev de $\mathcal{F}(E^p, \mathbb{R})$, on a:

- L'application nulle est bien un tenseur p-covariant.
- Si $T, T' \in \mathcal{T}^p(E)$, alors $T + T' = (v_1, \dots, v_p) \mapsto T(v_1, \dots, v_p) + T'(v_1, \dots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.
- Si $T \in \mathcal{T}^p(E)$, alors $\lambda T = (v_1, \dots, v_p) \mapsto \lambda T(v_1, \dots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.

Le produit tensoriel est bien défini :

On considère:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{T}^p(E) \times \mathcal{T}^q(E) &\longrightarrow \mathcal{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \alpha(x_1, \dots, x_p) \beta(y_1, \dots, y_q)$$

Alors si $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in E^{p+q}$, par linéarité de chacun des tenseurs, on vérifie bien que $\alpha \otimes \beta$ est bien multilinéaire.

Base et dimension de l'espace des tenseurs :

Si on note $(e_i)_{i \leq n}$ une base de E et $T \in \mathcal{T}^p(E)$, alors on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, x_p) &= T \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq n} x_{1,i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{1 \leq i_p \leq n} x_{p,i_p} e_{i_p} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} x_{1,i_1} \dots x_{p,i_p} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Mais on remarque alors que le produit $x_{1,i_1} \dots x_{p,i_p}$ consiste alors en l'évaluation en (x_1, \dots, x_p) du tenseur:

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

Et donc on obtient:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

En d'autres termes, la famille $(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p})_{i_1, \dots, i_p \in \llbracket 1 ; n \rrbracket}$ engendre l'espace. Elle est aussi libre car si on considère une famille de scalaires $(\lambda_{i_1, \dots, i_p})$ tels que:

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} = 0 :$$

Alors si on évalue cette forme en $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, on annule tout les termes sauf $\lambda_{i_1, \dots, i_p}$ qui est donc nul. Et en répétant ceci, on trouve que les $(\lambda_{i_1, \dots, i_p})$ sont tous nuls. Cette famille est donc une base et la dimension de l'espace est alors p^n .

Propriété de signature d'un tenseur antisymétrique :

On se donne une permutation $\sigma \in S_p$ et un tenseur antisymétrique $T \in \mathcal{T}^p(E)$, montrons que:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma)T(x_1, \dots, x_n)$$

Alors on peut décomposer $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ en k transpositions et on a alors:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = T_{\tau_1 \dots \tau_k}(x_1, \dots, x_n) = T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Où la dernière égalité pose que τ_k permute x_i, x_j . Alors on trouve par antisymétrie:

$$T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

Alors par récurrence, on répète le processus pour obtenir:

$$T_\sigma = (-1)^k T$$

Où k est le nombre de transposition dans la décomposition de σ et ce coefficient est exactement $\varepsilon(\sigma)$.

L'antisymétrisation d'un tenseur est bien antisymétrique :

On se donne un tenseur $T \in \mathcal{T}^p(E)$, montrons que le tenseur suivant est bien antisymétrique:

$$\text{Asym}(T)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

On a que si on permute x_i, x_j avec $i \leq j$, on a:

$$\begin{aligned} \text{Asym}(T)(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\ &= -\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\ &= -T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Donc $\text{Asym}(T)$ est bien antisymétrique.

Base et dimension de l'espace des tenseurs antisymétriques :

On utilise la même approche que pour l'espace des tenseurs, soit T un p -tenseur antisymétrique, alors par multilinéarité:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

Mais T est antisymétrique, donc les indices des termes non nuls sont différents, ie on somme en fait sur $I = \{(i_1, \dots, i_p) ; \forall p, q \ i_p \neq i_q\}$. Aussi par un raisonnement combinatoire, il est équivalent de sommer sur des indices distincts et de sommer sur des indices strictement croissants puis sur toutes les permutations de ceux ci, ie on a:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} T(e_{\sigma(i_1)}, \dots, e_{\sigma(i_p)}) e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) p! \text{Asym}(e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_p)}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \end{aligned}$$

Donc la famille est génératrices des tenseurs antisymétriques. En outre elle est libre par un argument similaire à celui des tenseurs simples. En particulier, un tel tenseur est donc uniquement déterminé par son image sur toutes les vecteurs de la base indexés par une suite strictement croissante, et il y a $\binom{n}{p}$ telles suites, c'est donc la dimension de $\Lambda^p E^*$.

Propriétés algébriques du produit extérieur :

- **Bilinéarité et alternance:**
- **Déterminant:** Soit $\mathcal{B} = (e^i)_{i \leq n}$ une base duale de E ainsi), alors on a par définition:

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(n)}$$

Donc si on considère (x_1, \dots, x_n) des vecteurs de E , alors on évalue:

$$\begin{aligned} e^1 \wedge \dots \wedge e^n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)}(x_1) \dots e^{\sigma(n)}(x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) x_{1, \sigma(1)} \dots x_{n, \sigma(n)} \\ &= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Attention ici la notation $x_{i,j}$ signifie bien la j -ième coordonnée de x_i dans la base (non canonique a priori) des (e_i) .

Formes différentielles dans \mathbb{R}^n :

Linéarité de la dérivée extérieure :

On se donne ω, η deux une k -formes sur \mathbb{R}^n ainsi que λ un scalaire, alors on a:

$$d(\omega + \lambda\eta) = d\left(\sum_I (f_I + \lambda g_I)(x) dx^I\right) = \sum_I d(f_I + \lambda g_I)(x) \wedge dx^I$$

Où le d du dernier membre est simplement la différentielle usuelle, qui est linéaire d'après la théorie du calcul différentiel élémentaire, ce qui permet de conclure.

Formule de Leibniz :

On se donne ω, η respectivement une k -forme et une p -forme sur \mathbb{R}^n alors on a:

$$\begin{cases} \omega = \sum_I \omega_I(x) dx^I \\ \eta = \sum_J \eta_J(x) dx^J \end{cases}$$

On a alors:

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \sum_{I,J} (\omega_I \eta_J)(p) dx^I \wedge dx^J$$

Appliquons la dérivée extérieure:

$$d(\omega \wedge \eta)(p) = \sum_{I,J} d(\omega_I \eta_J)(p) \wedge dx^I \wedge dx^J$$

Les fonctions différentiées sont scalaires, donc on applique la règle du produit:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta)(p) &= \sum_{I,J} (d\omega_I(p)\eta_J(p) + \omega_I(p)d\eta_J(p)) \wedge dx^I \wedge dx^J && \text{(Par définition.)} \\ &= \sum_{I,J} d\omega_I(p)\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J + \sum_{I,J} \omega_I(p)d\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J && \text{(Distributivité du produit extérieur.)} \\ &= \sum_{I,J} d\omega_I(p) \wedge dx^I \wedge \eta_J(p) dx^J + \sum_{I,J} d\eta_J(p) \wedge \omega_I(p) dx^I \wedge dx^J && \text{(Bilinéarité du produit extérieur.)} \\ &= d(\omega \wedge \eta)(p) + (-1)^k \sum_{I,J} \omega_I(p) dx^I \wedge d\eta_J(p) \wedge dx^J && (*) \\ &= (d\omega \wedge \eta)(p) + ((-1)^k \omega \wedge d\eta)(p) \end{aligned}$$

Où pour trouver $(*)$, on identifie le premier terme, et on utilise le fait que $\eta_J(p), dx_I$ sont respectivement une 1- forme et une k -forme et il y a donc k échanges à faire et donc k application de l'antisymétrie.

Propriété fondamentale de la dérivée extérieure :

On considère une k forme $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$, alors on a:

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I = \sum_I \sum_{i \leq n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I$$

Et donc si on dérive à nouveau on obtient:

$$dd\omega = \sum_I \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I$$

On peut alors montrer que pour I fixé, on a:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i = 0$$

En effet si $i = j$ c'est évident, mais si $i \neq j$, on a que:

$$\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i + \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} dx^i \wedge dx^j = 0$$

En effet, ω_I est une fonction lisse donc on applique Schwartz et les dérivées croisées sont égales, mais les produit extérieurs $dx^i \wedge dx^j$ sont opposés. Ceci nous permet d'appairer les termes en n sommes nulles (il y a $2n$ termes dans la somme).