

Dans la suite  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  est un espace mesuré.

### Théorème de convergence dominée

On se donne une suite  $f_n \in \mathcal{M}(X)$  qui converge simplement vers  $f$ . On suppose qu'il existe  $g$  intégrable telle que  $\forall n \in \mathbb{N} ; |f_n| \leq g$ . Alors on a:

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est intégrable car par croissance de l'intégrale  $\int |f_n| d\mu \leq \int g d\mu < \infty$
- Par passage à la limite,  $|f| \leq g$  et donc  $f$  est intégrable par le même raisonnement.

Montrons maintenant qu'on peut faire l'interversion limite/intégrale, on définit les suites (de fonctions) suivantes:

$$\begin{cases} u_n := |f_n - f| \\ v_n := \sup\{u_k ; k > n\} \\ w_n := 2g - v_n \end{cases}$$

Soit  $x \in X$ , étudions tout d'abord la suite  $(v_n)$ , on peut montrer les deux propriétés suivantes:

- Elle est décroissante: En effet si  $n < m$ , on a  $\{u_k(x) ; k > m\} \subseteq \{u_k(x) ; k > n\}$  en passant à la borne supérieure on a  $v_m(x) > v_n(x)$
- Elle tends vers 0, en effet  $(u_n)$  converge simplement vers 0 et on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{u_k(x) ; k > n\} = \limsup u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$$

On déduit donc de ces résultats que la suite  $w_n$  est une suite **croissante de fonctions mesurables**, en effet si  $n > n'$ , on a:

$$-v_n(x) > -v_{n'}(x)$$

Et donc:

$$2g(x) - v_n(x) > 2g(x) - v_{n'}(x)$$

En outre cette suite est positive à partir d'un certain rang car  $v_n$  tends vers 0 et  $g$  est positive (donc  $|v_n| < 2g$  à partir d'un certain rang). On peut donc appliquer **le théorème de convergence monotone** et on obtient que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int 2g - v_n d\mu = \int 2g d\mu$$

En appliquant la linéarité dans l'intégrale de gauche et en calculant la limite de cette manière on obtient alors que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int v_n d\mu = 0$$

Finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a que:

$$|f_n - f| \leq \sup\{|f_n - f| ; k > n\} = v_n$$

Donc en intégrant ces fonctions et en passant à la limite, on trouve:

$$\int |f_n - f| d\mu \leq \int v_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et par inégalité triangulaire, on a:

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc:

$$\int f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$$