Catégories

Produit:

On considère une catégorie $\mathcal{C}$ (penser **Set**) et une famille d'objets (X_i) de celle-ci, alors on appelle **produit** des X_i, si il existe, un objet X de $\mathcal{C}$ ainsi que $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ des morphismes qu'on appelera à bon escient **projections** tels que:

Pour tout autre objet Y de $\mathcal{C}$ et $f_i : Y \longrightarrow X_i$, il existe un unique morphisme f tel que $\pi_i \circ f = f_i$

En particulier, cela équivaut à la commutation du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\pi_i"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_i"] & X_i
\end{tikzcd}$$

Maintenant qu'elle est **l'idée** derrière cette horreur ? Et finalement:

Qu'est qu'un produit (cartésien) ?

Fondamentalement un produit de **deux** ensembles A, B c'est un autre ensemble $A \times B$ qu'on peut munir de projections canoniques trivialement et tels que si on prends une fonction d'un ensemble Y dans A (ou B), alors on peut **la faire passer** par $A \times B$.

En d'autres termes, n'importe quelle fonction de $Y \longrightarrow A$ est égale à une (unique) fonction $Y \longrightarrow A \times B$ suivie de la projection canonique, avec la suite de transformations:

$$Y \dashrightarrow A \times B \hookrightarrow A$$

Coproduit:

On considère une catégorie $\mathcal{C}$ (penser **Set**) et une famille d'objets (X_i) de celle-ci, alors on appelle **coproduit** des X_i, si il existe, un objet X de $\mathcal{C}$ ainsi que $\phi_i : X_i \longrightarrow X_i$ des morphismes qu'on pour appeler à bon escient **injections** tels que:

Pour tout autre objet Y de $\mathcal{C}$ et $f_i : X_i \longrightarrow Y$, il existe un unique morphisme f tel que $f \circ \phi_i = f_i$

En particulier, cela équivaut à la commutation du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, dashed, "f"'] \\
Y & X_i \arrow[l, "f_i"'] \arrow[u, "\phi_i"']
\end{tikzcd}$$

Maintenant qu'elle est **l'idée** derrière cette (deuxième) horreur ? Et finalement:

Qu'est qu'un union disjointe ?

Fondamentalement une union disjointe de **deux** ensembles A, B c'est un autre ensemble $A \bigsqcup B$ qu'on peut munir d'injections canoniques trivialement et tels que si on prends une fonction de A (ou B) dans un ensemble Y , alors on peut **la faire passer** par $A \bigsqcup B$.

En d'autres termes, n'importe quelle fonction de $A \longrightarrow Y$ est égale à une (unique) fonction $A \bigsqcup B \longrightarrow Y$ précédée de l'injection canonique avec la suite de transformations:

$$A \hookrightarrow A \bigsqcup B \dashrightarrow Y$$

On remarque bien l'intéressante dualité produit/coproduit, on a d'une certaine manière assez peu claire conceptuellement *"seulement changé le sens des fleches"*, il y a une symétrie évidente.