Dans la suite $(X, \mathscr{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

Propriétés de la mesure

On rapelle qu'une mesure est nulle sur la partie vide et **sigma additive**, montrons les propriétés suivantes pour A, B des parties mesurables quelconques et $(A_n), (B_n)$ deux suites de parties mesurables respectivement croissante et décroissante:

$$\begin{cases} \mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B \cap A) \\ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ \mu(\bigcup A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) \\ \mu(\bigcap B_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n) \end{cases}$$

1) On a directement que:

$$A = A \backslash B \cup A \cap B$$

Donc:

$$\mu(A) = \mu(A \backslash B) + \mu(A \cap B)$$

Si $B \subseteq A$, on a donc le cas particulier usuel.

2) On a directement l'union disjointe:

$$A \cup B = (A \backslash A \cap B) \cup (B \backslash A \cap B) \cup (A \cap B)$$

Et donc:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

3) Si (A_n) est une suite croissante, on peut écrire son union sous la forme de l'union disjointe suivante:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \bigcup_{n \leq 1} A_n \backslash A_{n-1}$$

Et donc on en déduis que:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A_0) + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})$$

La somme se téléscope et on obtient:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A_0) + \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) - \mu(A_0) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

4)

Théorême de convergence dominée

On se donne une suite $f_n \in \mathscr{M}(X)$ qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe g intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|f_n| \leq g$. Alors on a:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable car par croissance de l'intégrale $\int |f_n| d\mu \leq \int g d\mu < \infty$
- Par passage à la limite, $|f| \leq g$ et donc f est intégrable par le même raisonnement.

Montrons maintenant qu'on peut faire l'interversion limite/intégrale, on définit les suites (de fonctions) suivantes:

$$\begin{cases} u_n := |f_n - f| \\ v_n := \sup\{u_k \ ; \ k > n\} \\ w_n := 2g - v_n \end{cases}$$

Soit $x \in X$, étudions tout d'abord la suite (v_n), on peut montrer les deux propriétés suivantes:

- Elle est décroissante: En effet si $n < m$, on a $\{u_k(x)\ ;\ k > m\} \subseteq \{u_k(x)\ ;\ k > n\}$ en passant à la borne supérieure on a $v_m(x) > v_n(x)$
- Elle tends vers 0, en effet (u_n) converge simplement vers 0 et on a:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k(x)\ ;\ k > n\} = \limsup u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$$

On déduis donc de ces résultats que la suite w_n est une suite **croissante de fonctions mesurables**, en effet si $n > n'$, on a:

$$-v_n(x) > -v_n'(x)$$

Et donc:

$$2g(x) - v_n(x) > 2g(x) - v_n'(x)$$

En outre cette suite est positive à partir d'un certain rang car v_n tends vers 0 et g est positive (donc $|v_n| < 2g$ à partir d'un certain rang). On peut donc appliquer **le théorème de convergence monotone** et on obtient que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int 2g - v_n d\mu = \int 2g d\mu$$

En appliquant la linéarité dans l'intégrale de gauche et en calculant la limite de cette manière on obtient alors que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int v_n d\mu = 0$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que:

$$|f_n - f| \leq \sup\{|f_n - f|\ ;\ k > n\} = v_n$$

Donc en intégrant ces fonctions et en passant à la limite, on trouve:

$$\int |f_n - f| d\mu \leq \int v_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et par inégalité triangulaire, on a:

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc:

$$\int f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu$$