Variétés différentielles - Preuves

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

Chapitre 0 - Elements d'algèbre tensorielle :

L'espaces des tenseurs est un espace vectoriel :

On considère l'espace $\mathscr{T}^p(E)$ l'espace des tenseurs p-covariants, montrons que c'est un sev de $\mathcal{F}(E^p, \mathbb{R})$, on a:

- L'application nulle est bien un tenseur p-covariant.
- Si $T, T' \in \mathscr{T}^p(E)$, alors $T + T' = (v_1, \ldots, v_p) \mapsto T(v_1, \ldots, v_p) + T'(v_1, \ldots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.
- Si $T \in \mathscr{T}^p(E)$, alors $\lambda T = (v_1, \ldots, v_p) \mapsto \lambda T(v_1, \ldots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.

Le produit tensoriel est bien défini :

On considère:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathscr{T}^p(E) \times \mathscr{T}^q(E) &\longrightarrow \mathscr{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = \alpha(x_1, \ldots, x_p)\beta(y_1, \ldots, y_q)$$

Alors si $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \in E^{p+q}$, par linéarité de chacun des tenseurs, on vérifie bien que $\alpha \otimes \beta$ est bien multilinéaire.

Base et dimension de l'espace des tenseurs :

Si on note $(e_i)_{i \leq n}$ une base de E et $T \in \mathscr{T}^p(E)$, alors on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} T(x_1, \ldots, x_p) &= T\left(\sum_{1 \leq i_1 \leq n} x_{1,i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{1 \leq i_p \leq n} x_{p,i_p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} x_{1,i_1} \ldots x_{p,i_p} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Mais on remarque alors que le produit $x_{1,i_1} \ldots x_{p,i_p}$ consiste alors en l'évaluation en $(x_1, \ldots, x_p)$ du tenseur:

$$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$$

Et donc on obtient:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$$

En d'autres termes, la famille $(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p})_{i_1, \ldots, i_p \in [\![1\,;\,n]\!]}$ engendre l'espace. Elle est aussi libre car si on considère une famille de scalaires $(\lambda_{i_1, \ldots, i_p})$ tels que:

$$\sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} \lambda_{i_1, \ldots, i_p} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} = 0 :$$

Alors si on évalue cette forme en $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$, on annule tout les termes sauf $\lambda_{i_1, \ldots, i_p}$ qui est donc nul. Et en répétant ceci, on trouve que les $(\lambda_{i_1, \ldots, i_p})$ sont tous nuls. Cette famille est donc une base et la dimension de l'espace est alors p^n.

Propriété de signature d'un tenseur antisymétrique :

On se donne une permutation $\sigma \in S_p$ et un tenseur antisymétrique $T \in \mathscr{T}^p(E)$, montrons que:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) T(x_1, \dots, x_n)$$

Alors on peut décomposer $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ en k transpositions et on a alors:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = T_{\tau_1 \dots \tau_k}(x_1, \dots, x_n) = T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots x_n)$$

Où la dernière égalité pose que τ_k permute x_i, x_j. Alors on trouve par antisymétrie:

$$T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots x_n) = -T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_n)$$

Alors par récurrence, on répète le processus pour obtenir:

$$T_\sigma = (-1)^k T$$

Où k est le nombre de transposition dans la décomposition de σ et ce coefficient est exactement $\varepsilon(\sigma)$.

L'antisymétrisation d'un tenseur est bien antisymétrique :

On se donne un tenseur $T \in \mathscr{T}^p(E)$, montrons que le tenseur suivant est bien antisymétrique:

$$\mathrm{Asym}(T)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

On a que si on permute x_i, x_j avec $i \leq j$, on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Asym}(T)(x_1, \dots x_j, \dots, x_i \dots, x_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\
&= -\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\
&= -T(x_1, \dots x_i, \dots, x_j \dots, x_p)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Asym}(T)$ est bien antisymétrique.

Base et dimension de l'espace des tenseurs antisymétriques :

On utilise la même approche que pour l'espace des tenseurs, soit T un p-tenseur antisymétrique, alors par multilinéarité:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$$

Mais T est antisymétrique, donc les indices des termes non nuls sont différents, ie on somme en fait sur $I = \left\{(i_1, \ldots, i_p) \; ; \; \forall p, q \; i_p \neq i_q\right\}$. Aussi par un raisonnement combinatoire, il est équivalent de sommer sur des indices distincts et de sommer sur des indices strictement croissants puis sur toutes les permutations de ceux ci, ie on a:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} T(e_{\sigma(i_1)}, \ldots, e_{\sigma(i_p)}) e^{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) p! \mathrm{Asym}(e^{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(i_p)}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}
\end{aligned}$$

Donc la famille est génératrices des tenseurs antisymétriques. En outre elle est libre par un argument similaire à celui des tenseurs simples. En particulier, un tel tenseur est donc uniquement déterminé par son image sur toutes les vecteurs de la base indéxés par une suite strictement croissante, et il y a $\binom{n}{p}$ telles suites, c'est donc la dimension de $\Lambda^p E^*$.

Propriétés algébriques du produit extérieur :

...

Déterminant :

Soit $\mathcal{B} = (e^i)_{i \leq n}$ une base duale de E ainsi), alors on a par définition:

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n = \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(n)}$$

Donc si on considère $(x_1, \ldots, x_n)$ des vecteurs de E, alors on évalue:

$$\begin{aligned}
e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(n)}(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)}(x_1) \ldots e^{\sigma(n)}(x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \ldots x_{1,\sigma(n)} \\
&= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Attention ici la notation $x_{i,j}$ signifie bien la j-ième coordonée de x_i dans la base (non canonique a priori) des (e_i).

Chapitre 4 - Variétés :

La différentiabilité est bien définie :

Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, il s'agit de montrer que pour $p \in M$ et deux cartes $(U, \phi), (V, \psi)$ qui le contiennent, alors:

$$f \circ \phi \text{ différentiable } \iff f \circ \psi \text{ différentiable}$$

Alors on a:

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ c_{\psi,\phi}$$

Où c est l'application de changement de carte associée. On en déduit donc que si $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable alors $f \circ \phi^{-1}$. De manière analogue si $f : M \longrightarrow N$ est différentiable pour deux cartes $(U, \phi), (V, \psi)$ de $p, f(p)$, alors par composition, on en déduis de même.

Chapitre 7 - Espaces tangents dans $\mathbb{R}^n$:

Propriété des dérivations :

Si f est une fonction lisse constante égale à $c \in \mathbb{R}$, et D une dérivation au point $p \in \mathbb{R}^n$, alors $Df = 0$, en effet on a:

$$\begin{aligned}
&D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g) \iff \\
&D(cg) = D(f)g(p) + cD(g) \iff && \text{(Car } fg = cg \text{ en tant que fonction.)} \\
&cD(g) = D(f)g(p) + cD(g) && \text{(Linéarité de } D.\text{)}
\end{aligned}$$

On conclut de la dernière égalité que $D(f)g(p) = 0$ et il suffit alors de choisir g de telle sorte qu'elle ne s'anulle pas en p pour conclure.

$T\mathbb{R}^n_p$ est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$:

On considère l'application suivante:

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathbb{R}^n_p &\longrightarrow T\mathbb{R}^n_p \\
v &\longmapsto \sum_{i \leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p
\end{aligned}$$

Linéarité: Découle directement de la définition ..
Injectivité: Supposons que $v \in \mathbb{R}^n_p$ soit tel que:

$$D = \Phi(v) = 0$$

Alors pour toute fonction lisse $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$, on a $Df = 0$. Alors en particulier pour les fonctions coordonées $(x_i)_{i \leq n}$, on a:

$$\sum_{j \leq n} v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\bigg|_p = v_i = 0$$

Donc toutes les composantes de v sont nulles et $v = 0$.
Surjectivité: **A finir !**

Chapitre 8 - Espaces tangents dans M :

Propriété de la différentielle :

On considère $f : M \longrightarrow N$ lisse et un point $p \in M$, et on considère l'application suivante:

$$df_p : D \in TM_p \longmapsto D(\cdot \circ f) \in TN_{f(p)}$$

- **Bien définie:** Si D est une dérivation en p, alors $g \circ f$ est bien lisse et on a:

$$\begin{aligned}
df_p(D)(gh) &= D(gh \circ f) \\
&= D((g \circ f)(h \circ f)) \\
&= D(g \circ f)(h \circ f)(p) + (g \circ f)(p)D(h \circ f) && \text{(Car } D \text{ est une dérivation en } p.\text{)} \\
&= df_p(g)h(f(p)) + g(f(p))df_p(h)
\end{aligned}$$

Et donc $df_p(D)$ est bien une dérivation en $f(p)$.

- **Linéarité:** Découle directement de la définition.
- **Règle de la chaîne:** Soit $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow L$ deux applications lisses entre des variétés. Soit $p \in M$, alors par définition:

$$d(g \circ f)_p : D \in TM_p \longmapsto D(\cdot \circ g \circ f)) \in TL_{g(f(p))}$$

Il s'agit de montrer que cette fonction est égale à $dg_{f(p)} \circ df_p$, les domaines de définition coincident bien, soit D une dérivation de TM_p, alors on a:

$$dg_{f(p)} \circ df_p(D) = dg_{f(p)}(df_p(D)) = dg_{f(p)}(D(\cdot \circ f)) = D(\cdot \circ g \circ f)$$

On a donc égalité des images et donc égalité des fonctions.

Propriété de structure :

Finalement montrons que si $f : M \longrightarrow N$ est un **difféomorphisme**, alors df_p en un **isomorphisme** en tout point. On utilisera le lemme (presque évident) suivant:

$$d(Id_M)_p = Id_{TM_p}$$

Alors si f est un difféormorphisme, en tout point p, on a:

$$\begin{cases} d(f^{-1} \circ f)_p = df^{-1}_{f(p)} \circ df_p = Id_{TM_p} \\ d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = df_p \circ df^{-1}_{f(p)} = Id_{TN_{f(p)}} \end{cases}$$

Finalement, ceci montre que df_p est bijective d'inverse $df^{-1}_{f(p)}$ et linéaire par définition, on a donc bien:

$$TM_p \cong TN_{f(p)}$$

On en déduit directement en utilisant que toute carte ϕ est un difféomorphisme et donc qu'en tout point d'une variété on a:

$$TM_p \cong T\mathbb{R}^n_{\phi(p)} \cong \mathbb{R}^n$$

Changement de représentation des vecteurs tangents :

Si $(U, \phi), (V, \psi)$ sont deux cartes qui contiennent un point p, alors si on note x_i, y_i les coordonées respectives dans la première et la deuxième carte et $c = \psi \circ \phi^{-1}$ l'application de changement de carte alors pour toute fonction lisse g, on a:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p g &= \frac{\partial g \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p)) \\ &= \frac{\partial g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p)) \\ &= \sum_{j \le n} \frac{\partial g \circ \psi^{-1}}{\partial y_j}(\psi(p)) \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) && \text{(Règle de la chaîne dans } \mathbb{R}^n\text{)} \\ &= \sum_{j \le n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p g \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute application g, on a donc:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \sum_{j \le n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p$$

Si on note $(x_1, \ldots, x_n)$ les composantes de $\phi(p)$, on a donc:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\phi^{-1}(x_1,\ldots,x_n)} = \sum_{j \le n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{\phi^{-1}(x_1,\ldots,x_n)}$$

Le fibré tangent est un variété de dimension $2n$ - Partie 1 :

On définit donc le fibré tangent à M comme la réunion disjointe $\bigsqcup_{p\in M} TM_p$, alors le seul objet à notre disposition est la projection:

$$\begin{aligned}\pi : TM &\longrightarrow M \\ (p,v) &\longmapsto p\end{aligned}$$

On procède par étapes:

- Tout d'abord on définit une **topologie** sur TM grâce à π en effet, on considère la topologie engendrée par la famille suivante:

  $$\left\{\pi^{-1}(\mathcal{O})\ ;\ \mathcal{O}\in\mathcal{T}_M\right\}$$

  C'est en fait la plus petite topologie qui rende π continue.
- On doit alors construire un atlas de TM, soit $(p,v)\in TM$, alors étant donnée une carte (U,ϕ) qui contient p, on remarque que $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de TM, et on définit un prototype de carte locale pour un point du fibré par:

  $$\begin{aligned}\widetilde{\phi} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \phi(U)\times\mathbb{R}^n \\ (p,v) &\longmapsto (\phi(p), v_1,\dots,v_n)\end{aligned}$$

  Où ici les (v_i) sont les coordonées du vecteur $v\in TM_p$ dans la base associée à la carte locale ϕ.

Définissons maintenant l'atlas sur TM, on considère l'atlas (U_i,ϕ_i) de M, alors elles recouvrent M. On pose alors $(\pi^{-1}(U_i),\Phi_i)$ où Φ_i est la carte locale définie plus haut. On doit montrer que:

1. Les $\pi^{-1}(U_i)$ recouvrent TM.
2. Les Φ_i sont des homéomorphismes sur leurs images.
3. Les applications de changement de cartes sont lisses.

Le fibré tangent est un variété de dimension $2n$ - Partie 2 :

1. Soit (p,v) un point de TM, alors si (U,ϕ) est une carte qui contient p, on a que $(p,v)\in\pi^{-1}(U)$, donc on a bien un recouvrement.
2. Les $\widetilde{\phi}_i$ sont des bijections sur leurs images, en effet on peut écrire l'inverse pour tout $(x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n)\in\phi(U)\times\mathbb{R}^n$, on pose:

   $$\widetilde{\phi}^{-1}(x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n) = \left(\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n), \sum_{i\leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n)}\right)$$

   Aussi, $\widetilde{\phi},\widetilde{\phi}^{-1}$ sont continues par composantes, pour la première composante car ϕ est continue, et pour les autres ?
3. Les applications de changement de cartes sont lisses, en effet soit $(U,\phi),(V,\psi)$ deux cartes qui contiennent p, alors $(\pi^{-1}(U),\Phi),(\pi^{-1}(V),\Psi)$ sont les cartes correspondantes de TM, alors:

   $$\begin{cases} E = \Phi(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)) = \phi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n \\ F = \Psi(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)) = \psi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n \end{cases}$$

   Et donc on peut calculer l'application de changement de cartes:

   $$\begin{aligned}\Psi\circ\Phi^{-1}(x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n) &= \Psi\left(\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n), \sum_{i\leq n} v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n)}\right) \\ &= \left(\psi\circ\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n), \sum_{i\leq n}\sum_{j\leq n} v_i \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n)}\right)\end{aligned}$$

Chapitre 9 - Espaces cotangents dans M :

Différentielle abstraite et différentielle usuelle - Partie 1:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ s'identifie à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors pour toute fonction lisse $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} df_p(v)(g) &= \sum_{i=1}^{n} v_i df_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right)(g) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g}{\partial t}(f(t)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{f(p)} \right)(g) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute fonction lisse g, on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{f(p)}$$

Différentielle abstraite et différentielle usuelle - Partie 2:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow N$ s'identifie aussi à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors pour toute fonction lisse $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} df_p(v)(g) &= \sum_{i=1}^{n} v_i df_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right)(g) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(p)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_{f(p)} \right)(g) \end{aligned}$$

Où ici f_j représente les coordonées locales de f au voisinage de $f(p)$, ie $f_j = (\psi \circ f)_j(p)$. Ceci étant vrai pour toute fonction lisse g, on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_{f(p)}$$

Chapitre 10 - Formes différentielles dans M :

Le pullback commute avec la différentielle

Soit x un fonction lisse sur N, alors d'après la règle de la chaîne:

$$\forall p \in M \; ; \; (dF^* x)_p = (d(x \circ F))_p = dx_{F(p)} \circ dF_p = (F^* dx)_p$$

Linéarité du pullback

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, ω, η deux k-formes, alors pour tout point p de M, on a:

$$\begin{aligned}
(F^*(\lambda\omega+\eta))_p &= (\lambda\omega+\eta)_{F(p)} \circ (dF_p, \ldots, dF_p) \\
&= (\lambda\omega_{F(p)} + \eta_{F(p)}) \circ (dF_p, \ldots, dF_p) \\
&= \lambda\omega_{F(p)} \circ (dF_p, \ldots, dF_p) + \eta_{F(p)} \circ (dF_p, \ldots, dF_p) \\
&= (\lambda F^*\omega)_p + (F^*\eta)_p \\
&= (\lambda F^*\omega + F^*\eta)_p
\end{aligned}$$

Le pullback est compatible avec le produit extérieur

Soit ω, η respectivement des k et l formes sur N, alors pour tout point p de M, on a:

$$\begin{aligned}
(F^*(\omega \wedge \eta))_p &= (\omega \wedge \eta)_{F(p)} \circ (dF_p, \ldots, dF_p) \\
&= (\omega_{F(p)} \wedge \eta_{F(p)}) \circ (dF_p, \ldots, dF_p)
\end{aligned}$$

Soit $v_1, \ldots, v_{k+l}$ des vecteurs de TM_p, alors on évalue l'expression ci-dessus en:

$$(\omega_{F(p)} \wedge \eta_{F(p)})(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_{k+l}))$$

Puis par définition, la quantité ci-dessus est égale à:

$$\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma)(\omega_{F(p)} \otimes \eta_{F(p)})(dF_p(v_{\sigma(1)}), \ldots, dF_p(v_{\sigma(k+l)}))$$

Puis par évaluation du produit tensoriel:

$$\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\omega_{F(p)} \left[dF_p(v_{\sigma(1)}), \ldots, dF_p(v_{\sigma(k)})\right] \eta_{F(p)} \left[dF_p(v_{\sigma(k+1)}), \ldots, dF_p(v_{\sigma(k+l)})\right]$$

Finalement, ceci est bien égal à

$$\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma)(\omega_{F(p)} \circ (dF_p, \ldots, dF_p)) \otimes (\eta_{F(p)} \circ (dF_p, \ldots, dF_p))(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

Qui corresponds bien à l'expression:

$$(\omega_{F(p)} \circ (dF_p, \ldots, dF_p)) \wedge (\eta_{F(p)} \circ (dF_p, \ldots, dF_p)) = F^*\omega \wedge F^*\eta$$

En particulier, dans le cas d'un produit avec une 0-forme, le produit extérieur est une multiplication scalaire et on a:

$$F^*(g\omega) = (F^*g)(F^*\omega) = (g \circ F)F^*\omega$$

Expression en coordonées du pullback

Cette fois on considère une k forme ω, alors en coordonnées locales, on a:

$$\begin{aligned}
F^*\omega &= F^* \left[\sum_I \omega_{i_1,\ldots,i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}\right] \\
&= \sum_I F^*(\omega_{i_1,\ldots,i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}) \\
&= \sum_I F^*\omega_{i_1,\ldots,i_n} F^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge F^*(dx^{i_n}) \\
&= \sum_I F^*\omega_{i_1,\ldots,i_n} d(F^*x^{i_1}) \wedge \ldots \wedge d(F^*x^{i_n}) \\
&= \sum_I (\omega_{i_1,\ldots,i_n} \circ F) d(x^{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_n} \circ F) \\
&= \sum_I (\omega_{i_1,\ldots,i_n} \circ F) dF^{i_1} \wedge \ldots \wedge dF^{i_n}
\end{aligned}$$

Où on a utilisé successivement la linéarité, la compatibilité avec le produit extérieur et la commutation avec la différentielle usuelle du pullback. On a noté $dF^i = d(x^i \circ F)$.

Pullback d'une forme volume

On se donne une forme volume ω sur N et un difféomorphisme $F : M \longrightarrow N$, alors d'aprés l'expression trouvé précédemment, on a:

$$F^*\omega = (\omega \circ F)dF^1 \wedge \ldots \wedge dF^n$$

Or par définition de la différentielle, on peut réecrire ceci en:

$$F^*\omega = (\omega \circ F)\left(\sum_{j_1 \leq n} \frac{\partial F^1}{\partial x_{j_1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge \sum_{j_n \leq n} \frac{\partial F^n}{\partial x_{j_1}} dx^{j_1}\right)$$

Puis par multilinéarité on obtient:

$$F^*\omega = (\omega \circ F) \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq n} \frac{\partial F^1}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial F^n}{\partial x_{j_n}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_n}$$

Or on somme en fait sur tout les indices distincts donc de manière équivalente sur toutes les permutations des indices:

$$F^*\omega = (\omega \circ F) \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial F^1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial F^n}{\partial x_{\sigma(n)}} dx^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx^{\sigma(n)}$$

Finalement, par les propriétés du produit extérieur, on trouve:

$$F^*\omega = (\omega \circ F)\left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \frac{\partial F^1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial F^n}{\partial x_{\sigma(n)}}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = (\omega \circ F)\det(J_F) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Existence de la dérivée extérieure locale - Analyse :

On procède par analyse-synthèse, et on considère une dérivée extérieure d qui vérifie les axiomes. Alors pour toute $k-$forme $\omega \in \Omega^k(U)$, on a nécessairement:

$$\begin{aligned} d\omega_p &= d\left(\sum_I \omega_I(p) dx^I\right) \\ &= \sum_I d(\omega_I(p) dx^I) && \text{(Linéarité)} \\ &= \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I + \omega_I(p) d(dx^I) && \text{(Leibniz)} \\ &= \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I \end{aligned}$$

La dernière ligne venant du fait que $d(dx^I) = 0$, en effet on explicite les indices et par une récurrence assez évidente et $d^2 = 0$ on conclut.

Existence de la dérivée extérieure locale - Synthèse :

Pour tout $p \in M$, pour toute $k-$forme $\omega \in \Omega^k(U)$, alors on définit dans les coordonées locales associées à une carte (U, ϕ) l'opérateur suivant:

$$d\omega_p = \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I$$

Alors on doit montrer que cet opérateur est bien une dérivée extérieure.

Généralisation de la différentielle :

Si $f \in \Omega^0(M)$, c'est une fonction lisse, et alors d agit par définition par différentiation des coefficients, l'unique coefficient de la 0-forme f, étant elle même, on conclut.

Linéarité de la dérivée extérieure :

On se donne ω, η deux k-formes sur M ainsi que λ un scalaire, alors on a:

$$d(\omega + \lambda\eta)_p = d\left(\sum_I (f_I + \lambda g_I)(p)dx^I\right) = \sum_I d(f_I + \lambda g_I)(p) \wedge dx^I = d\omega_p + \lambda d\eta_p$$

Formule de Leibniz :

On se donne ω, η respectivement une k-forme et une l-forme sur M alors on a:

$$\begin{cases} \omega_p = \sum_I \omega_I(p)dx^I \\ \eta_p = \sum_J \eta_J(p)dx^J \end{cases}$$

On a alors:

$$(\omega \wedge \eta)_p = \sum_{I,J} (\omega_I \eta_J)(p)dx^I \wedge dx^J$$

Appliquons la dérivée extérieure:

$$d(\omega \wedge \eta)_p = \sum_{I,J} d(\omega_I \eta_J)(p) \wedge dx^I \wedge dx^J$$

Les fonctions différentiées sont scalaires, donc on applique la règle du produit:

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta)_p &= \sum_{I,J} \big(d\omega_I(p)\eta_J(p) + \omega_I(p)d\eta_J(p)\big) \wedge dx^I \wedge dx^J && \text{(Par définition.)} \\
&= \sum_{I,J} d\omega_I(p)\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J + \sum_{I,J} \omega_I(p)d\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J && \text{(Distributivité du produit extérieur.)} \\
&= \sum_{I,J} d\omega_I(p) \wedge dx^I \wedge \eta_J(p)dx^J + \sum_{I,J} d\eta^J(p) \wedge \omega^I(p)dx^I \wedge dx^J && \text{(Bilinéarité du produit extérieur.)} \\
&= d(\omega \wedge \eta)_p + (-1)^k \sum_{I,J} \omega_I(p)dx^I \wedge d\eta_J(p) \wedge dx^J && (\star) \\
&= d(\omega \wedge \eta)_p + (-1)^k(\omega \wedge d\eta)_p \\
&= (d\omega \wedge \eta + (-1)^k(\omega \wedge d\eta))_p
\end{aligned}$$

Où pour trouver $(\star)$, on identifie le premier terme, et on utilise le fait que $\eta_J(p), dx_I$ sont respectivement une $1-$ forme et une k-forme et il y a donc k échanges à faire et donc k application de l'antisymétrie.

Propriété fondamentale de la dérivée extérieure :

On considère une k forme $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$, alors on a:

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I = \sum_I \sum_{i \leq n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I$$

Et donc si on dérive à nouveau on obtient:

$$dd\omega = \sum_I \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I$$

On peut alors montrer que pour I fixé, on a:

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i = 0$$

En effet si $i = j$ c'est évident, mais si $i \neq j$, on a que:

$$\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i + \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} dx^i \wedge dx^j = 0$$

En effet, ω_I est une fonction lisse donc on applique Schwartz et les dérivées croisés sont égales, mais les produit extérieurs $dx^i \wedge dx^j$ sont opposés. Ceci nous permet d'appairer les termes en n sommes nulles (il y a $2n$) termes dans la somme).

Existence de la dérivée extérieure globale:

Pour tout $p \in M$, pour toute $k-$forme $\omega \in \Omega^k(M)$, alors on définit dans les coordonées locales associées à une carte (U, ϕ) l'opérateur suivant:

$$d\omega_p = \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I$$

Alors on doit montrer que cet opérateur est bien défini, ie que $d\omega_p$ ne dépends pas de la carte (U, ϕ) choisie.

Bonne définition :

Soit $\omega \in \Omega^k(M)$, soit $(U, \phi), (V, \psi)$ deux cartes qui contiennent p, montrons que $d\omega_p$ est bien définie, on a dans les deux cartes:

$$\begin{cases} \omega_p = \sum_I a_I(p) dx^I \\ \omega_p = \sum_I b_I(p) dy^I \end{cases}$$

Mais alors sur l'intersection de ces cartes, il existe une dérivée extérieure comme définie plus haut, et c'est un opérateur local donc on a l'implication suivante sur $U \cap V$:

$$\sum_I a_I(p) dx^I = \sum_I b_I(p) dy^I \implies \sum_I da_I(p) \wedge dx^I = \sum_I db_I(p) \wedge dy^I$$

Dans toute la suite on considère $F : M \longrightarrow N$ une application lisse entre deux variétés.

Le pullback commute avec la dérivée extérieure

Cette fois on considère une k forme ω, alors en coordonnées locales, on a:

$$\begin{aligned} F^* d\omega &= F^* \left[\sum_I d\omega_{i_1,\ldots,i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} \right] \\ &= \sum_I F^*(d\omega_{i_1,\ldots,i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}) \\ &= \sum_I F^*(d\omega_{i_1,\ldots,i_n}) \wedge F^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge F^*(dx^{i_n}) \\ &= \sum_I d(F^* \omega_{i_1,\ldots,i_n}) \wedge d(F^* x^{i_1}) \wedge \ldots \wedge d(F^* x^{i_n}) \\ &= \sum_I d(\omega_{i_1,\ldots,i_n} \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_n} \circ F) \\ &= \sum_I d(\omega_{i_1,\ldots,i_n} \circ F) \wedge dF^{i_1} \wedge \ldots \wedge dF^{i_n} \end{aligned}$$

D'autre part en dérivant l'expression en coordonées locales obtenu plus haut, on trouve bien l'égalité.

Chapitre 11 - Orientation d'une variété:

Carte orientée :

Soit M une variété orientée de forme volume $\omega = \omega_0 dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ qui représente l'orientation. Alors si ϕ est une carte orientée positivement, il existe une fonction f positive telle que:

$$\phi^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = f \cdot \omega$$

Mais on a aussi d'aprés les propriétés du pullback:

$$\phi^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = \det(J\phi) dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$$

Donc en combinant ces deux information, on trouve que si ϕ est orientée positivement, alors nécessairement:

$$\phi^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = \frac{\det(J\phi)}{\omega_0} \cdot \omega$$

Si on avait choisi $\omega_0 < 0$, alors ça ne marche pas, ie on a nécessairement $\det(J\phi) < 0$

Propriétés du produit intérieur :

Expression en coordonées :

Existence d'un champs de vecteurs sortant

On souhait construire un champs de vecteurs X sur M tel que pour tout point du bord ∂M, $X(p)$ soit un vecteur sortant. On considère une partition de l'unité subordonnée à l'atlas que l'on note ρ_α, alors pour toute carte U_α qui intersecte le bord, on définit un champs de vecteur sortant en coordonnées locales:

$$X_\alpha(p) = -\frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p$$

On peut alors étendre chacun de ces champs en un champs de vecteurs lisse $\widetilde{X_\alpha}$ sur M qui vaut zéro partout et X_α sur U_α.[1]

Alors on aimerait globaliser ce champs de vecteur en un champs de vecteur global par la partition de l'unité, on utilise la partition de l'unité et on pose:

$$X = \sum_\alpha \rho_\alpha \widetilde{X_\alpha}$$

C'est bien un champs de vecteurs sur M, lisse car:

$$\begin{aligned} X(p) &= \sum_\alpha \rho_\alpha(p) \widetilde{X_\alpha}(p) \\ &= \sum_\alpha \rho_\alpha(p) \sum_{i \leq n} \widetilde{X_{\alpha,i}}(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \\ &= \sum_\alpha \sum_{i \leq n} \rho_\alpha(p) \widetilde{X_{\alpha,i}}(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \end{aligned}$$

C'est une somme finie dont toutes les composantes sont lisses car les champs de vecteurs $\widetilde{X_\alpha}$ sont lisses. Aussi pour tout point du bord p, on a:

$$X(p) = \sum_\alpha \rho_\alpha(p) \widetilde{X_{\alpha,n}}(p) \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p = \left(-\sum_\alpha \rho_\alpha(p)\right) \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p = -\frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p$$

Qui est bien un vecteur sortant.

[1] Ceci vient du fait que ∂M est fermé apparemment ? Ne marche pas toujours ?

Construction d'une forme volume sur ∂M

On considère une variété orientable à bord M et on note ω une forme volume sur M, montrons que l'on peut construire une forme volume sur ∂M. La construction est la suivante:

- On considère un champs sortant S sur ∂M.
- On construit le produit intérieur de $\iota_S \omega$, qui est une $n-1$ forme sur M.
- La restriction[2] de $\iota_S \omega$ au bord est alors une forme volume sur ∂M.

On sait déja que $\iota_S \omega$ est une $n-1$ forme lisse, supposons maintenant par l'absurde qu'il existe $p \in \partial M$ tel que cette forme s'annule. Ceci signifie que:

$$\forall (v_1, \dots, v_{n-1}) \in T\partial M_p \ ; \ \iota_S \omega(v_1, \dots, v_{n-1}) = 0$$

C'est donc en particulier vrai pour la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\big|_p)$, mais alors:

$$\iota_S \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\bigg|_p \right) = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\bigg|_p \right) = 0$$

Et la famille sur laquelle on évalue ω est une base de TM_p donc ω s'annule en ce point, absurde.

Expression dans une carte de la forme volume sur ∂M

On considère une variété orientable à bord M et on note ω une forme volume sur M et $\iota_S \omega$ la forme volume induite sur ∂M, on aimerait expliciter l'exression de cette forme dans une carte.

[2] Plus précisement, le pullback par l'inclusion.

Chapitre 12 - Intégrale locale d'une forme :

Changement de variables :

Soit $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ une forme volume de coefficient $\widetilde{\omega} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difféormorphisme. Alors d'une part on a d'aprés la formule du changement de variables pour les fonctions:

- D'aprés la formule du changement de variable :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\omega} dx^1 \ldots dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\omega} \circ F |\det(JF)| dx^1 \ldots dx^n$$

- D'aprés les propriétés du pullback :

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\omega} \circ F \det(JF) dx^1 \ldots dx^n$$

On a donc bien égalité des deux membres de gauche si et seulement si $|\det(JF)| = \det(JF)$, ie ssi $\det(JF) > 0$.

L'intégrale locale est bien définie :

Si M est muni d'un atlas orienté et qu'on considère deux cartes $(U, \phi), (V, \psi)$, alors on a pour toute forme ω l'égalité suivante:

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega =$$

L'intégrale est bien définie :

Chapitre 13 - Théorème de Stokes :

Stokes dans $\mathbb{H}^n$:

On considère une $n-1$ forme $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{H}^n)$, alors elle est de la forme:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Ou le chapeau désigne une ommission. Alors on calcule sa dérivée extérieure et on trouve:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \end{aligned}$$

- On calcule alors l'intégrale de celle-ci, et en appliquant Fubini ainsi que le théorème fondamental, on a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{H}^n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx^1 \ldots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} dx^1 \ldots dx^n + \sum_{i=2}^{n} \int_{\mathbb{H}^n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx^1 \ldots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} dx^1 \ldots dx^n + \sum_{i=2}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx^1 \ldots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} dx^1 \right) \ldots dx^n + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} \int_{\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx^i \right) dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^n \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1(0, x_2, \ldots, x_n) dx^2 \ldots dx^n \end{aligned}$$

  Le terme de droite dans l'avant dernière égalité s'annulle car ω est à support compact.

- Puis l'intégrale sur le bord:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega &= \int_{\partial \mathbb{H}^n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(0, x_2, \ldots, x_n) dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega_i(0, x_2, \ldots, x_n) dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega_1(0, x_2, \ldots, x_n) dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1(0, x_2, \ldots, x_n) dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n \end{aligned}$$

  L'avant dernière égalité venant du fait que dx^1 est identiquement nulle sur $\partial \mathbb{H}^n$. **La dernière égalité ??**

On a donc bien démontré le théorème de Stokes dans $\mathbb{H}^n$.

Stokes dans M :

Soit M une variété orientée munie de son atlas orienté $(U_\alpha)_\alpha$ ainsi qu'un partition de l'unité $(\rho_\alpha)_\alpha$ associée. Soit $\omega \in \Omega^n(M)$ une $n-1$ forme. On oriente ∂M avec l'orientation induite par un champs de vecteurs sortant. Alors en appliquant Stokes dans chaque carte, on a:

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_{\alpha} \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) = \int_M d\omega$$