Topologie générale

L'intérieur du complémentaire est le complémentaire de l'adhérence

Montrons la propriété suivante:

$$\mathrm{int}(A)^c = \mathrm{adh}(A^c)$$

On a:

$$\begin{aligned}\mathrm{int}(A)^c &= \left(\bigcup\{\mathcal{O} \text{ ouvert } ; \ \mathcal{O} \subseteq A\}\right)^c \\ &= \left(\bigcap\{\mathcal{O} \text{ ouvert } ; \ \mathcal{O} \subseteq A\}^c\right) \\ &= \left(\bigcap\{\mathcal{F} \text{ fermé } ; \ A^c \subseteq \mathcal{F}\}\right) \\ &= \mathrm{adh}(A^c)\end{aligned}$$

Caractérisation de l'intérieur

Montrons la caractérisation suivante:

$$x \in \mathrm{int}(A) \iff \exists \mathcal{O}_x \ ; \ \mathcal{O}_x \subseteq A$$

Sens direct: Si $x \in \bigcup\{\mathcal{O} \text{ ouvert } ; \ \mathcal{O} \subseteq A\}$, par définition de l'union, il existe un ouvert inclus dans A qui contient x.
Sens réciproque: Supposons que pour tout x, un tel ouvert $\mathcal{O}_x$ existe, alors cet ouvert est inclus dans A et donc:

$$\mathcal{O}_x \in \{\mathcal{O} \text{ ouvert } ; \ \mathcal{O} \subseteq A\}$$

Donc il appartient bien à l'union de tout ces ouverts.

Caractérisation de l'adhérence

Montrons la caractérisation suivante:

$$x \in \mathrm{adh}(A) \iff \forall \mathcal{O}_x \ ; \ \mathcal{O}_x \cap A \neq \emptyset$$

On montre ceci en prenant la négation de cette équivalence:

$$x \in \mathrm{adh}(A)^c \iff \exists \mathcal{O}_x \ ; \ \mathcal{O}_x \cap A = \emptyset$$

Puis en utilisant le fait que:

$$\mathrm{adh}(A)^c = \mathrm{int}(A^c)$$

On obtient alors que:

$$x \in \mathrm{int}(A^c) \iff \exists \mathcal{O}_x \ ; \ \mathcal{O}_x \subseteq A^c$$

Qui est bien vraie par la proposition précédente.

Caractérisation des ouverts

On considère un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ et $O \subseteq E$ alors montrons la proposition suivante:

$$O \in \mathcal{T} \iff O = \mathrm{int}(O)$$

Sens direct: Supposons que O soit un ouvert, et soit x un point de celui-ci, alors il existe un ouvert inclus dans O qui contient x (lui-même). Et donc $O = \mathrm{int}(O)$
Sens réciproque: Supposons que $O = \mathrm{int}(O)$, alors pour tout point $x \in O$, il existe un ouvert $\mathcal{O}_x \subseteq O$, on a alors:

$$O = \bigcup_{x \in O} O_x$$

Qui est une réunion d'ouverts, donc O est ouvert par stabilité.

Caractérisation des fermés

On considère un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ et $F \subseteq E$ alors montrons la proposition suivante:

$$F \text{ fermé} \Longleftrightarrow F = \text{adh}(F)$$

Alors on conclut directement en utilisant que:

$$F \text{ fermé} \Longleftrightarrow F^c \text{ ouvert}$$

Ainsi que la proposition précédente.

La topologie induite est une topologie

On considère une partie A des espace topologique $(E, \mathcal{T})$, et on définit l'ensemble de parties suivant:

$$\mathcal{T}_A := \{A \cap \mathcal{O} \; ; \; \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$$

Alors on a facilement que:

- Le vide est égal à $A \cap \emptyset \in \mathcal{T}_A$
- L'espace A est égal à $A \cap E \in \mathcal{T}_A$
- L'union d'éléments est égale à $A \cap \bigcup_I \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_A$
- L'intersection d'éléments est égale à $A \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_A$

C'est donc une topologie, en outre c'est la plus petite topologie sur A telle que l'inclusion canonique soit continue, avec l'inclusion canonique donnée par:

$$i : x \in A \to x \in E$$

En effet soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur A telle que i soit continue, alors on a:

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T} \; ; \; i^{-1}(\mathcal{O}) = A \cap \mathcal{O} \in \mathcal{T}'$$

Donc les parties de la forme $A \cap \mathcal{O}$ sont dans bien dans cette topologie.

La topologie produit est une topologie

On considère le produit cartésien de la famille d'espaces topologiques $(E_n, \mathcal{T}_n)$, on veut munir ce produit cartésien d'une topologie, on définit alors:

$$\mathcal{T}_{prod} := \left\{ \bigcup_I \mathcal{O}_i^1 \times \ldots \times \mathcal{O}_i^n \; ; \; (O_i^j)_{i \in I} \text{ famille d'ouverts de } \mathcal{T}_j \right\}$$

Montrons que celle famille de parties forme bien une topologie sur E^n, on a:

- Le vide est donné par $\emptyset \times \ldots \times \emptyset$
- L'espace est donné par $E_1 \times \ldots \times E_n$
- L'union quelconque d'union de produits est évidemment une union de produits.

Finalement pour l'intersection on prends deux éléments:

$$\begin{cases} U = \bigcup_I \mathcal{U}_i^1 \times \ldots \times \mathcal{U}_i^n \\ V = \bigcup_J \mathcal{V}_j^1 \times \ldots \times \mathcal{V}_j^n \end{cases}$$

Alors $U \cap V$ est donné par distributivité:

$$U \cap V = \bigcup_{I,J} (\mathcal{U}_i^1 \times \ldots \times \mathcal{U}_i^n) \cap (\mathcal{V}_j^1 \times \ldots \times \mathcal{V}_j^n)$$

On par les propriétés ensemblistes, on trouve qu'alors:

$$U \cap V = \bigcup_{I,J} (\mathcal{U}_i^1 \cap \mathcal{V}_j^1) \times \ldots \times (\mathcal{U}_i^n \cap \mathcal{V}_j^n)$$

C'est bien une unions de produits d'ouvert de chaque espace respectif, on a donc bien montré que $\mathcal{T}_{prod}$ est une topologie sur $\prod E_i$

Topologie métrique

La topologie métrique standard est une topologie

On considère un espace métrique (E, d) et on définit l'ensemble de parties suivant:

$$\mathcal{T}_d := \left\{ \bigcup_I \mathcal{B}_i \ ; \ (\mathcal{B}_i) \text{ famille quelconque de boules ouvertes} \right\}$$

Montrons que cet ensemble définit bien une topologie sur E, on a:

- On a trivialement $\emptyset, E \in \mathcal{T}_d$
- On a tout aussi trivialement que cet ensemble est stable par union quelconque

On montre tout d'abord d'une manière analogue à la demonstration de la caractérisation des ouverts que:

$$O \in \mathcal{T}_d \iff \forall x \in O \ ; \ \exists \mathcal{B}(x, r > 0) \subseteq O$$

Soit deux éléments $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, alors on a:

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{i,j} \mathcal{B}_i^{\mathcal{U}} \cap \mathcal{B}_j^{\mathcal{V}}$$

Soit x dans cette intersection, alors $x \in \mathcal{B}_{i_0}^{\mathcal{U}} \cap \mathcal{B}_{j_0}^{\mathcal{V}}$, alors ces deux parties sont des éléments de $\mathcal{T}$ donc on a d'après la caractérisation que:

$$\begin{cases} \exists r > 0 \ ; \ \mathcal{B}(x, r) \subseteq \mathcal{B}^{\mathcal{U}}(x_{i_0}, r_{i_0}) \\ \exists r' > 0 \ ; \ \mathcal{B}(x, r') \subseteq \mathcal{B}^{\mathcal{V}}(y_{i_0}, r'_{i_0}) \end{cases}$$

Alors la boule de centre x et de rayon $\min\{r_{i_0} - d(x_{i_0}, x), r'_{i_0} - d(y_{i_0}, x)\}$ est inclue dans $\mathcal{B}_{i_0}^{\mathcal{U}} \cap \mathcal{B}_{j_0}^{\mathcal{V}}$ et donc l'intersection reste bien dans $\mathcal{T}$.

La topologie induite correspond à la restriction de la distance

Soit $A \subseteq E$ une partie d'un espace métrique (E, d), montrons la proposition suivante:

$$\mathcal{T}|_A = \mathcal{T}_d$$

Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{T}|_A$, alors il existe $(x_i, r_i) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ tels que:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= A \cap \bigcup_I \mathcal{B}(x_i, r_i) \\ &= \bigcup_I A \cap \mathcal{B}(x_i, r_i) \\ &= \bigcup_I \{x \in A \ ; \ d(x_i, x) < r_i\} \\ &= \bigcup_I B_i \end{aligned}$$

Or, on sait que les B_i sont ouverts dans A, donc on a pour une certaine famille $(a_i, r'_i) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ que:

$$B_i = \bigcup_{B \subseteq B_i} B$$

Et finalement on a par substitution que:

$$\mathcal{O} = \bigcup_I B_i = \bigcup_I \bigcup_{B \subseteq B_i} B$$

Les boules B étant des boules incluses dans A, elle sont bien des ouverts pour $d|_{A \times A}$.

La topologie produit correspond à la distance infini

On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ et on veut montrer l'égalité des topologies suivantes:

$$\mathcal{T}_\times = \mathcal{T}_{d_\infty}$$

Sens direct: On considère un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}_\times$, alors on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} :&= \bigcup_I R_{i,1} \times \ldots \times R_{i,n} \\ &= \bigcup_I]a_{i,1}\,;\, b_{i,1}[\times \ldots \times]a_{i,n}\,;\, b_{i,n}[\end{aligned}$$

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{O}$, alors on a pour un certain i fixé que:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in R_{i,1} \times \ldots \times R_{i,n}$$

Or chacun de ces intervalles est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc on pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$ l'existence d'un r_j tel que:

$$]x_j - r_j\,;\, x_j + r_j[\subseteq R_{i,j}$$

Mais en posant $r := \min_j\{r_j\}$ le minimum de tout ces rayons, on trouve que:

$$\mathcal{B}_\infty(x, r) \subseteq]x_1 - r_1\,;\, x_1 + r_1[\times \ldots \times]x_n - r_n\,;\, x_n + r_n[\subseteq R_{i,1} \times \ldots \times R_{i,n}$$

Réciproquement: Si $\mathcal{O}$ est un ouvert pour la distance infini, il s'écrit comme union quelconque de boules de la forme:

$$\mathcal{B}(x, r) =]x_1 - r\,;\, x_1 + r[\times \ldots \times]x_n - r\,;\, x_n + r[$$

Ces boules sont bien des produits cartésiens d'ouverts de $\mathbb{R}$ donc leur union est bien dans $\mathcal{T}_\times$

La boule ouverte & l'intérieur de la boule fermée

Soit (E, d) un espace métrique, a un point de E et $r > 0$, on veut montrer que:

$$\mathscr{B}(a, r) \subseteq \operatorname{int}(\mathscr{B}[a, r])$$

Soit $x \in \mathscr{B}(a, r)$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que:

$$\mathscr{B}(x, \varepsilon) \subseteq \mathscr{B}(a, r)$$

Or, on a $\mathscr{B}(a, r) \subseteq \mathscr{B}[a, r]$ donc ce ε convient pour montrer que x est bien à l'intérieur de la boule fermée.

Supposons maintenant que E est normé, et montrons que l'inclusion réciproque est valide, soit $x \in \operatorname{int}(\mathscr{B}[a, r])$, on veut montrer que $x \in \mathscr{B}(a, r)$.
Pour commencer on sait par hypothèse qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}(x, \varepsilon) \subseteq \mathscr{B}[a, r]$

Une approche heuristique et géométrique[1] nous suggère alors qu'il suffit de choisir un λ assez petit, (ie tel que $\lambda \|x - a\| < \varepsilon$) pour réussir à construire un point qui est dans la boule fermée tel que x soit plus proche de a que ce point, ie le point:

$$y := x + \lambda(x - a)$$

C'est le point qui part de x, aligné avec a qui reste dans la boule fermée tout en s'éloignant d'une petite distance de x.

Alors on a bien que y est dans la boule ouverte car:

$$\|y - x\| = \lambda \|x - a\| < \varepsilon$$

Alors y appartient à la boule fermée par hypothèse et on a:

$$\|y - a\| = \big\|(x - a)(1 + \lambda)\big\| = |1 + \lambda| \, \|x - a\| \leq r$$

Enfin on en conclut donc que:

$$\|x - a\| \leq \frac{r}{|1 + \lambda|} < r$$

Qui signifie que $x \in \mathscr{B}(a, r)$.

Finalement, on a bien montré que dans le cas d'un espace normé, on a égalité, en particulier on a utilisé ici l'homégénéité de la norme pour conclure. □

[1] Faire un dessin !

La boule fermée & l'adhérence de la boule ouverte

Soit (E, d) un espace métrique, a un point de E et $r > 0$, on veut montrer que:

$$\operatorname{adh}(\mathscr{B}(a,r)) \subseteq \mathscr{B}[a,r]$$

Soit $x \in \operatorname{adh}(\mathscr{B}(a,r))$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a:

$$\mathscr{B}(x,\varepsilon) \cap \mathscr{B}(a,r) \neq \emptyset$$

Or, on a $\mathscr{B}(a,r) \subseteq \mathscr{B}[a,r]$ donc par intersection on trouve que:

$$\mathscr{B}(x,\varepsilon) \cap \mathscr{B}(a,r) \subseteq \mathscr{B}(x,\varepsilon) \cap \mathscr{B}[a,r]$$

Et donc le membre de droite est non vide ce qui signifie que $x \in \operatorname{adh}(\mathscr{B}[a,r])$, on conclut alors par le fait que $\mathscr{B}[a,r]$ est fermé donc égal à son adhérence.

Supposons maintenat que E est normé, et montrons que l'inclusion réciproque est valide, soit $x \in \mathscr{B}[a, r]$, on veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a:

$$\mathscr{B}(x, \varepsilon) \cap \mathscr{B}(a, r) \neq \emptyset$$

Une approche heuristique et géométrique[1] nous suggère alors qu'il suffit de choisir un λ assez petit, (ie tel que $\lambda \|a - x\| < \varepsilon$) pour réussir à construire un point qui est dans les deux boules, en particulier le point suivant convient:

$$y := x + \lambda(a - x)$$

C'est le point qui part de x et qui va dans la direction de a en parcourant une petite distance par rapport à ε

i) Vérifions qu'il appartient bien à la première boule:

$$\|y - x\| = \left\|\lambda(a - x)\right\| < \varepsilon$$

ii) Vérifions qu'il appartient bien à la deuxième boule:

$$\|y - a\| = \left\|x + \lambda(a - x) - a\right\| = \left\|x(1 - \lambda) - a(1 - \lambda)\right\| = |1 - \lambda| \, \|a - x\| < \|a - x\| \leq r$$

La dernière inégalité s'obtient car on considère λ assez petit, et donc on obtient un nombre en valeur absolue plus petit que 1. Dans le cas où ε est relativement grand, $\lambda < 1$ convient.

Finalement, on a bien montré que dans le cas d'un espace normé, on a égalité, en particulier on a utilisé ici l'homégénéité de la norme pour conclure. $\square$

[1] Faire un dessin !

Continuité

Equivalence des notions de continuité

On considère une fonction $f : (E, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$ une fonction d'un espace métrique dans un autre. On veut montrer que f est continue si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de F, $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.

Sens direct: Supposons tout d'abord que f soit continue et fixons $\mathcal{O}$ un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^p$, alors si $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$, on veut montrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel que:

$$\mathscr{B}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathcal{O})$$

On sait que $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ donc $f(x) \in \mathcal{O}$ qui est ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que:

$$\mathscr{B}(f(x), \varepsilon) \subseteq \mathcal{O}$$

Mais alors f est continue, donc en utilisant la définition de la continuité appliquée à cet epsilon, il existe $\delta > 0$ tel que:

$$f\left(\mathscr{B}(x, \delta)\right) \subseteq \mathscr{B}(f(x), \varepsilon) \subseteq \mathcal{O}$$

On en déduit que $f\left(\mathscr{B}(x, \delta)\right) \subseteq \mathcal{O}$ donc que $\mathscr{B}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathcal{O})$ et donc un tel δ convient.

Réciproque: Supposons que la préimage de tout ouvert est un ouvert montrons que f est continue. Soit $\varepsilon > 0$, on considère l'image $f(x) \in F$ d'un point x, alors $\mathscr{B}(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert, donc $f^{-1}(\mathscr{B}(f(x), \varepsilon))$ est aussi un ouvert et il contient x, alors il existe un $\delta > 0$ tel que:

$$\mathscr{B}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathscr{B}(f(x), \varepsilon))$$

Et donc on en conclut que:

$$f\left(\mathscr{B}(x, \delta)\right) \subseteq \mathscr{B}(f(x), \varepsilon)$$

C'est à dire que f est continue.

L'image d'un compact est compact

Soit E, F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue, on veut montrer que si E est compact, $f(E)$ est compact.

On considère $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert quelconque de $f(E)$, alors tout élément de $f(E)$ est l'image d'un élément de E et tout les éléments de E ont une image donc on a:

$$\forall x \in E \; ; \; x \in f^{-1}(A_k)$$

C'est à dire que $(f^{-1}(A_i))_{i \in I}$ est un recouvrement (ouvert car f est continue) de E.

Or, si $(f^{-1}(A_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de E, on peut en extraire un recouvrement fini $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ car E est compact, et alors chaque élément de $f(E)$ étant bien l'image d'un élément d'un des B_k, on a bien que $(f(B_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement fini de $f(E)$.

On en conclut que $f(E)$ est bien compact. $\square$

L'image d'un connexe est connexe

Soit E, F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue, on veut montrer que si E est connexe, $f(E)$ est connexe.

Procédons par l'absurde et supposons que $f(E)$ ne soit pas connexe, ie qu'il existe A, B deux ouverts disjoints de F tels[1] que:

$$\begin{cases} f(E) \subseteq A \cup B \\ f(E) \cap A \neq \emptyset \\ f(E) \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

[1]On veut alors montrer que E n'est pas connexe, ce qui serait une contradiction.

- On sait par hypothèse que pour $x \in E$, on a $f(x) \in A \cup B$ donc $x \in f^{-1}(A \cup B)$ ce qui nous donne par les propriétés de l'image réciproque que $E \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- On a aussi que si A, B sont disjoints, alors $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.
- On a enfin que $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ sont non-vides et inclus dans E donc leurs intersections avec E sont non-vides.
- $C = f^{-1}(A)$ et $D = f^{-1}(B)$ sont bien ouverts comme images réciproque d'ouvert par une application continue

On a bien trouvé deux ouverts disjoints C, D tels que:

$$\begin{cases} E \subseteq C \cup D \\ E \cap C \neq \emptyset \\ E \cap D \neq \emptyset \end{cases}$$

Donc E n'est pas connexe, ce qui est absurde. □

L'image d'un connexe par arcs est connexe par arcs

Soit E, F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue, on veut montrer que si E est connexe par arcs, $f(E)$ est connexe par arcs.

On veut montrer que $f(E)$ est connexe par arcs, soit $f(x), f(y) \in f(E)$, alors E étant connexe par arcs, on a l'existence d'un chemin γ tel que:

$$\begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \\ \gamma([0\,;\,1]) \subseteq E \end{cases}$$

On considère alors le chemin $\gamma' = f \circ \gamma$, c'est bien un chemin continu car f et γ sont continus, et on a bien:

$$\begin{cases} \gamma'(0) = f(\gamma(0)) = f(x) \\ \gamma'(1) = f(\gamma(1)) = f(y) \\ \gamma'([0\,;\,1]) \subseteq f(E) \end{cases}$$

Alors on a bien exhibé un chemin qui convient et $f(E)$ est connexe par arcs. □

L'image continue de l'adhérence est adhérente à l'image

On se donne $f : E \to F$, et $A \subseteq E$, montrons la propriété suivante:

$$f(\mathrm{adh}(A)) \subseteq \mathrm{adh}(f(A))$$

Soit $a \in \mathrm{adh}(A)$, montrons que $f(a) \in \mathrm{adh}(f(A))$, ie que:

$$\forall \mathcal{O}_{f(a)}\ ;\ \mathcal{O}_{f(a)} \cap f(A) \neq \emptyset$$

Soit $\mathcal{O}_{f(a)}$ un tel ouvert, alors par continuité de f, on sait qu'il existe $\mathcal{O}_a$ tel que:

$$f(\mathcal{O}_a) \subseteq \mathcal{O}_{f(a)}$$

Et donc par intersection:

$$f(\mathcal{O}_a) \cap f(A) \subseteq \mathcal{O}_{f(a)} \cap f(A)$$

Or $f(\mathcal{O}_a \cap A) \subseteq f(\mathcal{O}_a) \cap f(A)$ et le premier ensemble est non-vide comme image direct d'un ensemble non-vide, donc:

$$\mathcal{O}_{f(a)} \cap f(A) \neq \emptyset$$