Le logarithme

On considère la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$, alors on sait que cette fonction est continue, et meme de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition, en particulier elle est donc **Riemann-intégrable** sur un segment de celui-ci.

On définit alors une nouvelle fonction appellée **logarithme népérien** définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$\boxed{\ln : x \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}$$

Cette fonction est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur tout segment de $]0\,;+\infty[$, et en particulier, elle est bien unique en tant **qu'unique primitive de f qui s'annule en 1**.

Lien avec l'exponentielle :

Une propriété fondamentale, qu'on démontrera par la suite, est la suivante:

Le logarithme est la bijection réciproque de l'exponentielle.

Formellement, on a:

- $\forall x \in \mathbb{R}; \ln(e^x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*; e^{\ln(x)} = x$

Cette propriété sera démontrée en fin de chapitre gràce au **théorème d'inversion**, vu en cours d'analyse.

Propriétés algébriques :

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ cette définition et des propriétés de l'intégrale et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, on peut alors déduire les propriétés algébriques suivantes:

1) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
3) $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$
4) $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(x)}{2} + \frac{\ln(y)}{2}$

La propriété 1) est la propriété **fondamentale** du logarithme, en effet, sa caractéristique principale est la suivante:

Le logarithme transforme les produits en somme.

Plus tard on pourra interpréter ceci par l'idée que cette fonction est (l'unique) morphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers le groupe $(\mathbb{R}, +)$. Cette propriété se généralise aisément par récurrence évidente pour tout produit d'un nombre fini de termes. Cette propriété sera démontrée en fin de chapitre gràce directement à partir de la définition.

La propriété 4) est une propriété plus particulière, géométrique, qui caractérise la **convexité** de la courbe représentative du logarithme, en effet, l'image d'un barycentre de deux points est supérieure au barycentre des images.

Propriétés analytiques :

Le théorème fondamental du calcul intégral nous permet alors d'affirmer que la fonction ln est dérivable, et meme de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et en particulier, on a évidemment:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ \big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}$$

Plus précisément, on sait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on en déduit que $\ln(x)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x > 1$, on a l'intégrale d'une fonction strictement positive sur un segment $[1\,;\,x]$, donc le logarithme est positif.
Si $x < 1$, on a l'intégrale d'une fonction strictement positive sur un segment $[x\,;\,1]$, donc le logarithme est négatif.

Enfin on peut aussi montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ admet **dévloppement limité** en 0 de la forme:

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

Intérprétation géométrique :

On peut aussi déduire une interprétation géométrique de cette définition intégrale, en particulier, on sait que l'intégrale d'un fonction sur un segment est **l'aire algébrique** entre la courbe représentative de la fonction et l'axe des abscisses.

Donc en particulier, on peut comprendre le logarithme comme l'aire sous la courbe de la fonction inverse, **comptée négativement** si $x < 1$, en particulier, on comprends alors que le logarithme est positif sur $[0\,;\,+\infty[$ et négatif sur $]0\,;\,1[$ (ce qui a été algébriquement vérifié au-dessus).