Théorie générale

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On considère l'EDO d'ordre n suivante:

$$(E) : y^{(n)} = f(t, y, y' \dots, y^{n-1})$$

Montrons que y est une solution de E si et seulement $Y = (y, \dots, y^{(n-1)})$ est solution de l'équation d'ordre 1 suivante:

$$(\widetilde{E}) : Y' = F(t, Y)$$

Avec F définie par:

$$\begin{aligned} F : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, X_1, \dots, X_n) &\longmapsto (X_2, \dots, X_{n-1}, f(t, X_1, \dots, X_n)) \end{aligned}$$

<u>Sens direct:</u> Si $y \in \mathcal{C}^n(I)$ est solution de (E), alors pour tout $t \in I$, on a $(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in \Omega$ et elle vérifie l'équation. Posons:

$$\forall t \in I \ ; \ Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Alors pour tout $t \in I$, on a bien $(t, Y(t)) \in \Omega$ et en dérivant on trouve bien que Y vérifie:

$$Y'(t) = F(t, Y(t))$$

<u>Sens réciproque:</u> Si $Y = (y, \dots, y^{(n-1)})$ est solution de $\widetilde{E}$ pour $y \in \mathcal{C}^n$, alors on a:

$$\forall t \in I \ ; \ (t, Y(t)) \in \Omega \text{ et } Y'(t) = F(t, Y(t))$$

Et donc par définition de F:

$$(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in \Omega \text{ et } y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

En d'autres termes, y est bien solution de (E). $\square$