Coniques

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^2$, alors on appelle **conique** tout ensemble de points $(x, y) \in E$ vérifiant une égalité de la forme:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Avec A, B, C non tous nuls. Cette ensemble représente alors une courbe de niveau d'une fonction à plusieurs variables, mais aussi **l'intersection** obtenue en coupant un cone par un plan. On obtient alors trois types de coniques non-dégénérées[1]:

- Les ellipses
- Les paraboles
- Les hyperboles

On cherche alors à caractériser ces courbes algébriquement ou géométriquement. En première approche, on pourra déja reconnaitre que ces coniques admettent au moins un axe de symétrie, et un centre de symétrie pour les ellipses et les hyperboles.

Réduction

L'ensemble des coniques est stable par changement de repère. Aussi, on peut exprimer matriciellement ces équations par:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

La raison principale étant alors qu'on peut alors classifier de telles coniques en étudiant la **positivité** de la matrice symétrique associée Q, en effet:

- Si $\det(Q) > 0$ et que F est négatif, alors on obtient une **ellipse**.
- Si $\det(Q) = 0$ alors on obtient une **parabole**.
- Si $\det(Q) < 0$, alors on obtient une **hyperbole**.

En effet, le signe du déterminant d'un matrice de cette taille caractérise exactement le signe des valeurs propres et donc la forme de l'équation finale car si on pose alors λ, μ les valeurs propres de cette matrice[2], et qu'on pose le changement de variable:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ce changement de variable revient à effectuer une rotation du repère pour aligner les axes avec les axes de symétrie de la conique (qui sont alors les vecteurs propres).

On obtient alors directement l'équation plus simple avec α, β les nouveaux coefficients des termes en X, Y:

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \alpha X + \beta Y + F = 0$$

Si on met alors sous forme canonique les deux parties de l'équation, on obtient:

$$\lambda (X + t_1)^2 + \mu (Y + t_2)^2 + F = 0$$

Finalement aprés un nouveau changement de repère obtenu par translation de (t_1, t_2), on obtient alors l'équation:

$$\lambda \tilde{X}^2 + \mu \tilde{Y}^2 = -F$$

[1] Les formes dégénérées sont aisément reconnues aprés le premier changement de repère ci-dessous, on s'intéresse donc uniquement aux formes non-dégénérées.

[2] Si μ est nulle est qu'on a une parabole, alors la forme est évidente.

Finalement, on peut toujours se ramener à une **équation réduite** de la forme:

$$\left(\frac{\tilde{X}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}}{b}\right)^2 = 1$$

Et on trouve alors facilement les éléments caractéristiques la conique:

- Son centre (s'il existe), situé en $(0, 0)$ en coordonées $(\tilde{X}, \tilde{Y})$
- Ses sommets (s'ils existent), situés en $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ en coordonées $(\tilde{X}, \tilde{Y})$

On peut aussi étudier les asymptotes dans le cas de l'hyperbole, en effet on considère alors:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tilde{X}}{a}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{Y}}{b}\right)^2 = 1 &\iff \left(\frac{\tilde{Y}}{b}\right)^2 = \left(\frac{\tilde{X}}{a}\right)^2 - 1 \\ &\iff \tilde{Y}^2 = \frac{b^2}{a^2}\tilde{X}^2 - b^2 \\ &\iff \tilde{Y} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\tilde{X}^2 - b^2}\end{aligned}$$

Alors aymptotiquement, quand x est trés grand, b^2 est négligeable et l'hyperbole se rapproche alors des deux droites:

$$\tilde{Y} = \pm\frac{b}{a}\tilde{X}$$

Reste alors à utiliser les relations entre les repères pour obtenir les asymptotes dans le repère canonique.

Caractérisations géométriques

Tout d'abord pour les coniques non-paraboliques, on a la caractérisation **bifocale** suivante, on considère deux points F_1, F_2 du plan, un point X et un réel strictement positif d, alors on a:

- Si $d > d(A, B)$, alors l'ensemble des points X qui vérifient $d(F_1, X) + d(F_2, X) = d$ est une **ellipse**.
- Si $d < d(A, B)$, alors l'ensemble des points X qui vérifient $|d(F_1, X) - d(F_2, X)| = d$ est une **hyperbole**.

Dans le cas parabolique, on a la caractérisation **monofocale** suivante, on considére une droite $\mathcal{D}$ et un point F et on a:

L'ensemble des points X qui vérifient $d(F, X) = d(\mathcal{D}, X)$ est une **parabole**.

On retrouve facilement ces caractérisations en explicitant les distances considérées et en simplifiant l'équation obtenue. On peut alors prouver diverses propriétés géométriques des coniques, par exemple et de manière non exhaustive:

- Si des rayons lumineux tombent de l'infini et rebondissent sur une parabole, ils se rencontrent tous en le foyer.
- Deux paraboles de meme foyer et de meme axe se coupent à angle droit.
- Si un rayon lumineux part d'un foyer d'une ellipse et rebondit sur celle-ci, il passera par l'autre foyer.

Coniques projectives