Soit l'application suivante de la sphère unité à valeurs scalaires:

$$\begin{aligned} \phi : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) \end{aligned}$$

Montrons qu'il existe deux points x, x' antipodaux de S^2 tels que $\phi(x) = \phi(x')$. Soit x un point de la sphère, définissons la propriété d'un point x' d'être "antipodal" à x.

On considère la symétrie vectorielle s par rapport au vecteur nul, alors c'est une isométrie, on appelle alors point antipodal à x le point $s(x) \in S^2$ (bien défini car s est une isométrie).

Montrons alors qu'il existe un $x \in S^2$ tel que l'application suivante s'annule en ce point:

$$\begin{aligned} \psi : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) - \phi(s(x)) \end{aligned}$$

En effet si il existe un tel x, on aura bien montré que $x, s(x)$ sont bien deux points antipodaux qui prennent la même valeur. On peut alors affirmer:

- ψ est continue comme composée et somme d'application continues sur S^2.
- S^2 est connexe.

Donc en particulier $\psi(S^2)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle. Montrons qu'il contient 0.

Supposons que $\psi(S^2) \subseteq \mathbb{R}_-^*$, alors si on applique cette propriété à x et $s(x)$, on a:

$$\begin{cases} \phi(x) - \phi(s(x)) < 0 \\ \phi(s(x)) - \phi(s(s(x))) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \phi(x) - \phi(s(x)) < 0 \\ \phi(x) - \phi(s(x)) > 0 \end{cases}$$

Ce qui est absurde, et symétriquement, on montre que $\psi(S^2) \nsubseteq \mathbb{R}_+^*$, donc ψ s'annule, et il existe donc bien deux points antipodaux qui ont même valeur pour ϕ. $\square$