Variétés différentielles - Preuves

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

Chapitre 1 - Elements d'algèbre tensorielle :

L'espaces des tenseurs est un espace vectoriel :

On considère l'espace $\mathscr{T}^p(E)$ l'espace des tenseurs p-covariants, montrons que c'est un sev de $\mathcal{F}(E^p, \mathbb{R})$, on a:

- L'application nulle est bien un tenseur p-covariant.
- Si $T, T' \in \mathscr{T}^p(E)$, alors $T + T' = (v_1, \dots, v_p) \mapsto T(v_1, \dots, v_p) + T'(v_1, \dots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.
- Si $T \in \mathscr{T}^p(E)$, alors $\lambda T = (v_1, \dots, v_p) \mapsto \lambda T(v_1, \dots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.

Le produit tensoriel est bien défini :

On considère:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathscr{T}^p(E) \times \mathscr{T}^q(E) &\longrightarrow \mathscr{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \alpha(x_1, \dots, x_p)\beta(y_1, \dots, y_q)$$

Alors si $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in E^{p+q}$, par linéarité de chacun des tenseurs, on vérifie bien que $\alpha \otimes \beta$ est bien multilinéaire.

Base et dimension de l'espace des tenseurs :

Si on note $(e_i)_{i \leq n}$ une base de E et $T \in \mathscr{T}^p(E)$, alors on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, x_p) &= T\left(\sum_{1 \leq i_1 \leq n} x_{1,i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{1 \leq i_p \leq n} x_{p,i_p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} x_{1,i_1} \dots x_{p,i_p} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Mais on remarque alors que le produit $x_{1,i_1} \dots x_{p,i_p}$ consiste alors en l'évaluation en $(x_1, \dots, x_p)$ du tenseur:

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

Et donc on obtient:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

En d'autres termes, la famille $(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p})_{i_1, \dots, i_p \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ engendre l'espace. Elle est aussi libre car si on considère une famille de scalaires $(\lambda_{i_1, \dots, i_p})$ tels que:

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} = 0 :$$

Alors si on évalue cette forme en $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, on annule tout les termes sauf $\lambda_{i_1, \dots, i_p}$ qui est donc nul. Et en répétant ceci, on trouve que les $(\lambda_{i_1, \dots, i_p})$ sont tous nuls. Cette famille est donc une base et la dimension de l'espace est alors p^n.

Propriété de signature d'un tenseur antisymétrique :

On se donne une permutation $\sigma \in S_p$ et un tenseur antisymétrique $T \in \mathscr{T}^p(E)$, montrons que:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) T(x_1, \dots, x_n)$$

Alors on peut décomposer $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ en k transpositions et on a alors:

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = T_{\tau_1 \dots \tau_k}(x_1, \dots, x_n) = T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots x_n)$$

Où la dernière égalité pose que τ_k permute x_i, x_j. Alors on trouve par antisymétrie:

$$T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots x_n) = -T_{\tau_1 \dots \tau_{k-1}}(x_1, \dots, x_n)$$

Alors par récurrence, on répète le processus pour obtenir:

$$T_\sigma = (-1)^k T$$

Où k est le nombre de transposition dans la décomposition de σ et ce coefficient est exactement $\varepsilon(\sigma)$.

L'antisymétrisation d'un tenseur est bien antisymétrique :

On se donne un tenseur $T \in \mathscr{T}^p(E)$, montrons que le tenseur suivant est bien antisymétrique:

$$\mathrm{Asym}(T)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

On a que si on permute x_i, x_j avec $i \leq j$, on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Asym}(T)(x_1, \dots x_j, \dots, x_i \dots, x_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\
&= -\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\
&= -T(x_1, \dots x_i, \dots, x_j \dots, x_p)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Asym}(T)$ est bien antisymétrique.

Base et dimension de l'espace des tenseurs antisymétriques :

On utilise la même approche que pour l'espace des tenseurs, soit T un p-tenseur antisymétrique, alors par multilinéarité:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$$

Mais T est antisymétrique, donc les indices des termes non nuls sont différents, ie on somme en fait sur $I = \{(i_1, \ldots, i_p) \; ; \; \forall p, q \; i_p \neq i_q\}$. Aussi par un raisonnement combinatoire, il est équivalent de sommer sur des indices distincts et de sommer sur des indices strictement croissants puis sur toutes les permutations de ceux ci, ie on a:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} T(e_{\sigma(i_1)}, \ldots, e_{\sigma(i_p)}) e^{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) p! \mathrm{Asym}(e^{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(i_p)}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}
\end{aligned}$$

Donc la famille est génératrices des tenseurs antisymétriques. En outre elle est libre par un argument similaire à celui des tenseurs simples. En particulier, un tel tenseur est donc uniquement déterminé par son image sur toutes les vecteurs de la base indéxés par une suite strictement croissante, et il y a $\binom{n}{p}$ telles suites, c'est donc la dimension de $\Lambda^p E^*$.

Propriétés algébriques du produit extérieur :

...

Déterminant :

Soit $\mathcal{B} = (e^i)_{i \leq n}$ une base duale de E ainsi), alors on a par définition:

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n = \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(n)}$$

Donc si on considère $(x_1, \ldots, x_n)$ des vecteurs de E, alors on évalue:

$$\begin{aligned}
e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(n)}(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)}(x_1) \ldots e^{\sigma(n)}(x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \ldots x_{1,\sigma(n)} \\
&= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Attention ici la notation $x_{i,j}$ signifie bien la j-ième coordonée de x_i dans la base (non canonique a priori) des (e_i).

Chapitre 3 - Variétés :

La différentiabilité est bien définie :

Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, il s'agit de montrer que pour $p \in M$ et deux cartes $(U, \phi), (V, \psi)$ qui le contiennent, alors:

$$f \circ \phi \text{ différentiable } \iff f \circ \psi \text{ différentiable}$$

Alors on a:

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ c_{\psi,\phi}$$

Où c est l'application de changement de carte associée. On en déduit donc que si $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable alors $f \circ \phi^{-1}$. De manière analogue si $f : M \longrightarrow N$ est différentiable pour deux cartes $(U, \phi), (V, \psi)$ de $p, f(p)$, alors par composition, on en déduis de même.

Existence d'une partition de l'unité - Cas compact:

Soit (U_α, ψ_i) l'atlas de M qui est compacte pour simplifier. Alors pour tout $p \in M$ on considère une famille $(f_p)_{p \in M}$ de fonctions bosses lisses chacune supportée dans une carte (U_α) qui contient p. Alors on a directement que $f_p(p) > 0$ donc on peut considère le recouvrement de M par la famille consistuée des:

$$O_p := \{q \in M \ ; \ f_p(q) > 0\}$$

C'est un recouvrement ouvert de M, par compacité on peut en extraitre un recouvrement fini $(O_i)_{i \leq k}$ et donc une famille finie de fonctions associées $(f_i)_{i \leq k}$. Alors on pose la nouvelle famille de fonctions suivante:

$$\phi_i = \frac{f_i}{\sum_{i \leq k} f_i}$$

Le dénominateur est bien strictement positif en tout point de M car il existe une f_i strictement positive sur un voisinage de celui-ci. Alors, on a par construction:

$$\begin{cases} \sum_i \phi_i = 1 \\ \text{supp}(\phi_i) = \text{supp}(f_i) \subseteq U_\alpha \end{cases}$$

Il ne reste qu'à réindexer la famille $(\phi_i)_{i \leq n}$ par α. Pour ceci on pose:

$$\rho_\alpha = \sum_J \phi_j \text{ avec } J := \{i \leq k \ ; \ \text{supp}(\phi_i) \subseteq U_\alpha\}$$

En d'autres termes on regroupe les ϕ_i selon leur support, avec $\rho_\alpha = 0$ si l'ensemble d'indice est vide. Alors on a bien une famille (ρ_α) qui vérifie les propriétés voulues.

Chapitre 4 - Variétés à bord :

Invariance par homéomorphisme :

Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{H}^n$ et $f : U \longrightarrow V$ un homéomorphisme, alors:

- Si $p \in U$ et $p \in \mathrm{int}\mathbb{H}^n$, alors il existe une boule ouverte $B(p, r)$ de $\mathbb{R}^n$ incluse dans U. Mais alors d'aprés le théorème d'invariance du domaine:

  $$f(B) \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n$$

  C'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^n$ inclu dans $\mathbb{H}^n$, il est donc inclu dans l'intérieur de $\mathbb{H}^n$ et donc $f(p)$ est intérieur.
- Si $p \in U$ et $p \in \partial\mathbb{H}^n$, alors par l'absurde supposons que $f(p)$ soit intérieur, alors $f^{-1}(f(p)) = p$ serait intérieur car f^{-1} est un homéomorphisme et préserve les points intérieurs. Absurde.

Généralisation de la notion de variété :

On considère une variété au sens du chapitre 3, alors chaque homéomorphisme de son atlas est un homéomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Aussi on pose l'application suivante:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longrightarrow (x_1, \ldots, x_{n-1}, e^{x_n}) \end{aligned}$$

Alors c'est facilement un difféomorphisme sur son image qui est $\mathbb{H}^n_>$. Donc pour toute carte (U, ϕ), on construit une nouvelle carte $(U, f \circ \phi)$ et plus précisément, on a:

$$\begin{aligned} f \circ \phi : U &\longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n \\ p &\longrightarrow (f \circ \phi)(p) \end{aligned}$$

On obtient bien un nouvel homéomorphisme (sur son image) par composition et par le théorème d'invariance du domaine l'ouvert $V = (f \circ \phi)(U)$ obtenu est aussi un ouvert **de l'espace ambiant** $\mathbb{R}^n$. Aussi cet ouvert est inclu dans le demi-espace par construction de f, il s'écrit donc $\mathbb{H}^n \cap V$, ie c'est un ouvert de $\mathbb{H}^n$.

Aussi si on considère l'application de changement de carte $f \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ f^{-1}$, alors c'est un difféomorphisme par composition, on donc bien un structure de variété différentielle au sens du chapitre 4.

Le bord d'une variété est une variété différentielle :

Soit M une variété variété à bord de dimension n de bord non-vide et d'atlas (U_α, ϕ_α).

- Si $p \in \partial M$ et si (U, ϕ) est une carte qui contient p, on a un homéomorphisme:

  $$\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$$

  Mais alors il se restreint en un homéomorphisme:

  $$\phi|_{\partial M} : U \cap \partial M \longrightarrow \phi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$$

  Aussi $\phi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$ est un ouvert de $\partial\mathbb{H}^n$ donc est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$. Finalement, on pose:

  $$\mathcal{A}_{\partial M} := (U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{\partial M})$$

  Ceci munit bien ∂M d'une structure de variété topologique de dimenson $n - 1$.
- Si $p \in U \cap V$, alors l'application de changement de carte au bord est:

  $$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \cap \partial\mathbb{H}^n \longrightarrow \psi(U \cap V) \cap \partial\mathbb{H}^n$$

  C'est la restriction au bord de $\mathbb{H}^n$ de l'application de changement de carte qui est différentiable sur l'ouvert $\phi(U \cap V)$. Elle est donc différentiable par définition d'une application différentiable sur une partie quelconque.

L'intérieur d'une variété est une variété différentielle :

Soit M une variété à bord de dimension n et d'atlas (U_α, ϕ_α).

- Si $p \in \text{int}M$ et si (U, ϕ) est une carte qui contient p, on a un homéomorphisme:

  $$\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$$

  Mais alors il se restreint en un homéomorphisme:

  $$\phi|_{\text{int}M} : U \cap \text{int}M \longrightarrow \phi(U \cap \text{int}M) \subseteq \text{int}\mathbb{H}^n$$

  Aussi $\text{int}\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^n$ donc finalement, on pose:

  $$\mathcal{A}_{\text{int}M} := (U_\alpha \cap \text{int}M, \phi_\alpha|_{\text{int}M})$$

  Ceci munit bien int$M$ d'une structure de variété topologique de dimenson n.

- Si $p \in U \cap V$, alors l'application de changement de carte en l'intérieur est:

  $$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \cap \text{int}\mathbb{H}^n \longrightarrow \psi(U \cap V) \cap \text{int}\mathbb{H}^n$$

  C'est la restriction à un ouvert de l'application de changement de carte qui est différentiable sur l'ouvert $\phi(U \cap V)$. Elle est donc différentiable.

Chapitre 6 - Espaces tangents dans $\mathbb{R}^n$:

Propriété des dérivations :

Si f est une fonction lisse constante égale à $c \in \mathbb{R}$, et D une dérivation au point $p \in \mathbb{R}^n$, alors $Df = 0$, en effet on a:

$$\begin{aligned}
&D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g) \iff \\
&D(cg) = D(f)g(p) + cD(g) \iff && \text{(Car } fg = cg \text{ en tant que fonction.)} \\
&cD(g) = D(f)g(p) + cD(g) && \text{(Linéarité de } D\text{.)}
\end{aligned}$$

On conclut de la dernière égalité que $D(f)g(p) = 0$ et il suffit alors de choisir g de telle sorte qu'elle ne s'anulle pas en p pour conclure.

$T\mathbb{R}^n_p$ est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$:

On considère l'application suivante:

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathbb{R}^n_p &\longrightarrow T\mathbb{R}^n_p \\
v &\longmapsto \sum_{i \leq n} v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p
\end{aligned}$$

Linéarité: Découle directement de la définition ..
Injectivité: Supposons que $v \in \mathbb{R}^n_p$ soit tel que:

$$D = \Phi(v) = 0$$

Alors pour toute fonction lisse $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$, on a $Df = 0$. Alors en particulier pour les fonctions coordonées $(x_i)_{i \leq n}$, on a:

$$\sum_{j \leq n} v_j \left.\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right|_p = v_i = 0$$

Donc toutes les composantes de v sont nulles et $v = 0$.
Surjectivité: **Pas compris ...**

Chapitre 7 - Espaces tangents dans M :

Propriété de la différentielle :

On considère $f : M \longrightarrow N$ lisse et un point $p \in M$, et on considère l'application suivante:

$$df_p : D \in TM_p \longmapsto D(\cdot \circ f) \in TN_{f(p)}$$

- **Bien définie:** Si D est une dérivation en p, et g, h sont deux fonctions lisses, alors on a:

$$\begin{aligned} df_p(D)(gh) &= D(gh \circ f) \\ &= D((g \circ f)(h \circ f)) \\ &= D(g \circ f)(h \circ f)(p) + (g \circ f)(p)D(h \circ f) && \text{(Car } D \text{ est une dérivation en } p.\text{)} \\ &= df_p(g)h(f(p)) + g(f(p))df_p(h) \end{aligned}$$

  Et donc $df_p(D)$ est bien une dérivation en $f(p)$.
- **Linéarité:** Découle directement de la définition.
- **Règle de la chaîne:** Soit $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow L$ deux applications lisses entre des variétés. Soit $p \in M$, alors par définition:

$$d(g \circ f)_p : D \in TM_p \longmapsto D(\cdot \circ g \circ f)) \in TL_{g(f(p))}$$

  Il s'agit de montrer que cette fonction est égale à $dg_{f(p)} \circ df_p$, les domaines de définition coincident bien, soit D une dérivation de TM_p, alors on a:

$$dg_{f(p)} \circ df_p(D) = dg_{f(p)}(df_p(D)) = dg_{f(p)}(D(\cdot \circ f)) = D(\cdot \circ g \circ f)$$

  On a donc égalité des images et donc égalité des fonctions.

Propriété de structure :

Finalement montrons que si $f : M \longrightarrow N$ est un **difféomorphisme**, alors df_p en un **isomorphisme** en tout point. On utilisera le lemme (trivial) suivant:

$$d(Id_M)_p = Id_{TM_p}$$

Alors si f est un difféormorphisme, en tout point p, on a d'aprés la règle de la chaîne:

$$\begin{cases} d(f^{-1} \circ f)_p = d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p = Id_{TM_p} \\ d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = df_p \circ d(f^{-1})_{f(p)} = Id_{TN_{f(p)}} \end{cases}$$

Finalement, ceci montre que df_p est bijective d'inverse $d(f^{-1})_{f(p)}$ et linéaire par définition, on a donc bien:

$$TM_p \cong TN_{f(p)}$$

On en déduit directement en utilisant que toute carte ϕ est un difféomorphisme et donc qu'en tout point d'une variété on a:

$$TM_p \cong T\mathbb{R}^n_{\phi(p)} \cong \mathbb{R}^n$$

Changement de représentation des vecteurs tangents :

Si $(U, \phi), (V, \psi)$ sont deux cartes qui contiennent un point p, alors si on note x_i, y_i les coordonées respectives dans la première et la deuxième carte et $c = \psi \circ \phi^{-1}$ l'application de changement de carte alors pour toute fonction lisse g, on a:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p g &= \frac{\partial g \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p)) \\ &= \frac{\partial g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p)) \\ &= \sum_{j \leq n} \frac{\partial g \circ \psi^{-1}}{\partial y_j}(\psi(p)) \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) && \text{(Règle de la chaîne dans } \mathbb{R}^n\text{)} \\ &= \sum_{j \leq n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p g \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute application g, on a donc:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \sum_{j\leq n} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p$$

Le fibré tangent est un variété topologique de dimension $2n$:

On définit simultanément une **topologie** sur TM et une carte. Soit (U,ϕ) une carte de M, alors on définit:

$$\begin{aligned}\Phi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \phi(U)\times T\mathbb{R}^n_p\\ (p,v) &\longmapsto (\phi(p), d\phi_p(v))\end{aligned}$$

Alors cette application est **bijective**, en effet on a:

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} : \phi(U)\times T\mathbb{R}^n_p &\longrightarrow \pi^{-1}(U)\\ (x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n) &\longmapsto (\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n), d\phi^{-1}_{x_1,\dots,x_n}(v_1,\dots,v_n))\end{aligned}$$

Alors on identifie par la suite $T\mathbb{R}^n_p$ et $\mathbb{R}^n$ et on définit une topologie sur TM comme suit:

$$\mathcal{T}_{TM} := \left\{U\subseteq TM\ ;\ \forall (V,\phi)\in\mathcal{A}_M\ ,\ \Phi^{-1}(U\cap\pi^{-1}(V))\in\mathcal{T}_{\mathbb{R}^{2n}}\right\}$$

J'admet les faits suivants (les démonstrations sont soit introuvables soit horribles):

- Cette topologie est séparée.
- Les $\pi^{-1}(U_\alpha)$ sont bien un recouvrement ouvert localement fini de TM.
- Les cartes Φ_α sont bien toutes des homéomorphismes sur une partie[1] de $\mathbb{R}^{2n}$.

Ceci munit TM d'une structure de variété topologique de dimension $2n$.

Le fibré tangent est un variété différentielle de dimension $2n$:

Les applications de changement de cartes sont lisses, en effet soit $(U,\phi),(V,\psi)$ deux cartes qui contiennent p, alors si $(\pi^{-1}(U),\Phi),(\pi^{-1}(V),\Psi)$ sont deux cartes qui contiennent (p,v), alors:

$$\begin{cases} E = \Phi(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)) = \phi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n\\ F = \Psi(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)) = \psi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n\end{cases}$$

Et donc on peut calculer l'application de changement de cartes:

$$\begin{aligned}\Psi\circ\Phi^{-1}(x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n) &= \Psi\left(\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n), d\phi^{-1}_{x_1,\dots,x_n}(v_1,\dots,v_n)\right) && \text{(Par définition)}\\ &= \left(\psi\circ\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n), d(\psi\circ\phi^{-1})_{x_1,\dots,x_n}(v_1,\dots,v_n)\right) && \text{(Règle de la chaîne)}\\ &= \left(\psi\circ\phi^{-1}(x_1,\dots,x_n), \sum_{i\leq n}\frac{\partial\psi\circ\phi^{-1}}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n)v_i\right)\end{aligned}$$

Les n premières composantes sont lisses car $\psi\circ\phi^{-1}$ l'est. Les n dernières le sont car toutes les dérivées partielles sont lisses et par combinaisons linéaires de fonctions lisses. On remarque néanmoins que si M était simplement $\mathcal{C}^k$ alors TM serait $\mathcal{C}^{k-1}$ par l'apparition des dérivées partielles.

Un champs de vecteurs est lisse ssi ses composantes le sont:

Soit $X : M\longrightarrow TM$ un champs de vecteur lisse et $p\in M$, alors pour que le champs de vecteur soit lisse, il faut et il suffit qu'il le soit dans deux cartes bien choisies.

On choisit (U,ϕ) n'importe quelle carte qui contient p et $(\pi^{-1}(U),\Phi)$ la carte induite par celle-ci (qui contient bien $X(p)$). Alors le champs de vecteurs est lisse si et seulement si:

$$\Phi\circ X\circ\phi^{-1} \text{ est lisse.}$$

[1] Plus rigoureusement à une partie elle même homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^{2n}$, car $T\mathbb{R}^n_p \cong \mathbb{R}^n$.

Or on a par calcul direct que:

$$\begin{aligned}\Phi \circ X \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= \Phi(X(p)) \\ &= \Phi(p, \sum X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p) && \text{On décompose } X_p \text{ dans la base associée à } \phi. \\ &= (p, X_1(p), \dots, X_n(p))\end{aligned}$$

Cette application est bien lisse si et seulement si les n dernières composantes le sont, ie si les composantes du champs de vecteurs le sont. La preuve est la même pour les champs de covecteurs, tenseurs ...

Chapitre 8 - Espaces cotangents dans M :

Différentielle abstraite et différentielle usuelle - Partie 1:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ s'identifie à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors pour toute fonction lisse $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} df_p(v)(g) &= \sum_{i=1}^{n} v_i df_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right)(g) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g}{\partial t}(f(t)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{f(p)} \right)(g) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute fonction lisse g, on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{f(p)}$$

Différentielle abstraite et différentielle usuelle - Partie 2:

L'expression de la différentielle d'une fonction $f : M \longrightarrow N$ s'identifie aussi à l'expression usuelle d'une différentielle, en effet, si $v \in TM_p$, alors pour toute fonction lisse $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} df_p(v)(g) &= \sum_{i=1}^{n} v_i df_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right)(g) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(p)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_{f(p)} \right)(g) \end{aligned}$$

Où ici f_j représente les coordonées locales de f au voisinage de $f(p)$, ie $f_j = (\psi \circ f)_j(p)$. Ceci étant vrai pour toute fonction lisse g, on trouve l'expression suivante:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_{f(p)}$$

Chapitre 9 - Formes différentielles dans M :

Le pullback commute avec la différentielle

Soit x un fonction lisse sur N, alors d'après la règle de la chaîne:

$$\forall p \in M \ ; \ (dF^*x)_p = (d(x \circ F))_p = dx_{F(p)} \circ dF_p = (F^*dx)_p$$

Linéarité du pullback

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, ω, η deux k-formes, alors pour tout point p de M, on a:

$$\begin{aligned}
(F^*(\lambda\omega + \eta))_p &= (\lambda\omega + \eta)_{F(p)} \circ (dF_p, \dots, dF_p) \\
&= (\lambda\omega_{F(p)} + \eta_{F(p)}) \circ (dF_p, \dots, dF_p) \\
&= \lambda\omega_{F(p)} \circ (dF_p, \dots, dF_p) + \eta_{F(p)} \circ (dF_p, \dots, dF_p) \\
&= (\lambda F^*\omega)_p + (F^*\eta)_p \\
&= (\lambda F^*\omega + F^*\eta)_p
\end{aligned}$$

Le pullback est compatible avec le produit extérieur

Soit ω, η respectivement des k et l formes sur N, alors pour tout point p de M, on a:

$$\begin{aligned}
(F^*(\omega \wedge \eta))_p &= (\omega \wedge \eta)_{F(p)} \circ (dF_p, \dots, dF_p) \\
&= (\omega_{F(p)} \wedge \eta_{F(p)}) \circ (dF_p, \dots, dF_p)
\end{aligned}$$

Soit $v_1, \dots, v_{k+l}$ des vecteurs de TM_p, alors on évalue l'expression ci-dessus en:

$$(\omega_{F(p)} \wedge \eta_{F(p)})(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_{k+l}))$$

Puis par définition, la quantité ci-dessus est égale à:

$$\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma)(\omega_{F(p)} \otimes \eta_{F(p)})(dF_p(v_{\sigma(1)}), \dots, dF_p(v_{\sigma(k+l)}))$$

Puis par évaluation du produit tensoriel:

$$\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\omega_{F(p)} \left[dF_p(v_{\sigma(1)}), \dots, dF_p(v_{\sigma(k)})\right] \eta_{F(p)} \left[dF_p(v_{\sigma(k+1)}), \dots, dF_p(v_{\sigma(k+l)})\right]$$

Finalement, ceci est bien égal à

$$\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma)(\omega_{F(p)} \circ (dF_p, \dots, dF_p)) \otimes (\eta_{F(p)} \circ (dF_p, \dots, dF_p))(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

Qui corresponds bien à l'expression:

$$(\omega_{F(p)} \circ (dF_p, \dots, dF_p)) \wedge (\eta_{F(p)} \circ (dF_p, \dots, dF_p)) = F^*\omega \wedge F^*\eta$$

En particulier, dans le cas d'un produit avec une 0-forme, le produit extérieur est une multiplication scalaire et on a:

$$F^*(g\omega) = (F^*g)(F^*\omega) = (g \circ F)F^*\omega$$

Expression en coordonées du pullback

Cette fois on considère une k forme ω, alors en coordonnées locales, on a:

$$\begin{aligned}
F^*\omega &= F^*\left[\sum_I \omega_{i_1,\ldots,i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}\right] \\
&= \sum_I F^*(\omega_{i_1,\ldots,i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}) \\
&= \sum_I F^*\omega_{i_1,\ldots,i_n} F^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge F^*(dx^{i_n}) \\
&= \sum_I F^*\omega_{i_1,\ldots,i_n} d(F^*x^{i_1}) \wedge \ldots \wedge d(F^*x^{i_n}) \\
&= \sum_I (\omega_{i_1,\ldots,i_n} \circ F) d(x^{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_n} \circ F) \\
&= \sum_I (\omega_{i_1,\ldots,i_n} \circ F) dF^{i_1} \wedge \ldots \wedge dF^{i_n}
\end{aligned}$$

Où on a utilisé successivement la linéarité, la compatibilité avec le produit extérieur et la commutation avec la différentielle usuelle du pullback. On a noté $dF^i = d(x^i \circ F)$.

Pullback d'une forme volume

On se donne une forme volume ω sur N et un difféomorphisme $F : M \longrightarrow N$, alors d'aprés l'expression trouvé précédemment, on a:

$$F^*\omega = (\omega \circ F) dF^1 \wedge \ldots \wedge dF^n$$

Or par définition de la différentielle, on peut réecrire ceci en:

$$F^*\omega = (\omega \circ F) \left(\sum_{j_1 \leq n} \frac{\partial F^1}{\partial x_{j_1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge \sum_{j_n \leq n} \frac{\partial F^n}{\partial x_{j_1}} dx^{j_n} \right)$$

Puis par multilinéarité on obtient:

$$F^*\omega = (\omega \circ F) \sum_{1 \leq j_1,\ldots,j_p \leq n} \frac{\partial F^1}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial F^n}{\partial x_{j_n}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_n}$$

Or on somme en fait sur tout les indices distincts donc de manière équivalente sur toutes les permutations des indices:

$$F^*\omega = (\omega \circ F) \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial F^1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial F^n}{\partial x_{\sigma(n)}} dx^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx^{\sigma(n)}$$

Finalement, par les propriétés du produit extérieur, on trouve:

$$F^*\omega = (\omega \circ F) \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \frac{\partial F^1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial F^n}{\partial x_{\sigma(n)}} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = (\omega \circ F) \det(J_F) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Une dérivée extérieure est locale :

Si d est un opérateur de dérivée extérieure, alors si $\omega = \eta$ sur un ouvert U, alors si on considère une fonction bosse f sur U, on a que $f\omega = f\eta$ sur tout M. En outre, d'aprés la règle de Leibniz:

$$\begin{cases} d(f\omega)_p = df(p) \wedge \omega(p) + f(p) d\omega(p) \\ d(f\eta)_p = df(p) \wedge \eta(p) + f(p) d\eta(p) \end{cases}$$

Donc on en déduit que:

$$df(p) \wedge \omega(p) + f(p) d\omega(p) = df(p) \wedge \eta(p) + f(p) d\eta(p)$$

Alors on peut conclure car si $p \in U$, on obtient par définition de f que $f(p) = 1$ et $df(p) = 0$ et donc:

$$\forall p \in U \ ; \ d\omega(p) = d\eta(p)$$

Une dérivée extérieure commute avec le pullback

On considère une k forme ω et $F : M \longrightarrow N$ une application lisse, alors en coordonnées locales, on a:

$$\begin{aligned}
F^*d\omega &= F^*\left[\sum_I d\omega_{i_1,\ldots,i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}\right] \\
&= \sum_I F^*(d\omega_{i_1,\ldots,i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}) \\
&= \sum_I F^*(d\omega_{i_1,\ldots,i_n}) \wedge F^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge F^*(dx^{i_n}) \\
&= \sum_I d(F^*\omega_{i_1,\ldots,i_n}) \wedge d(F^*x^{i_1}) \wedge \ldots \wedge d(F^*x^{i_n}) \\
&= \sum_I d(\omega_{i_1,\ldots,i_n} \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_n} \circ F) \\
&= \sum_I d(\omega_{i_1,\ldots,i_n} \circ F) \wedge dF^{i_1} \wedge \ldots \wedge dF^{i_n}
\end{aligned}$$

D'autre part en dérivant l'expression en coordonées locales du pullback ci-dessous, on obtient bien l'égalité:

$$F^*\omega = \sum_I \omega_{i_1,\ldots,i_n} \circ F \wedge dF^{i_1} \wedge \ldots \wedge dF^{i_n}$$

Forme nécessaire de la dérivée extérieure locale :

On procède par analyse-synthèse, et on considère une dérivée extérieure d qui vérifie les axiomes. Alors pour toute $k-$forme $\omega \in \Omega^k(U)$, on a nécessairement:

$$\begin{aligned}
d\omega_p &= d\left(\sum_I \omega_I(p)dx^I\right) \\
&= \sum_I d(\omega_I(p)dx^I) && \text{(Linéarité)} \\
&= \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I + \omega_I(p)d(dx^I) && \text{(Leibniz)} \\
&= \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I
\end{aligned}$$

La dernière ligne venant du fait que $d^2 = 0$. Si une dérivée extérieure existe sur $\Omega^k(U)$, alors elle est uniquement déterminée par la forme ci-dessus.

Existence de la dérivée extérieure locale:

Pour tout $p \in U$, pour toute $k-$forme $\omega \in \Omega^k(U)$ l'opérateur suivant:

$$d\omega_p = \sum_I d\omega_I(p) \wedge dx^I$$

Alors on doit montrer que cet opérateur est bien une dérivée extérieure.

- **Généralisation:** Si $f \in \Omega^0(U)$, c'est une fonction lisse, et alors d agit par définition par différentiation des coefficients, l'unique coefficient de la 0-forme f, étant elle même, on conclut.
- **Linéarité:** Si ω, η sont deux k-formes sur U ainsi que λ un scalaire, alors on a:

$$d(\omega + \lambda\eta)_p = d\left(\sum_I (f_I + \lambda g_I)(p)dx^I\right) = \sum_I d(f_I + \lambda g_I)(p) \wedge dx^I = d\omega_p + \lambda d\eta_p$$

- **Leibniz:** Si ω, η sont respectivement une k-forme et une l-forme sur U alors on a:

$$\begin{cases} \omega_p = \sum_I \omega_I(p) dx^I \\ \eta_p = \sum_J \eta_J(p) dx^J \end{cases}$$

  On a alors:

$$(\omega \wedge \eta)_p = \sum_{I,J} (\omega_I \eta_J)(p) dx^I \wedge dx^J$$

  Appliquons la dérivée extérieure:

$$d(\omega \wedge \eta)_p = \sum_{I,J} d(\omega_I \eta_J)(p) \wedge dx^I \wedge dx^J$$

  Les fonctions différentiées sont scalaires, donc on applique la règle du produit:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta)_p &= \sum_{I,J} \big(d\omega_I(p)\eta_J(p) + \omega_I(p) d\eta_J(p)\big) \wedge dx^I \wedge dx^J && \text{(Par définition.)} \\ &= \sum_{I,J} d\omega_I(p)\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J + \sum_{I,J} \omega_I(p) d\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} d\omega_I(p) \wedge dx^I \wedge \eta_J(p) dx^J + \sum_{I,J} d\eta^J(p) \wedge \omega^I(p) dx^I \wedge dx^J \\ &= d(\omega \wedge \eta)_p + (-1)^k \sum_{I,J} \omega_I(p) dx^I \wedge d\eta_J(p) \wedge dx^J && (\star) \\ &= d(\omega \wedge \eta)_p + (-1)^k (\omega \wedge d\eta)_p \\ &= (d\omega \wedge \eta + (-1)^k (\omega \wedge d\eta))_p \end{aligned}$$

  Où pour trouver $(\star)$, on identifie le premier terme, et on utilise le fait que $\eta_J(p), dx_I$ sont respectivement une $1-$ forme et une k-forme et il y a donc k échanges à faire et donc k application de l'antisymétrie.

- **Propriété fondamentale:** Si on considère une k forme $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$, alors on a:

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I = \sum_I \sum_{i \leq n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I$$

  Et donc si on dérive à nouveau on obtient:

$$dd\omega = \sum_I \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I$$

  On peut alors montrer que pour I fixé, on a:

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i = 0$$

  En effet si $i = j$ c'est évident, mais si $i \neq j$, on a que:

$$\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i + \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} dx^i \wedge dx^j = 0$$

  En effet, ω_I est une fonction lisse donc on applique Schwartz et les dérivées croisés sont égales, mais les produit extérieurs $dx^i \wedge dx^j$ sont opposés. Ceci nous permet d'appairer les termes en n sommes nulles (il y a $2n$) termes dans la somme).

On a donc bien montré qu'il existe bien une dérivée extérieure sur les k-formes définies sur une carte U.

Existence de la dérivée extérieure globale:

On note $d|_U$ l'unique dérivée extérieure sur une carte (U, ϕ) trouvée ci-dessus. Pour tout $p \in M$, pour toute $k-$forme $\omega \in \Omega^k(M)$, alors on définit l'opérateur suivant:

$$(d\omega)_p = (d|_U\omega)_p$$

Soit $\omega \in \Omega^k(M)$, soit $(U, \phi), (V, \psi)$ deux cartes qui contiennent p, montrons que $d\omega_p$ est bien définie, ie que:

$$(d|_U\omega)_p = (d|_V\omega)_p$$

Sur $U \cap V$, on a que les deux expressions en coordonées de ω sont égales:

$$\sum_I \omega_I dx^I = \sum_I \omega'_I dy^I$$

Or, si on applique $d|_U$, on obtient:

$$d|_U\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_I d\omega'_I \wedge dy^I = d|_V\omega$$

Cette définition ne dépends donc pas du choix de la carte qui contient p. En outre c'est bien une dérivée extérieure car $d|_U$ en est une, et donc elle est locale.

Unicité de la dérivée extérieure globale:

Chapitre 10 - Orientation d'une variété:

0.0.1 Deux classes d'équivalences

Si M est connexe et ω, ω' sont deux formes volumes alors l'espace des formes volumes en un point est de dimension 1, on a donc l'existence d'une fonction lisse f telle que:

$$\forall p \in M \ ; \ \omega_p = f(p)\omega'_p$$

Aussi f n'est jamais nulle sinon les formes le seraient. Supposons maintenant par l'absurde:

$$\begin{cases} \exists p_0 \in M \ ; \ f(p_0) > 0 \\ \exists p_1 \in M \ ; \ f(p_1) < 0 \end{cases}$$

Alors on a que $f(M)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ qui contient des nombres positifs et négatifs, elle s'annule, ce qui est absurde. Donc on a bien que:

- Soit $\omega = f\omega' \ ; \ f > 0$
- Soit $\omega = f\omega' \ ; \ f < 0$

On a donc bien deux classes possibles sur une variété connexe, celle de ω et celle de $-\omega$. En outre si la variété n'est pas connexe, il suffit de faire ce raisonnement sur chaque composante connexe.

0.0.2 Les changements de cartes ont un jacobien positif

On se donne une forme volume ω sur M, ainsi que deux cartes $(U, \phi), (V, \psi)$ positivement orientées qui contiennent un point $p \in M$, alors on a que la forme ω se ramène dans $\mathbb{R}^n$ via la carte ϕ en:

$$\omega(x_1, \dots, x_n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

On applique la formule du pullback d'une forme volume pour le difféomorphisme de changement de carte et on obtient:

$$\omega(x_1, \dots, x_n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \omega(y_1, \dots, y_n) \det(\mathrm{Jac}(c)) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

Or les deux cartes sont orientées positivement par hypothèse, donc nécéssairement:

$$\begin{cases} \omega(x_1, \dots, x_n) > 0 \\ \omega(y_1, \dots, y_n) > 0 \end{cases}$$

On en déduit que le jacobien du changement de carte est positif.

Existence d'un champs de vecteurs sortant

On souhait construire un champs de vecteurs X sur M tel que pour tout point du bord ∂M, $X(p)$ soit un vecteur sortant. On considère une partition de l'unité subordonnée à l'atlas que l'on note ρ_α, alors pour toute carte U_α qui intersecte le bord, on définit un champs de vecteur sortant en coordonnées locales:

$$X_\alpha(p) = -\frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p$$

Alors on aimerait globalise ce champs de vecteur en un champs de vecteur global par la partition de l'unité, on pose:

$$X = \sum_\alpha \rho_\alpha X_\alpha$$

C'est bien un champs de vecteurs sur M, lisse car:

$$\begin{aligned} X(p) &= \sum_\alpha \rho_\alpha(p) X_\alpha(p) \\ &= \sum_\alpha \rho_\alpha(p) X_\alpha(p) \\ &= \sum_\alpha \rho_\alpha(p) \sum_{i \leq n} X_{\alpha,i}(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \\ &= \sum_{i \leq n} \sum_\alpha \rho_\alpha(p) X_{\alpha,i}(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \end{aligned}$$

C'est une somme finie dont toutes les composantes sont lisses car les champs de vecteurs $\rho_\alpha X_\alpha$ sont lisses. Aussi pour tout point du bord p, alors $p \in U_\alpha \cap \partial M$ et on a:

$$(X(p))_n = \sum_\alpha \rho_\alpha(p) X_{\alpha,n}(p) \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p = -\frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p$$

Qui est bien un vecteur sortant.

Construction d'une forme volume sur ∂M

On considère une variété orientable à bord M et on note ω une forme volume sur M, montrons que l'on peut construire une forme volume sur ∂M. La construction est la suivante:

- On considère un champs sortant S sur ∂M.
- On construit le produit intérieur de $\iota_S\omega$, qui est une $n-1$ forme sur M.
- La restriction[1] de $\iota_S\omega$ au bord est alors une forme volume sur ∂M.

On sait déja que $\iota_S\omega$ est une $n-1$ forme lisse, supposons maintenant par l'absurde qu'il existe $p \in \partial M$ tel que cette forme s'annule. Ceci signifie que:

$$\forall (v_1, \dots, v_{n-1}) \in T\partial M_p \ ; \ \iota_S\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = 0$$

C'est donc en particulier vrai pour la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\big|_p\right)$, mais alors:

$$\iota_S\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\bigg|_p\right) = \omega_p\left(-\frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\bigg|_p\right) = 0$$

Et la famille sur laquelle on évalue ω_p est une base de TM_p donc ω s'annule en p, absurde.

Expression de la forme volume induite

On se donne une forme volume ω sur M et un champs de vecteurs sortant S au bord de M, on a alors pour tout point $p \in \partial M$:

$$\forall (v_1, \dots, v_{n-1}) \in T\partial M_p \ ; \ \iota_S\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega_p(S(p), v_1, \dots, v_n) = \widetilde{\omega}(p) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(S(p), v_1, \dots, v_n)$$

Or ceci se ramène à un calcul de déterminant (simple car $S(p) = -\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$), ie il suffit de calculer:

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(S(p), v_1, \dots, v_n) &= \begin{vmatrix} S(p)_1 & v_{1,1} & \dots & v_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(p)_n & v_{1,n} & \dots & v_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & v_{1,1} & \dots & v_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & v_{1,n} & \dots & v_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $v_1, \dots, v_{n-1}$, on trouve bien:

$$\iota_S\omega_p = \widetilde{\omega}(p)(-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

[1] Plus précisement, le pullback par l'inclusion.

Chapitre 12 - Intégrale d'une forme :

Changement de variables :

Soit $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ une $n-$forme et $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difféormorphisme. Alors d'une part on a d'aprés la formule du changement de variables pour les fonctions:

- D'aprés la formule du changement de variable :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\omega} dx^1 \dots dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\omega} \circ F |\det(JF)| dx^1 \dots dx^n$$

- D'aprés les propriétés du pullback :

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^* \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\omega} \circ F \det(JF) dx^1 \dots dx^n$$

On a donc bien égalité des deux membres si et seulement si $|\det(JF)| = \det(JF)$, ie ssi $\det(JF) > 0$.

L'intégrale est bien définie :

On doit montrer que si (U_α, ϕ_α) et (V_β, ψ_β) sont deux atlas orientés de M, et que ρ_α, ρ_β sont deux partitions de l'unité induite par ceux-ci, alors:

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_\beta \int_{U_\beta} \rho_\beta \omega \tag{1}$$

On construit les deux nouveaux atlas suivants:

$$(U_\alpha \cap V_\beta, \phi_\alpha|_{V_\beta}) \ ; \ (U_\alpha \cap V_\beta, \psi_\alpha|_{U_\beta})$$

Ils sont orientés car toutes les cartes choisies sont seulement des restrictions de cartes positivement orientées par hypothèse. Alors on effectue le calcul suivant:

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega &= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sum_\beta \rho_\beta \omega && \text{(Car la somme introduite vaut identiquement 1.)} \\
&= \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \rho_\beta \omega && \text{(Car les sommes sont localement finies.)} \\
&= \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap V_\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \omega && \text{(Car le support de l'intégrande est dans } U_\alpha \cap V_\beta.\text{)}
\end{aligned}$$

On peut effectuer le même calcul avec l'expression de droite de (1) et obtient bien l'égalité et l'intégrale est bien définie.

Chapitre 13 - Théorème de Stokes :

Stokes dans $\mathbb{H}^n$:

On considère une $n-1$ forme $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{H}^n)$, alors elle est de la forme:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Ou le chapeau désigne une ommission. Alors on calcule sa dérivée extérieure et on trouve:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \end{aligned}$$

- On calcule alors l'intégrale de celle-ci judicieusement grâce à Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx^1 \ldots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx^1 \ldots dx^n + (-1)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+} \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} dx^1 \ldots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \int_{\mathbb{R}^{n-2}\times\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx^i \right) dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^n + (-1)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} dx^n \right) dx^1 \ldots dx^{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dx^1 \ldots dx^{n-1} \end{aligned}$$

  Le terme de gauche dans l'avant dernière égalité s'annulle car ω est à support compact, le terme de droite se calcule par application du théorème fondamental de l'analyse.

- Puis l'intégrale sur le bord où on note $\iota : \partial\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{H}^n$ se calcule par:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{H}^n} \iota^*\omega &= \int_{\partial\mathbb{H}^n} \sum_{k=1}^n \iota^* \left(\omega_i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \right) \\ &= \int_{\partial\mathbb{H}^n} (\omega_n \circ \iota) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1} \qquad \text{(Car } d(x^n \circ \iota) = 0\text{)} \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dx^1 \ldots dx^{n-1} \end{aligned}$$

  En effet le difféomorphisme $F : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \partial\mathbb{H}^n$ préserve ou non les orientation choisies selon la parité de n, donc quand on effectue le changement de variable, un facteur $(-1)^n$ apparaît.

On a donc bien démontré le théorème de Stokes dans $\mathbb{H}^n$.

Stokes dans M :

Soit M une variété orientée munie de son atlas orienté $(U_\alpha)_\alpha$ ainsi qu'un partition de l'unité $(\rho_\alpha)_\alpha$ associée. Soit $\omega \in \Omega^n(M)$ une $n-1$ forme. On oriente ∂M avec l'orientation induite par un champs de vecteurs sortant. Alors en appliquant Stokes dans chaque carte, on a:

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) = \int_M d\omega$$