Tenseurs

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresséà l'object d'étude du domaine appelé **algèbre multilinéaire**, qui sont les **formes multilinéaires**, en particulier, on se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors on appele **tenseur** d'ordre (p, q) l'application:

$$T : \underbrace{E^* \times \ldots \times E^*}_{\text{p}} \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{\text{q}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

Notation d'Einstein:

Dans ce cadre nous définissons une nouvelle notation appelée **convention de notation d'Einstein** qui permet de s'épargner d'avoir à écrire beaucoup de signes sommes quand on décompose un tenseur dans une base, définissons tout d'abord cette convention sur les vecteurs et le covecteurs :

- Si $x = \sum_i x_i e_i$ et x est un vecteur (donc contravariant), on note $x = x^i e_i$.
- Si $x = \sum_i x_i e_i$ et x est un covecteur (donc covariant), on note $x = x_i e^i$.

C'est en fait un notation qui **somme implicitement sur les indices répétés**. On peut la généraliser aux tenseurs, par exemple considérons une forme bilinéaire f sur E, alors on a dans une base:

$$f(x, y) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(e_i, e_j) \overset{not.}{=} x^i y^j f(e_i, e_j)$$

De manière générale, l'expresion d'un tenseur d'ordre (p, q) dans une base est donnée par:

$$T(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = (x_1)_{i_1} \ldots (x_p)_{i_p} (y_1)^{j_1} \ldots (y_q)^{j_q} T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1} \ldots e_{j_q})$$

Où on note l'évaluation du tenseur sur tout les vecteurs de toutes les bases par $T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_p}$ ce qui nous donne:

$$T(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = (x_1)_{i_1} \ldots (x_p)_{i_p} (y_1)^{j_1} \ldots (y_q)^{j_q} T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_p}$$

Par exemple un tenseur d'ordre $(1, 2)$ est donné par:

$$T(x, y, z) = x_i y^j z^k T^i_{j,k} = x_i y^j z^k T(e^i, e_j, e_k) = \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k T(e_i, e_j, e_k)$$

Produit tensoriel de deux tenseurs covariants:

On note alors $\mathscr{T}^p(E)$ l'ensemble des tenseurs p-covariants, alors on peut définir le **produit tensoriel** de deux tels tenseurs par:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathscr{T}^p(E) \times \mathscr{T}^q(E) &\longrightarrow \mathscr{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = \alpha(x_1, \ldots, x_p)\beta(y_1, \ldots, y_q)$$

Bases et dimension:

On peut alors se demander si on peut trouver une base de l'espace des tenseurs p-covariants et si on note $(e_i)_{i \leq n}$ une base de E^*, alors on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} T(x_1, \ldots, x_p) = (x_1)_{i_1} \ldots (x_p)_{i_p} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) &= (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p})(x_1, \ldots, x_p) T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \\ &= \alpha_{i_1,\ldots,i_p} (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p})(x_1, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

En d'autres termes l'image du tenseur est uniquement déterminée par les n^p coefficients, dans une base qui est donnée par $(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p})$, en effet on choisit p vecteurs de base dans la famille de n vecteurs, et les répétitions sont possibles. On peut aussi alors noter de manière fonctionnelle $T = \alpha_{i_1,\ldots,i_p} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}$

Partie symétrique:

On se donne un tenseur T qui soit p-covariant, alors on chercher à construire un tenseur p-covariant **symétrique** à partir de T, et on peut alors montrer que le tenseur suivant convient:

$$\mathrm{Sym}(T)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

Partie antisymétrique:

On se donne un tenseur T qui soit p-covariant, alors on chercher à construire un tenseur p-covariant **antisymétrique** à partir de T, et on peut alors montrer que le tenseur suivant convient:

$$\mathrm{Ant}(T)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

Produit symétrique:

On peut alors définir le **produit symétrique** de deux tenseurs p-covariants et q-covariants par:

$$(T \odot T') = \mathrm{Sym}(T \otimes T')$$

En d'autres termes:

$$(T \odot T')(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) T'(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

Produit extérieur:

On peut alors définir le **produit antisymétrique** appelé surtout **produit extérieur** de deux tenseurs p-covariants et q-covariants par:

$$(T \wedge T') = \mathrm{Sym}(T \otimes T')$$

En d'autres termes:

$$(T \wedge T')(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) T'(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

C'est ce produit extérieur qui nous sera surtout utile pour définir les formes différentielles.

Algèbre extérieure:

On appelle alors **p-ième puissance extérieure** l'ensemble de toutes les formes p-linéaires alternées qu'on note $\Lambda^p E$. Une base est alors donnée par l'ensemble:

$$\left\{ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \ ; \ 1 \leq e_{i_1} \leq \dots \leq e_{i_p} \leq n \right\}$$

Exemple: On considère $\Lambda^2 \mathbb{R}^3$ dont on note la base duale $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, alors on a que:

$$\Lambda^2 \mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$$

On appele aussi les éléments de la p-ième puissance extérieure des **multivecteurs**.

Formes différentielles

Dans ce chapitre on peut maintenant définir un object fondamental de la géométrie différentielle, le concept de **p-forme différentielle** sur $\mathbb{R}^n$ qui sera simplement définie par:

Une p-forme différentielle est un champs de tenseurs covariants antisymétriques.

Ceci s'intérprète alors comme la donnée en chaque point x de $\mathbb{R}^n$ d'un tenseur covariant antisymétrique, ou encore avec l'interprétation en terme de puissance extérieure, comme un champs de multivecteurs. Formellement, on a:

$$\omega_x = \alpha^{i_1,\ldots,i_p}(x)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

On sait alors qu'on peut décomposer chaque p-forme dans la base des $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, donc on se contentera d'étudier les p-formes élémentaires:

$$\omega_x = f(x)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Et enfin, on considérera que f est une fonction aussi lisse que nécessaire.

Dérivée extérieure:

On introduit alors un opérateur sur les p-formes appelée **dérivée extérieure** qu'on définit par:

$$d_k : \Lambda^k E \longrightarrow \Lambda^{k+1} E$$
$$\omega \longmapsto d\omega$$

Elle agit alors sur une p-forme par différentiation de la fonction coefficients, ie on a:

$$d\omega_x = df_x \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

Exemple 1: Si on considère la 1 forme de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\omega = ydx$$

Alors on différentie simplement la fonction coefficient et on obtient:

$$d\omega = d(ydx) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial y}dy\right) \wedge dx = dy \wedge dx$$

Exemple 2: On considère la 2-forme de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\omega = A(x,y,z)dx \wedge dy$$

Alors on différentie simplement la fonction coefficient et on obtient:

$$d\omega = d(A(x,y,z)dx \wedge dy) = \left(\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dz$$

Par exemple si $A(x,y,z) = 3xyz$, on trouve en utilisant l'antisymétrie que:

$$d\omega = 3xzdy \wedge dx \wedge dz = -3xzdx \wedge dy \wedge dz$$

Propriétés de la dérivée:

On peut alors montrer que la dérivée extérieure possède les propriétés suivantes:

- On a que la dérivée est un opérateur linéaire.
- On a que si ω est de degré k, alors $d\omega$ est de degré $k+1$.
- On a la **formule de Leibniz généralisée**, pour ω une k-forme et α une l-forme :

$$d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha$$

Finalement, et ce sera la propriété la plus importante, on peut montrer par les propriétés d'antisymétrie la propriété suivante:

$$d_{k+1} \circ d_k = 0$$

Cas de la dimension 3:

Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, on a la chaîne suivante:

$$\Lambda^0\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_0} \Lambda^1\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_1} \Lambda^2\mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_2} \Lambda^3\mathbb{R}^3$$

On peut alors montrer facilement que les dimensions des différents espaces suivent la suite $(1, 3, 3, 1)$ et les propriétés surprenantes suivantes:

- On a $d_0(f)$ qui nous donne **le gradient de la fonction**.
- On a $d_1(F)$ qui nous donne **le rotationnel du champ de vecteurs**.
- On a $d_2(F)$ qui nous donne **la divergence du champ de vecteurs**.

Et par la propriété fondamentale de la dérivée extérieure, on a alors les formules classiques suivantes comme simple conséquence:

$$\begin{cases} \text{rot}(\nabla f) = 0 \\ \text{div}(\text{rot}(F)) = 0 \end{cases}$$

Forme volume:

Dans $\mathbb{R}^n$, on peut définir une unique n-forme différentielle au signe prés, appelée **forme volume** par:

$$\text{vol} = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Par exemple:

- Dans $\mathbb{R}^1$, on a $\text{vol} = dx$
- Dans $\mathbb{R}^3$ on a $\text{vol} = dx \wedge dy \wedge dz$

En particulier, on a par exemple dans $\mathbb{R}^2$, que $\text{vol}(u, v) = (dx \wedge dy)(u, v) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det(u, v)$ comme on l'attendrais intuitivement.