Unicité de la limite

Soit (u_n) une suite qui converge vers l, l', montrons que $l = l'$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a donc:

- On sait qu'il existe N_0 tel que pour tout $n > N_0$, on ait $|u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
- On sait qu'il existe N_1 tel que pour tout $n > N_1$, on ait $|u_n - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Donc pour tout $n > \max(N_0, N_1)$:

$$|l - l'| \leq |l - u_n| + |l' - u_n| < \varepsilon$$

Donc $l = l'$ $\square$

Toute suite convergente est bornée

Soit (u_n) une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$, alors il existe un N_0 tel que pour tout $n > N_0$, on ait:

$$|u_n - l| < 1$$

Or d'aprés la deuxième inégalité triangulaire, on a:

$$|u_n| - |l| \leq |u_n - l| < 1$$

Donc si $n > N_0$, on a $|u_n| < 1 + |l|$.
Aussi, si $n \leq N_0$, alors $|u_n| < \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N_0}|)$.

On note ces deux majorants respectivement M_1, M_2, alors dans tout les cas $|u_n| < \max(M_1, M_2)$ $\square$

Limite de la somme

Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers l, l', montrons que $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors:

- On sait qu'il existe N_0 tel que pour tout $n > N_0$, on ait $|u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
- On sait qu'il existe N_1 tel que pour tout $n > N_1$, on ait $|v_n - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Alors pour $N = \max(N_0, N_1)$, on a que pour tout $n > N$, on a:

$$|u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \varepsilon$$

Et on conclut alors par transitivité. $\square$

Limite du produit avec un scalaire

Soit (u_n) une suite qui converge vers l et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que (λu_n) converge vers λl.

Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe un rang N_0 tel que pour tout $n > N_0$, on ait:

$$|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

Et donc à partir de ce même N_0, on conclut en multipliant l'inégalité par $|\lambda|$ et utilisant les propriétés élémentaires de la valeur absolue. $\square$

Limite du produit

Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers l, l', montrons que $(u_n v_n)$ converge vers ll'.

Soit $\varepsilon > 0$, cherchons une expression de $u_n v_n - ll'$ qui nous permettrait d'utiliser leurs convergences individuelles, alors on a:

$$|u_n v_n - ll'| = |u_n(v_n - l') + u_n l' - ll'| = |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)|$$

Or alors on a:

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \\ &\leq |u_n(v_n - l')| + |l'(u_n - l)| \\ &= |u_n||(v_n - l')| + |l'||(u_n - l)| \end{aligned}$$

Or on sait qu'il existe un rang N_0 tel que pour tout $n > N_0$, on ait $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2|l'|}$.
Aussi, u_n converge donc est bornée par un M réel, et donc il existe un rang N_1 tel que pour tout $n > N_1$, on ait $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Alors pour tout n à partir du rang $\max(N_0, N_1)$, on a alors:

$$\begin{aligned} |u_n||(v_n - l')| + |l'||(u_n - l)| &\leq |u_n|\frac{\varepsilon}{2M} + |l'|\frac{\varepsilon}{2|l'|} \\ &\leq |u_n|\frac{\varepsilon}{2|u_n|} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

Limite de l'inverse

Soit (u_n) une suite qui tends vers $+\infty$, montrons que $(\frac{1}{u_n})$ tends vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$, on sait que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe N_0 tel que pour tout $n > N_0$, on ait:

$$u_n > M$$

Alors en particulier pour $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, il existe N_0 tel que pour tout $n > N_0$, on a:

$$u_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Le passage à l'inverse permet alors de conclure. En particulier, à partir d'un certain rang, u_n n'est jamais nulle et donc le passage à l'inverse est valide. □

Théorème de la limite monotone

Soit u_n une suite croissante et majorée, montrons que u_n converge.

On pose $E := \{u_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$, alors E est majoré par hypothèse, et non-vide car $u_0 \in E$, il admet donc une borne supérieure qu'on notera l.

Soit $\varepsilon > 0$, alors d'aprés la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément $u_{N_0} \in E$ tel que $l - \varepsilon$ ne soit pas un majorant, on a donc:

$$l - \varepsilon < u_{N_0}$$

Or (u_n) est croissante donc pour tout $n > N_0$, on a $u_n > u_{N_0}$, et l majore E donc a fortiori $l + \varepsilon$ majore aussi E, donc pour tout $n > N_0$ on a:

$$l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$$

La suite u_n converge donc bien vers l.

Théorème des suites adjacentes

Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites respectivement croissante et décroissante, avec $u_n \leq v_n$ et $(v_n - u_n) \to 0$, montrons que ces deux suites convergent vers la même limite.

Par la monotonie de ces suites on trouve:

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

En particulier, u_n est croissante et majorée par v_0, donc elle converge vers l. Aussi, v_n est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge vers l'.

De plus on sait que $(v_n - u_n) \to 0$ donc $(v_n - u_n) + u_n = v_n$ tends vers l donc $l = l'$. $\square$

Théorème des gendarmes

Soit $(u_n), (w_n)$ deux suites qui tendent vers $l \in \mathbb{R}$, et (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$, montrons que (v_n) tends vers l.

Soit $\varepsilon > 0$, alors on sait que:

- A partir d'un certain rang N_0, on a $-\varepsilon < w_n - l < \varepsilon$
- A partir d'un certain rang N_1, on a $-\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$

Alors à partir de $N = \max(N_0, N_1)$, on a:

$$-\varepsilon < u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l < \varepsilon$$

Et donc on conclut que $|v_n - l| < \varepsilon$.

$\square$