Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on notera $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée à $P$.

## 15 - Degré de la somme

Soit $P, Q$ des polynomes de degrés respectifs $p, q$ et qu'on note respectivement $(a_n), (b_n)$, alors:

$$P + Q = (c_n) \text{ telle que } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k + b_k$$

Si $p = q$, on a $c_n = 0$ a partir du rang $p + 1$ par définition du degré et donc les indices des termes non nuls sont tous inférieurs à $p$ (et donc à $q$) et on a $\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

Si $p \neq q$, alors on peut considèrer sans perte de généralité que $p < q$.
Tout d'abord, on a $c_n = 0$ a partir du rang $q+1$, et on a $c_q = b_q \neq 0$ donc $\deg(P+Q) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$

## 16 - Degré du produit

Soit $P, Q$ des polynomes de degrés respectifs $p, q$ et qu'on note respectivement $(a_n), (b_n)$, alors:

$$PQ = (c_n) \text{ telle que } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

On a alors:

$$\begin{aligned}
c_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a_k b_{p+q-k} + a_p b_q + \sum_{k=p+1}^{q} a_k b_{p+q-k} && \text{(On sépare la somme en trois.)} \\
&= 0 + a_p b_q + 0 && \text{(Dans la première somme } p + q - k > q \text{ et dans la seconde } k > p) \\
&= 1 && \text{(Car par définition du degré } a_n, b_n \neq 0)
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\deg(PQ) \geq p + q$. Réciproquement, si $k > p + q$:

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{p} a_i b_{k-i} + \sum_{i=p+1}^{k} a_i b_{k-i} \\
&= 0 && \text{(Car le second terme de la première somme est toujours nul et inversement.)}
\end{aligned}$$

En effet, pour la première somme $k - i > q$ et pour la seconde $i > p$.
Donc $\deg(PQ) \leq p + q$ et donc on a bien montré l'égalité. $\square$

## 17 - Caractérisation d'une racine

Montrons la propriété suivante par double implication:

$$\tilde{P}(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) \mid P$$

Supposons que $\tilde{P}(\alpha) = 0$, on sait par le théorème de la division euclidienne qu'il existe des uniques $Q, R \in K[X]$ tels que:

$$P = (X - \alpha)Q + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(X - \alpha) = 1$$

Donc $R$ est un polynome constant, or si on évalue le polynome en $\alpha$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(\alpha) &= (\alpha - \alpha)\tilde{Q}(\alpha) + \tilde{R}(\alpha) \\
&= \tilde{R}(\alpha) \\
&= 0 && \text{(Par hypothèse car } \tilde{P}(\alpha) = 0)
\end{aligned}$$

Donc le reste est bien le polynome nul et on a la première implication.

Réciproquement si $(X - \alpha) \mid P$, par définition, on a $P = (X - \alpha)Q$ dont la fonction polynomiale associée s'annulera bien en $\alpha$. $\square$

## 18 - Nombre maximal de racines

On considère ici que $\deg(P) = n \geq 1$, et on veut montrer que $P$ admet au plus $n$ racines distinctes.

Supposons par l'absurde qu'il admette $p > n$ racines distinctes, qu'on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. D'aprés le théorème fondamental, on sait donc que:

$$\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k) \mid P$$

On a donc $P = \prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)Q$ pour un certain $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ (non-nul car $P$ non-nul) qui est absurde.

En effet le degré du membre de gauche est par hypothèse $n$ et celui du membre de droite est d'au moins $p$ (on a un produit de $p$ monomes de degré 1, donc on applique la formule du degré d'un produit). $\square$

## 19 - Multiplicité au moins $m$

Montrons la propriété suivante par double implication:

$$\text{mult}(\alpha) \geq m \Longleftrightarrow (X - \alpha)^m \mid P$$

Supposons que $\text{mult}(\alpha) = n \geq m$, alors on a:

$$(X - \alpha)^m \mid (X - \alpha)^n$$

Or par définition de la multiplicité on a aussi:

$$(X - \alpha)^n \mid P \qquad \text{ET} \qquad (X - \alpha)^{n+1} \nmid P$$

Finalement en combinant ces informations on a:

$$(X - \alpha)^m \mid (X - \alpha)^n \mid P$$

Et on conclut par transitivé de la relation de divisibilité.

Réciproquement par l'absurde, si on a $(X - \alpha)^m \mid P$ et $n < m$, alors $n + 1 \leq m$, alors on a:

$$(X - \alpha)^{n+1} \mid (X - \alpha)^m \mid P$$

Et donc par transitivité:

$$(X - \alpha)^{n+1} \mid P$$

Ce qui est absurde par définition de la multiplicité. $\square$

## 20 - Caractérisation de la multiplicité I

Montrons la propriété suivante pas double implication:

$$\begin{aligned}\text{mult}(\alpha) = m &\iff P = (X-\alpha)^m Q \quad \text{ET} \quad Q(\alpha) \neq 0 \\ &\iff (X-\alpha)^m \mid P \quad \text{ET} \quad Q(\alpha) \neq 0\end{aligned}$$

Si mult$(\alpha)$ = m, alors par définition cela signifie que:

$$(X-\alpha)^m \mid P \qquad \text{ET} \qquad (X-\alpha)^{m+1} \nmid P$$

Supposons par l'absurde que $Q(\alpha) = 0$, on a alors:

$$P = (X-\alpha)^m Q \text{ avec } Q = (X-\alpha)Q'$$

Et donc $(X-\alpha)^{m+1} \mid P$ ce qui est absurde, donc $Q(\alpha \neq 0)$

Réciproquement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P = (X-\alpha)^m Q$, alors on voit directement que $(X-\alpha)^m$ divise $P$ et si $(X-\alpha)^{m+1}$ divisait $P$, on aurait pour un certain $Q' \in \mathbb{K}[X]$:

$$P = (X-\alpha)^m (X-\alpha) Q'$$

Et donc $Q = (X-\alpha)Q'$ et en particulier $\alpha$ serait une racine de $Q$ ce qui est absurde. $\square$

## 21 - Caractérisation de la multiplicité II

## 22 - Les polynomes complexes sont scindés

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynome complexe, montrons par réccurence sur le degré de $P$ qu'il est scindé, ie montrons que:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \exists a \in \mathbb{C}; \exists z_1, \dots z_n \in \mathbb{C}^n; P_n = a(X-z_1)\dots(X-z_n)$$

Initialisation:
On considère que $P$ est de degré 1, alors d'aprés le théorème de d'Alemenbert-Gauss, il admet une racine $z_1$ et donc $P = a(X-z_1)$ pour un certain $a$ non-nul.

Hérédité:
Supposons $P_k$ vraie pour $k \geq 0$, ie on suppose que tout polynome de degré $k$ s'écrit sous la forme $a(X - z_1)\dots(X-z_k)$.

Soit $P_{k+1}$ un polynome de degré $k+1$, d'aprés le théorème de d'Alembert-Gauss, il admet une racine qu'on notera $z_{k+1}$, et on a alors:

$$P_{k+1} = (X - z_{k+1})Q$$

Avec $Q$ un polynome de degré $k$, alors d'aprés l'hypothèse de récurrence, on a:

$$Q = a(X-z_1)\dots(X-z_k)$$

Et donc par suite:

$$P_{k+1} = a(X-z_1)\dots(X-z_{k+1})$$

$\square$