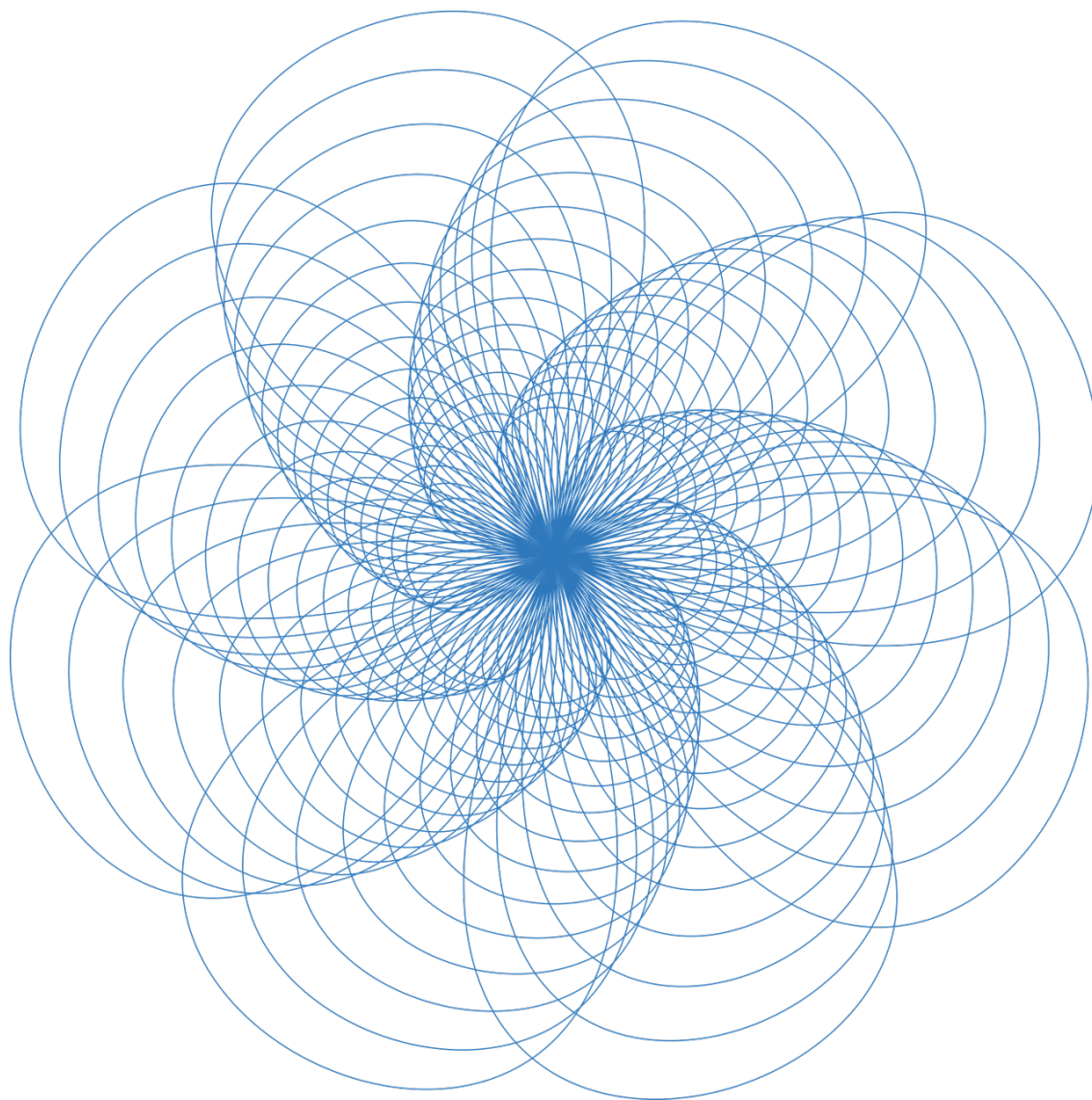


MATHÉMATIQUES

LICENCE



UNIVERSITÉ JEAN-FRANÇOIS CHAMPOLLION
ANNÉE 2022 - 2025

TABLE DES MATIÈRES

I — RAISONNEMENTS

Soit \mathcal{P} une proposition et n un entier naturel.

Disjonctions & Conjonctions :

Si \mathcal{P} est une disjonction de la forme $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, il suffit alors de supposer **l'une des deux propriétés fausse** et de montrer que l'autre est vraie.

Si \mathcal{P} est une conjonction de la forme $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, il faut simplement prouver \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Raisonnements par l'absurde :

Raisonnement par l'absurde revient à utiliser le principe du **tiers exclu**, ie l'axiome qui affirme que la proposition ci-dessous est toujours vraie:

$$\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}$$

Donc si on veut prouver \mathcal{P} , on peut alors simplement montrer que $\neg \mathcal{P} \implies \perp$ avec " \perp " comme notation d'une contradiction logique. Alors on peut conclure d'après l'axiome du tiers exclu que \mathcal{P} est vraie.

Raisonnement par Analyse / Synthèse :

Le raisonnement par Analyse / Synthèse permet de déterminer **l'ensemble des solutions d'un problème**, il s'effectue en deux étapes, tout d'abord l'étape d'analyse suppose qu'une telle solution existe, alors on circonscrit son existence à des propriétés connues qu'elle vérifie nécessairement. Cette étape permet de "cerner" les solutions en question. Si les propriétés sont assez contraignantes, alors on peut même prouver **l'unicité**, ie l'ensemble des solutions se réduit à un singleton.

Puis lors de l'étape de synthèse, on considère un objet vérifiant les propriétés qu'on a utilisé lors de l'étape d'analyse, et on **vérifie** que cet objet est bien une solution au problème initial. C'est lors de cette étape qu'on prouve bien **l'existence** de solutions. Si aucun des objets circonscrits par l'analyse ne conviennent, le problème n'a alors pas de solutions.

Implications & Équivalences :

Si \mathcal{P} est une implication de la forme $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$, on a les équivalences suivantes:

$$\mathcal{P} \iff \neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \iff \neg \mathcal{B} \implies \neg \mathcal{A}$$

Aussi en raisonnant **par l'absurde**, il suffit alors de prouver:

$$\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B} \implies \perp$$

Il est important de noter que l'implication **n'est pas une opération associative**, en effet, soit une propriété de la forme:

$$\mathcal{A}_1 \implies \mathcal{A}_2 \implies \mathcal{A}_3$$

Alors de manière générale, on a:

$$\mathcal{A}_1 \implies (\mathcal{A}_2 \implies \mathcal{A}_3) \not\iff (\mathcal{A}_1 \implies \mathcal{A}_2) \implies \mathcal{A}_3$$

Prouver une équivalence revient à prouver une **double implication** dans la majorité des cas.

Cas particulier : Si \mathcal{P} est de la forme $\mathcal{A}_1 \iff \mathcal{A}_2 \iff \dots \iff \mathcal{A}_{n-1} \iff \mathcal{A}_n$, il suffit alors de montrer:

$$\mathcal{A}_1 \implies \mathcal{A}_2 \implies \dots \implies \mathcal{A}_{n-1} \implies \mathcal{A}_n \implies \mathcal{A}_1$$

Ainsi pour toute paire de \mathcal{A}_i , on a bien double implication entre les deux membres et donc la chaîne d'équivalence est démontrée.

Raisonnements par récurrence :

Soit \mathcal{P} une propriété dépendante de n qu'on veut démontrer sur $\llbracket \alpha ; +\infty \rrbracket$, soit k en entier fixé supérieur à α , démontrer \mathcal{P} par récurrence simple revient à utiliser **l'axiome de récurrence** (issu de la construction de \mathbb{N}) ci-dessous:

$$\left[\mathcal{P}_\alpha \wedge [\mathcal{P}_k \implies \mathcal{P}_{k+1}] \right] \implies \forall n \in \mathbb{N} ; \mathcal{P}_n$$

Si la propriété à prouver est plus complexe, on peut avoir besoin de récurrences d'une autre type, en effet si \mathcal{P} dépend **des deux rangs précédents**, et on utilise alors une récurrence à deux pas qui s'exprime:

$$\left[\mathcal{P}_\alpha \wedge \mathcal{P}_{\alpha+1} \wedge [\mathcal{P}_{k-1} \wedge \mathcal{P}_k \implies \mathcal{P}_{k+1}] \right] \implies \forall n \in \mathbb{N} ; \mathcal{P}_n$$

Enfin pour le cas limite, si \mathcal{P} dépend **d'exactement tout les rangs précédents**, alors on peut utiliser une récurrence forte qui s'exprime:

$$\left[\mathcal{P}_\alpha \wedge [\mathcal{P}_{\alpha+1} \wedge \dots \mathcal{P}_{k-1} \wedge \mathcal{P}_k \implies \mathcal{P}_{k+1}] \right] \implies \forall n \in \mathbb{N} ; \mathcal{P}_n$$

Un dernier type de récurrence appelé **récurrence limitée** permet simplement d'utiliser la récurrence sur un intervalle entier fini, et donc on initialise et on prouve l'hérédité avec la contrainte de cette intervalle.

Remarque sur la récurrence forte :

Une telle récurrence forte ne nécessitera qu'une **unique** initialisation pour compléter l'hérédité.

D'un point de vue heuristique, il peut arriver d'engager une récurrence forte sur un problème qui n'aurait nécessité qu'une récurrence à p pas.

Ce cas précis reviendra alors, lors de l'étape d'hérédité, à **ne pas utiliser l'ensemble de l'hypothèse de récurrence**, et alors il faudra modifier le nombre d'initialisation à réaliser et l'intervalle de notre hypothèse de récurrence.

Admettons que \mathcal{P}_α soit vraie, supposons qu'elle soit vraie sur $\llbracket \alpha ; k \rrbracket$. Alors, on doit montrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.

Alors, selon **le plus petit rang** nécessaire à compléter l'hérédité, on a:

Si on a besoin de \mathcal{P}_k alors **on se ramène à une récurrence simple.**

Si on a besoin de \mathcal{P}_{k-1} alors **on se ramène à une récurrence double.**

Si on a besoin de \mathcal{P}_{k-2} alors **on se ramène à une récurrence triple.**

.....

Et donc, les initialisations et l'intervalle de notre hypothèse de récurrence changeront en conséquence et on remarque alors que si le plus petit rang nécessaire est \mathcal{P}_{k-p} , alors on se ramène nécessairement à une **récurrence à p pas**, avec p initialisations et l'hypothèse de récurrence qui commence à $\alpha + p$.

Une récurrence forte n'est alors qu'une récurrence qui nécessite des hypothèses sur **tout les rangs précédents**.

Récurrences imbriquées :

Soit $\mathcal{P}_{n,m}$ une propriété qui dépend **de deux variables entières**, alors on pourrait prouver $\mathcal{P}_{n,0}$ par récurrence et alors cela constituerait l'initialisation d'une récurrence imbriquée qui supposerait par exemple $\mathcal{P}_{n,k}$ vraie pour prouver $\mathcal{P}_{n,k+1}$.

I — ENSEMBLES

Soit E un ensemble de parties. On munit cet ensemble des opérations élémentaires d'union, d'intersection ainsi que de complémentation définies pour toutes familles d'ensembles $(A_i)_I$ par:

- **Union:** $x \in \bigcup_i A_i \iff \exists i \in I ; x \in A_i$
- **Intersection:** $x \in \bigcap_i A_i \iff \forall i \in I ; x \in A_i$
- **Complémentaire:** $x \in A^c \iff x \notin A$

Ces opérations sont compatibles entre elles au sens où elle sont distributives l'une sur l'autre et associatives (pour une suite d'un seul type d'opération, si il y a mélange d'intersections et d'unions, on n'a pas associativité).

Inclusion :

On définit une **relation d'ordre** sur l'ensemble des parties de E appelée inclusion, elle est **réflexive, transitive et antisymétrique**. Si l'inclusion est stricte, on parle de **sous-ensemble propre**. En particulier, les opérations élémentaires préservent l'inclusion, en effet si $F \subseteq G$, on a:

$$\begin{aligned} F \cap X &\subseteq G \cap X \\ F \cup X &\subseteq G \cup X \end{aligned}$$

Néanmoins la complémentation inverse l'inclusion:

$$F^c \subseteq E^c$$

Complémentaire et différence :

On peut montrer deux propriétés fondamentales du complémentaire appelées **lois de De Morgan** qui nous donnent:

$$\begin{aligned} (E \cap F)^c &= E^c \cup F^c \\ (E \cup F)^c &= E^c \cap F^c \end{aligned}$$

On peut aussi raffiner la notion de complémentaire en définissant **la différence ensembliste** pour tout partie $F, G \subseteq E$, on pose:

$$F \setminus G = F \cap G^c$$

Cas particulier : On peut aussi définir l'opération de **différence symétrique** notée Δ qui permet d'obtenir tout les éléments qui appartiennent exactement à un seul des deux ensembles:

$$E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$$

Produit cartésien :

Soit n une entier naturel, le produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}, E_n$ est l'ensemble des n -uplets de la forme $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ avec $e_i \in E_i$ pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$. Il y a **unicité** de ces n -uplets. Plus formellement, on note:

$$\prod_{i=1}^n E_i = \left\{ (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n) ; e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \dots, e_n \in E_n \right\}$$

Le produit cartésien est distributif sur l'union et l'intersection ie si on note \star une de ces deux opérations, on a:

$$A \times (B \star C) = (A \times B) \star (A \times C)$$

Cardinalité :

Supposons que E et F tout deux inclus dans X et ayant **un nombre fini d'éléments**. On a alors différentes propriétés:

$$\begin{aligned}|E \cup F| &= |E| + |F| - |E \cap F| \\ |E \times F| &= |E| \times |F| \\ |E^c| &= |X| - |E| \\ |\mathcal{P}_E| &= 2^{|E|}\end{aligned}$$

Partitions et recouvrements:

Soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de parties **non vides et deux à deux disjointes** de E .

On dit que (P_i) est une **partition** de E si et seulement si:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i = E$$

On remarque immédiatement deux partitions singulières:

- La famille contenant uniquement E qu'on appelle **partition grossière**.
- La famille contenant tout les singletons de E qui est la partition **la plus fine**.

On peut donc intuitivement parler de **finesse** d'une partition, en regard de la taille des parties de la famille.

On peut généraliser le concept de partition à celui de **recouvrement**, alors E ne nécessite que d'être contenu par l'union des (P_i) .

Algèbre de Boole :

On peut montrer que l'ensemble **ordonné** des parties de E muni de l'union, l'intersection, le complémentaires forment une **Algèbre de Boole**.

Cela signifie que la structure $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, X^c)$ vérifie les axiomes suivants:

- Les deux opérations binaires sont **associatives, commutatives et distributives l'une sur l'autre**.
- Les deux opérations binaires sont **idempotentes**.
- **L'élément neutre** pour l'union est l'ensemble vide, et pour l'intersection l'ensemble E .
- **L'élément absorbant** pour l'union est l'ensemble E , et pour l'intersection l'ensemble vide.
- Le complémentaire est **involutif**.
- L'intersection d'un élément et de son complémentaire est **vide**.
- L'union d'un élément et de son complémentaire est **l'ensemble tout entier**.
- Les **lois de De Morgan** sont vérifiées.

De manière analogue, en considérant $\{0, 1\}$ comme les valeurs de vérité d'une proposition, on a:

La structure $(\{0, 1\}, \vee, \wedge, \neg)$ est aussi une algèbre de Boole.

Cette structure est à la base de la logique formelle et vérifie les même axiomes que l'algèbre de l'ensemble des parties d'un ensemble.

I — RELATIONS

Une **relation** entre des objets d'un ensemble est une propriété que vérifient ces objets **entre eux**. Les relations sont des objets **fondamentaux** en mathématiques, elles sont entre autres des objets primitifs de la théorie des ensembles.

On appelle **arité** le nombre d'éléments mis en jeu par la relation.

Par exemple une relation d'arité 2 est appelée **relation binaire** et met en jeu deux éléments. On définit ainsi le cas général de relation **n-aire** qui met en jeu n éléments $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ et on note:

$$\mathcal{R}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

Par abus de langage, on appelle **classe** un ensemble d'ensembles.

Formellement une classe n'est pas un ensemble mais un élément primitif de la théorie ZFC, mais ici on verra qu'on appelle classe des objets qui **sont** des ensembles.

Zoologie :

Il existe un grand nombre de relations très connues et élémentaires, par exemple:

- La relation d'appartenance à un ensemble
- La relation d'égalité
- La relation d'ordre
- La relation d'inclusion
- La relation de congruence
- La relation de parallélisme de deux droites du plan

On peut remarque que la relation d'appartenance à un ensemble est une relation binaire fondamentale, à la base de la théorie des ensembles.

Relations binaires :

Soit $x, y, z \in E$, une relation entre deux éléments peut vérifier plusieurs propriétés remarquables:

- | | |
|--|---|
| • Réflexivité : $\mathcal{R}(x, x)$ | • Irréflexivité : $\mathcal{R}(x, x)$ |
| • Symétrie : $\mathcal{R}(x, y) \implies \mathcal{R}(y, x)$ | • Antisymétrie : $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x) \implies x = y$ |

Elle peut aussi être **transitive**:

$$\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \implies \mathcal{R}(x, z)$$

On appelle aussi relation **totale** une relation telles si pour toute paire d'éléments, on a $\mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{R}(y, x)$.

Relations d'ordre :

Une **relation d'ordre** est une relation **réflexive, antisymétrique et transitive**. Elle induit un ordre sur l'ensemble E , qui peut potentiellement être **total**.

Des relations d'ordre très connues sont la relation \leq sur les ensembles de nombres ou la relation \subseteq sur l'ensemble des parties de E .

On appelle relation de **préordre** toute relation d'ordre qui n'est pas antisymétrique. Intuitivement, une relation de préordre est une relation d'ordre à "équivalence près" des éléments.

Relations d'équivalence :

Une **relation d'équivalence** est une relation **réflexive, symétrique et transitive**. Intuitivement, elle met en relation les éléments des ensembles qui sont "similaires".

Des relations d'équivalence très connues sont la relation $=$ et \equiv sur les ensembles de nombres, ou encore la relation \sim sur l'ensemble des fonctions.

Classes d'équivalence :

Soit (E, \sim) un ensemble muni d'une relation d'équivalence.

Les **classes d'équivalence** de E par rapport à la relation \sim sont alors les parties de E contenant des éléments en relation.

Soit $x \in E$, on définit alors la **classe d'équivalence** de x et on note $[x]$ l'ensemble:

$$[x] := \{ \alpha \in E ; \alpha \sim x \}$$

D'après les propriétés de la relation, on a alors:

$$x \sim y \iff [x] = [y]$$

Et on appelle **représentant** de $[x]$ tout élément qui appartient à $[x]$.

Ensembles quotient :

L'ensemble des classes d'équivalence de E forme alors une **partition** de E , et on l'appelle alors **ensemble quotient**:

$$E/\sim := \{ [x] \in \mathcal{P}(E) ; x \in E \}$$

On a alors une application $\pi : x \in E \mapsto [x] \in E/\sim$ appelée **surjection canonique** qui associe sa classe à tout élément.

Travailler avec l'ensemble quotient revient alors à **identifier** les éléments équivalents entre eux. C'est une opération fondamentale dans tout les domaines des mathématiques, en effet par exemple on pourra comprendre (à l'aide du chapitre suivant) que si on a une application $f : E \rightarrow F$ et qu'on définit sur E la relation d'équivalence:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Alors on a identifié les éléments gênants l'injectivité et on a donc obtenu une bijection entre E/\sim et F , ie on a le modèle primitif du **premier théorème d'isomorphisme**:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \downarrow & & \uparrow \iota \\ E/\sim & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \text{Im}(f) \end{array}$$

I — APPLICATIONS

On appelle **application** un cas particulier de relation entre deux ensembles, soit f, g deux applications telles que:

$$\begin{array}{ll} f : E \longrightarrow F & g : G \longrightarrow H \\ x \longmapsto f(x) & x \longmapsto g(x) \end{array}$$

Si $F \subseteq G$, alors on définit la **composée** $g \circ f$ par la fonction $h : x \in E \longmapsto g(f(x)) \in H$. On note alors E^F l'ensemble des **applications** de E vers F .

Cas des suites :

Une suite à valeurs dans E n'est alors qu'un cas particulier en la forme d'une fonction $u : \mathbb{N} \longrightarrow E$, ce sont des objets d'étude très importants en analyse et notamment en topologie. Dans le cas des suites on peut définir la notion de **suite extraite**, car si u_n est une suite dans E et k_n est **suite d'entiers croissante**, alors on définit une suite extraite de u_n par:

$$u \circ k : \mathbb{N} \longrightarrow E$$

C'est simplement les termes de la suite u_n dont on ne choisit que les termes d'indices donnés par k_n .

Graphe :

On définit le **graphe** de f comme suit:

$$G_f := \left\{ (x, f(x)) \in E \times F ; x \in E \right\}$$

Intuitivement, c'est l'ensemble des couples d'éléments, des points, qui caractérise uniquement la fonction.

Restrictions & Prolongements :

On note $f|_A$ la restriction de l'**ensemble de départ** de f à une partie A de E .

On note $f|_B$ la restriction de l'**ensemble d'arrivée** de f à une partie B de F .

Soit $x \in D_f$, on appelle **prolongement** de f , l'application g telle que $D_f \subset D_g$ et $g(x) = f(x)$

Image directe :

Une fonction induit canoniquement une autre fonction sur l'ensemble des parties, notée aussi f , qui à chaque partie associe la partie **image directe**, ie pour toute partie A de E on définit:

$$f(A) := \left\{ f(x) ; x \in A \right\}$$

L'image directe est compatible avec **certaines opérations ensemblistes**, plus précisément:

- **Intersection:** $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- **Union:** $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

Image Réciproque :

Toute fonction induit aussi une autre fonction sur l'ensemble des parties qui à chaque partie associe la partie **image réciproque**, ie pour toute partie A de E on définit:

$$f^{-1}(B) := \left\{ x \in A ; f(x) \in B \right\}$$

L'image réciproque est compatible avec **toutes les opérations ensemblistes**, plus précisément:

- **Intersection:** $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- **Union:** $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Injections :

L'application f est dite **injective** si et seulement si:

$$\forall x_1, x_2 \in E^2 ; f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Avoir une injection de $E \longrightarrow F$ permet **d'identifier une partie de F à E** . Réciproquement, la non-injectivité représente le fait que la fonction détruit de l'information ¹, ou alors que l'espace d'arrivée est trop petit.

Si on considère une composée $g \circ f$ injective alors on peut montrer que f est nécessairement injective. L'injectivité est stable par composition.

Surjections :

L'application f est dite **surjective** si et seulement si:

$$\forall y \in F , \exists x \in E ; f(x) = y$$

Avoir une surjection de $E \longrightarrow F$ permet **d'identifier une partie de E à F** . Réciproquement, la non-surjectivité indique que la fonction transporte trop peu d'informations, ou que l'espace d'arrivée est trop grand.

Si on considère une composée $g \circ f$ injective alors on peut montrer que g est nécessairement surjective. La surjectivité est stable par composition.

Bijections :

L'application f est bijective si et seulement si elle est surjective et injective. Dans ce cas, **une application réciproque g existe et elle vérifie:**

$$\begin{cases} f \circ g &= Id_F \\ g \circ f &= Id_E \end{cases}$$

Réciproquement, si il existe une application g telle que f soit inversible à gauche et à droite par g , alors f est bijective. Aussi la bijectivité est stable par composition.

Equipotence & Cardinalités :

On peut étendre la notion de cardinalité d'un ensemble fini via la notion d'application, en particulier on dira que pour tout ensembles A, B , alors:

- Si il existe une injection $f : E \longrightarrow F$, alors on a nécessairement $|E| \leq |F|$
- Si il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$, alors on a nécessairement $|E| \geq |F|$

Si il existe une bijection de E vers F , alors on dit que ces ensembles sont **équipotents**, et on a:

$$|E| = |F|$$

Cette définition du cardinal par les bijections permet de parler de cardinal d'un ensemble dans le cas **infini**. En particulier:

- Si il existe une bijection entre \mathbb{N} et E , on dit que E est **dénombrable**² et on note $|E| = \aleph_0$
- Si il existe une bijection de \mathbb{R} dans E , alors on dit que E est **indénombrable** et on note $|E| = \aleph_1$

Dans notre cadre théorique (ZFC), il n'existe aucun ensemble dont le cardinal se situerait entre \aleph_0 et \aleph_1 , c'est **l'hypothèse du continu**.

¹Dans le sens où si deux valeurs différentes ont la même image, on ne peut plus les distinguer à l'arrivée.

²En fait, une injection suffit car on considérera par la suite que les ensembles finis sont dénombrables.

I — DÉNOMBREMENT

Soit E un ensemble, on dit que E est **fini** si il existe une bijection de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ sur E .

On considère maintenant que E est fini, dénombrer E consiste à déterminer sa cardinalité. Informellement il s'agit souvent de compter le nombre **d'issues possibles** d'une situation donnée, on dispose alors de trois grands modèles, les **listes**, les **arrangements** et les **combinaisons**.

Listes

On appelle **liste** à p éléments de E un p -uplet constitué d'éléments de E , c'est à dire **un élément du produit cartésien** E^p on remarque alors la propriété:

Dans une liste, l'ordre compte et les répétitions sont possibles

On peut alors montrer que le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est p^n

Arrangements

On appelle **arrangement** toute liste à p éléments **distincts** de E , on remarque alors:

Dans un arrangement, l'ordre compte mais les répétitions sont impossibles

On note alors A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments et on a:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Et on peut alors montrer que le nombre d'applications **injectives** d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est A_n^p .

Un arrangement de la forme A_n^n est appelée une **permutation** de E qui est simplement donnée par $n!$, c'est aussi le nombre de **bijections** de E dans E .

Combinaisons

On appelle **combinaison** de p éléments tout **partie** de E à p éléments, on remarque alors:

Dans une combinaison, l'ordre ne compte pas et les répétitions sont impossibles

On appelle alors **coefficient binomial** et on note $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments et on a:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On peut remarquer que le nombre de parties à p éléments de E est exactement le nombre d'arrangements à p éléments de E auquel on retire toutes les permutations des p éléments choisis, ce qui revient exactement à **retirer la contrainte d'ordre**.

Propriétés du coefficient binomial

Le coefficient binomial possède plusieurs propriétés intéressantes, on peut tout d'abord remarquer une **symétrie** évidente mais aussi:

$$\text{Formule de Pascal: } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad \text{Formule du capitaine: } p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

La **formule de Pascal** se comprend si on considère un élément fixé de l'ensemble et qu'on dénombre tout ceux qui le contiennent, et les autres, ie:

Le nombre de parties à p éléments est exactement la somme du nombre de parties qui ne contiennent pas un certain x et du nombre de parties qui contiennent ce x .

La **formule du capitaine** se comprend si on considère le choix d'une équipe sportive de p joueurs (dont un capitaine) parmi un groupe de n candidats:

Choisir une équipe de p joueurs puis un capitaine parmi les p joueurs revient à choisir un capitaine parmi les n candidats, puis les $p-1$ joueurs restants.

Enfin on a aussi:

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments est donc exactement la somme des parties qui ont respectivement $1, 2, \dots, n$ éléments.

Généralisation

On peut remarquer que le coefficient binomial est le nombre de partitions en deux parties de E telles que le cardinal de la première soit p . Par exemple si on considère les partitions de $E := \{1, 2, 3\}$ en deux parties dont la première ait 1 élément, on remarque qu'il y a 3 telles partitions:

$$P = (\{1\}, \{2, 3\}) \text{ ou } (\{2\}, \{1, 3\}) \text{ ou } (\{3\}, \{1, 2\})$$

On peut alors généraliser cette idée et définir le **coefficient multinomial** $\binom{n}{k_1, \dots, k_p}$ qui sera le nombre de partitions en p parties telles que la p -ième partie soit de cardinal k_p avec la somme des k_p **qui soit égale au cardinal total**:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_p} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!}$$

Pour fixer les idées on remarque que si $p = 2$ on a bien notre coefficient binomial usuel¹²:

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \binom{n}{k_1, n-k_1} = \binom{n}{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!}$$

On peut alors utiliser ce coefficient multinomial, pour compter le nombre d'anagramme d'un mot de n lettres avec m lettres distinctes répétées k_m fois, ou encore le nombre de façon de mettre n objets dans m boites qui peuvent en contenir k_m .

Par exemple, le nombre d'anagrammes de MISSISSIPI est donné par $\binom{11}{1,4,4,1} = \frac{11!}{4!4!} = 34650$

On peut même pour définir la **formule du multinôme de Newton** qui généralise celle du binôme:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p}$$

¹La première égalité vient de la contrainte sur la somme des k_p .

²La seconde égalité se comprend par symétrie, compter le nombre de partitions en deux parties dont la première contient k_1 éléments revient à compter le nombre de parties à k_1 éléments et le reste sera nécessairement dans la seconde partie.

I — ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

Dans ce chapitre on énonce quelques définitions et propriétés arithmétiques simples dans \mathbb{Z} , qui seront généralisées plus tard dans le chapitre d'algèbre au cas général. Dans cet ensemble on peut définir une relation d'ordre de divisibilité définie par:

$$a|b \iff \exists k \in \mathbb{Z} ; b = ak$$

On dira alors que b est un multiple de a et que a divise b . On notera $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n et $n\mathbb{Z}$ l'ensemble de ses multiples. Une première propriété très utile de cette relation et que si a divise b, c alors pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$ on a:

$$a|nb + mc$$

Division Euclidienne :

Soit $a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on peut montrer qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ avec $r < |b|$ tel que:

$$a = bq + r$$

On appelle alors cette décomposition **la division euclidienne** de a par b . La preuve se fait par l'exhibition de l'algorithme bien connu.

Plus grand diviseur commun :

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ non simultanément nuls, alors le pgcd est l'entier $a \wedge b$ qui vérifie:

$$a \wedge b := \max \{n \in \mathbb{N} ; n|a \text{ et } n|b\}$$

Alors on l'appelle **plus grand diviseur commun** de a et de b et on le note $a \wedge b$. On peut alors monter plusieurs propriétés de cette quantité:

- **Maximalité:** Si d est un diviseur commun de a, b alors $d|a \wedge b$.
- **Réduction:** On peut réduire le pgcd par division euclidienne, ie $a \wedge b = b \wedge r$.

On peut alors définir la notion de deux entier n, m **premiers entre eux** par le fait que $n \wedge m = 1$.

Plus petit commun multiple:

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ non simultanément nuls, alors le ppcm est l'entier $a \vee b$ qui vérifie:

$$a \vee b := \min \{n \in \mathbb{N} ; a|n \text{ et } b|n\}$$

Alors on l'appelle **plus petit commun multiple** de a et de b et on le note $a \vee b$. On peut alors monter plusieurs propriétés de cette quantité:

- **Minimalité:** Si d est un multiple commun de a, b alors c'est un multiple de $a \vee b$.

Identité de Bézout :

Soit $a, b \in \mathbb{Z}^2$, on peut montrer par une extension de l'algorithme d'Euclide appelé **algorithme d'Euclide étendu**¹ qu'il existe deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}^2$ tels que:

$$au + bv = a \wedge b$$

Il existe donc une combinaison linéaire (à coefficients entiers) de a, b qui donne leur PGCD.

¹En effet remonter l'algorithme par substitution permet d'écrire le dernier reste non nul, le pgcd, comme combinaison linéaire des deux nombres de départ.

Lemme de Gauss :

Soit 3 entiers $a, b, c \in \mathbb{Z}$, alors grâce à l'identité de Bézout, on peut montrer le **lemme de Gauss**:

$$\begin{cases} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies a \mid c$$

Nombres premiers :

On appelle nombres premiers tout nombre différent de 1 qui n'admet aucun diviseur. Il existe une infinité de nombres premiers et on a le **théorème de décomposition**:

$$\forall n \in \mathbb{Z} ; n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

Où $v_p(n) = \max \{k \in \mathbb{N} ; p^k \mid n\}$ est appelée **valuation p-adique** de n .

Indicatrice d'Euler :

En algèbre, il sera utile de connaître le **nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n** , pour ceci on définit la **fonction indicatrice d'Euler** par:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

Le produit se faisant sur tout les diviseurs premiers distincts de n . L'utilité de cette fonction vient de la propriété suivante que justement $\phi(n)$ est exactement le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n .

Exemple: $\varphi(30) = \varphi(2 \times 3 \times 5) = 30 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 30 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 8$

II — INTRODUCTION

On appelle **structure algébrique** un ensemble muni d'une (ou plusieurs) opérations appelées **lois**, c'est l'étude de telles structures mathématiques, des relations entre celles-ci (que nous appelleront morphismes), et de leurs propriétés que nous appelleront **algèbre générale**.

Soit E un ensemble non-vide, on appelle **loi de composition interne** une opération binaire sur les éléments de E (qu'on notera temporairement \star) telle que:

$$\forall a, b \in E ; a \star b \in E$$

Soit K un ensemble non-vide, on appelle **loi de composition externe** une opération binaire entre un élément de K et un élément de E (qu'on notera temporairement \cdot) telle que:

$$\forall \lambda, a \in K \times E ; \lambda \cdot a \in E$$

Soit $a \in E$, alors on peut aussi rencontrer dans les structures usuelles des éléments remarquables qui peuvent exister ou non:

- On dira que $e \in E$ est un **élément neutre** pour la loi si $\forall a \in E ; a \star e = e \star a = a$
- On dira que $a^{-1} \in E$ est **l'inverse** de a pour la loi si $a^{-1} \star a = a \star a^{-1} = e$

Ces éléments, si ils existent, sont alors **uniques**.

Monoïdes :

Soit M un ensemble qu'on munit d'une **loi de composition interne**, alors le couple (M, \star) est appelé un **magma**, c'est la structure algébrique primitive la plus faible, en effet la seule contrainte étant que la loi soit interne.

On peut alors enrichir la structure de magma par les deux contraintes supplémentaires suivantes:

- La loi est **associative**.
- Il existe **un élément neutre** pour la loi.

Cette structure plus riche, qu'on appelle **monoïde** nous permet alors d'identifier des exemples remarquables:

- Les entiers naturels munis de l'addition forment un monoïde.
- L'ensemble des chaînes de caractères muni de la concaténation forme un monoïde.

Les éléments neutres respectifs de ces exemples sont $0_{\mathbb{N}}$ et la chaîne de caractère vide.

Sous-structures :

Une fois une structure algébrique définie sur E , on peut alors s'intéresser aux parties de E qui conservent cette structure, on les appellera alors **sous-structures** de E .

En particulier, on dira que F est une **sous-structure** de E (et on notera $F < E$) si elle vérifie:

- La partie F est stable par les lois.
- Les éléments neutres¹ appartient à F
- Les inverses² des éléments de F appartient à F

On montre alors facilement que **l'intersection** de deux sous-structures est aussi une sous-structure mais que l'union de deux sous-structures n'est en général pas une sous-structure.

¹Si la structure impose leur existence

²Si la structure impose leur existence

Sous-structure engendrée :

On se donne une partie A de E , on peut alors définir la **sous-structure engendrée** par A . Si on considère $(V_i)_{i \in I}$ la famille des sous-structures de E qui contiennent A , alors on pose:

$$\langle A \rangle = \bigcap_{i \in I} V_i$$

C'est alors clair que c'est la plus petite sous-structure (pour l'inclusion) qui contienne A et on peut alors la caractériser par la propriété suivante:

C'est l'ensemble des combinaisons finies obtenues par applications des lois sur des éléments de A .

Morphismes :

Soit (E, \star) et (F, \cdot) deux ensembles munis de la même structure¹ et $\varphi : M \rightarrow N$, alors φ est appelé **morphisme**, si il vérifie:

$$\forall x, y \in E ; \varphi(x \star y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Les morphismes préservent dans une certaine mesure la structure opératoire.

En termes de vocabulaire, on définit alors:

- **Les endomorphismes** comme les morphismes de M dans lui-même.
- **Les isomorphismes** comme les morphismes bijectifs.
- **Les automorphismes** comme les morphismes bijectifs de M dans lui-même.

La recherche d'isomorphismes est un thème principal en algèbre des structures, en effet, trouver un isomorphisme entre une structure simple et une structure complexe permet de mieux comprendre cette dernière par l'intermédiaire du morphisme.

Propriétés des morphismes :

Pour une structure donnée, on peut montrer que la composée de morphismes et l'inverse d'un morphisme bijectif est un morphisme. En outre on peut caractériser la structure des images directes et réciproques par un morphisme:

L'image et la préimage d'une sous-structure par un morphisme est une sous-structure.

Par ailleurs si $F = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ est un sous groupe de E et que ϕ est un morphisme, on a que:

$$\phi(H) = \langle \phi(h_1), \dots, \phi(h_n) \rangle$$

En d'autres termes, **l'image des générateurs engendre l'image.**

Structures Quotients :

On considère maintenant un ensemble quotient E/\sim tel que E soit muni d'une structure, on cherche alors une condition sur la relation d'équivalence pour que **la structure soit conservée au passage au quotient**. On peut alors montrer que c'est le cas si et seulement si \sim est **compatible** avec les lois, ie que pour toute loi \star , on ait:

$$x_1 \sim x_2 \text{ et } y_1 \sim y_2 \implies x_1 \star y_1 \sim x_2 \star y_2$$

Alors la **surjection canonique** est un morphisme $\pi : E \rightarrow E/\sim$ qui à chaque élément associe sa classe d'équivalence pour la relation.

¹Si les structures présentent plusieurs lois, alors les morphismes doivent vérifier la compatibilité pour **toutes les lois**. Aussi dans le cas particulier de structures qui requièrent l'existence d'un élément neutre, l'image de l'élément neutre de la structure de départ doit être celui de celle d'arrivée.

II — GROUPES

Soit G un ensemble **non-vidé** muni d'une loi de composition interne associative¹ telle que:

- Il existe un **élément neutre** pour la loi.
- Tout élément de G admet un **inverse** pour la loi.

Alors le couple (G, \star) est appelé **groupe**. De plus si le groupe est **commutatif**, on dira alors que c'est un groupe **abélien**.

On appellera **ordre du groupe** le cardinal (potentiellement infini) de l'ensemble sous-jacent, noté $|G|$.

Exemples :

On peut alors considérer plusieurs groupes remarquables:

- Les **entiers relatifs** muni de l'addition usuelle.
- Les **isométries du plan** muni de la composition, on l'appelle le **groupe diédral**.
- Les **matrices inversibles** muni de la multiplication, on l'appelle le **groupe linéaire**.
- Les **bijections** sur un ensemble muni de la composition, on l'appelle le **groupe symétrique**.

Morphismes de groupes :

Soit G, H deux groupes et $\varphi : G \rightarrow H$, l'existence d'un élément neutre nous permet de définir alors le **noyau d'un morphisme** par:

$$\text{Ker}(\varphi) := \left\{ x \in G ; \varphi(x) = e_H \right\}$$

On montre facilement que c'est un sous-groupe (normal) et on peut alors montrer qu'un morphisme est **injectif si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre**.

Sous-groupes :

Les sous-structures dans le cas des groupes sont naturellement les sous-groupes. On peut alors caractériser le **sous-groupe engendré** par H (défini au premier chapitre) par:

$$\langle H \rangle := \left\{ h_1^{k_1} h_2^{k_2} \dots h_n^{k_n} ; n \in \mathbb{N}, h_i \in H, k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

On peut alors considérer le sous-groupe engendré par un élément $h \in H$, en effet on a:

$$\langle h \rangle := \left\{ h^k ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

On peut alors définir l'**ordre d'un élément** comme étant l'ordre du sous-groupe engendré associé (potentiellement infini).

Ce sous-groupe permet de définir des groupes remarquables, en effet si un groupe est engendré par un unique élément, il est appelé **groupe cyclique** dont nous parleront plus loin dans ce chapitre.

¹Dans la suite, la loi de composition des groupes sera notée multiplicativement sauf exceptions.

Classes :

On considère maintenant un sous-groupe $H \leq G$, alors on peut définir deux relations d'équivalences sur G par:

$$\begin{cases} g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H ; g_1 = g_2 h \\ g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H ; g_1 = h g_2 \end{cases}$$

On appelle alors **classe à gauche** (resp. classe à droite) les classes d'équivalences pour ces deux relations et on note alors gH (resp. Hg) la classe d'un élément g pour cette relation. On note alors G/H l'ensemble quotient associé aux classes à gauche.

Théorème de Lagrange :

Ces classes induisent donc une partition de G en classes **de même cardinal**, en effet:

$$|gH| = |\{gh ; h \in H\}| = |H|$$

En outre on a une bijection qui associe à chaque élément de g sa classe et l'élément de H lui correspondant:

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow (G/H, H) \\ g &\longmapsto (gH, h) \end{aligned}$$

Ceci nous permet donc de montrer le **théorème de Lagrange** qui nous donne que pour tout groupe fini G , on a:

$$|G| = |G/H||H|$$

Et comme corollaire immédiat que **le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe**.

Sous-groupes normaux :

On cherche alors à caractériser les sous-groupes tels que la relation d'équivalence définie ci-dessous soit **compatible** avec les opérations de groupe, en d'autres termes on cherche à définir un groupe quotient pour cette relation. On peut alors montrer que les sous-groupes vérifiant cette compatibilité vérifient:

$$\forall g \in G ; gH = Hg$$

En d'autres termes les classes à droite et à gauche coïncident. C'est alors immédiat que **tout sous-groupe d'un groupe abélien est normal**. Par ailleurs on peut caractériser les sous-groupes normaux d'une autre façon (détaillée au chapitre sur les actions de groupe) comme les sous-groupes qui vérifient:

$$\forall h \in H, \forall g \in G ; ghg^{-1} \in H$$

La propriété fondamentale de ces groupes, qui utilise le premier résultat du chapitre suivant est que les sous-groupes normaux de G sont exactement les **noyaux** de morphismes de domaine G .

Somme et sommes directes :

Si G est **commutatif**, et que $(H_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes, on peut aussi construire une autre structure fondamentale appelée somme de sous-groupes par:

$$\sum_I H_i := \left\{ \sum_I h_i ; h_i \in H_i \right\}$$

Alors c'est un sous-groupe normal si les sous-groupes termes sont normaux. En outre, si tout élément de cet ensemble se décompose de manière **unique**, ce qui correspond à dire que e se décompose de manière unique¹, on dira que la somme est **directe** et on notera:

$$\sum_I H_i = \bigoplus_I H_i$$

Si de plus $G = \sum_I H_i$, on dira généralement que les H_i sont **supplémentaires** dans G .

¹En particulier si $n = 2$, on montre directement qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la somme soit directe est que $F \cap G = \{0_E\}$

II — THÉORÈMES D'ISOMORPHISMES

Une des motivations de la notion de groupe quotient est entre autres de pouvoir trouver des **isomorphismes** entre des groupes connus, dans ce chapitre, on énonce les trois grands théorèmes utilisables pour atteindre cet objectif.

Premier théorème d'isomorphisme :

Soit $\phi : G \longrightarrow F$ un morphisme, on rappelle que tout les noyaux sont normaux et on peut alors montrer qu'il existe un unique isomorphisme $\tilde{\phi} : G/\text{Ker}\phi \longrightarrow \text{Im}(\phi)$ tel que le diagramme soit commutatif ¹:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & F \\ \pi \downarrow & & \uparrow \iota \\ G/\text{Ker}\phi & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \text{Im}(\phi) \end{array}$$

En effet, le passage au quotient rend le morphisme injectif, donc surjectif sur son image, et le diagramme commute, ie on a $\phi = \iota \circ \tilde{\phi} \circ \pi$.

De manière plus générale, on a la **propriété universelle du quotient** pour $H \trianglelefteq G$ tel que $H \subseteq \text{ker}(\phi)$, alors on a l'existence d'un morphisme $\tilde{\phi}$ tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & F \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ G/\text{Ker}\phi & & \end{array}$$

Deuxième théorème d'isomorphisme :

On considère ici deux sous groupe normaux H, K de G tel que $H \subseteq K$, alors on a les deux projections suivantes:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_2} & G/K \\ \pi_1 \downarrow & & \\ G/H & & \end{array}$$

On peut alors utiliser la propriété universelle du quotient pour compléter le diagramme par un morphisme ϕ (par ailleurs surjectif):

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_2} & G/K \\ \pi_1 \downarrow & \nearrow \phi & \\ G/H & & \end{array}$$

¹Un **diagramme commutatif** est une collection d'objets et de morphismes tels tout les chemins (de composition) partant d'un objet vers un autre donnent le meme résultat (ie sont le meme morphisme).

Enfin, on peut appliquer le premier théorème d'isomorphisme à ϕ pour obtenir le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\pi_2} & G/K \\
 \pi_1 \downarrow & \nearrow \phi & \uparrow \\
 G/H & & \\
 \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\
 (G/H)/Ker(\phi) & &
 \end{array}$$

On peut alors montrer que $Ker(\phi) = K/H$ et donc qu'on a l'isomorphisme suivant:

$$(G/H)/(K/H) \cong G/K$$

Troisième théorème d'isomorphisme :

Caractère universel :

Le parti pris a été fait de mettre cette section dans le chapitre sur les groupes, mais ceci est trompeur, les trois théorèmes ci-dessus sont en fait vrais dans un cadre bien plus général, et pour des objets bien plus généraux apellés **algèbres universelles**, en particulier tout structure sur laquelle on peut définir une notion de quotient compatibles avec les opérations vérifie alors des analogues de ces théorèmes. En particulier:

- On peut quotienter un ensemble par la relation d'équivalence "avoir la même image" et obtenir alors de tels théorèmes.
- On peut quotienter un anneau par un **idéal** et obtenir alors de tels théorèmes.
- On peut quotienter un espace vectoriel (ou même un module) par un sous-espace et obtenir alors de tels théorèmes.

Applications :

II — ACTIONS DE GROUPE

Soit G un groupe et X un ensemble quelconque, dans ce chapitre on définit une notion fondamentale en théorie des groupes, la notion **d'action d'un groupe sur un ensemble**. En effet on appellera **action** du groupe G sur X une application de la forme:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

En outre une action doit vérifier deux autres propriétés:

- **Le neutre n'agit pas:** $\forall x \in X ; e \cdot x = x$
- **Associativité mixte:** $\forall g_1, g_2, x \in G \times G \times X ; (g_1 g_2) \cdot x = g_1 (g_2 \cdot x)$

On dira alors que G **agit** sur X et on notera alors $G \curvearrowright X$.

Morphisme structurel:

On se donne une action $G \curvearrowright X$, alors il peut être utile de considérer la curriifiée¹ de cette action, ie:

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow (X \longrightarrow X) \\ g &\longmapsto (x \longmapsto g \cdot x) \end{aligned}$$

On peut alors montrer que cette fonction prends son image dans l'ensemble des bijections sur X (dont on montrera que c'est un groupe au chapitre sur le groupe symétrique) et que c'est un **morphisme de groupe**. L'action de G induit donc un morphisme de groupe, appelé **morphisme structurel** de la forme:

$$\phi : G \longmapsto \mathfrak{S}(X)$$

En outre cette correspondante est bijective, il est donc équivalent de considérer une action d'un groupe sur un ensemble ou un morphisme structurel.

Action induite sur l'ensemble des parties :

Si G agit sur X alors G agit alors naturellement sur $\mathcal{P}(X)$ par l'action:

$$(g, P) \mapsto g \cdot P := \{g \cdot x ; x \in P\}$$

Action induite sur les sous structures:

On se pose alors deux questions naturelles:

- Une action de G sur X induit-elle nécessairement une action de G sur $Y \subseteq X$?
- Une action de G sur X induit-elle nécessairement une action de $H \leq G$ sur X ?

On peut alors montrer que la première question admet une réponse positive si et seulement si Y est **stable par l'action**.

Pour la seconde question, elle admet toujours une réponse positive et on a même le résultat général suivant grâce au morphisme structurel, on considère deux groupes G, H reliés par un morphisme ϕ , et une action de H sur X de morphisme structurel ψ , alors on a le diagramme:

$$G \xrightarrow{\phi} H \xrightarrow{\psi} X$$

Et donc $\phi \circ \psi$ définit bien un morphisme structurel de G sur $\mathfrak{S}(X)$ et donc une action. Le cas particulier des sous-groupes se déduit en considérant ϕ le morphisme d'inclusion d'un sous-groupe dans le groupe total.

¹On rappelle que $\mathcal{F}(E \times F, G) \cong \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F, G))$ en tant qu'ensembles.

Orbites :

Considérons un point $a \in X$, alors on définit **l'orbite** de a sous l'action du groupe G par:

$$\text{Orb}_G(a) := \{g \cdot a ; g \in G\}$$

Intuitivement, ce sont tout les points atteints par l'action de G sur le point initial a . Une propriété fondamentale des orbites est la suivante, si on considère la relation suivante:

$$x \sim y \iff y \in \text{Orb}_G(x)$$

Alors c'est une **relation d'équivalence**, et on a donc toujours une **partition** de X associée à l'action de G , c'est la partition en orbites.

Stabilisateurs :

Considérons un point $a \in X$, alors on définit **le stabilisateur** de a sous l'action du groupe G par:

$$\text{Stab}_G(a) := \{g \in G ; g(a) = a\}$$

Intuitivement, ce sont tout les éléments du groupe qui laissent a invariant. Une propriété fondamentale des stabilisateurs est que c'est un **sous-groupe** du groupe G . En outre si on considère le morphisme structurel ϕ de l'action, on a:

$$\text{Ker}(\phi) = \bigcap_{x \in X} \text{Stab}_G(x)$$

Généralisations aux parties :

On peut alors noter qu'il est aussi possible de définir les orbites et stabilisateurs de **parties**, en considérant les orbites et stabilisateurs pour l'action induite sur les parties définie plus haut.

Vocabulaire :

On peut alors nommer les actions de groupes qui vérifient certaines propriétés relatives aux ensembles définis plus haut, on appelle alors:

- Action **transitive** une action qui n'admet qu'une seule orbite.
- Action **libre** une action dont tout les stabilisateurs sont triviaux.
- Action **fidèle** une action dont le noyau du morphisme structurel est trivial¹.

On dira aussi qu'une action transitive et libre est **simplement transitive**, et on peut caractériser cette action par le fait que pour tout paire d'éléments $x, y \in E$, il existe un **unique** élément de G qui relie x à y .

Action par automorphismes intérieurs:

On peut alors aussi étudier l'action du groupe G sur **lui-même**, on obtient alors un nouveau moyen d'étude du groupe G , en particulier, on a deux actions remarquables:

- **L'action par translation:** $\forall g, h \in G, g \cdot h = gh$
- **L'action par conjugaison:** $\forall g, h \in G, g \cdot h = ghg^{-1}$

Ceci permet une reformulation plus élégante du concept de sous-groupe normal, en effet un sous-groupe est normal si et seulement si il est **stable par l'action de conjugaison**.

¹On a alors d'après la caractérisation du noyau ci-dessus que toute action **libre** est **fidèle**.

Centralisateur:

Le stabilisateur d'un élément g pour la relation de conjugaison est alors appelé **centralisateur** et noté $Z(g)$, et c'est l'ensemble des éléments qui commutent avec g .

On peut définir le centralisateur d'une partie, noté $Z(H)$ qui est l'intersection de tout les centralisateurs de ses éléments, ie l'ensemble des éléments du groupe qui commutent avec tout les éléments de H , ie on a:

$$Z(H) := \{g \in G ; \forall h \in H, gh = hg\}$$

En particulier pour tout groupe G , on appelle **centre** du groupe et on note $Z(G)$, l'ensemble des éléments qui commutent avec tout les autres éléments.

Normalisateur:

En affaiblissant la définition ci dessus, on peut définir le **normalisateur** d'une partie H , noté $N(H)$, et c'est le stabilisateur de l'action par la conjugaison sur les **parties**, ie:

$$N(H) := \{g \in G ; gH = Hg\}$$

Relation orbites stabilisateurs:

On peut alors montrer que si on fixe $x \in X$, alors il existe une bijection entre $G/\text{Stab}(x) \longrightarrow \text{Orb}(x)$ et en particulier, on a alors la relation fondamentale suivante dite **relation orbites-stabilisateurs**:

$$|G| = |\text{Orb}(x)| |\text{Stab}(x)|$$

Et donc en particulier, le cardinal d'une orbite (ou d'un stabilisateur) **divise l'ordre de** G .

Formules des classes:

On peut alors utiliser le fait que X se partitionne en orbites pour obtenir une expression du cardinal de X appelée **formule des classes** où n désigne le nombre d'orbites:

$$|X| = \sum_{i=1}^n |\text{Orb}(x_i)| = \sum_{i=1}^n \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|}$$

Un des intérêts de cette formule est par exemple qu'elle permet de connaître le nombre d'orbites d'une action ou de montrer l'existence de points fixes (ie de points dont l'orbite est de cardinal 1), en effet on considère les diviseurs de l'ordre du groupe (d_1, \dots, d_k) et (a_1, \dots, a_k) le nombre d'orbites de cette taille, on obtient alors une equation de la forme suivante, qui peut souvent s'étudier facilement dans les cas simples avec peu de diviseurs:

$$|X| = \sum a_k d_k$$

Formules de Burnside:

Une autre formule important liée aux actions de groupe est la **formule de Burnside** qui permet de dénombrer les orbites de l'action, et en particulier, on peut alors **compter des éléments modulo une action de groupe**, on a la formule suivante:

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Où $\text{Fix}(g) := \{x \in X ; g \cdot x = x\}$ est l'ensemble des points fixés par g . Cette formule est fondamentale en combinatoire, par exemple imaginons que nous souhaitions compter le nombre de colliers **différents** de 5 perles à deux couleurs. Alors ici "différents" signifie que un des colliers dénombré est égal à un autre après une rotation ou une reflexion, on considèrera ce collier comme le même que le premier.

L'idée principale est donc bien de compter des éléments modulo l'action sur l'ensemble, ie en identifiant deux éléments dans la même orbite.

Compter ces colliers revient donc à compter les orbites de l'action par symétries d'un groupe sur l'ensemble de tout les colliers possibles. Et la formule de Burnside nous permet donc d'effectuer ce calcul.

II — GROUPES SYMÉTRIQUES

On appelle **groupe symétrique** et on note \mathfrak{S}_n le groupe des **permutations** de l'ensemble $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ muni de la composition des applications.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$, alors c'est une fonction bijective sur cet ensemble. En particulier, sachant que l'ensemble est fini, c'est une fonction définie par cas qu'on note alors par commodité horizontalement dans un tableau:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

On remarque que ce groupe est doté d'une action naturelle sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ donnée par $\sigma \cdot k = \sigma(k)$.

Support :

On appelle alors **support** d'une permutation le complémentaire des points fixes de σ , ie on a:

$$\text{Supp}(\sigma) := \{i \in \mathbb{N} ; \sigma(i) \neq i\}$$

Une des propriétés qu'on peut déduire directement de cette définition est que deux permutations à supports disjoints commutent.

Cycles :

On appelle **k-cycle**¹ une permutation σ telle qu'il existe $k \geq 2$ et k éléments deux à deux distincts a_1, \dots, a_k tels que:

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1 ; k-1 \rrbracket ; \sigma(a_i) = \sigma(a_{i+1}) \\ \forall i \notin \llbracket 1 ; k \rrbracket ; \sigma(a_i) = \sigma(a_i) \\ \sigma(a_k) = \sigma(a_1) \end{cases}$$

On peut alors noter un tel cycle par la notation suivante qui décrit tout les éléments affectés par la permutation:

$$\sigma = (a_1, \dots, a_n)$$

Exemple: La permutation suivante est un 3-cycle:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$$

Cycles et orbites :

Si σ est un k -cycle et que a n'est pas un point fixe, alors on en déduit que la donnée du support de σ est équivalente à la donnée de l'orbite de celle-ci (plus précisément du sous groupe engendré par celle-ci) pour son action naturelle, ie:

$$\text{Supp}(\sigma) = \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\} = \text{Orb}_\sigma(a)$$

Ordre :

On peut alors démontrer une propriété fondamentale de l'ordre des cycles:

Un k -cycle est d'ordre k .

En effet si on considère le sous-groupe engendré par un tel cycle, on remarque que pour tout élément $a \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ $\sigma^k(a) = a$, donc $\sigma^k = \text{Id}$.

¹Si $k = 2$, on appellera un tel k -cycle une **transposition**.

Théorème de décomposition en cycles :

Une des problématiques principales à propos des groupes symétriques est la question de la décomposition d'une permutation en permutation plus simples. On peut tout d'abord montrer que **toute permutation se décompose en produit de cycles à support disjoints**.

Pour ceci, on utilise le fait que toute permutation induit une **partition en orbites** de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$, ces orbites correspondront alors au supports des cycles dans la décomposition. Il reste à choisir un représentant de chaque orbite et la décomposition en cycles est acquise.

Théorème de décomposition en transpositions :

Par la suite, on peut alors constater directement que pour tout k -cycle $\sigma = (a_1 \dots a_k)$, on a une décomposition canonique en produit de transpositions:

$$\sigma = (a_1 \ a_2)(a_2 \ a_3) \dots (a_{k-1} \ a_k)$$

Enfin, on conclura de ces deux propositions que **toute permutation se décompose en produit de transpositions**, ou en d'autres termes si on note \mathfrak{T}_n l'ensemble des transpositions:

$$\langle \mathfrak{T}_n \rangle = \mathfrak{S}_n$$

Conjugaison et permutations :

On considère alors l'action de \mathfrak{S}_n sur lui-même par conjugaison, on peut alors montrer que pour toute permutation σ , on a:

$$\sigma(a_1, \dots, a_n)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$$

En particulier, on a alors que deux cycles sont conjugués si et seulement si ils ont la même longueur, et si on définit le **type d'une permutation** par le n -uplet **non ordonné** $[l_1, \dots, l_k]$ des longueurs des cycles dans sa décomposition en cycles, on a alors une caractérisation des classes de conjugaisons:

Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont même type.

Signature :

On considère une permutation σ de type $[l_1, \dots, l_k]$, alors chacun de ses cycles se décompose en le produit de $l_i - 1$ transpositions défini ci-dessus. Il est alors naturel de définir alors la fonction suivante:

$$m(\sigma) = \sum_{i \leq k} (l_i - 1)$$

C'est le total du nombre de transpositions dans la décomposition en transpositions définie plus haut. On peut alors définir la **signature** d'une permutation par:

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$$

On montre alors facilement que cette fonction est un **morphisme de groupe** de $\mathfrak{S}_n \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$ et que trivialement la signature d'une transposition est -1 .

- Si $\varepsilon(\sigma) = 1$, on dira que cette permutation est **paire**.
- Si $\varepsilon(\sigma) = -1$, on dira que cette permutation est **impaire**.

L'ensemble des permutations de signature paire est alors un groupe (c'est le noyau de ε), qu'on appelle **groupe alterné** et qu'on note \mathfrak{A}_n .

II — GROUPES CYCLIQUES

On appelle **groupe cyclique** un groupe G engendré par un unique élément qu'on notera g . Le but de ce chapitre est de classer ces groupes et d'identifier leurs caractéristiques.

On considère tout d'abord le groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut alors remarquer que les éléments de ce groupe sont exactement **les classes de restes possibles par la division euclidienne par n** . On notera l'égalité dans ce contexte $a = b \pmod{n}$ en comprenant que ceci signifie que $a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z}$.

Classification :

Dans cette section on retourne dans le cas d'un groupe cyclique général G et on définit le morphisme surjectif suivant:

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto g^n\end{aligned}$$

On raisonne sur la finitude de G et on peut alors caractériser tout les groupes cycliques très simplement, en effet:

- Si G est infini, le morphisme ϕ est **injectif** et on a l'isomorphisme $G \cong \mathbb{Z}$
- Si G est fini, on utilise le **premier théorème d'isomorphisme** et on a l'isomorphisme $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Il n'y a donc qu'un seul groupe cyclique d'ordre n (resp. d'ordre infini), celui des classes de congruences modulo n (resp. celui des entiers).

On remarque alors l'importance du groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est le prototype de groupe cyclique fini.

Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

On sait donc que ce groupe est **cyclique** d'ordre n , en particulier il est engendré par 1, mais aussi par toutes les classes dont le représentant est premier avec n , en effet si a est un tel élément alors d'après le théorème de Bézout, on a:

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} ; au + bv = 1$$

Donc en particulier $a + \dots + a = 1 \pmod{n}$ et par la suite, a engendre tout le groupe. Il y a donc $\varphi(n)$ générateurs de ce groupe.

Théorème chinois :

Un des grands théorèmes sur les groupes cycliques est le suivant, si on considère $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ des nombres premiers entre eux, et qu'on note n leur produit, alors on peut montrer facilement qu'on a l'isomorphisme suivant:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$$

En particulier si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ décomposé en facteurs premiers, alors on a:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z}$$

C'est la **décomposition primaire d'un groupe cyclique**. Elle s'interprète en comprenant par exemple que la donnée du reste par 6 d'un entier est exactement équivalente à la donnée de son reste par 3 et 2.

II — ANNEAUX

Soit A un ensemble **non-vidé** muni de deux lois de composition internes associatives notées $+$, \times telles que:

- $(A, +)$ soit un groupe commutatif.
- La loi \times est associative.
- La loi \times est distributive sur la loi $+$.
- Il existe un **élément neutre** pour la loi \times .

Alors le triplet $(A, +, \times)$ est appelé **anneau**. Si la loi multiplicative est **commutative**, on dira alors que c'est un anneau commutatif. On peut définir une notion de **divisibilité** dans un anneau par la définition naturelle:

$$x \mid y \iff \exists a \in A ; ax = y$$

On définit aussi de nouveaux types d'éléments remarquables au cas des anneaux:

- On dit qu'un élément $x \in A$ est **un inversible**¹ si il existe y tel que $xy = 1$.
- On dit qu'un élément $x \in A$ est **un diviseur de zéro**² si il existe y tel que $xy = 0$.
- On dit qu'un élément $x \in A$ est **un nilpotent** si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

On dira qu'un anneau sans diviseurs de zéro est **intègre**, et dans ce cas on a la propriété suivante très puissante:

$$\forall x, y \in A ; xy = 0 \implies x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Exemples :

On peut alors considérer plusieurs anneaux remarquables:

- Les **entiers relatifs** muni des opérations usuelles forment un anneau intègre.
- Les **polynômes** muni de la somme et du produit forment un anneau intègre.
- Les **fonctions continues** muni de la somme et du produit forment un anneau.
- Les **matrices** muni de la somme et du produit forment un anneau.

Propriétés Algébriques:

Pour deux éléments $a, b \in A$ qui commutent, on a la **formule du binôme de Newton**:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Sous les mêmes hypothèses on a aussi la formule de factorisation:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

Sous-anneaux :

Les sous-structures dans le cas des groupes sont naturellement les **sous-anneaux**. Un cas remarquable est celui du **sous-anneau engendré** par H :

$$\langle H \rangle := \left\{ \sum_{k=1}^n \pm h_1^{k_1} h_2^{k_2} \dots h_n^{k_n} ; n \in \mathbb{N}, h_i \in H, k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

On peut alors imaginer généraliser la notion de sous-groupe normal, ie une sous-structure qui permet que le quotient A/I soit un anneau, mais il se trouve qu'alors la notion de sous-anneau engendré n'est pas la bonne notion.

¹Ici c'est un inversible **à droite**, on définit de même les inversibles **à gauche**.

²Ici c'est un diviseur de zéro **à droite**, on définit de même les diviseurs de zéro **à gauche**.

Idéal :

En effet, on se donne un anneau A et un sous-groupe I de A , alors on veut pouvoir définir la multiplication de deux classes telle que celle-ci vérifie la propriété de morphisme de la projection canonique ie:

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$$

Pour ceci, étant données deux classes $a + H$ et $b + H$, alors nécessairement on doit avoir:

$$(a + H)(b + H) = ab + Hb + aH + H = ab + H$$

Ceci nous donne alors la condition supplémentaire sur I pour que ce quotient soit bien défini, on dira alors que I est un **idéal** de A si et seulement si:

$$\forall(a, x) \in A \times I ; ax \in I$$

En d'autres termes, un idéal est un sous-anneau **stable par multiplication externe** par des éléments de l'anneau. Ceci nous donne alors directement la propriété souhaitée sur les classes et la bonne définition de l'anneau quotient.

Propriétés des idéaux :

Comme les sous-groupes normaux, les idéaux vérifient des propriétés naturelles:

- Toute intersection d'idéaux est un idéal.
- Toute somme d'idéaux est un idéal.
- Tout noyau de morphisme d'anneau est un idéal.
- Tout idéal est un noyau de morphisme d'anneau.

On définit alors l'**idéal engendré** par une partie X qu'on note (X) comme le plus petit idéal qui contient X , en outre si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, ie si c'est une partie finie, on peut le caractériser par:

$$(X) := \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n ; (a_i) \in A\}$$

Ce sont en fait exactement les **polynômes** en les éléments de X et à coefficients dans \mathbb{A} . Si un idéal est engendré par un unique élément, on dira qu'il est **principal**, c'est l'analogue dans les anneaux des sous-groupes cycliques.

Caractéristique :

On définit la caractéristique d'un anneau non-nul par:

$$\text{car}(A) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} ; \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ sommandes}} = 0 \right\}$$

Une autre formulation serait simplement que la caractéristique d'un anneau est l'ordre (additif) de l'unité multiplicative. Cette notion est fondamentale car elle permet en fait moralement de détecter des **sous-structures cycliques**. En particulier -> Exemples

II — ARITHMÉTIQUE DANS LES ANNEAUX

On considère donc la relation de divisibilité dans un anneau \mathbb{A} qu'on considérera intègre et commutatif. Alors le lien naturel entre la divisibilité et la structure naturelle d'idéal est donné par la propriété suivante:

$$a \mid b \iff (b) \subseteq (a)$$

Les idéaux représentent en fait moralement l'analogie abstrait des multiples.

Elements associés :

On dit que deux éléments $a, b \in \mathbb{A}$ sont **associés** si et seulement si ils vérifient:

$$a \mid b \text{ et } b \mid a$$

On peut alors montrer que dans ce cas on a égalité des idéaux:

$$(a) = (b)$$

En outre deux éléments sont associés si et seulement si ils sont **égaux à un inversible près**. Ceci généralise le fait que dans \mathbb{Z} , on a $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \iff a = \pm b$

Elements irréductibles:

Dans un anneau, on dira qu'un élément x non-nul est **réductible** si et seulement si:

$$\begin{cases} x \text{ n'est pas inversible} \\ \forall a, b \in \mathbb{A} \text{ tel que } x = ab ; a \in \mathcal{U}(A) \text{ ou } b \in \mathcal{U}(A) \end{cases}$$

En d'autres termes, un élément est irréductible si et seulement si il ne peut pas se factoriser en produit de non-inversibles. De manière analogue, un élément est réductible si une telle factorisation existe.

PGCD et PPCM:

On considère une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathbb{A} , on définit les éléments suivants:

- Cette famille admet un **plus grand commun diviseur** qu'on note $\bigwedge_I a_i$ si et seulement si il existe un élément $d \in \mathbb{A}$ vérifiant:
 - **Diviseur commun:** $\forall i \in I ; d \mid a_i$
 - **Minimalité:** $\forall d' \in A ; \forall i \in I ; d \mid a_i \implies d' \mid d$
- Cette famille admet un **plus petit commun multiple** qu'on note $\bigvee_I a_i$ si et seulement si il existe un élément $m \in \mathbb{A}$ vérifiant:
 - **Multiple commun:** $\forall i \in I ; a_i \mid m$
 - **Maximalité:** $\forall m' \in A ; \forall i \in I ; a_i \mid m \implies m \mid m'$

Ces éléments n'existent pas a priori dans un anneau général. Néanmoins quand ils existent on peut montrer qu'ils ne sont en général pas unique, en effet, si d, d' sont des pgcd de $(a_i)_{i \in I}$, alors d et d' sont **associés**, ie **égaux à un inversible près**.

Elements premiers entre eux:

Pour une famille donnée $(a_i)_{i \in I}$, on dira que ces éléments sont **premiers entre eux** si et seulement si ils admettent un pgcd et que:

$$\bigwedge_I a_i \in \mathcal{U}(\mathbb{A})$$

C'est une généralisation directe de la définition dans \mathbb{Z} .

Idéaux premiers et maximaux:

Il existe alors deux types d'idéaux très importants qui sont définis par la richesse de la structure qu'ils engendrent sur le quotient:

- Si A/I est **intègre**, on dira que I est **premier**.
- Si A/I est **un corps**, on dira que I est **maximal**.

En particulier, on a trivialement que tout idéal maximal est premier. Les anneaux premiers sont un parallèle direct avec les nombres premiers, en effet on peut montrer que I est premier si et seulement si:

$$\forall ab \in I ; a \in I \text{ ou } b \in I$$

Qui n'est pas sans rappeler le lemme d'Euclide qui dit que si un nombre premier divise un produit, alors il divise l'un des facteurs. On dira alors qu'un élément $a \in \mathbb{A}$ est premier si et seulement si (a) est premier.

Idéaux premiers et maximaux:

II — ARITHMÉTIQUE DANS LES ANNEAUX

II — CORPS

Soit A un anneau dont tout les éléments non-nuls sont inversibles. Alors on dit que A est un **corps** et on le note en général \mathbb{K} . Voici quelques exemples de corps remarquables:

- Les **réels** muni des opérations usuelles.
- Les **complexes** muni des opérations usuelles.
- Les **quaternions**¹ muni des opérations usuelles.
- Les **corps finis** $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p premier.
- Les **nombres constructibles** à la règle et au compas.

Idéaux maximaux:

Etant donné un anneau intègre et commutatif, on peut vouloir définir, de manière analogue aux idéaux premiers, les idéaux tels que A/I est un corps. On appelle de tels idéaux **idéaux maximaux** et ils vérifient:

$$\forall J \leq \mathbb{A} ; I \subseteq J \implies J = A \text{ ou } J = I$$

En fait ce sont exactement les idéaux maximaux pour l'inclusion. Cette définition, ainsi que le fait que les $p\mathbb{Z}$ sont facilement maximaux, permet de montrer que $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont bien des corps.

Morphismes de corps:

Un morphisme de corps est alors simplement un morphisme d'anneaux. Néanmoins dans ce cas particulier, on peut noter la proposition suivante:

Tout les morphismes de corps sont injectifs.

En particulier ceci nous indique que l'étude des relations entre les corps se ramène à des études d'inclusion abstraites, car si deux corps sont reliés par un morphisme, alors l'un est nécessairement plongé dans l'autre, ou plutôt, l'un est nécessairement une extension de l'autre, ce qui motive la partie suivante.

Extension de corps:

Etant donné deux corps de \mathbb{K}, \mathbb{F} , on dira que \mathbb{F} est une **extension** de \mathbb{K} si et seulement si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ ou plus généralement, si il existe un morphisme de corps (injectif donc) de \mathbb{K} dans \mathbb{F} .

Degré d'une extension:

Si \mathbb{F} est une extension de corps de \mathbb{K} , alors on peut voir \mathbb{F} comme un \mathbb{K} -espace vectoriel. On peut donc calculer sa dimension que l'on appelle alors **degré de l'extension**, on le note $[\mathbb{F} ; \mathbb{K}]$

- Si il est fini on dira que l'extension est **finie**.
- Si il est égal à 1 on dira que l'extension est **simple**.
- Si il est égal à 2 on dira que l'extension est **quadratique**.
- ...

Exemple: Si on considère l'extension de \mathbb{Q} donnée par $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, alors $(1, \sqrt{2})$ est une **base** de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, et donc $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\sqrt{2}]) = 2$ et l'extension est **quadratique**.

¹C'est un exemple de corps non commutatif

Propriétés du degré:

Si $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ une suite d'extensions de corps, alors on a la propriété suivante dite de multiplicativité du degré:

$$[\mathbb{L} ; \mathbb{F}] = [\mathbb{L} ; \mathbb{K}][\mathbb{K} ; \mathbb{F}]$$

En particulier, le degré des deux sous-extensions divise celui de l'extension.

Elements algébriques et transcendants:

Etant donnés deux corps \mathbb{K}, \mathbb{F} , la théorie des corps se développe alors autour du concept d'élément algébrique et d'élément transcendant, pour tout $\alpha \in \mathbb{F}$, on définit le morphisme suivant:

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[\alpha] \subseteq \mathbb{F} \\ P &\longmapsto P(\alpha)\end{aligned}$$

C'est le morphisme d'évaluation pour les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont on a étendu le domaine d'arrivée.

- On dira que α est **transcendant** sur \mathbb{K} si et seulement si ce morphisme est injectif.
- On dira que α est **algébrique** sur \mathbb{K} sinon.

Exemples:

- Si on considère l'inclusion $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, alors l'élément $\sqrt{2}$ est algébrique sur \mathbb{Q} .
- Si on considère l'inclusion $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]$, alors l'élément X est transcendant sur \mathbb{Q} .
- On peut montrer que π est transcendant sur \mathbb{Q} .

Polynôme minimal d'un élément:

On sait alors que $\mathbb{K}[X]$ est toujours principal, donc si un élément est **algébrique**, alors son noyau est **principal**, ie on a:

$$\ker(\Phi_\alpha) = (P_\alpha)$$

On appelle alors **polynôme minimal** de α l'élément unitaire qui engendre cet idéal. On appelle alors **degré** de α dans \mathbb{K} le degré de ce polynôme. Si α est algébrique, l'intérêt de ce polynôme est alors le suivant, par le premier théorème d'isomorphisme:

$$\mathbb{K}[X]/(\Phi_\alpha) \cong \mathbb{K}[\alpha] \cong \mathbb{K}(\alpha)$$

En outre dans ce cas, $\mathbb{K}[\alpha]$ est un **corps**.

Base d'une extension algébrique:

Si α est algébrique, et que $n = \deg(\Phi_\alpha)$, alors on peut montrer la proposition suivante:

$$(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}) \text{ est une base de } \mathbb{K}[\alpha]$$

II — CORPS DES COMPLEXES

On définit le nombre imaginaire i dont le carré vaut -1 , et on construit alors \mathbb{C} comme l'extension du corps¹ \mathbb{R} avec les deux lois usuelles, ie on définit:

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[i] = \{a + ib ; a, b \in \mathbb{R}\}$$

On peut alors montrer que c'est un ensemble stable pour les lois usuelles et qu'il vérifie toutes les propriétés qui font de lui un **corps**.

Chaque nombre complexe se définit alors comme des sommes ou produits de réels et du nombre imaginaire et on appelle alors cette expression la **forme algébrique** d'un nombre complexe et on appelle a la **partie réelle** et b la **partie imaginaire** de ce nombre.

Géométriquement, on peut identifier les nombres complexes à des points du plan, en effet, $a + ib$ peut se comprendre comme une combinaison linéaire d'un nombre de l'axe réel, et d'un nombre de l'axe imaginaire.

Module :

On appelle **module** de $z \in \mathbb{C}$ le **prolongement** de la fonction valeur absolue à \mathbb{C} , c'est donc une **norme** et on la définit telle que :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Dans la suite, on notera ρ le module de z pour faciliter la lecture.

Forme trigonométrique :

L'interprétation géométrique permet alors de montrer par passage en coordonnées polaires qu'il existe un unique angle θ (modulo 2π) qu'on appelle **argument** de z tel que:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Forme exponentielle :

De même on définit alors la **forme exponentielle** de z l'expression:

$$z = \rho e^{i\theta} := \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

On peut alors étendre les propriétés usuelles de l'exponentielle à \mathbb{C} et on en déduit:

$$\begin{aligned} \arg(zz') &= \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi} \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &= \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Conjugué :

On appelle conjugaison l'**involution** qui à z associe son **conjugué**, noté \bar{z} tel que:

$$\bar{z} := a - bi = \rho(\cos \theta - i \sin \theta) = \rho e^{-i\theta}$$

C'est une application **additive** et **multiplicative**, on montre alors les formules suivantes :

$$\Re(z) := \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \Im(z) := \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

En utilisant ces formules pour z sous forme exponentielle, on a alors les **formules d'Euler** qui sont très importantes car elle permettent de **linéariser** des expression trigonométriques.

¹La motivation principale de l'introduction de i et de cette construction est que \mathbb{C} est algébriquement clos, ie tout les polynomes de degré n de $\mathbb{C}[X]$ ont n racines.

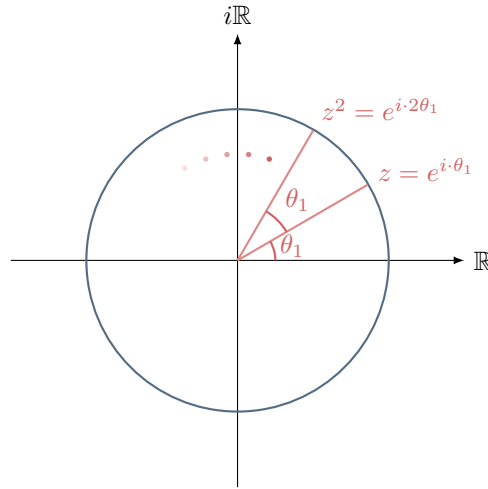
Formule de Moivre :

Une propriété importante des formes trigonométriques et exponentielles appelée **formule de Moivre**¹ est:

$$(e^{i\theta})^n = e^{n(i\theta)}$$
$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Les différentes puissances d'un nombre complexe (de module 1) s'interprètent alors comme des points situés à équidistance sur un cercle.

Graphiquement:



Racines n-ièmes :

Soit $n \in \mathbb{N}$, une partie importante des problèmes impliquant des nombres complexes proviennent d'équations d'inconnue Z de la forme:

$$Z^n = z$$

On peut montrer que l'ensemble des solutions de ce type de problème est:

$$S = \left\{ \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} ; k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Cas particulier : Si on a une racine n-ième Z_0 de Z et qu'on connaît les racines n-ièmes de l'unité, alors on peut obtenir toutes les racines n-ièmes de Z grâce à:

$$\{Z \in \mathbb{C} ; Z^n = z\} = \{Z_0 u ; u \in \mathbb{U}_n\}$$

Le nombre complexe j :

On note j la première racine troisième de l'unité. Le nombre j est singulier, car il vérifie:

$$j^2 = j^{-1} = \bar{j}$$

Graphiquement, on peut observer que les affixes des nombres 1, j et \bar{j} forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.

¹Ici, on a choisi de considérer $z \in \mathbb{U}$ mais ces propriétés sont vraies pour **tout nombre complexe**, il suffit alors d'appliquer la puissance au module.

II — ANNEAU DES POLYNÔMES

Soit \mathbb{A} un anneau commutatif, on construit l'ensemble des **polynômes** à coefficients dans \mathbb{A} comme l'ensemble des suites **nulles à partir d'un certain rang** d'éléments de \mathbb{A} , on peut alors munir cet ensemble des opérations naturelles suivantes:

- Une **addition** effectuée termes à termes.
- Une **multiplication par un scalaire** effectuée termes à termes.
- Une **multiplication polynomiale** définie par distributivité comme:

$$PQ = (p_0q_0, p_1q_0 + p_0q_1, \dots) = \left(\sum_{k=0}^n P_k Q_{n-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

C'est bien une suite nulle à partir d'un certain rang et elle correspondra alors à la distributivité usuelle¹.

On note alors $X := (0, 1, 0, \dots)$ et on appelle cette suite **indéterminée**, on remarque alors que:

$$\forall n, m \in \mathbb{N} ; X^n X^m = X^{n+m}$$

Et par suite que tout polynôme peut s'écrire comme combinaison linéaire de cette indéterminée, ce qui nous donne finalement l'expression canonique d'un polynôme et donc la définition canonique de l'ensemble des polynômes en l'indéterminée X donnée par:

$$\mathbb{A}[X] := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n ; (a_n) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}} \right\}$$

Où la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang.

Structure :

Ces opérations et la structure d'anneau commutatif des coefficients donnent alors une structure **d'anneau commutatif** à l'ensemble $\mathbb{A}[X]$, en outre on pourra aussi vérifier après avoir lu le chapitre correspondant que c'est un **espace vectoriel** de dimension infinie, et dont une base est donnée par:

$$(1, X, X^2, \dots)$$

Finalement, si \mathbb{A} est intègre (par exemple dans le cas usuel où c'est un corps), l'anneau $\mathbb{A}[X]$ l'est aussi.

Evaluation :

Soit R un anneau quelconque qui contient \mathbb{A} , et $x \in R$ alors on peut montrer qu'il existe une application fondamentale, dite application **d'évaluation** donné par:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{A}[X] \times R &\longrightarrow R \\ (P, x) &\longmapsto P(x) = \sum a_k x^k \end{aligned}$$

En effet, si on fixe un élément $x \in R$, alors on a simplement $\forall P \in \mathbb{A}[X] ; \phi(P, x) = P(x)$ qui est simplement le polynôme initial dont on a substitué l'indéterminée par un élément de l'anneau. En particulier si $R = \mathbb{A}[X]$, on a directement l'identification $P = P(X)$.

¹C'est un cas particulier de produit de convolution discret, voir le chapitre sur la convolution.

Dans la suite on se restreint au cas $\mathbb{A} = \mathbb{K}$ des polynômes à coefficients dans un corps. Cette contrainte supplémentaire nous permettra de développer une arithmétique plus riche des polynômes.

Degré et Valuation :

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on peut alors définir tout une propriété fondamentale appelée **degré** de P qui découle directement de la construction des polynômes:

$$\deg(P) := \max \{k \in \mathbb{N} ; a_k \neq 0\}$$

On a alors les propriétés opératoires du degré ci-dessous:

- **Degré de la somme:** $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- **Degré du produit:** $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

La valuation est définie de manière analogue comme le plus petit coefficient non nul de P .

Divisibilité :

On peut naturellement définir une notion de **divisibilité** dans l'anneau $\mathbb{A}[X]$ qui vérifie toutes les propriétés usuelles, mais la notion de degré nous permet aussi de définir une **division euclidienne** de deux polynômes qui se comporte comme la division euclidienne usuelle, à la différence que la condition d'arrêt porte sur le **degré du reste**.

Plus précisément, on a le théorème suivant pour tout couple $A, B \in \mathbb{K}[X]$:

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X] ; A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B)$$

La démonstration de ce théorème se fait de manière analogue à celui de \mathbb{Z} , ie en exhibant l'algorithme de division. Ce théorème donne alors à $\mathbb{K}[X]$ une structure **d'anneau Euclidien**, dont découlent les conséquences suivantes:

- **Anneau de Bezout:** La relation de Bezout est vraie pour les polynômes.
- **Anneau principal:** Les idéaux sont principaux.
- **Anneau factoriel:** Il existe une décomposition en facteurs premiers.

Racines:

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors on peut montrer le théorème fondamental ci-dessous:

$$P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) | P \iff P \in ((X - \alpha))$$

On dira alors que α est **racine** de P si une de ces conditions est vérifiée.

Multiplicité:

On appelle **multiplicité d'une racine** α l'entier m tel que:

$$\left[(X - \alpha)^m | P \right] \wedge \left[(X - \alpha)^{m+1} \nmid P \right]$$

On en déduit que pour une racine α de multiplicité m , on peut **factoriser** P par $(X - \alpha)^m$.

Si on considère maintenant plusieurs racines **distinctes** $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ de multiplicité respectivement $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}, m_n$, le lemme de Gauss nous permet de montrer qu'alors:

$$\left[\prod_{i=0}^n (X - \alpha_i)^{m_i} \right] \mid P \quad \text{(On peut factoriser par le produit des } (X - \alpha_i)^{m_i} \text{)}$$

Caractérisation de la multiplicité:

Si on note P^m la dérivée n -ième de P , on peut caractériser le fait que α soit de multiplicité m par:

$$P^m(\alpha) = 0 \wedge P^{m+1}(\alpha) \neq 0$$

Facteurs premiers :

On appelle **facteurs premiers** de $\mathbb{K}[X]$ les polynômes (non-constants) qui n'admettent pas de **diviseurs stricts** (non-constants), ces éléments dépendent du corps considéré, en effet par exemple:

- Dans $\mathbb{R}[X]$: $X^2 + 1$ est premier.
- Dans $\mathbb{C}[X]$: $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ n'est pas premier.

On dira qu'un polynôme est **scindé** sur $\mathbb{K}[X]$ si ses facteurs sont tous de degré 1.

Décomposition :

Un des grands thèmes de l'étude des polynômes est alors la recherche de la décomposition de ceux-ci en facteurs premiers, par exemple:

- Si on considère l'anneau $\mathbb{C}[X]$, on peut alors montrer le **théorème fondamental de l'Algèbre**:

Tout polynôme non-constant admet une racine.

Et donc en particulier par récurrence tout les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont **scindés**.

- Si on considère l'anneau $\mathbb{R}[X]$, il existe donc des polynômes de degré 2 irréductibles. Mais on sait alors qu'il ceux ci ont des racines complexes, et par évaluation on trouve la propriété intéressante suivante:

$$P(z) = 0 \implies P(\bar{z}) = 0$$

- Si on considère l'anneau $\mathbb{F}_2[X]$, on peut par exemple remarquer la factorisation: $X^2 + 1 = (X + 1)^2$

Polynômes en plusieurs indéterminées :

On peut alors généraliser la construction des polynômes en une indéterminée X en un anneau de polynômes en plusieurs indéterminées $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$ qu'on définit par récurrence par:

$$\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n] = (\mathbb{A}[X_1, \dots, X_{n-1}]) [X_n]$$

C'est aussi un **anneau commutatif**, aussi intègre si \mathbb{A} l'est et ses éléments sont alors de la forme:

$$\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n] := \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \right\}$$

Où la somme est finie, ie où l'ensemble des coefficients $(a_{i_1, \dots, i_n})_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}}$ est une famille finie. Quelques exemples:

- Dans $\mathbb{R}[X, Y]$: $P = 2X^2 + 3XY - Y$
- Dans $\mathbb{C}[X, Y, Z]$: $P = iX^2Y^2 + 2iX - 5Z$

Relations coefficients racines :

On peut trouver une relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme qui peut souvent nous permettre de nous ramener à la résolution d'un système et potentiellement trouver les racines, en effet on suppose la décomposition acquise alors on a:

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$$

En développant on trouve alors des relations pour la somme, la somme des doubles produits, la somme des triples produits, etc, et le produit des racines:

- **La somme des racines:** $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i = (-1)^1 \frac{a_{n-1}}{a_n}$
- **La somme des k-produits des racines:** $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$
- **Le produit des racines:** $\alpha_1 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

III — ESPACES VECTORIELS

L'algèbre linéaire est une partie de l'algèbre générale s'intéressant à une structure particulière omniprésente en mathématiques, la structure **d'espace vectoriel**, c'est une structure tout comme les groupes et les anneaux et elle formalise la plupart des notions géométriques usuelles dans les espaces comme \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Tout les résultats d'algèbre générale s'appliquent bien évidemment à cette structure.

Définition :

Soit E un ensemble non-vidé et \mathbb{K} un corps commutatif. On dira alors que $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel sur \mathbb{K}** si les conditions ci-dessous sont réunies:

- $(E, +)$ est un **groupe abélien**.
- La loi externe \cdot est une **action de groupe** sur E qui vérifie la **distributivité mixte**.

On appelle alors vecteurs les éléments de E et scalaires les éléments de \mathbb{K} .

Sous-espaces vectoriels :

Soit $F \subseteq E$, on dit que F est un **sous-espace vectoriel** et on note $F \leq E$ si et seulement si:

- F est non-vidé.
- F est stable par somme.
- F est stable par multiplication externe.

On montre alors facilement que **l'intersection** de deux sous-espaces vectoriels est aussi un sous-espace vectoriel mais que l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel.

Sous-espace engendré :

On se donne une partie F de E , on peut alors caractériser le **sous-espace vectoriel engendré** comme défini dans le chapitre d'algèbre par:

$$\text{Vect}(F) := \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i u_i ; (\lambda_i, u_i) \in \mathbb{K} \times F, n \in \mathbb{N} \right\}$$

*On dit que de telles combinaisons sont **des combinaisons linéaires** de vecteurs de F . Le sous-espace engendré est donc l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de F .*

Familles libre et génératrices :

Soit $\mathcal{F} := (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

On dit que \mathcal{F} est **génératrice** de E si on a $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

On dit que \mathcal{F} est **libre** si toute combinaison linéaire nulle de vecteurs de \mathcal{F} est à coefficient tous nuls.

Cette proposition signifie exactement que l'on ne peut pas obtenir un vecteur comme combinaison linéaire d'autres vecteurs, en effet si un des coefficients était non nul, il suffirait d'isoler le vecteur correspondant et il serait alors redondant. Formellement, on a:

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n ; \left[\sum_{i=0}^n \lambda_i u_i = 0_E \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0) \right]$$

Bases :

On appelle **base** de E une famille **libre et génératrice**. Ce concept permet alors de caractériser le fait que tout élément de E peut s'écrire comme une **unique** combinaison linéaire des vecteurs de la base, ie si on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E on a:

$$\forall u \in E ; u = \sum_{i \leq n} u_i e_i$$

Pour une certaine famille (u_i) , qu'on appelle alors **coordonnées** de u dans la base \mathcal{B} .

Sommes et sommes directes:

Soit n un entier naturel et $(F_k)_{k \leq n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E , Alors on peut construire la somme des ces sous-espaces vue comme la somme de sous-groupes précédemment définie. On peut alors montrer que c'est le plus petit sous espace vectoriel qui contient tout les (F_k) .

On définit de même la somme directe de sous-espaces ainsi que la supplémentarité, comme la somme directe et la supplémentarité de ces sous-groupes.

Caractérisation par les bases:

Soit \mathcal{B}_k des bases de chacun des F_k , soit la famille $\mathcal{F} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n)$, ie la famille constituée de bases des F_k concaténées. Alors on a alors le théorème suivant:

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } S \iff \sum_{k \leq n} F_k = \bigoplus_{k \leq n} F_k$$

Hyperplans:

En particulier on définit alors le concept **d'hyperplan** comme tout espace dont le supplémentaire est une droite. Ce sont exactement les espaces définis par une équation cartésienne non triviale.

Un système d'équations homogènes revient alors à déterminer l'intersection d'hyperplans.

Espaces vectoriels quotient:

Les espaces vectoriels étant des groupes commutatifs par définition, tout ses sous groupes sont normaux, et la compatibilité par la loi externe est directe, on peut donc définir pour tout $F \leq E$, **l'espace vectoriel quotient** E/F .

- Exemple 1: Si $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \text{Vect}(1, 0)$, alors E/F est **l'ensemble des droites parallèles à l'axe des abscisses**.
- Exemple 2: Si $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \text{Vect}(X^2)$, alors E/F est **l'ensemble des polynômes qui ne diffèrent que d'un terme quadratique**.

III — ESPACES AFFINES

Soit \mathcal{E} un ensemble non-vide et V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n finie.

Définition :

On appelle **espace affine**¹ **de direction** V le couple $(\mathcal{E}, +)$ avec:

$$\begin{aligned} + : \quad \mathcal{E} \times V &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (A, u) &\longmapsto A + u \end{aligned}$$

La loi $+$ doit vérifier les axiomes suivants ²:

Existence d'un neutre	$\forall A \in \mathcal{E} ; A + 0_V = A$
Action de groupe	$\forall A \in \mathcal{E} , \forall u, v \in V ; A + (u + v) = (A + u) + v$
Unicité du translaté	$\forall A, B \in \mathcal{E} , \exists ! u \in V ; A + u = B$

Etant donné deux points $A, B \in \mathcal{E}$, on note alors \overrightarrow{AB} l'unique vecteur u qui vérifie:

$$A + u = B$$

On appelle alors A le **point initial** et B le **point final**

Propriétés :

Si \mathcal{E} est un espace affine de direction V , on a alors les propriétés suivantes:

Relation de Chasles	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Existence d'un neutre	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0_V$

Repères :

Un repère de \mathcal{E} est un couple $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ formé d'un point $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V . On appelle alors le point O **origine** du repère, et les vecteurs e_1, \dots, e_n **vecteurs de base** du repère.

Soit $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, alors pour tout point $A \in \mathcal{E}$, on appelle **coordonnées** de A dans le repère \mathcal{R} , les composantes $(x_i)_i$ du vecteur qui représente la translation de O vers A dans la base \mathcal{B} , et on a la caractérisation élémentaire suivante:

$$\overrightarrow{OA} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Cas particulier des espaces vectoriels :

Il est important de noter que le couple $(V, +)$ forme un espace affine de **direction lui-même**. En effet, si on considère un élément de V comme un point, alors le couple $(V, +)$ forme un espace affine de direction V et la loi $+$ est alors exactement la loi de composition interne de V .

L'unique vecteur u tel que $A + u = B$ est exactement $B - A$ (ici A, B sont des points de V qui se trouvent être des vecteurs dans ce cas particulier).

¹Ses éléments sont alors appelés des **points**.

²Une action d'un groupe (G, \star) sur E est une application $+$ de $G \times E$ dans E qui vérifie:

$$\forall g, g' \in G , \forall x \in E ; x + (g \star g') = (x + g) \star g'$$

En d'autres termes, additionner d'abord les vecteurs, ou d'abord le point avec le vecteur n'importe pas.

III — THÉORIE DE LA DIMENSION

Dans ce chapitre, on considérera un espace vectoriel E qui admet une famille génératrice **finie**. On dira alors que E est de **dimension finie**.

Théorème de la base incomplète:

Soit \mathcal{L} une famille libre et \mathcal{G} une famille génératrice de E , le concept de dimension se définit grâce au **théorème de la base incomplète**:

- On peut **compléter** \mathcal{L} en une base de E par ajouts de vecteurs de \mathcal{G} .
- On peut **extraire** de \mathcal{G} une base de E .

Ce théorème permet alors d'assurer l'**existence** d'une base d'un espace vectoriel de dimension finie. Il se démontre par exhibition d'un algorithme qui complète \mathcal{L} en une base.

Théorème de la dimension:

On peut alors montrer que le cardinal d'une partie libre est toujours inférieur au cardinal d'une partie génératrice¹, de cette considération, on peut alors montrer directement **le théorème de la dimension** qui énonce que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont **même cardinal**.

Ce théorème permet alors d'assurer l'**unicité** du cardinal des bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Définition de la dimension:

Des deux théorèmes précédents, on a alors l'existence de bases d'un espace de dimension finie, et l'unicité de leur cardinal, on peut alors définir **la dimension d'un espace vectoriel** E comme ce cardinal et on la note $\dim(E)$.

Espaces de dimension finie:

Considérons maintenant E un espace vectoriel de dimension finie n et \mathcal{F} une famille de n vecteurs de E . Alors par déduction immédiate de la définition de dimension, on a:

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice} \iff \mathcal{F} \text{ est une base.}$$

Soient F, G deux sous-espaces de E . La dimension permet aussi de prouver des **égalités** d'espaces vectoriels, grâce aux propriétés suivantes:

- Si $F \subseteq G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.
- Si F, G sont en **somme directe** et que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, alors ils sont **supplémentaires**.

Enfin on peut calculer la dimension d'une somme avec la **formule de Grassmann**:

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Rang d'une famille de vecteurs:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{F} une famille de vecteurs de cet espace, alors on appelle **rang** de \mathcal{F} l'entier:

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$$

C'est simplement **la dimension du sous-espace engendré par la famille**. D'après la section ci-dessus on a donc une caractérisation des bases, en effet:

$$\mathcal{F} \text{ est une base} \iff \text{rg}(\mathcal{F}) = n$$

¹Aussi appelé **lemme de Steinitz**.

III — APPLICATIONS LINÉAIRES

Soit deux \mathbb{K} -espaces vectoriels E et F , et $f : E \longrightarrow F$.

Définition:

On dit que f est une **application linéaire** si c'est un **morphisme d'espaces vectoriels**, ie si et seulement si pour tout couple de vecteurs $u, v \in E$ et pour tout scalaire λ elle vérifie:

- **Loi interne :** $f(u + v) = f(u) + f(v)$
- **Loi externe :** $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

On note alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F . Si $F = \mathbb{K}$, on dira que f est une **forme linéaire**.

Propriétés:

On s'intéresse aux propriétés de l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, c'est un ensemble de morphismes donc d'après le chapitre d'algèbre la composée de morphismes et l'inverse d'un morphisme bijectif est un morphisme.

En outre en considérant les espaces vectoriels comme groupes additifs, on vérifie que le noyau d'un morphisme est un sous-espace bien défini et caractérise l'injectivité de ce dernier. De même, l'image de générateurs engendre l'image qui est aussi un sous-espace.

Caractérisations par les familles:

Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de E et un endomorphisme de E , alors f est entièrement caractérisée par l'image de cette famille, en effet on a:

- L'image d'une famille libre est libre $\iff f$ est injective.
- L'image d'une famille génératrice est génératrice $\iff f$ est surjective.

Endomorphismes élémentaires remarquables:

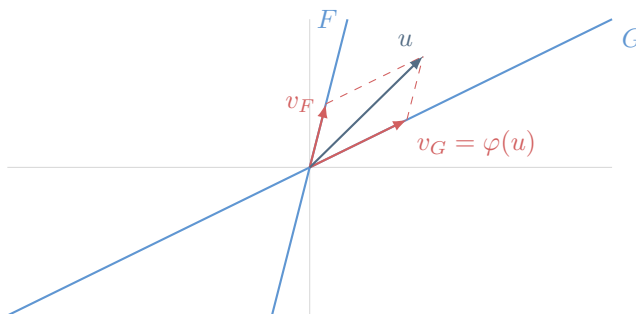
On définit ici des endomorphismes élémentaires remarquables comme:

- **Les homothéties:** Elles sont caractérisées par $\varphi_k : u \longmapsto ku$
- **Les symétries:** Elles sont caractérisées par $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_E$
- **Les projecteurs:** Elles sont caractérisées par $\varphi \circ \varphi = \varphi$

Précisons le cas des projecteurs, en effet si on considère deux sous-espaces F, G supplémentaires dans E , alors chaque élément $u \in E$ admet une décomposition unique de la forme $u = v_F + v_G$. Cette décomposition définit canoniquement deux projecteurs, par exemple celui de direction F sur G qui est l'application φ telle que:

$$\varphi(u) = v_G$$

Graphiquement, pour φ le projecteur de direction F sur G :



Applications linéaires en dimension finie:

On étends la définition de rang d'une famille à celle du **rang d'une application linéaire**, qu'on note $\text{rg}(f)$, qui correspond à **la dimension de son image**. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application de rang fini, alors d'après le premier théorème d'isomorphisme:

$$E/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$$

Et donc on a égalité des dimensions et après avoir montré que $\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$, on en déduit le **théorème du rang**:

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

Ce théorème permet alors de caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire par:

- f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$
- f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$

En particulier, si E et F sont deux espaces vectoriels **de même dimension** alors:

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Ceci caractérise alors **les isomorphismes en dimension finie**.

Applications multilinéaires:

On peut généraliser le concept de linéarité à celui de **multilinéarité** ou **n-linéarité**. On considère alors une application de la forme $f : E^n \longrightarrow F$, alors on dit que f est multilinéaire si et seulement si elle est linéaire **en chacune des variables**, ie si:

$$\begin{aligned} f(e_1 + \lambda u, e_2, \dots, e_n) &= f(e_1, e_2, \dots, e_n) + \lambda f(u, e_2, \dots, e_n) \\ f(e_1, e_2 + \lambda u, \dots, e_n) &= f(e_1, e_2, \dots, e_n) + \lambda f(e_1, u, \dots, e_n) \\ &\vdots \\ f(e_1, e_2, \dots, e_n + \lambda u) &= f(e_1, e_2, \dots, e_n) + \lambda f(e_1, e_2, \dots, u) \end{aligned}$$

Une telle application est dite:

- **Symétrique** si permuter deux variables préserve le résultat.¹
- **Antisymétrique** si permuter deux variables change le signe du résultat.²
- **Altérée** si elle s'annule à chaque fois qu'on l'évalue sur un k-uplet contenant deux vecteurs identiques.³

¹Exemple: $f(e_1, e_2) = f(e_2, e_1)$

²Exemple: $f(e_1, e_2) = -f(e_2, e_1)$, en particulier, le signe du résultat après une permutation σ dépend alors de **la signature de la permutation** (la parité du nombre de permutations effectuées).

³Exemple: $f(e_1, e_1) = 0$

III — ESPACE DES MATRICES

On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans un anneau \mathbb{A} toute application de la forme:

$$M : \llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket \longrightarrow \mathbb{A}$$

Il s'agit d'une généralisation du concept de suite sous forme de suite à **deux indices**, qu'on peut alors voir comme un tableau de nombres tel qu'en chaque position (i, j) , on ait un élément $a_{ij} \in \mathbb{A}$. A l'instar des suites, on notera $M = (a_{ij})$ pour faire référence à la matrice M .

On note alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{A})$ l'espaces des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{A} .

Structure:

On peut alors munir ces espaces des opérations suivantes:

- On définit la **somme** de deux matrices par la matrice obtenue en sommant par composantes.
- On définit la **multiplication** d'une matrice par un scalaire comme la matrice dont tout les termes sont multipliés par ce scalaire.
- On définit la **multiplication** de deux matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{k,j}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ compatibles¹ par la matrice $C := AB = (c_{i,j})$ comme étant la matrice telle que:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

En particulier, on appelle ce produit **un produit ligne par colonne** qui se comprends visuellement² par:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}$$

En particulier si $n = p$, et que $\mathbb{A} = \mathbb{K}$ est un corps, le cas le plus courant, alors toutes les matrices en jeu sont carrées et cette loi est **interne**.

On peut alors montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un **anneau unitaire** (mais ni commutatif ni intègre). Le neutre pour la multiplication est alors la matrice identité nulle partout et dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

Matrices inversibles:

On dira qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** si elle admet un inverse pour la multiplication matricielle, en outre on appelle l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n **le groupe linéaire** d'ordre n , qu'on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, c'est un groupe pour la multiplication matricielle.

Et en particulier, on montre facilement que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Dans le cas d'une matrice inversible, on peut alors étendre notre définition de puissance d'une matrice au cas d'entiers négatifs.

On donnera aussi par la suite une interprétation géométrique de ce groupe et plusieurs méthodes efficaces pour prouver l'existence d'inverses et les calculer.

¹Il faut que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes de la seconde pour que les matrices soient compatibles.

²Le coefficient à la troisième ligne, première colonne est obtenu en multipliant la troisième ligne par la première colonne.

Transposition:

Soit $M = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on définit l'**opération de transposition** d'une matrice notée M^\top , c'est une **application linéaire involutive** définie par:

$$M^\top = (x_{j,i})$$

Intuitivement, cette application transforme **chaque ligne en colonne et inversement**. Par exemple:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Il faut aussi noter son comportement par rapport au produit matriciel de deux matrices A, B , précisément on a:

$$(AB)^\top = B^\top A^\top$$

Enfin, on peut montrer que la transposition est compatible avec l'inversion, ie on a:

$$(M^{-1})^\top = (M^\top)^{-1}$$

Trace:

On définit aussi une autre application linéaire appelée **trace d'une matrice**, et qui est définie comme la **somme des éléments diagonaux**. Formellement:

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

Elle est donc linéaire mais on a aussi par calcul direct:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Application coordonnées:

Si on fixe une base \mathcal{B} de E , alors tout vecteur $u \in E$ admet des coordonnées dans cette base et donc on peut définir l'isomorphisme suivant:

$$\begin{aligned} [\cdot]_{\mathcal{B}} : E &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut alors identifier ainsi les vecteurs de E avec leurs coordonnées, mais non canoniquement, ie cette représentation dépend de la base fixée. En outre on a une action naturelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur les vecteurs colonnes définie par $M \cdot X = MX$. De cette manière on peut déjà intuitivement que la multiplication matricielle se comporte comme une transformation (linéaire) des coordonnées des vecteurs de l'espace.

Matrice d'une famille de vecteurs:

Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \leq k}$ une famille de k vecteurs et \mathcal{B} une base de E , alors on peut définir la **matrice de la famille** dans la base par:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = ([e_1]_{\mathcal{B}}, [e_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [e_n]_{\mathcal{B}})$$

C'est la matrice des coordonnées des vecteurs de la famille.

Espaces des colonnes et des lignes:

Réciproquement, pour toute matrice $M = (C_1, \dots, C_n) = (L_1, \dots, L_p)$, on peut voir cette matrice comme la matrice d'une famille de vecteurs (ou la transposée d'une telle matrice), et on définit alors:

- L'espace des colonnes de M par $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$
- L'espace des lignes de M par $\text{Vect}(L_1, \dots, L_n)$

Ces espaces sont alors des sous espaces de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$ ou de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^p$ et seront particulièrement importants car des méthodes matricielles très puissantes nous permettront d'étudier des familles par leur représentation matricielle.

Matrice d'une application linéaire:

Soit une application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que $\mathcal{B} = (e_i)_{i \leq n}$ est une base de E et $\mathcal{C} = (f_i)_{i \leq p}$. Alors on peut associer à l'application f **une unique matrice** dans les bases \mathcal{B}, \mathcal{C} , qu'on note alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ qu'on construit comme suit:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = ([f(e_1)]_{\mathcal{C}}, [f(e_2)]_{\mathcal{C}}, \dots, [f(e_n)]_{\mathcal{C}})$$

Exemple: Considérons un endomorphisme de \mathbb{R}^3 et sa base canonique notée (e_1, e_2, e_3) , telle que $f(x, y, z) = (2x + 1, 3x, z - 1)$. Alors on calcule l'image des vecteurs de la base de départ, ie:

$$\bullet f(1, 0, 0) = (3, 3, -1) \quad \bullet f(0, 1, 0) = (0, 0, -1) \quad \bullet f(0, 0, 1) = (0, 0, -2)$$

Puis on calcule les coordonnées de ces vecteurs dans la base d'arrivée, et on les range en colonne dans une matrice et on obtient:

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow f_1 \\ \rightarrow f_2 \\ \rightarrow f_3 \end{array} \end{array}$$

On peut alors reformuler ce résultat par le fait que l'application ci-dessus est une bijection:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Propriété de morphisme:

On peut alors montrer que cette bijection est bien plus riche qu'une simple bijection, en particulier **c'est un isomorphisme d'anneaux** pour les structures ci-dessous:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} : (\mathcal{L}(E, F), +, \circ) \longrightarrow (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \times)$$

En effet, soit $f \in \mathcal{L}(F, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des bases de réciproquement E, F, G . Alors on peut montrer la propriété suivante qui caractérise alors la matrice d'une composée, et motive la construction artificielle du produit matriciel:

$$\text{Mat}(f \circ g)_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$$

En d'autres termes, la matrice de la composée est le produit des matrices.

Action naturelle:

Alors, appliquer une application linéaire à un vecteur $u \in E$ revient exactement à faire agir la matrice de f pour l'action naturelle sur les vecteurs coordonnées, ie on a:

$$[f(u)]_{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times [u]_{\mathcal{B}}$$

Exemple: Soit f de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $u = (5, 3)$, calculer les coordonnées de $f(u)$ revient à calculer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Enfin l'isomorphisme entre ces deux espaces nous permet de définir **le noyau et l'image d'une matrice**, comme simplement étant le noyau ou l'image de l'application linéaire associée à cette matrice.

Rang d'une matrice:

On a défini précédemment le concept de rang d'une application linéaire comme la dimension de son image, et en particulier comme la dimension du sous-espace engendré par les images des vecteurs de base $(f(e_i))_{i \leq n}$, on peut étendre cette définition au **rang d'une matrice**, en effet on a simplement:

Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace de ses colonnes.

On remarque donc que le rang d'une matrice nous donne **énormément d'informations** sur la matrice, la famille de vecteurs de l'espace des colonnes, et l'application linéaire associée. En particulier, on peut donc caractériser les matrices inversibles et les bases par la maximalité du rang de la matrice associée.

Matrice de passage:

On considère un espace vectoriel E et deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de cet espace. On appelle **matrice de passage** de \mathcal{B} à \mathcal{B}' la matrice ci-dessous:

$$\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = ([e'_1]_{\mathcal{B}}, [e'_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [e'_n]_{\mathcal{B}})$$

La matrice de passage est donc constituée des coordonnées dans l'ancienne base des vecteurs de la nouvelle base (en colonnes).

Une matrice de passage $\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est alors **nécessairement inversible** d'inverse la matrice de passage $\text{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$

Utilisations:

Pour tout vecteur $u \in E$, cette matrice permet alors de représenter ce vecteur dans une nouvelle base par:

$$[u]_{\mathcal{B}'} = \text{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})[u]_{\mathcal{B}}$$

On peut aussi vouloir chercher à représenter un endomorphisme f dans une base différente, et en effet on peut montrer qu'on a:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

La notation fait alors sens de manière générale car $\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ prends en entrée une colonne de coordonnées dans la base \mathcal{B}' et renvoie celui dans la base précédente qui peut alors être évalué par la matrice et être retransformé par la suite.

De manière générale, on notera souvent U, U' les vecteurs dans la base initiale (resp. dans la base finale), M, M' la matrice dans la base initiale (resp. dans la base finale) et $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, alors on a les formules suivantes:

$$U' = P^{-1}U \quad M' = P^{-1}MP$$

Matrices semblables:

On remarque alors plus clairement que le fait de changer la représentation d'une matrice correspond à **une action par conjugaison** de $GL_n(\mathbb{K})$, on appelle alors les classes de conjugaisons **classes de similitude** et on dira que deux éléments dans la même classe sont **semblables**.

Ces deux matrices représentent alors le même endomorphisme, la même transformation géométrique, dans des bases différentes.

En particulier on appelle alors **invariants de similitude** les propriétés qui ne dépendent pas du choix du représentant, on a alors plusieurs invariants:

- La dimension du noyau.
- La dimension de l'image, ie le rang.
- La trace.
- D'autres invariants définis plus tard comme le déterminant, le polynôme caractéristique et minimal.

Matrices remarquables:

Dans ce chapitre nous allons présenter brièvement différentes matrices remarquables:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

Puis on a deux types de matrices qui sont liées à la symétrie des coefficients et à l'**opération de transposition**:

$$\begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$$

Matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice antisymétrique

On a aussi les **matrices élémentaires** qui représentent les **opérations élémentaires**¹:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Matrice de dilatation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de transvection

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de permutation

Enfin, on a les **matrices orthogonales** qui sont des matrices telles que leur inverse soit leur **transposée**, ce sont par exemple les matrices de rotation:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Matrice de rotation

Lien avec les systèmes linéaires homogènes:

On peut aussi remarquer qu'il y a une correspondance directe et bijective entre les **systèmes linéaires homogènes** d'inconnues (x_1, \dots, x_n) et les **équations vectorielles** d'inconnue X , en effet on a:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases} \iff f(x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0) \iff AX = 0$$

On peut alors montrer que l'ensemble des solutions est exactement le noyau de f , de manière générale, le cas le plus courant est celui de $n = p$ et la matrice est carrée, mais on a deux autres cas:

- Si $n > p$, on dira que le système est **sur-contraint** et généralement les solutions sont triviales.
- Si $n < p$, on dira que le système est **sous-contraint** et généralement les solutions sont non-triviales.

Si on ajoute un second membre non-nul b , alors le système est dit **non-homogène**, dans ce cas si il existe une **solution particulière**, alors l'ensemble des solutions est un sous-espace affine² de direction le noyau de f . Sinon l'ensemble des solutions est vide.

¹Voir la section suivante.

²Plus précisément, on a $\mathcal{S} = \text{Ker}(f) + S_p$ où S_p est une solution particulière.

Opérations élémentaires:

Etant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit une **opérations élémentaire sur les colonnes**¹ de M par la multiplication à droite par une matrice élémentaire comme définies plus haut.

Ces opérations correspondent alors au fait d'échanger, de multiplier par un scalaire, ou de faire une combinaison linéaire des colonnes de la matrice. Ces opérations sont fondamentales car elles conservent beaucoup de propriétés:

- Le noyau et sa dimension.
- L'image et sa dimension.

En particulier si \mathcal{E} est l'ensemble des matrices élémentaires on définit la relation d'équivalence:

$$M \sim M' \iff \exists E \in \mathcal{E} ; ME = M'$$

Informellement et sauf cas particuliers, on effectue souvent les opérations élémentaires directement sur la matrice sans expliciter la matrice élémentaire associée.

Echelonnements & Calculs:

La théorie permettant de lier matrices, applications linéaires et familles de vecteurs, l'étude du noyau et de l'image d'une matrice revêt alors une importance capitale qui est l'objet de cette partie.

On dira qu'une matrice M est **échelonée** si la matrice obtenue après application d'opérations élémentaires est de la forme générale:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, on **creuse** la matrice pour faire apparaître des zéros sur la partie triangulaire supérieure. Il existe aussi une variante appelé **échelonnement avec mémorisation**, pour cette variante, on nomme chaque vecteur-colonne de la matrice et on reporte toutes les transformations réalisées sur ces vecteurs.

Présentons maintenant les différentes informations que nous pouvons tirer de ces échelonnements:

1. On peut très facilement trouver le rang d'une matrice, en effet après échelonnement, c'est simplement **le nombre de colonnes non-nulles** de la matrice. En particulier, il est donc très facile de montrer qu'une matrice est inversible ou qu'une famille est une base.
2. On peut trouver une base d'un sous-espace engendré par une famille, pour cela on échelonne la matrice de cette famille, l'ensemble des colonnes non nulles constitue une base du sous-espace initial.
3. On peut trouver un supplémentaire d'une famille, on échelonne la matrice de la famille, et on complète la matrice par des vecteurs de la base canonique², ces vecteurs formeront alors un supplémentaire.
4. On peut trouver les équations cartésiennes d'un sous-espace engendré par une famille, pour cela on augmente la matrice de la famille par une matrice d'indéterminées, et on échelonne. Alors la dernière colonne fournira les équations cartésiennes du sous-espace.
5. On peut trouver le **noyau**, **l'image** d'une matrice, grâce à la variante **avec mémorisation**, alors les colonnes nulles après échelonnement permettent d'en déduire des vecteurs envoyés du noyau, et les colonnes non-nulles constituent une base de l'image (voir l'exemple ci-après).
6. On peut résoudre les systèmes de la forme $AX = B$ et donc inverser des matrices par une extension de cette méthode.

¹Il peut être utile de noter que fondamentalement, on peut à la fois opérer **sur les colonnes** ou sur **les lignes**, en multipliant les matrices élémentaires par la gauche plutôt que par la droite.

²Où alors de telle sorte que la matrice reste échelonée.

Exemples d'utilisations:

Soit $M = (C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, nous allons présenter quelques exemples:

- Cherchons le rang de la matrice, on a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice est échelonnée sur 2 colonnes, donc son rang est 2. En particulier, (C_1, C_2, C_3) n'est pas une base et la matrice (et l'endomorphisme associé) ne sont pas inversibles.

- Pour trouver un sous-espace supplémentaire à (C_1, C_2, C_3) en reprenant l'échelonnement ci-dessus, on a simplement à rajouter des colonnes à M de sorte qu'elle soit échelonnée sur 3 colonnes, par exemple:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Et donc le sous-espace engendré par le vecteur $(0, 0, 1)$ est bien un supplémentaire de l'espace des colonnes.

- Cherchons des équations cartésiennes du sous-espace des colonnes, on a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 3 & 4 & 2 & y \\ 5 & 6 & 3 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & y-3x \\ 5 & 4 & 4 & z-5x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & x-2y+z & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & x-2y+z & 0 \end{pmatrix}$$

Alors l'équation cartésienne du sous-espace des colonnes est $x - 2y + z = 0$.

- Cherchons le noyau et l'image de l'endomorphisme représenté par M , on doit utiliser la mémorisation, ie:

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C_1 & C_2 - 2C_1 & 2C_3 - 2C_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C_1 & C_2 - 2C_1 & 2C_3 - C_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On en conclut qu'une base de l'image est $[(1, 3, 5), (0, 2, 4)]$.

Le noyau est de dimension 1 et par la mémorisation, une combinaison linéaire nulle est $0C_1 - C_2 + 2C_3$, le vecteur $(0, -1, 2)$ est bien dans le noyau et est donc une base du noyau.

- Cherchons la solution du système $AX = (1, 2, 3)$, on construit alors la **matrice augmentée** ci-dessous qu'on échelonne en reportant les opérations sur la colonne augmentée:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On en conclut en repassant au système que z est un paramètre libre, ie le système équivalent est:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En résolvant pour (x, y) , on trouve:

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) = \left(0, \frac{(1+\lambda)}{2}, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right) + \text{Ker}(f)$$

Cette méthode permet aussi d'inverser une matrice inversible en faisant apparaître un produit matriciel dans le membre augmenté et l'identité dans le membre de gauche.

III — DUALITÉ

On définit dans ce chapitre une notion fondamentale en algèbre linéaire, très liée à celle de produit scalaire, qui est celle **d'espace dual** d'un espace vectoriel E , qu'on notera E^* et qu'on définit par:

L'espace dual d'un espace vectoriel est l'ensemble des formes linéaires sur cet espace.

Attention, on parle ici de dual **algébrique**, on peut aussi définir un dual **topologique** en requérant que les formes linéaires considérées soit continues. Dans la plupart des exemples, on considèrera $E = \mathbb{R}^2$ et donc par exemple un élément de E^* est:

$$\phi : (x, y) \mapsto 2x + y$$

Dans toute la suite, on se placera dans un espace E de dimension finie¹

Notations:

On introduit de nouvelles notations pratique, tout d'abord on utilisera souvent la notation **delta de Kronecker** qui pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ donne:

$$\begin{cases} \delta_n^m = 1 \text{ si } n = m \\ \delta_n^m = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Propriétés:

On souhaite caractériser la forme d'une forme linéaire ϕ de l'espace dual. On a directement par linéarité que:

$$\forall x \in E ; \phi(x) = \phi \left(\sum_i x^i e_i \right) = \sum_i x^i \phi(e_i)$$

Donc en particulier, on a que évidemment que ϕ est caractérisée par ses images des vecteurs de base, et réciproquement si une application ϕ' est telle que $\phi = \sum_i x_i a_i$, alors ϕ' est une forme linéaire sur E .

Base duale:

Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , alors si on considère la famille de formes linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} e_i^* : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \sum_{k \leq n} x_k e_k &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Ce sont les projections sur les différentes coordonnées. Alors cette famille forme une base de E^* qu'on appellera **base duale** de \mathcal{B} et qu'on notera \mathcal{B}^* . Elle vérifie en outre la relation suivante:

$$e_i^*(e_j) = \delta_i^j$$

Isomorphisme:

En particulier, si on fixe une base \mathcal{B} de E , on a l'isomorphisme fondamental suivant:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{B}} : E &\longrightarrow E^* \\ e_i &\longmapsto e_i^* \end{aligned}$$

C'est un isomorphisme non canonique car il dépend de la base choisie.

¹Tout ce qui suit est en général faux en dimension infinie, l'idée principale étant qu'en dimension infinie, des considérations topologiques sont **nécessaires**.

Base antéduale:

On considère alors le problème inverse, et on se donne une base $\mathcal{B} = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ du dual de E , alors il existe une unique base (e_1, \dots, e_n) de E telle que:

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket ; \phi_i = e_i^*$$

Ou dit autrement il existe une base \mathcal{C} de E telle que $\mathcal{C}^* = \mathcal{B}$, on dira alors que cette base est **l'antéduale** de \mathcal{B} .

Hyperplans:

On rappelle alors qu'un hyperplan est par définition un sous-espace dont le supplémentaire est une droite, on peut alors caractériser les hyperplans en termes de formes linéaires par la proposition suivante:

Les hyperplans sont exactement les noyaux de formes linéaires.

Vecteurs contravariants:

Soit deux bases \mathcal{C}, \mathcal{B} de E et un vecteur u de coordonnées respectives U, U' , on a la propriété de changement de base suivante:

$$U' = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B})U$$

On voit alors ici que les coordonnées après le changement de base dépendent de **l'inverse de la matrice de passage**. On dira dans ce cas qu'un vecteur est **contravariant**¹.

Vecteurs covariants:

Maintenant soit deux bases $\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*$ de E^* et un covecteur u de coordonnées respectives U, U' , on peut utiliser la même formule pour montrer qu'on a:

$$U' = \text{Pass}(\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*)U$$

Or, on peut alors montrer la propriété suivante fondamentale suivante:

$$\text{Pass}(\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*) = {}^t P$$

En particulier on se ramène alors à une matrice de passage entre les bases de E et on a alors la formule de changement de base suivantes (pour les coordonnées placées en ligne):

$${}^t U' = {}^t U P$$

On voit alors ici que les coordonnées après le changement de base (en ligne) dépendent de **la matrice de passage**. On dira dans ce cas qu'un vecteur est **covariant par rapport aux bases de E** . Finalement moralement on a les formules de changement de bases suivantes:

- Si X, Y sont des vecteurs : $Y = P^{-1}X$
- Si X, Y sont des covecteurs : ${}^t Y = {}^t X P$

La notion de vecteurs contravariants et covariants est centrale en algèbre multilinéaire, elle permet la définition d'objets généraux appelés tenseurs qui généralisent ce concept.

¹Par rapport aux bases de l'espace de référence E

III — DÉTERMINANT

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n , nous cherchons à définir une application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \phi(A) \neq 0$$

Définition:

On définit l'application suivante appelée **déterminant**, qu'on note $|A|$ ou $\det(\cdot)$ et qu'on définit par récurrence:

- Si $n = 1$ alors $|(a)| = a$
- Sinon $|A| := a_{1,1}|A_{1,1}| - a_{1,2}|A_{1,2}| + \dots + (-1)^{n+1}a_{1,n}|A_{1,n}|$

Où la notation $A_{1,1}$ signifie la matrice A à laquelle on a retiré la première ligne et la première colonne.

Cette opération s'appelle aussi **développement selon la première ligne** du déterminant, elle se comprends visuellement par:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix}$$

On régresse ainsi vers des déterminants de plus petite taille, et après plusieurs étapes, vers un réel.

Propriétés:

On peut montrer que cette application est **une forme multilinéaire alternée** en les colonnes de la matrice, en particulier, on a les propriétés suivantes:

- Ajouter à une colonne une combinaison linéaire **des autres colonnes** ne change pas le déterminant.
- Echanger deux colonnes d'une matrice change le signe du déterminant.
- Si deux colonnes sont égales ou qu'une des colonnes est nulle, le déterminant est nul.

Forme analytique:

Le déterminant étant une application définie sur E^n , on peut calculer son expression par rapport à une base $(e_i)_{i \leq n}$, en effet on a:

$$\det(a_1, \dots, a_n) = \det \left(\sum_{i_1} a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n} a_{i_n,1} e_{i_n} \right) = \sum_{i_1, \dots, i_n \leq n} a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} \times \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

Mais beaucoup de ces termes sont nuls, en particulier les termes non nuls sont exactement les permutations des colonnes de la matrice, et donc on peut simplifier l'expression en:

$$\det(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \times \det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

Puis finalement, on remarque que le déterminant du membre de droite peut être remis dans le bon ordre modulo la signature de la permutation considérée et on obtient l'expression finale:

$$\det(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$

Cette forme nous permet alors de montrer que le déterminant de la transposée est égale au déterminant de A , et donc par la suite qu'on peut développer un déterminant selon n'importe quelle ligne ou colonne et obtenir le même résultat au signe près.

Propriété de morphisme:

Muni de cette forme explicite, on peut alors montrer que le déterminant est un **multiplicatif**, ie on a que:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) ; \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

En particulier si A est inversible, on montre alors que $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ et donc que $\det(A)$ n'est pas nul¹. De plus on montre de la même manière que le déterminant est un **invariant de similitude**.

Déterminant d'une famille:

Si on considère une famille $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de coordonnées (C_1, \dots, C_n) dans une certaine base \mathcal{B} , alors on peut définir le déterminant **d'une famille de vecteurs** dans cette base par:

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$$

Soit deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, on pourrait alors considérer **l'effet d'un changement de base** sur un tel déterminant et on a alors:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \text{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Et donc le déterminant dans la nouvelle base est égal à celui dans l'ancienne modulo le déterminant de la matrice de changement de coordonnées.

Orientation d'une base:

On peut alors définir **l'orientation d'un espace vectoriel**, en effet, on dira que deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ont même orientation si et seulement si:

$$\det(\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')) > 0$$

Si on fixe alors une base orientée canoniquement, on qualifie son orientation (et celles de toutes les bases de même orientation) de **directe** et les bases d'orientation opposée sont alors d'orientation **indirecte**. Par exemple dans le cas de \mathbb{R}^n , la base canonique est la base qui, par convention, est d'orientation directe.

Cofacteurs:

Reprenons en simplifiant la définition donnée plus haut du développement selon la i -ème ligne:

$$|A| := a_{i,1}|A_{i,1}| - a_{i,2}|A_{i,2}| + \dots + (-1)^{n+i}a_{i,n}|A_{i,n}| = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j}|A_{i,j}|$$

On appelle alors **cofacteur** de l'élément $a_{i,j}$ le scalaire:

$$\text{cof}(a_{i,j}) := (-1)^{j+i}|A_{i,j}|$$

Ce sont simplement les déterminants mineurs que l'on calcule à chaque itération **en tenant compte du signe qui précède le coefficient**. En pratique pour trouver le signe du cofacteur, on ne calcule pas $(-1)^{i+j}$, mais on le détermine par la règle de l'échiquier qu'on peut se représenter comme suit:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Exemple: Pour $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, le cofacteur du coefficient en position (1,2) est $-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

¹La réciproque, importante, de ce résultat sera montrée dans la section sur la comatrice et permettra de conclure que le déterminant répond bien à la question introductive de ce chapitre.

Comatrice:

On peut alors définir la **comatrice** d'une matrice A donnée, c'est en fait simplement la **matrice des cofacteurs** de A , ie le terme en position (i, j) de la comatrice est exactement le cofacteur de l'élément en position (i, j) .

L'intérêt principal de la comatrice est de calculer l'inverse de matrices inversibles, en effet, on peut montrer l'identité:

$$A \times \text{com}(A)^\top = \det(A)I_n$$

Et en particulier si le déterminant est non-nul, alors A est **inversible** et on a une formule explicite pour l'inverse de A donnée par:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^\top$$

Cette formule est néanmoins particulièrement inexploitable pour $n > 3$ du fait de la quantité de calcul à réaliser.

Conclusion du problème introductif:

- Dans la section sur la propriété de morphisme on a montré que si A est inversible, alors nécessairement son déterminant est non-nul.
- Dans la section sur la comatrice, on a montré que réciproquement si le déterminant de la matrice est non-nul, alors elle est inversible.

On a donc bien montré que l'application déterminant ainsi définie répond bien au problème posé en début de chapitre et caractérise bien l'inversibilité d'une matrice. En outre c'est un morphisme de groupe:

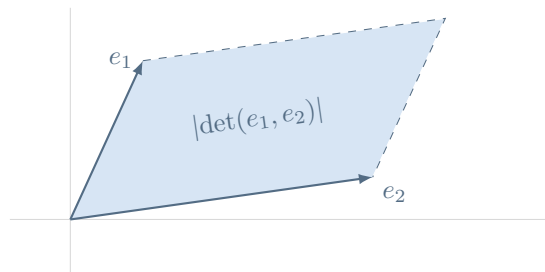
$$\det(\cdot) : GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*$$

Et en outre il ne dépend pas de la représentation matricielle choisie vu que c'est un invariant de similitude. C'est donc une quantité intrinsèque des endomorphismes.

Volume orienté:

Le déterminant admet une interprétation géométrique intéressante liée au concept d'aire, de volumes, et d'hypervolumes de manière générale.

Considérons le cas simple d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de vecteurs de \mathbb{R}^2 , alors le déterminant de cette base correspond à l'**aire algébrique**¹ du parallélogramme formé par les deux vecteurs, ie:



Plus généralement, le déterminant d'une famille de n vecteurs est l'**hypervolume algébrique** du parallétope formé par ces n vecteurs.

¹C'est une aire "signée", ie l'aire géométrique est donc la valeur absolue de cette aire algébrique.

III — INTRODUCTION À LA RÉDUCTION

Dans ce chapitre, nous étudierons un domaine vaste de l'algèbre linéaire appelé **réduction des endomorphismes**.

En effet, sous une forme quelconque un endomorphisme représenté par une matrice présente plusieurs problèmes:

- Il est coûteux de calculer les puissances d'une matrice quelconque.
- Une représentation quelconque donne peu d'informations sur l'endomorphisme.

L'objectif sera donc de réduire (comprendre simplifier) la représentation de l'endomorphisme, et de le représenter par une matrice plus simple.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et une famille (E_i) de sous-espaces **supplémentaires**¹, alors on peut construire une base \mathcal{B} dite **base adaptée à la décomposition** en concaténant des bases respectives des E_i .

Elements Propres :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit que λ est une **valeur propre**² de l'endomorphisme f si et seulement si il existe un vecteur non-nul $u \in E$ tel que:

$$f(u) = \lambda u$$

On dira alors qu'un tel vecteur est **vecteur propre** de l'endomorphisme et on appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ l'ensemble des vecteurs propres associés, qu'on note E_λ dont on déduit une expression³:

$$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$$

Enfin, on peut montrer une propriété très importante pour la suite:

Toute somme de sous-espaces propres est **directe**.

L'image des sous-espaces propres par l'endomorphisme se réduit à une homothétie de rapport la valeur propre.

Sous-Espaces Stables :

On dit que F est **stable par l'endomorphisme** si et seulement si:

$$f(F) \subseteq F$$

On considère maintenant une base de F qu'on complète en une base de E via le théorème de la base incomplète, alors dans une telle base, l'endomorphisme est représenté par la matrice par blocs:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

¹Comme tout sous-espace admet un supplémentaire (théorème de la base incomplète), on peut définir une base adaptée à **un seul** sous-espace comme étant une base adaptée à la somme directe de ce sous-espace et de son supplémentaire, qui revient à compléter la base en une base de E .

²On appelle **spectre**, noté $\text{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f .

³Directement d'après la définition d'un vecteur propre associé à λ .

Plus généralement, si on a une famille (E_i) de sous-espaces **stables et supplémentaires**, ie $E = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_i$, et \mathcal{B} est une base adaptée à cette décomposition, alors dans cette base, f est représentée par la matrice diagonale par blocs:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}$$

On remarque donc que la stabilité des sous-espaces nous permet de représenter notre transformation de manière plus simple, en particulier, on peut alors montrer une propriété fondamentale:

Tout les sous-espaces propres sont stables.

Polynôme caractéristique :

On peut montrer¹ que λ est valeur propre si et seulement si:

$$E_\lambda \neq \{0_E\} \iff \det(f - \lambda \text{Id}) = 0$$

On définit alors le **polynôme caractéristique** d'un endomorphisme par:

$$P_f = \det(f - X \text{Id})$$

En particulier, on peut donc montrer que:

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

Ceci nous donne donc une méthode systématique pour trouver les valeurs propres d'un endomorphisme. En particulier, on peut alors montrer les identités suivantes, utiles dans la recherche de valeurs propres:

- La somme des valeurs propres est égale à **la trace de la matrice**.
- Le produit des valeurs propres est égale au **déterminant de la matrice**.

Diagonalisation :

Les endomorphismes qu'on peut représenter le plus simplement sont ceux qui réduisent (dans une base bien choisie) à une homothétie des vecteurs de la base. On dira alors que ces endomorphismes sont **diagonalisables**, formellement:

Un endomorphisme est diagonalisable si il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f .

De manière équivalente:

Un endomorphisme est diagonalisable si ses matrices sont semblables à une matrice diagonale.

Exemple: Soit f un tel endomorphisme de \mathbb{R}^3 et $(e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, e_{\lambda_3})$ des tels vecteurs propres, alors dans cette base, f est représenté par la matrice:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Ou encore si A est la matrice de f dans la base canonique, alors $A = PDP^{-1}$ avec:

$$P = ([e_{\lambda_1}]_{\mathcal{C}}, [e_{\lambda_2}]_{\mathcal{C}}, [e_{\lambda_3}]_{\mathcal{C}}) \text{ et } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

*Diagonaliser un endomorphisme revient à **décomposer l'espace en somme directe de droites stables**.*

¹ E_λ est un noyau, il suffit de caractériser le fait qu'il soit non vide en termes de la bijectivité d'un certain endomorphisme.

Critères de diagonalisabilité :

On sait qu'un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il admet une base de vecteurs propres, alors on peut montrer¹ que f est diagonalisable si et seulement si:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda$$

En particulier on remarque alors que montrer la supplémentarité revient à montrer que **la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension totale** car toute somme de sous-espaces propres est directe.

On peut alors montrer que si λ est une valeur propre de multiplicité α pour le polynôme caractéristique, alors:

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \alpha$$

On a alors le théorème fondamental suivant:

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme est scindé sur \mathbb{K} et que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.

On peut donc étudier si un endomorphisme est diagonalisable en calculant les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés, ce qui revient à un calcul de polynôme caractéristique suivi de calculs de noyau.

Exemple: Diagonalisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

On peut calculer $P_A = \det(A - XI_3) = X^2(X - 6)$, on a alors deux sous-espaces propres, E_0 et E_6 et on sait que E_0 est de dimension 1, il suffit alors de vérifier que E_6 est bien de dimension 2 pour conclure que $\sum \dim(E_\lambda) = \dim(E)$ et donc que la matrice est diagonalisable.

Pour trouver une base de vecteurs propres, il suffit alors de trouver une base de E_0, E_6 et de la concaténer en une base de E .

¹En effet, si tel est le cas, alors il suffit de prendre une base pour chaque E_λ (qui est bien constituée de vecteurs propres par définition), et de les concaténer pour obtenir une base de E constituée de vecteurs propres.

III — POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

L'objet principal de ce chapitre est l'étude des polynômes d'endomorphismes et de matrices, en effet, les matrices est les endomorphismes formant une algèbre, on peut en calculer des puissances, des sommes, et effectuer un multiplication externe, on peut donc définir des **polynômes de matrices/d'endomorphismes**, en effet si on a $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et u un endomorphisme, on définit alors:

$$P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$$

Propriétés :

On définit alors un **morphisme d'algèbre** pour un endomorphisme donné par:

$$\begin{aligned}\phi_u : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\longmapsto P(u)\end{aligned}$$

En particulier, on a donc $PQ(u) = P(u) \circ Q(u)$, on peut alors en déduire la proposition suivante:

Deux polynôme d'un même endomorphisme commutent.

On peut alors montrer que les polynômes d'endomorphismes ont un bon comportement vis-à-vis des changements de bases, en particulier si $A = PBP^{-1}$, pour tout polynôme Q , on montre facilement que:

$$Q(A) = PQ(B)P^{-1}$$

Enfin, on montre aussi que si u est représenté par A dans une base, alors u^k est représenté par A^k dans cette même base, et donc par linéarité $P(u)$ est représenté par $P(A)$ dans cette base. En particulier, le polynôme d'un endomorphisme ne dépend alors pas de la représentation choisie.

Valeurs propres d'un polynôme d'endomorphisme :

Pour un endomorphisme u admettant une valeur propre λ de vecteur propre associé v , on peut alors étudier le lien entre les polynômes d'endomorphisme et les valeurs propres, et en particulier, on peut montrer que λ^k est valeur propre de u^k et donc par linéarité que:

$$P(u)(V) = P(\lambda)(V)$$

Et donc que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Polynômes annulateurs :

On considère $u \in \mathcal{L}(E)$, et on définit l'ensemble des **annulateurs** de u par:

$$\mathcal{A}_u := \left\{ P \in \mathbb{K}[X] ; P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \right\}$$

Ce sont l'ensemble des polynômes qui annulent u . On définit de même les polynômes annulateurs de matrices. Une propriété fondamentale est alors que cette ensemble n'est jamais vide¹, en effet on a que:

Tout endomorphisme admet un polynôme annulateur non-nul.

On peut alors étudier le lien entre les valeurs propres d'un endomorphisme et ses annulateurs, et on peut alors montrer la propriété suivante:

$$\text{Sp}(u) \subseteq \{ \alpha \in \mathbb{K} ; P(\alpha) = 0 \}$$

Les seules valeurs propres possibles sont les racines de l'annulateur.

¹Il suffit de considérer la dimension de E , et une famille plus grande que cette dimension, donc liée, et on peut alors trouver un polynôme en u qui s'annule.

Néanmoins il n'y a pas équivalence, plus précisément, si $A_u \in \mathcal{A}_u$, et si on définit $Q_u = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k)$ où les (λ_i) sont toutes les valeurs propres de u , alors on a:

$$Q_u \mid A_u$$

Polynôme minimal :

On considère l'ensemble des annulateurs d'un endomorphisme u , alors il est non-vide comme énoncé ci-dessus, et il admet aussi **un plus petit élément unitaire** (au sens du degré) et il est unique.

On appelle alors ce plus petit élément **le polynôme minimal** de u qu'on note M_u

Théorème de Cayley-Hamilton :

On peut alors énoncer le théorème fondamental de la réduction des endomorphismes, ie le **théorème de Cayley-Hamilton**:

Le polynôme caractéristique est un annulateur.

La démonstration, non-triviale, se fait par un argument topologique et par la continuité de la fonction polynôme caractéristique. On a donc la relation avec le polynôme minimal suivante:

$$M_u \mid P_u$$

Lemme des noyaux :

On s'intéresse finalement aux **noyaux de polynômes d'endomorphismes** pour pouvoir énoncer le dernier théorème de cette partie. On peut tout d'abord montrer facilement le résultat suivant:

Le noyau d'un polynôme d'endomorphisme est stable par celui-ci.

Soit P, Q deux polynômes **premiers entre eux**, on peut alors montrer¹ le **lemme des noyaux**, c'est à dire que:

$$\text{Ker}PQ(u) = \text{Ker}P(u) \oplus \text{Ker}Q(u)$$

En particulier, pour P un polynôme annulateur de u qui se décompose en P_1, \dots, P_k , on a la décomposition suivante de l'espace tout entier:

$$E = \bigoplus_{k=1}^n \text{Ker}P_k(u)$$

Caractérisations via les annulateurs :

On peut caractériser la diagonalisabilité via les annulateurs, en effet, on peut montrer via le lemme des noyaux qu'on a:

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un annulateur scindé à racines simples.

On peut aussi caractériser la trigonalisabilité par:

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si il admet un annulateur scindé.

¹La démonstration est non-triviale et fait appel à la relation de Bezout pour les polynômes.

III — TRIGONALISATION

Les endomorphismes qu'on ne peut représenter sous forme diagonale nous posent alors problème, on cherche alors dans ce chapitre à mobiliser la théorie des polynômes d'endomorphismes pour comprendre les conditions pour représenter de tels endomorphismes sous une forme plus simple triangulaire, ou sous **forme de Dunford** qui sera présentée ci-dessous.

Critère de trigonalisation :

On peut montrer le critère suivant:

Un endomorphisme u est trigonalisable sur \mathbb{K} si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{K} .

En particulier tout les endomorphismes sont trigonalisables dans \mathbb{C} .

Néanmoins, on comprend vite qu'une forme triangulaire quelconque sera peu utile car on ne pourra calculer ses puissances facilement, on peut alors montrer que si u est trigonalisable, il admet une forme plus simple encore appelée **forme de Dunford**:

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice **triangulaire par blocs triangulaires**. Et les puissances de telles matrices sont alors facile à calculer via le produit par blocs et le binôme de Newton. En effet chaque bloc est de la forme $\lambda I_n + N$ avec N nilpotente, donc le binôme simplifie grandement les calculs.

Structure des noyaux itérés :

Soit u un endomorphisme, alors on peut montrer que les noyaux des puissances de u forment la structure suivante:

$$\text{Ker } u \subsetneq \text{Ker } u^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker } u^k$$

Et cette suite de noyaux itérés est **stationnaire**, en particulier, si u est nilpotent, elle est stationnaire et le dernier sous espace est E tout entier.

Sous-espaces caractéristiques :

Soit u un endomorphisme de polynôme caractéristique $P_u = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, alors on appelle **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ_k le sous-espace suivant:

$$F_{\lambda_k} = \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$$

On sait que les $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a:

$$E = F_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus F_{\lambda_k}$$

Et donc en particulier on a $\dim(F_{\lambda_1}) = \alpha_1$.

Les sous-espaces caractéristiques sont des sous-espaces propres "sympathiques".

C'est sont aussi des noyaux de polynômes d'endomorphismes donc en particulier, ils sont stables par u . Par ailleurs, d'après la structure des noyaux itérés, on a :

$$E_{\lambda_k} = \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^1 \subsetneq \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k} = F_{\lambda_k}$$

Ce sont ces sous-espaces qui nous permettront de construire une base de E dans laquelle u est représenté par une matrice de Dunford.

Trigonalisation de Dunford :

On peut alors définir une méthode générale de trigonalisation de Dunford, on considère un endomorphisme u et son polynôme caractéristique, alors on obtient une base de trigonalisation de Dunford par l'algorithme suivant :

- Si la dimension du sous-espace propre E_λ est égale à la multiplicité, le bloc associé à λ est diagonal, et la base recherchée est une base du sous-espace propre
- Sinon, on calcule une **base adaptée** aux noyaux itérés $E_\lambda \subsetneq \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^2 \subsetneq \dots \subsetneq F_\lambda$ via le théorème de la base incomplète puis les coordonnées de l'image de cette base par u pour obtenir le bloc associé à λ .

Exemple: Dans toute la suite nous considérerons l'exemple de l'endomorphisme de \mathbb{R}^5 de polynôme caractéristique $P_u = (X - 2)^2(X - 3)^3$, alors d'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$E = F_2 \oplus F_3$$

Les valeurs propres sont 2, 3 et on supposera que la première valeur propre est telle que la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité, alors on trouve aisément une base e_1, e_2 du bloc associé à 2, il sera diagonal.

Il nous suffit alors de trouver une base de $F_3 = \text{Ker}(u - 3\text{Id})^3$ qu'on va calculer de la manière suivante :

- On calcule une base de $E_3 = \text{Ker}(u - 3\text{Id})$
- On la complète en une base de $\text{Ker}(u - 3\text{Id})^2$
- On la complète en une base de $F_3 = \text{Ker}(u - 3\text{Id})^3$

Finalement, on a F_3 de dimension 3 et donc une base e_3, e_4, e_5 de F_3 . La base finale recherchée est donc $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ et dans cette base la matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Où les coefficients $*$ sont donnés par le calcul des coordonnées des images des vecteurs dans la base.

III — APPLICATIONS DE LA RÉDUCTION

Dans cette dernière partie, on va maintenant pouvoir développer les applications possibles de la réduction dans la résolution de problèmes variés. On considère ici le cas d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Dans le cas plus simple de matrice diagonalisable, tout les calculs sont plus simples et les mêmes méthodes s'appliquent.

Calculs de puissances :

La première étape pour calculer une puissance de matrice via la réduction est de remarquer que:

$$A^k = (PTP^{-1})^k = PT^kP^{-1}$$

Or, T^k se calcule alors par blocs et on a:

$$T^k = \begin{pmatrix} B_1^k & \\ & B_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & B_2^k \end{pmatrix}$$

Et on a alors $B_2 = 3\text{Id} + N$ avec N strictement triangulaire donc nilpotente, et donc on calcule facilement sa puissance via le binôme de Newton car Id commute toujours.

Suites récurrentes :

Soit 3 suites u_n, v_n, w_n telles que $u_1 = 1, v_1 = 1, w_1 = 1$ on considère maintenant le **système de suites récurrentes** suivant:

$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = 3w_{n-1} \end{cases}$$

On pose alors $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et le système se réécrit alors sous la forme matricielle suivante:

$$U_n = AU_{n-1}$$

Par récurrence on trouve alors que $U_n = A^n U_1$, donc en particulier sachant U_1 , il nous suffit alors de calculer A^k comme précédemment ainsi que la matrice de passage et son inverse pour réussir à trouver le terme général de u_n, v_n et w_n .

Plus subtilement, cette méthode s'applique aussi aux suites récurrentes d'ordre multiple, considérons par exemple la suite u_n de premiers termes $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

En effet si on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$ alors on a l'expression matricielle:

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} U_{n-1}$$

Alors si la matrice est diagonalisable¹, on peut alors trouver une expression de U_n en fonction de U_0 et alors une expression de u_n simplement en fonction de n .

¹La matrice associée à la suite de Fibonacci n'est pas réductible dans \mathbb{R} donc on ne peut pas trouver une expression de son terme général.

Systèmes différentiels :

On considère trois fonctions réelles f, g, h de classes \mathcal{C}^1 et on cherche à résoudre le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} f'(x) = 2f(x) + g(x) + h(x) \\ g'(x) = f(x) + 2g(x) + h(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$$

On pose alors $F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \end{pmatrix}$ et le système se réécrit alors sous la forme matricielle suivante:

$$F'(x) = AF(x) = PTP^{-1}F(x)$$

On pose alors $G(x) = P^{-1}F(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix}$, alors on se ramène à l'équation matricielle suivante:

$$G'(x) = TG(x)$$

Alors on s'est ramené à un système triangulaire que l'on sait résoudre en partant du bas.

On peut donc résoudre pour $G(x)$, et alors $F(x)$ est égal à $PG(x)$ (en utilisant la définition de $G(x)$) et on a donc trouvé les fonctions qui satisfont le système. Si on a des conditions initiales, on peut alors résoudre pour trouver l'unique triplet qui le satisfait.

V — ESPACES QUADRATIQUES

On se donne un espace vectoriel E , on dira que c'est un **espace quadratique** si et seulement si on peut définir une **forme bilinéaire symétrique** sur cet espace.

Alors on pourra alors définir une **forme quadratique** sur cet espace qui est une application $q : E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour une certaine forme bilinéaire symétrique f , on ait :

$$q(x) = f(x, x)$$

On appellera alors le membre de droite **forme polaire** de la forme quadratique q . On remarquera par la suite que moralement ces deux applications s'interpètent de la manière suivante :

- Une forme bilinéaire symétrique mesure des "angles" dans l'espace.
- Une forme quadratique mesure des "longueurs" dans l'espace.

Mais dans le cas général d'un espace quadratique et sans plus d'hypothèses, ces "angles" et "longueurs" ne correspondent pas vraiment aux concepts géométriques que l'on connaît. Tout l'algèbre bilinéaire développée dans ce chapitre peut se résumer à étudier des formes primitives qui par la suite permettront d'axiomatiser la notion de **produit scalaire** qui incarnera les propriétés géométriques recherchées.

Formules de polarisation :

On considère une forme quadratique q quelconque et on souhaiterait reconstituer la forme polaire de q , alors on peut montrer qu'elle vérifie les **identités de polarisation** ci-dessous :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) \\ f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \end{cases}$$

Ces identités se retrouvent aisément en considérant la forme quadratique triviale sur \mathbb{R} associée à $f(x, y) = xy$ qui est donc $q(x) = x^2$.

Expression matricielle :

En dimension finie, on peut représenter les vecteurs $x, y \in E$ dans une base $\mathcal{B} = (e_i)$, on peut alors développer par bilinéarité et symétrie pour obtenir :

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j f(e_i, e_j)$$

En particulier on peut alors remarquer que la forme bilinéaire est parfaitement déterminée par la donnée des n^2 images des paires des vecteurs de la base. En particulier, en notant X, Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x, y dans la base, alors on peut montrer qu'il existe une matrice A telle que :

$$[f(x, y)]^{\mathcal{B}} = X^{\top} A Y$$

Et cette matrice est alors de la forme suivante :

$$(a_{i,j}) = f(e_i, e_j)$$

En particulier cette matrice est symétrique et représente parfaitement la forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique¹.

¹Il suffit de calculer les coordonnées de $f(x, x)$ pour le voir, on trouve alors qu'elles sont égales à $X^{\top} A X$

Règle du dédoublement:

Supposons que l'on connaisse une expression analytique de $q(x)$ dans une base (e_i, \dots, e_n) , on a alors:

$$q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j f(x_i, x_j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j b_{i,j}$$

Et donc par symétrie du produit, on peut alors retrouver la matrice $A = (a_{i,j})$ de q par la règle dite du **dédoublement des termes**, ie:

$$\begin{cases} a_{i,j} &= b_{i,j} \text{ si } i = j \\ a_{i,j} &= \frac{1}{2} b_{i,j} \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Exemple: On considère la forme quadratique suivante sur \mathbb{R}^2 :

$$q(x, y) = 3x^2 + 5y^2 + 8xy$$

Alors la règle du dédoublement des termes nous donne que la matrice de q dans la base canonique est:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Orthogonalité:

On peut alors définir une notion d'orthogonalité¹ pour la forme bilinéaire f , qu'on appellera f -orthogonalité, et on dira alors:

Deux vecteurs sont f -orthogonaux si et seulement si $f(x, y) = 0$.

On notera alors $x \perp y$. On peut alors définir le concept de famille f -orthogonale, ainsi que le concept de base f -orthogonale, comme une famille telle que tout les vecteurs soient deux à deux orthogonaux.

Attention: Dans le cas général, une famille orthogonale n'est pas forcément libre ! Il suffit de considérer $q(x, y) = x^2$ et la famille $(0, 1), (0, 1)$. C'est une nouvelle conséquence du fait que cette notion d'orthogonalité n'est **pas géométrique**.

Orthogonal d'une partie:

Soit A une partie de E , alors on peut définir l'orthogonal de A comme le **sous-espace vectoriel** défini par:

$$A^\perp := \{u \in E ; \forall v \in A, u \perp v\}$$

En dimension finie, on a alors une base (e_1, \dots, e_n) de F et on a la caractérisation suivante:

$$F^\perp := \{u \in E ; \forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, u \perp e_i\}$$

On peut alors montrer les propriétés suivantes pour l'application qui à une partie associe son orthogonal:

- La décroissance du passage à l'orthogonal.
- L'inclusion de la partie dans son double orthogonal.

Noyau:

Pour une forme bilinéaire quelconque, il est possible que l'ensemble E^\perp soit non-trivial, on appelle alors cet ensemble **noyau** de la forme bilinéaire, cette dénomination² venant de la raison ci-dessous, pour M la matrice de la forme bilinéaire:

$$E^\perp = \ker(M)$$

¹**Attention:** Pour l'instant ceci n'est **pas** une notion géométrique, mais purement algébrique.

²**Attention:** Ici on montre que le noyau de la forme bilinéaire est défini par le noyau de l'application linéaire associée à sa matrice, c'est non-trivial.

Avec ces définitions il est alors possible de montrer un analogue à la **formule du rang**:

$$\dim(\text{Ker}q) + \dim(\text{Im}q) = \dim(E)$$

Si ce noyau est trivial, on dira alors que la forme bilinéaire est **non-dégénérée** et en **dimension finie** on a alors les égalités suivantes:

$$\begin{cases} \dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(E) \\ F = F^{\perp\perp} \end{cases}$$

Attention, ici il est important de noter que même pour une forme non-dégénérée, on n'a **pas la supplémentation à priori**.

Cône isotrope:

Pour une forme bilinéaire quelconque, il est aussi possible que l'ensemble $\{x \in E; f(x, x) = q(x) = 0\}$ soit non-trivial, ici il s'agit des vecteurs dont la "longueur" est nulle, on appellera alors ces vecteurs **vecteurs isotropes**. On a alors directement l'inclusion suivant:

Le noyau est inclu dans le cône isotrope.

Si le cône isotrope est trivial, alors on dira que la forme est **définie**.

Cas particulier des formes réelles:

Soit f une forme bilinéaire symétrique réelle, alors on classifie ces formes par:

- Si $\forall x \in E, f(x, x) \geq 0$, on dira que la forme est **positive**.
- Si $\forall x \in E, f(x, x) \leq 0$, on dira que la forme est **négative**.

Réduction:

On cherche maintenant à trouver une base \mathcal{B} de E telle que l'expression de $f(x, y)$ soit plus simple, en particulier on essaye de trouver une base telle que sa matrice soit **diagonale**, et on peut alors facilement montrer que c'est équivalent à **chercher une base f -orthogonale**. On a alors dans une telle base:

$$q(x) = \sum_{i \in I} q(e_i) x_i^2 = \sum_{i \in I} q(e_i) e_i^*(x)^2$$

On peut montrer le théorème suivant:

Il existe des formes linéaires indépendantes telles que $q(x) = q(e_1)l_1(x)^2 + \dots + q(e_n)l_n(x)^2$

En particulier, ce théorème se démontre de manière constructive via un algorithme qui nous permettra de réduire tout forme bilinéaire en somme de carrés de formes linéaires indépendantes, c'est la **réduction de Gauss**, une fois les formes linéaires explicitées, il faut alors compléter la famille de formes linéaires en une base du dual, et la base orthogonale recherchée sera **la préduale de cette base**.

Algorithme de Gauss:

On se donne une forme quadratique suivante à décomposer:

$$q(x) = \sum_{i,j} c_{i,j} x_i x_j$$

L'algorithme est récursif et comporte deux cas:

- La forme quadratique comporte un terme carré de la forme $c_{i,i} x_i^2$
- La forme quadratique ne comporte pas de termes carrés de la forme $c_{i,i} x_i^2$

Traisons ces deux cas séparément:

- Dans le premier cas, on regroupe tout les termes qui comportent le terme carré et on applique la formule $A^2 + BA = (A + \frac{B}{2})^2 - \frac{B^2}{2}$ ce qui fait apparaître un carré de forme linéaire.
- Dans le second cas on regroupe tout les termes qui contiennent deux variables choisies et la formule $AB = \frac{1}{4}((A+B)^2 - (A-B)^2)$ ce qui fait apparaître des carrés de formes linéaires.

Exemple: On pose la forme quadratique suivante:

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2xy + y^2 - 4yz$$

On commence par isoler les termes en x et appliquer la formule du premier cas, on a donc notre premier carré de forme linéaire:

$$q(x, y, z, t) = (x^2 + 2xy) + y^2 - 4yz = (x + y)^2 - y^2 + y^2 - 4yz = l_1(x, y, z, t)^2 - 4yz$$

Maintenant on réapplique l'algorithme à la forme quadratique restante $\tilde{q}(x, y, z) = -4yz$, on applique la formule du second cas et on a:

$$\tilde{q}(x, y, z, t) = -4yz = -((y+z)^2 - (y-z)^2) = -l_2(x, y, z, t)^2 + l_3(x, y, z, t)^2$$

Finalement on trouve:

$$q(x, y, z, t) = l_1(x, y, z, t)^2 - l_2(x, y, z, t)^2 + l_3(x, y, z, t)^2 = (x + y)^2 - (y + z)^2 + (y - z)^2$$

On a alors trouvé les formes linéaires recherchées l_1, l_2, l_3 et pour trouver une base f -orthogonale de \mathbb{R}^4 , il reste encore la dernière étape:

On complète (l_1, l_2, l_3) en une base du dual de E et la base recherchée est alors la préduale de celle-ci.

Signature:

On définit alors la **signature d'une forme bilinéaire** comme étant le couple d'entiers (p, q) avec:

- L'entier p est le **nombre de valeurs propres strictement positives**.
- L'entier q est le **nombre de valeurs propres strictement négatives**.

On peut alors montrer la **loi d'inertie de Sylvester** et si on a la forme réduite:

$$q(x) = \alpha_1 l_1(x)^2 + \dots + \alpha_n l_n(x)^2$$

Alors on cette loi nous donne que p est exactement le nombre de coefficients α_i strictement positifs, et q le nombre de coefficients négatifs.

V — ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

On appelle **espace préhilbertien réel** un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une forme **bilinéaire symétrique définie et positive**, c'est à dire une forme qui vérifie:

Symétrie	$f(u, v) = f(v, u)$
Définie	$f(u, u) = 0 \implies u = 0$
Positivité	$f(u, u) \geq 0$

On dira alors qu'une telle forme est un **produit scalaire** sur E et on notera:

$$f(x, y) = \langle x | y \rangle$$

Cet espace, qui est un cas particulier d'espace quadratique, est celui où se réalisera la signification **géométrique** des formes bilinéaires et quadratiques, grâce aux nouvelles contraintes sur ces formes.

Exemples :

- On définit sur \mathbb{R}^n le produit scalaire défini par:

$$\langle u | v \rangle = \sum_{k=1}^n u_k v_k$$

- On définit sur $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ le produit scalaire défini par:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

- On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire défini pour (x_n) $n+1$ points fixés par:

$$\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$$

- On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par:

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$$

Norme :

A partir de la définition d'un tel espace, on alors montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ **induit une norme** sur E donnée par la **forme quadratique associée**:

$$\forall u \in E ; \|u\|^2 = \langle u | u \rangle$$

Cela fait donc de E un espace vectoriel normé.

Angle:

A partir de ces définitions, on peut alors définir l'**angle non-orienté** $\theta \in [0; \pi]$ entre deux vecteurs u, v par:

$$\theta := \cos^{-1} \left(\frac{\langle u | v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right)$$

Ce qui nous permet de caractériser l'**orthogonalité** du produit scalaire comme un orthogonal **géométrique**, en effet $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$ dans cette définition ssi $\langle u | v \rangle = 0$

L'interprétation de cet "angle" ou de "l'orthogonalité" entre deux vecteurs diffère selon le contexte, elle peut alors signifier une corrélation en probabilité, ou un réel angle géométrique dans \mathbb{R}^n par exemple.

Inégalité de Cauchy-Schwarz:

Dans tout espace préhilbertien réel, pour tout $u, v \in E$ on a l'inégalité¹ suivante:

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Avec cas d'égalité quand u, v sont **liés**.

Formules géométriques:

Dans tout espace préhilbertien réel, pour tout $u, v \in E$ on a les identités suivantes:

- **Identité du parallélogramme** : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
- **Théorème de Pythagore** : $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

La première caractérise les espaces normés telles que leur norme soit issue d'un produit scalaire.

Orthogonalité:

Dans le cadre des espaces préhilbertiens, l'orthogonal obtient alors une partie des propriétés géométriques intuitives qu'on lui connaît, en particulier:

- Une famille orthogonale de vecteurs non-nuls est toujours libre.
- Une partie et son orthogonal sont toujours en somme directe.

Attention dans un espace préhilbertien quelconque, ils ne sont pas toujours supplémentaires, on verra que c'est le cas en dimension finie !

Théorème de représentation:

On se donne un élément ϕ du dual d'un espace préhilbertien alors, dans ce cadre, et même de manière générale dans celui des espaces de Hilbert, on peut montrer **le théorème de représentation de Riesz** qui caractérise une forme linéaire ϕ par le produit scalaire:

$$\exists w \in E, \forall x \in E; \phi(x) = \langle w | x \rangle$$

Simplement, cela signifie que toute forme linéaire est **exactement représentée** par le produit scalaire pour un certain vecteur w , en particulier, on a donc une bijection entre E et son dual.

Exemple: On prends la forme linéaire $\phi(x, y, z) = 5x + 4y + 3z$ et on munit \mathbb{R}^3 de son produit scalaire canonique, alors pour tout u on a directement que:

$$\phi(u) = \langle (5, 4, 3) | u \rangle$$

Transposition:

On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$ représentée par une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors on définit **l'application transposée** de f par:

$$\begin{aligned} f^\top : F^* &\longrightarrow E^* \\ \phi &\longmapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

On vérifie alors que cette application est bien définie est on a alors la propriété suivante:

L'application transposée est représentée dans les bases correspondantes par la matrice transposée.

Ce qui donne finalement une interprétation fonctionnelle de la matrice transposée. A FINIR, LA TRANSPOSEE EST EXACTEMENT LADJOINT, LIEN AVEC TOUT LE RESTE A FAIRE, UNIQUE APPLICATION QUI VERFIE $\langle f(x), y \rangle = \langle x, tf(y) \rangle$, DUALITE.

¹Très puissante et permet d'obtenir des majorations dans des cas très variés, la preuve parte de l'étude du polynôme $P(t) = \|x + ty\|^2$

V — ESPACES EUCLIDIENS

On appelle **espace euclidien** tout espace préhilbertien réel **de dimension finie**. Dans toute la suite on prendra (e_1, \dots, e_n) une base de E .

En particulier, dans une base **orthonormée**, on a $\langle x | e_i \rangle = x_i$ et donc:

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k$$

Orthogonalité:

En dimension finie, on a finalement l'ensemble des propriétés géométriques de l'orthogonalité qui deviennent vraies, en effet on a::

$$F \oplus F^\perp = E$$

Tout sous-espace admet un unique supplémentaire orthogonal.

On peut alors en déduire qu'en dimension finie on a:

$$(F^\perp)^\perp = F$$

Projection orthogonale:

L'existence d'une unique décomposition nous permet alors de définir **la projection** sur F de direction F^\perp par:

$$\text{proj}_F : x = x_F + x_{F^\perp} \mapsto x_F$$

En particulier, on en déduit par l'unicité de la décomposition que $\text{proj}_F(x)$ est **l'unique vecteur** de F qui vérifie:

$$x - \text{proj}_F(x) \in F^\perp$$

Le projeté orthogonal a une signification géométrique importante, en effet on a:

$$\|x - \text{proj}_F(x)\| = \min_{y \in F} (\|x - y\|)$$

C'est le vecteur "le plus proche" de F au sens du produit scalaire utilisé.

Calcul de projeté orthogonal:

On considère un sous-espace F de bases (e_1, \dots, e_p) et $x \in E$, on sait d'après les propriétés précédentes que $\text{proj}_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - \text{proj}_F(x) \in F^\perp$, ce qui est équivalent à dire que:

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket ; \langle x - \text{proj}_F(x) | e_j \rangle &= 0 \iff \\ \forall j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket ; \langle \text{proj}_F(x) | e_j \rangle &= \langle x | e_j \rangle \end{aligned}$$

On raisonne alors par coefficient indéterminés avec l'écriture de $\text{proj}_F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ dans la base de F pour obtenir l'expression suivante:

$$\forall j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket ; \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_i | e_j \rangle = \langle x | e_j \rangle$$

Enfin on obtient alors le **système des équations normales**:

$$\begin{cases} \alpha_1 \langle e_1 | e_1 \rangle + \alpha_2 \langle e_2 | e_1 \rangle + \dots + \alpha_p \langle e_p | e_1 \rangle = \langle x | e_1 \rangle \\ \vdots \\ \alpha_1 \langle e_1 | e_p \rangle + \alpha_2 \langle e_2 | e_p \rangle + \dots + \alpha_p \langle e_p | e_p \rangle = \langle x | e_p \rangle \end{cases}$$

Ou de manière équivalente pour M la matrice du produit scalaire dans la base de (e_1, \dots, e_p) :

$$MY = \begin{bmatrix} \langle x | e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x | e_p \rangle \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une base **orthogonale**, le système ci-dessus est beaucoup plus simple, en effet presque tous les produits scalaires sont nuls, et on obtient un système **diagonal** et donc dans ce cas précis, le projeté orthogonal s'obtient simplement par la formule:

$$\text{proj}_F(x) = \sum_{k=1}^p \frac{\langle x | e_k \rangle}{\langle e_k | e_k \rangle} e_k$$

Finalement, une remarque importante permet de comprendre la projection sur un sous espace doté d'une base orthogonale, en effet:

Projeter un vecteur sur un sous-espace revient à ajouter les projetés de ce vecteur sur les vecteurs de la base du sous-espace.

Exemple: Le projeté de $x = (1, 2, 3)$ sur le plan $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est donné par $\text{proj}_{(1,0,0)}(x) + \text{proj}_{(0,1,0)}(x)$

Procédé de Gramm-Schmidt:

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E , on cherche alors à élaborer un procédé permettant **d'orthogonaliser cette base** en une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, on pose $\varepsilon_1 = e_1$ et $H_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ et on définit par récurrence:

$$\varepsilon_i = e_i - \text{proj}_{H_{i-1}}(e_i) = e_i - \left(\sum_{k=0}^{i-1} \text{proj}_{\varepsilon_k}(e_i) \right) = e_i - \left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle e_i | \varepsilon_k \rangle}{\langle \varepsilon_k | \varepsilon_k \rangle} \varepsilon_k \right)$$

Moralement, on "redresse" chaque vecteur de la base initiale en lui retirant son défaut d'orthogonalité représenté par sa projection sur le sous-espace précédent.

V — ESPACES HERMITIENS

On peut généraliser la notion de produit scalaire au cas des espaces vectoriels sur \mathbb{C} , en particulier, on dira demandera alors que la forme $f : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ soit:

Linéaire à gauche	$f(x + \lambda y, z) = f(x, z) + \lambda f(y, z)$
Symétrie Hermitienne	$f(u, v) = \overline{f(v, u)}$
Définie	$f(u, u) = 0 \implies u = 0$
Positivité	$f(u, u) \geq 0$

On dira alors que f est un **produit hermitien**. Elle est alors dite **sesquilinéaire** car on a:

$$f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y)$$

On définit aussi pour toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sa **matrice adjointe** donnée par:

$$M^* = {}^t \overline{M}$$

Exemples :

- On définit sur \mathbb{C}^n le produit hermitien défini par:

$$\langle u | v \rangle = \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k}$$

- On définit sur $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{C})$ le produit hermitien défini par:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

- On définit sur $\mathbb{C}_n[X]$ le produit hermitien défini pour (x_n) $n+1$ points fixés par:

$$\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k) \overline{Q(x_k)}$$

- On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le produit hermitien défini par:

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(AB^*)$$

Expression matricielle:

En dimension finie, on peut représenter les vecteurs $x, y \in H$ dans une base $\mathcal{B} = (e_i)$, on peut alors développer par sesquilinearité:

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \overline{y_j} f(e_i, e_j)$$

En particulier on peut alors remarquer que la forme bilinéaire est parfaitement déterminée par la donnée des n^2 images des paires des vecteurs de la base. En particulier, en notant X, Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x, y dans la base, alors on peut montrer qu'il existe une matrice A telle que:

$$[f(x, y)]^{\mathcal{B}} = X^* AY$$

Et cette matrice est alors de la forme suivante:

$$(a_{i,j}) = f(e_i, e_j)$$

En particulier cette matrice est égale à son adjointe et représente parfaitement la forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique¹.

¹Il suffit de calculer les coordonnées de $f(x, x)$ pour le voir, on trouve alors qu'elle sont égales à $X^* AX$

Orthogonalité:

On peut alors définir la même notion d'orthogonalité et montrer que pour un produit hermitien, toutes les propriétés de l'orthogonalité sont conservées sauf une, en effet le **théorème de Pythagore** n'est plus vrai dans un espace hermitien et on a seulement:

$$x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Théorème de représentation:

On se donne un élément ϕ du dual d'un espace hermitien alors, dans ce cadre, on peut aussi montrer le **théorème de représentation de Riesz** qui caractérise une forme linéaire ϕ par le produit scalaire:

$$\exists w \in H, \forall x \in H; \phi(x) = \langle x | w \rangle$$

A nouveau, cela signifie que toute forme linéaire est **exactement représentée** par le produit scalaire pour un certain vecteur w , en particulier, on a donc une bijection entre H et son dual.

On s'intéresse dans ce chapitre à l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ où E, F sont normés. C'est un exemple fondamental en analyse fonctionnelle et en mathématiques en général. On s'intéressera dans ce chapitre à la **continuité** de ces applications et à poser quelques bases de topologie sur cet espace.

Continuité des applications linéaires :

Soit $f : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire, alors on a le théorème fondamental suivant qui énonce que f est continue sur son domaine de définition si et seulement si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes:

- Elle est continue en 0.
- Elle est bornée sur la boule unité.
- Elle est uniformément continue.
- Elle est lipschitzienne.

On dira alors que l'opérateur est **borné**. Muni des ces équivalences, on peut démontrer la propriété fondamentale suivante:

En dimension finie, tout les opérateurs linéaires sont bornés.

Normes d'opérateur :

On peut munir $\mathcal{L}(E)$ lui même d'une norme appelée **norme d'opérateur** d'un opérateur f par la quantité suivante:

$$\|f\| = \inf \left\{ K ; \forall x \in E \quad \|f(x)\| \leq K \right\} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

En outre si E est de dimension finie, par l'isomorphisme usuel entre l'espace des application linéaires et celui des matrices, on définit de même la **norme d'opérateur d'une matrice** par:

$$\|M\| = \inf \left\{ K ; \forall x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \|MX\| \leq K \right\} = \sup_{\|X\|=1} \|MX\|$$

On peut alors caractériser la continuité d'un opérateur par le fait que sa norme d'opérateur soit **finie**.

Normes matricielles :

On appelle **norme matricielle** toute norme sur un espace de matrice qui est aussi une **norme d'algèbre**, ie telle que:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Par exemple, la norme de Frobenius est une norme matricielle. On a alors la propriété¹ suivante:

Toute norme d'opérateur est une norme matricielle.

Normes usuelles :

On peut alors chercher à savoir à quoi correspondent les normes d'opérateurs induites par les normes usuelles, on peut montrer qu'elles vérifient:

- La norme 1: $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq n} |a_{i,j}|$, c'est le **maximum de la somme des colonnes**.
- La norme infinie: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} |a_{i,j}|$, c'est le **maximum de la somme des lignes**.
- La norme 2: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^t)}$ où $\rho(M)$ est le **rayon spectral** de M .

On peut alors chercher à savoir à quoi correspondent les normes d'opérateurs induites par les normes usuelles, on peut montrer qu'elles vérifient:

¹Pour montrer ceci il faut remarquer que pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \|f\| \|x\|$.

- La norme 1: $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq n} |a_{i,j}|$, c'est le **maximum de la somme des colonnes**.
- La norme infinie: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} |a_{i,j}|$, c'est le **maximum de la somme des lignes**.
- La norme 2: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^t)}$ où $\rho(M)$ est le **rayon spectral** de M .

V — ESPACES DE HILBERT

Dans ce chapitre avancé, en utilisant les notions définies dans le chapitre de topologie et de théorie de la mesure, on cherche à généraliser la notion **d'orthogonalité**, de **base orthogonale** dans le cadre d'un espace vectoriel de dimension quelconque. Pour ceci, on se donne un espace préhilbertien H à priori complexe muni de sa forme sesquilinéaire.

On dire que H est un espace de Hilbert si il est complet pour la norme induite par le produit scalaire.

En particulier, les espaces de Hilbert sont donc des espace de Banach. Dans tout la suite, on fixera la semi-linéarité du produit scalaire à gauche.

Exemples :

Les deux exemples canoniques d'espaces de Hilbert sont les espaces $\ell^2(\mathbb{N})$ et $L^2(\mathbb{R})$ munis des produits scalaires respectifs suivants:

$$\langle u | v \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{u_i} v_i \quad \langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f} g d\mu$$

En outre, en utilisant le résultat donnant que tout espace vectoriel de dimension finie est complet, on peut montrer que $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ et plus généralement que tout les espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces de Hilbert pour leurs produits scalaires respectifs.

Orthogonalité :

On généralise alors naturellement la définition de l'orthogonalité à ce cas par:

$$\forall x, y \in H ; x \perp y \iff \langle x | y \rangle = 0$$

Cette définition nous permet alors naturellement d'étendre la notion **famille orthogonale et orthonormale** ainsi que celle **d'orthogonal d'une partie**. On montre alors la propriétés fondamentale suivante pour l'orthogonal:

C'est un sous-espace vectoriel fermé.

En effet, en dimension infinie, les sous-espaces ne sont pas nécessairement fermés (contre-exemple ?). On peut montrer néanmoins que l'orthogonal l'est car il s'exprime comme l'intersection des fermés suivants:

$$A^\perp = \bigcap \text{Ker}(\langle x | \cdot \rangle)$$

Projection orthogonale :

On généralise la notion de projection orthogonale du cadre euclidien, et on appellera **projeté** du point $x \in H$ sur une partie C nécessairement **convexe et fermée** comme le point $p_C(x) \in C$ si il existe défini par:

$$\|p_C(x) - x\| = \min \{ \|c - x\| ; c \in C \}$$

C'est le point de C à distance minimale avec x . On peut alors montrer qu'un tel projeté **existe toujours** dans un espace de Hilbert. En outre ce point est caractérisé par le **lemme de l'angle obtus**, ie c'est l'unique point de C qui vérifie:

$$\forall x \in H \forall c \in C ; \text{Re} \left(\langle x - p_C(x) | c - p_C(x) \rangle \right) \leq 0$$

Ceci signifie alors que, conformément à notre intuition, l'angle entre le segment qui relie x et $p_C(x)$ et x et n'importe quel point de C est **toujours obtus**.

Décomposition orthogonale :

Soit F un sous-espace vectoriel **fermé** de H , alors on peut montrer que dans ce cadre, on a la décomposition en somme directe suivante:

$$H = E \oplus E^\perp$$

Alors dans ce cas, on peut définir la projection sur chaque composante, elle est **linéaire et idempotente**, et dans ce cas elle correspond à la projection sur une partie définie plus haut. On a aussi la propriété suivante du double orthogonal:

$$A^{\perp\perp} = \text{adh}(\text{Vect}(A))$$

Familles totales :

On se donne une famille $(e_i)_{i \in I}$, alors on dira que cette famille est **totale** si et seulement si on a:

$$\text{adh}(\text{Vect}(e_i)) = H$$

Ce concept nous permettra par la suite de définir la notion de **base orthogonale**. Plus généralement on dira qu'une partie A est totale si et seulement si $\text{adh}(\text{Vect}(A)) = H$. On peut alors caractériser les parties totales par:

$$A \text{ est totale} \iff A^\perp = \{0\}$$

Exemple: La famille $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **totale** dans l'ensemble des fonctions continues sur un segment, c'est le **théorème de Weierstrass**.

Théorème de Pythagore :

On se donne une famille dénombrable orthogonale $(e_i)_{i \in D}$, alors on peut montrer la propriété suivante:

$$(e_i)_{i \in D} \text{ est sommable} \iff (\|e_i\|)_{i \in D} \in \ell^2(D)$$

Et dans ce cas on a le **théorème de Pythagore**:

$$\left\| \sum e_i \right\|^2 = \sum \|e_i\|^2$$

Bases Hilbertiennes :

On peut alors définir le concept de **base Hilbertienne** d'un espace de Hilbert H , et on dira qu'une famille $(e_i)_{i \in D}$ dénombrable est une **base de Hilbert** de H si et seulement si:

- C'est une **famille orthogonale**.
- C'est une **famille totale**.

Un espace de Hilbert qui admet une partie dénombrable dense admet une base de Hilbert et on dira alors qu'il est **séparable**. On peut alors montrer les propriétés suivantes:

- **Décomposition:** Si $x \in H$, alors on peut montrer que la famille $(\langle e_i | x \rangle e_i)_{i \in D}$ est sommable et que:

$$x = \sum_{i \in D} \langle e_i | x \rangle e_i$$

- **Egalité de Parseval:** Par Pythagore on a alors:

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in D} |\langle e_i | x \rangle|^2$$

- **Isomorphisme des coordonnées:** Il existe alors un isomorphisme qui à chaque vecteur lui associe ses coordonnées:

$$\begin{aligned} \phi : H &\longrightarrow \ell^2(D) \\ x &\longmapsto \left(\langle e_i | x \rangle \right)_{i \in D} \end{aligned}$$

Ce théorème est le théorème fondamental des espaces de Hilbert et permet alors d'identifier tout espace de Hilbert via ses coordonnées à $\ell^2(D)$. C'est ce théorème qui donnera naissance à l'**analyse harmonique** et la théorie des séries et transformées de Fourier que l'on verra au chapitre de théorie de la mesure.

V — ENDOMORPHISMES REMARQUABLES

Après avoir défini les espaces euclidiens et hermitiens, on cherche maintenant à s'intéresser aux endomorphismes qui ont des propriétés intéressantes en regard du produit scalaire, on sera alors amené à les définir et les étudier. Dans tout la suite, le corps de base peut être $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et l'espace est muni d'un produit scalaire correspondant.

Isométries:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on dira que f est une **isométrie** et on note $f \in O(E)$ si elle **préserve les angles**, ie si:

$$\forall x, y \in E ; \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$$

On en déduit directement qu'elle **préserve aussi les longueurs**¹.

On peut alors facilement montrer que la composée de deux isométries est une isométrie et que la réciproque l'est aussi. Aussi on peut déduire de la définition les propriétés suivantes:

$$\text{Sp}(f) \subseteq \{-1, 1\}$$

Ainsi que comme corollaire immédiat:

$$\det(f) \in \{-1, 1\}$$

Matrices orthogonales:

On considère la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée, on a alors d'après l'expression matricielle du produit scalaire:

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) ; {}^*(MX)MY = {}^*X^*MMY = {}^*XY$$

On remarque donc f est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée vérifie ${}^*M = M^{-1}$, on appellera de telles matrices **matrices unitaires** et on notera ces matrices $\mathbb{U}_n(\mathbb{K})$. On peut alors montrer que:

Les matrices unitaires forment un sous-groupe des matrices inversibles qu'on appelle groupe unitaire.

En particulier, la matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice unitaire, et les colonnes d'une telle matrice sont de norme 1 et deux à deux orthogonales.

Classification des isométries:

On peut alors classer les isométries selon leur action sur l'orientation de l'espace:

- Si $\det f = 1$ on dira que l'isométrie est **directe**, et on note l'ensemble de ces isométries $\text{SO}(E)$, appelé **groupe spécial orthogonal**.
- Si $\det f = -1$ on dira que l'isométrie est **indirecte**, mais leur ensemble ne possède pas de structure particulière.

Géométriquement, les isométries directes sont donc celles qui préservent l'orientation de l'espace, c'est un sous-groupe du groupe spécial linéaire. Dans le chapitre suivant, on classifie plus précisément les isométries dans le cas d'une petite dimension.

¹En particulier, elle est bijective et l'image d'une base orthonormée par une isométrie est toujours orthonormée.

Adjoint d'un endomorphisme:

On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, alors le théorème de représentation de Riesz nous permet d'affirmer qu'il existe un unique endomorphisme f^* qui vérifie:

$$\forall x, y \in E ; \langle x | f(y) \rangle = \langle f^*(x) | y \rangle$$

On appelle alors cet endomorphisme **l'adjoint** de f , en particulier si on représente f par une matrice M dans une base orthonormée, alors on définit de même la **matrice adjointe** de M par:

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) ; {}^t X M Y = {}^t (M^* X) Y$$

On peut alors facilement montrer que dans le cas présent de matrices, l'adjoint d'un endomorphisme est simplement sa **transposée**. On verra plus tard que la notion de matrice adjointe est une généralisation de la transposition. On peut alors entrevoir le rôle spécial que vont jouer les matrices symétriques. A FINIR, LA TRANSPOSEE EST EXACTEMENT LADJOINT, LIEN AVEC TOUT LE RESTE A FAIRE, UNIQUE APPLICATION QUI VERFIE $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$, VOIR DUALITE.

Endomorphismes auto-adjoints:

On appelle **endomorphisme auto-adjoint** (ou encore endomorphisme symétrique) tout endomorphisme qui est égal à son adjoint et on a donc les propriétés suivantes, cas particuliers des définitions ci-dessus:

$$\forall x, y \in E ; \langle x | f(y) \rangle = \langle f(x) | y \rangle$$

Puis matriciellement dans une base orthonormée:

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) ; {}^* X M Y = {}^* (M X) Y$$

En particulier dans le cas réel, le fait d'être auto-adjoint est caractérisé par la propriété simple suivante sur la matrice de l'endomorphisme dans une base orthonormée:

La matrice de l'endomorphisme est symétrique.

L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints, qu'on note $\mathcal{S}(E)$ forme un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{L}(E)$. Dans la suite on va étudier les propriétés de ces endomorphismes.

Théorème Spectral:

Une propriété fondamentale de ces endomorphismes est la suivante:

Leurs sous-espaces propres sont orthogonaux.

On peut alors énoncer un théorème puissant de réduction pour les endomorphismes auto-adjoints, en effet soit f un tel endomorphisme, alors:

Il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres.

On a alors le corollaire matriciel pour la matrice M de f dans une base, donné par l'existence d'une matrice de passage P dans le groupe unitaire et d'une matrice diagonale D telles que:

$$M = P D P^*$$

Technique de réduction:

En particulier, cela nous donne une nouvelle méthode pour réduire les formes bilinéaires, on peut alors diagonaliser dans une base orthonormée et obtenir une base orthogonale pour la forme, en pratique, on effectue l'algorithme suivant:

- On trouve une base pour un sous-espace propre.
- On l'orthogonalise par Gram-Schmidt.

Lien avec les formes bilinéaires:

On sait donc que les endomorphismes autoadjoints sont représentés par des matrices symétriques, on a donc la propriété suivante:

On peut associer **une forme bilinéaire** symétrique à chaque¹ endomorphisme autoadjoint et **réciroquement**.

En particulier, les concepts relevant de l'étude des formes peuvent alors se transposer dans l'étude des endomorphismes comme les sections suivantes le démontreront.

Endomorphismes auto-adjoints positifs:

On définit alors les endomorphismes autoadjoints **positifs** qu'on note $\mathcal{S}^+(E)$ définis par:

$$\mathcal{S}^+(E) := \{f \in \mathcal{S}(E) ; \text{Sp}(f) \subseteq \mathbb{R}_+\}$$

Cette définition est alors équivalente à la propriété suivante:

$$\forall x \in E \quad \langle x | f(x) \rangle \geq 0$$

Les matrices symétriques positives définissent alors des formes bilinéaires symétriques positives.

Endomorphismes auto-adjoints définis positifs:

On définit alors enfin les endomorphismes autoadjoints **définis positifs** qu'on note $\mathcal{S}^{++}(E)$ définis par:

$$\mathcal{S}^{++}(E) := \{f \in \mathcal{S}(E) ; \text{Sp}(f) \subseteq \mathbb{R}_+^*\}$$

Cette définition est alors équivalente à la propriété suivante:

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \quad \langle x | f(x) \rangle > 0$$

Les matrices symétriques définies positives définissent alors des nouveaux produits scalaires.

¹En effet soit $f \in \mathcal{S}(E)$, alors $\phi(x, y) = \langle x | f(y) \rangle$ est une telle forme, et réciproquement Riesz nous donne que $\phi(x, y) = \langle x | f(y) \rangle$ pour une certaine fonction f qui est alors un endomorphisme autoadjoint.

V — ISOMÉTRIES EN PETITE DIMENSION

On va maintenant étudier le cas particulier des isométries dans le cas de la petite dimension, c'est à dire dans le cas où E est de dimension 2 ou 3, on introduira un outil pratique dans ce contexte qui est le **produit vectoriel** et on classifera les isométries dans cet espace.

Bases directes:

Pour ce chapitre nous auront besoin du concept **d'orientation** de l'espace défini dans le chapitre sur les déterminants, en effet on appellera **base orthonormée directe** toute base ayant même orientation que la base canonique des espaces considérés. Sinon on dira que la base est **indirecte**.

Cas de la dimension 2:

Soit θ un réel, on définit les deux matrices orthogonales suivantes:

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad S_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On appelle alors R_θ **matrice de rotation** d'angle θ et S_θ est un **symétrie axiale**¹. Alors on a le théorème fondamental suivant, pour $f \in O(E)$ et tout base orthonormée \mathcal{B} , alors il existe θ réel tel que:

$$[f]_{\mathcal{B}} \in \{R_\theta, S_\theta\}$$

En particulier si f préserve l'orientation, alors nécessairement, f est une **rotation**. Et donc les matrices de passages entre bases orthonormées directes sont des rotations.

En particulier si f ne préserve pas l'orientation, alors nécessairement, f est une **symétrie axiale**.

Cas de la dimension 3:

Dans le cas de la dimension trois, on pose $\varepsilon = \pm 1$ et on définit la matrice suivante:

$$M_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Alors on a le théorème fondamental suivant, pour $f \in O(E)$ et tout base orthonormée **directe** \mathcal{B} , alors il existe θ réel tel que:

$$[f]_{\mathcal{B}} = M_\theta$$

La classification des isométries dans ce cas est alors plus complexes et repose sur l'étude de la dimension de l'espace des point fixes, qu'on notera F , et on peut alors les classifient selon le tableau² ci-dessous:

dim(F)	Orientation	Matrice	Nature
3	Directe	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Identité
2	Indirecte	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	Symétrie par rapport à F
1	Directe	$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Rotation d'axe F
0	Indirecte	$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	Composée d'une symétrie et d'une rotation d'axe F

¹D'axe la bissectrice de l'angle θ , faire un dessin.

²Le dernier cas peut se ramener par des propriétés trigonométriques au cas d'un rotation, en effet $-f = R_{\theta+\pi, u}$

Produit mixte:

On considère une famille de vecteurs u, v, w et deux bases orthonormées directes $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E , alors on a:

$$\det([u]_{\mathcal{B}}, [v]_{\mathcal{B}}, [w]_{\mathcal{B}}) = \det([u]_{\mathcal{B}'}, [v]_{\mathcal{B}'}, [w]_{\mathcal{B}'})$$

On appelle alors le déterminant de cette famille de vecteur **le produit mixte** de ces trois vecteurs, et on le note:

$$\det([u]_{\mathcal{B}}, [v]_{\mathcal{B}}, [w]_{\mathcal{B}}) = [u, v, w]$$

C'est donc le volume orienté du paralléloétope formé par les trois vecteurs.

Produit vectoriel:

On considère une famille de vecteurs u, v , et un vecteur x quelconque, alors d'après le théorème de représentation de Riesz, on a:

$$\exists w \in E ; [u, v, x] = \langle w | x \rangle$$

On appelle alors ce vecteur **produit vectoriel** de u et v et on le note $u \times v$. On peut alors à partir des propriétés du déterminant, montrer que:

- Le produit vectoriel est une application **bilinéaire alternée**.
- Le produit vectoriel $u \times v$ est **orthogonal** à u et v .
- Si (u, v) est une famille orthonormée, $(u, v, u \times v)$ est une base orthonormée directe.
- Si (u, v, w) est une base orthonormée directe $w = u \times v, u = v \times w$ et $v = w \times u$.

Le produit vectoriel est donc un moyen très pratique de **construire des bases directes** ou de tester la colinéarité. Analytiquement, on peut le calculer en coordonnées par:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Recherche des éléments caractéristiques:

Pour réussir à trouver le réel θ , on utilise alors le fait que dans une base adaptée, on a:

$$\text{tr}(f) = 2 \cos(\theta) + 1$$

Et donc à partir de la trace de la matrice dans une base quelconque, on peut retrouver le cosinus de l'angle θ dont il reste à déterminer le sinus pour le caractériser.

Arrive alors l'intérêt du produit mixte, en effet, on peut alors montrer que le sinus de l'angle θ est du même signe que la quantité ci-dessous, pour x un vecteur quelconque (souvent c_1) de notre choix:

$$[x, f(x), u]$$

Ce qui caractérise alors parfaitement l'isométrie.

V — ESPACES TOPOLOGIQUES

Soit E un ensemble non-vide et \mathcal{T} une ensemble de parties de E (qu'on appellera **ouverts**) qui vérifient les propriétés suivantes:

- E et \emptyset sont des ouverts
- Toute union **quelconque** d'ouverts est un ouvert
- Toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert

Alors le couple (E, \mathcal{T}) est appelé **espace topologique** et \mathcal{T} est appelée **topologie** sur E . On définit alors qu'une partie de E est **fermée** si son complémentaire est ouvert. On peut alors voir deux exemple triviaux de topologies sur un ensemble:

- La **topologie grossière**, alors les ouverts sont seulement E et \emptyset .
- La **topologie discrète**, alors les ouverts sont toutes les parties de E .

Notion de finesse :

On définit alors une notion de comparaison entre deux topologie \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , et on dira que \mathcal{T}_2 est **plus fine** que \mathcal{T}_1 si et seulement si on a:

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$$

Cela signifie moralement que \mathcal{T}_2 à plus d'ouverts, par exemple la topologie discrète est la plus fine de tout les topologies. Cette relation définit alors **une relation d'ordre** sur l'ensemble des topologies.

Topologie engendrée :

On se donne A un ensemble de parties de E , alors on cherche à savoir si il existe une plus petite topologie (au sens de l'inclusion) telle que les éléments de A soit des ouverts, ie la topologie la moins fine qui contienne A .

On peut alors montrer facilement que l'intersection de deux topologies est une topologie et donc que la plus petite topologie qui contienne A existe, c'est l'intersection de toutes les topologies qui contiennent A . On l'appellera² alors **topologie engendrée** par A .

Topologie induite :

Soit $A \subseteq E$, alors E induit une topologie naturelle sur A appelée **topologie induite** définie par:

$$\mathcal{T}|_A := \left\{ A \cap \mathcal{O} ; \mathcal{O} \in \mathcal{T}_E \right\}$$

Un ouvert de A pour la topologie induite est simplement la trace sur A des ouverts de E .

Topologie produit :

Soit (E_n) une famille finie d'espaces topologiques, alors on peut définir une topologie naturelle sur l'espace produit $\prod E_n$ appelée **topologie produit** définie par:

$$\mathcal{T}_\times := \left\{ \bigcup_I \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n ; (\mathcal{O}_i) \in \mathcal{T}_{E_i} \right\}$$

Un ouvert de A pour la topologie produit est simplement une union quelconque de produits d'ouverts des espaces composantes.

²On dira aussi que A est une **prébase** de cette topologie.

Topologie quotient :

Soit (E, \mathcal{T}) un espace topologique muni d'une relation d'équivalence et donc d'une **projection canonique** π , alors on peut définir une topologie naturelle sur l'espace quotient E/\sim appelée **topologie quotient** définie par:

$$\mathcal{T}_\pi := \left\{ \mathcal{O} \in E/\sim ; \pi^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_E \right\}$$

Un ouvert de E/\sim pour la topologie quotient est donc simplement une partie dont la préimage par la projection est un ouvert.

Voisinages :

On appelle **voisinage** d'un point $x \in E$ toute partie V de E qui contient un ouvert \mathcal{O} qui contient x . On notera \mathcal{V}_a l'ensemble des voisinages du point a .

Exemple: $[-2; 3[$ est un voisinage de 3 et de 0 pour la topologie classique de \mathbb{R} , engendrée par les intervalles ouverts.

Intérieur :

On définit l'intérieur d'une partie $A \subseteq E$ comme étant **le plus grand ouvert contenu dans A** . En particulier, c'est l'union de tout les ouverts contenus dans A et on a:

$$\text{int}(A) := \bigcup_{\mathcal{O} \subseteq A} \mathcal{O}$$

On peut alors caractériser cet ensemble par une propriété de ses points (appelés points intérieurs):

$$\text{int}(A) := \{x \in A ; \exists \mathcal{O}_x \in \mathcal{T}_E, \mathcal{O}_x \subseteq A\}$$

L'application qui à toute partie associe son intérieur est idempotente, croissante et anti-extensive² et elle caractérise les ouverts, en effet:

Une partie A est un ouvert si et seulement si **elle est égale à son intérieur**.

Adhérence :

On définit l'adhérence d'une partie $A \subseteq E$ comme étant **le plus petit fermé qui contient A** . En particulier, c'est l'intersection de tout les fermés qui contiennent A et on a:

$$\text{adh}(A) := \bigcap_{A \subseteq \mathcal{F}} \mathcal{F}$$

On peut alors caractériser cet ensemble par une propriété de ses points (appelés points adhérents):

$$\text{adh}(A) := \{x \in A ; \forall \mathcal{O}_x \in \mathcal{T}_E, \mathcal{O}_x \cap A \neq \emptyset\}$$

L'application qui à toute partie associe son adhérence est idempotente, croissante et extensive et elle caractérise les fermés, en effet:

Une partie A est un fermé si et seulement si **elle est égale à son adhérence**.

Frontière :

On appelle **frontière** d'une partie A de E et on note ∂A la partie qui vérifie:

$$\partial A = \text{adh}A \setminus \text{int}A$$

²On appelle anti-extensive une application telle que $\phi(S) \subseteq S$ (non-standard)

Propriétés :

Soit $A \subseteq E$, on peut alors montrer plusieurs propriétés de l'intérieur et de l'adhérence:

$$\text{int}(A)^c = \text{adh}(A^c) \qquad \text{adh}(A)^c = \text{int}(A^c)$$

On peut aussi montrer les différentes relations suivantes¹ vis à vis des opérations ensemblistes:

$$\begin{array}{ll} \text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B) & \text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B) \\ \text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B) & \text{adh}(A \cap B) \subseteq \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B) \end{array}$$

Densité :

On peut alors définir la notion **d'espace dense**, on considère $A \subseteq E$, alors on dira que A est **dense dans** E si et seulement si:

$$\text{adh}(A) = E$$

Et on peut caractériser cette propriété par le fait que tout ouvert non vide de E coupe **nécessairement** A , en d'autres termes:

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T} ; \mathcal{O} \cap A \neq \emptyset$$

Séparation :

Dans de nombreux cas, on exige de la topologie la condition spécifique de **séparer les points**, ie on souhaite que pour tout points distincts x, y , il existe deux ouverts **disjoints** qui contiennent respectivement x, y .

On appelle **espace séparé** ou encore **espace de Hausdorff** un espace topologique qui vérifie cette propriété. La plupart des espaces étudiés en analyse sont des espaces séparés.

¹Pour comprendre les inclusions strictes, considérer \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (en tant que parties de \mathbb{R}).

V — ESPACES MÉTRIQUES & NORMÉS

Soit E un ensemble, le cas le plus courant d'espace topologique est le cas des espaces munis d'une application appelée **distance** ou aussi **métrique**, c'est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R}^+ qui vérifie:

- Elle est **symétrique**.
- Elle vérifie **l'inégalité triangulaire**.
- Deux points sont égaux si et seulement si la distance entre ces points est nulle.

Alors, l'espace E muni de cette distance notée d est alors appelé **espace métrique**, et on le note (E, d) .

Si on considère le cas particulier des **espaces vectoriels normés** (et donc a fortiori des espaces euclidiens), alors la norme induit une distance sur E et en fait un espace métrique.

Topologie métrique :

On considère un point x et un réel strictement positif r , alors on définit:

- La **boule ouverte** centrée en x et de rayon r : $\mathcal{B}(x, r) := \{y \in E ; d(x, y) < r\}$
- La **boule fermée** centrée en x et de rayon r : $\mathcal{B}[x, r] := \{y \in E ; d(x, y) \leq r\}$

La distance sur E induit alors naturellement une topologie sur E qu'on appelle **topologie métrique** définie par:

$$\mathcal{T}_d := \left\{ \bigcup_I \mathcal{B}(x_i, r_i) ; (x_i, r_i) \in E \times \mathbb{R}_+^* \right\}$$

On peut alors facilement montrer que cette ensemble est bien une topologie sur E et que la topologie induite sur une partie correspond bien à la topologie métrique pour la restriction de la distance.

Topologie métrisable :

On considère un espace topologique (E, \mathcal{T}) , alors on dira que cet espace est **métrisable** si et seulement si il existe une distance d telle que:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$$

Par exemple si on considère un espace muni de la topologie discrète $(E, \mathcal{P}(E))$, alors cet espace topologique est métrisable pour la distance discrète.

Topologie produit :

On considère une famille finie d'espace métriques (E_n, d_n) , alors on peut définir une **distance produit** par:

$$d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$$

Alors on montre que la topologie produit coïncide avec la topologie métrique pour cette distance. En particulier pour le cas de \mathbb{R}^n , la topologie produit correspond à la topologie métrique pour:

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

Parties bornées et diamètre :

Soit $A \subseteq E$, alors on dira que A est **bornée** si et seulement si il existe une boule qui contient A , en outre on peut définir le **diamètre** de la partie A par:

$$\delta(A) := \sup \{d(x, y) ; x, y \in A\}$$

Et on montre alors qu'une partie est bornée si son diamètre est **fini**.

Equivalences des normes :

Dans un espace vectoriel normé, on dira alors que deux normes sont **équivalentes** si il existe deux réel c, C tel que:

$$c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

Ici "équivalentes" signifie donc que si il existe une boule pour une norme, alors il existe une boule plus petite et plus grande que celle-ci pour l'autre, en particulier **les topologies engendrées par ces normes sont égales**¹.

La notion de norme équivalente permet de montrer la propriété très utile suivante:

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont **équivalentes**.

Exemples de boules en dimension finie :

On considère ici l'espace vectoriel usuel \mathbb{R}^n (ou plus généralement sur les espaces ℓ^p), on peut alors définir les **normes de Hölder** définies comme suit:

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i \leq n} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

En particulier pour $p = 2$, ces normes définissent **la norme euclidienne standard**. On peut aussi définir **la norme infinie** par:

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u_1|, |u_2|\}$$

Exemples de boules en dimension infinie :

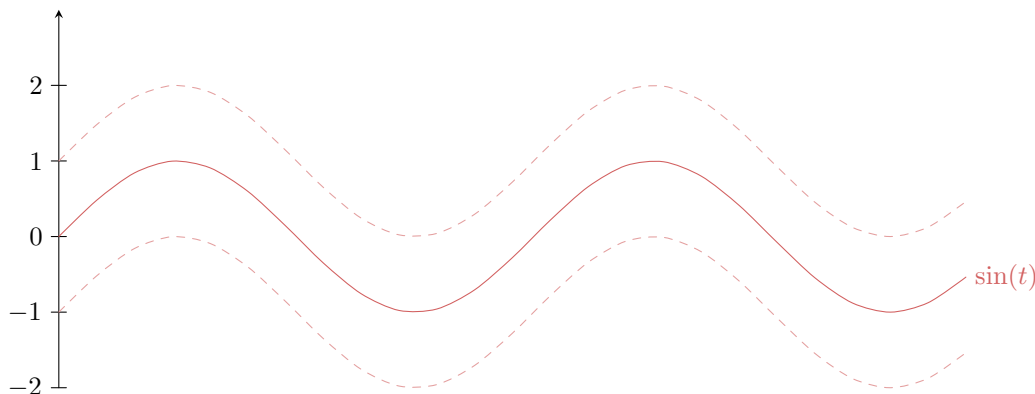
On considère ici l'espace vectoriel des **fonction continues** (ou comme vu plus loin sur les fonctions des espaces L^p) sur l'intervalle $[a; b]$, on peut alors étendre les **normes de Hölder** définies comme suit:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

En particulier pour $p = 2$, c'est **la norme euclidienne standard**. On peut aussi définir **la norme infini** (aussi appelée **norme de la convergence uniforme**) par:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a; b]} \{|f(t)|\}$$

Graphiquement, la boule ouverte de centre la fonction sin et de rayon 1 pour la norme infini est alors:



Exemples de boules exotiques :

Si on considère maintenant l'ensemble des cases d'un échiquier et qu'on définit la distance entre deux cases comme étant le nombre de coup qu'un cavalier doit effectuer pour arriver à la seconde en partant de la première, on définit alors un espace métrique.

¹Néanmoins la réciproque est fausse, si deux topologies métriques sont égales, alors les métriques induisant ces topologies ne sont pas nécessairement équivalentes ! La notion de distances équivalentes est plus forte que celle de topologies équivalentes

V — LIMITE ET CONTINUITÉ

L'intérêt fondamental de la topologie est de pouvoir définir le concept de *proximité* entre points d'un espace topologie, et par la suite de définir le concept fondamental en analyse, celui de **limite** d'une suite ou d'une fonction, puis par la suite celui de **continuité** d'une fonction.

Une des idées principales à retenir de ce chapitre est que la notion de limite est **locale** au sens où elle nécessite que des propriétés soient vérifiées au voisinage de certains point. A contrario la notion de **continuité** est ambivalente, on peut à la fois la définir localement (propriété au voisinage d'un point) ou globalement (propriété sur les topologies des deux espaces).

Dans toute la suite, on considérera que tout les espaces topologiques considérés sont **séparés**, ce qui nous permettra alors d'avoir unicité de la limite.

Limite d'une fonction:

On se donne une application $f : (X, \mathcal{T}) \mapsto (Y, \mathcal{T}')$, et on considère un point a **adhérent** à X . On dira alors que la fonction f tends vers $l \in Y$ en a si et seulement si:

$$\forall V_l \in \mathcal{V}_l, \exists V_a \in \mathcal{V}_a ; f(X \cap V_a) \subset V_l$$

On notera alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. Il est à noter que l'on a ici pris le parti-pris de définir la notion de limite via les voisinages, on aurait aussi pu la définir directement via les ouverts, il suffit de remplacer "voisinage de x " par "ouvert qui contient x ".

Limite d'une suite:

Le cas d'une suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow X$ est similaire, en effet on veut alors une limite quand l'indice de la suite tends vers l'infini, on définit alors un voisinage de l'infini comme une partie qui contient un intervalle entier ouvert et infini à droite, et on obtient la définition suivante:

$$\forall V_l \in \mathcal{V}_l, \exists V_\infty \in \mathcal{V}_\infty ; u(V_\infty) \subset V_l$$

Néanmoins dans le cas des suites, la notion de limite est souvent trop contraignante et on peut vouloir s'intéresser aux valeurs qui sont prises **un infinité de fois** par la suite, on les appellera alors **valeurs d'adhérence** qu'on définit par:

$$\text{vadh}(u_n) := \{x \in X ; \forall V_x \in \mathcal{V}_x, u_n \subseteq V_x \text{ pour une infinité d'indices}\}$$

Continuité locale:

On peut définir une notion de continuité **locale** d'une fonction $f : X \longrightarrow Y$ en un point a de son domaine de définition cette fois, qui ne nécessite donc que de vérifier des propriétés au voisinage d'un point, en effet on dira que f est **continue** en a si et seulement si on a:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

On remarque alors la nuance entre la notion de limite et celle de continuité:

La limite est définie sur un point de l'adhérence du domaine de définition tandis que la continuité l'est sur un point du domaine de définition.

En outre, on peut alors définir le **prolongement par continuité** d'une fonction f qui admet une limite l en $a \in \text{adh}(X)$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : X \cup \{a\} &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) ; & x \in X \\ \lim_a f(x) ; & x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Continuité globale:

On peut alors définir une notion de continuité **globale**, qui ne dépend que des topologies au départ et à l'arrivée, et on dira alors que $f : X \longrightarrow Y$ est **continue** si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_Y$, on a:

$$f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_X$$

Une application est continue si la préimage de tout ouvert de l'arrivée est un ouvert du départ.

On a peut alors relier les deux notions de continuité par la propriété suivante:

Une application est (globalement) continue ssi elle est (localement) continue en tout ses points.

Il est important de noter alors que si f est continue, cela **ne dit rien** de l'image direct d'un ouvert ou d'un fermé. On appelle application ouverte (resp. fermée) une application telle que l'image d'un ouvert (resp. fermé) est ouvert (resp. fermé).

Caractérisations métriques:

Dans le cas particulier des espaces métriques, on peut caractériser la définition de la limite de f en un point a par la métrique et les boules, et on a alors que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X ; d(x, a) < \delta \implies d(f(x), l) < \varepsilon$$

Moralement on l'interprète par:

Il existe un δ tel que si x est δ -proche de a alors $f(x)$ est arbitrairement proche de la limite.

Dans le cas des suites c'est légèrement différent, le voisinage de l'infini devient simplement un entier à partir duquel la propriété est vérifiée et on a que $u_n \longrightarrow l$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} ; n > N \implies d(u_n, l) < \varepsilon$$

Enfin, on peut grandement simplifier la définition d'une valeur d'adhérence dans le cas métrique, en effet on obtient alors que l est une valeur d'adhérence si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} ; n > N \implies d(u_n, l) < \varepsilon$$

Qui représente bien l'idée que la suite u_n de rapproche de l une infinité de fois.

Caractérisations séquentielles:

Dans le cadre des espaces **métriques**, on peut caractériser l'adhérence d'une partie par les suites:

L'adhérence de A est exactement **l'ensembles des limites des suites** à valeurs dans A .

On a aussi la caractérisation séquentielle de la limite et on dira que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite¹ u_n qui tends vers a on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$$

Et on peut alors aussi en déduire une caractérisation séquentielle de la continuité qui sous les mêmes hypothèses nous donne que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(a)$$

¹En particulier si on trouve deux suites u_n, v_n qui tendent vers a telles que $f(u_n), f(v_n)$ ont deux limites différentes, alors la limite de f en a ne peut pas exister.

Homéomorphismes:

On considère deux espaces topologiques E et F , ainsi qu'une fonction $f : E \rightarrow F$, alors on dit que f est un **homéomorphisme** si et seulement si elle est **bijective, continue et à réciproque continue**, on dira alors que E et F sont **homéomorphes**.

Les homéomorphismes sont les isomorphismes pour la structure d'espace topologique, on peut alors en déduire que toutes les propriétés intrinsèquement topologiques sont conservées. Quelles sont alors les propriétés intrinsèquement topologiques ? On peut alors montrer que les propriétés suivantes sont des propriétés topologiques:

- La connexité.
- La connexité par arcs.
- La compacité.

Ces concepts fondamentaux en topologie sont définis dans les chapitres suivants.

Continuité uniforme :

Dans les espaces métriques, il existe une propriété de régularité **plus forte que la continuité** appelée **continuité uniforme**¹ définie comme:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x_1, x_2) \in E^2 ; d(x_1 - x_2) < \delta \implies d(f(x_1) - f(x_2)) < \varepsilon$$

La différence fondamentale² entre ces deux propriétés étant que δ **ne dépend plus que de ε** . En particulier on peut l'interpréter:

Il existe un δ tel que si x et y sont δ -proches alors $f(x)$ et $f(y)$ soient arbitrairement proches.

Lipschitzianité:

Dans les espaces métriques, il existe une condition de régularité **encore plus forte** que la continuité uniforme qui est le caractère K -lipschitzien. On dit qu'une fonction est K -lipschitzienne pour $K \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout x, y distincts, on a:

$$d(f(x) - f(y)) \leq Kd(x - y)$$

Une telle fonction a donc la particularité de ne pas pouvoir croître ou décroître trop rapidement.

La K -lipschitzianité étant une propriété plus forte que la continuité uniforme, plus précisément, on a la suite d'implications:

$$K\text{-Lipschitzienne} \implies \text{Uniformément continue} \implies \text{Continue}$$

Par ailleurs si $K \in [0; 1]$, alors on dit que f est **contractante**, ce type de fonctions a souvent un très bon comportement de convergence quand on le retrouve comme propriété de suites récurrentes par exemple.

¹Il est important de noter que la continuité uniforme n'est plus une propriété locale, mais globale.

²Ecrire la proposition " f est continue en tout point de $]a; b[$ " et " f est uniformément continue sur $]a; b[$ " pour le voir.

V — CONNEXITÉ

On considère un espace topologique (E, \mathcal{T}) , on dira alors qu'un tel espace est **connexe** si et seulement si il ne peut **pas** s'écrire comme la réunion de **deux ouverts disjoints et non-vides**. Cela reflète alors la compréhension naturelle qu'on a du concept de connexité, ie que l'espace est "d'un seul tenant".

On peut alors définir la connexité d'une partie $A \subseteq E$ par sa connexité en tant qu'espace muni de la topologie induite.

Caractérisations:

On peut alors montrer plusieurs caractérisations de la notion de connexité et on dira qu'un espace E est connexe ssi il vérifie une des conditions équivalentes suivantes:

- Le seul **ouvert-fermé** non-vide de E est lui-même.
- Toute fonction continue $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ est **constante**.

La première caractérisation s'obtient directement par équivalences avec la définition, et la seconde démontre le fait qu'une fonction continue dans un espace discret est moralement une indicatrice des composantes connexes.

Connexité par arcs:

On peut alors définir une notion de connexité plus forte, qui utilise la notion de **chemin** que nous allons définir. On fixe deux points $x, y \in E$, alors un chemin reliant x et y est une application $\gamma : [0; 1] \longrightarrow E$ qui est **continue** et qui vérifie:

$$\begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$$

On peut alors définir la notion de connexité par arcs, en effet on dira qu'un espace est **connexe par arcs** si et seulement si **toute paire de points de E peut être reliée par un chemin**.

C'est une notion strictement plus forte que la connexité, en effet on peut montrer l'implication suivante:

$$E \text{ connexe par arcs} \implies E \text{ connexe}$$

Propriétés:

On peut alors montrer les propriétés suivantes:

- L'union de parties connexes (resp. connexes par arcs) qui ont un point commun est connexe (resp. connexes par arcs).
- Le produit d'espaces connexes (resp. connexes par arcs) est connexe (resp. connexes par arcs).
- Tout partie B encadrée par un connexe A et son adhérence est connexe, ie si B est telle que:

$$A \subseteq B \subseteq \text{adh}(A)$$

Alors B est connexe, en particulier l'adhérence d'un connexe est connexe.

Composantes connexes:

Si on considère un espace topologique E et un point $x \in E$, alors toutes l'union des parties connexes qui contiennent x est connexe et c'est la plus grande partie connexe qui contient x pour l'ordre de l'inclusion, on l'appelle alors **composante connexe** de x dans E et on la note C_x .

On peut alors partitionner l'espace en les composantes connexes de ses points, en particulier si l'espace est lui-même connexe, il n'y a qu'une seule composante connexe. On peut de manière équivalente définir les **composantes connexes par arcs**.

Théorème des valeurs intermédiaires:

Les espaces connexes ont beaucoup de bonnes propriétés analytiques, tout d'abord on a la propriété suivante:

L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

On peut alors commencer à distinguer l'intérêt de la notion de connexité, en effet on peut alors généraliser le théorème des valeurs intermédiaires à des fonctions définies sur une partie de \mathbb{R}^n et on a:

L'image par une fonction continue à valeurs réelles définie sur un connexe est un intervalle.

Passage du local au global:

Une des forces de la notion de connexité est qu'elle permet de **passer du local au global**, ie de considérer une propriété vraie localement et de l'étendre à une propriété globale, par exemple on peut montrer la propriété suivante:

Si E est connexe et que la fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est **localement constante**, alors elle est **constante**.

Inversion des quantificateurs:

Une autre interprétation de la notion de connexité est qu'elle permet **d'inverser les quantificateurs d'une propriété**, par exemple supposons qu'une fonction $f : E \longrightarrow D$ soit continue et que D soit un espace discret, alors:

$$\forall t \in E ; \exists n \in D ; f(t) = n$$

Equivalent à:

$$\forall t \in E ; f(t) \in D$$

Mais D est discret donc ses connexes sont les singletons et on a que $f(E)$ est connexe donc elle est constante, ie:

$$\exists n \in D ; \forall t \in E ; f(t) = n$$

Ce qui nous a bien permis d'inverser les quantificateurs.

V — COMPACITÉ

On considère un espace topologique (E, \mathcal{T}) et un **recouvrement ouvert** de cet espace, ie une famille quelconque $(A_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E telle que:

$$E \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

On dira alors que l'espace est **compact** si il vérifie la **propriété de Borel-Lebesgue**, ie:

De tout recouvrement, on peut extraire un recouvrement fini.

Séparation et fermeture:

Dans le cas où l'espace ambiant est séparé, on a une propriété très forte sur les compacts, en effet on peut montrer que la topologie de E sépare les compacts et les points qui n'en font pas partie et par suite que **tout compact est fermé**.

Par la suite on s'intéressera surtout aux espaces séparés, donc on considérera que l'espace ambiant l'est toujours.

Propriétés:

On peut alors montrer les propriétés suivantes:

- **Union:** Toute union **finie** de compacts est compacte.
- **Intersection:** Toute intersection de compacts est compacte.
- **Produit Cartésien:** Tout produit de compacts est compact.
- Tout fermé inclu dans un compact est compact.

Théorème de Bolzano-Weierstrass:

En considérant une suite d'un espace compact E , on peut alors montrer (via le théorème des compact emboîtés) le théorème de Bolzano-Weierstrass:

Tout suite d'une espace compact admet **une valeur d'adhérence**.

En particulier dans un espace métrique, les valeurs d'adhérence sont exactement les limites de sous-suites, donc tout suite dans un compact admet une **sous-suite convergente**.

Caractérisation séquentielle:

Dans un espace métrique, on a même la réciproque et on peut donc caractériser les parties compactes par les suites, en effet on dira que $K \subseteq E$ est compact si et seulement si:

Toute suite à valeurs dans K admet une suite extraite convergente.

Cette caractérisation permet alors parfois de démontrer plus facilement la compacité.

Théorème de Borel-Lebesgue :

Dans les espaces métriques, on peut alors obtenir d'autres propriétés des parties compactes, en effet on peut montrer qu'elles sont **bornées**, notamment en montrant que leur diamètre est fini. Dans \mathbb{R}^n et donc dans tout espace vectoriel normé, on a même l'équivalence entre fermé-borné et compact, appelé théorème de Borel-Lebesgue:

Une partie de \mathbb{R}^n est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Théorème des bornes atteintes:

Les espaces compacts ont beaucoup de bonnes propriétés analytiques, tout d'abord on a la propriété suivante:

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

On peut alors commencer à distinguer l'intérêt de la notion de compacité, en effet l'image de compacts par des applications continues est alors toujours bornée et fermée ce qui rends l'étude d'extrema très simple, en particulier on peut montrer la généralisation du théorème des bornes atteintes:

Tout fonction continue à valeurs réelles définie sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Théorème de Heine:

Un résultat très utile sur la compacité est le **théorème de Heine** qui nous permet d'affirmer que les fonctions continues définies sur des compacts sont plus régulières encore:

Tout fonction continue définie sur un compact Y est uniformément continue.

V — COMPLÉTUDE

On s'intéresse dans ce chapitre à une structure plus riche que celle d'espace topologique, en effet on peut remarquer que la notion d'homéomorphisme ne préserve certaines notions analytiques, comme l'équivalence entre distances, ou encore le concept que l'on définira plus loin appelé **suites de Cauchy**. On considère donc une version plus restrictive d'homéomorphisme, appelée **homéomorphisme uniforme**, où l'on requiert que l'homéomorphisme soit uniformément continu.

C'est donc bien une notion purement métrique, et elle définit les transformation qui préservent les **invariants uniformes**, comme la complétude, le caractère de Cauchy d'une suite, qui ne sont donc pas des invariants topologiques.

Suites de Cauchy:

On se donne une suite u_n , on dira que u_n est **de Cauchy** si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q > N ; d(u_p - u_q) < \varepsilon$$

*Une suite de Cauchy est donc une suite telle que les termes de la suite sont arbitrairement proches **les uns des autres** à partir d'un certain rang¹.*

On peut alors très facilement montrer que toute suite de Cauchy est bornée, et surtout une condition suffisante très forte de convergence, en effet:

Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge.

C'est le premier exemple d'invariant uniforme, en effet si on considère $f : E \mapsto F$ un homéomorphisme uniforme et (x_n) une suite de Cauchy de E , alors $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy.

Complétude:

On définit alors la structure principale de ce chapitre:

On appelle alors espace complet tout espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge.

En particulier, si E est un espace vectoriel normé, on dira que c'est un **espace de Banach**. On peut alors montrer que \mathbb{R} est complet, en effet si on considère une suite de Cauchy de \mathbb{R} , elle est bornée et donc incluse dans un compact, et d'après Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence donc elle converge.

On peut alors en déduire un lien entre compacité et complétude, grâce à Bolzano-Weierstrass, on montre directement que **tout espace compact est complet**.

Complétude et fermeture :

On peut alors montrer un lien fort entre la complétude et la fermeture, en effet grâce à la caractérisation séquentielle, on peut montrer qu'une partie complète est nécessairement **fermée**. La réciproque est partiellement vraie, en effet on a:

Une partie fermée d'un espace complet est complète.

Produit d'espaces complets :

On peut alors montrer que pour toute famille (finie) d'espaces métriques, alors le produit cartésien est **complet** (pour la distance produit). En particulier, \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n sont complets, et tout espace vectoriel de dimension finie est complet.

¹Un corollaire immédiat est que **toute suite convergente est de Cauchy**.

Caractérisation par les séries:

On peut alors montrer une caractérisation puissante de espaces de Banach, en effet:

Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Théorème du point fixe de Banach-Picard:

Une application puissante de la complétude qui est utilisée dans beaucoup d'applications numériques est le théorème du point fixe de Banach-Picard, on considère une fonction $f : E \mapsto E$ où E est **complet** et telle que f soit **contractante**, ie:

$$\exists K \in]0; 1[, \forall x, y \in E ; d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$$

Alors f admet **un unique point fixe** x^* . Pour $x_0 \in E$, on peut l'obtenir comme limite de la suite récurrente suivante:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

En effet, on montre que cette suite est bien de Cauchy donc converge vers un point fixe. L'unicité est obtenue aisément par l'absurde.

VI — CORPS DES RÉELS

On peut construire successivement les différents ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et on souhaite maintenant construire le corps bien connu \mathbb{R} , on peut alors construire les nombres réels comme **classes d'équivalence de suite de Cauchy de rationnels**, et on peut alors montrer la propriété caractéristique de \mathbb{R} qui est:

C'est l'unique corps totalement ordonné complet qui vérifie la propriété d'Archimède.

Propriété d'Archimède :

Un corps totalement ordonné est archimédien si et seulement si:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N} ; na > b$$

Moralement,

Tout nombre de \mathbb{R} peut être dépassé par un multiple entier d'un autre nombre de \mathbb{R} .

Une autre interprétation est **qu'il n'existe pas de nombre infiniment grand ou petit** dans \mathbb{R} , pour le voir il suffit de poser $a = 1$ ou $b = 1$.

Propriété de la borne supérieure :

On appelle alors majorant (resp. minorant) d'une partie A un réel qui est plus grand (resp. plus petit) que tout élément de A , on s'intéresse alors à l'existence de **plus petit majorant** (ou de plus grand minorant), qu'on appellera alors **borne supérieure** (ou inférieure) de A . On peut alors montrer que le corps des réels vérifie la **propriété de la borne supérieure**, donnée par:

Toute partie non-vide et majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure)

On les note alors respectivement $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Caractérisation séquentielle :

On peut montrer que M est la borne supérieure de $A \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si:

$$\exists (u_n) \in A^{\mathbb{N}} ; u_n \longrightarrow M$$

Un majorant M est la borne supérieure de A , si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui tends vers M .

Caractérisation métrique :

Soit $\varepsilon > 0$, alors M est la borne supérieure de $A \subseteq \mathbb{R}$ si et seulement si:

$$\exists a \in A ; M - \varepsilon \leq a \leq M$$

Un majorant M est la borne supérieure de A , si tout nombre plus petit n'est plus un majorant.

Propriétés du corps des réels :

On introduit l'application valeur absolue qui sera très utile par la suite pour mesurer des écarts, elle est définie comme suit:

$$|x| := \max(x, -x)$$

Cette application définit une norme et elle donne alors au corps des réels une structure d'espace vectoriel normé.

Partie entière :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **partie entière** d'un réel x , et on note $\lfloor x \rfloor$ **l'unique** entier relatif tel que:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

La partie entière vérifie la propriété fondamentale suivante:

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

L'existence de la partie entière est garantie par **la propriété d'Archimède**.

Approximation décimale :

Soit $n \in \mathbb{N}$, il peut être utile d'approximer un réel à n chiffres après la virgule, ie à 10^{-n} près, la partie entière nous permet alors de le faire, et on l'obtient en exécutant l'algorithme suivant:

$$x \longrightarrow 10^n x \longrightarrow \lfloor 10^n x \rfloor \longrightarrow \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

On obtient alors une approximation à **n chiffre après la virgule** de x qu'on note $d_n(x)$ et on a:

$$d_n(x) = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

Compactification :

On peut alors se rendre compte qu'une propriété manquante à \mathbb{R} est que ce n'est pas un espace compact, en effet on peut facilement construire des suites qui tendent vers $\pm\infty$ et qui n'ont aucune suite extraite convergente dans \mathbb{R} , la solution revient alors à définir la compactification de \mathbb{R} appelée **droite réelle achevée** par:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup -\infty, +\infty$$

Les opérations algébriques ne s'étendent alors pas parfaitement mais les symboles "infinis" ainsi ajoutés facilitent beaucoup l'énoncé de certains théorèmes et en particulier on a alors une meilleure propriété de la borne supérieure car on a que **toute partie non-vide admet une borne supérieure et inférieure**, éventuellement infinies.

VI — LIMITES RÉELLES

On sait déjà étudier la convergence de fonctions et de suites depuis le chapitre sur la topologie et la définition du concept de limite, ici on étudiera plus précisément les application (et suites) dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et les conséquences des propriétés spécifiques de \mathbb{R} sur la convergence.

En effet la grande spécificité de \mathbb{R} est de pouvoir parler de fonctions **monotones** (croissantes ou décroissantes) et de fonctions **majorées ou minorées**.

Opérations générales sur les limites :

On considère que f et g deux applications qui admettent des limites $l, l' \in K^*$ en a .

Alors le passage à la limite est une opération **linéaire et multiplicative**, ie elle se comporte conformément à l'intuition par rapport aux opérations de \mathbb{R} .

Dans le cas où les limites sont infinies ou nulles, des **formes indéterminées** peuvent apparaître et nécessitent les précautions usuelles pour conclure.

Limites latérales :

On peut définir un type spécifique de limite sur \mathbb{R} appelé **limites latérales** qui sont simplement des limites de restriction à droite ou à gauche de a .

Exemple: On dit que f admet une limite **par valeurs inférieures** et on note $f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X ; x - a < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Et on peut alors caractériser l'existence d'une limite en un point par l'égalité des deux limites latérales en ce point.

Carctère borné :

Une des principales conséquences du caractère métrique de \mathbb{R} sur les limites de fonctions est la suivante:

Toute fonction qui admet une limite en un point est **localement bornée** en ce point¹.

Théorème de la limite monotone :

En utilisant à la fois la propriété de la borne supérieure et l'ordre total sur \mathbb{R} , on peut alors montrer que:

- Si la fonction est **croissante et majorée** alors elle converge par valeurs inférieures vers $f(x^-)$.
- Si la fonction est **décroissante et minorée** alors elle converge par valeurs supérieures vers $f(x^+)$.
- Si la fonction est **croissante et non majorée** alors elle tends vers $+\infty$.
- Si la fonction est **décroissante et non minorée** alors elle tends vers $-\infty$.

En particulier si f est une **suite**, alors les deux premiers cas se simplifient en:

- Si la suite u_n est **croissante et majorée** alors elle converge vers $\sup(\{u_n\})$.
- Si la suite u_n est **croissante et majorée** alors elle converge vers $\inf(\{u_n\})$

¹En particulier, si f est une suite, elle est **globalement bornée**.

Théorème d'encadrement :

Aussi soit f, g, h trois fonction telles que f et g tendent vers une limite finie $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors on a aussi le **théorème d'encadrement**:

$$\left[\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \leq g(x) \leq h(x) \right] \implies g(x) \longrightarrow l$$

Suites adjacentes :

On appelle **suites adjacentes** deux suites (u_n) et (v_n) telles que l'une est **croissante** et l'autre **décroissante** et telles que $(u_n - v_n) \rightarrow 0$, alors on peut montrer que les deux suites convergent vers une même limite $l \in K$ grâce aux théorèmes précédents.

Limite supérieure et inférieure :

On se donne une suite (u_n) **bornée**, on considère les suites numériques suivantes:

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq n} \{u_k\} &= \sup \{u_k ; k \geq n\} \\ \inf_{k \geq n} \{u_k\} &= \inf \{u_k ; k \geq n\} \end{aligned}$$

Ce sont simplement les bornes supérieures et inférieures des queues de la suite.

On peut alors remarquer que ces suites sont monotones et bornées, donc elles convergent nécessairement¹ vers des limites qu'on appelle alors les **limites supérieure et inférieure** de (u_n) qu'on définit formellement par:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} \{u_k\} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \{u_k\} \end{cases}$$

On calcule donc ici la plus petite borne supérieure possible, et la plus grande borne inférieure possible, on peut alors montrer que la suite u_n converge **exactement** si ces deux limites sont égales.

Comparaison Asymptotique :

On dit qu'une fonction f est **dominée** par la fonction g **au voisinage** de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et on note alors $f = O(g)$ si et seulement si il existe une fonction **bornée** θ telle qu'on ait la propriété ci-dessous dans un voisinage de a . C'est une relation de **préordre** sur les fonctions, et elle est aussi **linéaire et multiplicative**.

$$f(x) = \theta(x)g(x)$$

On dit qu'une fonction f est **négligeable** devant la fonction g **au voisinage** de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et on note alors $f = o(g)$ si et seulement si il existe une fonction ε qui tends vers 0 en a telle qu'on ait la propriété ci-dessous dans un voisinage de a .

C'est une relation **transitive, linéaire et multiplicative**.

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x)$$

On dit qu'une fonction f est **équivalente** à la fonction g **au voisinage** de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et on note alors $f \sim o(g)$ si et seulement si il existe une fonction η qui tends vers 1 en a telle qu'on ait la propriété ci-dessous dans un voisinage de a .

C'est une **relation d'équivalence** sur les suites, et elle est aussi **multiplicative**.

$$f(x) = \eta(x)g(x)$$

Ces relations sont évidemment aussi valables pour les suites en remplaçant partout le terme "fonction" par le terme "suite".

¹En effet si on prive (u_n) de termes, sa borne supérieure ne peut que décroître, et u_n étant bornée, ces suite le sont aussi.

De manière générale, quand les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de a , on caractérise ces relations par le tableau suivant:

$f = O(g) \iff \frac{f}{g}(x) \longrightarrow C$	$f = o(g) \iff \frac{f}{g}(x) \longrightarrow 0$	$f \sim g \iff \frac{f}{g}(x) \longrightarrow 1$
--	--	--

On peut notamment caractériser le fait qu'une limite existe par:

$$f \longrightarrow l \iff f = l + o(1)$$

Aussi, une caractérisation très utile des équivalents nous donne¹:

$$f \sim g \iff f = g + o(g)$$

Enfin, il est utile de connaître ces équivalents usuels, on considère le cas général d'une fonction u qui tends vers 0 en a , alors on a les équivalents suivants (en a):

$\ln(1+u) \sim u$	$e^u - 1 \sim u$	$(1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u$
$\sin(u) \sim u$	$\cos(u) \sim 1$	$\tan(u) \sim u$

On remarquera dans le chapitre sur les développements limités que la grande majorité de ces équivalents ne sont que le premier terme non-nul du développement limité d'une fonction.

¹La démonstration est triviale et utilise simplement la caractérisation en terme de quotient

VI — CONTINUITÉ

On étudie ici les propriétés des fonctions réelles continues, dont on sait montrer la continuité depuis le chapitre de topologie, ici on s'intéressera aux spécificités des fonctions continues réelles, notamment leurs comportements vis à vis des opérations et les différents raffinements de la notion de continuité que l'on pourrait développer.

Opérations générales sur les fonctions continues :

On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur D à valeurs dans \mathbb{K} , alors on peut montrer que cet ensemble est stable par somme, multiplication externe et multiplication interne.

*En d'autres termes cet ensemble est non seulement un **sous-espace vectoriel** de l'espace des fonctions, mais même une **sous-algèbre** de cet espace.*

De plus, l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas est aussi une fonction continue, et la composition de fonctions continues composables est aussi une fonction continue¹.

Théorème de la bijection:

On déduit du théorème des valeurs intermédiaires que si f est continue sur $]a; b[$ et **strictement monotone** alors:

Elle réalise **un homéomorphisme** sur son image.

¹Attention pour la composition il faut bien considérer les domaines de définition manipulés.

VI — DÉRIVABILITÉ

Définition :

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point a si et seulement si la limite ci-dessous existe et est **finie** et on définit alors le nombre dérivé $f'(a)$:

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

On peut alors définir la dérivée de la fonction f qu'on note f' qui est la fonction qui à chaque point où f est dérivable lui associe son nombre dérivé, ainsi que **la tangente à la courbe** de f en a comme étant la droite:

$$y := f(a) + f'(a)(x - a)$$

A nouveau, le lien clair entre le concept de limite et celui de dérivabilité nous permet de définir **la dérivabilité latérale** d'une fonction, qui est simplement la dérivabilité à droite ou à gauche qui découle directement de notre définition des limites latérales d'une fonction.

On peut étendre cette définition à la dérivabilité sur **un intervalle** I , en la définissant comme la dérivabilité en **tout points de** I .

On note $\mathcal{D}(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur D à valeurs dans \mathbb{K} , par ailleurs il est important de noter que **la dérivabilité implique la continuité**, ie formellement on a $\mathcal{D}(D, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}(D, \mathbb{K})$.

Propriétés :

Une des propriétés fondamentales des fonctions dérivables et de l'ensemble $\mathcal{D}(D, \mathbb{K})$ est qu'il est stable par somme, multiplication externe et multiplication interne.

*En d'autres termes cet ensemble est non seulement un **sous-espace vectoriel** de l'espace des fonctions (continues), mais même une **sous-algèbre** de cet espace.*

De plus, l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas est aussi une fonction dérivable, et la composition de fonctions dérivables composables est aussi une fonction dérivable.

Etudes des variations :

Si on considère une fonction dérivable, alors on appelle **point critique** tout point a où $f'(a) = 0$.

En particulier, si une fonction est dérivable en un point **intérieur**¹ et y admet un **extremum local**, alors c'est un point critique.

Enfin le signe de la dérivée nous permet de comprendre les variations de la fonction sur un **intervalle**, en particulier on a la propriété suivante:

Si f' conserve le même signe sur un intervalle, alors f est monotone sur cet intervalle².

En particulier, si f' est nulle sur un intervalle, alors f est constante sur cet intervalle.

¹Si le point n'est pas intérieur et est un extremum, la dérivée n'est pas nécessairement nulle. Par exemple la restriction (à l'arrivée) de $\ln(x)$ à \mathbb{R}^- est dérivable à gauche en 1, y admet un maximum, mais la dérivée n'est pas nulle.

²En particulier elle est croissante dans le cas positif et décroissante sinon

Classes de régularité :

Les classes de régularité des fonctions numériques constituent une classification des fonctions basées sur l'existence et la continuité des dérivées itérées. Par exemple on note $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues, $\mathcal{C}^1(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables à dérivée continue.

En généralisant ces notations, on note $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables **et à dérivée continue**.

Ces ensembles **héritent des propriétés de stabilité** (par somme, produit interne et externe, composition et inverses) des ensembles de base définis précédemment. En particulier ce sont tous des sous-algèbres de l'espace des fonctions.

Dérivation :

Soit f une fonction dérivable, alors on peut appliquer à f l'opérateur de dérivation, en d'autres termes calculer sa dérivée f' . Dans cette partie nous allons détailler les propriétés élémentaires de cet opérateur:

$$\boxed{(f + g)' = f' + g' \quad (fg)' = f'g + fg' \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'}$$

Soit f de classe \mathcal{C}^n , alors dans le cas de dérivées successives, la propriété pour la somme ci dessus se généralise aisément et la formule du produit, appelée **formule de Leibniz** se généralise aussi en:

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

Par ailleurs, si on pose f une fonction dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I , alors la réciproque de f est dérivable¹ pour tout $y := f(a)$ sur cet intervalle et on a:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

On peut généraliser ce résultat² en montrant que si f est une fonction de classe \mathcal{C}^k et si f' **ne s'annule pas**, alors f^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^k .

Cette propriété permet de prouver la dérivabilité d'une réciproque, ainsi que de trouver sa dérivée.

Exemple: $f : x \mapsto x^2$ est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas sur cet $[1 ; 2]$, donc elle est bijective sur $[1 ; 4]$ et sa réciproque est dérivable de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Théorème des accroissements finis :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$, le **théorème des accroissements finis** assure l'existence d'un $c \in]a ; b[$ tel que:

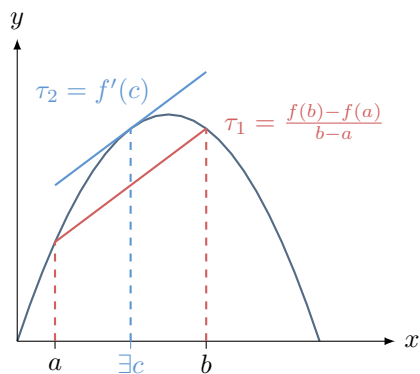
$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$$

Intuitivement, on comprends alors que la quantité à droite est le taux d'accroissement global entre a et b , et donc le théorème nous assure l'existence d'un point tel que **le taux d'accroissement en ce point soit égal au taux d'accroissement global**.

¹Les deux hypothèses impliquent que f est bijective sur son image, puis on revient à la définition pour montrer que f^{-1} est dérivable en $f(a)$, on peut effectuer un changement de variable dans le calcul de limite pour trouver la première identité. La seconde nécessite un second changement de variable évident.

²Même début de preuve que ci-dessus, avec une récurrence pour conclure.

Graphiquement, on voit sur le dessin ci-dessous que les deux taux d'accroissement sont égaux:



Un cas particulier¹ remarquable de ce théorème est le **théorème de Rolle** dans le cas où $f(a) = f(b)$, donc dans le cas où le taux d'accroissement global est nul, alors on a l'existence d'un $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Inégalité des accroissements finis :

L'inégalité des accroissements finis donne une condition suffisante de lipschitzianité, en effet si f' est bornée, alors f est K -lipschitzienne avec $K = \sup |f'|$, ie on a:

$$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$$

Exemple: $|\sin(x)'| = |\cos(x)| \leq 1$ donc sinus est une fonction 1-lipschitzienne et donc on montre par exemple que $|\sin(x) - \sin(0)| \leq |x - 0| \iff |\sin(x)| \leq |x|$

Théorème de la limite de la dérivée:

Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, alors on peut montrer que si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$, alors f est dérivable en a de dérivée l .

En particulier pour une fonction $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$, si $\lim f$ et $\lim f'$ existent, alors le prolongement à I tout entier est de classe \mathcal{C}^1 .

En général pour une fonction $f \in \mathcal{C}^k(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$, si les limites de toutes les dérivées intermédiaires existent, alors le prolongement à I tout entier est de classe \mathcal{C}^k .

¹La preuve nécessite d'ailleurs de s'y ramener, en effet on considère la fonction $\phi : x \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$, alors $\phi(x) = \phi(y)$ et en sachant que la fonction est bornée et atteint ses bornes, on trouve des points critiques.

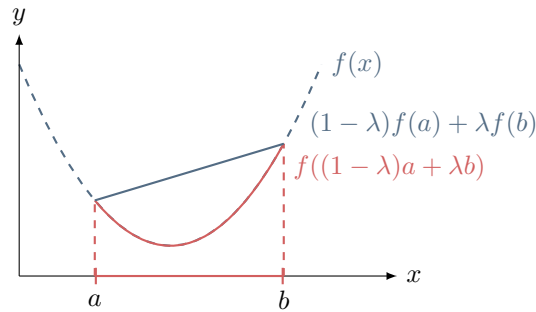
VI — CONVEXITÉ

Définition :

On dit que f est **convexe** sur I si et seulement si **son graphe est en dessous de toutes ses cordes**, ie elle vérifie la propriété:

$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0; 1]; f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Une fonction qui vérifie l'inégalité inverse est dite **concave** et son graphe est situé **au dessus de toutes ses cordes**. Graphiquement, voici un exemple de fonction convexe:



En d'autres termes l'image d'un barycentre (à coefficient positif) est en dessous du barycentre des images.

Par ailleurs il existe une caractérisation très utile de la convexité, pour montrer qu'une fonction **dérivable** est convexe, il suffit de montrer que sa **dérivée est croissante**, ou alors, si elle est deux fois dérivable, que sa **dérivée seconde est positive**.

Exemple: La fonction logarithme est concave sur \mathbb{R} car sa dérivée seconde est négative, donc pour tous $a, b > 0$, on a $\ln(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{1}{2} \ln(a) + \frac{1}{2} \ln(b)$.

Propriétés :

On peut noter deux grandes propriétés des fonctions convexes, tout d'abord pour tout a, b, c dans I tels que $a < b < c$, on a **l'inégalité des pentes** qui nous donne:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Intuitivement, cela signifie que **les pentes des cordes sont croissantes**.

Finalement on peut généraliser l'inégalité de la définition par **l'inégalité de Jensen**, qui pour toute famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points et famille $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de coefficients positifs de somme 1, nous donne:

$$f\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i f(x_i)$$

Qui généralise l'intuition selon laquelle **l'image d'un barycentre est en dessous du barycentre des images**.

VI — DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Dans ce chapitre nous cherchons à approximer **localement** des fonctions par des polynômes au voisinage d'un point ou de l'infini.

Il est important de noter que la majorité des égalités de ce chapitre sont des égalités **au voisinage d'un point**, et non des égalités globales.

Définition :

Soit f une fonction de D dans \mathbb{R} , et a un point adhérent à D . On dit que f admet un **développement limité** d'ordre n **au voisinage de** a et on note $DL_n(a)$ si il existe une famille de réels (a_i) tels que:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Si elle existe, alors cette famille est **unique**, par ailleurs plus l'ordre est grand, plus la précision est grande. La partie polynomiale d'un développement limité est appelée **partie principale**.

Propriétés:

Soit f et g deux fonctions qui admettent un développement limité à l'ordre n .

On appelle **troncature** à l'ordre k de f , la partie principale de f privée de tout les coefficients de degré supérieurs à k , et suivi d'un $o(x^k)$. Il s'agit simplement ici de réduire la précision de notre approximation, en particulier, si on a un développement limité à l'ordre n alors on a un développement limité à tout ordre inférieur à n par troncature.

Aussi, les développements limités se comportent de manière intuitive par rapports aux opérations algébriques:

Pour calculer un développement limité d'une somme, il suffit de faire la somme des parties principales.

Pour la multiplication (la composition), il suffit de faire le produit (la composée) des parties principales.¹

Exemple: Cherchons un $DL_2(e^x \cos(x))$, on a $e^x \cos(x) = [1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)][1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)] = 1 + x + o(x^2)$

Changement de voisinage :

On peut ramener la recherche d'un développement limité en un point à un développement limité en 0 par une translation.²

On peut ramener la recherche d'un développement asymptotique en $\pm\infty$, à un développement limité en 0 par le changement de variable $X = \frac{1}{x}$.

Exemple: La fonction $e^{\frac{1}{x}}$ est définie au voisinage de $+\infty$, on pose $X = \frac{1}{x}$, alors un $DL_2(0)$ de $f(X)$ est $1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ après substitution.

¹**Attention:** Cette méthode produira dans la plupart des cas des termes inutiles, il faut donc tronquer et/ou anticiper le degré du produit final, pour faciliter les calculs, voir l'exemple.

²En effet, un $DL(a, f(x))$ est un $DL(0, f(x+a))$ à translation près (faire un dessin). Il suffit donc de chercher un $DL(0, f(x+a))$ puis de translater à nouveau sur la fonction originelle.

Formules de Taylor :

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I , alors on peut montrer **l'existence** d'un développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point a de I qui est donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

La quantité négligeable appelée **reste**, qu'on note généralement R_n , peut s'exprimer dans le cas où la fonction est de classe \mathcal{C}^{n+1} et pour un certain $c \in [a; x]$, on a :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad R_n = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

Ce sont respectivement les formules de **Taylor-Lagrange**¹ et de **Taylor avec reste intégral**.

Expliciter le reste permet alors d'obtenir des informations sur tout l'intervalle $[a; x]$, en effet, ce ne sont alors plus des développements asymptotiques mais bien des formules **exactes**.

Exemple: Pour un certain c sur l'intervalle $[0; x]$, on a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \sin(c)$, cela nous permet alors d'avoir, par exemple, la majoration $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$.

Aussi, f est continue en a si et seulement si elle admet un **développement limité à l'ordre 0**.

De même, elle est dérivable en a si et seulement si elle admet un **développement limité à l'ordre 1**.

Néanmoins, au delà de l'ordre $k = 1$, admettre un développement limité à l'ordre k n'implique **pas** d'être de classe \mathcal{C}^k .

Intégration d'un développement limité:

Une propriété très particulière nous permet de trouver le développement limité d'une fonction si l'on connaît le développement limité de sa dérivée.

Soit f une fonction dérivable tel que f' admet un développement limité à l'ordre n , ie:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ obtenu **en intégrant termes à termes**, ie on a :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

Ici la constante d'intégration est le terme d'ordre 0 du développement limité, ie $f(a)$.

*Un développement limité de la dérivée nous donne donc **toujours** un développement limité de la fonction.*

Développements limités usuels :

Il est utile de connaître les développements limités en 0 des fonctions usuelles:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + o(x^n)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}\frac{x^2}{2} + \binom{\alpha}{3}\frac{x^3}{6} + \dots + o(x^n)$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + o(x^n)$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + o(x^n)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + o(x^n)$

¹Celle ci peut se comprendre comme une généralisation du théorème des accroissements finis qui en est un cas particulier (à l'ordre 1).

VI — INTÉGRATION

On définira dans ce chapitre l'intégration d'une fonction **bornée définie sur un segment**.

On appelle **subdivision** du segment $[a; b]$ qu'on note généralement σ toute suite finie $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ strictement croissante de premier terme $x_0 = a$ et de dernier terme $x_n = b$, on appelle **pas de la subdivision** la distance maximale entre deux éléments consécutifs de la subdivision, qu'on note généralement $|\sigma|$.

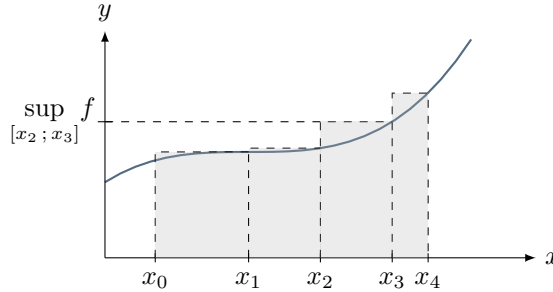
Définition :

Soit f une fonction définie sur un segment $[a; b]$, et $\sigma = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une subdivision de ce segment, on note $M_i := \sup\{f(x) ; x \in [x_i; x_{i+1}]\}$ le supremum de la fonction sur chaque intervalle (qui existe car on ne considère bien que les fonctions **bornées**).

Alors on appelle **somme de Darboux supérieure**¹ associée à la subdivision la somme:

$$^+S(f, \sigma) = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) \cdot M_k$$

Cette somme correspond à la **somme de rectangles** chacun de base $x_{k+1} - x_k$ et de hauteur le supremum de la fonction sur cette intervalle. Graphiquement, on a:



On appelle **l'intégrale supérieure**² de f la quantité:

$$^+S(f) = \inf \left\{ ^+S(f, \sigma) ; \sigma \text{ est une subdivision de } [a; b] \right\}$$

*L'intégrale supérieure est la somme **minimale** obtenue en considérant **toutes les subdivisions possibles** du segment.*

Enfin on dit que f est **intégrable** si et seulement si **l'intégrale supérieure et inférieure** sont égales, et on la note:

$$\int_a^b f(t) dt$$

L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a; b]$ est noté $\mathcal{J}([a; b])$.

¹On définit de même la **somme de Darboux inférieure** associée à la subdivision qui est analogue à la différence que la hauteur des rectangle est donnée par l'infimum de la fonction sur la subdivision.

²On définit de même **l'intégrale inférieure** qui est analogue à la différence que l'on considère l'aire **maximale** sur toutes les subdivisions possibles, ie on change l'infimum pour un supremum dans la définition.

Caractérisation :

Pour la suite, nous aurons besoin d'une propriété des intégrales supérieures et inférieures qui découle de leur nature de borne inférieure et supérieure¹, en effet on a:

$$-S(f, \sigma) \leq -S(f) \leq +S(f) \leq +S(f, \sigma)$$

De cette propriété on peut déduire une caractérisation très utile de l'intégrabilité², en effet une fonction f est intégrable si et seulement si pour tout ε positif, **il existe une subdivision** σ telle que:

$$+S(f, \sigma) - -S(f, \sigma) < \varepsilon$$

De cette proposition, nous pouvons alors montrer que plusieurs classes de fonctions sont intégrables, en particulier:

*Toute fonction continue est intégrable.
Toute fonction monotone est intégrable.*

Propriétés :

Après avoir défini l'espace $\mathcal{J}([a; b])$ des fonctions intégrables, on peut considérer ses propriétés, en particulier on peut remarquer que cet espace est stable par somme et multiplication externe, en particulier:

*L'espace des fonctions intégrables est un **sous-espace vectoriel** de l'espace des fonctions*

L'application d'intégration sur les fonctions intégrables est donc **une forme linéaire** sur cet espace, elle est **croissante** et vérifie **relation de Chasles**³ :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

L'intégrale vérifie aussi **l'inégalité triangulaire**, en effet on a:

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Théorème fondamental du calcul intégral :

On peut maintenant énoncer le **théorème fondamental du calcul intégral**, on considère f une fonction continue sur un segment $[a; b]$, et on définit la fonction F définie sur ce segment par:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Alors F est de classe⁴ \mathcal{C}^1 et est une **primitive** de f , en particulier, c'est la seule qui s'annule en a . Par ailleurs, si f est intégrable et que l'on en connaît une primitive F , alors on a:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Exemple: Calculons $I = \int_x^{2x} f(t)dt$ pour $f = \cos(3t)$. On a $I = F(2x) - F(x)$ pour $F = \frac{\sin(3x)}{3}$ une primitive de f donc $I = \frac{\sin(3x) - \sin(6x)}{3}$

Formule de la moyenne:

Si f est continue sur le segment $[a; b]$, alors il existe un c dans cet intervalle¹ tel que:

¹Une somme supérieure pour une subdivision fixée est toujours plus grande que la borne inférieure de ces sommes pour **toutes** les subdivisions.

²En pratique, c'est celle ci qui permet de prouver qu'une classe de fonction est intégrable ou non.

³Pour $c \in [a; b]$

⁴Si f est seulement intégrable, alors F est seulement continue, c'est une version plus faible de ce théorème.

¹La preuve est immédiate, f est continue donc $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ et on conclut directement par le théorème des accroissements finis.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

La quantité $f(c)$ est appelée **valeur moyenne de la fonction sur le segment**. Dans un cas plus général², on peut même montrer que pour g continue et positive, alors on a l'existence d'un c tel que:

$$f(c) \int_a^b g(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Sommes de Riemann :

Soit f une fonction intégrable sur $[a; b]$, $\sigma_n = (x_k)_{k \leq n}$ une subdivision **régulière** et $h = \frac{b-a}{n}$ le **pas de la subdivision**, alors on définit la **somme de Riemann** comme suit:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = h \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Alors la suite (S_n) **converge** vers $\int_a^b f(t)dt$.

Une somme de Riemann représente la somme d'aires de rectangles dans le cas particulier d'une subdivision régulière et dans le cas où la hauteur des rectangle est simplement $f(x_k)$. Cette propriété de convergence nous permet d'évaluer des séries grâce à des intégrales.

Exemple: Dans le cas le plus courant où on est dans l'intervalle $[0; 1]$. Calculons la somme $S := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n+k}$. On a:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln(2)$$

Techniques de calcul générales:

Du théorème fondamental on peut déduire plusieurs formules utiles pour calculer des intégrales, dans toute cette section, f, g sont **continues** et ϕ est **continue, dérivable à dérivée continue**³.

En premier lieu on montre facilement la formule **d'intégration par parties** qui nous permet de calculer **l'intégrale d'un produit**⁴ dans certains cas:

$$\int_a^b f(t)g'(t)dy = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

On montre par ailleurs la formule du **changement de variable**, elle nous permet de calculer **l'intégrale d'une composée**⁵ dans certains cas:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Intégration de fonctions complexes:

Si on considère les fonctions trigonométriques et exponentielles, il est clair que l'on peut les voir comme la partie réelle ou imaginaire d'une fonction à valeur complexe.

Alors on peut utiliser les propriétés suivantes et profiter des propriétés de l'exponentielle:

²Même idée de démonstration, en utilisant la croissance de l'intégrale

³De telle sorte que toutes les intégrales soient bien définies.

⁴On peut souvent trouver une relation de récurrence par IPP successives, ou alors annuler un facteur polynomial par les dérivations successives que permettent les IPP.

⁵De gauche à droite, elle nous permet de poser **une nouvelle variable** comme fonction de la variable d'intégration, de droite à gauche on pose alors notre variable d'intégration comme **l'image d'une nouvelle variable par une fonction** (nécessite alors la surjectivité sur le segment).

$$\int_a^b \mathcal{R}(f(t))dt = \mathcal{R}\left(\int_a^b f(t)dt\right) \quad \int_a^b \mathcal{I}(f(t))dt = \mathcal{I}\left(\int_a^b f(t)dt\right)$$

Exemple: Calculons $I := \int e^{-x} \cos(x) dx$

$$I = \int e^{-x} \mathcal{R}(e^{ix}) dx = \int \mathcal{R}(e^{x(i-1)}) dx = \mathcal{R}\left(\int e^{x(i-1)} dx\right) = \mathcal{R}\left(\frac{1}{i-1} e^{x(i-1)}\right) = \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x))$$

On remarque ici que l'intégrale $\int e^{\alpha x} dx$ se comporte de manière identique si α est réel ou complexe.

Décomposition en éléments simples:

Si on considère les primitives de fractions rationnelles de la forme $\frac{P}{Q}$, on peut montrer qu'elles peuvent se décomposer en une somme **d'éléments simples** particulièrement faciles à intégrer. Cette partie se consacre à la décomposition d'une fraction $\frac{P}{Q}$ en éléments simples¹.

- La première étape de la décomposition consiste à **factoriser** Q en polynômes irréductibles.
- Tout facteur $(aX + b)^n$ produira alors une somme de n éléments simples de première espèce:

$$\frac{\lambda_1}{aX + b} + \frac{\lambda_2}{(aX + b)^2} + \dots + \frac{\lambda_n}{(aX + b)^n}$$

- Tout facteur $(aX^2 + bX + c)^n$ produira alors une somme de n éléments simples de seconde espèce:

$$\frac{\lambda_1 X + \beta_1}{aX^2 + bX + c} + \frac{\lambda_2 X + \beta_2}{(aX^2 + bX + c)^2} + \dots + \frac{\lambda_n X + \beta_n}{(aX^2 + bX + c)^n}$$

Finalement, on obtient une somme d'éléments simples avec des coefficients indéterminés aux numérateurs. Pour déterminer ces coefficients, plusieurs méthodes sont possibles, réduire au même dénominateur et identifier, évaluer en des valeurs annulatrices ou encore utiliser **la méthode du cache**².

Exemple: Décomposons $\frac{2X+1}{(X-1)(X+1)^2(X^2+1)}$

On a:

$$\frac{2X+1}{(X-1)(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{X+1} + \frac{\lambda_3}{(X+1)^2} + \frac{\lambda_4 X + \lambda_5}{X^2+1}$$

Utilisons la méthode du cache sur l'élément en $X-1$, on multiplie par $X-1$ de chaque côté et on évalue en la racine 1 ce qui nous donne $\lambda_1 = \frac{3}{8}$.

Utilisons la méthode du cache sur l'élément en $(X+1)^2$, on multiplie par $(X+1)^2$ de chaque côté et on évalue en la racine -1 ce qui nous donne $\lambda_3 = \frac{1}{4}$.

Utilisons la méthode du cache sur l'élément en X^2+1 , on multiplie par X^2+1 de chaque côté et on évalue en la racine i ce qui nous donne $\lambda_4 i + \lambda_5 = \frac{-1}{4}i - \frac{3}{4}$ donc $\lambda_4 = \frac{-1}{4}$ et $\lambda_5 = \frac{-3}{4}$.

Pour finir pour trouver le dernier coefficient, on peut par exemple réduire au même dénominateur et identifier, pour conclure on a:

$$\frac{2X+1}{(X-1)(X+1)^2(X^2+1)} = \underbrace{\frac{3}{8(X-1)} + \frac{-1}{8(X+1)} + \frac{1}{4(X+1)^2}}_{\text{Première espèce}} + \underbrace{\frac{-X-3}{4(X^2+1)}}_{\text{Seconde espèce}}$$

Intégration des éléments simples:

Les éléments simples **de première espèce** sont ceux de la forme ci-dessous, ie dont le dénominateur est **une puissance de polynôme irréductible de premier degré**, pour les intégrer, un changement de variable affine conclut:

¹On considère $d^\circ(P) < d^\circ(Q)$, dans le cas opposé, on peut s'y ramener par division euclidienne.

²Cette méthode permet de calculer les coefficients d'un élément dont le dénominateur est de plus haut degré de son groupe, elle consiste à multiplier l'égalité obtenue par le dénominateur en question, puis à évaluer en une de ces racines, annulant ainsi **tout les éléments simples** sauf celui dont on a choisi le dénominateur, cette procédure permet alors de trouver les coefficients de cet élément.

$$\int_a^b \frac{1}{(at+b)^n} dt$$

Les éléments simples **de seconde espèce**, sont ceux dont le dénominateur est **une puissance de polynôme irréductible de second degré**, pour les intégrer, on se ramène à la forme ci-dessous, et un calcul par récurrence ou un changement de variable trigonométrique conclut¹:

$$\int_a^b \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

Pour se ramener à la forme ci-dessus, pour $E = \frac{P}{Q^n}$ un élément de seconde espèce, on suit la méthode suivante:

- On fait la **division euclidienne de P par Q'^2** .
- On obtient alors une intégrale simple et un reste de la forme $\frac{1}{Q^n}$.
- On ramène le reste à la forme souhaitée en mettant Q sous **forme canonique**.

Exemple: L'élément de seconde espèce de l'exemple précédent est $E = \frac{-X-3}{4(X^2+1)}$, on fait la division euclidienne du numérateur par la dérivée du dénominateur $8X+4$ et on a:

$$E = \frac{-\frac{1}{8}(8X-4) + \frac{-5}{2}}{4(X^2+1)} = \frac{-1}{8} \cdot \frac{2X-1}{X^2+1} - \frac{-5}{8(X^2+1)}$$

Puis on peut intégrer:

$$\int E(x)dx = \frac{-1}{8} \underbrace{\int \frac{2x-1}{x^2+1} dx}_{\text{Facile}} - \frac{5}{8} \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)} dx}_{\text{Forme souhaitée}}$$

Parité:

Soit $a \in \mathbb{R}^+$, il est possible d'exploiter la parité de la fonction³ à intégrer pour faciliter les calculs, en effet on a:

- Si la fonction est **paire**, on a:

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

- Si la fonction est **impaire**, on a:

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0$$

¹On peut faire le changement de variable $u = \tan(x)$ ou alors trouver une relation de récurrence en faisant une IPP à partir de I_{n+1} .

² Q' sera nécessairement de degré 1.

³Par ailleurs, on remarque qu'il est possible de décomposer une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, en effet on a: $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

VI — INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Après avoir défini précédemment l'intégrale de fonctions intégrables sur **sur un segment**, nous allons définir l'intégrale de fonction sur des intervalles **ouvert ou semi-ouvert**, ou encore les intégrales de fonctions **non-bornées**, on les appellera alors **intégrales généralisées**.

Définition :

Soit I un intervalle $]a; b]$, et f une fonction intégrable sur **tout sous-segment** de $[a; b]$, alors on dira que f est **localement intégrable** et on définit alors une fonction auxiliaire ϕ telle que :

$$\phi(x) = \int_x^b f(t)dt$$

Alors on peut définir l'intégrale généralisée, si elle existe, de f par:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x)$$

Si cette limite existe, on dira alors que l'intégrale généralisée existe.

Dans le cas où f est **non-bornée** sur un intervalle I , on peut alors séparer l'intégrale en deux sous-intégrales (ou plusieurs si les discontinuités sont multiples), qui pourront être étudiées de cette manière.

Exemple : Etudions l'intégrale sur $]0; 1]$ du logarithme. Cette fonction est bien localement intégrable sur l'intervalle, posons:

$$\phi(x) = \int_x^1 \ln(t)dt = -1 - x \ln(x) + x$$

Or la limite quand x tends vers 0 existe et vaut -1 , et donc le logarithme est intégrable sur $]0; 1]$ et on a $\int_x^1 \ln(t)dt = -1$.

Intégrales de référence:

Dans cette section, on considère des intégrales sur un intervalle de \mathbb{R}_+ ayant soit une borne supérieure infinie, soit une borne inférieure en 0.

Il existe alors plusieurs intégrales généralisées de référence, une des plus importante étant **l'intégrale de Riemann**:

$$\int \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Par une simple intégration directe suivie d'une disjonction de cas sur la limite de la primitive, on en déduit des propriétés importantes pour la suite:

- Elle **converge** en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- Elle **converge** en 0 si et seulement si $\alpha < 1$.
- Si $\alpha = 1$, elle **diverge toujours**

Une autre intégrale de référence est **l'intégrale de Bertrand**:

$$\int \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} dt$$

Par comparaison avec l'intégrale de Riemann ci-dessus, on peut alors en déduire les propriétés suivantes:

- Elle **converge** en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- Elle **converge** en 0 si et seulement si $\alpha < 1$.
- Si $\alpha = 1$, elle **converge** si et seulement si $\beta > 1$.

Théorèmes de comparaison :

Soit f, g des fonctions **positives** sur l'intervalle considéré telles que $f \leq g$, alors on a la propriété¹ suivante:

- Si l'intégrale de g converge, alors l'intégrale de f converge.
- Si l'intégrale de f diverge, alors l'intégrale de g diverge.

En particulier, cette propriété s'étend aux relations de négligeabilité², en effet si $f = o(g)$, alors:

- Si l'intégrale de g converge, alors l'intégrale de f converge.
- Si l'intégrale de f diverge, alors l'intégrale de g diverge.

Enfin, on peut aussi considérer le cas de deux fonction f, g **équivalentes**³ au point de discontinuité, et alors on a le théorème fondamental suivant:

Les intégrales de f et g sont **de même nature**.

Munis de ces théorèmes de comparaison et des intégrales de référence, on peut alors étudier efficacement la convergence des intégrales de fonctions de signe constant.

Absolue convergence :

Dans le cas de fonction qui ne sont pas à signe constant sur l'intervalle étudié, on peut alors montrer le théorème suivant:

Si $\int |f(t)|dt$ converge, alors $\int f(t)dt$ converge

On dira alors que f est **absolument convergente**⁴.

Cette propriété nous permet donc d'étendre nos théorèmes de comparaison aux fonctions qui changent de signe sur l'intervalle.

Fonctions définies par une intégrale :

On peut alors définir des nouvelles fonctions par des intégrales, et dont le domaine de définition sera donc le domaine de convergence de l'intégrale. Une telle fonction sera de la forme:

$$f(x) : x \mapsto \int_a^b g_x(t)dt$$

Exemple: On peut définir la **fonction gamma**, définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ telle que:

$$\Gamma(x) : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

¹Ce cas découle directement de la positivité des fonctions considérées, en effet si f est positive, l'intégrale de f est **croissante**.

²Découle du fait que ce sont des majorations à partir d'un certain rang.

³En particulier, ce théorème nous permet d'utiliser tout l'arsenal des développements limités.

⁴La preuve utilise le fait que $|f(t)| = f^+ + f^-$ avec $f^+(t) = \max(f(t), 0)$ et $f^-(t) = \max(-f(t), 0)$

VI — SÉRIES NUMÉRIQUES

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, on appelle **série numérique de terme général** u_n la suite S_n des **sommes partielles** des termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, plus formellement, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Ce chapitre consistera en l'étude de la convergence ou de la divergence de telles séries.

Propriétés:

Il est tout d'abord important de remarquer que la fonction qui à une suite associe sa série est **linéaire**, aussi on peut remarquer une propriété élémentaire:

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Cette propriété nous permet alors de montrer la propriété fondamentale suivante:

Si la série **converge** alors son terme général tends vers 0.

Enfin dans certains cas, on peut exprimer le terme général u_n sous la forme $a_{n+1} - a_n$ pour (a_n) une autre suite. On appellera une telle série **série télescopique** et on a la simplification suivante par linéarité:

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

On peut aussi remarquer que les fonctions exponentielle et logarithme étant continues, on peut définir de manière analogue la **suite des produits partiels** d'une suite, qui se ramène alors par passage au logarithme à l'étude d'une série.

Séries de référence:

Le cas le plus élémentaire de série est le cas des **séries géométriques**:

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k$$

Cette série converge si et seulement si sa raison est inférieure à 1 en valeur absolue.

Un second exemple remarquable est celui des **séries de Riemann** qui est analogue aux intégrales du même nom:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

Cette série converge si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

Enfin un dernier exemple remarquable est celui des **séries de Bertrand** qui est aussi analogue aux intégrales du même nom:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^\alpha \ln(k)^\beta}$$

Cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Théorèmes de comparaison :

Soit $(u_n), (v_n)$ des suites **positives**, telles que $(u_n) \leq (v_n)$ alors de manière analogue aux intégrales généralisées, alors on a la propriété¹ suivante:

- Si la série associée à v_n converge, alors la série associée à u_n converge.
- Si la série associée à u_n diverge, alors la série associée à v_n diverge.

En particulier, cette propriété s'étend aux relations de négligeabilité², en effet si $u_n = o(v_n)$, alors:

- Si la série associée à v_n converge, alors la série associée à u_n converge.
- Si la série associée à u_n diverge, alors la série associée à v_n diverge.

Enfin, on peut aussi considérer le cas de deux suites $(u_n), (v_n)$ **équivalentes**³, et alors on a le théorème fondamental suivant:

Les séries associées à u_n et v_n sont **de même nature**.

Munis de ces théorèmes de comparaison et des séries de référence, on peut alors étudier efficacement la convergence des séries dont le terme général est de signe constant.

Absolue convergence :

Dans le cas de séries dont le terme général n'est pas à signe constant, on peut alors montrer le théorème suivant:

Si $\sum_{k=0}^n |u_k|$ converge, alors $\sum_{k=0}^n u_k$ converge

On dira alors que S_n est **absolument convergente**⁴.

Cette propriété nous permet donc d'étendre nos théorèmes de comparaison aux séries dont le terme général change de signe.

Critères spécifiques :

Soit (u_n) une suite à termes **non-nuls**, alors si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ admet une limite l , alors⁵ on a la **règle de d'Alembert**:

- Si $l < 1$, la série associée converge.
- Si $l > 1$, la série associée diverge.
- Sinon on ne peut pas conclure.

Soit (u_n) une suite quelconque, alors si $\sqrt[n]{|u_n|}$ admet une limite l , alors^{??} on a la **règle de Cauchy**:

- Si $l < 1$, la série associée converge.
- Si $l > 1$, la série associée diverge.
- Sinon on ne peut pas conclure.

Ces règles spécifiques permettent d'obtenir la nature d'une série en étudiant simplement le terme général.

¹Ce cas découle directement de la positivité des suites considérées, en effet si (u_n) est positive, sa série associée est **croissante**.

²Découle du fait que ce sont des majorations à partir d'un certain rang.

³En particulier, ce théorème nous permet d'utiliser tout l'arsenal des développements limités.

⁴La preuve utilise le fait que $|u_k| = (u_k)^+ + (u_k)^-$ avec $(u_k)^+ = \max(u_k, 0)$ et $(u_k)^- = \max(-u_k, 0)$

⁵La preuve s'obtient en comparant u_n à une série géométrique

Familles sommables :

On s'intéresse maintenant à la possibilité d'étendre les propriétés de l'addition et de la multiplication aux sommes infinies. En particulier, est-il possible de donner une condition pour que la somme d'une série soit **invariante par permutation des termes**, **associative**, ou encore que le **produit de Cauchy** de deux séries convergentes soit convergente ?

On peut répondre affirmativement à ces questions en introduisant le concept de **famille sommable**, et on peut alors montrer⁶ que si la série associée à u_n est **absolument convergente**, alors:

- L'ordre des termes dans la somme ne change pas la somme
- L'ordre des termes dans la somme ne change pas la somme

⁶Hautement non trivial ...

VI — SUITES DE FONCTIONS

Soit $E \subseteq F$, on appelle **suite de fonctions** une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les éléments sont des fonctions de E dans F . Dans ce chapitre, on cherchera à définir une notion de convergence de telle suites.

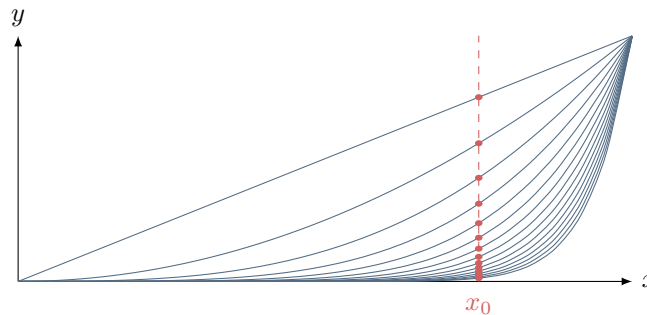
Convergence simple:

Une première approche serait de définir la convergence de la suite (f_n) vers une fonction limite f comme:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Cela signifierait que pour un x_0 fixé, la suite de **réels** $(f_n(x_0))$ converge vers $f(x)$.

Par exemple si on considère la suite de fonctions définie par $f_n(x) = x^n$ sur $[0; 1]$ et qu'on fixe $x_0 \in [0; 1]$ on a:



Alors cette suite converge vers la fonction:

$$f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque un premier problème venant de cette définition, en effet les fonctions f_n sont toutes continues mais la limite n'est plus continue. Cela motive une notion de convergence plus **forte**.

Convergence uniforme:

On dit que (f_n) **converge uniformément** vers f sur \mathbb{R} et on note $(f_n) \rightrightarrows f$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall x \in \mathbb{R}; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

L'inversion des quantificateurs nous donne alors un unique seuil à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, en particulier, on peut alors montrer que cette notion de convergence équivaut à un critère plus pratique. En effet (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si:

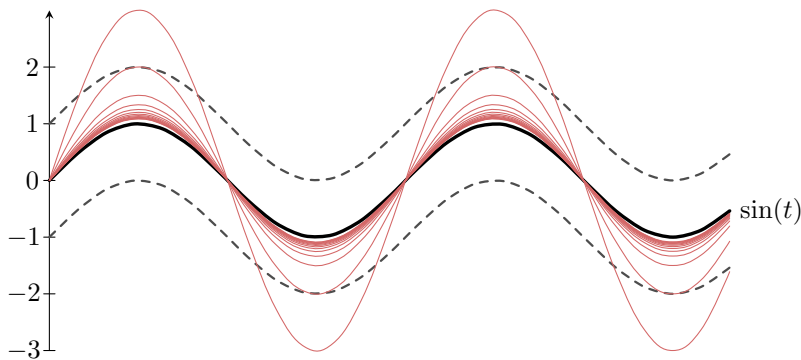
$$\|f_n - f\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \rightarrow 0$$

On rappelle que la norme infini est définie par:

$$\|f_n - f\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |f_n(x) - f(x)| \right\}$$

Géométriquement, les boules pour cette norme consistent en des "tunnels" autour de la fonction centrale, et la convergence pour cette norme implique donc qu'à partir d'un certain rang, la suite de fonction se trouve toujours dans un tunnel arbitrairement petit.

Par exemple la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n+2}{n} \sin(x)$ converge uniformément vers $f : x \mapsto \sin(x)$ et graphiquement on a :



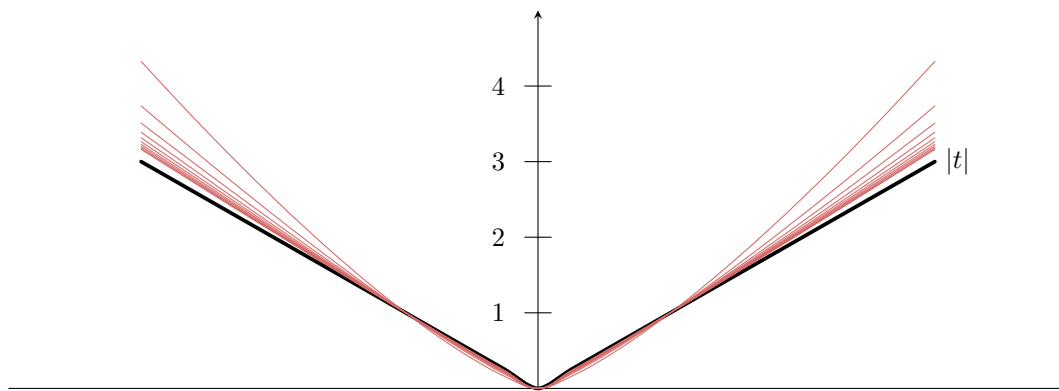
Propriétés de régularité conservées:

Soit (f_n) une suite de fonction qui converge uniformément vers f , la valeur de notre définition est mise en lumière par les propriétés suivantes:

- Si chaque f_n est **bornée**, alors f est **bornée**.
- Si chaque f_n est **continue**, alors f est **continue**.
- Si chaque f_n est **uniformément continue**, alors f est **uniformément continue**.

Beaucoup de propriétés de régularité passent à la limite uniforme.

Néanmoins le cas de la dérivabilité est plus subtil, en effet considérons la suite (f_n) définie par $f_n(x) = x^{1+\frac{1}{2n+1}}$, alors elle est bien définie et dérivable¹ sur \mathbb{R} , mais on a :



$$(f_n) \rightrightarrows f \text{ pour } f : x \mapsto |x|$$

Et donc en particulier on a exhibé une suite de fonctions dérivables donc la limite uniforme **n'est pas dérivable** en un point.

Limites en un point:

On peut généraliser le résultat sur la continuité à un résultat sur les limites, en effet si (f_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers f et telles que $f_n(x)$ admette une limite en un point a , alors on a le **théorème d'interversion** suivant:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

¹Remarquer que $2n + 1$ est toujours impair, donc on prends des racines n-ièmes impaires.

Intégrabilité:

On peut alors aussi montrer que si (f_n) est une suite de fonction intégrables qui convergent uniformément vers f , alors f est intégrable et on a le **théorème d'interversion** suivant:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

Retour sur la dérivabilité:

Après avoir montré que la dérivabilité ne passe pas à la limite uniforme, on veut néanmoins trouver des critères permettant de trouver la dérivée d'une limite d'une suite de fonctions, on considère alors une suite de fonctions (f_n) toutes dérivables qui converge simplement vers une fonction f , et on suppose en outre que **la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément**.

Alors (f_n) converge uniformément vers f et cette dernière est dérivable de dérivée:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$$

On note alors que pour que la dérivabilité passe à la limite, il nous faut la convergence uniforme de la suite des dérivées ¹.

Approximations uniformes:

On se demande maintenant quand peut-on dire qu'une fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonctions. Le **théorème de Weierstrass** nous donne alors une réponse forte:

Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

¹Les conditions présentées sont suffisantes mais pas nécessaires pour permettre de gagner en clarté d'exposition. Pour être plus précis, il suffit que la suite converge simplement en un seul point

VI — SÉRIES DE FONCTIONS

On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite S_n des **sommes partielles** des termes de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, plus formellement, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k$$

Ce chapitre consistera en l'étude de la convergence de ces cas particuliers de suite de fonctions, ainsi que de la qualité de cette convergence, comme dans le cas des suites de fonctions usuelles.

Convergence simple:

On définit de la même manière que pour une suite de fonctions classiques la **convergence simple** d'une série de fonctions, il suffit alors, comme dans le cas d'une suite de fonction classique, d'effectuer la même étude en **fixant** $x_0 \in \mathbb{R}$ et en étudiant la limite de la série **numérique**:

$$S_n(x_0) = \sum_{k=0}^n f_k(x_0)$$

On remarquera alors le même défaut de perte de régularité à la limite que dans le cas des suites de fonctions, cela était prévisible, les séries ne sont en effet qu'un cas particulier des suites. Cela motive à nouveau la notion de convergence uniforme.

Convergence uniforme:

On définit de la même manière que pour une suite de fonctions classiques la **convergence uniforme** d'une série de fonctions, il suffit alors, comme dans le cas d'une suite de fonction classique, ie il suffit de montrer que:

$$\|S_n - S\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \rightarrow 0$$

Alors pour les mêmes interprétations que dans le cas des suites de fonctions, on aura une notion de convergence plus forte.

Propriétés de régularité conservées:

Soit (S_n) une série de fonction qui converge uniformément vers S , alors comme cas particulier de suite de fonction, on a évidemment à nouveau:

- Si chaque S_n est **bornée**, alors S est **bornée**.
- Si chaque S_n est **continue**, alors S est **continue**.
- Si chaque S_n est **uniformément continue**, alors S est **uniformément continue**.

Beaucoup de propriétés de régularité passent à la limite uniforme.

Néanmoins comme précédemment, on montre facilement que la dérivabilité ne passe pas si simplement à la limite uniforme, et on a alors la même condition de dérivabilité de la limite que pour les suites donnée au chapitre précédent.

On peut aussi à nouveau généraliser la conservation de la continuité par la conservation de la limite, comme dans le chapitre précédent ainsi que la conservation de l'intégrabilité et on a donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t) dt$$

Convergence normale:

Finalement, dans le cas des séries de fonctions, on définit un dernier mode de convergence plus fort appelé **convergence normale** et on dira qu'une série de fonction converge normalement si et seulement si la série numérique suivante converge:

$$\sum_{k=0}^n \|f_k\|_{\infty}^{\mathbb{R}}$$

L'intérêt de cette nouvelle définition et que la convergence normale implique la convergence uniforme, ce qui nous donne donc une condition suffisante très pratique pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions.

Fonctions définies par une série:

On peut alors définir des nouvelles fonctions par la limite de séries de fonctions, et dont le domaine de définition sera donc le domaine de convergence de la série. Une telle fonction sera de la forme:

$$f(z) : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

Exemple: On peut définir la **fonction exponentielle**, définie sur \mathbb{R} par:

$$\exp : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

C'est d'ailleurs même un exemple de **série entière** qui seront les objets d'étude du chapitre suivant.

VI — SÉRIES ENTIÈRES

On se propose dans ce chapitre d'étudier des séries de fonctions particulières au comportement particulièrement intéressant, qui s'appelleront **séries entières** et on appelle série entière de terme général $a_n z^n$ une série de fonctions S_n de variable complexe¹ z de la forme:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

L'étude de ce type de série permet alors de généraliser le concept de **polynôme** (définis comme sa suite (finie) de coefficients), en une notion de polynôme dont la suite de coefficients est infinie. Il faut alors déterminer dans quels cas ces séries convergent (si elle convergent) et étudier la qualité de cette convergence.

Convergence:

On s'intéresse tout d'abord à la convergence simple de ces séries, et le premier résultat particulièrement intéressant est le suivant, si on suppose que la série converge pour un certain z_0 , alors on peut montrer que:

$$\forall z \in \mathcal{D}(0, z_0) ; S_n(z) \text{ converge aussi .}$$

Géométriquement, cela signifie que les domaines de convergence de ces séries ont des propriétés de symétries très intéressantes, elle convergent sur ce qu'on appellera **un disque de convergence** centré en 0 et dans le cas réel qui nous intéressera, sur un intervalle de la forme $]-R; R[$ pour un certain réel R qu'on appellera alors **rayon de convergence de la série**.

Rayon de convergence:

Il reste alors à caractériser ce rayon de convergence pour savoir exactement sur quel domaine une série entière donnée converge, on précise tout d'abord la forme du rayon de convergence, c'est le réel donné par:

$$R := \sup \left\{ |z| ; \sum_{k=0}^n a_k z^k \text{ converge} \right\}$$

On simplifie ici l'étude en considérant le cas commun de séries telles que la limite de d'Alembert ou de Cauchy existe ou est infinie², alors on applique le critère de Cauchy à la série et on obtient alors des informations sur le rayon de convergence:

$$|x| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = l$$

Alors dans ce cas on a $R := l$ et on a aussi la propriété de régularité très forte suivante:

Une série entière converge normalement sur tout compact strictement inclu dans le disque de convergence.

Propriétés algébriques:

On se donne deux séries entières $\sum a_n z_n$, $\sum b_n z_n$ de rayons de convergences respectifs R_a, R_b , alors pour tout $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a:

$$\begin{cases} (\sum a_n z_n) + (\sum a_n z_n) & \text{converge} \\ (\sum a_n z_n) (\sum b_n z_n) & \text{converge} \end{cases}$$

Ce qui signifie simplement que le rayon de convergence de la somme ou du produit est **au moins supérieur** au minimum des rayons de convergence.

¹On définit ici les séries entières dans la plus grande généralité mais on se restreindra assez vite au cas réel.

²Dans le cas contraire (par exemple penser à $a_n = \sin(n)$), on doit utiliser le "vrai" critère de Cauchy donné par:

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Régularité:

On s'intéresse maintenant à la régularité d'une fonction f définie par une série entière sur son disque de convergence, alors on peut montrer par les propriétés sur la convergence uniforme qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur son disque de convergence et on a donc:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Et plus généralement, on peut **dériver termes à termes** une série entière et on a:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(k-1))a_n x^{n-k}$$

Par ailleurs, on peut alors montrer une condition nécessaire sur les coefficients de la série, en effet on a:

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

Ce qui permet alors de démontrer que si une fonction donnée peut s'écrire comme une série entière alors, cette écriture est bien **unique**.

Fonctions analytiques:

On considère maintenant le problème inverse, on se donne une fonction f et on se demande si elle peut s'écrire comme une série entière centrée en un point $a \in \mathbb{C}$, ie si il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et un rayon de convergence R tels¹ que:

$$\forall z \in \mathcal{D}(a, R) ; f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

Si c'est le cas, on dira alors que la fonction est **analytique** en a , et on dira simplement qu'elle est analytique si elle est analytique en tout points de son domaine de définition. Par exemple la fonction exponentielle est analytique.

Cette propriété est plus forte encore que d'être de classe \mathcal{C}^∞ , en effet il existe des fonctions de cette classe qui ne sont pas analytiques, l'exemple canonique étant $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$

Applications:

L'application principale des fonctions analytiques est la résolution des équations fonctionnelles, différentielles par exemple. En effet, étant donnée un équation différentielle E , on peut tenter de chercher des solutions sous la forme d'une fonction analytique, ce qui permet souvent de simplifier les calculs par unicité du développement en série entière. En effet, il suffit alors souvent d'identifier les coefficients.

Exemple: On cherche à résoudre l'équation $f(x) = f'(x)$, en particulier on va chercher ses solutions analytiques, on a donc l'équation:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Par identification des coefficients, on trouve donc que a_0 est un réel quelconque et que $a_n = n a_{n-1}$, ie que $a_n = \frac{a_0}{n!}$, et finalement on peut donc identifier les fonctions de la forme $f(x) = ce^x$ avec la série entière obtenue.

¹Cela revient par translation à trouver une série entière au sens défini plus haut telle que:

$$g(z) = f(z+a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

VI — SÉRIES DE FOURIER

Harmoniques:

Pour une fonction périodique donnée qui serait développable en série de Fourier, on définit sa **fréquence** par la quantité $F = \frac{1}{T}$ on remarque alors qu'elle se décompose sous la forme d'une somme de fonctions trigonométriques telles que **leurs fréquences est multiple de la fréquence de la fonction**, on appelle alors la fréquence de la fonction **fréquence fondamentale** ou **première harmonique**, et on définit la **n-ième harmonique** par:

$$H_n(f) : x \mapsto c_n(f)e^{in\omega x} + c_{-n}(f)e^{-in\omega x}$$

On trouve alors directement une autre expression de la série de Fourier équivalente aux précédentes:

$$S_n(f) = c_0(f) + \sum_{k=1}^n H_k(f)$$

Cette expression peut être pratique car elle permet de passer rapidement de la série de Fourier complexe à la série de Fourier réelle, en appairant les termes d'indices opposés et en utilisant les formules d'Euler.

VII — FONCTIONS VECTORIELLES

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés analytiques et de régularité d'un ensemble plus général de fonctions, les **fonctions d'une variable à valeurs vectorielles** et plus précisément, on se concentrera principalement sur le cas des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne si nécessaire.

Définition:

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de \mathbb{R} et $(f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ des fonctions réelles, alors on appelle **fonction vectorielle** les fonctions de la forme:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \end{aligned}$$

Dans le cas où $n = 2$ et si

Limites:

On caractérise alors la **limite d'une fonction vectorielle** f en un point $a \in A$, par la limite par composante, ie on a:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(t) = l \iff \forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket ; \lim_{x \rightarrow a} f_i(t) = l_i$$

En particulier on remarque alors la simplicité de cette généralisation, les limites se calculent simplement composantes par composantes. On verra par la suite que cette définition permet bien d'étendre toutes les notions analytiques classiques.

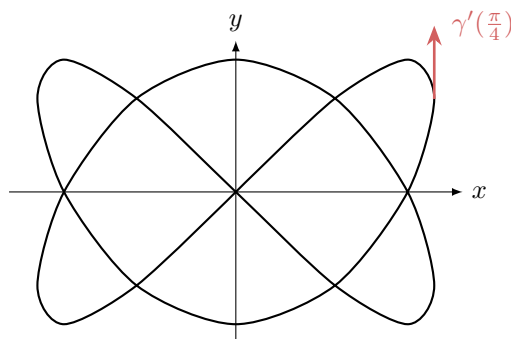
Propriétés de régularité:

La limite étant caractérisée composantes par composantes, la notion de continuité s'étend naturellement composantes par composantes. Par ailleurs, on étend aussi la notion de dérivabilité et on dit qu'une fonction vectorielle f est **dérivable en a** si et seulement si la limite suivante existe:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ce qui équivaut alors à l'existence des limites correspondantes pour les composantes, et f est donc dérivable en a (par extension de classe \mathcal{C}^k) si chacune de ses composantes sont dérivables en a (ou de classe \mathcal{C}^k en a) et on note alors f' sa **dérivée** qui s'obtient simplement en dérivant composante par composante.

Géométriquement $f'(t)$ représente le **vecteur tangent** (aussi appelé vecteur vitesse) à la courbe au temps t . Dans \mathbb{R}^2 par exemple:



Propriétés non-conservées:

Néanmoins pour le cas de fonctions vectorielles, certaines propriétés ne sont pas conservées. En particulier, le **théorème de Rolle** n'est plus valable ainsi que le **théorème des accroissements finis**.¹ Néanmoins, l'inégalité des accroissements finis reste valide et s'interprète facilement cinématiquement:

Un point mobile qui se déplace à une vitesse instantanée inférieure à K sur un temps T , se trouve au maximum à une distance KT de son point de départ.

Dérivées de composées :

Soit f une fonction vectorielle dérivable, on peut alors se demander comment, étant donnée une application linéaire L , se comporte la dérivée de la composée $L \circ f$ et on montre alors à partir de la définition que:

$$(L(f))' = L(f')$$

On veut alors généraliser, et on considère deux fonctions vectorielles f, g dérivables, et une application bilinéaire B , alors de la même manière on peut montrer que:

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$$

On peut alors y voir un analogue de la **règle du produit** pour la dérivation classique, en particulier si $B = \langle \cdot | \cdot \rangle$, on a:

$$\langle f | g \rangle' = \langle f' | g \rangle + \langle f | g' \rangle$$

Finalement, si on a une famille f_1, \dots, f_n de fonctions vectorielles dérivables et une application multilinéaire M , alors:

$$M(f_1, \dots, f_n)' = M(f_1', \dots, f_n) + \dots + M(f_1, \dots, f_n')$$

En particulier si $M = \det$, et pour les fonctions f, g, h on a:

$$\det(f, g, h)' = \det(f', g, h) + \det(f, g', h) + \det(f, g, h')$$

Intégration:

On peut alors raisonnablement penser que l'intégration sur un segment $[a; b]$ se généralisera de la même manière, et c'est le cas ! Si toutes les fonctions (f_i) sont Riemann-intégrables sur le segment, alors on dira que la fonction f est Riemann-intégrable et on définit:

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right)$$

En particulier cela donne lieu à une interprétation cinématique :

Si f est une fonction qui donne le vecteur vitesse d'un point mobile à un temps t , alors son intégrale est le vecteur position associé.

Points remarquables:

On peut par la suite définir plus d'outils analytiques sur cet ensemble de fonctions, mais pour cela il faut définir la notion d'arcs paramétré qui nécessite les définitions suivantes qui se ne sont que terminologie:

- On appelle **point régulier** un point $f(t)$ tel que $f'(t) \neq 0$
- On appelle **point critique** un point $f(t)$ tel que $f'(t) = 0$

On appelle **point multiple** un point P de E tel qu'il existe (t_0, \dots, t_k) deux à deux distincts tels que $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket f(t_i) = P$ et on appelle alors **multiplicité** l'entier k .

¹Evident après un dessin.

VII — FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés analytiques et de régularité d'un ensemble plus général de fonctions, les **fonctions d'un espace vectoriel normé dans un autre** et plus précisément, on se concentrera principalement sur le cas des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

Soit \mathcal{D} une partie de \mathbb{R}^n et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$, on considère alors la fonction:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

On dira alors que la fonction f_i est la i -ème application **composante** de f .

Définitions:

On peut alors définir quelques notions de vocabulaire:

- Si la fonction est à valeur scalaire, on dira que c'est **un champ de scalaires**.
- Si la fonction est à valeur vectorielles, on dira que c'est **un champ de vecteurs**.

Représentations:

On cherche alors à représenter de telles fonctions, on sait que dans le cas élémentaire des fonctions à une seule variable, on peut représenter le **graphe** d'une fonction f donné par:

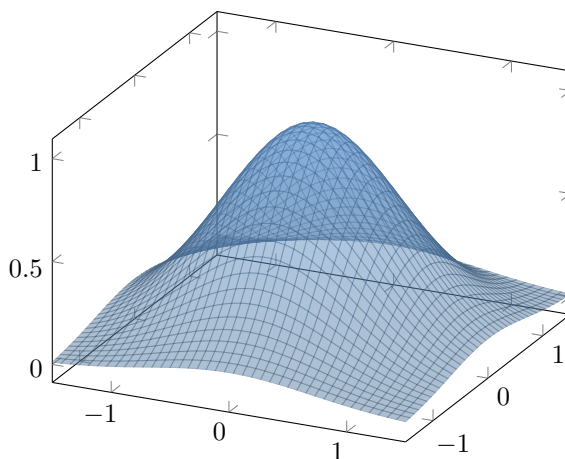
$$\mathcal{G}_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$$

Dans le cas d'une fonction de plusieurs variables, on peut alors généraliser cette définition par:

$$\mathcal{G}_f := \{(x, f(x)) ; x \in \mathbb{R}^n\}$$

De façon générale, le graphe d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est un objet à n dimensions dans l'espace à $(n+p)$ dimensions (les points sont caractérisés par n paramètres, en termes savants on dira qu'il s'agit d'une sous-variété de $\mathbb{R}^{(n+p)}$ de dimension n).

Si on considère par exemple une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , c'est alors une fonction qui à chaque point du plan associe une valeur numérique, qu'on peut alors représenter comme **une hauteur** et on obtient alors **une surface**, par exemple:



Graphe de la fonction $f : (x, y) \mapsto \exp(-x^2 - y^2)$

Dans le cas général néanmoins, il est plus difficile de représenter ce type de fonctions mais on peut par exemple s'inspirer des fonctions $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et utiliser la **couleur** comme 4-ème dimension de l'image. On peut aussi de manière heuristique représenter simplement le domaine de départ et/ou d'arrivée pour étudier le comportement de la fonction.

Cas des champs de vecteurs:

De manière générale, le caractère multidimensionnel de l'espace d'arrivée importe peu dans tout le chapitre qui va suivre, les notions analytiques étant définies à partir d'une limite, elles passeront aux composantes comme les notions évoquées au chapitre précédent.

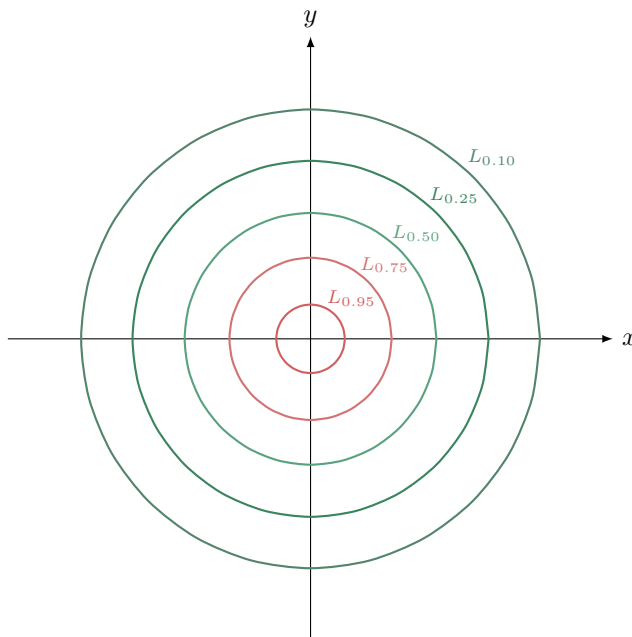
Dans toute la suite on considèrera alors souvent le cas épuré de champs de scalaires et il est attendu d'adapter les résultats élémentaires aux cas à valeurs vectorielles.

Lignes de niveaux:

On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors on appelle **ligne de niveau** associé à la valeur λ l'ensemble suivant:

$$L_\lambda := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = \lambda \right\}$$

C'est une courbe plane qui représente l'ensemble des points du plan où la fonction prends une valeur fixée, tracer plusieurs lignes de niveaux permet alors d'obtenir des informations sur la fonction, par exemple:



Lignes de niveau de la fonction $f : (x, y) \mapsto \exp(-x^2 - y^2)$

Changements de variables:

L'étude des fonctions à plusieurs variables va nous amener à étudier les **changements de variables** que nous allons définir:

On appelle changement de variable tout \mathcal{C}^k difféomorphisme entre deux espaces.

En particulier, on verra que le passage en coordonnées polaires défini comme suite est bien un changement de variable et en tant que tel, il préserve les propriétés différentielles:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi ; \pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

VII — LIMITE & CONTINUITÉ

Dans ce chapitre et comme vu dans le chapitre de Topologie, nous étudions le concept de limite dans le cas d'une fonction à plusieurs variables, plus précisément, sauf exceptions, dans le cas d'un champ de scalaire. Dans les cas où les généralités sont triviales, on utilisera sans vergogne l'exemple canonique d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On rappelle qu'une limite d'une telle fonction se caractérise métriquement par la propriété:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| < \lambda \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Limites suivant une restriction:

Cette définition correspond bien à l'intuition *topologique* de la notion de limite. En particulier, on peut alors montrer que si f tends vers l en (a, b) , alors en particulier si on considère un **chemin** de la forme:

$$\gamma : t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

Et si ce chemin est tel qu'il passe par (a, b) en t_0 , alors on a nécessairement:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l \implies \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = l$$

En particulier cela nous permet de construire une méthode pour démontrer la **non-existence de limite**, ie:

Si il existe deux chemins différents suivant lesquels la fonction admet deux limites différentes, alors elle n'admet pas de limite en ce point.

Erreurs communes:

Cette définition correspond bien à l'intuition *topologique* de la notion de limite. Néanmoins il faut remarquer les propriétés suivantes spécifiques aux fonctions à plusieurs variables:

- Il est possible qu'une fonction admette une limite suivant plusieurs chemins, mais pas de limite.
- Il est même possible qu'une fonction admette une limite suivant toutes les droites, mais pas de limite.
- De manière générale, admettre une limite sur plusieurs restrictions ne permet pas d'affirmer l'existence d'une limite.

Opérations:

Comme dans le cas des fonctions réelles, on peut alors démontrer les propriétés opératoires de la limite, en effet si on considère f, g deux champs scalaires qui admettent deux limites l_1, l_2 en $A \in \mathbb{R}^p$, alors on a les propriétés suivantes:

- Le passage à la limite est **linéaire**.
- Le passage à la limite est **multiplicatif**.
- Le passage à la limite (non-nulle) d'une fonction localement non-nulle est **inversible**.

La première propriété se généralise aux champs vectoriels, mais pas les deux secondes bien évidemment, car les opérations en jeu (effectuées à l'arrivée) ne sont pas définies pour des vecteurs.

Enfin pour deux fonction qui sont composables, on a la propriété fondamentale suivante:

- Le passage à la limite est compatible avec la **composition**.

Théorème d'encadrement :

On peut généraliser le théorème des gendarmes aux fonctions à plusieurs variables, en effet si on considère f, g, h trois fonctions telles que $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$ dans un voisinage de (a, b) alors on a:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x,y) = l \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = l$$

Passage en polaire :

Si on considère une fonction à deux variables, on peut exprimer (x, y) en coordonnées polaires, ie considérer la composée $f(x, y) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et alors f tends vers 0 en $(0, 0)$ si et seulement si il existe une fonction $g(r)$ telle que:

$$|f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| \leq g(r)$$

Avec $g(r)$ qui tends vers 0 quand r tends vers 0. **Attention** la fonction g ne doit plus dépendre de θ .

Continuité :

En tant que conséquence directe de la définition topologique, on dira alors qu'une fonction est **continue** en un point A si et seulement si:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow A} f(x, y) = f(A)$$

Et toutes les propriétés opératoires usuelles sont alors aisément démontrées. En particulier, on peut montrer que toutes les fractions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition, et donc tous les polynômes.

VII — DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

Dans ce chapitre nous essaierons de construire un concept de **dérivée** dans le cas d'une fonction à plusieurs variables, plus précisément, sauf exceptions, dans le cas d'un champ de scalaire. Dans les cas où les généralités sont triviales, on utilisera sans vergogne l'exemple canonique d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

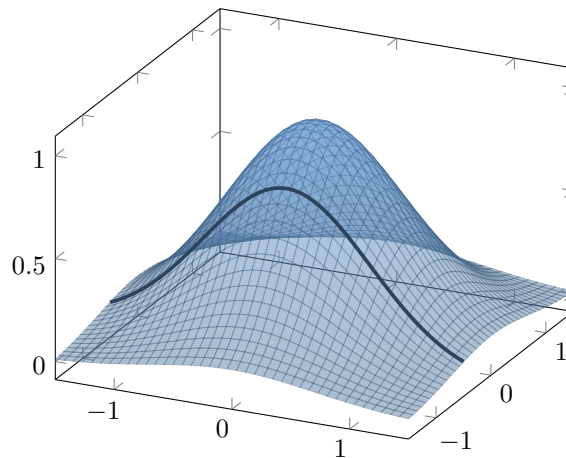
Applications Partielles :

On considère une fonction de $A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ **intérieur** à A . Alors il existe un voisinage de a où la fonction **réelle** suivante est bien définie, on l'appelle alors **i-ème application partielle** au point a :

$$\begin{aligned} f_{x_i} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(a_1, \dots, t, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Considérer la i-ème application partielle, c'est fixer une direction et considérer la courbe de f suivant cette direction.

Géométriquement, on peut le voir comme l'intersection d'un plan parallèle à l'axe considéré et passant par a , et l'application partielle est alors l'intersection de la courbe et du plan:



Application partielle f_x en $(0, -0.5)$ de $f : (x, y) \mapsto \exp(-x^2 - y^2)$

Dérivées Partielles :

On dira alors qu'une telle fonction **admet une i-ème dérivée partielle** au point a si et seulement si sa i-ème application partielle en a est dérivable en a_i . On se ramène alors à l'étude de la dérivabilité d'une fonction **réelle**, ce qui ne pose pas de problème théorique. Dans ce cas, on notera alors:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a_i)$$

Si f admet une i-ème dérivée partielle sur un ouvert \mathcal{U} si et seulement si elle en admet en tout points de \mathcal{U} et on définit alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_i) \end{aligned}$$

On dira alors qu'une fonction à plusieurs variables est de classe \mathcal{C}^k en un point si elle admet toutes ses dérivées partielles en ce point et qu'elles y sont continues.

Propriétés opératoires:

On peut montrer que la dérivation partielle est un **opérateur différentiel** agissant sur un espace de fonctions qui admettent des dérivées partielles, en particulier en utilisant les définitions précédentes et en notant $\mathcal{D}_i(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions admettant une i -ème dérivée partielle, alors on peut définir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{D}_i(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}\end{aligned}$$

C'est donc cet opérateur que nous appliquons à une fonction qui admet des dérivées partielles. En particulier, l'intérêt de cette définition est alors de pouvoir affirmer les propriétés suivantes:

- La dérivation partielle est **linéaire**.
- La dérivation partielle suit **la règle du produit**.

La première propriété se généralise aux champs vectoriels, mais pas la seconde bien évidemment, car les opérations en jeu (effectuées à l'arrivée) ne sont pas définies pour des vecteurs.

Exemple: On considère les fonctions suivantes en un point (x, y) :

$$f : (x, y) \longmapsto xy \qquad g : (x, y) \longmapsto x^2y$$

Alors on a¹:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)g(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)f(x, y) = yx^2y + 2xyxy = 3x^2y^2$$

On voit bien ici que la dérivée d'un produit n'a de sens que si on est dans le cas de (au moins un) champs scalaires !

Dérivée partielle d'une composée:

Le cas de la composée est plus subtil et on revient temporairement au cas général des deux champs vectoriels suivants dont on supposera qu'ils admettent toutes leurs dérivées partielles partout:

$$g : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^n \qquad f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^p$$

On cherche à caculer la dérivée partielle par rapport à la i -ème variable de la fonction $f \circ g$ au point a , on peut alors montrer la formule suivante, appelée **chain rule**:

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(a))$$

Exemple: On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et la fonction g de passage en polaire:

$$g : (r, \theta) \longmapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

On se propose de calculer la première dérivée partielle de $f \circ g$ au point (r, θ) , on a alors:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f \circ g)}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial g_1}{\partial r}(r, \theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \frac{\partial g_2}{\partial r}(r, \theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))\end{aligned}$$

¹**Attention:** Ici on fait l'abus de notation usuel d'utiliser deux fois la variable x qui ont deux sens différents, l'expression $\frac{\partial f g}{\partial x}$ signifie simplement qu'on dérive par rapport à la première variable (penser $\partial_1(fg)$) et (x, y) représente le point d'évaluation de la dérivée partielle.)

Dérivées partielles d'ordre supérieur :

La i -ème dérivée partielle de f étant à nouveau une fonction de n variables, on peut alors considérer ses dérivées partielles. On définit les dérivées partielles secondes de f (si elles existent), notées:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Et par récurrence les dérivées partielles d'ordre k par:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)$$

Et on se pose alors la question de l'importance de **l'ordre de dérivation** et de manière générale, on peut alors montrer que l'ordre d'application de l'opérateur compte, ie que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Mais le théorème de Schwarz donne alors une condition suffisante pour que l'ordre ne compte pas:

Si les dérivées partielles sont toutes continues en un point, alors l'ordre de dérivation n'importe pas.

Dérivées Directionnelles :

Si on considère les dérivées partielles d'une fonction f , qu'on note $a = (x_1, \dots, x_n)$ le point d'étude et (e_i) la base canonique, on peut alors les caractériser par:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$$

En effet ce sont par définition les dérivées des applications partielles, donc des limites de taux d'accroissement¹ qui correspondent à la limite ci-dessus.

Ce sont en fait des **dérivées directionnelles** dans des directions canoniques, mais on souhaite alors généraliser cette notion à tout vecteur unitaire v , on pose alors simplement:

$$D_v f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

C'est alors intuitivement la dérivée de la courbe obtenue par intersection avec le plan vertical suivant le vecteur choisi.

Inconvénients de cette définition:

On aimerait alors que cette définition remplisse les memes roles que ceux remplis par la dérivée usuelle, mais ce n'est pas du tout le cas, en particulier, on a les problèmes suivants:

- Un fonction qui admet des dérivées partielles en un point peut ne pas etre continue en ce point.
- Un fonction qui admet toute ses dérivées directionnelles en un point peut ne pas etre continue en ce point.
- Elles ne permettent pas directement de définir une application affine tangente à la courbe.
- Elles ne permettent pas d'étudier les extrema de la fonction.

En résumé, le concept de dérivée directionnelle manque de puissance.

¹Cette limite n'étant pas très pratique pour des calculs concrets, on verra au chapitre suivant une caractérisation plus utile dans le cas de fonctions différentiables.

VII — DIFFÉRENTIELLE

Nous allons à présent définir le vrai concept équivalent à la dérivée usuelle, qui nous permettra de généraliser l'idée d'application tangente en un point, d'étudier les extrema d'une fonction et d'étudier toutes les propriétés différentielles d'une fonction à plusieurs variables de manière générale.

Dans toute la suite, on s'appropriera la notation suivante des vecteurs de la **base duale**¹ de \mathbb{R}^n :

$$dx_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

Cas réel:

On rappelle qu'on dit qu'une fonction réelle f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$ si et seulement si²:

$$\forall h \in \mathbb{R} ; \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Cette définition revient alors à dire que l'application linéaire qui approxime le mieux f en a est donnée par:

$$\begin{aligned} df_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(a)dx(x) = f'(a)x \end{aligned}$$

Ce qui correspond à dire que la fonction $df_a(x) = f'(a)x$ est l'**application linéaire tangente** à f au point a . Attention, ici on dit bien linéaire, et donc ce n'est pas une tangente géométrique à la courbe, mais son pendant affine l'est.

On définit alors la **différentielle** de f comme la fonction qui à tout point où f est dérivable, lui associe son application linéaire tangente, ie:

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ a &\longmapsto f'(a)dx \end{aligned}$$

C'est cette notion de différentiabilité et d'application linéaire tangente qui va se généraliser dans tout sa force au cas général.

Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, on dira que f est **différentiable** en un point a si et seulement si il existe une application linéaire $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que:

$$\forall h \in \mathbb{R}^n ; \frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Ou en d'autres termes qu'il existe ε_a une fonction définie sur un voisinage de 0, telle que $\varepsilon_a(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et que:

$$\forall h \in \mathbb{R}^n ; f(a+h) - f(a) - df_a(h) = \|h\| \varepsilon_a(h)$$

En outre, si f est différentiable sur un ouvert U , alors on définit sa différentielle de la même manière que dans le cas réel par:

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ a &\longmapsto df_a \end{aligned}$$

Mais cette définition ne nous permet pas de connaître la **forme** de la différentielle, et donc de la calculer, on doit donc chercher des conditions nécessaires sur cette fonction dans la section suivante.

¹Formellement, il s'agit d'un **champ de formes 1-linéaire** (on dira aussi **1-forme différentielle**) qui à chaque point a de \mathbb{R}^n associe la projection canonique sur la i -ème coordonnée de "l'espace tangent" en a , mais dans ce cas, $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, donc le champ de forme linéaire se réduit simplement en une simple forme linéaire (ou plutôt un champ constant).

²Ce qui est équivalent à dire que $f(a+h) - f(a) - f'(a)h = o(|h|)$ au voisinage de 0

Forme nécessaire de la différentielle:

En exprimant les applications partielles de f et en utilisant la définition de la différentielle appliqué au quotient obtenu, on montre tout d'abord que f admet nécessairement toutes ses dérivées partielles en a et on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i)$$

Alors, en exprimant un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ dans la base canonique et en utilisant la linéarité de la différentielle, on obtient l'expression:

$$df_a(x) = \sum_{k=1}^n x_k df_a(e_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) x_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k$$

Finalement, on a bien donné une forme nécessaire à la différentielle de f et on a:

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ a &\longmapsto \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k \end{aligned}$$

C'est bien une application linéaire à valeurs dans \mathbb{R}^p car par composantes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est un vecteur et le produit $vd x$ est bien défini car dx est une forme linéaire.

Exemple: On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$, dont on souhaite calculer la différentielle en $a = (1, 1)$ alors on a:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (y, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x, 1) \end{cases}$$

Donc la différentielle est donnée par:

$$df : (a, b) \mapsto (b, 1)dx + (a, 1)dy$$

Et donc la différentielle en a est donnée par:

$$df_a : (x, y) \mapsto (1, 1)x + (1, 1)y = (x + y, x + y)$$

Propriétés opératoires:

Tout d'abord, on peut montrer que l'**opérateur de différentiation** sur les applications différentiables sur un ouvert \mathcal{U} , qu'on notera $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$, est un opérateur différentiel:

$$\begin{aligned} d : \mathcal{D}_{\mathcal{U}} &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)) \\ f &\longmapsto df \end{aligned}$$

C'est donc cet opérateur que nous appliquons à une fonction qui admet une différentielle. En particulier, l'intérêt de cette définition est alors de pouvoir affirmer les propriétés suivantes:

- La différentiation est **linéaire**.
- La différentiation suit **la règle du produit**.

La première propriété se généralise aux champs vectoriels, mais pas la seconde bien évidemment, car les opérations en jeu (effectuées à l'arrivée) ne sont pas définies pour des vecteurs.

Différentielle d'une composée:

On a aussi pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en a et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $f(a)$ la formule de différentielle d'une composée:

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Une autre interprétation de cette propriété sera possible plus tard via l'introduction de la Jacobienne.

Différentielle d'une réciproque:

Si on a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un **homéomorphisme** différentiable en a et si df_a est bijective alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et on a:

$$d(f^{-1})_{f(a)} = (d(f)_a)^{-1}$$

Une autre interprétation de cette propriété sera possible plus tard via l'introduction de la Jacobienne.

Propriétés de régularité:

Nous nous devons maintenant de confirmer que cette définition est bien celle qui étends l'idée de dérivabilité classique. Et en effet c'est le cas et on a les propriétés suivantes:

Si une application est différentiable, elle est continue.

La réciproque est bien évidemment fausse.

Condition nécessaire de différentiabilité:

On aimerait maintenant réussir à trouver une condition nécessaire de différentiabilité, en effet, étudier la limite donnée par la définition est pénible et souvent complexe.

On montre alors la propriété fondamentale suivante:

Si une application est de classe \mathcal{C}^1 , alors elle est différentiable.

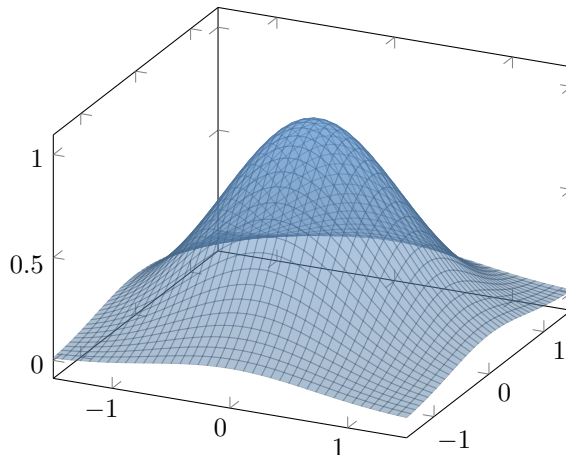
Ce qui nous permet simplement de calculer les dérivées partielles de f et d'étudier leur continuité pour en déduire la différentiabilité (dans les cas simples). Attention, ce n'est qu'une condition **suffisante**.

Plan Tangent:

Si on revient à des problématiques plus pratiques, et notamment dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors on sait que la différentielle est l'application linéaire tangente au point a , et on aimerait avoir une expression de l'application **affine** tangente en (a, b) , et de manière analogue au cas réel, on peut définir:

$$\tau_{(a,b)} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = df_a(x - a, y - b) + f(a, b) \right\}$$

C'est le **plan affine tangent** à la courbe de f au point (a, b) .



Graphes de la fonction $f : (x, y) \mapsto \exp(-x^2 - y^2)$

On définit de même l'**espace affine tangent** à la courbe de f au point (a_1, \dots, a_n) par:

$$\tau_{(a_1, \dots, a_n)} := \left\{ (x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} ; z = df_a(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) + f(a_1, \dots, a_n) \right\}$$

Gradient:

On va maintenant définir un autre opérateur différentiel sur l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, attention, ici il s'agit bien du cas particulier des champs de scalaires. On définit alors **l'opérateur gradient**:

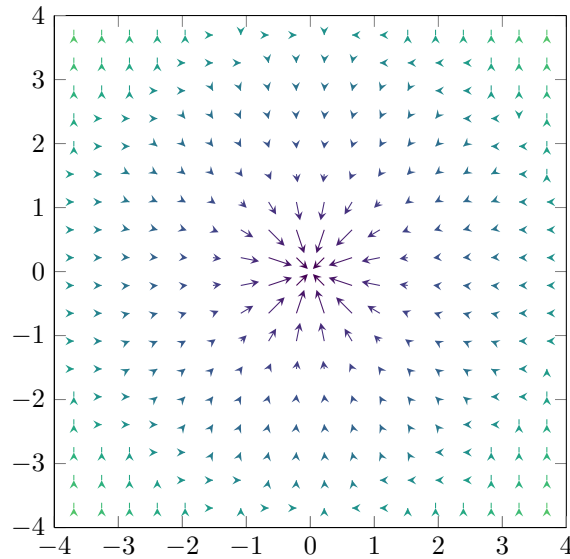
$$\begin{aligned}\nabla : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)\end{aligned}$$

Le gradient de f est donc un **champ de vecteurs**, dont on verra une interprétation ci-dessous, mais tout d'abord, on peut remarquer l'identité suivante en un point a , qui le lie avec la différentielle:

$$\forall h \in \mathbb{R}^n ; \langle \nabla f(a) | h \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) | h \right\rangle = df_a(h)$$

On cherche maintenant à interpréter ce que représente le gradient par rapport au champs scalaire f , et on peut alors montrer la propriété géométrique suivante:

Le gradient est le champ de vecteurs qui donne la direction de la plus grand pente ascendante à la surface de la courbe de f .



Gradient de la fonction $f : (x, y) \mapsto \exp(-x^2 - y^2)$

Une autre propriété remarquable du gradient est qu'il est toujours **orthogonal** aux lignes de niveaux.

Caractérisation des dérivées directionnelles:

Pour un vecteur unitaire v donné, on peut alors montrer la caractérisation très utile de la dérivée directionnelle de f dans la direction de v , en effet on a:

$$D_v f(a) = df_a(v) = \langle \nabla f(a) | v \rangle$$

En effet, il suffit alors d'écrire la formule de Taylor à l'ordre 1 sur la quantité ci-dessous et utiliser les différentes propriétés des objets considérés:

$$f(a + hv) - f(a) = df_a(hv) + o(\|hv\|)$$

Exemple: Pour $f(x, y) = xy + x$ et $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ alors on a:

$$df_{(x,y)} = (y + 1)dx + xdy$$

Et donc finalement:

$$D_v f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + x + 1)$$

On peut remarque que si on prends $v = e_i$, on retombe évidemment sur les dérivées partielles.

Jacobienne:

On considère maintenant plus généralement l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, et on définit alors l'opérateur suivant:

$$J : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$$
$$f \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

On appellera alors **jacobienne** de f la matrice Jf , et on remarque que c'est simplement la matrice¹ constituée des dérivées partielles de f .

En particulier, on a donc l'identité suivante:

$$Jf = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{pmatrix}$$

C'est aussi la matrice des gradients des applications partielles de f .

Si on l'évalue maintenant en un point $a \in \mathbb{R}^n$, on obtient alors une matrice réelle et on a la caractérisation fondamentale suivante:

La jacobienne prise en un point est la matrice de la différentielle en ce point.

En particulier on retrouve donc la règle de la composition de la différentielle vu sous l'angle matriciel:

$$J(f \circ g)_a = Jf_{g(a)} \times Jg_{g(a)}$$

Ainsi que la règle de l'inversion d'une fonction inversible:

$$(Jf_a)^{-1} = J(f^{-1})_{f(a)}$$

¹A coefficients dans l'anneau des fonctions.

VII — THÉORÈMES GÉNÉRAUX

Dans cette section, nous allons utiliser toutes les notions construites au chapitre précédent pour essayer de généraliser les grands théorèmes sur les fonctions réelles dérivables, en particulier les deux théorèmes suivants:

- Le théorème de la bijection
- Le théorèmes des accroissements finis

Le problème principal pour obtenir un analogue au premier théorème est le suivant:

Il existe des fonctions non-injectives telles qu'en tout point leur différentielle soit inversible !

Ce qui implique alors que nous ne pouvons pas prouver l'injectivité **globale** d'une fonctions à plusieurs variables avec le critère simple de la non-annulation de la différentielle. Ceci nous menera donc à la recherche de théorème permettant de montrer la bijectivité de ces fonctions autrement.

Théorème d'inversion locale:

On considère $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^1 et un point $a \in \mathbb{R}^n$, alors si sa différentielle est **inversible** en a , on a:

La fonction induit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme d'un voisinage V_a dans $f(V_a)$.

On peut interpréter ce théorème de manière plus naturelle sous la forme:

Si la différentielle ne s'annule pas en un point, alors la fonction est localement inversible en ce point.

Théorème d'inversion globale:

On considère $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction **injective** et de classe \mathcal{C}^1 , alors si en tout point d'un ouvert \mathcal{U} sa différentielle est **inversible**, on a:

La fonction induit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathcal{U} sur $f(\mathcal{U})$.

On peut interpréter ce théorème de manière plus naturelle sous la forme:

Sous réserve d'injectivité, si la différentielle ne s'annule pas sur un ouvert, alors la fonction est inversible sur cet ouvert.

Théorème des fonctions implicites:

On considère une fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et on s'intéresse aux courbes Γ d'équation:

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Si il est possible d'exprimer une variable en fonction des autres, ie d'isoler une variable x_i , alors on dira que l'équation E définit x_i comme **une fonction implicite** des $n - 1$ autres variables. On s'intéresse ici à des condition suffisantes sur f pour que de telles fonctions implicites existent.

On peut alors montrer grâce au **théorème d'inversion locale** que si $(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma$, et que la i -ème dérivée partielle ne s'annule pas, alors **localement** l'équation définit bien x_i comme fonction implicite des $n - 1$ autres variables pour un certaine fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n-1})$, ie on a:

$$x_i = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Prenons un exemple simple pour illustrer le propos

On considère la courbe Γ suivante:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

On reconnaît immédiatement le cercle unité, le théorème des fonctions implicites affirme alors qu'à l'exception des points $(\pm 1, 0)$, cette équation définit implicitement y comme une fonction de x et en effet, on sait que par exemple dans le demi-plan supérieur, on a:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Ce théorème justifie une technique courante dans la littérature anglo-saxonne nommé **différentiation implicite**, en effet si on considère une équation d'une fonction à deux variables (par exemple), alors on peut "voir"¹ une des variables comme fonction de l'autre et simplement différentier, et par exemple on peut de cette manière trouver les dérivées des fonctions réciproques:

$$\begin{aligned} y = \cos^{-1}(x) &\iff \cos(y) = x \\ &\iff \sin(y)y' = -1 && \text{(On "voit" } y \text{ comme fonction de } x \text{ et on différentie.)} \\ &\iff y' = \frac{-1}{\sin(y)} \\ &\iff y' = \frac{-1}{\sin(\cos^{-1}(x))} \\ &\iff y' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Théorème des accroissements finis:

On considère ici un champs scalaire² défini et différentiable sur un ouvert \mathcal{U} , alors pour tout point $a, b \in \mathcal{U}$ tel que le segment $[a, b]$ les reliant soit dans \mathcal{U} , on a³:

$$\exists c \in \mathcal{U} ; f(b) - f(a) = df_c(b - a)$$

En particulier si \mathcal{U} est convexe, cette propriété est vrai pour tout couple (a, b) .

Corollaire 1 : Inégalité des accroissements finis:

En particulier, si la différentielle df_x est **bornée** par un réel M sur \mathcal{U} , alors on a aussi:

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$$

Cette majoration reste vraie, contrairement au théorème, dans le cas de champs de vecteurs et on a alors pour des normes bien choisies:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$$

En particulier, cela montre donc que les applications différentiables sont toutes **localement** lipschitziennes, et même globalement lipschitziennes si la différentielle est bornée.

Corollaire 2 : Applications constantes :

On peut alors généraliser le critère des fonctions réelles qui nous affirme que si la dérivée d'une fonction est nulle, elle est constante. En effet, si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur \mathcal{U} ouvert et **connexe**⁴, alors:

Si la différentielle de f est **nulle** sur \mathcal{U} , alors f est **constante** sur \mathcal{U} .

¹Sous les hypothèses de régularité du théorème bien évidemment.

²Il n'existe pas d'équivalent au théorème des accroissements finis dans le cas de fonctions à valeurs vectorielles, considérer par exemple la courbe $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.

³La démonstration de cette propriété revient à se ramener au cas réel en posant $g(t) = f((1-t)a + tb)$

⁴La preuve est directe si \mathcal{U} est convexe, pour passer à la connexité, il faut alors remarque que toutes les boules sont convexes.

Corollaire 3 : Applications constantes par rapport à une variable :

On s'intéresse alors à ce qu'on peut déduire de l'annulation d'une seule des dérivées partielles, et en se ramenant à l'étude des applications partielles on peut alors montrer que si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur \mathcal{U} ouvert et **convexe**² et que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est **nulle** sur \mathcal{U} , alors il existe une fonction g telle que:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U} \quad f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Intuitivement, on l'interprète simplement par le fait que f ne dépend pas de la variable x_i sur cet ouvert.

C'est ce corollaire qui nous permettra de résoudre nos premières équations aux dérivées partielles. Voici un exemple élémentaire, on considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ qui vérifie:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

Alors d'après ce corollaire, on a directement, pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une certaine fonction réelle:

$$f(x, y) = g(y)$$

²**ATTENTION:** Ce résultat est faux sur un domaine juste connexe. Prendre la fonction qui définie sur \mathbb{R}^2 privée d'un axe bien choisi qui vaut 0 sur $\{(x, y), xy < 0\}$ et x^2 ailleurs.

VII — OPTIMISATION I

Un des intérêts de la notion de dérivée d'une fonction réelle est de pouvoir étudier les extrema de cette fonction, en particulier, un point capital du cours d'analyse réelle est la définition de **point critique**, qui sont les points d'annulation de la dérivée, et on a alors la condition nécessaire suivante:

Si un point est un extremum, alors c'est un point critique.

On veut généraliser cette notion au cas des **champs scalaires**, pour à terme être capable de trouver les extrema de telles fonctions.

Points critiques:

De manière parfaitement analogue, si f est une fonction définie sur un ouvert \mathcal{U} , alors on définit les **points critiques**, qui sont les points d'annulation de la différentielle, et on a alors la condition nécessaire suivante:

Si un point est un extremum, alors c'est un point critique.

Informellement, on comprends naturellement que les seuls extrema possibles seront ceux où l'application linéaire tangente est nulle, donc un plan horizontal. Néanmoins la condition n'est que nécessaire, en effet on considère la fonction:

$$f : (x, y) \mapsto xy$$

Alors sa différentielle est nulle en $(0, 0)$, mais ce point n'est pas un extremum, il suffit d'étudier quelques restrictions pour le montrer. On a donc besoin d'outils plus puissants pour trouver ces extrema.

Hessienne:

On suppose maintenant que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, alors elle admet toutes ses dérivées partielles secondes et elle vérifie le **théorème de Schwarz**. On définit alors la **matrice Hessienne** de f par:

$$\mathcal{H}f_{(x,y)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est **symétrique** d'après le théorème de Schwarz, elle définit donc une forme bilinéaire symétrique et une forme quadratique, qu'on appellera forme hessienne, qui jouera un rôle important pour la suite.

Classification des points critiques:

Dans le cas réel, pour classer les points critiques d'une fonction, on étudiait la convexité (locale) de cette fonction, et en particulier le signe de la dérivée seconde, ceci permettait de différencier les maxima, minima et point cols (ou point d'inflexions). D'une certaine manière, on généralise cette approche au cas général en étudiant le **signe de la Hessienne** au sens du signe d'une forme quadratique, et on a les cas suivants:

- Si la forme hessienne n'est **ni positive ni négative** en un point critique, alors le point est un **point col**.
- Si la forme hessienne est **définie positive** en un point critique, alors la fonction est localement convexe et le point est un **minimum**.
- Si la forme hessienne est **définie négative** en un point critique, alors la fonction est localement concave et le point est un **maximum**.
- Sinon la méthode ne permet pas de conclure.

On se ramène donc à l'étude des valeurs propres de la Hessienne, et de leurs signes ou dit autrement, de la signature de la forme quadratique Hessienne. Ceci s'interprète en disant que, de manière analogue au cas réel, le signe de la hessienne caractérise la **convexité locale** de la fonction.

VII — OPTIMISATION II

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser à essayer d'optimiser une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sous la contrainte que $x \in \{x \in \mathbb{R}^n ; g(x) = 0\}$ où f, g sont lisses et où g satisfait les conditions du théorème des fonctions implicites (ie que dg soit de rang maximal, partout pour simplifier). En d'autres termes on veut résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$(P) : \begin{cases} \sup f(x) \\ x \in C := \{x \in \mathbb{R}^n ; g(x) = 0\} \end{cases}$$

On cherche alors une méthode permettant de résoudre un tel problème, et plus particulièrement une méthode permettant de passer de ce problème à un **problème d'optimisation sans contraintes**.

Conditions nécessaires :

On considère un point $x \in \mathbb{R}^n$ qui est solution du problème, et v un vecteur **tangent** à $\{x \in \mathbb{R}^n ; g(x) = 0\}$, alors on peut montrer que nécessairement:

$$df_x(v) = 0 \iff \langle \nabla f(x) | v \rangle = 0$$

Ce qui s'interprète alors par le fait que ∇f_x est **orthogonal** à l'espace tangent à $\{x \in \mathbb{R}^n ; g(x) = 0\}$, or celui-ci (par le théorème des fonctions implicites) peut localement s'écrire comme:

$$\{x \in \mathbb{R}^n ; \langle \nabla g(x) | x \rangle = 0\} = \{\nabla g(x)\}^\perp$$

Finalement on trouve alors que f est orthogonale à un orthogonal et donc colinéaire au **gradient de la contrainte**, ie on a:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} ; \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$$

Plus généralement, si on a m contraintes données par des fonction g_i , on a:

$$\exists (\lambda_i) \in \mathbb{R}^m ; \nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x)$$

Lagrangien :

On encapsule alors toutes les contraintes du problème en posant la fonction suivante appelée **lagrangien** du problème:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda | g(x) \rangle$$

Alors c'est une fonction lisse de ses variables et si x est solution du problème, on montre que l'on a nécessairement:

$$\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0$$

Cette fonction nous donne alors une condition **nécessaire** que doit vérifier un extremum sous contrainte.

Méthode d'optimisation :

On peut donc construire une méthode qui permet de résoudre de tels problèmes. En effet, on peut appliquer l'algorithme suivant:

- On cherche à montrer l'**existence** d'un extremum sous contraintes (par exemple par compacité de C).
- On calcule les **points critiques du Lagrangien** qui sont alors tous les **candidats** possibles.

VII — FORMES DIFFÉRENTIELLES

VII — INTÉGRALES CURVILIGNES

Dans cette partie, nous allons généraliser l'intégrale de Riemann, c'est à dire l'intégrale d'une fonction le long d'un segment, aux **champs scalaires et vectoriels**, avec en tête l'idée suivante:

On veut pouvoir intégrer un champ le long d'une courbe lisse donnée.

Nous verrons alors qu'il existe en fait trois constructions différentes qui mesurent différents phénomènes sur les champs considérés:

- L'intégrale d'un **champ scalaire** qui quantifie l'aire entre la courbe et le plan des paramètres.
- L'intégrale de **travail** d'un **champ vectoriel** qui quantifie la contribution du champ vectoriel au trajet de la courbe.
- L'intégrale de **flux** d'un **champ vectoriel** qui quantifie la tendance au champ de vecteurs à traverser la courbe.

Dans toute la suite, on considèrera un **arc orienté** Γ paramétré par une fonction $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ définie sur $[a; b]$ et de classe \mathcal{C}^1 . On rappelle à toutes fins utiles:

- L'abscisse curviligne de γ est donnée par: $ds = \|\gamma'(t)\| dt$
- Le vecteur normal à γ' est donnée par: $dn = (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))dt$

Intégrale d'un champ scalaire:

On se donne un champ scalaire lisse $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ et on cherche à quantifier l'aire située entre la courbe et le graphe \mathcal{G}_f , on peut alors écrire cette aire comme une somme de Riemann, qui tends alors vers une intégrale et on définit:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Intégrale de travail d'un champ vectoriel:

On se donne un champ vectoriel lisse $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ et on cherche à quantifier la **contribution du champ vectoriel au trajet de la courbe**, ie au travail que le champ effectuerais sur une particule qui se déplacerait le long de la courbe, à nouveau grâce aux sommes de Riemann, on peut définir:

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_a^b \langle F(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt$$

Intégrale de flux d'un champ vectoriel:

On se donne un champ vectoriel lisse $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ et on cherche à quantifier la **tendance au champ de vecteurs à traverser la courbe**, ie si le champ de vecteurs représenterais un fluide, à la quantité d'eau qui traverse la courbe en un instant donné. A nouveau grâce aux sommes de Riemann, on peut définir:

$$\int_{\gamma} F dn = \int_a^b \langle F(\gamma(t)) | n'(t) \rangle dt$$

Interprétation du produit scalaire:

On remarque que les intégrales curviligne d'un champ de vecteur font apparaître un produit scalaire, en effet cela découle directement des quantités géométriques que l'on cherche à calculer:

- Dans le cas d'une intégrale de travail, on considère la projection d'un vecteur du champ sur un vecteur tangent, c'est **la composante tangentielle** du champ, et on somme toutes ses composantes pour obtenir une contribution totale.
- Dans le cas d'une intégrale de flux, on considère la projection d'un vecteur du champ sur un vecteur normal, c'est **la composante normale** du champ, et on somme toutes ses composantes pour obtenir une contribution totale mais dans un autre sens.

Théorème du gradient:

On s'attarde un peu sur le cas vectoriel, et on se donne un champ vectoriel X tel que $X = \nabla F$ pour un certain champ scalaire F , on dira alors que X **dérive du potentiel** F , on se donne un chemin paramétré par γ sur $[a; b]$ et on cherche à calculer le travail de X sur ce chemin, on trouve alors que:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} X d\gamma &:= \int_a^b \langle \nabla F(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt && \text{(On utilise le lien gradient / différentielle.)} \\ &= \int_a^b d(F \circ \gamma)_t && \text{(Par la règle de la chaîne, ou en passant en composantes.)} \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt && \text{(Par le lien différentielle / dérivée.)} \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) && \text{(Théorème fondamental de l'analyse.)}\end{aligned}$$

En particulier, on a montré le théorème suivant, généralisation du théorème fondamental de l'analyse, appelé souvent **théorème du gradient**:

Le travail le long d'un chemin d'un champ qui dérive d'un potentiel ne dépend que des bords du chemin choisi.

C'est en fait même un cas particulier d'un théorème très général qu'on verra plus tard appelé **théorème de Stokes** qui affirme que pour une forme différentielle **exacte**, ie qui s'écrit $d\omega$ pour ω une autre forme différentielle, alors on a que l'intégrale ne dépend que des bords:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$$

Généralisations:

On imagine alors qu'il doit être possible de généraliser ces concepts d'intégrales sur une courbe (espace de dimension 1) à des intégrales sur des **surfaces, volumes ...**. On aurait alors les deux¹ concepts géométriques suivants:

- L'intégrale sur une surface d'un **champ scalaire** qui quantifierait le volume entre la courbe et le plan des paramètres.
- L'intégrale sur une surface d'un **champ vectoriel** qui quantifierait la tendance au champ de vecteurs à traverser la surface.

¹Le concept d'intégrale de travail ne se généralise pas conceptuellement aux dimensions plus grandes pour des raisons évidentes.

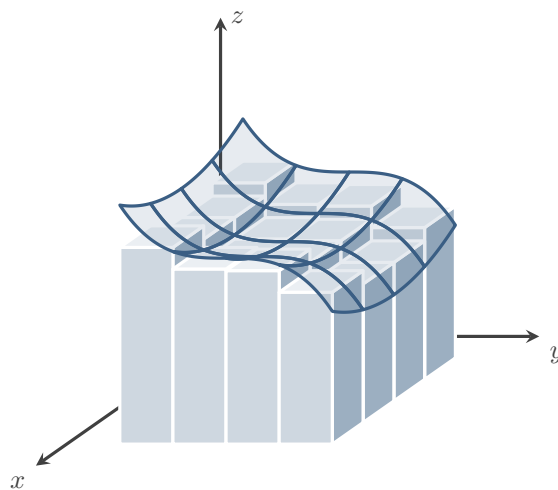
VII — INTÉGRALES MULTIPLES

Dans ce chapitre on cherche à généraliser la notion d'intégrale d'une fonction d'une seule variable sur un segment à la notion d'intégrale d'une fonction réelle **de plusieurs variables qu'on supposera bornée**, ici on considérera principalement $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour simplifier l'exposition. On a alors deux nouveaux concepts d'intégrales qui se présentent :

- La notion d'intégrale **curviligne** qui se propose d'intégrer à nouveau sur un chemin (donc toujours sur un espace de dimension 1).
- La notion d'intégrale **multiple** qui se propose d'intégrer sur une surface (donc sur un espace de dimension plus grande).

Ces deux notions différentes coexistent et permettent de résoudre des problèmes très différents, nous nous proposons ici tout d'abord de définir la notion d'intégrale multiple. Moralement, l'idée consiste à se donner un domaine raisonnable \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 , et de chercher à calculer le **volume** au dessus \mathcal{D} et contenu sous la nappe définie par l'image de f .

Graphiquement, voilà ce que l'on cherche à réaliser, ici le domaine d'intégration étant un simple rectangle :



Outils préliminaires:

On souhaite intégrer f sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$, on considère alors une **subdivision** de R c'est à dire un couple de subdivisions de $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement, ie on se donne $(a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b)$ et $(c = t'_0, t'_1, \dots, t'_{n-1}, t'_n = d)$, alors ces subdivisions définissent des **sous-rectangles** par :

$$R_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [t'_j, t'_{j+1}]$$

On appellera la collection de ces sous-rectangles une **subdivision** du rectangle R . On définit de manière évidente le **volume** (ici une aire) d'un rectangle R par :

$$\text{Vol}(R) = (b - a)(d - c)$$

Finalement on définit aussi les deux quantités suivantes pour tout rectangle R :

$$\begin{cases} m_R(f) &:= \{\inf(f(x)) ; x \in R\} \\ M_R(f) &:= \{\sup(f(x)) ; x \in R\} \end{cases}$$

Intégrale sur un rectangle:

Soit R le rectangle domaine d'intégration et P une subdivision de R , alors on définit les **sommes de Darboux supérieure et inférieures** par:

$$\begin{cases} S_P^+(f) = \sum_R M_R(f) \cdot \text{Vol}(R) \\ S_P^-(f) = \sum_R m_R(f) \cdot \text{Vol}(R) \end{cases}$$

Où la somme parcourt tout les rectangles de la subdivision. On définit alors les **intégrales de Darboux supérieure et inférieures** par:

$$\begin{cases} \int_R^+ f = \inf \left\{ S_P^+(f) ; P \text{ est une subdivision de } R \right\} \\ \int_R^- f = \sup \left\{ S_P^-(f) ; P \text{ est une subdivision de } R \right\} \end{cases}$$

*L'intégrale supérieure (resp. inférieure) est la somme **minimale** (resp. **maximale**) obtenue en considérant **toutes les subdivisions possibles** du rectangle.*

Enfin on dit que f est **intégrable** sur R si et seulement si l'**intégrale supérieure et inférieure** sont égales, et on la note formellement:

$$\int_R f dx_1 \dots dx_n \stackrel{\text{def.}}{=} \int_R f$$

Intégrale sur un ensemble borné:

.... -> Admettons pour le moment que l'on sait intégrer sur des surfaces ...

VIII — INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous étudierons les propriétés des fonctions définies sur l'ensemble des complexes. En particulier nous chercherons à définir une notion de **différentielle** puis une notion **d'intégrale** pour ces fonctions et enfin étudier les propriétés de ces deux constructions.

On rappelle à tout fins utiles \mathbb{C} est défini par la structure $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ avec une multiplication définie par:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

On rappelle aussi que l'on a $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ et en particulier la représentation des nombres complexes en tant que couple nous donne une représentation de la multiplication complexe par le produit matriciel suivant:

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc) \sim (ac - bd, ad + bc) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Applications conformes :

On appelle **application conforme** toute application qui préservent les angles. En particulier, si on se donne Γ une courbe paramétrée par γ sur I , et f une application, alors on dira: f est conforme si et seulement si

VIII — FONCTIONS HOLOMORPHES

On définit ici la notion de **différentielle complexe**, qui sera une généralisation directe de la différentielle dans le cas réel, en effet on dira que f est **différentiable** en a si et seulement si le taux d'accroissement suivant, appelée dérivée de f en a existe:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$$

Où de manière équivalente si il existe une application \mathbb{C} -linéaire L telle que dans un voisinage de a on ait:

$$f(z) - f(a) - L(z - a) = o(z - a)$$

On peut alors définir la différentielle de f en chaque point où elle existe par:

$$df : a \in \mathbb{C} \mapsto f'(a)dz$$

On dira alors que f est holomorphe sur un ouvert si elle y est holomorphe en tout point, et qu'elle est **entière** si elle est holomorphe sur \mathbb{C} .

Propriétés opératoires:

En particulier, vu que la définition de la différentielle est analogue à la différentielle réelle, on a alors (par les mêmes démonstrations) toutes les propriétés opératoires de l'opérateur de différentiation, en particulier:

- La différentiation est un opérateur linéaire.
- La différentiation d'un produit suit la règle de Leibniz.
- La différentiation d'une composée suit la règle réelle de différentiation d'une composée.
- Le théorème d'inversion local nous donne la différentielle d'une réciproque.

Différences avec la différentiation réelle :

Ici on remarque tout de suite la différence notable qui est que la différentielle, qu'on sait être un champ de formes linéaires, est en fait un champ de forme \mathbb{K} -linéaires selon le corps dans lequel on différentie, ici on nécessite que la forme soit \mathbb{C} -linéaire, ce qui va changer ses propriétés.

En particulier, on considère une fonction holomorphe f et on va calculer sa dérivée (directionnelle) en z selon deux restrictions, une par valeurs **réelles uniquement**, l'autre par valeurs **imaginaires uniquement**, on obtient alors les deux taux d'accroissements suivants:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

On sait qu'à tout fonction complexe, on peut associer une fonction sur \mathbb{R}^2 , et on va alors étudier les propriétés de ces taux d'accroissements en identifiant $f(z) \sim f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, qui est bien différentiable au sens réel. En développant les taux d'accroissements ci-dessus en (u, v) , on obtient alors les deux égalités suivantes:

$$\begin{cases} f'(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ f'(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

Et enfin en regroupant ces égalités et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient alors que tout fonction holomorphe vérifie les **équations de Cauchy-Riemann**:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

Equations de Cauchy-Riemann:

En fait, on peut même montrer que ces équations caractérisent l'holomorphicité, en effet pour $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, on a:

Si est différentiable au sens réel et vérifie les équations de Cauchy-Riemann, alors elle est holomorphe et réciproquement.

Exemple: Considérons la fonction $f(z) = \bar{z}$, alors on a $f(z) \sim f(x, y) = x - iy$ différentiable sur tout son domaine de définition mais on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Donc nécessairement, la fonction conjugué n'est donc **pas holomorphe**.

Equations de Laplace:

On appelle **équations de Laplace** une équation aux dérivées partielles de la forme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

Et on appelle alors **Laplacien** l'opérateur suivant:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

On appellera alors toute fonction solution des équations de Laplace **fonction harmonique**, et un des résultats intéressants de l'analyse complexe permet de montrer le résultat suivant:

Toute fonction analytique telle que ses dérivées partielles secondes soient continues est harmonique.

VIII — INTÉGRATION COMPLEXE

On cherche maintenant à définir une notion **d'intégrale** pour les fonctions complexe, plus précisément nous allons définir l'intégrale d'une fonction continue f le long d'une courbe paramétrée par γ sur $[a; b]$, qui sera défini par l'intégrale suivante:

$$\int_{\gamma} f d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

L'interprétation géométrique n'est pas évidente, mais peut s'éclaircir si on considère $f(z) \sim f(x, y)$ et $\bar{f}(z) = f(x, -y)$ le (champ vectoriel) conjugué de f appelé **champ de Pölya**, alors on a pour des notations usuelles:

$$\int_{\gamma} f d\gamma = \int_{\gamma} \langle \bar{f}(\gamma(t)) | T(t) \rangle dt + i \int_{\gamma} \langle \bar{f}(\gamma(t)) | N(t) \rangle dt$$

En d'autres termes, cette intégrale encapsule **le travail et le flux du champ de Pölya**.

Théorème fondamental de l'analyse complexe:

On se donne une fonction continue f tel que $f = F'$ pour une certaine fonction holomorphe F et on se donne un chemin paramétré par γ sur $[a; b]$ et on cherche à calculer l'intégrale le long de ce chemin, alors on trouve:

$$\int_{\gamma} f d\gamma := \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ce n'est pas surprenant quand on comprends la dualité qui existe entre fonction complexe et champ vectoriel, ce n'est alors qu'un cas particulier du **théorème du gradient** vu en analyse vectorielle. Et aussi, comme énoncé dans le chapitre en question, c'est aussi un cas particulier du **théorème de Stokes** pour la forme différentielle exacte $f(z)dz$.

VIII — QUELQUES EXTENSIONS

VIII — GRANDS THÉORÈMES

IX — INTRODUCTION

Soit n, p des entiers et F une fonction **continue** sur $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^p)^n$, alors on appelle **équation différentielle ordinaire** d'ordre n tout équation de la forme:

$$F(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

Où y est une fonction d'un intervalle I dans \mathbb{R}^p à déterminer. Par exemple, on pose:

$$\begin{cases} F_1(t, y, y') = y'(t) - y(t) \\ F_2(t, y, y') = \cos(t)y'(t) - y^2(t) \\ F_3(t, y, y') = 3 + \arctan(t) + y'(t) - e^x y(t) \\ F_4(t, y, y', y'') = t^2 + 3y(t)y'(t) + \cos(y''(t)) \end{cases} \implies \begin{cases} E_1 : y'(t) - y(t) = 0 \\ E_2 : \cos(t)y'(t) - y^2(t) = 0 \\ E_3 : 3 + \arctan(t) + y'(t) - e^x y(t) = 0 \\ E_4 : t^2 + 3y(t)y'(t) + \cos(y''(t)) = 0 \end{cases}$$

On peut aussi remarquer que cette définition permet à y d'être à valeurs vectorielles et dans ce cas on obtient alors un **système différentiel**, par exemple pour $E = \mathbb{R}^2$ et F_1 , on obtient:

$$E : \begin{cases} y'_1(t) = y_1(t) \\ y'_2(t) = y_2(t) \end{cases}$$

Forme résolue:

Dans des cas très précieux, on peut isoler la plus grande dérivée, et on dira alors que l'équation différentielle est **sous forme résolue** si et seulement si il existe une fonction F continue sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^p)^n$ telle que:

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

On ne s'intéressera dans ce cours qu'à ce cas particulier pour simplifier la compréhension, sauf cas simples où l'on peut se ramener à une forme réduite. Par la suite on appellera **équation associée à F** d'ordre n une équation de la forme ci-dessus.

Solution d'une équation différentielle:

On dira que (I, y) est une **solution** de l'équation différentielle d'ordre n associée à F si et seulement si I est un intervalle, $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}^p)$ et que:

$$\forall t \in I ; (t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in \Omega \text{ et } y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

On remarque alors que le domaine de définition d'une même fonction solution peut changer et on peut alors définir une notion de solution **maximale et globale** par:

- Une solution est **maximale** si et seulement si elle ne peut pas être prolongée en une autre solution définie sur un intervalle.
- Une solution est **globale** si et seulement si Ω est de la forme $I \times (\mathbb{R}^p)^n$ et que y est une solution définie sur I .

Réduction de l'ordre:

On se donne une équation différentielle résolue d'ordre n , alors on pose:

$$Y(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \mathbb{F}(t, Y(t)) := \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ F(t, Y(t)) \end{pmatrix}$$

Alors on a directement que:

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \iff Y'(x) = \mathbb{F}(x, Y(x))$$

Fondamentalement, comprendre les EDO à l'ordre 1 c'est comprendre toutes les EDO.

Problème de Cauchy:

Etant donné une équation d'ordre 1, et $(t_0, y_0) \in \Omega$, on appelle **problème de Cauchy** associée à l'équation (E) le problème suivant:

$$P : \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Une question fondamentale de la théorie des équations différentielles ordinaires consiste à savoir sous quelles hypothèses sur f tout problème de Cauchy associé à une équation admet une solution et les propriétés de celles-ci.

Raccordement de solutions:

Si on obtient deux solutions $(]a; b[, y_1), (]b; c[, y_2)$, alors on peut s'intéresser à raccorder ces deux solutions en une unique solution sur $]a; c[$. C'est en fait possible sous la condition suivante:

$$\lim_{x \rightarrow b} y_1(b) = \lim_{x \rightarrow b} y_2(b)$$

Expression intégrale des solutions:

Considérons l'équation du premier ordre (E) et le problème de Cauchy associé au couple (t_0, y_0) , alors y est solution du problème de Cauchy ssi:

$$\forall t \in I; y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

En réinterprétant cette équation et en définissant l'opérateur suivant:

$$\Phi : y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^p) \mapsto (t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^p)$$

Alors une solution est exactement un **point fixe** de cet opérateur.

Equations à paramètres:

On peut aussi pour tout paramètre $\lambda \in \Lambda$, où Λ est un espace vectoriel de dimension finie, définir une **équation différentielle à paramètre**, de la forme:

$$(E_\lambda) : y'(t) = f_\lambda(t, y(t))$$

Résoudre une telle équation revient alors à résoudre une famille d'équations différentielles.

IX — THÉORIE LINÉAIRE

On appelle donc une équation différentielle linéaire une équation différentielle de la forme suivante:

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$$

Où $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_p(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))$. Ce type d'équation très spécifique permet d'utiliser la théorie de l'algèbre linéaire pour en trouver des solutions et/ou étudier leurs solutions.

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire:

Alors grâce au théorème de Banach-Picard et à l'opérateur intégral défini plus haut, on peut montrer le résultat fondamental suivant, si on considère le problème de Cauchy linéaire suivant:

$$P : \begin{cases} y' = A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Alors on peut montrer le théorème dit de **Cauchy-Lipschitz linéaire**:

Ce problème admet une **unique solution** et elle est **globale**.

Exponentielle matricielle:

Dans le cas linéaire, on peut généraliser la résolution de l'équation élémentaire $y'(t) = a(t)y(t)$ en étendant le domaine de définition de la fonction exponentielle, en effet pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit:

$$e^A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$$

En effet, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme matricielle, et on peut alors montrer que cette série converge normalement, donc converge car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est complet. On peut alors montrer les propriétés suivantes:

- On a $e^0 = 1$.
- On a e^A est inversible d'inverse e^{-A} .
- On a $e^{A+B} = e^A e^B$ si A et B commutent.

Si on considère plus généralement une fonction matricielle $A(t) \in \mathcal{C}^1$, et que $A(t), A'(t)$ **commutent** alors on peut montrer que $t \mapsto e^{A(t)}$ est dérivable de dérivée $A'(t)e^{A(t)}$.

Structure de l'ensemble des solutions:

On se pose alors la question suivante:

Dans le cas linéaire, est-ce que l'ensemble des solutions est muni d'une structure particulière ?

On peut en effet répondre par l'affirmative, mais définissons tout d'abord quelques notions de vocabulaire, on appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation différentielle suivante:

$$(E_H) : y'(t) = A(t)y(t)$$

Alors on peut montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est un **sous-espace vectoriel** de l'espace $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$, en particulier, la fonction qui à toute solution y associe son évaluation en $t_0 \in I$ est un isomorphisme. En outre on peut alors montrer le résultat suivant:

L'ensemble des solutions de E est un sous-espace affine de direction S_H .

Alors en particulier il suffit d'avoir la donnée de S_H ainsi qu'une solution de E pour obtenir la solution générale qui sera de la forme:

$$y_G(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

Où $y_H(t)$ est une solution homogène quelconque et $y_P(t)$ une solution particulière de E . Les sections suivantes visent alors à expliquer comment trouver ces solutions.

Système fondamental et wronskien:

On définit les notions suivantes:

- On appelle **système fondamental** de solutions de E_H une base de l'ensemble des solutions S_H .
- On appelle **matrice fondamentale** la matrice d'un tel système dans une base.
- On appelle **wronskien** le déterminant d'une telle matrice.

Alors pour toute solution y de E_H , si Φ est une matrice fondamentale, on montre le théorème suivant:

$$\exists C \in \mathbb{K}^n ; y(t) = \Phi(t)C$$

En d'autres termes, résoudre E_H est équivalent à trouver une matrice fondamentale de celle-ci.

Propriétés des matrices fondamentales:

Soit Φ une matrice fondamentale de E_H , alors on peut montrer que Φ est **inversible** et qu'elle vérifie E_H , ie on a:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

Solutions homogènes:

Pour $t_0 \in I$, ceci nous permet de montrer le théorème fondamental suivant:

$$\forall t, t' \in I ; A(t)A(t') = A(t')A(t) \implies e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \text{ est une matrice fondamentale.}$$

En particulier si $A(t)$ est constante, la condition est vérifiée et e^{tA} est une matrice fondamentale. Ceci nous donne une première technique simple pour calculer une matrice fondamentale dans des cas simples, notamment par diagonalisation de A .

Solutions particulières:

Pour trouver une solution particulière étant donnée une solution homogène, on dispose d'une technique systématique dite de **variation de la constante**, en effet on va chercher une solution particulière sous la forme suivante:

$$y_P(t) = \Phi(t)C(t)$$

Où ici $C \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$, alors elle vérifie E et en dérivant, on obtient:

$$\begin{cases} y_P'(t) = \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) \\ y_P'(t) = A(t)y_P(t) + B(t) \end{cases}$$

Or $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ donc en combinant ces égalités, on trouve:

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)$$

Et par intégration on peut retrouver y_P et donc la solution générale.

Cas particulier des équation linéaires à coefficients constants:

Dans le cas très particulier des équations linéaires d'ordre n à coefficients **constants** de la forme ci-dessous, on a une méthode particulière pour les résoudre rapidement:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y(t) + a_0 = 0$$

On considère le **polynôme caractéristique** associé donné par:

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

Alors en notant \mathcal{R} l'ensemble des racines distinctes de P , on peut montrer que la famille suivante est un **système fondamental** associé à (E) :

$$(t^m e^{rt})_{0 \leq m \leq \text{mult}(r)}_{r \in \mathcal{R}}$$

Si on recherche des solutions réelles, il suffit alors d'appairer les solutions associées à des racines conjuguées.

IX — THÉORIE NON-LINÉAIRE

On retourne au cas général d'une équation différentielle d'ordre 1 définie par:

$$(E) : y'(t) = f(t, y(t))$$

Où ici $f : I \times \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on pose quelques définitions fondamentales pour la suite:

- On dira que f est **lipschitzienne en la variable d'état**, abrégé LVE si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que:

$$\forall t \in I, \forall x, x' \in \Omega'; \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq K \|x - x'\|$$

- On dira que f est **localement lipschitzienne en la variable d'état**, abrégé LLVE, si et seulement si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega'$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ et un voisinage $V = V_{t_0} \times V_{y_0}$ de (t_0, y_0) tel que:

$$\forall t \in V_{t_0}, \forall x, x' \in V_{y_0}; \|f(t, x) - f(t, x')\| \leq K \|x - x'\|$$

En particulier on montre la condition suffisante suivante, bien plus pratique que la définition:

Toute fonction \mathcal{C}^1 en sa variable d'état est LLVE.

Théorème de Cauchy-Lipschitz:

On peut alors montrer le théorème fondamentale de Cauchy-Lipschitz dans ses deux versions:

- **Global:** Si f est LVE, le problème de Cauchy admet **une unique solution**, elle est **globale**.
- **Local:** Si f est LLVE, le problème de Cauchy admet **une unique solution**, elle est simplement **maximale**.

Résolution des équations à variables séparables:

Il existe un type d'équation différentielle non-linéaire qui est, en théorie, toujours résoluble. C'est celui des équations de la forme suivante:

$$y'(t) = g(t)f(y(t))$$

Où f, g sont continues. Alors une telle équation est appelée **à variables séparables**. Dans ce cas si f ne s'annule jamais, alors par analyse-synthèse, on peut écrire que nécessairement:

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t)$$

Et alors on peut intégrer de chaque côté et obtenir:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)dt$$

On peut alors trouver une équation de la forme $F(y) = G(t) + C$ où F est toujours inversible et trouver donc que $y(t) = F^{-1}(G(t) + C)$.

Théorème d'explosion:

On se place dans le cadre de Cauchy-Lipschitz local, on peut montrer une condition nécessaire sur les solutions maximales mais non globales. En effet si y est une telle solution définie sur $]a; b[$ et que $I =]c; d[$, alors on peut montrer que:

$$\lim_{t \rightarrow b} \|y(t)\| = +\infty$$

En particulier, si une solution maximale y est **bornée**, alors elle est globale. Et même, si la fonction f caractérisant l'équation est **bornée**, alors elle est aussi globale.

IX — ETUDE QUALITATIVE

Dans ce chapitre, on cherche à introduire les concepts principaux de **l'étude qualitative des équations différentielles**, on se placera par la suite dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz local. Lorsqu'on ne sait pas résoudre analytiquement une équation différentielle, on peut se poser plusieurs questions naturelles d'ordre qualitatives, par exemple:

- Comment approximer une équation non linéaire pour comprendre son comportement général ?
- Comment étudier les différentes trajectoires possibles des solutions ?
- Comment comprendre le comportement en temps long de deux solutions proches au temps t_0 ?

Flot d'une équation différentielle:

On aimerait alors définir une fonction qui encapsule toutes les données sur les solutions d'une telle équation. On définit alors le **flot** de l'équation différentielle:

$$\begin{aligned}\Phi : D &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (t, t_0, y_0) &\longmapsto y_{t_0, y_0}(t)\end{aligned}$$

Où ici $D = \{(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega ; t \in I_{t_0, y_0}\}$ et y_{t_0, y_0} est l'unique solution maximale du problème de Cauchy associé à (t_0, y_0) .

Régularité du flot:

Alors on peut montrer que les propriétés de régularité suivantes:

- Le flot partage la régularité de f , ie Φ est **localement lipschitzien**.
- De plus, si $f \in \mathcal{C}^1$ en sa variable d'état, alors le flot est aussi \mathcal{C}^1 .

En outre il vérifie la même équation différentielle, ie on a:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0, y_0) = f(t, \Phi(t, t_0, y_0))$$

Le deuxième résultat de régularité nous permet alors de considérer les dérivées partielles du flot par rapport aux condition initiales, et alors d'étudier la sensibilité de l'équation à celles ci dans une certaine mesure.

Différentes interprétations du flot:

On peut alors voir certaines des variables du flot comme des paramètres ou des variables et obtenir des objets qui s'interprètent différemment:

- Si on fixe les conditions initiales, on retrouve la solution $\Phi_{t_0, y_0} = \Phi(\cdot, t_0, y_0) = y_{t_0, y_0}$.
- Si on fixe deux temps, on a $\Phi_{t_1, t_0} = \Phi(t_1, t_0, \cdot) : y_0 \longmapsto y_{t_0, y_0}(t_1)$ qui s'interprète comme un opérateur d'évolution. En effet à chaque état y_0 en t_0 , on associe son état suivant $y_{t_0, y_0}(t_1)$.

Alors la deuxième interprétation permet de trouver des propriétés intéressantes:

$$\begin{cases} \Phi_{t_0, t_0} = \text{Id} \\ \Phi_{t_2, t_1} \circ \Phi_{t_1, t_0} = \Phi_{t_2, t_0} \\ \Phi_{t_1, t_0}^{-1} = \Phi_{t_0, t_1} \end{cases}$$

Dans le cadre plus simples des équations autonomes que nous verrons pas la suite, ces propriétés se simplifient grandement en une structure connue.

Equations autonomes:

On appelle **équations autonomes** tout équation différentielle qui ne dépend pas du temps, ie telle que :

$$(E) : y'(t) = f(y(t))$$

Alors ici $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est interprété comme un **champs de vecteurs** qui donne la vitesse en chaque point de Ω de la solution qui passe par ce point: On utilise alors un vocabulaire spécifique dans ce cadre:

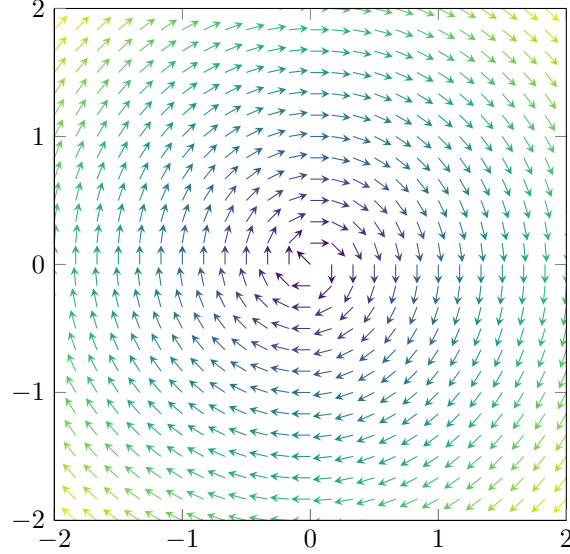


Figure 10: Champs de vecteurs $f(x, y) = (-y, x)$

- On appelle **courbe intégrable** une solution maximale de l'équation.
- On appelle **orbite** une courbe géométrique image d'une solution de l'équation.
- On appelle **point stationnaire** les points tels que le champs de vecteur s'annule.
- On appelle **isoclines** les points tels qu'une des composantes du champs de vecteurs s'annulent.

On peut alors montrer que dans ce cadre particulier, si deux solutions maximales y_1, y_2 ont un point commun, alors elles sont **translatées** l'une de l'autre, et en conséquences, elles ont la même orbite. En outre la justification du terme d'orbite sera justifiée plus loin.

Flot réduit:

Dans ce cadre le flot se réduit simplement car si y_{t_0, y_0} est une solution maximale, alors la fonction translatée $y_{0, y_0}(t + t_0)$ vérifie la même condition. En outre, quitte à translater, se ramener à l'étude des solutions maximales pour les conditions initiales $(0, y_0)$. Par suite, le **flot réduit** de ce type d'équation s'écrit donc:

$$\begin{aligned} \Phi : D &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (t, y_0) &\longmapsto y_{0, y_0}(t) \end{aligned}$$

Si on fixe $t \in \mathbb{R}$ et qu'on pose $U_t = \{y_0 \in \mathbb{K}^n ; t \in I_{0, y_0}\}$, alors on peut voir le flot comme une application de la forme:

$$\begin{aligned} \Phi_t : U_t &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ y_0 &\longmapsto \Phi(t, y_0) = y_{0, y_0}(t) \end{aligned}$$

Qui s'interprète alors réellement comme un opérateur d'évolution qui à un état y_0 au temps 0 associe l'état $y_0(t)$ au temps t . En particulier on montre les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \Phi_0 = \text{Id} \\ \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_1+t_2} \\ \Phi_t^{-1} = \Phi_{-t} \end{cases}$$

Ceci définit en fait une **action du groupe** $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur l'ensemble des

X — GÉNÉRALITÉS

Dans cette partie, nous appliquons les notions vues dans les chapitres d'algèbre linéaire et d'analyse vectorielle pour étudier les propriétés géométriques des ensembles géométriques de \mathbb{R}^n . Cette partie introductive vise surtout à définir des concepts généraux récurrents pour la suite.

Système de coordonnées:

On considère un point quelconque P de \mathbb{R}^n , alors on sait depuis longtemps que cet espace est muni d'un système de coordonnées canonique appelé "coordonnées cartésiennes", cela signifie le concept suivant:

Un point P peut être caractérisé par ses coordonnées cartésiennes.

Mais il existe d'autres systèmes de coordonnées:

- Dans le cas de \mathbb{R}^2 , on peut identifier un point P à sa distance à l'origine et son angle avec la demi-droite Ox , ce sont les **coordonnées polaires**.
- Dans le cas de \mathbb{R}^3 , on peut identifier un point P à ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan xy et à sa hauteur z par rapport à ce plan, ce sont les **coordonnées cylindriques**.
- Dans le cas de \mathbb{R}^3 , on peut identifier un point P à sa distance à l'origine et sa latitude θ et sa longitude ϕ , ce sont les **coordonnées sphériques**.

En particulier pour les considérations **géométriques**, étant donnée une fonction, équation, ou un point donné d'un espace, il faut fixer implicitement ou explicitement dans quel système de coordonnées sont censés être représentés les objets car alors les propriétés sont changées. Considérons par exemple la fonction réelle suivante dont la variable est volontairement privée de toute interprétation par la notation:

$$f(\psi) = \psi$$

On considère souvent implicitement que sa représentation est l'ensemble des points (x, x) en coordonnées cartésiennes et on obtient la première bissectrice du plan. Mais on peut tout à fait considérer que sa représentation est l'ensemble des points (θ, θ) en coordonnées polaires et on obtient alors une spirale ! En effet la fonction elle-même ne transporte pas d'informations géométriques à priori.

Pour un exemple de propriété différentielle qui dépend du système de coordonnées considéré, on considère le gradient de f en coordonnées cartésiennes:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Représentations d'une courbe:

Une courbe Γ peut être représentée de différentes manières selon le contexte et les objectifs d'études:

- Comme la courbe associée à un arc paramétré lorsque c'est possible.
- Comme une courbe de niveau d'une fonction¹ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque c'est possible.
- Comme le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque c'est possible.

Les différentes représentations ont chacun leur intérêt propres, étant soit dans les propriétés géométriques ou algébriques soit dans la simplicité d'écriture, il sera utile d'être capable de jongler entre les différentes représentations d'une même courbe. De manière générale, la dernière représentation est souvent abstraite en la première par la paramétrisation évidente:

$$\Gamma(t) = (t, f(t))$$

¹En particulier si la fonction est polynomiale, on parlera alors de **courbe algébrique**, qui est le domaine d'étude reliant l'algèbre commutative et la géométrie.

Représentations d'une surface:

Une surface Σ peut être représentée de différentes manières selon le contexte et les objectifs d'études:

- Comme la surface associée à une surface paramétrée lorsque c'est possible.
- Comme une surface de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque c'est possible.
- Comme le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque c'est possible.

A nouveau, les différentes représentations ont chacun leurs intérêts propres, étant soit dans les propriétés géométriques ou algébriques soit dans la simplicité d'écriture, il sera utile d'être capable de jongler entre les différentes représentations d'une même courbe. De manière générale, la dernière représentation est souvent abstraite en la première par la paramétrisation évidente:

$$\Sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

Représentation paramétrique d'un ensemble:

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $x_i \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^p)$ avec $n \leq p$, alors on définit la fonction vectorielle suivante:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto (x_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_p(t_1, \dots, t_n)) \end{aligned}$$

On appelle alors **ensemble paramétré** le couple (\mathcal{U}, f) et **ensemble géométrique** l'ensemble des points $f(\mathcal{U})$.

Réciproquement, si on a un ensemble géométrique $E \subset \mathbb{R}^p$ et qu'il existe une fonction f telle que $f(\mathcal{U}) = E$, alors (\mathcal{U}, f) est appelé **paramétrage de l'ensemble géométrique**. On définit de même les ensembles paramétrés de classe \mathcal{C}^k par le fait que f soit de classe \mathcal{C}^k .

Les cas particuliers suivants seront les plus étudiés:

- Si $n = 1$ et $p = 3$ on appelle l'ensemble géométrique **courbe plane**.
- Si $n = 1$ et $p = 3$ on appelle l'ensemble géométrique **courbe gauche**.
- Si $n = 2$ et $p = 3$ on appelle l'ensemble géométrique **surface paramétrée**.

Par exemple on a:

- Une paramétrisation du cercle unité: $\phi : t \in [0, 2\pi] \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$
- Une paramétrisation d'une hélice: $\phi : t \in [0, 2\pi] \longmapsto (\cos(t), \sin(t), t)$
- Une paramétrisation du cylindre: $\phi : (u, v) \in [0, 5] \longmapsto (\cos(u), \sin(u), v)$

Changements de paramétrage:

Soit $\gamma = (A, f)$ un ensemble paramétré de classe \mathcal{C}^k . Soit ϕ un \mathcal{C}^k -diffeomorphisme d'un certain intervalle B dans A , alors on appelle la fonction $f \circ \phi$ un **paramétrage admissible** de l'ensemble et on dit alors que les ensembles géométriques sont **\mathcal{C}^k -équivalents**.

Deux ensembles paramétrés **\mathcal{C}^k -équivalents** ont même ensembles géométriques, en particulier, on remarque alors qu'il existe une infinité de paramétrages d'un ensemble géométrique donné.

Notion de points multiples:

Si on considère un ensemble paramétré (A, f) , alors il est possible que l'ensemble géométrique ait des **points multiples**, ie qu'un point donné ait plusieurs antécédents. On appellera alors **multiplicité** du point le nombre de ces antécédents, et on remarquera directement que si f est injective alors nécessairement, elle n'a pas de points multiples.

On dira alors qu'un tel ensemble géométrique est **simple**.

Notion de points réguliers:

On considère un ensemble paramétré (\mathcal{U}, f) , alors:

Un point de \mathcal{U} est dit **régulier** si et seulement si $d\Sigma_a$ est de **rang maximal**, sinon on dira qu'il est **singulier**¹.

On dira alors que l'ensemble géométrique est **régulier** si tout ses points sont réguliers.

Notion de contact:

On considère deux courbes Γ, Γ' qui s'intersectent en un point a , alors on dira qu'elles ont un contact d'ordre 0, et on définit alors un raffinement de la notion de contact entre deux courbes en définissant le notion de contact d'ordre p .

On dira que deux courbes ont un contact d'ordre p si leurs développements limités à l'ordre p au point considéré coïncident. Cela signifie intuitivement que la qualité du contact est meilleure, en effet deux courbes ayant un contact d'ordre 1 sont tangentes, et partagent donc même développement limité à l'ordre 1.

Dans le cas des surfaces, il faut alors considérer les développements de Taylor des fonctions à plusieurs variables (ou paramétrisations) considérés et la définition précédente se généralise.

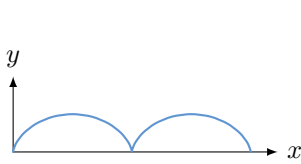
¹Attention cette notion est différente de celle de **point critique**, en effet un point peut être singulier, par exemple la différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui serait de rang 1, sans qu'elle soit nulle.

X — COURBES PLANES I

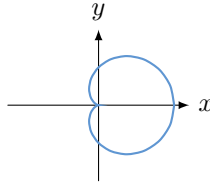
Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas particuliers des **courbes planes** et à leur propriétés métriques et différentielles élémentaires. Dans tout la suite, les arcs paramétrés seront supposés de classe \mathcal{C}^1 et **réguliers**.

Courbes planes remarquables:

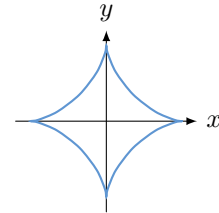
On peut considérer alors quelques courbes remarquables:



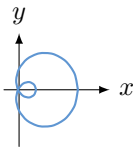
La cycloïde



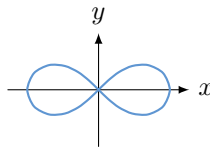
Une cardioïde



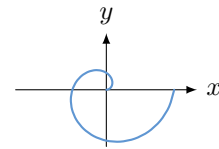
Une hypocycloïde



Un limaçon



Le lemniscate de Bernoulli



La spirale d'Archimède

Ces courbes ont des propriétés très intéressantes et se retrouvent, par exemple, en physique. En effet, la cycloïde (inversée) représente la pente qui minimise le temps de trajet d'une bille lancée en haut de celle ci. On dit que c'est une courbe **brachistochrone**.

Longueur de courbes paramétrées:

On s'intéresse à la **longueur de l'arc paramétré** (I, γ) qu'on notera L .

On peut alors subdiviser I en différents intervalles et approximer la longueur de l'arc par la somme des cordes d'extrémités les différentes subdivisions. En faisant alors tendre la longueur des subdivisions vers 0, on obtient, à la limite, une intégrale de Riemann¹, et la définition suivante:

$$L := \int_I \|\gamma'(t)\| dt$$

On appelle alors **abscisse curviligne** d'origine t_0 , ou encore fonction longueur d'arc, la primitive:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(x)\| dx$$

Par exemple dans \mathbb{R}^2 pour l'arc paramétré (I, γ) avec $I = [0; 1]$ et $\gamma(t) = (t, t^2)$, on obtient:

$$L := \int_I \|\gamma'(t)\| dt = \int_{[0; 1]} \|(1, 2t)\| dt = \int_{[0; 1]} \sqrt{1 + 4t^2} dt \approx 1.47$$

¹L'intégrande est bien intégrable (et même continue) en tant que somme produit et composées de fonctions intégrables (continues)

On peut aussi préférer exprimer la longueur d'arc en coordonnées polaires, alors on peut déduire¹ de la définition ci-dessus la caractérisation suivante:

$$L := \int_I \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta$$

Aires de courbes paramétrées:

On s'intéresse à l'**aire entre l'arc paramétré** (I, γ) et l'axe des abscisses qu'on notera A .

On peut alors subdiviser I et approximer l'aire sous la courbe par la somme d'aires de rectangles. En faisant alors tendre la longueur des subdivisions vers 0, on obtient une intégrale de Riemann², et la définition suivante:

$$A := \int_I y(t)x'(t) dt$$

Par exemple pour l'arc paramétré (I, γ) avec $I = [0; 1]$ et $\gamma(t) = (t, t^2)$, on obtient:

$$A := \int_I y(t)x'(t) dt = \int_{[0;1]} t^2 dt = \frac{1}{3}$$

Dans le cas des courbes en coordonnées polaires, on peut calculer l'aire bornée par la courbe, on subdivise alors I en $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$, et on calcule la somme de **secteurs circulaires** de rayon $r(\theta_k)$. Or on sait que l'aire d'un cercle de rayon r est donnée par πr^2 donc l'aire d'un secteur circulaire d'angle θ est donné par $A = \frac{1}{2}\theta r^2$.

Pour obtenir l'aire délimitée par la courbe polaire on peut alors sommer les aires des secteurs circulaires, on obtient alors, à la limite, une intégrale de Riemann et la définition suivante:

$$A := \frac{1}{2} \int_I r(\theta)^2 d\theta$$

*On a alors deux types de calculs d'aires, l'aire des rectangles entre une courbe et l'axe des abscisses et l'aire des secteurs circulaires entre une courbe et l'origine, qui ne sont **pas du tout équivalentes**.*

Paramétrage normal:

Si s est l'abscisse curviligne d'un arc (I, γ) de classe \mathcal{C}^1 , alors on peut montrer³ que s est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de I sur $J = \gamma(I)$, et en particulier, on peut alors reparamétriser par l'abscisse curviligne et obtenir:

$$(I, \gamma) \sim (J, \gamma \circ s^{-1})$$

On peut alors remarquer alors que ce nouvel arc paramétré s'affranchit de la vitesse de parcours, et parcourt la courbe à **vitesse constante**. Ce reparamétrage appelée **paramétrage normal** est généralement bien plus naturel quand on s'intéresse à des questions géométriques intrinsèques à la courbe.

¹A partir de $(x(t), y(t)) = (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t))$, il suffit de calculer la norme du vecteur dérivée en fonction de $r(t)$.

²L'intégrande est bien intégrable en tant que somme produit et composées de fonctions intégrables.

³Elle est continue et strictement croissante et sa dérivée ne s'annule pas, donc bijective à réciproque dérivable. Voir le chapitre sur la dérivation, partie "Dérivée d'une réciproque".

X — COURBES PLANES II

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de propriétés métriques des **courbes planes** plus subtiles. Nous avons déjà défini la notion de longueur d'arc précédemment, dans ce chapitre, nous définiront le **repère de Frenet** et nous développeront le concept de **courbure algébrique**, de **cercle osculateur**, et de **développée** d'une courbe plane.

Repère de Frenet:

Dans tout la suite, on se donne un arc paramétré (γ, I) de classe $\mathcal{C}^2(I)$ de courbe Γ . On définit tout d'abord un vecteur tangent unitaire:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

L'idée du repère de Frenet est alors de définir un **repère mobile d'orientation directe**, donc on définit un vecteur $N(t)$ normal à $T(t)$ tel que le repère $T(t), N(t)$ soit un repère orthonormé direct, ie on a:

$$N(t) := R_{\frac{\pi}{2}} T(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(t)$$

Le couple $(T(t), N(t))$ est alors appelé **repère (mobile) de Frenet**, on abrège souvent les notations de dépendance en t et on note alors ce repère (T, N) .

Courbure:

On paramètre à présent l'arc par son abscisse curviligne s , on peut alors montrer par calcul direct que $T'(s) \perp T(s)$ et en particulier, on a donc que le vecteur accélération $T'(s)$ est colinéaire à $N(s)$, et il existe donc un scalaire $\kappa(s)$ tel que:

$$dT(s) = \kappa(s)N(s)ds$$

On peut aussi montrer par calcul direct que $N'(s) \perp N(s)$ et en particulier, on a donc que le vecteur $N'(s)$ est colinéaire à $T(s)$, et pour le même scalaire $\kappa(s)$ on a:

$$dN(s) = -\kappa(s)T(s)ds$$

On donne alors à $\kappa(s)$ le nom de **courbure algébrique** au point $\gamma(s)$. Sa valeur absolue mesure à quel point la courbe est courbée, et son signe donne la direction du virage par rapport au sens de parcours:

- Si elle est positive, la courbe tourne à gauche.
- Si elle est négative, la courbe tourne à droite.

En particulier les formules ci-dessus sont appelées **formules de Frenet**, et par manipulation des différentielles et en notant $v(t)$ la vitesse scalaire, on obtient un équivalent pour un paramétrage quelconque donné par:

$$\begin{cases} dT(t) = v(t)\kappa(t)N(t)dt \\ dN(t) = -v(t)\kappa(t)T(t)dt \end{cases}$$

Courbure totale:

On considère une courbe **fermée** paramétrée par (I, γ) , alors on peut définir la **courbure totale** de la courbe par:

$$\int_I \kappa(t)v(t)dt$$

Dans le cas d'une courbe fermée, c'est un multiple de 2π qui donne le nombre de tours effectués.

Cercle osculateur:

On définit le concept de **cercle osculateur** en un point $\gamma(t)$ par la propriété suivante:

Le cercle osculateur est l'unique cercle ayant un contact d'ordre au moins 2 en ce point.

On définit alors le **rayon de courbure algébrique** comme étant l'inverse de la courbure et on montre que la position du centre du cercle osculateur est paramétré par:

$$C(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$$

Géométriquement, c'est le point à distance le rayon de courbure dans la direction de $N(t)$, on peut alors vérifier que si on paramètre le cercle osculateur de la sorte, le contact est bien d'ordre au moins 2.

L'ensemble des tels centres de courbures, c'est à dire la courbe Γ' de l'arc paramétré (I, C) est appelé **développée** de la courbe Γ et Γ est appelé **développante** de la courbe Γ' .

Théorème de l'accélération normale:

On cherche maintenant une expression du vecteur accélération $A(t)$ dans la base (T, N) , on a tout d'abord la formule suivante:

$$\gamma'(t) = v(t)T(t)$$

Où on note à nouveau $v(t)$ la vitesse scalaire. On cherche donc une expression du vecteur accélération, donc on dérive cette expression et on obtient:

$$\begin{aligned}\gamma''(t) &= (v(t)T(t))' \iff \\ &= v'(t)T(t) + v(t)T'(t) \iff \\ &= v'(t)T(s(t)) + v^2(t)\kappa(t)N(t) \iff & \text{(D'après les formules de Frenet dans un paramétrage quelconque.)} \\ &= a_T(t)T(s(t)) + a_N(t)N(t)\end{aligned}$$

Alors on peut en déduire une interprétation cinématique puissante, on décompose en effet ici l'accélération en ses **composantes tangentielles et normales**.

Cela démontre en particulier que l'accélération normale est proportionnelle au carré de la vitesse, ie que si on va deux fois plus vite dans un virage, l'accélération subie dans la direction du centre de rotation est quatre fois plus intense.

De manière plus pragmatique, cela donne par ailleurs un moyen simple de calculer la courbure, en effet on en déduit l'expression suivante:

$$\kappa(t) = a_N(t) \frac{1}{v^2(t)} = \langle \gamma''(t) | N(t) \rangle \frac{1}{v^2(t)}$$

Où toutes les quantités sont aisément calculables.

X — COURBES GAUCHES

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des propriétés métriques des **courbes gauches**, c'est à dire des courbes se situant dans \mathbb{R}^3 .

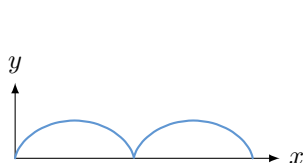
Il est tout d'abord important de noter que la notion de longueur d'arc et d'abscisse curviligne d'une courbe plane se généralise directement dans le cas des courbes gauches. Dans ce chapitre, nous définiront le **trièdre de Frenet** et nous développeront le concept de **courbure**, de **torsion** et de **plan osculateur** d'une courbe gauche.

X — SURFACES PARAMÉTRÉS

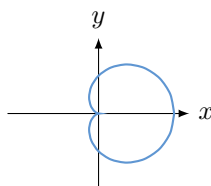
Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas particulier des **surfaces** de \mathbb{R}^3 . Dans tout la suite, on considérera les surfaces considérés de classe \mathcal{C}^1 et **régulières**.

Surface planes remarquables A FAIRE:

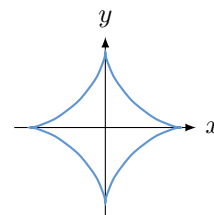
On peut considérer alors quelques courbes remarquables:



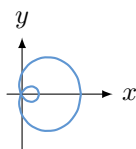
La cycloïde



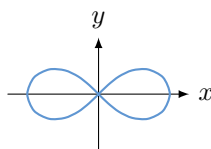
Une cardioïde



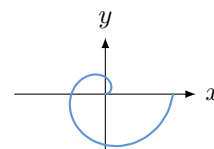
Une hypocycloïde



Un limaçon



Le lemniscate de Bernoulli



La spirale d'Archimède

Ces courbes ont des propriétés très intéressantes et se retrouvent, par exemple, en physique. En effet, la cycloïde (inversée) représente la pente qui minimise le temps de trajet d'une bille lancée en haut de celle ci. On dit que c'est une courbe **brachistochrone**.

Aire d'une surface paramétrée A FAIRE:

X — ETUDE DES ÉQUATIONS CONIQUES

On appelle **conique** tout courbe algébrique dont les points $(x, y) \in E$ vérifiant une égalité de la forme:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Avec A, B, C non tous nuls. Cette ensemble représente alors **l'intersection** obtenue en coupant un cône par un plan. On obtient alors trois types de coniques non-dégénérées¹:

- Les ellipses
- Les paraboles
- Les hyperboles

On cherche alors à caractériser ces courbes algébriquement ou géométriquement. En première approche, on pourra déjà reconnaître que ces coniques admettent au moins un axe de symétrie, et un centre de symétrie pour les ellipses et les hyperboles.

Réduction

L'ensemble des coniques est stable par changement de repère. Aussi, on peut exprimer matriciellement ces équations par:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

La raison principale étant alors qu'on peut alors classer de telles coniques en étudiant la **positivité** de la matrice symétrique associée Q , en effet:

- Si $\det(Q) > 0$ et que F est négatif, alors on obtient une **ellipse**.
- Si $\det(Q) = 0$ alors on obtient une **parabole**.
- Si $\det(Q) < 0$, alors on obtient une **hyperbole**.

En effet, le signe du déterminant d'une matrice de cette taille caractérise exactement le signe des valeurs propres et donc la forme de l'équation finale car si on pose alors λ, μ les valeurs propres de cette matrice², et qu'on pose le changement de variable:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ce changement de variable revient à effectuer une rotation du repère pour aligner les axes avec les axes de symétrie de la conique (qui sont alors les vecteurs propres).

On obtient alors directement l'équation plus simple avec α, β les nouveaux coefficients des termes en X, Y :

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \alpha X + \beta Y + F = 0$$

Si on met alors sous forme canonique les deux parties de l'équation, on obtient:

$$\lambda(X + t_1)^2 + \mu(Y + t_2)^2 + F = 0$$

Finalement après un nouveau changement de repère obtenu par translation de (t_1, t_2) , on obtient alors l'équation:

$$\lambda \tilde{X}^2 + \mu \tilde{Y}^2 = -F$$

¹Les formes dégénérées sont aisément reconnues après le premier changement de repère ci-dessous, on s'intéresse donc uniquement aux formes non-dégénérées.

²Si μ est nulle est qu'on a une parabole, alors la forme est évidente.

Finalement, on peut toujours se ramener à une **équation réduite** de la forme:

$$\left(\frac{\tilde{X}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{Y}}{b}\right)^2 = 1$$

Et on trouve alors facilement les éléments caractéristiques la conique:

- Son centre (s'il existe), situé en $(0, 0)$ en coordonnées (\tilde{X}, \tilde{Y})
- Ses sommets (s'ils existent), situés en $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ en coordonnées (\tilde{X}, \tilde{Y})

On peut aussi étudier les asymptotes dans le cas de l'hyperbole, en effet on considère alors:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{X}}{a}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{Y}}{b}\right)^2 = 1 &\iff \left(\frac{\tilde{Y}}{b}\right)^2 = \left(\frac{\tilde{X}}{a}\right)^2 - 1 \\ &\iff \tilde{Y}^2 = \frac{b^2}{a^2} \tilde{X}^2 - b^2 \\ &\iff \tilde{Y} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\tilde{X}^2 - b^2} \end{aligned}$$

Alors asymptotiquement, quand x est très grand, b^2 est négligeable et l'hyperbole se rapproche alors des deux droites:

$$\tilde{Y} = \pm \frac{b}{a} \tilde{X}$$

Reste alors à utiliser les relations entre les repères pour obtenir les asymptotes dans le repère canonique.

Caractérisations géométriques

Tout d'abord pour les coniques non-paraboliques, on a la caractérisation **bifocale** suivante, on considère deux points F_1, F_2 du plan, un point X et un réel strictement positif d , alors on a:

- Si $d > d(A, B)$, alors l'ensemble des points X qui vérifient $d(F_1, X) + d(F_2, X) = d$ est une **ellipse**.
- Si $d < d(A, B)$, alors l'ensemble des points X qui vérifient $|d(F_1, X) - d(F_2, X)| = d$ est une **hyperbole**.

Dans le cas parabolique, on a la caractérisation **monofocale** suivante, on considère une droite \mathcal{D} et un point F et on a:

L'ensemble des points X qui vérifient $d(F, X) = d(\mathcal{D}, X)$ est une **parabole**.

On retrouve facilement ces caractérisations en explicitant les distances considérées et en simplifiant l'équation obtenue. On peut alors prouver diverses propriétés géométriques des coniques, par exemple et de manière non exhaustive:

- Si des rayons lumineux tombent de l'infini et rebondissent sur une parabole, ils se rencontrent tous en le foyer.
- Deux paraboles de même foyer et de même axe se coupent à angle droit.
- Si un rayon lumineux part d'un foyer d'une ellipse et rebondit sur celle-ci, il passera par l'autre foyer.

Coniques projectives

X — ETUDE DES ÉQUATIONS QUADRIQUES

XI — INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on cherchera à définir une notion analytique qui généralise le concept de **continuité** et d'**espaces topologiques** en une notion plus générale et qui permettra de démontrer des théorèmes plus généraux et plus puissants ainsi que de développer une théorie de l'intégration plus générale et qui permettra d'intégrer sur des espaces plus complexes.

On appellera alors ces fonctions des fonctions **mesurables** et les espaces considérés les **espaces mesurables**.

Inconvénients de la notion de continuité:

La notion de continuité présente plusieurs problèmes analytiques profonds:

- La limite d'une suite de fonctions continues ne l'est pas forcément.
- La limite d'une suite de fonctions Riemann-intégrables ne l'est pas forcément.
- La limite d'une suite d'intégrales n'est pas nécessairement l'intégrale de la limite.
- L'intégrale sur une partie non-compacte est péniblement gérée par les intégrales généralisées dans les cas simples.
- L'intégrale sur un segment d'une fonction très irrégulière n'est souvent pas définie.
- L'espace des fonctions Riemann-intégrables n'a pas de structure forte.

De manière générale, quand on considère des objets très réguliers (fonctions définies sur des compacts, limites uniformes de suites de fonctions, intégrale sur des domaines compacts), la continuité permet d'obtenir les résultats souhaités mais dans des cas plus exotiques, elle n'est plus suffisante. Considérons par exemple:

$$\begin{aligned} f : I = [a ; b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \end{aligned}$$

Où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ désigne la fonction indicatrice des rationnels, alors on montre facilement que cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann, en effet on a $\int_I^- f = 0 \neq 1 = \int_I^+ f$, mais on pourra définir cette intégrale grâce à la théorie de Lebesgue.

XI — ESPACES MESURABLES

On définit tout d'abord dans ce chapitre le concept fondamental de **tribu** sur un ensemble, qui est un concept analogue à celui de topologie, mais beaucoup moins restrictif, les morphismes de tels espaces seront alors les fonctions mesurables, en lieu et place des fonctions continues.

Définition :

On se donne un ensemble E , on appelle **tribu** sur E tout ensemble de parties \mathcal{A} qui vérifie:

- L'ensemble vide et total appartient à \mathcal{A} .
- La tribu est **stable par passage au complémentaire**.
- La tribu est **stable par union dénombrable**.

On appelle le couple (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et les éléments de la tribu parties mesurables.

Exemples de tribus :

On peut alors construire plusieurs exemples simples de tribu sur E :

- La tribu $\{\emptyset, E\}$ appelée **tribu grossière**.
- La tribu $\mathcal{P}(E)$ appelée **tribu discrète**.

Notion de finesse :

On définit alors une notion de comparaison entre deux tribus \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 , et on dira que \mathcal{A}_2 est **plus fine** que \mathcal{A}_1 si et seulement si on a:

$$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$$

Cela signifie moralement que \mathcal{A}_2 a plus d'ensembles mesurables, par exemple la tribu discrète est la plus fine de tout les topologies. Cette relation définit alors **une relation d'ordre** sur l'ensemble des tribus.

Tribu engendrée :

On se donne A un ensemble de parties de E , alors on cherche à savoir si il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) telle que les éléments de A soit mesurables, ie la tribu la moins fine qui contienne A .

On peut alors montrer facilement que l'intersection de deux tribus est une tribu et donc que la plus petite tribu qui contienne A existe, c'est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent A . On l'appellera alors **tribu engendrée** par A .

Tribu induite :

Soit $P \subseteq E$, alors E induit une tribu naturelle sur P appelée **tribu induite** définie par:

$$\mathcal{A}_P := \{A \cap M ; M \in \mathcal{A}\}$$

Une partie mesurable de P pour la tribu induite est simplement la trace sur P des parties mesurables de E .

Tribu borélienne :

On considère maintenant que E n'est plus quelconque mais muni d'une **topologie** \mathcal{T} , alors on définit la **tribu borélienne** sur E comme étant la tribu **engendrée par les ouverts de la topologie**. On appelle alors les parties mesurables pour cette tribu les **boréliens**.

Par exemple voici une liste non exhaustive d'exemples sur \mathbb{R} de boréliens :

- Les intervalles ouverts et fermés et leurs unions.
- Les singletons.
- Les intervalles semi-ouverts comme union singleton/intervalle ouvert.
- Les ensembles finis.
- Les ensembles dénombrables.

On voit alors que la tribu des boréliens contient **beaucoup de parties**, en particulier (hautement non-trivial), elle a la cardinalité de \mathbb{R} .

XI — ESPACES MESURÉS

Dans ce chapitre on définit le premier concept fondamental qui ne permettra de mesurer le "volume" d'une partie complexe d'un espace mesurable, en particulier, on appellera **mesure** sur l'espace mesurable (X, \mathcal{A}) tout fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les deux propriétés suivantes:

- **Mesure du vide:** $\mu(\emptyset) = 0$
- **Sigma additivité:** $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$ pour toute famille **dénombrable disjointe**.

On appelle alors le triplet (X, \mathcal{A}, μ) **espace mesuré** et en particulier si $\mu(X) = 1$, on l'appelle alors **espace probabilisé** et on dira alors que μ est une mesure de probabilité.

Propriétés :

On peut alors montrer les propriétés suivantes des mesures sur un espace mesurable:

- **Croissance:** $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- **Sous-additivité:** $\mu(\bigcup A_i) \leq \sum \mu(A_i)$ pour une famille dénombrable de parties quelconques.
- **Limite de mesure croissante:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup A_n)$ pour une famille **croissante**.
- **Limite de mesure décroissante:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap A_n)$ pour une famille **décroissante**.

Mesure de comptage :

Un premier exemple de mesure sur un ensemble non vide X qu'on dote de la tribu discrète $\mathcal{P}(X)$, est défini par la fonction suivante appelée **mesure de comptage**:

$$\begin{aligned} c : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ A &\longmapsto |A| \end{aligned}$$

Cette fonction est donc la **fonction cardinal**.

Mesure de Lebesgue :

On cherche alors à définir une mesure sur la **tribu borélienne** de \mathbb{R} , qui vérifierait la propriété naturelle que $\mu([a; b]) = b - a$, on peut alors montrer le théorème suivant:

Il existe une unique mesure sur les boréliens qui vérifie cette propriété, on l'appelle la mesure de Lebesgue.

On note alors cette mesure λ , illustrons celle-ci en calculant quelques mesures d'ensembles remarquables:

- Mesure des réels: $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup_n]-n; n]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda([-n; n]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = \infty$
- Mesure des rationnels: $\lambda(\mathbb{Q}) = \lambda(\bigcup_n q_n) = \sum_n \lambda(\{q_n\}) = \sum_n \lambda(\{[q_n; q_n]\}) = 0$

En particulier, on a illustré¹ ici que toutes les parties dénombrables (et donc les parties finies) sont de **mesure nulle**. Une prise de recul sur ce concept nous permet alors de voir une différence majeure avec la topologie:

Une partie "grande" pour la topologie (dense) peut être "petite" pour la théorie de la mesure (négligeable).

Propriétés :

Tout d'abord on définit quelques notions de vocabulaire:

- Si $\mu(A) = 0$, on dira que cette partie est **négligeable**.
- Si $\mu(A^c) = 0$, on dira que cette partie est **pleine**.

¹La réciproque est fautive, en effet il existe des ensembles non dénombrables de mesure nulle. L'ensemble de Cantor est l'exemple canonique.

On définit maintenant le concept fondamental de **propriété mesurable**, en effet on définit les concepts suivants:

- On dira qu'une propriété est mesurable si $\{x \in X ; P(x)\}$ est mesurable.
- On dira qu'une propriété est vraie **presque partout** (qu'on abrégera souvent en p.p.) si cette partie est pleine.

Exemple: La fonction $f : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mapsto x$ est définie p.p. car son ensemble de définition est plein.

XI — FONCTIONS MESURABLES

On définit dans ce chapitre le concept fondamental de **fonction mesurable** qui sera l'analogue des fonctions continues en topologie, en effet ce seront les morphismes sur les espaces mesurables. Aussi ce seront les objets intégrables pour cette théorie.

Définition :

On se donne (E, \mathcal{A}_1) et (F, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables et une fonction:

$$f : (E, \mathcal{A}_1) \longrightarrow (F, \mathcal{A}_2)$$

Alors on dira que f est **mesurable** si et seulement si:

$$\forall A \in \mathcal{A}_2 ; f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$$

Une fonction mesurable pour des tribus boréliennes est appelée **fonction borélienne**, en particulier **toute fonction continue est borélienne**. Par ailleurs, on peut facilement montrer que **la composée de fonction mesurables est mesurable**.

On note alors $\mathcal{M}(X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{B}})$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans Y pour leurs tribus respectives et quand le contexte rends évidentes les tribus considérées on note alors cet ensemble $\mathcal{M}(X, Y)$.

Compatibilité avec le recollement :

Contrairement à la continuité, on a la propriété suivante, on se donne une **famille dénombrable** $(A_n)_{n \in I}$ de parties mesurables de E qui partitionnent E , alors:

$$\forall n \in I ; f|_{A_n} \text{ est mesurable} \implies f \text{ est mesurable.}$$

En particulier, il n'y a pas de *problème de recollement*. Plus généralement, c'est vrai pour tout recouvrement dénombrable par des parties mesurables, et donc en particulier pour tout recouvrement par des parties où la fonction est continue.

Lien avec les indicatrices :

On peut alors caractériser la mesurabilité d'une partie A par la mesurabilité de son indicatrice (pour la tribu borélienne de \mathbb{R}), en effet on a la propriété suivante:

$$A \in \mathcal{A} \iff \mathbb{1}_A \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R})$$

XI — FONCTIONS BORÉLIENNES

On s'attarde dans ce chapitre sur le concept de fonctions boréliennes sur (X, \mathcal{A}) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on notera l'ensemble de telles fonctions $\mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mathbb{K})$ ou quand le contexte¹ est évident $\mathcal{M}(X, \mathbb{K})$. Alors dans ce cas on a des propriétés de stabilité très fortes:

- La somme de fonctions boréliennes est borélienne.
- Le produit de fonctions boréliennes est borélienne.
- L'inverse d'une fonction borélienne qui ne s'annule pas est borélienne.

Mais plus encore, on peut alors montrer la propriétés ci-dessous qui donne son utilité au concept de fonction mesurable:

La limite simple d'une suite de fonction mesurable est mesurable.

Fonctions mesurables positives et étendues :

Pour des questions d'intégration nous tout d'abord définir l'intégrale sur les **fonctions mesurables positives étendues** puis sur les fonctions mesurables en général. Quelques définitions supplémentaires:

- On appelle **fonctions mesurables positives** l'ensemble $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}_+)$, aussi noté $\mathcal{M}_+(X)$.
- On appelle **fonctions mesurables positives étendues** l'ensemble $\mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$, aussi noté $\overline{\mathcal{M}}_+(X)$.

Ici on note $\overline{\mathbb{R}}_+$ la demi-droite ie, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0; \infty]$, on étends les propriétés algébriques classique à cet ensemble par:

- $\forall a \in [0; \infty] ; a + \infty = \infty$.
- $\forall a \in]0; \infty] ; a \times \infty = \infty$.
- Enfin l'opération **conventionnelle**² donnée par: $0 \times \infty = 0$.

On note alors que cette demi-droite est le compactifié de la demi-droite classique, et on peut donc étendre la topologie de la demi-droite à la demi-droite étendue. On peut alors définir une **tribu borélienne** sur cette demi-droite.

Propriétés des fonctions mesurables positives étendues :

On note tout d'abord que toute partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est **majorée**, donc on a la propriété suivante:

Toute partie non-vide admet une borne supérieure.

En particulier on a donc que les suites de fonctions mesurables positives étendues sont **stables** par sup et inf, ie on a:

$$(f_n) \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+) \implies \begin{cases} \sup\{f_n\} \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+) \\ \inf\{f_n\} \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+) \end{cases}$$

Où on définit les fonctions suivantes:

$$\begin{cases} \sup\{f_n\} : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} \\ \inf\{f_n\} : x \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} \end{cases}$$

¹Ici on munira **toujours** les fonctions mesurables réelles ou complexe de leur tribu borélienne à l'arrivée.

²**En théorie de la mesure uniquement**, en effet on voudrait pouvoir dire que la mesure de l'aire de la fonction nulle est nulle, néanmoins on a $f^{-1}(0) = \mathbb{R}$ de mesure infinie, donc par convention on dira que la hauteur nulle multipliée par cette longueur infinie est nulle.

Exemple: On se donne la suite $f_n(x) = \arctan(nx^2)$, alors on a:

$$\sup\{f_n\}(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\arctan(nx^2)\}$$

Donc par exemple:

- $\sup\{f_n\}(0) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\arctan(0)\} = \sup\{0\} = 0$
- $\sup\{f_n\}(1) = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\arctan(n)\} = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\arctan(n)\} = \frac{\pi}{2}$

Fonctions étagées :

On peut maintenant définir l'objet principal qui va nous permettre de définir notre nouvelle notion d'intégrale, on rappelle tout d'abord qu'une **fonction en escalier** est, pour une famille de n **intervalles** (A_i) de X et de scalaires (λ_i) est une fonction de la forme suivante:

$$e = \sum_{i \leq n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$$

C'est cette forme que l'on veut généraliser en considérant non plus des intervalles mais des parties **mesurables** de X , en particulier on définit alors une **fonction étagée**, pour une famille de n **parties mesurables** (A_i) de X et de scalaires (λ_i) les fonctions de la forme suivante:

$$e = \sum_{i \leq n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Théorème d'approximation :

On peut alors montrer le résultat fondamental suivant, l'analogue du théorème de Stone-Weierstrass pour les fonctions continues qui affirme la proposition suivante:

Toute fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées.

XI — INTÉGRALE DE LEBESGUE

Dans ce section nous définissons l'objet fondamental de ce chapitre à savoir **l'intégrale associée à une mesure** sur un espace mesure (X, \mathcal{A}, μ) , en partant de l'intégrale de fonctions élémentaires, les fonctions étagées jusqu'à l'intégrale d'une fonction mesurable quelconque. En particulier on définira l'intégrale des fonctions selon la progression suivante:

Fonctions étagées \rightarrow Fonctions mesurables positives étendues \rightarrow Fonctions mesurables

Intégrale d'une fonction étagée:

On se donne une fonction étagée e , alors on sait qu'il existe une famille dénombrable de parties mesurables (A_i) et de scalaires (λ_i) telles que:

$$e = \sum \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Alors on définit l'intégrale de cette fonction pour la mesure μ par:

$$\int_X e d\mu = \sum \lambda_i \mu(\mathbb{1}_{A_i})$$

C'est l'intégrale de ces fonctions élémentaires qui nous permettront de construire l'intégrale générale.

Intégrale d'une fonction positive:

On considère alors une fonction $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$, alors on définit:

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X e d\mu ; e \text{ positive et étagée, } e \leq f \right\}$$

On note alors que cette borne supérieure est bien un réel **étendu**, ie elle peut être infinie. En outre, on a d'après le théorème d'approximation l'existence d'une suite qui converge vers cette borne et donc vers l'intégrale. On peut donc définir la fonction suivante:

$$\begin{aligned} \int : \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ f &\longmapsto \int_X f d\mu \end{aligned}$$

On a alors les deux propriétés élémentaires suivantes:

- **Extension de la mesure:** Pour tout mesurable A , on a $\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$
- **Croissance:** Pour toutes fonctions positives mesurables $f \leq g$, on a $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$
- **Linéaire positive:** Pour toutes fonctions positives mesurables f, g et réel **positif** α , on a:

$$\int_X (f + \alpha g) d\mu = \int_X f d\mu + \alpha \int_X g d\mu$$

- **Convergence:** Si (f_n) est une suite **croissante** de fonctions mesurables, alors:

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_n f_n d\mu$$

C'est alors un des résultat principaux de la théorie de la mesure, en effet on a alors qu'une suite de fonctions intégrables au sens de la mesure converge bien vers une fonction intégrable. En outre il est important de noter au préalable que la fonction intégrée est bien définie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ et mesurable:

$$\lim_n f_n : x \longmapsto \lim_n f_n(x)$$

Intégrabilité:

On dira alors qu'une fonction mesurable sur X à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} est **intégrable** si et seulement si on a:

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Dans ce cas, l'intégrale existe et on la définit¹ par:

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Où on rappelle que la définition des fonctions partie positive/négative et qu'elles sont toutes deux positives:

$$\begin{cases} f^+ := \sup(0, f) \\ f^- := -\inf(0, f) \end{cases}$$

On note alors $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur X , alors on peut définir la fonction suivante:

$$\begin{aligned} \int : \mathcal{L}^1(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_X f d\mu \end{aligned}$$

Alors l'espace $\mathcal{L}^1(X)$ est un **espace vectoriel** et l'intégrale est une **forme linéaire croissante**² sur celui-ci.

Intégrale sur une partie:

On peut alors remarquer qu'on a défini l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{M}(X)$ sur X tout entier uniquement, on aimerait pouvoir calculer l'intégrale de f sur $A \subseteq X$, on définit alors:

$$\int_A f d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu$$

Où encore pour le problème inverse si $f \in \mathcal{M}(A)$, alors on définit simplement l'intégrale de f par extension par zéro sur X via:

$$\int_A f d\mu = \int_X e_X(f) d\mu$$

Alors on a plusieurs propriétés fondamentales:

- L'intégrale **ignore les parties négligeables** ie on a pour une partie négligeable N que:

$$\int_N f d\mu = 0$$

- L'intégrale vérifie **la relation de Chasles généralisée**, ie pour toute famille disjointe de parties mesurables (A_n) , alors f est intégrable sur cette union si l'objet de droite dans l'égalité ci-dessous est bien défini³:

$$\int_{\cup_n A_n} f d\mu = \sum_n \int_{A_n} f d\mu$$

¹ **Attention:** C'est une définition et pas un potentiel usage de la linéarité (qui n'est que positive) sur l'égalité $f = f^+ - f^-$

² En particulier, on a l'inégalité triangulaire $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$.

³ En d'autres termes si f est intégrable sur toutes les A_n et si la série des intégrales converge. En particulier, si f est positive, alors l'égalité est toujours vraie mais peut être infinie.

Intégrale sur un intervalle non compact:

On peut facilement montrer que sur un segment, l'intégrale de Riemann et de Lebesgue coïncident, on considère maintenant le problème de l'intégrale généralisée de Riemann sur intervalle $[a; c[$, alors l'intégrale sur ce domaine est définie par:

$$\int_{[a; c[} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow c} \int_{[a; b]} f(x)dx$$

On se ramène donc de la même manière que pour Riemann à une limite d'intégrales.

Intégrabilité locale:

On cherche maintenant à déterminer des méthodes pour montrer qu'une fonction est intégrable sur un domaine quelconque X , on définit alors les deux concepts suivants:

- Une fonction est **localement intégrable** si elle est intégrable sur tout compact de X .
- Une fonction est **intégrable au voisinage** de $a \in \text{adh}(X)$ si elle est intégrable sur un voisinage de a .

En outre on a alors par exemple pour les fonctions réelles qu'une fonction sera intégrable sur \mathbb{R} si elle est localement intégrable et intégrable au voisinage des infinis. Cela nous donne donc une méthode pour montrer l'intégrabilité d'une fonction, mais on a une condition suffisante encore plus simple, en effet si il existe une fonction intégrable g telle que:

$$\forall x \in X ; |f(x)| \leq g(x)$$

Alors évidemment, f est intégrable.

Théorèmes de changement de variable:

Comme pour le cas de l'intégrale de Riemann, on a que pour f une fonction intégrable sur X , alors pour toute bijection $\phi : X \rightarrow X'$, alors:

$$\int_X f(x)dx = \int_{X'} f \circ \phi |\phi'| dx$$

Plus précisément, alors la fonction de droite est intégrable et leurs intégrales sont égales. En outre on peut retrouver l'expression usuelle du changement de variable en considérant l'intégrale signée sur un segment.

XI — GRANDS THÉORÈMES

Dans ce chapitre, on aborde les théorèmes principaux relatifs à l'intégrale de Lebesgue et qui font toute sa force, en effet les propriétés précédentes et notamment le **théorème de convergence monotone** ont le problème suivant:

L'interversion limite-intégrale n'est possible que sous les hypothèses que la suite de fonction est croissante et positive.

On aimerait trouver une condition suffisante plus générale pour pouvoir intervenir ces deux opérateurs, c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème de convergence dominée:

On se donne une suite de fonctions mesurables (f_n) qui admet une limite simple f , alors on peut montrer que si (f_n) satisfait la **condition de domination** suivante:

$$\exists g \in \mathcal{L}(X), \forall n \in \mathbb{N}; |f_n| \leq g$$

Alors on a que toutes les f sont intégrables et:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

Ce théorème appelé **théorème de convergence dominée** est le théorème principal qui nous permettra d'effectuer une intervention limite-intégrale. En outre, sachant que l'intégrale ignore les parties négligeables, on peut même généraliser le théorème et demander que la suite de fonctions converge simplement presque partout et que la majoration soit vraie presque partout.

Théorème de convergence dominée pour les séries:

On peut appliquer ce théorème à la suite des sommes partielles d'une série de fonctions et on obtient alors comme condition suffisante d'intervention qu'il existe une fonction intégrable g telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq g$$

Mais on peut affaiblir légèrement le théorème en rajoutant les hypothèses

XI — INTÉGRALES À PARAMÈTRES

Dans ce chapitre on considère des fonctions de la forme suivante:

$$F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \int_X f(x, t) dx$$

Pour que cette fonction soit bien définie, il faut alors que pour tout $t \in I$, les fonctions $f(\cdot, t)$ soient bien intégrables sur X . On appelle alors F une **intégrale à paramètre**. On cherche alors à savoir si les propriétés de régularité de f vont se transmettre à F , en d'autres termes:

- Si pour tout $x \in X$ on a $t \mapsto f(x, t)$ continue, est-ce que F est continue ?
- Si pour tout $x \in X$ on a $t \mapsto f(x, t)$ de classe \mathcal{C}^1 , est-ce que F est de classe \mathcal{C}^1 ?

Dans toute la suite on considère une famille de fonctions $(x, t) \mapsto f(x, t)$ telle que $f(\cdot, t)$ est intégrable pour tout $t \in I$.

Théorème d'interversion 1:

Soit $x \in X$, alors si la fonction $f(x, \cdot)$ admet une limite en un point $a \in \text{adh}(I)$ et qu'elle vérifie l'hypothèse de domination suivante:

$$\exists g \in \mathcal{L}(X) ; \forall t \in I ; |f(\cdot, t)| \leq g$$

Alors on a l'interversion et on a:

$$\lim_{t \rightarrow a} \int_X f(x, t) dx = \int_X \lim_{t \rightarrow a} f(x, t) dx$$

En particulier, si f est continue en un point ou sur une partie, le résultat reste vrai.

Théorème d'interversion 2:

Soit $x \in X$, alors si la fonction $f(x, \cdot)$ est de classe \mathcal{C}^1 en un point $a \in I$ et qu'elle vérifie l'hypothèse de domination suivante:

$$\exists g \in \mathcal{L}(X) ; \forall t \in I ; |\partial_t f(\cdot, t)| \leq g$$

Alors on a l'interversion et on a:

$$\frac{d}{dt} \int_X f(x, t) dx = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

Ces deux théorèmes sont en fait simplement une application directe du théorème de convergence dominée. Et le second se déduit du premier après utilisation de l'inégalité des accroissements finis.

Remarque:

La notion de continuité et de dérivabilité étant locale, pour montrer qu'une intégrale à paramètres est continue ou dérivable il est souvent utile de restreindre le domaine de définition **du paramètre** pour se ramener à des intervalles plus petits, souvent compacts, pour trouver la majoration et conclure. Exemple On considère

$F : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(x, t) dx$ avec $f(x, t) = e^{-tx}$, alors $f(x, \cdot)$ est clairement continue sur tout \mathbb{R}_+ , on doit trouver une fonction intégrable g telle que:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ ; |f(\cdot, t)| = e^{-tx} \leq g$$

On considère alors que $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{b>0} [b; +\infty[$ et que sur chaque intervalle, $e^{-tx} \leq e^{-bx}$ qui ne dépend pas de t et donc sur chacun de ses intervalles F est continue, et ceci étant vrai pour tout b , c'est donc vrai sur \mathbb{R}_+ tout entier.

XI — INTÉGRALES SUR UN ESPACE PRODUIT

Dans ce chapitre, on cherche à définir une mesure sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n et ainsi pouvoir définir l'intégrale des fonctions de la forme:

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Tribu produit:

Etant donné l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$, on cherche à construire une tribu sur le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors de manière analogue à la topologie produit on définit:

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la **tribu engendrée** par les produit cartésiens de mesurables.

On généralise alors en définissant une tribu produit sur un produit cartésien fini. Et on peut donc ainsi définir une tribu sur \mathbb{R}^n . Par ailleurs, dans le cas de \mathbb{R}^n et des espaces à base dénombrable, on a l'équivalence suivante:

$$A \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B} \iff A = A_1 \times \dots \times A_n ; (A_i) \in \mathcal{B}$$

En d'autres termes, pour ces espaces raisonnables, les mesurables de l'espace produit sont **exactement** les produits de mesurables. En outre, on peut noter que la tribu produit rends les **projections canoniques** mesurables.

Mesure produit:

On se donne alors deux espaces mesurables $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$, on peut alors définir une tribu produit sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, et on définit alors une mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2 : \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ par la mesure qui vérifie:

$$\forall A, B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 ; (\mu_1 \otimes \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A) \mu_2(B)$$

En d'autres termes, la mesure d'un mesurable du produit correspond à produit des mesures de chacune des composantes et on peut alors montrer le théorème suivant pour l'espace qu'on considère:

Il existe une unique mesure sur la tribu borélienne produit qui vérifie cette propriété, on l'appelle la mesure de Lebesgue.

En conclusion, on a généralisé la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R} en une mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n et elle correspond au produit des mesures des composantes.

Intégration dans \mathbb{R}^n :

On considère alors l'espace mesure $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$, alors on peut définir l'intégrale d'une fonction f **positive**, et donc par suite d'une fonction quelconque comme dans le cas en dimension 1, ie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e_n ; e_n \text{ étagée et } e_n \leq f \right\}$$

Mais on souhaite pouvoir ramener le **calcul** de telles intégrales à des calculs d'intégrales simples, en effet, on ne sait pas à priori calculer facilement d'intégrales sur \mathbb{R}^n . On a alors deux puissants théorèmes qui permettent de ramener le calcul d'une intégrable sur un produit au calcul d'intégrales (simples) successives.

Théorème de Tonelli:

On se place pour le premier théorème dans le cas de \mathbb{R}^2 et d'une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ **mesurable positive**. Alors l'intégrale de cette fonction par rapport à chacune des deux variables existe, et on peut définir les intégrales à paramètres suivantes:

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

Le théorème de Tonelli affirme alors que ces intégrales sont **mesurables** et que si on intègre ces intégrales à paramètres par rapport à leur paramètre, alors les intégrales obtenues sont **égales entre elles et égale à l'intégrale de f** , ie on a:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

Théorème de Fubini:

On se place pour le second théorème dans le cas de \mathbb{R}^2 et d'une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ **intégrable**. Alors les applications partielles $f(x, \cdot), f(\cdot, y)$ sont **intégrables** et on peut définir les intégrales à paramètres suivantes:

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

Le théorème de Fubini affirme alors que ces intégrales à paramètres sont **intégrables** par rapport à leur paramètre et que les intégrales obtenues sont **égales entre elles et égale à l'intégrale de f** , ie on a:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

Calcul intégral:

Ces deux théorèmes nous permettent alors facilement de calculer une intégrale sur \mathbb{R}^n ou sur un produit cartésien par intégration successive, par exemple soit à intégrer la fonction $(x, y) \mapsto xy$ sur $D = [0; 1]^2$, alors d'après Fubini, on a:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy dx \right) dy = \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{4}$$

Le problème est que souvent les domaine d'intégration ne sont absolument pas des produits cartésiens, mais on peut alors se ramener à un produit cartésien par:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mathbb{1}_D(x, y) dx dy$$

Puis à exprimer l'indicatrice obtenue comme produit d'indicatrices simples, ie si par exemple on considère:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, x-1 \leq y \leq x+1 \right\}$$

Alors on a:

$$\mathbb{1}_D(x, y) = \mathbb{1}_{[a; b]}(x) \mathbb{1}_{[x-1; x+1]}(y)$$

Donc finalement en choisissant un ordre d'intégration adapté et en utilisant la linéarité et les propriétés des indicatrices sur les intégrales réelles:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mathbb{1}_{[a; b]}(x) \mathbb{1}_{[x-1; x+1]}(y) dx dy = \int_a^b \int_{x-1}^{x+1} f(x, y) dy dx$$

Théorème de changement de variable:

On considère $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme d'un ouvert U vers $\psi(U)$, alors si f est une fonction intégrable, on a:

$$\int_{\psi(U)} f(x) dx = \int_U f(\psi(u)) |J_\psi(u)| du$$

De plus une de ces fonctions est intégrable si et seulement si l'autre l'est.

Coordonnées polaires:

Un changement de coordonnées usuel en dimension 2 est celui du **passage en coordonnées polaires**, en effet chaque point (x, y) du plan cartésien peut être repéré par sa distance euclidienne à l'origine et son angle orienté par rapport au demi-axe des abscisses. On définit alors le changement de variables:

$$\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = (x, y)$$

Alors cette fonction est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme¹, et c'est donc un changement de variable qui permet d'exploiter les **symétries circulaires** du domaine de définition, par exemple si on intègre une fonction sur un secteur annulaire.

Coordonnées cylindriques:

Un changement de coordonnées usuel en dimension 3 est celui du **passage en coordonnées cylindriques**, en effet chaque point (x, y, z) de l'espace cartésien peut être repéré par les coordonnées polaires du point $(x, y, 0)$ et sa hauteur z . On définit alors le changement de variable:

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) = (x, y, z)$$

Alors cette fonction est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme², et c'est donc un changement de variable qui permet d'exploiter les **symétries cylindriques** du domaine de définition, par exemple si on intègre une fonction sur un secteur cylindrique.

Coordonnées sphériques:

Un changement de coordonnées usuel en dimension 3 est celui du **passage en coordonnées sphériques**, en effet chaque point (x, y, z) de l'espace cartésien peut être repéré par sa distance euclidienne à l'origine, sa **longitude** θ et sa **latitude** ϕ . On définit alors le changement de variables:

$$\phi(r, \theta, \phi) = (r \cos(\phi) \cos(\theta), r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi)) = (x, y, z)$$

Alors cette fonction est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme³, et c'est donc un changement de variable qui permet d'exploiter les **symétries sphériques** du domaine de définition, par exemple si on intègre une fonction sur un secteur sphérique.

¹De $]0; +\infty[\times]-\pi; \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$

²De $]0; +\infty[\times]-\pi; \pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$

³De $]0; +\infty[\times]-\pi; \pi[\times]0; \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R})$

XI — ESPACES DE LEBESGUE

Un des grands intérêts de la théorie de la mesure est que l'on peut construire un espace de fonctions ayant de très bonnes propriétés analytiques. Dans tout la suite, on considère (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré et $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des fonctions mesurables définies sur celui-ci, on considère alors la relation d'équivalence:

$$f \sim g \iff f = g \text{ presque partout}$$

Alors cette relation est **compatible avec la structure d'algèbre** de $(\mathcal{M}(X), +, \times, \cdot)$, ie on a que si $f \sim f'$ et $g \sim g'$ que:

$$\begin{cases} f + f' \sim g + g' \\ ff' \sim gg' \\ \lambda f \sim \lambda f' \end{cases}$$

On peut donc considérer **l'ensemble quotient** pour cette relation noté $M(X)$, c'est **l'ensemble des fonctions mesurables modulo égalité presque partout**. Les éléments de cet ensemble sont donc des classes, mais en pratique, il arrive souvent que l'on identifie la classe à un de ses représentant, et dès lors qu'une relation \mathcal{R} entre deux fonctions est vraie **presque partout**, alors elle induit une relation dans $M(X)$ vraie **partout** pour les classes, ie:

$$f_1 \mathcal{R} f_2 \text{ presque partout} \iff f \mathcal{R} g$$

Par exemple si $f_1 \leq f_2$ presque partout, alors $f \leq g$ et a donc une relation d'ordre sur $M(X, \mathbb{R})$

Convergence :

On peut munir $M(X)$ d'une notion de convergence en disance qu'une suite (f_n) de classes converge si et seulement si il existe une suite de représentants qui converge (simplement) presque partout, en effet la limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable et définie presque partout. Donc cette limite ne dépends pas des représentant de la suite et on la note $\lim f_n$

De même, on peut définir pour $(f_n) \in M(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$ la classe $\sup f_n$ par la borne supérieur d'une suite de représentants.

Intégrabilité :

On peut alors remarquer que toutes les propriétés et théorèmes de l'intégration de Lebesgue peuvent se reformuler sur cet espace car l'intégrale ne distingue pas deux intégrandes égales presque partout en particulier, on peut reformuler:

- La définition de l'intégrale d'une fonction (positive ou non).
- La relation de Chasles et les propriétés de l'intégrale.
- Le théorème de convergence monotone.
- Le théorème de convergence dominée.
- La finitude presque partout d'une fonction intégrable.
- La nullité presque partout d'une fonction d'intégrale nulle.

En particulier pour le premier cas, on dira que $f \in M(X)$ est **intégrable** si et seulement si:

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Et en particulier, on notera l'ensemble des fonctions (classes de fonctions) intégrables $L^1(X)$, c'est en fait le premier **espace de Lebesgue**.

Normes :

On généralise alors et on comprends qu'on peut essayer de définir plusieurs **normes** sur $M(X)$, analogues aux normes fonctionnelles sur $C^0([a; b])$ pour $p \in [1; \infty[$ par:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Et pour $p = \infty$, on généralise la norme infinie dans $C^0([a; b])$ par la définition de **borne supérieure essentielle**, ie le plus petit réel étendu qui soit un **presque majorant**¹:

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ C \in \overline{\mathbb{R}}_+ ; f < C \right\} = \text{ess sup}_X |f|$$

Mais on voit alors que ces applications ne sont à priori pas à valeurs finies, donc ce ne sont pas des normes, on définit alors les **les espaces de Lebesgue** par:

$$L^p(X) := \left\{ f \in M(X) ; \|f\|_p < \infty \right\}$$

Inégalité de Hölder :

Soit $p, q \in [1; \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, alors pour $r \in [1; \infty]$ tel que:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

On a l'**inégalité de Hölder**, généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui nous donne pour toutes $f, g \in M(X)$ que:

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Cette inégalité nous permet d'obtenir une multitude de comparaisons entre le produit d'espaces de Lebesgue et l'espace de Lebesgue du produit, par exemple:

- **Relation de conjugaison :** $L^p L^q \subseteq L^r$
- **Cauchy-Schwarz :** $L^2 L^2 \subseteq L^1$
- **Stabilisation par les fonctions bornées :** $L^\infty L^p \subseteq L^p$

Ici l'ensemble $L^a L^b$ est défini par $\{fg ; (f, g) \in L^a \times L^b\}$, ce n'est **pas** un produit cartésien.

Structure des espaces de Lebesgue :

On peut alors montrer que les application ci-dessus sont bien des normes sur les espaces $L^p(X)$, en outre ces espaces ont plusieurs particularités remarquables:

- Ce sont des **sous espaces vectoriels** de $M(X)$.
- Ce sont des **espaces normés** pour les applications définies ci-dessus.
- Ce sont des **espaces complets**.

On appelle alors de tels espaces **espaces de Banach**.

Structure de l'espace $L^2(X)$:

Dans le cas particulier de $L^2(X)$, on a même une structure bien plus forte, en effet on peut montrer que la norme 2 est en fait issue d'un **produit scalaire** (hermitien) défini par:

$$\langle f | g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu$$

Un espace de Banach dont la norme est issue d'un produit scalaire est appelé **espace de Hilbert**.

¹Un presque majorant étant un réel qui majore la fonction presque partout.

Espaces particuliers :

Dans le cas où l'espace est de la forme $(D, \mathcal{P}(D), c)$ avec D un ensemble dénombrable et la mesure de comptage, alors les espaces sont notés $\ell^p(D)$ où tout simplement ℓ^p si $D = \mathbb{N}$, on a alors par les propriétés de la mesure de comptage que par définition $\ell^p = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et les normes se reformulent par:

$$\|u\|_p := \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |u_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Et pour la norme infinie, on a équivalence avec la norme infinie classique sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Injections canoniques dans le cas de \mathbb{R}^n :

On peut alors montrer que certaines classes de $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'identifient naturellement à des fonctions, en effet:

- L'espace des fonctions constantes s'injecte naturellement dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
- L'espace des fonctions continues, et même $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ s'injecte naturellement dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En effet si deux constantes sont égales presque partout, elles sont égales. Et si deux fonctions continues sont égales presque partout, alors en utilisant le fait évident que la mesure d'un ouvert est strictement positive, elle sont égales. En particulier, on identifiera alors par la suite \mathbb{C} et $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ comme des *parties* de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

XI — CONVOLUTION

On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$ et on considère deux fonctions $f, g \in \overline{\mathcal{M}}_+$, alors on définit le **produit de convolution** de f et g par la fonction:

$$\begin{aligned} f * g : X &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \end{aligned}$$

Domaine de définition :

On peut alors montrer que le produit de convolution $*$ est bien défini sur $L^1 \times L^1$, mais on peut étendre cette même définition à d'autres espaces et on a que l'opérateur $*$ est bien défini sur:

- **Relation de conjugaison duale:** $L^p * L^q \subseteq L^r$ mais pour la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$
- **Cauchy-Schwarz dual:** $L^2 * L^2 \subseteq L^\infty$
- **Stabilisation par les fonctions intégrables :** $L^1 * L^p \subseteq L^p$

On peut alors remarquer une dualité entre le **produit classique** et le **produit de convolution**, en effet on a remplacé les symboles 1 et ∞ et on a laissé invariant 2. En fait cette dualité est bien réelle et le passage à la dualité est fait par la **transformée de Fourier** que l'on verra au prochain chapitre.

Propriétés :

On peut alors montrer que la convolution est une opération **bilinéaire, associative et commutative**. Une propriété beaucoup plus remarquable est que la convolution **préserve la régularité** des fonctions en jeu, par exemple si $f \in C^\infty$ et $g \in L^1$, alors $f * g \in C^\infty$ et on a:

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha (f) * g$$

Interprétation :

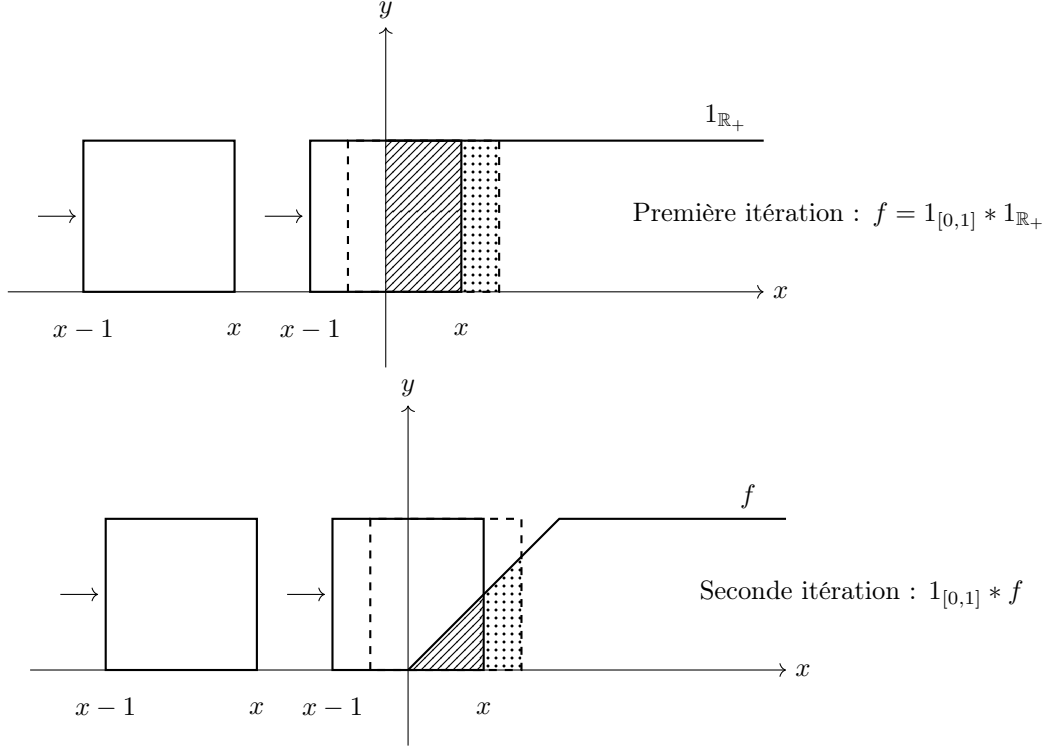
Ce produit, est un procédé qui permet de "lisser" une fonction irrégulière g par une **fonction de pondération** f , en effet si on considère l'exemple de la fonction porte $f = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}$ et qu'on considère la fonction suivante pour $x \in \mathbb{R}$:

$$h_x : y \longmapsto f(x-y)g(y)$$

Alors faire varier le paramètre x revient à réaliser un **fenêtrage** de la fonction g sur un intervalle glissant. La convolution revient alors à calculer l'aire sous la courbe fenêtrée, ie une **moyenne** des valeurs de g sur la fenêtre où tout les points ont le même poids. Si on considère une fonction de pondération différente, les poids accordés aux valeurs selon leurs positions dans la fenêtre peut varier. On peut aussi tout à fait considérer une fonction de pondération qui soit une fenêtre infinie et l'interprétation reste cohérente

Illustration du phénomène :

On considère f la fonction porte comme fonction de pondération et la fonction $g = 1_{\mathbb{R}_+}$ comme notre signal irrégulier. Alors on illustre $f * g$ et $f * (f * g)$:



Element neutre et suites régularisantes:

Soit $f \in L^p$, on pourrait alors se demander si il existe un **élément neutre** pour cette opération. Et il se trouve qu'on montrera dans le chapitre suivant qu'il n'en existe pas. On souhaite alors approcher un tel élément neutre, en effet si il existait une suite de fonctions 1_n *proche* de cet élément, ie telle que:

$$\|1_n * f - f\|_p \longrightarrow 0$$

Alors la fonction $1_n * f$ serait proche de f mais gagnerait la régularité de 1_n , cela motive la définition d'une **approximation de l'unité** comme étant une suite de fonctions positives intégrables $(\phi_n)_n$ telles que pour tout ε positif:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n(x) dx = 1 \\ \int_{B(0,\varepsilon)^c} \phi_n(x) dx \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Exemple: Une suite de fonctions portes de longueurs $1/n$ et de hauteurs n vérifient bien ces hypothèses, ce sont donc des approximations de l'unité.

Si de plus les $(\phi_n)_n$ sont lisses, on l'appellera alors **suite régularisante**, et si on a f une fonction d'intégrale 1, on peut construire une suite régularisante (si f est lisse) en posant (pour n la dimension de l'espace):

$$\phi_k(x) = k^n f(kx)$$

Finalement étant muni de cette construction, on peut alors montrer qu'une telle suite régularisante vérifie bien la propriété asymptotique initiale de cette section, et approxime donc bien un élément neutre pour la convolution.

XI — TRANSFORMÉE DE FOURIER

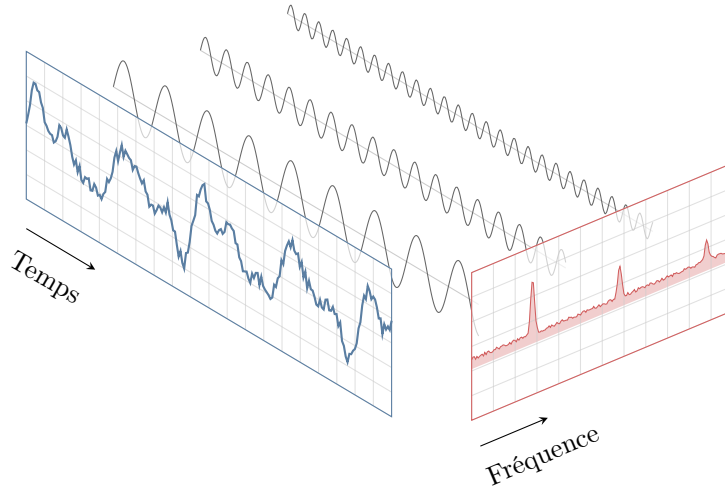
On se place dans l'espace mesuré¹ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$, on notera \mathcal{C}_b l'ensemble des fonctions continues bornées, alors on définit la **transformée de Fourier** de f par la fonction:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^1 &\longrightarrow \mathcal{C}_b \\ f &\longmapsto \hat{f}\end{aligned}$$

Où \hat{f} est la fonction suivante:

$$\begin{aligned}\hat{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx\end{aligned}$$

L'intérêt de cette transformation est d'exploiter les symétries circulaires des fonctions $x \mapsto e^{-2\pi i \xi x}$ pour détecter le spectre fréquentiel d'une fonction f donnée, qu'on appellera souvent **signal** dans ce contexte. On dira alors que f est dans le **domaine temporel** et \hat{f} dans le **domaine fréquentiel**. Voici une représentation heuristique de la transformation:



Lemme de Riemann-Lebesgue :

Une résultat fondamental de cette transformation est la suivante:

La transformée de Fourier d'une fonction est un fonction qui tends vers zéro à l'infini.

On notera \mathcal{C}_0 les fonctions qui tendent vers 0 à l'infini.

¹Elle se définit en toute généralité dans \mathbb{R}^n en remplaçant ξx par $\xi \cdot x$, mais on choisit ici de simplifier l'exposition.

Propriétés :

On peut alors montrer plusieurs propriétés de cette transformation, en notant $P(x) = 2i\pi x$, on a :

- C'est un **opérateur linéaire continu** pour la norme infini sur \mathcal{C}_0 .
- C'est un **opérateur autoadjoint** pour le produit scalaire de L^2 .
- C'est un **opérateur injectif**.
- Elle transforme les **produits par des polynômes en dérivées**, ie si $f \in L^1$, alors :

$$\mathcal{F}(Pf) = -(\mathcal{F}(f))'$$

- Elle transforme les **dérivées en produit par des polynômes**, ie si $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1$ et que $f' \in L^1$, alors :

$$\mathcal{F}(f') = P\mathcal{F}(f)$$

La dernière propriété est très puissante dans l'étude des équations différentielles, en effet si on considère une fonction lisse y vérifiant par exemple :

$$y''(t) + y'(t) = f(t)$$

Alors on pourrait penser à appliquer la transformation de Fourier à cette équation, et ainsi transformer l'équation différentielle en équation algébrique :

$$P^2(t)\hat{y}(t) + P(t)\hat{y}(t) = \hat{f}(t)$$

Et finalement obtenir

$$\hat{y}(t) = \frac{\hat{f}(t)}{P^2(t) + P(t)}$$

Alors si on arrivait à **inverser** la transformation de Fourier, on pourrait reconstituer y et conclure. On cherche donc à trouver une partie de \mathcal{C}_0 telle que la transformation restreinte soit surjective.

Inverse :

La transformation est injective, donc en particulier si on restreint \mathcal{F} à son image $\mathcal{F}(L^1)$, alors on obtient une **bijection**, mais on préfère se restreindre à la partie $\mathcal{A} := L^1 \cap \mathcal{F}(L^1)$ des fonctions dites **Fourier-intégrables**, alors on peut montrer que son inverse est donné par la formule :

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} \hat{f}(x) dx$$

Propriétés de l'ensemble des fonctions Fourier-intégrables :

On peut alors montrer que $\mathcal{A} \subseteq L^1 \cap \mathcal{C}_0$ donc $\mathcal{A} \subseteq L^1 \cap L^\infty \subseteq L^p$ et en outre, \mathcal{A} est **stable par produit simple et de convolution**. En outre on a la propriété suivante entre le produit simple et le produit de convolution :

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$$

Egalité de Plancherel :

En particulier si deux fonctions $f, g \in \mathcal{A}$, on a alors **l'égalité de Plancherel** :

$$\langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle$$

En d'autres termes, la transformée de Fourier est une **isométrie** de \mathcal{A} sur lui-même pour la norme 2. On peut alors montrer que la transformée de Fourier est **continue** sur \mathcal{A} et en utilisant le **théorème de prolongement uniforme**, ainsi que le fait que $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 , on peut alors montrer qu'il existe un unique prolongement de Fourier sur tout L^2 et c'est une isométrie bijective.

XI — SÉRIES DE FOURIER

Dans ce chapitre, on cherche à repliquer le concept de la transformée de Fourier dans le cadre des signaux **périodiques**. En d'autres termes de décomposer un tel signal en somme de signaux élémentaires. Dans toute la suite, on étudiera sans perte de généralité les fonctions 1-périodiques, celles-ci s'identifient alors à des fonctions sur le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} , ou encore aux fonctions définies sur le segment $[0; 1]$.

Famille de Fourier :

L'idée principale, à nouveau, est de considérer la famille particulières dite **famille de Fourier** suivante:

$$\mathcal{F} := (e^{2i\pi kx})_{k \in \mathbb{Z}} = (e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

On peut alors montrer que \mathcal{F} est une **base Hilbertienne** de l'espace des fonctions périodiques $L^2([0; 1])$.

Coefficients de Fourier :

En particulier d'après la théorie hilbertienne, si $f \in L^2([0; 1])$, alors on appelle **coefficients de Fourier** de f et on note $c_k(f)$ la famille de terme général $\langle e_k | f \rangle$ et on a:

- L'égalité de décomposition:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle e_n | f \rangle e_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$$

- Le théorème de Pythagore:

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle e_n | f \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

On appelle alors la série ci-dessus **série de Fourier** de f .

Symmétrisation des coefficients :

Si on considère la série de Fourier d'une fonction, on peut écrire:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) e^{2i\pi nx} + c_{-n}(f) e^{-2i\pi nx} \quad (\text{Les termes de la somme sont appelés } n\text{-ième } \mathbf{harmoniques} \text{ de } f) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(2\pi nx) + (i(c_n(f) - c_{-n}(f))) \sin(2\pi nx) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(2\pi nx) + b_n(f) \sin(2\pi nx) \end{aligned}$$

Ainsi on peut aussi décomposer f dans la base $(\cos(2\pi kx), \sin(2\pi kx))_{k \in \mathbb{N}}$ et écrire f comme une **série trigonométrique**. Ceci simplifie alors grandement certaines applications nécessitant de représenter la série par exemple. Les relations entre les coefficients étant par ce qui précède:

$$\begin{cases} a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = 2 \int_0^1 \cos(2\pi kx) f(x) dx \\ b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f)) = 2 \int_0^1 \sin(2\pi kx) f(x) dx \end{cases}$$

En outre ceci permet d'utiliser la parité de la fonction, en effet on a:

- Si f est **paire**, on a $\forall k \in \mathbb{N}^* ; b_k = 0$
- Si f est **impaire**, on a $\forall k \in \mathbb{N}^* ; a_k = 0$

Transformée de Fourier périodique :

Néanmoins de manière générale, on étends cette définition au cas des fonctions $f \in L^1([0; 1])$ et on définit la transformée de Fourier périodique par:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^1([0; 1]) &\longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

On peut alors montrer les propriétés suivantes analogues à la transformée de Fourier non-périodique:

- **Lemme de Riemann-Lebesgue:** La transformée de Fourier est une famille qui tends vers 0 aux infinis.
- **Injectivité:** La transformée de Fourier est une fonction injective.
- **Dérivations:** La transformée de Fourier transforme aussi les dérivées en produits par des polynômes de manière analogue au cas non-périodique, ie on a:

$$\mathcal{F}(f') = (2i\pi k c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$$

Modes de convergence de la série de Fourier :

On appelle **somme partielle de Fourier** la somme:

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$$

Alors le cas où $f \in L^2([0; 1])$, on a égalité de décomposition dans $L^2([0; 1])$ et donc plus précisément, la famille est sommable et donc pour l'énumération de cette somme partielle, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$$

Ceci nous dit alors que la somme partielle de Fourier convergence dans cet espace, donc presque partout, mais ne dit rien de sa convergence **ponctuelle ou uniforme**. Ces problèmes difficiles font l'objet des sections suivantes.

Convergence uniforme :

On définit l'**algèbre de Wiener** par l'ensemble suivant:

$$W([0; 1]) := \left\{ f \in L^1([0; 1]) ; \left(\|c_k(f) e_k\|_\infty \right)_{k \in \mathbb{Z}} = (|c_k(f)|)_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est sommable.} \right\}$$

Alors si une fonction f appartient à cet ensemble, on peut montrer que la série de Fourier de celle-ci **converge uniformément**, et donc ponctuellement, et on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_\infty = 0$$

On peut alors montrer une condition nécessaire à l'appartenance à $W([0; 1])$, en effet on a:

$$\mathcal{C}^0([0; 1]) \cap \mathcal{C}_{pm}^1([0; 1]) \subseteq W([0; 1])$$

En particulier $\mathcal{C}^1([0; 1]) \subseteq W([0; 1])$ et les fonctions périodiques \mathcal{C}^1 admettent une série de Fourier uniformément convergente.

Convergence ponctuelle :

De manière encore plus générale, si $f \in \mathcal{C}_{pm}^1([0; 1])$, alors on peut montrer le résultat suivant:

$$S_n(f) \longrightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ représentent la limite par valeurs supérieures et inférieures de f en chaque point.

XII — ESPACES PROBABILISÉS

Le domaine des probabilités cherche à modéliser des **expériences aléatoires** ie des expériences dont toutes les **issues** possibles sont connues à priori mais dont le résultat peut varier lorsqu'on la répète (lancer de dés, tirage dans une urne...).

Le cadre de la théorie de la mesure, nous permet de formaliser la théorie axiomatique des probabilités, ainsi que les différents objets en jeu, en particulier, on considère un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) muni d'une mesure \mathbb{P} à valeurs dans $[0; 1]$ et telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. On appelle une telle mesure **loi de probabilité**.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé**. Dans ce cadre l'ensemble Ω des issues possibles de l'expérience est appelé **univers**, les parties mesurables sont appelées **événements** et deux parties mesurables disjointes seront dites **incompatibles**.

Espace probabilisé discret et continu

La mesure de l'espace doit être égale à 1 donc en particulier, on doit avoir $\int_{\Omega} d\mathbb{P} = 1$, ceci étant dit, on peut alors distinguer deux grands cas d'espaces probabilisés:

- Le cas où les parties non-négligeables de Ω sont **dénombrables**, alors par applications de la relation de Chasles et l'invisibilité des parties négligeables, on obtient que:

$$\int_{\Omega} d\mathbb{P} = \int_{\bigcup x_n} d\mathbb{P} = \sum_n \mathbb{P}(x_n)$$

On remarque alors que la loi de probabilité est entièrement déterminée par la probabilité **d'événements élémentaires** d'une certaine famille (x_n) dont la série vaut 1. On appelle cette famille **distribution** de \mathbb{P} et de tels espaces **espaces probabilisés discrets**.

- Le cas où elles ne le sont pas et que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, alors il est toujours possible de définir la **fonction de répartition** de la mesure de probabilité par la fonction suivante qui caractérise la loi:

$$F : x \longrightarrow \mathbb{P}([-\infty; x])$$

Si de plus les non-boréliens sont négligeables pour \mathbb{P} (on dit aussi que \mathbb{P} est **absolument continue** par rapport à la mesure de Lebesgue) alors on peut montrer que \mathbb{P} admet une densité, c'est à dire une fonction intégrable f dont l'intégrale vaut 1 et qui caractérise alors la probabilité:

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x) dx$$

On dira alors que ces lois sont des **lois à densité**. Si la dernière condition n'est pas vérifiée, on dira alors que la loi est **mixte ou singulière**.

Espace probabilisé produit

Si on se donne une famille de n espaces probabilisés $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbb{P}_i)$, on peut alors conformément à la théorie de la mesure définir l'espace produit $(\prod \Omega_i, \mathcal{A}_{\otimes}, \mathbb{P}_{\otimes})$ avec la tribu et la loi produit. Dans tout la suite on considère simplement le cas $n = 2$ pour simplifier.

Selon le cas discret ou à densité, on a alors que la loi est caractérisée par:

- **Cas dénombrable:**

$$\mathbb{P}_{\otimes}(A) = \sum_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mathbb{P}_{\otimes}(x_n, y_m)$$

- **Cas absolument continu:**

$$\mathbb{P}_{\otimes}(A) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d\mathbb{P}_{\otimes}$$

Lois marginales

Sachant la loi produit \mathbb{P} , une question intéressante est alors de déterminer les lois **marginales** des espaces composantes, on montre alors qu'on a:

- **Dans le cas dénombrable:**

$$\mathbb{P}_1(\{k\}) = \sum_{\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{k\}, y_m)$$

- **Dans le cas absolument continu:**

$$f_1(x) = \int_{\Omega_1} f(x, y) dy$$

Malheureusement on peut montrer que la donnée des lois marginales ne caractérise pas la loi produit, en effet les lois marginales dans le cas fini par exemple correspondent aux sommes des lignes ou colonnes du tableau des probabilités et deux sommes peuvent être égales sans que les valeurs individuelles soient toutes égales.

Exemples

Plusieurs exemples de différentes natures:

- **Discret fini:** Si on cherche à modéliser 3 tirages successifs à pile ou face avec une pièce non truquée, on peut modéliser cette expérience par l'espace probabilisé suivant:

$$\left(\{(r_1, r_2, r_3) ; (r_i) \in \{P, F\}\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \right)$$

- **Discret infini:** Si on cherche à modéliser le nombre de visiteurs qui se présentent dans un musée, on peut alors modéliser ce phénomène par un espace probabilisé dénombrable et une probabilité rapidement décroissante, ie on pose par exemple:

$$\left(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

Alors ceci est bien un espace probabilisé discret infini.

- **Absolument continu:** Si on cherche à modéliser un tir de fléchette sur le disque unité $D \subseteq \mathbb{R}^2$ où la probabilité suit une densité uniforme, alors on peut poser:

$$\left(D, \mathcal{B}(D), \mathbb{P}(D) = \frac{1}{\pi} \int_A d\mu = \frac{\mu(A)}{\pi} \right)$$

- **Mixte:** Si on cherche à modéliser une loterie où l'on tire un nombre de $[0; 10]$ avec $\mathbb{P}(\{0\}) = 0.1$ qui correspond au jackpot et densité uniforme pour le reste des nombres. Alors on a naturellement une structure d'espace probabilisé mixte.
- **Espace produit:** Si on cherche à modéliser le choix uniforme d'un point dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, on modélise ceci par l'espace produit:

$$(\llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \mathcal{P}(\llbracket 1 ; n \rrbracket^2), \mathbb{P}(\{(k, l)\}) = \frac{1}{n^2})$$

Alors les distributions marginales sont facilement $\mathbb{P}_1(\{k\}) = \mathbb{P}_2(\{k\}) = \frac{1}{n}$, on a en fait le tableau des probabilités décrit par la matrice de taille n suivante:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

Les colonnes (resp. lignes) correspondant aux probabilités $\mathbb{P}_1(\{k\})$ (resp. $\mathbb{P}_2(\{k\})$)

XII — PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Lorsque l'on dispose d'informations sur le résultat d'une expérience donnée, il est possible d'affiner nos prédictions.

Soit X un événement qui n'est pas négligeable, alors on définit l'application:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cdot|X) : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ A &\longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap X)}{\mathbb{P}(X)}\end{aligned}$$

On peut montrer que c'est une mesure de probabilité sur Ω et on l'appelle **probabilité de A sachant X**. De la symétrie de l'intersection on peut alors en déduire la **formule de Bayes** qui permet alors d'**inverser le conditionnement**:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Formule des probabilités composées

On en déduit directement la **formule des probabilités composées**:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

Qui se généralise pour une famille finie d'événements $(A_n)_{n \in I}$ d'intersection non nulle:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales

On considère une partition $(A_n)_n$ de Ω en événements disjoints (on appelle une telle partition **système complet d'événements**), alors on peut montrer la **formule des probabilités totales**:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Indépendance

On dit que deux événements A, B sont **indépendants** si et seulement si la donnée de la réalisation d'un des événements n'influence pas l'autre, ie:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

Ou encore par la formule conditionnelle:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Si deux événements sont indépendants, alors n'importe quelle paire de $A, B, \overline{A}, \overline{B}$ est indépendante.

XII — LOIS USUELLES

Dans ce chapitre, on énumère les lois usuelles en probabilité et leurs cas d'utilisation. Comme vu précédemment, on distingue le cas discret et absolument continu. Dans tout la suite on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Lois discrètes usuelles

On appelle **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues, usuellement nommées **succès et échec**.

On dit que la loi est **uniforme** si on a la distribution:

$$\forall A \in \mathcal{A} ; \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

On dit que la loi est **binomiale** de paramètres n, p si $\Omega = \{1, \dots, n\}$ et si on a la distribution:

$$\forall k \leq n ; \mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On dit que la loi est **géométrique** de paramètre p si $\Omega = \mathbb{N}^*$ et si on a la distribution:

$$\forall k \geq 1 ; \mathbb{P}(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}$$

On dit que la loi est **hypergéométrique** de paramètres (p, n, N) si $\Omega = \mathbb{N}^*$ et si on a la distribution:

$$\forall k \geq 1 ; \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{\binom{pN}{k} \binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

On dit que la loi est **de Poisson** de paramètres λ si $\Omega = \mathbb{N}^*$ et si on a la distribution:

$$\forall k \geq 1 ; \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

La **loi binomiale** est utilisée pour déterminer la probabilité d'obtenir exactement k succès après n itérations d'une épreuve de Bernoulli.

La **loi géométrique** est utilisée pour déterminer la probabilité d'un temps d'attente k avant le le premier succès d'une épreuve de Bernoulli.

La **loi hypergéométrique** est utilisée pour déterminer la probabilité d'obtenir k succès après n itérations d'une épreuve de tirage sans remise dans une urne contenant N boules, dont pN boules gagnantes, et $(1-p)N$ boules perdantes, avec la contrainte que pN soit un entier.

La **loi de Poisson** est utilisée pour déterminer le nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne connue, et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précédent¹.

¹C'est une loi qui s'obtient asymptotiquement à partir d'une loi binomiale de paramètres $T, \frac{\lambda}{T}$ en faisant tendre T vers l'infini.

Lois à densité usuelles

On dit que la loi est **uniforme** si sa densité f est constante sur un intervalle $[a; b]$ et nulle en dehors.

On dit que la loi est **exponentielle** de paramètre λ si on a la densité:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) ; x \geq 0$$

On dit que la loi est **normale** de paramètres¹ μ, σ si on a la densité:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

La **loi exponentielle** est utilisée pour modéliser le temps d'attente d'un phénomène sans mémoire, en particulier, c'est l'analogue continue de la loi géométrique².

La **loi normale** est fondamentale en probabilités du fait de son omniprésence dans les sciences expérimentales, en effet, un théorème fondamental montrera que la somme d'une suite de variables aléatoires (comprendre expériences) convergera vers une certaine loi normale. Elle est donc d'importance capitale en statistiques.

¹Ces paramètres correspondent alors à l'espérance et l'écart type de la loi.

²Elle s'obtient asymptotiquement à partir d'une loi géométrique de paramètre λT en faisant tendre T vers 0.

XII — VARIABLES ALÉATOIRES

Très souvent, il se trouve que l'espace probabilisé de l'expérience est inconnu, trop grand ou trop complexe, on considérera alors simplement son existence et on étudiera celui ci via des fonctions définies sur cet espace, appelées **variables aléatoires**. Ces fonctions induiront un nouvel espace probabilisé correspondant à notre expérience précise (souvent un espace probabilisé numérique).

On considère alors souvent $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ comme un espace probabilisé abstrait et on l'oublie même complètement très souvent. Par exemple:

- On considère une expérience aléatoire qui tire au hasard un gateau dans une chaîne de fabrication, on peut alors définir une variable aléatoire sur l'espace probabilisé naturellement défini qui à chaque événement associe le volume du gateau, son taux de sucre, le nombre de raisins secs ... Et faire alors des suppositions sur la loi de ces variables aléatoires par exemple on pourra supposer que le taux de sucre d'un gateau choisi au hasard suit une loi normale.
- Si on considère un groupe de N personnes vivant un épisode épidémique, alors il est très compliqué de modéliser l'état épidémique du groupe à un instant donné du fait des différentes interactions et dépendances, on préfère alors étudier des espaces probabilisés plus simples induits par des variables aléatoires comme le nombre de personnes infectées, le temps mis par l'épidémie pour atteindre une certaine taille etc ..

Définition

On dira que X est une **variable aléatoire** de $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vers un espace mesurable (Ω_2, \mathcal{B}) si et seulement si c'est une **fonction mesurable** sur cet espace. Elle définit alors une loi naturelle sur Ω_2 définie par la **mesure image**:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X : \mathcal{B} &\longrightarrow [0; 1] \\ B &\longmapsto \mathbb{P}(X^{-1}(B))\end{aligned}$$

On note alors plus simplement $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$. Très souvent, on considérera $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ comme espace d'arrivée et donc la variable aléatoire sera dite **réelle** et définira une loi sur les boréliens.

Cas réel

Dans le cas de variables aléatoires **réelles** on peut aussi créer une notation qui s'applique si B est un intervalle et on a:

$$X^{-1}([a; b]) = \left\{ \omega \in \Omega ; a < X(\omega) < b \right\} \stackrel{\text{notation}}{=} (a < X < b)$$

Propriétés

La famille $((X = a))_{a \in X(\Omega)}$ est un **système complet d'événements**, en effet car si on considère une issue $\omega \in \Omega$, on a:

$$\begin{cases} X(\omega) = x \implies \omega \in (X = x) \\ X(\omega) \neq x \implies \omega \notin (X = x) \end{cases}$$

On peut donc partitionner les éléments de Ω selon leur image par X

On peut aussi noter que si f est une application mesurable, alors $f \circ X$ est une **variable aléatoire** sur les espaces correspondants.

Indépendance

On dira alors que deux variables aléatoires X, Y sont indépendantes si et seulement si pour tout couple x, y , les événements correspondants sont indépendants:

$$\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Par ailleurs, si X, Y sont deux variables aléatoires, il existe une mesure de la dépendance (corrélation) de deux variables aléatoires appelée **covariance** définie dans la dernière partie.

Cas des vecteurs aléatoires

Dans le cas où la variable aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^n , alors elle définit une loi produit (appelée dans ce cadre **loi conjointe** de X) sur les boréliens et on l'appelle **vecteur aléatoire**. En particulier les lois marginales sont alors les lois des variables composantes X_i . Par exemple si on prends un vecteur aléatoire choisissant uniformément un point dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, alors on a que:

$$\mathbb{P}(X = (k, l)) = \frac{1}{n^2}$$

Et les loi marginales sont données par:

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = (k, i))$$

On retrouve alors les même lois marginales que dans l'exemple analogue sans variable aléatoire, en particulier les lois conjointe et marginales sont exactement les lois produits et marginales sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Intégrabilité et formule de transfert

On se donne une variable aléatoire réelle intégrable par rapport à la mesure \mathbb{P} ie telle que:

$$\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P} < \infty$$

Alors on peut montrer l'identité suivante par les propriétés de la mesure image $d\mathbb{P}_X$:

$$\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X$$

Et même plus généralement, on a le **théorème de transfert** pour tout fonction ϕ telle qu'une des intégrale ait un sens:

$$\int_{\Omega} \phi(X(\omega)) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) d\mathbb{P}_X$$

Et les intégrales du membre de droite se calculent souvent facilement, par exemple dans les deux cas classiques:

- **Cas dénombrable:** On a

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X = \sum_{\mathbb{N}} \int_{y_n} x d\mathbb{P}_X = \sum_{\mathbb{N}} y_n \mathbb{P}(X = y_n)$$

- **Cas absolument continu:** On a

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

XII — INDICATEURS

Dans tout la suite, on considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X, Y deux variables aléatoires **intégrables** pour la mesure \mathbb{P} .

On appelle **indicateur de position** un nombre réel permettant de situer les valeurs d'une série statistique, par exemple l'espérance et la médiane sont des indicateurs de position.

On appelle **indicateur de dispersion** un nombre réel permettant de mesurer la variabilité des valeurs d'une série statistique autour d'une valeur (généralement autour de la moyenne), par exemple la variance, l'écart-type ou l'écart interquartile sont des indicateurs de dispersion.

Esperance

L'espérance mathématique correspond à la moyenne théorique du résultat qu'on peut espérer avoir en répétant une expérience aléatoire un grand nombre de fois, c'est **la moyenne des valeurs de la variable aléatoire, pondérées par leur probabilités respectives**, ou c'est aussi le centre de masse de la densité, on définit alors celle ci par:

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$$

L'espérance prends alors la forme d'une somme pondérée dans le cas discret, ou d'une intégrale pondérée dans le cas absolument continue. Elle existe toujours dans le cas d'une variable aléatoire **finie** mais ce n'est pas le cas en général, et il faut alors étudier l'intégrabilité de la variable aléatoire.

L'espérance possède plusieurs propriétés remarquables, elle est **linéaire et croissante** et l'espérance d'une constante est cette constante.

Mais en général, l'espérance **n'est pas multiplicative**, c'est néanmoins le cas quand les deux variables aléatoires sont **indépendantes**.

Variables centrées

On rappelle qu'on a le théorème de transfert donc $\mathbb{E}(\phi(X))$ existe si $\phi(X)$ est intégrable. Aussi, on appelle **variable centrée** une variable aléatoire d'espérance nulle. On peut alors centrer une variable aléatoire par la translation $X' = X - \mathbb{E}(X)$.

Moments d'ordre k

On généralise cette définition et on définit le **moment d'ordre k** de la variable X , si il existe par la quantité suivante:

$$m_k(X) = \mathbb{E}(X^k)$$

On remarque alors que cette quantité existe si et seulement si X^k est intégrable. De manière générale, on comprends facilement qu'on a la propriété suivante (où la disjonction dépends de la discrétude ou non de X):

$$X \text{ admet un moment d'ordre } k \iff X \in L^k(\Omega) \text{ ou } \ell^k(\Omega)$$

Variance

On manque alors d'informations sur les valeurs de X , elles peuvent tout aussi bien rester toujours très proches de $\mathbb{E}(X)$, ou s'en éloigner beaucoup, on a donc besoin de mesurer la distance moyenne entre X et $\mathbb{E}(X)$, qui serait alors $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$.

Cette formule est techniquement impraticable du fait de la valeur absolue, on utilise donc **la moyenne des carrés des distances** entre X et $\mathbb{E}(X)$, et on définit alors la variance:

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

La deuxième expression appelée **formule de Koenig-Huygens** se déduit facilement de la première par les propriétés de l'espérance et on en déduit qu'une variable aléatoire admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2.

On voit directement que la variance est **positive** (ou nulle si X est constante presque partout). Elle vérifie aussi les propriétés suivantes:

- **Invariante par translation** $\mathbb{V}(X + a) = \mathbb{V}(X)$
- **Quadratique** $\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2 \mathbb{V}(X)$

Ecart type

On peut alors définir **l'écart-type** de la variable X qui est défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Enfin, on appelle **variable réduite** une variable aléatoire d'écart type 1 et on peut alors définir la **variable centrée réduite** associée à X :

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Covariance

Dans le cas d'un couple aléatoire et contrairement à l'espérance, le concept de variance perd son sens. Plutôt que de chercher un écart par rapport à la moyenne, on va préférer chercher **un écart moyen entre les deux variables**¹ qui se définit par:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Grâce à la covariance on peut aussi définir la variance d'une somme:

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

La covariance de X, Y n'existe bien sûr que si X, Y et XY sont intégrables.

Propriétés de la covariance

La covariance vérifie plusieurs propriétés intéressantes:

- Si les deux variables aléatoires sont indépendantes, alors on a $\text{Cov}(X, Y) = 0$, la réciproque étant **fausse**.
- Si X admet une variance alors on retrouve celle-ci comme $\text{Cov}(X, X)$

On peut même montrer que la covariance est **bilinéaire, symétrique et positive**. Informellement c'est un "*pseudo produit scalaire*" sur les variables aléatoires, néanmoins suffisamment proche du produit scalaire pour avoir **l'inégalité de Cauchy-Schwartz**:

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

Plus précisément, considérons l'espace des variables aléatoires centrées réduites, alors c'est **un espace pré-hilbertien**, et la covariance définit son produit scalaire, l'écart type définit alors la **norme** associée et on peut définir le coefficient de corrélation linéaire par:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Qui s'interpréterait alors comme *l'angle* entre les variables aléatoires.

¹On remarque que la variance n'est alors que la covariance de X avec elle-même. Aussi si les deux variables aléatoires sont indépendantes, dans ce cas l'espérance est multiplicative et on a $\text{Cov}(X, Y) = 0$, la réciproque étant **fausse**.

Espérance & variances usuelles

Il est intéressant de considérer les différents indicateurs de position et de dispersion des lois usuelles¹

Lois	Espérance	Variance
$X \sim \mathcal{U}(E)$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$n \cdot p$	$n \cdot p(1-p)$
$X \sim \mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$X \sim \mathcal{H}(p, n, N)$	$n \cdot p$	$n \cdot p(1-p) \frac{N-n}{N-1}$

Inégalités

On souhaite majorer la probabilité d'avoir des valeurs "extrêmes", ie éloignées de l'espérance, alors si X est une variable aléatoire positive presque partout et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ on peut montrer **l'inégalité de Markov**:

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}$$

Si la variable aléatoire admet une variance, on a alors **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$

Cette dernière est un cas particulier de la première mais est en général *plus fine* que la majoration donnée par l'inégalité de Markov.

¹Pour la loi uniforme on considère X à valeurs dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$

XII — CONVERGENCES STOCHASTIQUES

On peut alors tenter d'appliquer les résultats sur les espaces L^p à la théorie des probabilités, en particulier étudier des intégrales de variables aléatoires, des espérances, etc .. revient à étudier la finitude d'une norme dans $L^p(\Omega)$ en particulier pour tout $p \in [1; \infty]$, on en déduit que les normes p s'appliquent aux variables aléatoires, ie on a :

$$\begin{cases} \|X\|_p := \left(\int_{\Omega} |X|^p d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\mathbb{E}(|X|^p) \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|X\|_{\infty} := \sup \text{ess} \{|X|\} \end{cases}$$

Où ici X est supposée à densité ou à distribution $f(x)$.

Cette approche sera alors très fructueuse, en effet par l'étude et la définition de différents *modes de convergences* bien choisis sur des suites de variables aléatoires (X_n) , on pourra alors démontrer les grands théorèmes probabilistes.

Convergence en loi

On dira que X_n **converge en loi** vers X si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, la loi de X_n est arbitrairement proche de la loi de X , ie si on a :

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) \longrightarrow \mathbb{P}(X \leq x)$$

On notera alors :

$$(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Convergence en probabilité

On dira que X_n **converge en probabilité** vers X si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité que $(X_n)_n$ s'éloigne de X tends vers 0, ie si on a :

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

On notera alors :

$$(X_n) \xrightarrow{\mathcal{P}} X$$

Convergence presque partout

On dira que X_n **converge presque partout** vers X si et seulement si elle converge sauf sur un domaine de mesure nul, ie :

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega ; \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega) \right\} \right) = 0$$

On notera alors :

$$(X_n) \longrightarrow X \text{ p.p.}$$

Convergence L^p

On dira qu'une suite (X_n) converge en norme p vers une variable aléatoire X si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Relations entre les convergences

On peut montrer les différentes implications suivantes :

$$\text{Convergence p.p.} \implies \text{Convergence en probabilité} \implies \text{Convergence en loi}$$

Et pour $p > q \geq 1$

$$\text{Convergence } L^p \implies \text{Convergence } L^q \implies \text{Convergence en probabilité}$$

XII — THÉORÈMES LIMITES

Munis de nos nouveaux outils et modes de convergences des suites de variables aléatoires, on peut alors énoncer et démontrer les grands théorèmes probabilistes.

Lois des grands nombres

On se donne une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (communément noté iid) (X_n) admettant une espérance μ , et on pose une variable aléatoire appelée **moyenne**¹ **empirique**:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

Alors on peut montrer la loi **faible** des grands nombre, ie:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \mu$$

Pour les memes hypothèses que précédemment la loi **forte** des grands nombres nous assure une convergence plus forte, ie on a:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mu$$

Théorème central limite

On se donne une suite de variables aléatoires iid (X_n) admettant une espérance μ et un écart-type σ finis, alors on considère à nouveau la moyenne empirique:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

Mais cette fois on considère cette variable sous sa forme **centrée réduite**, qu'on notera \bar{X}_n^* , alors le théorème central limite nous donne que:

$$\bar{X}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

¹Elle correspond à la moyenne faite sur les réalisations d'une expérience par exemple.

XIII — INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on cherche à résoudre le problème inverse de celui du probabiliste, qui est de décrire une expérience aléatoire qui suit une loi donnée. En effet le but de la statistique inférentielle est **d'inférer** une loi de probabilité étant données des réalisations de l'expérience aléatoire. Par exemple on peut considérer un tirage à pile ou face qui nous donnerais les réalisations suivantes:

$$\{PPPPFP PPPPPFP\}$$

Comment savoir quelle loi suit cette expérience aléatoire ?

Modèle statistique et échantillonnage

On appelle **échantillon** un vecteur de variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées** (abrégé en iid. par la suite) de la forme suivante:

$$(X_1, \dots, X_n)$$

Chaque composante de ce vecteur représente alors un résultat de l'expérience aléatoire et l'objectif du statisticien est alors de réussir à approcher leur loi. Cette approche s'applique aux expériences dont les répétitions sont raisonnablement considérées comme indépendantes entre elles.

Ces variables suivent une même loi \mathbb{P}_{X_i} inconnues à priori. Ici on peut alors s'apercevoir qu'on peut modéliser le problème de différentes façon:

- Le **modèle paramétrique** suppose que \mathbb{P}_{X_i} dépends d'un paramètre $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n$ et qu'alors celle ci est "bien approchée" par une loi uniquement déterminée par θ . C'est la cas usuel car beaucoup des lois classique sont déterminées par un ou plusieurs paramètres.
- Le **modèle non-paramétrique** suppose que \mathbb{P}_{X_i} dépends d'un paramètre de dimension infinie, souvent une densité. Ceci permet alors de considérer les lois possibles comme un sous espace de fonctions.

Dans ce chapitre nous nous intéressons uniquement au cas paramétrique.

Statistiques

Dans toute la suite, on se donne un échantillon (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires iid. On appelle **statistique** tout fonction mesurable T des observation ie toute fonction de la forme:

$$T(X_1, \dots, X_n)$$

Voici plusieurs exemples de statistiques:

$$X_1 \quad \sum_{i=1}^n X_i \quad \cos(X_2 + 7X_3) \quad (X_1, \exp(X_7))$$

Estimateurs

L'objet d'étude principal du statisticien est le concept **d'estimateur**. C'est une statistique qui prends ses valeurs dans le domaine de définition de θ . Voici plusieurs exemples d'estimateurs:

- Un estimateur naturel de l'espérance de X_i est **la moyenne de l'échantillon** définie par:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Un estimateur bien moins naturel de l'espérance de X_i est donné par:

$$T(X_1, \dots, X_n) = X_1$$

Ce dernier exemple nous fait comprendre que l'ensemble des estimateurs possible est gigantesque et beaucoup de ceux-ci ne sont pas pertinents pour des raisons assez intuitives. En effet on aimerait pouvoir dire les choses suivantes:

- Qu'un estimateur "raisonnable" d'un paramètre θ "converge" dans un sens précis vers la vraie valeur de θ si la taille de l'échantillon est grande.
- Qu'un estimateur "raisonnable" d'un paramètre θ "utilise bien toute les informations" données par l'échantillon.
- Qu'un estimateur "raisonnable" d'un paramètre θ ne sous-estime (ou sur-estime) pas θ , ie qu'il n'introduit pas de biais.

Ces concepts donneront naissance aux trois définitions suivantes qui permettront de caractériser la qualité d'un estimateur, celles de **convergence**, **exhaustivité** et **absence de biais**. Sous des bonnes hypothèses de régularité, on pourra aussi introduire la notion d'**efficacité**, qui décrira à quel point l'ajout de nouvelles observations rajoute de l'information.

Fonction de vraisemblance

En inférence, on peut aussi voir le paramètre à estimer θ comme une variable aléatoire et alors estimer à quel point une valeurs donnée de θ explique l'échantillon (X_1, \dots, X_n) , on appelle cette quantité la **vraisemblance** de θ et elle est décrite par la statistique:

$$\theta \mapsto \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i)$$

Où ici f_{θ} est la fonction de masse ou de densité de n'importe lequel des X_i pour la valeur θ . C'est bien une statistique, et étant donnée une réalisation de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) , on obtient un réel qui quantifie la vraisemblance de θ pour ces réalisations.

Dans des nombreux cas et du fait du produit, il est pratique de plutôt calculer la **log-vraisemblance** donnée par $\theta \mapsto \ln(\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, \theta))$.

Score et information de Fischer

La fonction de vraisemblance est souvent une fonction qu'on cherche à maximiser (voir la section suivante) et son gradient est une statistique d'importance. On définit donc le **score** d'un échantillon par la statistique:

$$s_X(\theta) = \nabla \ln(\mathcal{L}(X, \theta))$$

Alors cette statistique s'annule quand la fonction de vraisemblance atteint un point critique. Ceci permettra de détecter les maximums (voir section suivante à nouveau) et aussi à définir **l'information de Fischer**:

$$I_X(\theta) = \mathbb{V}(s_X(\theta))$$

Cette dernière quantifie l'information apportée par l'échantillon sur le paramètre θ . Si $I(\theta)$ est grand, l'échantillon peut apporter beaucoup d'informations, et inversement.

Méthode du maximum de vraisemblance

Un des intérêts de la vraisemblance est de pouvoir trouver un estimateur du paramètre θ . En effet étant donnée son interprétation, on peut chercher à **maximiser la vraisemblance**, et alors obtenir un estimateur raisonnable de θ . En particulier, on définit alors:

$$\hat{\theta} := \sup \{ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, \theta) ; \theta \in \Theta \}$$

Pour faire ceci, une méthode classique consiste à calculer les points d'annulation du score, ie les points d'annulation du gradient puis vérifier que chercher un extremum.

Exemple:

XIII — QUALITÉ D'UN ESTIMATEUR

Dans ce chapitre, on définit différentes notions liées à la **qualité** d'un estimateur T d'un paramètre θ . Ces notions nous permettront alors de trouver des estimateurs pertinents.

Estimateur sans biais

Une des qualités principales d'un estimateur qu'on souhaiterait définir est l'absence de biais, et on dira alors que $\hat{\theta}$ est **sans-biais**:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta = 0$$

On dira aussi que l'estimateur est **asymptotiquement sans biais** ssi:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Estimateur convergent

La qualité principale qu'on recherche d'un estimateur $\hat{\theta}_n = T(X_1, \dots, X_n)$ est qu'il **converge en probabilité** vers θ , ie si:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

On peut alors montrer via l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev qu'une condition suffisante plus pratique pour montrer la convergence est que:

- L'estimateur soit **asymptotiquement sans biais**.
- La variance de l'estimateur tende vers 0.

Estimateur exhaustif

L'exhaustivité d'une statistique quantifie le fait à quel point la statistique contient l'ensemble de l'information sur le(s) paramètre(s) de la loi de probabilité. Elle est définie par:

Estimateur efficace

L'efficacité d'un estimateur quantifie le bénéfice du rajout d'observation, ie plus un estimateur est efficace, plus l'échantillon d'observations nécessaire pour atteindre un objectif de précision sera petit. L'efficacité d'un estimateur est donnée par la formule suivante:

$$e(\hat{\theta}) = \frac{1}{I_{\hat{\theta}}(\theta) \mathbb{V}(\hat{\theta})}$$

Où ici I est l'information de Fischer associée.

XIII — INTERVALLES DE CONFIANCE

XIV — INTRODUCTION

L'analyse numérique est la branche des mathématiques qui cherche à résoudre des problèmes **continus** par des approximations numériques et qui étudie et établit des algorithmes dans ce but.

C'est une branche fondamentale pour résoudre certains problèmes qui n'ont pas de solutions formelle exacte, par exemple pour trouver les solutions d'une équation non-linéaire, pour approximer une intégrale, ou approcher une fonction dont on ne connaît que quelques valeurs.

Dans cette partie nous définiront les concepts principaux de ce domaine qui seront utilisés dans la suite. On considérera un problème mathématique P qui admet une solution numérique formelle unique \bar{x} .

Méthodes :

On appellera **méthode numérique** un algorithme qui permettra d'approximer la solution à notre problème par une quantité \tilde{x} , on peut alors définir plusieurs types de méthodes numériques:

- Les méthodes directes qui permettent de trouver une solution théoriquement exacte en temps fini.
- Les méthodes itératives qui ne font que converger vers une solution exacte.

On appellera alors **erreur absolue** la quantité:

$$\Delta(x) = |\tilde{x} - x|$$

Dans le cas de méthodes itératives, \tilde{x} sera généralement le n -ième terme d'une suite numérique, et donc l'erreur absolue dépendra du nombre d'itérations n de la méthode.

Des méthodes numérique directes sont par exemple l'algorithme de Gauss-Jordan pour le calcul de l'inverse d'une matrice. Dans le prochain chapitre nous présenteront plusieurs exemples de méthodes itératives.

Orde d'un méthode itérative:

On considère ici une suite (x_n) qui converge vers la solution x de notre problème, on cherche alors à estimer la **vitesse de convergence** de la suite.

On dira alors que (x_n) est convergente d'ordre α si il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|^\alpha} = C$$

L'ordre de la convergence nous donne alors des indications sur la vitesse de la convergence de la suite et on dira alors:

- Si $\alpha = 1$, on dira que la convergence est **linéaire**
- Si $\alpha = 2$, on dira que la convergence est **quadratique**
- ...

XIV — RÉOLUTION APPROCHÉE D'ÉQUATION

Dans ce chapitre on se donne une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et on cherche à approximer les solution de l'équation $f(x) = 0$.

Un première étape nécessaire est de localiser grossièrement les racines, en effet grâce à une étude rudimentaire de la fonction et de sa dérivée, on peut aisément se restreindre à un intervalle $[a; b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$ et que la fonction n'ait qu'une seule racine x sur cet intervalle.

Dans tout la suite on supposera que la racine recherchée est grossièrement localisée dans un intervalle $I = [a; b]$.

Méthode de dichotomie:

La méthode historique la plus ancienne est celle dite de **dichotomie**, c'est une méthode **itérative** qui consiste à construire une **suite d'intervalles strictement décroissante** (pour l'inclusion) qui contient à chaque étape la racine recherchée, on construit alors les intervalles par récurrence par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) a_n \leq 0 ; & \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases} \\ \text{Si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) b_n \leq 0 ; & \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases} \end{aligned}$$

Moralement, cela revient à découper à chaque étape l'intervalle en deux et à considérer celui des deux morceaux qui contient la racine (donc tel que la fonction change de signe) et à recommencer récursivement.

**** Dessin de la dichotomie ****

On en déduit alors rapidement la longueur d'un intervalle après n itérations. Et on peut aussi en déduire une majoration de l'erreur d'approximation, qui est donnée par:

$$\Delta(x) = |x_n - x| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

Cette première formule d'erreur nous permet alors de savoir combien d'itérations sont nécessaires pour obtenir une certaine précision.

Enfin, on peut montrer que cette méthode itérative est **convergente d'ordre 1**, ie sa vitesse de convergence est linéaire donc assez lente.

Méthode du point fixe:

Cette méthode vise à ramener l'étude des racines de f à l'étude des points fixes d'une fonction auxiliaire g sous des conditions de régularité permettant d'utiliser des théorèmes d'analyse.

En effet si g est **k-contractante**, le **théorème du point fixe de Banach** nous permet d'affirmer que g converge vers son unique point fixe, donc on construit une suite de premier terme $x_0 \in I$ et par récurrence:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Alors cette suite converge vers la racine de f et on a par récurrence une majoration de l'erreur en fonction de la constante de contraction k par:

$$\Delta(x) = |x_n - x| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|$$

Cette méthode a l'inconvénient d'un fréquente instabilité numérique pour certaines racines et possède, en général, un convergence **linéaire**.

Méthode de Newton-Raphson:

Sous des conditions de régularité plus strictes (dérivabilité de f) la méthode de Newton-Raphson permet une convergence plus rapide, on construit une suite¹ de premier terme $x_0 \in I$ et par récurrence:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Moralement, cela revient à considérer la tangente en un point de f et un point sera alors son intersection avec l'axe des abscisses, et le point suivant sera l'intersection de la tangente suivante avec l'axe des abscisses.

**** Dessin de Newton ****

On peut alors montrer une majoration de l'erreur d'approximation, qui est donnée par:

$$\Delta(x) = |x_n - x| \leq \frac{M}{2m}(x_{n-1} - x)^2$$

Avec $M = \sup_{x \in I} |f''(x)|$ et $m = \inf_{x \in I} |f'(x)|$.

Cette méthode a donc une convergence en général **quadratique**, mais est très dépendante de la condition initiale choisie et des propriétés de la fonction, en effet si la dérivée s'annule pour un terme de la suite, la tangente n'aura pas d'intersection avec les abscisses et donc la méthode ne convergera pas. Elle peut aussi osciller ou converger vers une autre racine que celle recherchée.

¹Elle peut alors s'interpréter comme une application de la méthode du point fixe à une fonction particulière.

XIV — INTERPOLATION

Dans ce chapitre, on cherche à approximer par un polynôme une fonction donnée par un nuage de $n + 1$ points de la forme $\{(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$, on appellera une telle approximation **interpolation de la fonction** et on appellera un tel polynôme **polynôme interpolateur**.

On peut alors montrer qu'il existe **un unique tel polynôme** de degré **inférieur ou égal à n** , en effet, par 2 points passe une unique droite, par 3 points une unique parabole (potentiellement une droite si les points sont alignés) etc ...

L'objectif de ce chapitre sera donc de comprendre les différentes méthodes de construction d'un tel polynôme.

Système de Vandermonde :

On cherche donc un polynôme P de degré au plus n qui vérifie un système de n contraintes, en particulier pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_{n-1} + \dots + a_n x_{n-1}^n = f(x_{n-1}) \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Qui se ramène à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Qui se ramène donc à inverser une **matrice de Vandermonde** qu'on sait inversible, donc ceci permet de prouver l'existence et l'unicité d'un tel polynôme d'interpolation.

Attention: Cette méthode est très inefficace et très couteuse en calculs !

Interpolation de Lagrange :

Etant donné un nuage de $n + 1$ abscisses (x_0, \dots, x_n) , on définit alors le k -ième polynôme de la base de Lagrange (associé à l'abscisse x_k) par :

$$L_{x_k} = \prod_{i \neq k} \frac{(X - x_i)}{x_k - x_i}$$

C'est un polynôme construit pour s'annuler en tout les points sauf en x_k et pour valoir 1 en x_k .

La construction d'un tel polynôme fait sens car alors, si on considère le polynôme :

$$P = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{x_k}$$

On remarque que c'est bien un polynôme de degré au plus n , et qu'on a bien par construction :

$$\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, P(x_k) = f(x_k)$$

Donc P est bien le polynôme interpolateur de notre nuage de points.

Interpolation de Newton :

La dernière méthode d'interpolation est une méthode très intéressante pour son affinité avec la programmation, en effet c'est une méthode **incrémentale**, c'est à dire que si on a un polynôme d'interpolation sur 3 points, c'est très simple et peu coûteux d'interpoler avec un nouveau point et d'obtenir donc un polynôme de degré supérieur.

Etant donné un nuage de $n + 1$ abscisses (x_0, \dots, x_n) , on définit alors le k -ième polynôme de la base de Newton par:

$$N_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - x_i)$$

Si on considère un nuage de points composé d'un seul point $(x_0, f(x_0))$, alors le polynôme d'interpolation est trivialement:

$$P_0 = f(x_0)$$

Alors pour **pour rajouter un point** sans changer les valeurs précédentes¹, il suffit de poser:

$$P_1 = f(x_0) + \alpha_1(x - x_0)$$

Alors pour **pour rajouter encore un point** sans changer les valeurs précédentes², il suffit de poser:

$$P_2 = f(x_0) + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1)$$

On définit alors par récurrence le **polynôme d'interpolation** de degré n par:

$$P_n = P_{n-1} + \alpha_n N_n$$

On appelle les coefficients α_i les **différences divisées** d'ordre i de f et on les note:

$$\alpha_i = f[x_0, \dots, x_i]$$

On peut alors montrer la **relation de récurrence** vérifiée par les différences divisées:

$$f[x_0] = f(x_0) \text{ et } f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Cette relation nous donne alors une nouvelle manière de construire le polynôme d'interpolation, en effet on a d'après l'expression par récurrence:

$$P_n = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] N_k$$

Il suffit donc de calculer les n différences divisées via la relation de récurrence et ainsi directement écrire la combinaison linéaire.

Exemple: Si on considère le nuage de points $\{(0, 2), (3, 7), (5, 1)\}$, alors on calcule les différences divisées dans un tableau:

$$\begin{pmatrix} x_0 & f[x_0] & & & \\ x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & & & \\ 3 & 7 & \frac{5}{3} & & \\ 5 & 1 & -3 & -\frac{14}{15} & \end{pmatrix}$$

Et donc $P = 2 + \frac{5}{3}(X - x_0) - \frac{7}{3}(X - x_0)(X - x_1) = 2 + \frac{5}{3}(X) - \frac{14}{15}(X - 3)(X - 5)$

¹En effet, la valeur en x_0 ne change pas du fait du facteur $(x - x_0)$ et il suffit alors de résoudre pour α_1 .

²En effet, la valeur en x_0 et en x_1 ne change pas du fait du facteur $(x - x_0)(x - x_1)$ et il suffit alors de résoudre pour α_2 .

Calculs de l'erreur :

On a la formule de majoration suivante pour l'erreur d'interpolation:

$$\Delta(f) = |f(x) - P(x)| \leq \sup_{m_x < \xi < M_x} \left\{ \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \right\} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

Avec $m_x = \min(x, x_0, \dots, x_n)$ et $M_x = \max(x, x_0, \dots, x_n)$.

Exemple: On cherche à interpoler la fonction logarithme avec le nuage de points $\{(2, \ln(2)), (4, \ln(4)), (5, \ln(5))\}$.
On calcule le polynôme d'interpolation et on obtient $P(x) = \frac{-1}{5}()$

XIV — DÉRIVATION NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, on cherche à approcher **les dérivées** d'une fonction f en un point x étant donné les images de la fonction en $n + 1$ points (x_0, \dots, x_n) .

Première approche :

Une première approche serait d'utiliser le **le polynôme interpolateur de Lagrange**, en effet, étant donnée un polynôme interpolateur P , on peut montrer que:

$$f^{(k)}(x) \approx P^{(k)}(x)$$

Cette approche est conceptuellement très simple mais couteuse en calculs et spécifique à la fonction étudiée.

Seconde approche :

Le point clé de ce chapitre étant qu'une dérivée est liée **linéairement** aux valeurs de la fonction, et donc on cherche une expression telle que:

$$f'(x) = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) \quad (\text{Pour certains coefficients } \alpha_0, \dots, \alpha_n)$$

Dans la suite par souci de concision, on travaillera sur un exemple précis, qui se généralisera facilement, on considère trois abscisses $0, h, 2h$ et on cherche à approximer la dérivée de f en 0 .

On peut alors calculer ces coefficients en utilisant **les formules de Taylor**, en effet on a:

$$\begin{cases} f(0) &= f(0) \\ f(h) &= f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) + o(h^2) \\ f(2h) &= f(0) + 2hf'(0) + \frac{4h^2}{2}f''(0) + o(h^2) \end{cases}$$

On remplace alors ces expressions dans la formule recherchée ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(h) + \alpha_2 f(2h) \\ &= \alpha_0(f(0)) + \alpha_1(f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0)) + \alpha_2(f(0) + 2hf'(0) + \frac{4h^2}{2}f''(0)) + o(h^2) \\ &= f(0)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + f'(0)(h\alpha_1 + 2h\alpha_2) + f''(0)\left(\frac{h^2}{2}\alpha_1 + 2h^2\alpha_2\right) + o(h^2) \end{aligned}$$

La dernière ligne nous donne alors un système à résoudre pour $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ en fonction de h , ie on veut:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & h\alpha_1 & 2h\alpha_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2}\alpha_1 & 2h^2\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tout calculs faits, on obtient que $f'(0) = -\frac{3}{2h}f(0) + \frac{2}{h}f(h) - \frac{1}{2h}f(2h) + o(h^2)$ qui est bien une approximation de la dérivée de f en 0 .

Cette approche est conceptuellement assez complexe mais permet d'avoir une approximation générale d'une fonction quelconque.

Calculs d'erreur :

On reprends l'exemple ci-dessus et on exprime le reste d'ordre 2 sous sa forme de Taylor-Lagrange, on a:

$$\begin{cases} f(0) &= f(0) \\ f(h) &= f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1) \\ f(2h) &= f(0) + 2hf'(0) + \frac{4h^2}{2}f''(0) + \frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2) \end{cases} \quad (\text{Pour certains } \xi_1, \xi_2 \text{ dans } [0; h], [0; 2h])$$

Donc si on reprends la formule utilisée en notant $\tilde{f}'(0)$ l'approximation obtenue, puis en substituant les (α_i) obtenus, on obtient:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(h) + \alpha_2 f(2h) \\ &= \tilde{f}'(0) + \alpha_1 \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1) + \alpha_2 \frac{4h^3}{3} f'''(\xi_2) \\ &= \tilde{f}'(0) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_1) - \frac{2h^2}{3} f'''(\xi_2) \end{aligned}$$

Donc pour I un intervalle qui contient tout les points $0, h, 2h$ on obtient que:

$$\left| f'(0) - \tilde{f}'(0) \right| = \left| \frac{h^2}{3} f'''(\xi_1) - \frac{2h^2}{3} f'''(\xi_2) \right| \leq \sup_{t \in I} |f'''(t)| \left| \frac{h^2}{3} - \frac{2h^2}{3} \right| = \sup_{t \in I} |f'''(t)| \left| \frac{-h^2}{3} \right|$$

Finalement on a majoré notre erreur par:

$$\left| f'(0) - \tilde{f}'(0) \right| \leq \sup_{t \in I} |f'''(t)| \left(\frac{h^2}{3} \right)$$

On peut alors établir une formule générale de l'erreur (en considérant alors une famille (x_i) de $n+1$ abscisses, pour lesquels on détermine des (α_i)) et on a l'erreur d'approximation au point x est donnée par:

XIV — INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, on cherche à approcher l'**intégrale** d'une fonction f sur un segment $I = [a; b]$, la méthode générale pour ce faire est d'essayer d'établir une **formule de quadrature**, ie on approxime l'intégrale par:

$$\tilde{I} = \sum_{k=0}^n f(x_k)w_k$$

Avec les x_k des points de $[a; b]$ et w_k des réels donnés appelés **poids de quadrature**. Dans ce chapitre on caculera ces poids (et donc les formules de quadrature) via l'**interpolation**.

Formules de Newton-Cotes :

On considère une subdivision régulière de $[a; b]$ en n sous intervalles et P le polynôme d'interpolation de f sur les $n + 1$ points (x_i) associés, alors on approche l'intégrale de f par l'intégrale de P ce qui nous donne directement¹ les poids de quadrature suivants:

$$w_i = \int_a^b L_{x_i} dx$$

Les cas particuliers de cette méthode nous donnent alors les formules classiques suivantes:

- **Méthode des rectangles:** Pour $n = 0$, on interpole par une fonction constante donc on approxime l'aire par celle d'un rectangle.
- **Méthode des trapezes:** Pour $n = 1$, on interpole par une fonction affine donc on approxime l'aire par celle d'un trapeze.
- **Méthode de Simpson:** Pour $n = 2$, on interpole par une fonction quadratique donc on approxime l'aire par celle d'une parabole.

Dans chaque cas, on peut en déduire simplement une la formule de quadrature sur l'intervalle $[a; b]$:

- **Méthode des rectangles²:** $\tilde{I} = (b - a)f(\xi)$
- **Méthode des trapezes:** $\tilde{I} = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$
- **Méthode de Simpson:** $\tilde{I} = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2})f(b))$

On pourrait alors être tenté d'approximer l'intégrale par la formule de quadrature donnée pour un polynôme interpolateur de plus haut degré possible mais:

Augmenter le degré du polynôme interpolateur est inefficace et coûteux en calculs

Ce problème nous amènera donc à développer les méthodes composites ci-dessous.

Méthodes composites :

A partir de ces formules on peut développer une méthode itérative permettant d'approximer notre intégrale précisément, l'approche relativement intuitive consistera à:

- Effectuer une subdivision régulière de notre intervalle en n subdivisions.
- Approximer l'intégrale de la fonction sur chaque subdivision par une des formules de quadrature.
- Sommer ces approximations.

Par exemple si on effectue une méthode des rectangles composites, on se ramène directement à une **somme de Riemann**, (à gauche ou à droite selon les points choisis dans les subdivisions).

De manière générale, cette méthode nous évite d'avoir à interpoler la fonction par un polynôme de haut degré, et donc pour augmenter la précision, il nous suffira de subdiviser plus finement l'intervalle initial.

¹On intègre simplement P et on utilise la linéarité de l'intégrale.

²Cette méthode étant le cas limite d'un "subdivision régulière", on peut choisir n'importe quel point ξ dans l'intervalle, qui nous donne trois méthodes connues, celles des rectangles à gauche, à droite, ou la méthode du point milieu

Calculs d'erreurs :

On considère donc une subdivision régulière de notre intervalle $[a; b]$ en n sous-intervalles. On notera par la suite $M_i = \sup_{t \in [a; b]} |f^{(i)}(t)|$.

On a alors les majorations d'erreur suivantes pour les méthodes classiques:

Méthode du point milieu :	Méthode des trapèzes :	Méthode de Simpson :
$\Delta(I) = \tilde{I}_n - I \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$	$\Delta(I) = \tilde{I}_n - I \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$	$\Delta(I) = \tilde{I}_n - I \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4$

Ces majorations nous permettent alors de:

- Montrer que les deux premières méthodes sont exactes sur $\mathbb{R}_1[X]$ et que la deuxième l'est sur $\mathbb{R}_3[X]$.
- Définir le nombre de subdivisions nécessaires pour obtenir une précision donnée.

XIV — ANALYSE MATRICIELLE I

Dans ce chapitre, on étudie la résolution numérique de **systèmes linéaires**, en d'autres termes pour $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on cherche à résoudre l'équation suivante:

$$AX = Y$$

Dans tout la suite on utilisera régulièrement les concepts de **norme d'opérateur linéaire** définie en analyse vectorielle, dont on rappelle la définition:

$$\|M\|_{p,q} = \sup_{\|V\|_p=1} \|MV\|_q$$

Conditionnement d'une matrice :

Le calcul numérique introduit la nécessité de savoir si une **perturbation des données du problème** impactera la précision de la solution trouvée, ie si on note $B + \delta B$ le vecteur solution perturbé et $X + \delta X$ la solution du système perturbé:

$$A(X + \delta X) = B + \delta B$$

Alors on aimerait connaître l'erreur relative par rapport à la solution exacte du problème ie la quantité:

$$\Delta := \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \bigg/ \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

On définit alors le **conditionnement** d'une matrice inversible A pour la norme $\|\cdot\|$ par la quantité:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

On a alors les propriétés suivantes pour deux matrices A, B inversibles:

- On montre que le conditionnement de A est supérieur à 1.
- On montre que $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ si α est non-nul.
- On montre que $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$.

On notera en outre cond_p le conditionnement associé à la norme p . On peut alors caractériser le conditionnement associé à la norme euclidienne, en effet on a:

$$\text{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}}$$

Où ici on a définit:

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \text{ est la plus grande valeur propre de } {}^tAA. \\ \sigma_{\min} \text{ est la plus petite valeur propre de } {}^tAA. \end{cases}$$

Propriété fondamentale :

On peut alors montrer la propriété suivante pour le système avec solution perturbée:

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

En effet en utilisant le fait que $AX = B$ et en additionnant le système réel et perturbé, on retrouve rapidement le conditionnement.

On peut aussi perturber la matrice en $A + \delta A$, alors on peut montrer de manière analogue que:

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X + \delta X\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

En outre ces majorations **ne dépendent pas du conditionnement choisi**.

XIV — ANALYSE MATRICIELLE II

On a défini dans le chapitre précédent les outils principaux qui vont nous permettre d'élaborer des méthodes efficaces de résolution de système linéaire. En particulier on trouve deux grands types de techniques de résolution:

- Les **méthodes directes** qui s'emploient à résoudre le système de manière exacte par calcul.
- Les **méthodes itératives** qui s'emploient à résoudre le système de manière approchées.

Dans ce chapitre nous traiterons des méthodes directes principales, on considère une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ inversible ainsi qu'un vecteur $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur solution et on cherche à résoudre l'équation matricielle:

$$Ax = b ; x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Méthode de Gauss :

On connaît alors un algorithme classique de résolution d'un tel système, le **méthode de Gauss**, en effet, en effectuant des **opérations élémentaires** sur les lignes, on peut échelonner la matrice A et obtenir la solution du système, plus formellement, on peut montrer que pour une certaine famille de matrices élémentaires $(\alpha_i E_i)_{i \in I}$, on a:

$$I_n = \prod_{i \in I} \alpha_i E_i \times A$$

Ou encore en considérant les inverse de ces matrices:

$$A = \prod_{i \in I} \alpha'_i E'_i$$

Cette méthode permet donc d'obtenir la matrice inverse, en effectuant uniquement des produit par des matrices élémentaires, et même plus précisément, elle permet de **factoriser** A en produit de matrices plus simples.

Factorisation LU :

La factorisation LU est alors un raffinement de celle de Gauss, en particulier on peut montrer qu'il existe deux matrices L, U respectivement **triangulaire inférieure et supérieure** telles que:

$$A = LU$$

Et où L n'a que des 1 sur sa diagonale. Cette décomposition est en fait une application partielle de l'algorithme de Gauss, en effet, si on effectue l'algorithme de Gauss en échelonnant la matrice vers le bas, et en s'arrêtant à la dernière ligne, alors on obtient que:

$$U = \tilde{L}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{1,1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-2,1} & l_{n-2,2} & \dots & 1 & 0 \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \dots & l_{n-1,n-1} & 1 \end{pmatrix} A$$

La matrice \tilde{L} ainsi obtenue étant en fait le produit des premières matrices élémentaires de la méthode de Gauss.

Factorisation de Cholesky :

Finalement, on peut montrer qu'il existe une autre décomposition appelée **décomposition de Choleski** dans le cas où A est **symétrique définie positive**, alors il existe une matrice L triangulaire inférieure telle que:

$$A = LL^t$$

Une telle matrice est usuellement obtenue par identification des coefficients, ou informatiquement par l'algorithme qui lui correspond.

XIV — ANALYSE MATRICIELLE III

Dans ce chapitre nous traiterons des méthodes itératives principales pour résoudre des systèmes linéaires. visent à construire une suite (X_k) de vecteurs tels que $(X_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} X$. Pour ce faire, on utilise une variante de **méthode du point fixe**, ie pour résoudre le système $Ax = b$, on cherche à écrire ce système sous la forme:

$$x = F(x) = Bx + c$$

Avec F une fonction affine du vecteur x , usuellement obtenue en décomposant la matrice A . Alors on peut construire une méthode itérative du point fixe, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ par:

$$x_{n+1} = Bx_n + c$$

Alors si cette suite converge, elle converge vers x , et en outre on peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante de convergence est que:

$$\rho(B) < 1$$

Méthode de Jacobi :

On peut alors considérer une première décomposition donnée par:

$$A = L + D + U$$

Alors en manipulant l'expression $Ax = b$ et en inversant uniquement D , on obtient le schéma itératif suivant:

$$x_{n+1} = -D^{-1}(L + U)x_n + D^{-1}b$$

Qui converge donc si et seulement si $\rho(D^{-1}(L + U)) = \rho(A - I_n) < 1$

Méthode de Gauss-Seidel :

On peut alors considérer la même décomposition mais en manipulant l'expression $Ax = b$ différemment et en inversant cette fois $D + E$, on obtient le schéma itératif suivant:

$$x_{n+1} = -(D + L)^{-1}Fx_n + (D + L)^{-1}b$$

Qui converge dans ce cas si et seulement si $\rho((D + L)^{-1}U) < 1$

Méthode de relaxation :

On peut alors considérer la même décomposition mais en ajoutant un paramètre¹ $\omega \in]0; 2[$, et manipulant l'expression $Ax = b$ différemment, on obtient le schéma itératif suivant:

$$x_{n+1} = \left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1} \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}D\right) x_n + \left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1} b$$

Qui converge alors si et seulement si $\rho\left(\left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1}\left(F + \frac{1-\omega}{\omega}D\right)\right) < 1$. Le choix du paramètre est alors non trivial mais permet d'optimiser la vitesse de convergence. En outre si $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.

¹Celui-ci doit nécessairement être dans $]0; 2[$ pour que la méthode converge, mais ce n'est hélas pas suffisant sauf si A est définie positive.

XIV — OPTIMISATION LINÉAIRE

Dans ce chapitre nous traiterons les problèmes **d'optimisation** d'une fonction étant données un ensemble de contraintes.

On considère donc une fonction **objectif** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles, et on appelle alors D **ensemble admissible** et les points de D sont appelés **points admissibles**. En effet l'ensemble D représente alors les contraintes sous lesquelles on veut optimiser la fonction. Très souvent cet ensemble est une partie de \mathbb{R}^n avec des propriétés géométriques utiles comme la convexité, en effet on peut classer ce genre de problèmes (non-exhaustivement) par les catégories suivantes:

- **L'optimisation linéaire**, où la fonction objectif est une forme linéaire et l'ensemble D est caractérisé par des contraintes linéaires.
- **L'optimisation linéaire en nombres entiers**, où la fonction objectif est une forme linéaire et l'ensemble D est caractérisé par des contraintes linéaires mais où les points admissibles doivent être à composantes entières.
- **L'optimisation quadratique**, où la fonction objectif est une forme quadratique et l'ensemble D est caractérisé par des contraintes linéaires.
- **L'optimisation non-linéaire**, où la fonction objectif est une non-linéaire et l'ensemble D n'a pas de forme particulière.

On se concentrera dans cette partie sur les deux premières catégories.

Définition :

On se donne une forme linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, qu'on cherche à maximiser sur un ensemble D défini par un ensemble d'inéquations de la forme:

$$D : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \leq b_m \end{cases}$$

Où les $(a_{i,j}), (b_k)$ sont des coefficients qui définissent les contraintes du problème. On voit alors que les coefficients $a_{i,j}$ définissent une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et que les b_k définissent un vecteur b , on peut donc définir la **canonique** d'un problème d'optimisation linéaire par:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \sup_x \{f(x)\} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Où ici l'inégalité vectorielle $x \leq y$ est à entendre composantes par composantes, ie

$$x \leq y \iff \forall i \leq n ; x_i \leq y_i$$

Exemple: On pose $f(x, y) = 3x + 2y$, alors on peut définir par exemple:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \sup_x \{f(x)\} \\ x + 9y \leq 0 \\ 2x - y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \sup_x \{f(x)\} \\ \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Caractrisation du domaine admissible :

On cherche à caractériser géométriquement le domaine admissible, défini par:

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax \leq b\}$$

Et par les propriétés de l'inégalité vectorielle qu'on a défini, cet ensemble est en fait une intersection (finie) des demi-espaces:

$$D_i := \{x \in \mathbb{R}^n ; (Ax - b)_i \leq 0\}$$

Et c'est donc un **polytôpe convexe**. On cherche donc à optimiser la fonction objectif sur un sous-ensemble convexe de son domaine de définition.

Existences de solutions :

XV — INTRODUCTION