Variétés différentielles - Preuves

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

Elements d'algèbre tensorielle :

L'espaces des tenseurs est un espace vectoriel :

On considère l'espace $\mathscr{T}^p(E)$ l'espace des tenseurs p-covariants, montrons que c'est un sev de $\mathcal{F}(E^p, \mathbb{R})$, on a:

- L'application nulle est bien un tenseur p-covariant.
- Si $T, T' \in \mathscr{T}^p(E)$, alors $T + T' = (v_1, \dots, v_p) \mapsto T(v_1, \dots, v_p) + T'(v_1, \dots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.
- Si $T \in \mathscr{T}^p(E)$, alors $\lambda T = (v_1, \dots, v_p) \mapsto \lambda T(v_1, \dots, v_p)$ qui est bien linéaire en chaque argument.

Le produit tensoriel est bien défini :

On considère:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathscr{T}^p(E) \times \mathscr{T}^q(E) &\longrightarrow \mathscr{T}^{p+q}(E) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

Avec le tenseur $\alpha \otimes \beta$ défini par:

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \alpha(x_1, \dots, x_p)\beta(y_1, \dots, y_q)$$

Alors si $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in E^{p+q}$, par linéarité de chacun des tenseurs, on vérifie bien que $\alpha \otimes \beta$ est bien multilinéaire.

Base et dimension de l'espace des tenseurs :

Si on note $(e_i)_{i \leq n}$ une base de E et $T \in \mathscr{T}^p(E)$, alors on peut montrer que l'on a:

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, x_p) &= T\left(\sum_{1 \leq i_1 \leq n} x_{1,i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{1 \leq i_p \leq n} x_{p,i_p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} x_{1,i_1} \dots x_{p,i_p} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Mais on remarque alors que le produit $x_{1,i_1} \dots x_{p,i_p}$ consiste alors en l'évaluation en $(x_1, \dots, x_p)$ du tenseur:

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

Et donc on obtient:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

En d'autres termes, la famille $(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p})_{i_1, \dots, i_p \in [\![1\ ;\ n]\!]}$ engendre l'espace. Elle est aussi libre car si on considère une famille de scalaires $(\lambda_{i_1, \dots, i_p})$ tels que:

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} = 0 :$$

Alors si on évalue cette forme en $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, on annule tout les termes sauf $\lambda_{i_1, \dots, i_p}$ qui est donc nul. Et en répétant ceci, on trouve que les $(\lambda_{i_1, \dots, i_p})$ sont tous nuls. Cette famille est donc une base et la dimension de l'espace est alors p^n.

Propriété de signature d'un tenseur antisymétrique :

On se donne une permutation $\sigma \in S_p$ et un tenseur antisymétrique $T \in \mathscr{T}^p(E)$, montrons que:

$$T_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon(\sigma)T(x_1, \ldots, x_n)$$

Alors on peut décomposer $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k$ en k transpositions et on a alors:

$$T_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = T_{\tau_1 \ldots \tau_k}(x_1, \ldots, x_n) = T_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots x_n)$$

Où la dernière égalité pose que τ_k permute x_i, x_j. Alors on trouve par antisymétrie:

$$T_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots x_n) = -T_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}}(x_1, \ldots, x_n)$$

Alors par récurrence, on répète le processus pour obtenir:

$$T_\sigma = (-1)^k T$$

Où k est le nombre de transposition dans la décomposition de σ et ce coefficient est exactement $\varepsilon(\sigma)$.

L'antisymétrisation d'un tenseur est bien antisymétrique :

On se donne un tenseur $T \in \mathscr{T}^p(E)$, montrons que le tenseur suivant est bien antisymétrique:

$$\mathrm{Asym}(T)(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$$

On a que si on permute x_i, x_j avec $i \leq j$, on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Asym}(T)(x_1, \ldots x_j, \ldots, x_i \ldots, x_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j)}, \ldots, x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \\
&= -\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \\
&= -T(x_1, \ldots x_i, \ldots, x_j \ldots, x_p)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Asym}(T)$ est bien antisymétrique.

Base et dimension de l'espace des tenseurs antisymétriques :

On utilise la même approche que pour l'espace des tenseurs, soit T un p-tenseur antisymétrique, alors par multilinéarité:

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

Mais T est antisymétrique, donc les indices des termes non nuls sont différents, ie on somme en fait sur $I = \left\{(i_1, \dots, i_p) \; ; \; \forall p, q \; i_p \neq i_q\right\}$. Aussi par un raisonnement combinatoire, il est équivalent de sommer sur des indices distincts et de sommer sur des indices strictement croissants puis sur toutes les permutations de ceux ci, ie on a:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} T(e_{\sigma(i_1)}, \dots, e_{\sigma(i_p)}) e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_p)} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) p! \mathrm{Asym}(e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_p)}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}
\end{aligned}$$

Donc la famille est génératrices des tenseurs antisymétriques. En outre elle est libre par un argument similaire à celui des tenseurs simples. En particulier, un tel tenseur est donc uniquement déterminé par son image sur toutes les vecteurs de la base indéxés par une suite strictement croissante, et il y a $\binom{n}{p}$ telles suites, c'est donc la dimension de $\Lambda^p E^*$.

Propriétés algébriques du produit extérieur :

- **Bilinéarité et alternance:**
- **Déterminant:** Soit $\mathcal{B} = (e^i)_{i \leq n}$ une base duale de E ainsi), alors on a par définition:

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(n)}$$

  Donc si on considère $(x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs de E, alors on évalue:

$$\begin{aligned}
e^1 \wedge \dots \wedge e^n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(n)}(x_1, \dots, x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) e^{\sigma(1)}(x_1) \dots e^{\sigma(n)}(x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{1,\sigma(n)} \\
&= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

  Attention ici la notation $x_{i,j}$ signifie bien la j-ième coordonée de x_i dans la base (non canonique a priori) des (e_i).

Formes différentielles dans $\mathbb{R}^n$:

Linéarité de la dérivée extérieure :

On se donne ω, η deux une k-formes sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que λ un scalaire, alors on a:

$$d(\omega + \lambda\eta) = d\left(\sum_I (f_I + \lambda g_I)(x)dx^I\right) = \sum_I d(f_I + \lambda g_I)(x) \wedge dx^I$$

Où le d du dernier membre est simplement la différentielle usuelle, qui est linéaire d'aprés la théorie du calcul différentiel élémentaire, ce qui permet de conclure.

Formule de Leibniz :

On se donne ω, η respectivement une k-forme et une p-forme sur $\mathbb{R}^n$ alors on a:

$$\begin{cases} \omega = \sum_I \omega_I(x)dx^I \\ \eta = \sum_J \eta_J(x)dx^J \end{cases}$$

On a alors:

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \sum_{I,J} (\omega_I \eta_J)(p)dx^I \wedge dx^J$$

Appliquons la dérivée extérieure:

$$d(\omega \wedge \eta)(p) = \sum_{I,J} d(\omega_I \eta_J)(p) \wedge dx^I \wedge dx^J$$

Les fonctions différentiées sont scalaires, donc on applique la règle du produit:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta)(p) &= \sum_{I,J} \big(d\omega_I(p)\eta_J(p) + \omega_I(p)d\eta_J(p)\big) \wedge dx^I \wedge dx^J && \text{(Par définition.)} \\ &= \sum_{I,J} d\omega_I(p)\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J + \sum_{I,J} \omega_I(p)d\eta_J(p) \wedge dx^I \wedge dx^J && \text{(Distributivité du produit extérieur.)} \\ &= \sum_{I,J} d\omega_I(p) \wedge dx^I \wedge \eta_J(p)dx^J + \sum_{I,J} d\eta^J(p) \wedge \omega^I(p)dx^I \wedge dx^J && \text{(Bilinéarité du produit extérieur.)} \\ &= d(\omega \wedge \eta)(p) + (-1)^k \sum_{I,J} \omega_I(p)dx^I \wedge d\eta_J(p) \wedge dx^J && (\star) \\ &= (d\omega \wedge \eta)(p) + ((-1)^k \omega \wedge d\eta)(p) \end{aligned}$$

Où pour trouver $(\star)$, on identifie le premier terme, et on utilise le fait que $\eta_J(p), dx_I$ sont respectivement une $1-$ forme et une k-forme et il y a donc k échanges à faire et donc k application de l'antisymétrie.

Propriété fondamentale de la dérivée extérieure :

On considère une k forme $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$, alors on a:

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I = \sum_I \sum_{i \leq n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I$$

Et donc si on dérive à nouveau on obtient:

$$dd\omega = \sum_I \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I$$

On peut alors montrer que pour I fixé, on a:

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i = 0$$

En effet si $i = j$ c'est évident, mais si $i \neq j$, on a que:

$$\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i + \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} dx^i \wedge dx^j = 0$$

En effet, ω_I est une fonction lisse donc on applique Schwartz et les dérivées croisés sont égales, mais les produit extérieurs $dx^i \wedge dx^j$ sont opposés. Ceci nous permet d'appairer les termes en n sommes nulles (il y a $2n$) termes dans la somme).

Variétés :

La différentiabilité est bien définie :

Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, il s'agit de montrer que pour $p \in M$ et deux cartes $(U,\phi),(V,\psi)$ qui le contiennent, alors:

$$f \circ \phi \text{ différentiable } \iff f \circ \psi \text{ différentiable}$$

Alors on a:

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ c_{\psi,\phi}$$

Où c est l'application de changement de carte associée. On en déduit donc que si $f \circ \psi^{-1}$ est différentiable alors $f \circ \phi^{-1}$. De manière analogue si $f : M \longrightarrow N$ est différentiable pour deux cartes $(U,\phi),(V,\psi)$ de $p, f(p)$, alors par composition, on en déduis de même.

Espaces tangents dans $\mathbb{R}^n$:

Propriété des dérivations :

Si f est une fonction lisse constante égale à $c \in \mathbb{R}$, et D une dérivation au point $p \in \mathbb{R}^n$, alors $Df = 0$, en effet on a:

$$\begin{aligned}
&D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g) \iff \\
&D(cg) = D(f)g(p) + cD(g) \iff && \text{(Car } fg = cg \text{ en tant que fonction.)} \\
&cD(g) = D(f)g(p) + cD(g) && \text{(Linéarité de } D.\text{)}
\end{aligned}$$

On conclut de la dernière égalité que $D(f)g(p) = 0$ et il suffit alors de choisir g de telle sorte qu'elle ne s'anulle pas en p pour conclure.

$T\mathbb{R}^n_p$ est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$:

On considère l'application suivante:

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathbb{R}^n_p &\longrightarrow T\mathbb{R}^n_p \\
v &\longmapsto \sum_{i \leq n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p
\end{aligned}$$

<u>Linéarité:</u> Découle directement de la définition ..
<u>Injectivité:</u> Supposons que $v \in \mathbb{R}^n_p$ soit tel que:

$$D = \Phi(v) = 0$$

Alors pour toute fonction lisse $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$, on a $Df = 0$. Alors en particulier pour les fonctions coordonées $(x_i)_{i \leq n}$, on a:

$$\sum_{j \leq n} v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\bigg|_p = v_i = 0$$

Donc toutes les composantes de v sont nulles et $v = 0$.
<u>Surjectivité:</u> **A finir !**

Espaces tangents dans M :

Propriété de la différentielle :

On considère $f : M \longrightarrow N$ lisse et un point $p \in M$, et on considère l'application suivante:

$$df_p : D \in TM_p \longmapsto D(\cdot \circ f) \in TN_{f(p)}$$

- **Bien définie:** Si D est une dérivation en p, alors $g \circ f$ est bien lisse et on a:

$$\begin{aligned}
df_p(D)(gh) &= D(gh \circ f) \\
&= D((g \circ f)(h \circ f)) \\
&= D(g \circ f)(h \circ f)(p) + (g \circ f)(p)D(h \circ f) && \text{(Car } D \text{ est une dérivation en } p.\text{)} \\
&= df_p(g)h(f(p)) + g(f(p))df_p(h)
\end{aligned}$$

Et donc $df_p(D)$ est bien une dérivation en $f(p)$.

- **Linéarité:** Découle directement de la définition.
- **Règle de la chaîne:** Soit $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow L$ deux applications lisses entre des variétés. Soit $p \in M$, alors par définition:

$$d(g \circ f)_p : D \in TM_p \longmapsto D(\cdot \circ g \circ f)) \in TL_{g(f(p))}$$

Il s'agit de montrer que cette fonction est égale à $dg_{f(p)} \circ df_p$, les domaines de définition coincident bien, soit D une dérivation de TM_p, alors on a:

$$dg_{f(p)} \circ df_p(D) = dg_{f(p)}(df_p(D)) = dg_{f(p)}(D(\cdot \circ f)) = D(\cdot \circ g \circ f)$$

On a donc égalité des images et donc égalité des fonctions.

Propriété de structure :

Finalement montrons que si $f : M \longrightarrow N$ est un **difféomorphisme**, alors df_p en un **isomorphisme** en tout point. On utilisera le lemme (presque évident) suivant:

$$d(Id_M)_p = Id_{TM_p}$$

Alors si f est un difféormorphisme, en tout point p, on a:

$$\begin{cases} d(f^{-1} \circ f)_p = df^{-1}_{f(p)} \circ df_p = Id_{TM_p} \\ d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = df_p \circ df^{-1}_{f(p)} = Id_{TN_{f(p)}} \end{cases}$$

Finalement, ceci montre que df_p est bijective d'inverse $df^{-1}_{f(p)}$ et linéaire par définition, on a donc bien:

$$TM_p \cong TN_{f(p)}$$

On en déduit directement en utilisant que toute carte ϕ est un difféomorphisme et donc qu'en tout point d'une variété on a:

$$TM_p \cong T\mathbb{R}^n_{\phi(p)} \cong \mathbb{R}^n$$

Le fibré tangent est un variété de dimension $2n$:

A finir !