Variétés différentielles

Cavazzoni Christophe

2024-2025 - Institut Champollion

Table des matières

Chapter 1

Introduction

Dans ce projet d'étude, on cherche à généraliser le calcul différentiel usuel dans $\mathbb{R}^n$ sur des objets plus généraux, espaces courbes, qui ne seront pas des espaces vectoriels simples. En particulier, on cherche à définir le concept de **variété différentielle**, qui est la formalisation mathématique de ce types d'espaces.

Le projet suivra la progression suivante:

- Tout d'abord nous définirons le concept de **variété topologique** puis **différentielle** ainsi leurs propriétés, une partie spécifique sera dédiée à la construction d'espace courbes qui possèdent un "bord".
- Nous préseterons ensuite quelques exemples de tels objets.
- Par la suite nous chercherons à construire une **structure différentielle** sur ces objets, ce qui reviendra à définir la notion **d'espace tangent** en un point de l'objet et à étudier ses propriétés.
- Ensuite, nous pourrons définir le concept de **forme différentielle** sur un variété qui sera l'objet fondamental qui nous servivra à généraliser la théorie de l'intégration.
- Enfin, aprés avoir définit l'intégrale de tels objets, on pourra alors montrer le **théorème de Stokes**, généralisation du théorème fondamental de l'analyse à toute variété à bord orientée et compacte.

Chapter 2

Variétés

Dans toute la suite, on considère un espace topologique séparé M.

2.1 Cartes locales

On apelle **carte locale** de M un couple (U, ϕ) tel que:

- U soit un **ouvert** de M.
- ϕ soit un **homéomorphisme** de $U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ pour un n convenable.

On dira alors que l'application ϕ^{-1} paramétrise U, et que les **coordonées locales** des points de U sont leurs images par ϕ.

2.2 Compatibilité des cartes

On considère deux cartes $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ deux cartes locales qui s'intersectent, alors on dit que ces deux cartes sont **compatibles** si et seulement si l'application de changement de carte suivante est un **homéomorphisme**:

$$\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

L'application ϕ_{ij} est apellée application de changement de cartes, on peut la représenter comme ci-dessous:

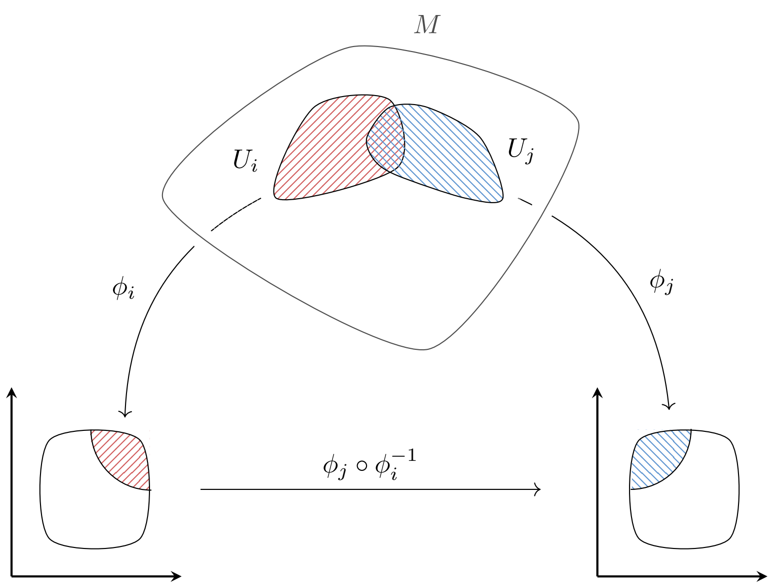

Figure 2.1: Exemple de deux cartes

2.3 Atlas et variétés

On apelle alors **atlas** de M une famille $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de cartes locales qui recouvrent M et qui sont compatibles. En outre on définit:

- Si ϕ_{ij} est un homéomorphisme, on dit que l'atlas est topologique et que M est une **variété topologique**.
- Si ϕ_{ij} est différentiable, on dit que l'atlas est différentiel et que M est une **variété différentielle**.
- Si ϕ_{ij} est de classe $\mathcal{C}^k$, on dit que l'atlas est de classe $\mathcal{C}^k$ et que M est une variété de classe $\mathcal{C}^k$.

Dans le cas particulier $k = \infty$, on dira usuellement que l'atlas et la variété sont **lisses**.

2.4 Topologie d'une variété

De manière générale, on définit les propriétés topologiques d'une variété par ses propriétés en tant qu'espace topologique, donc naturellement:

- On dira alors que M est **compacte** si l'espace topologique sous-jaçent l'est.
- On dira alors que M est **connexe** si l'espace topologique sous-jaçent l'est.
- On peut donc parler d'intérieur, d'adhérence d'une partie de M, etc ...
- ...

Chapter 3

Variétés à bord

On veut alors pouvoir relaxer cette définition pour prendre en compte une catégorie plus large d'espaces topologiques, en particulier si on considère le disque ouvert D^1, c'est trivialement[1] une variété, mais le disque fermé $\text{adh}(D^1)$ ne l'est pas. La différence fondamentale étant qu'un ouvert qui contient un point du bord du disque fermé n'est pas homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ Mais à un ouvert du demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

3.1 Bord du demi-espace $\mathbb{R}^n_+$

On note $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_n \geq 0\}$. Cet espace sera notre prototype de partie avec un bord, en effet si on considère cet espace en tant que partie de $\mathbb{R}^n$, son bord est bien défini:

$$\partial\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^n_+ \backslash \text{int}(\mathbb{R}^n_+) = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_n = 0\}$$

Par exemple dans le cas de $\mathbb{R}^2_+$, on a:

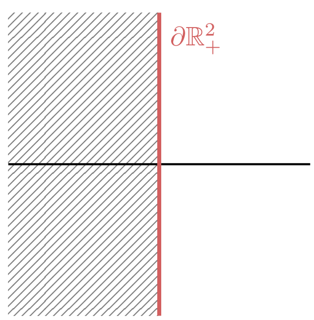

Figure 3.1: Le demi plan $\mathbb{R}^2_+$ et son bord

3.2 Variété à bord

On donne élargit alors notre définition d'une variété, qui sera notre définition générale pour la suite. On se donne une variété M muni de son atlas $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ et on rajoute la contrainte suivante sur les cartes:

$$\forall i \in I \; ; \; \phi_i : U_i \longmapsto V_i \text{ avec } V_i \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^n_+$$

Ceci nous permet de définir le bord d'une variété par:

$$\partial M := \left\{x \in M \; ; \; \forall (U_i, \phi_i) \in \mathcal{A} \; ; \; x \in U_i \implies \phi_i(x) \in \partial\mathbb{R}^n_+\right\}$$

Alors on peut montrer que c'est bien une généralisation du concept de variété, en effet si une variété définie de la sorte n'a pas de bords, ie si $\partial M = \emptyset$, alors on peut construire un atlas au sens du chapitre 2.

En particulier, on peut remarquer que $\mathbb{R}^n_+$ lui-même est bien une variété à bord ce qui est bien cohérent ...

[1]Comme graphe d'une fonction constante définie sur un ouvert.

Chapter 4

Exemples de variétés

Dans ce chapitre, on présente quelques exemples simples de variétés différentielles, leurs atlas et quelques unes de leurs propriétés.

4.1 Le cercle S^1

4.2 La sphere S^2

4.3 Plan projectif $\mathbb{R}P^2$?

Chapter 5

Espaces tangents

On aimerait alors pouvoir généraliser la notion **d'espace tangent** à une courbe, surface ... lisse de $\mathbb{R}^n$ à des variétés abstraites comme définies dans les deux premiers chapitres. Pour ce faire, il est fondamental de comprendre que les variétés ainsi définies ne sont **pas** des objets de $\mathbb{R}^k$ et donc on doit définir cette notion purement intrinséquement, via l'atlas notamment.

5.1 Courbe sur une variété

On définit la notion de **courbe paramétrée** sur une variété M par la donnée d'une application $\gamma : I \longmapsto M$ par exemple si on considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \backslash N$ paramétrée par l'inverse de la projection stéréographique qu'on notera $S(u, v)$, alors l'application suivante est une courbe sur la sphère:

$$\gamma : t \in]0\,;\,1[\longmapsto S(2t^3, t^2)$$

5.2 Vecteur tangent

On se donne une courbe $\gamma : I \to M$ dérivable et un réel $t_0 \in I$, alors on veut définir le **vecteur tangent** à la courbe γ au point $x = \gamma(t_0)$, pour ceci on utilise les cartes, en effet on dire que $u \in \mathbb{R}^n$ est tangent à la courbe en x si et seulement si:

$$\forall (U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}\,;\; x \in U_i \implies u \sim (\phi_i \circ \gamma)'(t_0)$$

Le problème étant que ceci dépends de la carte car si le vecteur tangent à la courbe est unique, sa **représentation** (ou encore ses **coordonées**) dans les cartes ne l'est pas (elle varie avec $d\phi_{ij}$) donc ça marche pas ... Impossible de définir uniquement le vecteur tangent à une courbe ?!

5.3 Courbes tangentes

On fixe un point $x \in M$ et on veut maintenant définir un espace vectoriel associé à ce point, qui correspondrait aux vecteurs tangents à la variété en ce point. Pour ceci, on définit une relation d'équivalence sur les courbes sur M, en particulier, pour deux courbes paramétrées γ_1, γ_2 sur M telles que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x$. Alors on définit:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \forall (U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}\,;\; x \in U_i \implies (\phi_i \circ \gamma_1)'(t_0) = (\phi_i \circ \gamma_2)'(t_0)$$

On remarque tout d'abord que les hypothèse peuvent être affaiblies, en effet si la propriété est vraie pour **une carte** (U_i, ϕ_i), alors par changement de carte on a que: ?

On obtient donc la définition suivante:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \exists (U, \phi) \in \mathcal{A}\,;\; x \in U \text{ et } (\phi \circ \gamma_1)'(t_0) = (\phi \circ \gamma_2)'(t_0)$$

C'est bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes de M qui passent par x, on appelle une classe d'équivalence pour cette relation **vecteur tangent** à la courbe en x et l'ensemble quotient est donc **l'ensemble des vecteurs tangents** ou plus formellement **l'espace tangent** au point x définit par:

$$TM_x := \big\{ [\gamma] \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})\,;\; \big\}$$

Il faut maintenant montrer:

- Que c'est bien un e.v (sous-ev ? Le neutre ?) de dimension n.
- Définir la différentielle d'une application de $M \longmapsto N$.
- Montrer que celle ci est bien définie sur les espaces tangents.
- Propriétés algèbriques, règle de la chaine etc...

Chapter 6

Algèbre extérieure dans $\mathbb{R}^n$

Chapter 7

Algèbre extérieure sur une variété

Chapter 8

Dérivée extérieure

Chapter 9

Exactitude & Fermeture

Chapter 10

Intégration

Chapter 11

Théorème de Stokes

Chapter 12

Applications

Chapter 13

Conclusion