Homotopie

Dans toute la suite, on considèrera X, Y trois espaces topologiques quelconques, on cherche alors classifier les invariants algébriques des espaces topologiques. Mais aussi on cherchera à comprendre le comportement topologique des applications continues entre ces espaces, c'est ceci que nous appelerons **homotopie** et qui sera la pierre de voute de la topologie algébrique élémentaire car elle permettra de définir des **groupes** "classifiants" sur les espaces topologiques.

Homotopie:

On considère deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$, on considère alors les applications de la forme:

$$\begin{aligned} H : [0\,;\,1] &\longrightarrow \mathscr{F}(X, Y) \\ t &\longmapsto H(t) \end{aligned}$$

Ces applications sont clairement des chemins dans l'espace fonctionnel $\mathscr{F}(X, Y)$, on veut alors que la contrainte suivante soit vérifiée:

$$\begin{cases} H(0) & = f \\ H(1) & = g \end{cases}$$

En d'autres termes, ce chemin **relie** f et g. Mais on veut aussi que cette application soit **continue en ses deux variables**, ie que l'application **décurryfiée** suivant soit continue:

$$\begin{aligned} H : [0\,;\,1] \times X &\longrightarrow Y \\ (t, x) &\longmapsto H(t)(x) = H(t, x) \end{aligned}$$

On dira alors que H est une **homotopie** entre f, g et que ces deux fonctions sont homotopes. Cela signifera alors moralement qu'on peut passer d'une de ses fonctions à l'autre continument par un chemin fonctionnel. On verra par la suite des exemples d'applications homotopes facilement illustrables.

Homotopie des lacets:

On définit alors un cas particulier d'homotopie trés important, il s'agit de l'homotopie des lacets de X de point base $x_0 \in X$.

Homologie Simpliciale

Dans ce chapitre nous cherchons à nouveau à trouver des invariants algébriques sur les espaces topologiques, mais on se propose de construire une théorie plus simple que celle de l'homotopie, en particulier, on sait que le n-ième groupe d'homotopie encapsule le nombre de "trous" de dimensions n dans un espace topologique, et on va définir un nouveau groupe appelé **groupe d'homologie** (simpliciale), la présentation devra définit beaucoup de nouveaux concepts, pour donner un aperçu:

- Nous devrons définir le concept de **simplexe standard** qui sera l'objet géométrique de base, une enveloppe convexe primitive.
- Nous définirons ensuite le concept de **face** d'un simplexe qui sera utile pour la suite.
- Nous définirons ensuite le premier concept fondamental, celui de **complexe simplicial** qui est une structure que l'on donnera à notre espace topologique, d'une certaine manière on le "triangule".
- Nous définirons enfin le deuxième concept fondamental, celui de **chaine** qui nous permet d'effectuer des opérations sur le complexe simplicial.
- Nous définirons finalement le concept final qui menera au groupe d'homologie, l'opérateur de **bord** qui à une chaîne de dimension n nous donner une chaîne de dimension $n-1$, son bord.

LET'S GO MTHERFUCKER

Simplexes:

On appelle **n-simplexe**, l'ensemble de $\mathbb{R}^n$ suivant défini par:

$$\left\{\sum \alpha_i v_i \ ; \ (v_i) \in \mathbb{R}^n, \sum \alpha_i = 1\right\}$$

En fait, ce qu'on considère ici, c'est l'enveloppe convexe de n points qu'on notera , c'est en fait une généralisation de l'idée de triangle à toutes dimensions, la surface convexe la plus simple, en particulier on a:

- Un 0-simplexe est un point.
- Un 1-simplexe est une droite.
- Un 2-simplexe est un triangle.
- Un 3-simplexe est une pyramide.

ont On peut maintenant définir le concept de **simplexe standard** qui est simplement un simplexe générique défini par:

$$\Delta^n := \left\{(v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \sum t_i = 1, t_i \geq 0\right\}$$

Cela correspond à placer tout les simplexes dans le quadrant positif, à l'origine. Il sont universels et donc par la suite quand on parlera de simplexe, on considérera implicitement un simplexe standard.

Faces d'un simplexe:

On se donne un n-simplexe Δ^n et on cherche à définir le concept d'une **face** du simplexe, et en fait ce sont eux aussi des simplexes de dimension inférieure, on se donne un nombre $m \leq n$, alors une m-face du simplexe Δ^n est n'importe quel simplexe obtenu en "retirant" $n-m$ points, ie on a A PRECISER:

$$F_i = \langle v_1, \dots v_{i_1}, \dots, vi_{n-m} \dots, v_n\rangle$$

C'est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points initiaux privés de $n-m$ points, c'est bien un simplexe de dimension m par construction. Par exemple si on considère $\Delta^2 = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, alors on a troise 1-faces:

$$\begin{cases} F_1 = \langle v_2, v_3\rangle \\ F_2 = \langle v_1, v_3\rangle \\ F_3 = \langle v_1, v_2\rangle \end{cases}$$

Complexe simplicial:

Soit X un espace topologique, une **structure de complexe simplicial** sur X est une collection d'application continues de la forme:

$$\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X$$

Ces applications doivent vérifier trois propriétés:

- $\sigma_\alpha|_{\text{int}(\Delta^n)}$ est **injective** et tout point $x \in X$ appartient à un unique $\text{Im}(\sigma_\alpha|_{\text{int}(\Delta^n)})$
- Toute restriction de σ_α sur une **face** de Δ^n est une autre σ_β
- Pour toute partie $A \subseteq X$, A est ouvert ssi toutes $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ est ouvert.

Interprétation ....

Chaînes:

On se donne maintenant $(X, (\sigma_\alpha)$ un espace topologique muni d'une structure de complexe simplicial, alors on définit le groupe des **k-chaînes** comme l'ensemble des sommes formelles de **k-simplexes**,ie on a:

$$C_k(X) := \left\{ \sum_i m_i \sigma_i \ ; \ m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

En fait, on peut montrer facilement que ce sont des **groupes abéliens**, c'est sur ces groupes que l'on définira **l'opérateur de bord** dans la section suivante.

Opérateur de bord:

On note un n-simplexe σ de X par $(\sigma[0], \dots, \sigma[n])$, on peut alors définir enfin l'opérateur suivant sur une k-chaîne:

$$\partial_n : \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n-1}$$
$$\partial_n(\sigma) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma[0], \dots, \sigma[i-1], \sigma[i+1], \dots, \sigma[n])$$

Moralement, c'est **une somme alternée de tout les bords du simplexe initial**. En particulier l'alternance nous donne une propriété algébrique profonde et fondamentale pour définir l'homologie:

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

Groupes d'homologies:

Finalement, on a d'aprés les propriétés de l'opérateur de bord que:

$$\text{Im}\partial_{n+1} \subseteq \text{Ker}\partial_n$$

On définit alors le **i-ème groupe d'homologie de X** par:

$$H_i^\Delta = \text{Ker}\partial_n / \text{Im}\partial_{n+1}$$

Ce sont moralement les simplexes qui n'ont pas de bords et qui ne sont pas le bord d'un simplexe plus grand.