Ordre

Filtres & Ultrafiltres:

Soit E un ensemble on appelle **filtre** sur E tout ensemble de parties $\mathscr{F}$ tel que:

- **Non-trivialité :** Il ne contient pas l'ensemble vide.
- **Hérédité :** Si $A \in \mathscr{F}$, alors toute partie qui contient A est dans $\mathscr{F}$.
- **Stabilité par intersection finie**

Par exemple considérons l'ensemble $E = \{1,2,3,4\}$, alors on pose $\mathscr{F} = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}$ et on vérifie facilement que c'est un **filtre** sur E, et on appelle alors E espace filtré.

On peut définir alors le concept de **filtre engendré** par des parties, c'est le plus petit filtre qui contient ces parties, par exemple le filtre précédent est le filtre engendré par $\{1,2\}$.

On définit alors aussi le concept **d'ultrafiltre**, un ultrafiltre étant un filtre maximal pour l'inclusion, ie un filtre qui n'est pas contenu dans un filtre plus grand.

Limite d'un filtre:

Soit x un élément d'un espace filtré $(X, \mathscr{F})$ alors on dira que x est (une) **limite du filtre** et on dira que le filtre **converge vers** x si et seulement si $\mathscr{F}$ contient le filtre engendré par les voisinages de x.

Equivalence des limites:

On peut alors montrer que le concept de filtre généralise le concept de limite d'une suite ou d'une fonction. Soit (u_n) une suite à valeur dans un espace topologique X, on définit alors le **filtre de Fréchet** par:

$$\mathscr{F}_{Frechet} := \{A \subseteq \mathbb{N} \,;\; A^c \text{ est fini } \}$$

Alors la limite du filtre de Frechet est exactement la limite classique de cette suite.

En particulier se donner un filtre sur un ensemble est moralement équivalent à se donner une "définition de limite" sur cet ensemble.