Modélisation

Systêmes périodiques et pseudo-périodiques

Cavazzoni Christophe

27 décembre 2024

Table des matières

Introduction

Introduction

- On appelle **système dynamique continu** un ensemble d'éléments qui intéragissent entre eux et dont l'évolution dans le temps est décrite par une loi continue.
- On appelle **systèmes périodiques** un système dynamique tel qu'il évolue de part et d'autres d'un point d'équilibre donné.
- On appelle **systèmes pseudo-périodiques** un système dynamique tel qu'il évolue de part et d'autres d'un point d'équilibre donné mais dont **l'amplitude décroît** avec le temps.

Introduction

Nous étudiront principalement 2 cas de sytèmes périodiques :

- Le cas du **système masse-ressort**.
- Le cas du **pendule simple non-linéaire**.

Les systèmes que l'on veut modéliser sont des systèmes basées sur les lois de la physique, on utilisera :

- Le **principe fondamental de la dynamique** qui nous permettra de déterminer l'accélération de l'objet.
- Certains objets on des propriétés particulières qui demanderont d'autres concepts physiques (ressorts notamment).

Système masse-ressort

Modélisation

Voici un schéma illustrant la situation **à l'équilibre** :

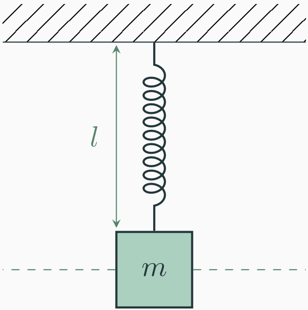


Figure 1 : Schéma de la situation

Paramètres

On peut tout d'abord identifier les **paramétres du modèle** :

- La masse de l'objet.
- La longeur du ressort.
- La force de gravité.

Paramètre spécifique

Aussi, on peut remarque que si quand la masse est à l'équilibre et si on note l_0 la longueur du ressort à vide, alors la force de gravité est proportionelle à l'élongation du ressort, ie on a :

$$mg = k(l - l_0)$$

On appelle alors k la **constante de raideur** du ressort. Cette constante sera un autre paramêtre de notre modèle.

Bilan des forces

On effectue le bilan des forces :

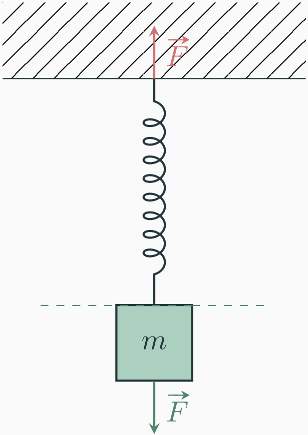


Figure 2 : Bilan des forces

la force qu'exercerce le ressort dans la direction de l'équilibre est donc linéairement proportionelle à la distance avec l'équilibre, et donc d'aprés le **principe fondamental de la dynamique**, ie on a :

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m} \sum \vec{F}(t)$$

Et donc l'équation du mouvement est donnée par :

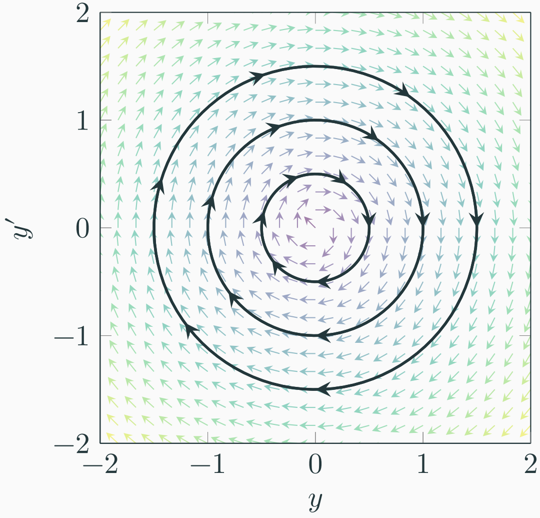
$$\boxed{y''(t) = -\frac{k}{m} y(t)}$$

Résolution

L'équation précédente et facilement résoluble, en effet c'est une equation linéaire et on peut remarquer facilement que les fonctions solutions sont de la forme :

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \; ; \; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Portraits de phase non-amorti

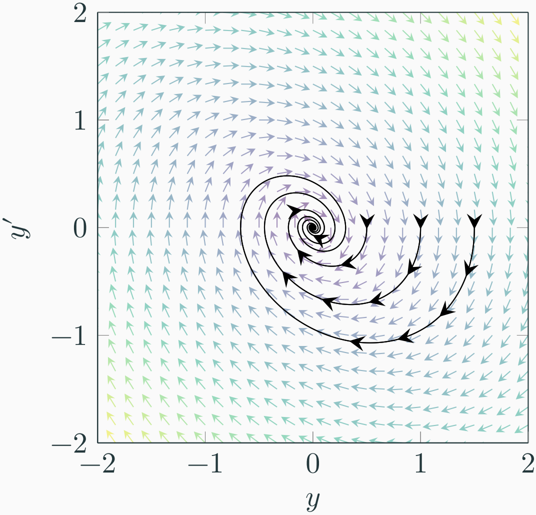


Ajout d'un terme d'amortissement

On essaie maintenant de rendre le modèle plus réaliste en ajoutant la contribution des frottements de l'air. Pour $\lambda > 0$ un coefficient de frottements, on ajoute la contrainte **linéaire** suivante :

$$y''(t) = -\frac{k}{m}y(t) - \lambda y'(t)$$

Portrait de phase amorti



Pendule simple

Voici un schéma qui illustre la situation **à l'équilibre** :

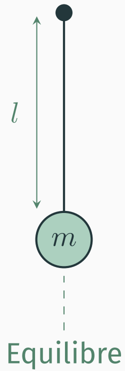


Figure 3 : Schéma de la situation

Paramètres

On peut tout d'abord identifier les **paramétres du modèle** :

- La masse de l'objet.
- La longeur du ressort.
- La constante de gravité.

Bilan des forces

On effectue le bilan des forces :

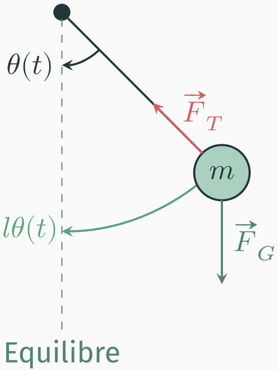


Figure 4 : Bilan des forces

Mise en équation

D'aprés le **principe fondamental de la dynamique**, on a l'accélaration angulaire donnée par :

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m} \sum \vec{F}(t)$$

Et donc finalement en utilisant des relations trigonométriques, la composante d'acceleration dans le sens de la course du pendule est donnée par :

$$\boxed{\theta''(t) = -\frac{g}{l}\sin(\theta)}$$

Résolution impossible

Malheureusement, la résolution analytique de ce problême est **trés complexe** et est impossible pour nous. On se contente donc d'une **étude qualitative** et de la **résolution numérique** du problème.

Portraits de phase non-amorti

Ajout d'un terme d'amortissement

On essaie maintenant de rendre le modèle plus réaliste en ajoutant la contribution des frottements de l'air. Pour $\lambda > 0$ un coefficient de frottements, on ajoute la contrainte **linéaire** suivante :

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \lambda\theta'(t)$$

Portraits de phase amorti