

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный технический университет»

А.Н. Паршаков

ПРИНЦИПЫ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

Часть 2. Электромагнетизм

Допущено Научно-методическим советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по техническим направлениям подготовки и специальностям

Издательство
Пермского государственного технического университета
2010

УДК 53(076.5)

ББК 22.3 я73

П18

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор *Г.Ф. Путин*
(Пермский государственный университет);

доктор техн. наук, профессор, член-корр. РАЕН *А.И. Цаплин*
(Пермский государственный технический университет)

Паршаков, А.Н.

П18 Принципы и практика решения задач по общей физике. Ч. 2: Электромагнетизм: учеб. пособие / А.Н. Паршаков. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 313 с.

ISBN 978-5-398-00-388-8

Рассмотрены разделы электромагнетизма: электростатика, электрический ток, магнетизм и нестационарные задачи электромагнетизма (электромагнитная индукция, электрические колебания и движение заряженных частиц в электромагнитных полях).

Предназначено для студентов всех специальностей технических вузов, преподавателей кафедр общей физики и для учащихся классов физико-математического профиля школ и лицеев.

УДК 53(076.5)

ББК 22.3 я73

ISBN 978-5-398-00-388-8 © ГОУ ВПО

«Пермский государственный
технический университет», 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| 1. Электростатика | 4 |
| 1.1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля..... | 4 |
| 1.2. Теорема Гаусса | 26 |
| 1.3. Потенциал. Проводники в электрическом поле..... | 47 |
| 1.4. Электрическое поле в диэлектриках..... | 74 |
| 1.5. Конденсаторы | 100 |
| 1.6. Энергия электрического поля..... | 117 |
| 2. Электрический ток..... | 140 |
| 2.1. Закон Ома..... | 140 |
| 2.2. Мощность тока. Закон Джоуля–Ленца | 163 |
| 3. Магнетизм | 178 |
| 3.1. Индукция магнитного поля | 178 |
| 3.2. Силы в магнитном поле | 206 |
| 3.3. Магнитное поле в веществе. Сверхпроводники | 226 |
| 4. Нестационарные задачи электромагнетизма..... | 249 |
| 4.1. Электромагнитная индукция | 249 |
| 4.2. Электрические колебания..... | 270 |
| 4.3. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях..... | 291 |
| Список литературы..... | 312 |

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1.1. Закон Кулона.

Напряженность электрического поля

Опыт показывает, что взаимодействие неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии r , подчиняется закону Кулона:

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}.$$

Здесь F – модуль силы взаимодействия, одинаковый для обоих зарядов; k – коэффициент пропорциональности, в системе единиц СИ принимают

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф},$$

где ϵ_0 называют электрической постоянной, $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ (Ф – единица емкости – фарада).

Напряженность электрического поля точечного заряда в точке, заданной радиус-вектором \vec{r} , рассчитывается по формуле

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

По существу последняя формула выражает не что иное, как закон Кулона, но в «полевой» форме. Из последнего выражения следует так называемая теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Другой опытный факт, кроме закона Кулона, заключается в том, что напряженность поля системы точечных непод-

вижных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

Для упрощения математических расчетов бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды имеют дискретную структуру, и считать, что они «размазаны» в пространстве с некоторой плотностью. При переходе к непрерывному распределению вводится понятие плотности зарядов – объемной ($\rho = dq/dV$), поверхностной ($\sigma = dq/dS$) и линейной ($\lambda = dq/dx$). С учетом понятия плотности распределения зарядов напряженность электрического поля, например для объемно заряженного тела, можно рассчитать как

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \vec{r} dV}{r^3},$$

где интегрирование проводится по всему пространству, в котором плотность ρ отлична от нуля.

В общем случае расчет напряженности электрического поля сопряжен со значительными техническими трудностями (правда, не принципиального характера). Связано это с тем, что для нахождения вектора \vec{E} надо вычислить по существу три интеграла от проекций вектора \vec{E} . И только в тех случаях, когда система зарядов обладает той или иной симметрией, задача, как правило, значительно облегчается (см., например, часть 1*, подразд. 1.2).

1.1.1. Заряд внутри полой сферы. Какой минимальный заряд Q нужно закрепить в нижней точке гладкой сферической полости радиуса R , чтобы в поле тяжести небольшой заряженный шарик массой m и зарядом q находился в верхней точке в положении устойчивого равновесия?

* Паршаков А.Н. Принципы и практика решения задач по общей физике. Ч. 1: Механика. Физика макросистем: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. 248 с.

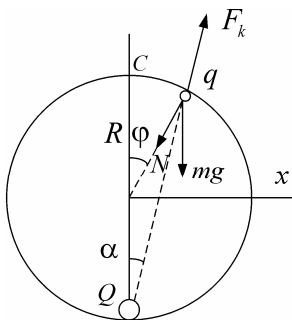


Рис. 1.1

Известно, что для достижения устойчивого равновесия необходимо, чтобы при любом малом отклонении от положения равновесия появлялись силы, возвращающие тело к положению равновесия. На рис. 1.1 отображены все силы, действующие на заряд q при его малом отклонении от положения равновесия (на рисунке это точка C). Так как отклонение заряда является малым, то

участок дуги Cq можно считать практически прямолинейным и расположенным параллельно оси X . В этом случае для достижения устойчивого равновесия при малых значениях углов α и ϕ необходимо выполнить условия

$$N_x \geq F_{kx}, \quad mg + N = F_k, \quad (1)$$

где N_x – проекция силы реакции опоры на ось X , $N_x \approx N\phi$; F_{kx} – проекция кулоновской силы взаимодействия зарядов F_k на ось X , $F_{kx} \approx F_k \alpha = F_k \phi / 2$. Перепишем первое уравнение системы (1) в виде $N\phi \geq F_k \phi / 2$. Откуда находим $N > F_k / 2$.

В этом случае второе уравнение системы (1) примет вид

$$mg + F_k / 2 \leq F_k \rightarrow F_k \geq 2mg,$$

где $F_k = qQ / 16\pi\epsilon_0 R^2$. И тогда для минимального значения заряда Q получаем

$$Q = \frac{32\epsilon_0 mg R^2}{q}.$$

1.1.2. Опыт Кулона. Один из опытов Кулона, с помощью которого он убедился в том, что сила притяжения между разноименными точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, состоял в следую-

щем. В окрестности маленького заряженного шарика подвешивалась на нити небольшая горизонтальная шеллаковая стрелка, на одном конце которой был прикреплен небольшой электрически заряженный кружок из золотой фольги. Измерялся период малых колебаний стрелки T в зависимости от ее расстояния d до заряженного шарика. Предполагая справедливым закон Кулона, найти зависимость периода колебаний стрелки от указанного расстояния и других параметров системы. Полагать длину стрелки l много меньшей расстояния d .

Пусть для определенности неподвижный заряд q_1 – положительный, а заряд на конце стрелки q_2 – отрицательный. Отобразим схематически данный опыт на рис. 1.2 (вид сверху).

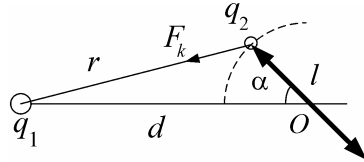


Рис. 1.2

При малых отклонениях от положения равновесия стрелки с закрепленным на ней зарядом q_2 ($\alpha \ll 1$) появляется момент силы, возвращающий стрелку к положению равновесия. Запишем для стрелки основной закон динамики вращательного движения (пренебрегая затуханием):

$$-F_k \frac{l}{2} \sin \alpha = I \ddot{\alpha}, \quad (1)$$

где $F_k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \approx \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$; I – момент инерции стрелки относительно ее центра инерции. С учетом малости угла α уравнение (1) можно представить в виде

$$\ddot{\alpha} + \frac{q_1 q_2 l}{8\pi\epsilon_0 d^2 I} \cdot \alpha = 0.$$

Откуда находим выражение для периода малых колебаний стрелки

$$T = 4\pi d \sqrt{\frac{2I}{q_1 q_2 l}}.$$

1.1.3. Разрыв кольца. Металлическое кольцо разорвалось кулоновскими силами, когда заряд кольца был равен Q . Сделали точно такое же новое кольцо, но из материала, прочность которого в 10 раз больше. Какой заряд разорвет новое кольцо? Какой заряд разорвет новое кольцо, сделанное из прежнего материала, если все размеры нового кольца в 10 раз больше размеров старого?

Понятно, что разрыв кольца обусловлен кулоновским взаимодействием зарядов кольца. В предыдущих задачах, где участвовали точечные заряды, мы имели возможность напрямую воспользоваться законом Кулона, сформулированным именно для точечных зарядов. В данной же задаче у нас нет такой возможности, так как кольцо не является точкой. Если бы перед нами стояла задача найти точное выражение для силы кулоновского взаимодействия, то схема действий была бы следующей.

Необходимо разбить кольцо на бесконечно малые элементы, которые можно считать точечными зарядами. Затем найти силу взаимодействия какого-либо бесконечно малого элемента одной половины кольца со всеми бесконечно малыми элементами другой половины кольца. И после этого проинтегрировать полученное выражение по всем элементам первой половины кольца с учетом того, что сила — это вектор. Таким образом, мы приходим к некоторому двойному интегралу, взять который является достаточно трудной задачей.

Но, к счастью, нам не требуется знать точное выражение для силы взаимодействия зарядов кольца. Требуется определить только, что произойдет с силой взаимодействия при изменении каких-либо параметров задачи. Поэтому разумно воспользоваться методом анализа размерностей.

Из структуры закона Кулона видно, что размерность силы кулоновского взаимодействия пропорциональна размерности квадрата заряда и обратна размерности квадрата длины:

$$[F_k] \sim [Q^2]/[R^2].$$

В нашем случае Q – заряд кольца (только он один присутствует в задаче), R – некоторый характерный размер, не обязательно равный радиусу кольца. Откуда сразу видно, что для увеличения силы разрыва в 10 раз (так как прочность выросла в 10 раз) при сохранении размеров необходимо увеличить заряд в $\sqrt{10}$ раз. При увеличении же размеров кольца в 10 раз (но сохранении его материала) необходимо увеличить заряд уже в 100 раз. Связано это с тем, что, во-первых, возросли размеры и, во-вторых, выросла сила разрыва, пропорциональная площади сечения материала кольца, которая в свою очередь пропорциональна квадрату толщины кольца (толщина кольца также выросла!).

1.1.4. Заряд внутри кольца. В центр тонкого проволочного кольца радиусом R и зарядом q поместили точечный заряд q_0 . Каково приращение силы, растягивающей кольцо?

В отличие от задачи 1.1.3 здесь вообще не ставится вопрос о силе растяжения кольца, с которой, как мы убедились, связано множество чисто технических проблем. Здесь нужно только сравнить силы растяжения кольца без заряда внутри и с зарядом. Поэтому выделим бесконечно малый элемент кольца, видимый из его центра под углом $\delta\alpha$, и сравним силы, действующие на выбранный элемент в двух случаях. На рис. 1.3, *а* обозначено: T – сила натяжения кольца, уравновешенная силой кулоновского взаимодействия δF_k выделенного элемента кольца со всеми остальными элементами. Рис. 1.3, *б* отличается тем, что внутри кольца появился заряд

q_0 , который добавил к прежней кулоновской силе значение $\delta F'_k$, что привело к увеличению силы натяжения на ΔT .

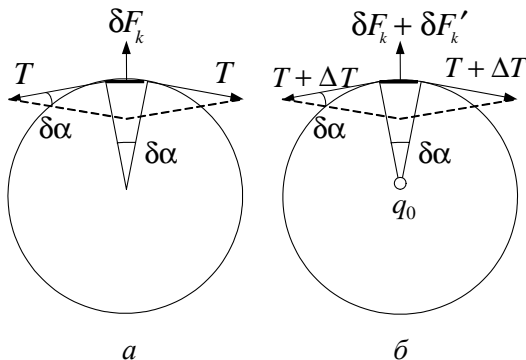


Рис. 1.3

Из условия равновесия элемента кольца в обоих случаях следует

$$T\delta\alpha = \delta F_k, \quad (1)$$

$$(T + \Delta T)\delta\alpha = \delta F_k + \delta F'_k. \quad (2)$$

Значение $\delta F'_k$ нетрудно найти из закона Кулона:

$$\delta F'_k = \frac{q_0 \delta q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (3)$$

где δq – заряд бесконечно малого элемента кольца, равный $q\delta\alpha/2\pi$. Из соотношений (1)–(3) находим

$$\Delta T = \frac{q_0 q}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

1.1.5. Поле диполя. Найти напряженность электрического поля точечного диполя с дипольным моментом \vec{p} . Расстояние до диполя $r \gg l$, где l – расстояние между зарядами (плечо диполя).

Это известная классическая задача, имеющая большое практическое значение. Многие молекулы можно представить в виде точечного диполя – системы из двух одинаковых зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на некотором расстоянии l друг от друга. Когда говорят о поле диполя, то обычно предполагают сам диполь точечным, т.е. считают расстояние от диполя до интересующих точек поля значительно больше l . Главной характеристикой диполя является его дипольный (электрический) момент. Этой величине сопоставляется вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и равный произведению заряда на вектор \vec{l} : $\vec{p} = q\vec{l}$ (рис. 1.4).

Для расчета поля диполя \vec{E} воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

где \vec{E}_+ и \vec{E}_- – напряженности полей, созданных положительным и отрицательным зарядами соответственно. Их значения удобно представить в векторном виде:

$$\vec{E}_+ = k \frac{q}{r_+^3} \vec{r}_+, \quad \vec{E}_- = k \frac{q}{r_-^3} \vec{r}_-.$$

Такая форма записи дает наглядную информацию и о направлении векторов \vec{E}_+ и \vec{E}_- . Здесь для удобства введено обозначение

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1)$$

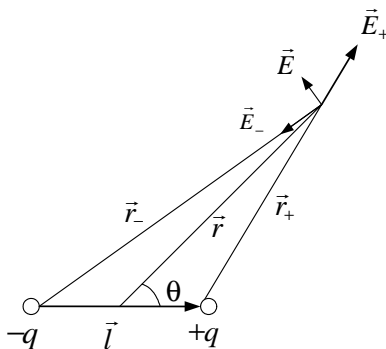


Рис. 1.4

Таким образом, поле любого диполя

$$\vec{E} = kq \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right). \quad (2)$$

Это выражение разумно представить через дипольный момент \vec{p} и расстояние от центра диполя до заданной точки поля r , направление на которую будем задавать через угол θ (см. рис. 1.4). Для этого представим значения r_+ и r_- в виде

$$r_+ \approx r - \frac{l}{2} \cos \theta, \quad r_- \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем

$$\begin{aligned} \vec{E} &\approx kq \left[\frac{\vec{r}_+}{\left(r - \frac{l}{2} \cos \theta\right)^3} - \frac{\vec{r}_-}{\left(r + \frac{l}{2} \cos \theta\right)^3} \right] \approx \\ &\approx \frac{kq}{r^3} \left[(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) + (\vec{r}_+ + \vec{r}_-) \frac{3}{2} \frac{l}{r} \cos \theta \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом мы учли приближенные формулы $(1+x)^3 \approx 1+3x$, $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ для $x \ll 1$. Кроме того, из рис. 1.4 следует

$$\vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l}, \quad \vec{r}_+ + \vec{r}_- \approx 2\vec{r}.$$

Эти соотношения позволяют записать выражение (4) в виде

$$\vec{E} = -\frac{kql}{r^3} \vec{r} + \frac{3k\vec{r}}{r^4} ql \cos \theta.$$

С учетом определения дипольного момента $\vec{p} = ql \vec{r}$ второе слагаемое можно представить в виде скалярного произведения $\frac{3k(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, и тогда получаем окончательно

$$\vec{E} = \frac{3k(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{p}}{r^3}. \quad (5)$$

Таким образом, нам удалось представить вектор \vec{E} в виде суммы двух векторов:

$$\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_r,$$

где вектор \vec{E}_l направлен вдоль оси диполя, а вектор \vec{E}_r направлен вдоль прямой, соединяющей диполь и данную точку поля. Такое представление иногда оказывается очень удобным.

В заключение найдем модуль вектора \vec{E} . По теореме косинусов получаем

$$\begin{aligned} E^2 &= E_l^2 + E_r^2 - 2E_l E_r \cos \theta = \\ &= k^2 \left[\frac{9p^2}{r^6} \cos^2 \theta + \frac{p^2}{r^6} - 6 \frac{p^2}{r^6} \cos^2 \theta \right], \end{aligned}$$

или

$$E = \frac{kp}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}, \quad (6)$$

где значение k определяется по формуле (1).

1.1.6. Взаимодействие диполя с точечным зарядом.

Найти силу взаимодействия F между точечным зарядом q_0 и точечным диполем на расстоянии r , если дипольный момент \vec{p} направлен вдоль соединяющей их прямой (рис. 1.5).

У нас есть два варианта. Один из них – воспользоваться готовой формулой для напряженности поля диполя, другой – заново решить задачу о взаимодействии точечных зарядов. Этот путь иногда является предпочтительным, когда под рукой нет готовых формул (кроме определений).

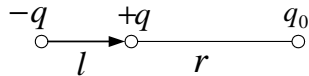


Рис. 1.5

Если воспользоваться готовым выражением для напряженности поля диполя (см. задачу 1.1.5), то получаем при $\theta = 0, \pi$

$$F = q_0 E = 2 \frac{kq_0 p}{r^3}.$$

При прямом применении закона Кулона совместно с принципом суперпозиции

$$F = kqq_0 \left[\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right],$$

где r отсчитывается от центра диполя. Выражение в квадратных скобках можно приближенно представить в виде

$$\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{l}{r} - 1 + \frac{l}{r} \right) = \frac{2l}{r^3}.$$

Тогда

$$F = kqq_0 \frac{2l}{r^3} = 2 \frac{kq_0 p}{r^3}.$$

1.1.7. Движение заряда в поле диполя. Возможны ли круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг неподвижного точечного электрического диполя?

Заданный в задаче вопрос можно поставить иначе: существует ли такое геометрическое место точек в поле диполя, для которого вектор \vec{E} направлен перпендикулярно оси диполя, сохраняясь постоянным по величине? Обратимся к картине силовых линий электрического поля диполя (рис. 1.6), из которой хорошо видно, что такое геометрическое место точек существует и им является окружность, перпендикулярная оси диполя и проходящая, например, через

точки A и B . Для определения положения этой окружности воспользуемся выражением для напряженности электрического поля диполя, полученным в задаче 1.1.5:

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1)$$

Так как вектор \vec{E} должен смотреть перпендикулярно оси диполя, т.е. перпендикулярно вектору \vec{p} , то для любых точек искомой окружности должно выполняться условие $\vec{E}\vec{p} = 0$. Поэтому помножим скалярно выражение (1) на вектор \vec{p} и приравняем произведение нулю. Тогда приходим к уравнению

$$\frac{3(\vec{p}\vec{r})^2}{r^5} = \frac{p^2}{r^3}.$$

После раскрытия скалярного произведения $\vec{p}\vec{r}$ получаем

$$3\cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1/3}.$$

Откуда следует, что круговые движения точечного заряда в поле диполя возможны на любом расстоянии от диполя. Плоскость круговой орбиты заряда перпендикулярна к оси диполя, а угол θ между направлением дипольного момента и радиус-вектором, проведенным от диполя к движущемуся заряду, определяется выражением

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1/3}, \quad (2)$$

где знак минус относится к положительному заряду, а плюс – к отрицательному.

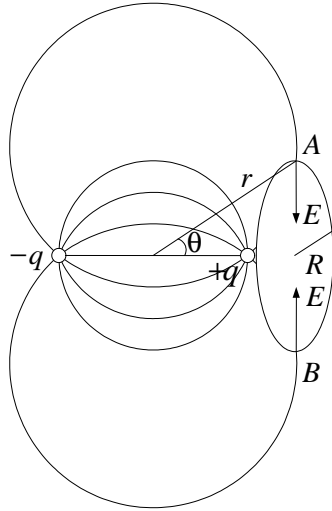


Рис. 1.6

Найдем теперь скорость этого заряда. Так как движение происходит по окружности радиуса $R = r \sin \theta$, то для заряда второй закон Ньютона будет выглядеть как

$$\frac{mv^2}{R} = QE, \quad (3)$$

где Q – величина заряда; m – его масса; значение E определяется выражением (6) из задачи 1.1.5

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}.$$

С учетом условия (2) напряженность электрического поля

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{2}, \quad (4)$$

а радиус окружности

$$R = r\sqrt{2/3}. \quad (5)$$

После подстановки выражений (4) и (5) в (3) находим

$$v^2 = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 m r^2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{pQ}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 m h^2},$$

где h – расстояние от диполя до центра окружности, по которой вращается точечный заряд.

1.1.8. Взаимодействие диполей. Найти силу взаимодействия F двух точечных диполей, находящихся на расстоянии l , если их дипольные моменты \vec{p}_1 и \vec{p}_2 направлены вдоль соединяющей их прямой (рис. 1.7).

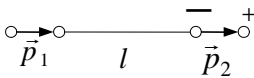


Рис. 1.7

В этой задаче удобно считать диполь p_1 источником электрического поля, в котором находится второй диполь с дипольным моментом p_2 .

Тогда полная сила, действующая на второй диполь,

$$F = q_2 (E_+ - E_-), \quad (1)$$

где q_2 – заряд второго диполя; E_+ и E_- – напряженности электрического поля, созданного первым диполем, в точках, где расположены положительный и отрицательный заряды второго диполя. Разность E_+ и E_- – это приращение вектора E на отрезке, равном длине второго диполя l_2 , в направлении оси диполя. Вследствие малости этого отрезка

$$E_+ - E_- \approx \frac{\partial E}{\partial l} l_2. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) можно найти выражение для силы, действующей на диполь p , находящийся в произвольном электрическом поле:

$$F = p \frac{\partial E}{\partial l}.$$

Входящую сюда производную принято называть производной вектора по направлению. Найдем эту производную в нашем случае. Значение E определяется выражением (6) из задачи 1.1.5 при $\theta = 0$:

$$E = \frac{2kp_1}{l^3}.$$

Откуда

$$\left| \frac{\partial E}{\partial l} \right| = \frac{6kp_1}{l^4}. \quad (3)$$

Собирая вместе выражения (1)–(3), получаем

$$F = \frac{6kp_1 p_2}{l^4}.$$

Причем диполи притягиваются, если они обращены друг к другу противоположно заряженными концами, и отталкиваются в противном случае. Решите эту же задачу, если дипольные моменты перпендикулярны соединяющей их прямой. (Ответ: $f = 3kp_1p_2/l^4$)

1.1.9. Поле квадруполь. Электрический квадруполь состоит из двух положительных и двух отрицательных одинаковых по величине точечных зарядов q , расположенных

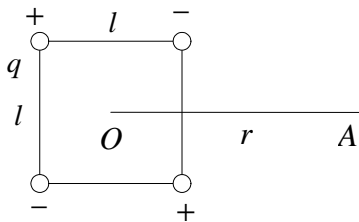


Рис. 1.8

в вершинах квадрата со стороной l , как показано на рис. 1.8. Найти электрическое поле такого квадруполь в точке A , находящейся на расстоянии $r \gg l$ от его центра O , если линия OA параллельна одной из сторон квадрата.

Понятно, что поле квадруполь можно получить наложением полей двух диполей. А как рассчитывать поле диполя, мы уже знаем. Поэтому вначале рассчитаем поле диполя в точке, находящейся на перпендикуляре к оси диполя, восстановленном из центра диполя, и отстоящей от центра на расстояние $r \gg l$. Из рис. 1.9 видно

$$E_{\text{дип}} = 2E_- \cos \alpha,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{l}{2\sqrt{r^2 + l^2/4}} \approx \frac{l}{2r}, \quad E_- = E_+ = k \frac{q}{r^2}.$$

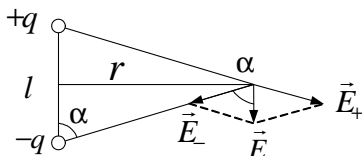


Рис. 1.9

Таким образом, находим

$$E_{\text{дип}} = \frac{kp}{r^3} = \frac{kql}{r^3}.$$

Заметим, что этот же результат можно получить и из общей формулы (6) задачи 1.1.5 при $\theta = \pi/2$.

Сложим теперь поля двух диполей, помня, что их дипольные моменты смотрят в противоположные стороны, а сами диполи находятся на небольшом расстоянии l друг от друга. Поступая аналогично задаче 1.1.8, имеем

$$E_{\text{квадр}} = \left| \frac{\partial E_{\text{дип}}}{\partial r} \right| l = \frac{3kql^2}{r^4}.$$

Заметим общую тенденцию: поле одиночного заряда убывает с расстоянием как $1/r^2$, поле диполя – как $1/r^3$, поле квадруполь – как $1/r^4$.

1.1.10. Взаимодействие полярной и неполярной молекул. Неполярная молекула с поляризуемостью β находится на большом расстоянии l от полярной молекулы с дипольным моментом \vec{p} . Найти модуль силы взаимодействия этих молекул, если вектор \vec{p} ориентирован вдоль прямой, проходящей через обе молекулы.

Если полярная молекула обладает дипольным моментом и является источником электрического поля, то неполярная молекула не обладает дипольным моментом и, следовательно, не создает электрического поля. Тогда не очень понятно, о какой силе взаимодействия идет речь? На самом деле неполярная молекула не обладает дипольным моментом в отсутствие внешнего поля. Но если молекула попадает во внешнее поле, то она приобретает дипольный момент, пропорциональный этому полю:

$$\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1)$$

где β – поляризуемость молекулы, определяемая ее конкретным видом. Поэтому можно воспользоваться формулой для силы взаимодействия двух диполей, полученной в задаче 1.1.8:

$$F = \frac{6kp_1p_2}{l^4}.$$

Здесь $p_1 = p$, а значение p_2 можно рассчитать по формуле (1), в которой E – напряженность электрического поля, созданного полярной молекулой (см. формулу (6) из задачи 1.1.5 при $\theta = 0$),

$$E = \frac{2kp}{l^3}.$$

Окончательно получаем

$$F = \frac{12k^2\beta\epsilon_0 p^2}{l^7} = \frac{3\beta p^2}{4\pi^2\epsilon_0 l^7}.$$

1.1.11. Заряженное кольцо и неполярная молекула.

На оси тонкого равномерно заряженного кольца радиусом R находится неполярная молекула. Исследовать устойчивость положения молекулы в зависимости от ее расстояния до центра кольца.

Как отмечалось в предыдущей задаче, неполярная молекула, попав в электрическое поле, приобретает дипольный момент $\vec{p} = \beta\epsilon_0\vec{E}$, где β – поляризуемость молекулы. В этом случае на нее начинает действовать сила

$$F = p \frac{\partial E}{\partial x},$$

где производная $\partial E / \partial x$ берется в направлении вдоль силовой линии (см. задачу 1.1.8). Подставляя сюда выражение для дипольного момента, получаем

$$F(x) = \frac{1}{2}\beta\epsilon_0 \frac{\partial E^2(x)}{\partial x}, \quad (1)$$

где $E(x)$ определяется распределением напряженности электрического поля вблизи молекулы.

В нашем случае электрическое поле создано на оси тонкого равномерно заряженного кольца. Рассчитаем это поле. В силу симметрии задачи очевидно

$$E = \oint dE_{\parallel},$$

где dE_{\parallel} – проекция вектора $d\vec{E}$, созданного бесконечно малым элементом кольца на направлении оси кольца (рис. 1.10),

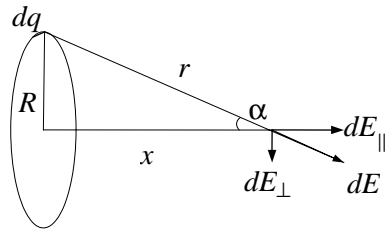


Рис. 1.10

$$dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \alpha \quad (2)$$

(интеграл по векторам $d\vec{E}_{\perp}$ будет равен нулю). Интегрируя выражение (2), получаем

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Подставляя это выражение в (1) и вычислив производную, находим зависимость силы, действующей на неполярную молекулу, от ее расстояния до центра кольца x :

$$F(x) = \frac{\beta q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{x(R^2 - 2x^2)}{(R^2 + x^2)^4}.$$

Воспользовавшись стандартными методами исследования функций, отобразим график этой функции на рис. 1.11. Здесь обозначено $x_1 = 0,29R$,

$x_2 = R/\sqrt{2}$, $x_3 = 1,1R$. На участке $0 \leq x < x_2$ возникает отталкивание молекулы, при $x > x_2$ – притяжение. И хотя в точке $x = 0$ значение силы равно нулю (как и в точ-

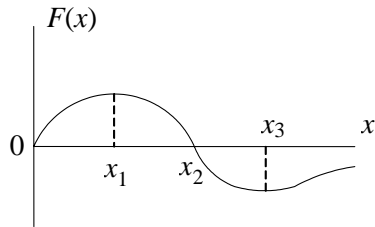


Рис. 1.11

ке x_2), это положение не является устойчивым, так как при любом малом отклонении от него появляется сила отталкивания. Поэтому устойчивым положением равновесия является только точка $x_2 = R/\sqrt{2}$.

1.1.12. Поле плоских поверхностей. На практике часто встречаются задачи, в которых требуется рассчитать поле, созданное каким-либо участком равномерно заряженной плоской поверхности с поверхностной плотностью заряда σ . Либо заряженное тело можно разбить на тонкие плоские слои с эффективной поверхностной плотностью заряда σ . В этом случае нетрудно доказать, что составляющая напряженности электрического поля, перпендикулярная поверхности плоскости, $E_{\perp} = \sigma\Omega/4\pi\epsilon_0$, где Ω – телесный угол, под которым виден весь участок поверхности из рассматриваемой точки пространства. Покажем это.

Выделим на рассматриваемой поверхности бесконечно малый элемент площадью δS (рис. 1.12). Расстояние от него до рассматриваемой точки пространства – r , а угол, под которым участок δS виден из данной точки по отношению к нормали к поверхности, – θ . Тогда напряженность электрического поля, созданная данным участком,

$$\delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\delta S}{r^2},$$

а ее нормальная составляющая

$$\delta E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\delta S}{r^2} \cos \theta.$$

Входящий сюда множитель $(\delta S \cos \alpha)/r^2$ представляет собой по определению бесконечно малый телесный угол $\delta\Omega$, под которым виден элемент δS из рассматриваемой точки пространства. Таким образом,

$$\delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \delta\Omega .$$

Суммируя это соотношение по всем участкам плоской поверхности (всем бесконечно малым углам $\delta\Omega$), получаем

$$E_{\perp} = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\epsilon_0} . \quad (1)$$

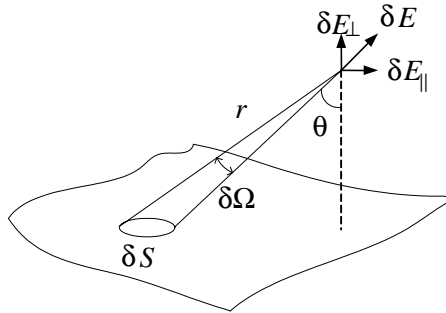


Рис. 1.12

Простота этой формулы обманчива. В частности, из нее не следует, что если участок поверхности бесконечно малый, то и его поле также бесконечно малое. Все дело в расстоянии до рассматриваемой точки пространства. Конечно, если точка отстоит достаточно далеко от бесконечно малого элемента δS , то телесный угол будет бесконечно малым, соответственно и поле будет бесконечно малым. Если же рассматривать точки, непосредственно прилегающие к бесконечно малому элементу поверхности (но не приближаясь к его краям), то телесный угол будет равен 2π и тогда напряженность электрического поля вблизи любого элемента поверхности будет

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} .$$

Запомним этот результат! Кстати, точно такое же выражение получается и для бесконечной плоской поверхности на любом расстоянии от нее.

Посмотрим теперь, как работает формула (1) на примере двух конкретных задач.

1. Найти напряженность электрического поля в центре правильного тетраэдра, три грани которого заряжены с поверхностной плотностью заряда σ_1 , а четвертая – с поверхностной плотностью σ_2 .

Полное поле в центре тетраэдра в силу принципа суперпозиции складывается из четырех векторов, модули каждого из которых можно найти по формуле (1), где $\Omega = 4\pi/4 = \pi$ (полный телесный угол равен 4π). Сложить же эти четыре вектора, расположенные не в одной плоскости, не совсем простая задача. Поэтому воспользуемся симметрией задачи и еще одним довольно часто применяемым приемом, суть которого состоит в следующем. Представим формально плотность заряда четвертой грани в виде суммы двух слагаемых:

$$\sigma_2 = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1).$$

С физической точки зрения это равенство означает, что в месте расположения четвертой грани находятся сразу две грани – одна с поверхностной плотностью σ_1 , а другая – с поверхностной плотностью $(\sigma_2 - \sigma_1)$. Теперь понятно, что поле в центре тетраэдра обусловлено действием только одной грани с поверхностной плотностью $\sigma_2 - \sigma_1$ (в силу симметрии поле четырех граней с одинаковой плотностью заряда σ_1 равно нулю). Таким образом, сразу получаем ответ:

$$E = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\epsilon_0}.$$

2. Найти напряженность электрического поля в вершине конуса с углом раствора при вершине 2α и высотой h . Конус равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ .

На первый взгляд непонятно, какое отношение к этой задаче имеет формула (1), так как тело заряжено по объему, а не по поверхности. Но ведь разбиение тела на бесконечно малые элементы можно проводить разными путями. И единственное обязательное условие при этом – заполнить весь объем тела без каких-либо пропусков. Поэтому разобьем конус на бесконечно тонкие слои толщиной dx , перпендикулярные оси конуса (рис. 1.13). Каждый такой слой можно представить как плоский участок с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \rho dx$. При этом из вершины конуса (точка O) каждый такой слой будет виден под одним и тем же телесным углом Ω . Тогда из формулы (1) следует, что напряженность электрического поля в точке O

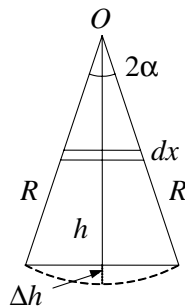


Рис. 1.13

$$E = \int dE = \int \frac{\rho dx \Omega}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\rho h}{4\pi\epsilon_0} \Omega.$$

Осталось только найти Ω . Из тригонометрии известно, что площадь сферического сегмента (на рис. 1.13 он выделен штриховой линией)

$$S_{\text{сф.сегм}} = 2\pi R \Delta h = 2\pi R(R - R \cos \alpha).$$

Тогда из определения телесного угла следует

$$\Omega = \frac{S_{\text{сф.сегм}}}{R^2} = 2\pi(1 - \cos \alpha).$$

Таким образом, напряженность электрического поля в вершине конуса

$$E = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) .$$

1.2. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса устанавливает связь между электрическим полем и зарядами и представляет собой более общую и более изящную формулировку закона Кулона. Основная ценность этой теоремы заключается в том, что она формулирует общие свойства электрического поля и возводится в ранг основных постулатов теории электричества. Существуют две эквивалентные формы теоремы Гаусса – интегральная и дифференциальная. Напомним их.

Интегральная:

$$\oint_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q ,$$

т.е. поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 .

Дифференциальная:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

Для расчета электрических полей произвольной системы зарядов одной теоремы Гаусса недостаточно. Это видно уже из того, что теорема Гаусса представляет собой скалярное соотношение. А одного скалярного уравнения недостаточно для определения вектора \vec{E} , имеющего три проекции. Использование теоремы Гаусса для расчета полей и решения связанных с этим задач эффективно лишь в тех случаях, когда поле обладает определенной симметрией. Эта симметрия, а следовательно, и конфигурация поля должны быть такими,

чтобы можно было найти достаточно простую замкнутую поверхность, для которой вычисление потока вектора \vec{E} сводилось бы к простому умножению E (или E_n) на всю площадь поверхности или отдельных ее частей.

Однако в ряде случаев теорема Гаусса оказывается весьма эффективным аналитическим инструментом и позволяет ответить на некоторые принципиальные вопросы, не обращаясь к детальному решению задачи. Рассмотрим одну из таких задач. Возможна ли устойчивая равновесная конфигурация покоящихся точечных зарядов?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим произвольную систему неподвижных точечных зарядов. Выделим в ней произвольный заряд q , находящийся в точке A (рис. 1.14). Пусть для определенности $q > 0$. Окружим

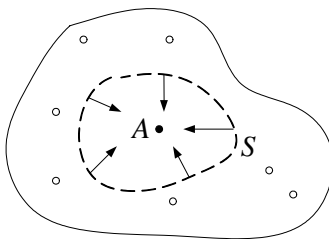


Рис. 1.14

заряд q произвольной замкнутой поверхностью S , такой, чтобы все остальные заряды рассматриваемой системы располагались во внешнем пространстве по отношению к этой поверхности. Тогда, для того чтобы возможное равновесие заряда q было устойчивым, необходимо, чтобы во всех точках поверхности S вектор напряженности электрического поля \vec{E} , образованного всеми остальными зарядами системы, был направлен внутрь этой поверхности (т.е. к заряду q). Только в этом случае при любом малом смещении заряда q из положения равновесия на него будет действовать возвращающая сила, и его положение равновесия будет действительно устойчивым. В этом случае поток вектора \vec{E} должен быть строго отрицательным. Но такая конфигурация поля противоречит теореме Гаусса. Согласно ей поток вектора \vec{E} должен быть равен нулю, так

как этот поток создается зарядами, расположенными вне поверхности S . И равенство нулю потока вектора \vec{E} означает, что в разных точках поверхности S вектор \vec{E} может быть направлен в разные стороны по отношению к нормали к поверхности S . Отсюда и следует, что устойчивое равновесие заряда в любом электростатическом поле невозможно. Иногда это утверждение называют теоремой Ирншоу.

1.2.1. Поле двух параллельных пластин. Две бесконечные плоскопараллельные металлические пластины помещены в вакууме параллельно друг другу (рис. 1.15). Полный заряд на единицу площади (т.е. сумма зарядов на обеих поверхностях пластин) равен q_1 для первой пластины и q_2 для второй. Определить поверхностные плотности зарядов на пластинах и напряженность электрического поля между пластинами и во внешнем пространстве.

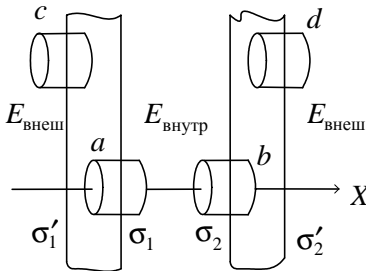


Рис. 1.15

При сообщении проводнику избыточного заряда происходит его перераспределение до тех пор, пока электрическое поле внутри проводника не обратится в нуль. Кроме того, так как внутри проводника $\vec{E} = 0$, то и поток вектора \vec{E} через любую

замкнутую поверхность внутри проводника также равен нулю. А это в силу теоремы Гаусса означает, что внутри проводника в условиях равновесия никаких избыточных зарядов нет, и проводник заряжается только по поверхности. Таким образом, полное поле вокруг проводящих пластин в силу принципа суперпозиции складывается из полей отдельных плоскостей. По условию задачи пластины бесконечные. Значит, поле, как между пластинами ($\vec{E}_{\text{внутр}}$), так и вне их

($\vec{E}_{\text{внеш}}$), однородно и перпендикулярно пластинам (никакой разницы между точками какой-либо плоскости, перпендикулярной пластинам, нет). Такая конфигурация поля подсказывает, что для применения теоремы Гаусса в качестве замкнутой поверхности следует выбрать прямой цилиндр, основания которого перпендикулярны пластинам.

Применим сначала теорему Гаусса к расчету поля одной бесконечной плоскости с плотностью заряда σ (рис. 1.16). Из данной теоремы следует

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Рассмотрим теперь поле двух плоскостей. В силу принципа суперпозиции для напряженности электрического поля между двумя параллельными плоскостями с плотностью заряда σ_1 и σ_2 получаем

$$E_{\text{внутр}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}.$$

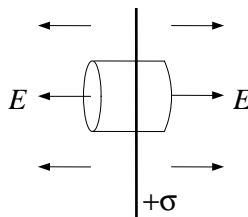


Рис. 1.16

Вне плоскостей слева и справа от них независимо от величины и знака плотностей заряда σ_1 и σ_2 поле будет одинаковым по модулю и определяется по формуле

$$E_{\text{внеш}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}.$$

Этот результат далеко не очевиден, если вспомнить, что поле двух точечных разных зарядов не симметрично по отношению к плоскости, проходящей через центр системы и перпендикулярной линии, соединяющей эти заряды.

Вернемся теперь к нашей исходной задаче. Для определения напряженности электрического поля между пластинами $E_{\text{внутр}}$ и величины плотности зарядов на внутренних по-

верхностях пластин выберем в качестве замкнутой поверхности цилиндр a (см. рис. 1.15). Тогда из теоремы Гаусса следует

$$E_{\text{внутр}} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Проделав то же самое для цилиндра b , получаем

$$E_{\text{внутр}} = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \quad (2)$$

(знак минус связан с тем, что левая нормаль к основанию цилиндра b противоположна оси X). Из уравнений (1) и (2) находим

$$\sigma_1 = -\sigma_2. \quad (3)$$

Так как поля вне обеих пластин $E_{\text{внеш}}$ независимо от распределения зарядов внутри каждой пластины одинаковы по модулю, то для цилиндров c и d соответственно получаем

$$E_{\text{внеш}} = \frac{\sigma'_1}{\epsilon_0}, \quad E_{\text{внеш}} = \frac{\sigma'_2}{\epsilon_0}.$$

Откуда следует

$$\sigma'_1 = \sigma'_2. \quad (4)$$

И, наконец, из закона сохранения заряда очевидно,

$$\sigma'_1 + \sigma_1 = q_1, \quad \sigma'_2 + \sigma_2 = q_2. \quad (5)$$

Решая совместно систему уравнений (3)–(5), находим

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad \sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}.$$

А для напряженностей полей получаем

$$E_{\text{внутр}} = \frac{q_1 - q_2}{2\epsilon_0}, \quad E_{\text{внеш}} = \frac{q_1 + q_2}{2\epsilon_0}.$$

1.2.2. Сфера с отверстием. В равномерно заряженной сфере вырезано маленькое отверстие. Какова напряженность электрического поля в центре отверстия?

Данная задача является прекрасной иллюстрацией несколько неожиданной стороны принципа суперпозиции. В соответствии с этим принципом напряженность электрического поля произвольной системы зарядов является векторной суммой полей отдельных частей этой же системы. На самом деле напряженность электрического поля произвольной системы можно сложить из напряженностей электрического поля каких-либо подсистем, каждая из которых, вообще говоря, не является частью исходной системы. При этом только требуется, чтобы суммарное пространственное распределение зарядов оказалось тем же, что и для исходной системы. В нашем случае это означает, что поле сферической поверхности с маленьким отверстием можно сложить из полей сплошной сферической поверхности с плотностью заряда σ и маленькой площадки с плотностью заряда $-\sigma$, наложенной на сферу. Польза такого представления заключается в том, что расчет поля сферы и маленькой площадки уже не представляет труда.

Рассмотрим вначале электрическое поле внутри сферической поверхности при равномерном распределении заряда. Это поле, очевидно, является центрально-симметричным, т.е. модуль вектора \vec{E} может зависеть только от расстояния r до центра сферы. Понятно, что при такой конфигурации поля в качестве замкнутой поверхности следует взять концентрическую сферу, и тогда поток вектора \vec{E} будет равен $4\pi r^2 E$. Так как внутри сферы нет зарядов, то в силу теоремы Гаусса этот поток должен быть равным нулю, а это означает, что поле внутри равномерно заряженной сферы отсутствует. Этот результат был доказан еще в части 1 прямым расчетом для поля тяготения внутри сферического слоя без

привлечения теоремы Гаусса. Вне сферы вблизи ее поверхности имеем

$$E_{\text{внеш}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi r^2 \sigma \rightarrow E_{\text{внеш}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Ранее (см. задачу 1.1.12) было доказано, что напряженность электрического поля вблизи середины любого малого

плоского элемента $E_0 = \sigma / 2\epsilon_0$.

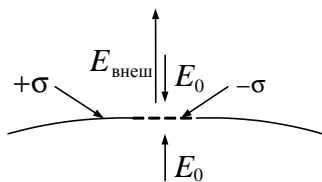


Рис. 1.17

Отобразим векторы полей на рис. 1.17, на котором можно сразу увидеть, что вблизи середины отверстия напряженность электрического поля равна $\sigma / 2\epsilon_0$ независимо от того, где находится точка – вне сферы или внутри ее.

Полученный результат позволяет легко определить силу взаимодействия различных участков однородно заряженной сферической поверхности. Рассчитаем, например, силу отталкивания двух частей сферы радиуса R , разрезанной на две

части плоскостью, проходящей на расстоянии r от центра сферической поверхности (рис. 1.18).

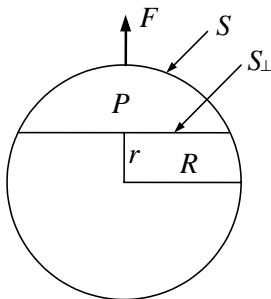


Рис. 1.18

Для этого найдем вначале давление внутри сплошной сферической поверхности, обусловленное кулоновским взаимодействием. Выделим на ней малый элемент площадью δS . Сила δF , действующая на этот элемент, равна произведению заряда $\sigma \cdot \delta S$

на напряженность поля E вблизи этого элемента. Это поле создано всеми элементами сферической поверхности кроме элемента δS , и его напряженность, как мы уже знаем, равна $\sigma / 2\epsilon_0$. Тогда

$$\delta F = \sigma \cdot \delta S \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \delta S.$$

Отношение силы, действующей перпендикулярно площадке δS , к величине этой площадки и есть давление P :

$$P = \frac{\delta F}{\delta S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}.$$

Для нахождения полной силы электростатического давления F , действующей на верхнюю часть сферы (см. рис. 1.18), необходимо проинтегрировать давление P по всей площади верхней части сферы S (нужно только помнить, что сила – величина векторная). Но данной операции можно избежать. Представим себе, что внутри сферы находится газ под давлением P . Тогда понятно, что сила, действующая на верхнюю часть сферической оболочки S , будет в точности равна силе, действующей на площадь основания этой части S_{\perp} :

$$F = PS_{\perp} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \pi(R^2 - r^2).$$

Заметим, что сила отталкивания частей сферы будет наибольшей, когда сфера разрезана по диаметру:

$$F_{\max} = \frac{\pi\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0}.$$

1.2.3. Поле полусферы. Найти напряженность электрического поля в основании полусферы, заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда σ .

Хотя эта задача очень похожа на предыдущую, воспользоваться тем же приемом нам не удастся (отсутствует слишком большая часть сферы). Поэтому придется «честно» рассчитывать поле полусферы, разбивая ее на бесконечно малые

элементы (так можно в принципе решить любую задачу). В то же время не следует забывать и о присутствующей симметрии (все-таки полусфера это половина сферы!). Посмотрим, к чему это приведет.

Предположим, что вектор \vec{E} расположен не перпендикулярно основанию полусферы (рис. 1.19). Дополним полусферу второй половиной (отмечена штриховой линией). Тогда в силу симметрии вектор \vec{E}' от второй половины должен быть зеркальным отражением вектора \vec{E} относительно основания полусферы и сумма векторов $\vec{E} + \vec{E}'$ не равна нулю. Но такого не может быть, так как полное поле двух полусфер внутри в любом случае должно быть равным нулю (это было доказано в предыдущей задаче). Поэтому остается только одно – вектор \vec{E} в любой точке основания полусферы должен быть перпендикулярным основанию.

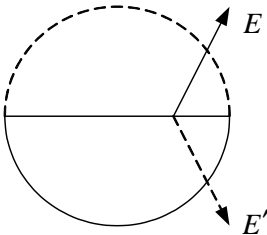


Рис. 1.19

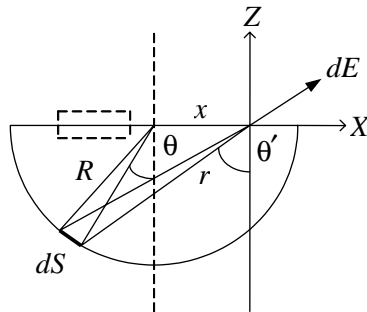


Рис. 1.20

Выберем начало сферической системы координат в центре основания полусферы (рис. 1.20) и разобьем ее на бесконечно малые элементы площадью $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ (угол ϕ отсчитывается в плоскости основания полусферы от оси X). Тогда нормальная составляющая вектора $d\vec{E}$ (нужна только она) будет иметь вид

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \cos\theta', \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} r^2 &= (R \sin\theta \cos\varphi + x)^2 + R^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + R^2 \cos^2\theta = \\ &= R^2 + 2Rx \sin\theta \cos\varphi + x^2, \end{aligned} \quad (2)$$

а значения углов θ и θ' связаны соотношением

$$R \cos\theta = r \cos\theta'. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и интегрируя по углу θ от нуля до $\pi/2$ и углу φ от нуля до π (помножив результат на два), получаем следующее выражение для напряженности электрического поля в произвольной точке основания полусферы, отстоящей на расстояние x от его центра:

$$E(x) = \frac{\sigma R^3}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta \cos\theta d\theta}{(R^2 + 2Rx \sin\theta \cos\varphi + x^2)^{3/2}}.$$

Входящий сюда двойной интеграл целесообразно привести к безразмерному виду с помощью подстановки $\xi = x/R$ ($0 \leq \xi \leq 1$):

$$E(\xi) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta \cos\theta d\theta}{(1 + 2\xi \sin\theta \cos\varphi + \xi^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Взять такой интеграл при произвольных ξ далеко не простая задача, но, к счастью, нам это не потребуется. Для этого вспомним, что кулоновские силы являются консервативными и работа этих сил по произвольному замкнутому контуру L равна нулю. Если это перевести на язык напряженности электрического поля, то для произвольного электрического поля должно выполняться соотношение

$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$. Выберем в качестве L тонкий прямоугольный контур, расположенный близко к основанию полусферы, как показано на рис. 1.20. Ранее было доказано, что вектор \vec{E} в любой точке вблизи основания полусферы перпендикулярен ему. Отсюда сразу следует, что интеграл $\int \vec{E} d\vec{l}$, взятый по участкам, параллельным основанию, равен нулю, и тогда

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} \approx (E_1 - E_2) \delta,$$

где δ – малая высота контура L ; а E_1 и E_2 – значения напряженности электрического поля в двух произвольных точках основания полусферы. Тем самым, в силу произвольности положения точек 1 и 2, мы доказали, что напряженность электрического поля в любой точке основания полусферы одинакова! Поэтому проще всего взять интеграл (4) при $\xi = x/R = 0$:

$$E(0) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}.$$

Это и будет ответом задачи.

1.2.4. Заряд внутри тетраэдра. С какой силой действует на каждую грань тетраэдра заряд q , помещенный в его центре? Поверхностная плотность заряда граней σ .

Конечно, если вспомнить про третий закон Ньютона, то задачу можно поставить иначе: с какой силой каждая грань тетраэдра действует на заряд, помещенный в его центре? В этом случае мы могли бы воспользоваться результатом задачи 1.1.12, позволяющим быстро рассчитать поле грани тетраэдра. Но для лучшего понимания теоремы Гаусса решим задачу в ее первоначальной постановке. В данном случае источником поля является точечный заряд q , и каждая грань

тетраэдра находится в этом поле. Так как это поле неоднородно, то разобьем грань тетраэдра на бесконечно малые элементы dS (рис. 1.21). В силу симметрии полная сила действия точечного заряда q на грань тетраэдра имеет только нормальную составляющую, и для элемента dS получаем

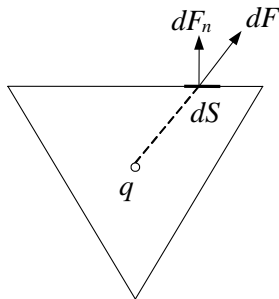


Рис. 1.21

$$dF_n = E_n \sigma dS .$$

Для всей грани тетраэдра площадью S

$$F = \int dF_n = \sigma \int_S E_n dS ,$$

где E_n – значение проекции вектора напряженности электрического поля, созданного зарядом q , на нормаль к элементу dS в месте его расположения. Интеграл $\int_S E_n dS$ представляет собой не что иное, как поток вектора \vec{E} через грань тетраэдра и равен четверти полного потока вектора \vec{E} , созданного точечным зарядом q :

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{4} \oint E_n dS .$$

В силу теоремы Гаусса

$$\oint E_n dS = q / \epsilon_0 ,$$

и тогда для силы взаимодействия получаем

$$F = \frac{\sigma q}{4\epsilon_0} .$$

1.2.5. Взаимодействие граней куба. С какой силой расталкиваются равномерно заряженные грани куба? Поверхностная плотность заряда граней σ , длина ребра куба l .

В соответствии с рассуждениями предыдущей задачи сила, действующая на выделенную грань куба площадью $S = l^2$,

$$F = \sigma \int_S E_n^{(5)} dS,$$

где $\int_S E_n^{(5)} dS$ – поток через эту грань вектора напряженности электрического поля, созданного остальными пятью гранями. Для того чтобы воспользоваться теоремой Гаусса, в качестве замкнутой поверхности построим куб с размерами немного бóльшими исходного. Тогда все шесть заряженных граней куба дадут поток вектора напряженности электрического поля Φ через шесть граней построенной замкнутой поверхности:

$$\Phi = q / \epsilon_0 = 6\sigma l^2 / \epsilon_0,$$

а через одну грань

$$\Phi_1 = \frac{1}{6} \Phi = \frac{\sigma l^2}{\epsilon_0}.$$

Итак, Φ_1 – это поток вектора напряженности электрического поля, созданного шестью гранями куба, через одну грань. В силу принципа суперпозиции его можно представить как сумму потока, созданного пятью гранями $\int_S E_n^{(5)} dS$,

и потока от выделенной грани $\int_S E_n^{(1)} dS$:

$$\Phi_1 = \int_S E_n^{(5)} dS + \int_S E_n^{(1)} dS.$$

Так как замкнутая поверхность прилегает достаточно плотно к каждой грани куба, то $E_n^{(1)} = \sigma / 2\epsilon_0$ и $\int_S E_n^{(1)} dS = \sigma l^2 / 2\epsilon_0$. Таким образом,

$$\int_S E_n^{(5)} dS = \Phi_1 - \int_S E_n^{(1)} dS = \frac{\sigma l^2}{\epsilon_0} - \frac{\sigma l^2}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma l^2}{2\epsilon_0}.$$

Следовательно,

$$F = \frac{\sigma^2 l^2}{2\epsilon_0}.$$

Попробуйте решить эту же задачу для тетраэдра с ребром l . (Ответ: $F = \sqrt{3}\sigma^2 l^2 / 8\epsilon_0$)

1.2.6. Шар со сферической полостью. Внутри шара, заряженного равномерно с объемной плотностью ρ , имеется сферическая полость. Центр полости смещен относительно центра шара на расстояние \vec{l} . Пренебрегая влиянием вещества шара, найти напряженность электрического поля \vec{E} внутри полости.

Воспользуемся тем же приемом, что и в задаче 1.2.2. Отсутствие заряда в полости можно представить так, как будто в однородно заряженном шаре с плотностью заряда ρ находится шар меньших размеров с отрицательной плотностью заряда $-\rho$. Тогда поле внутри полости является суперпозицией полей, создаваемых двумя равномерно заряженными шарами:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-. \quad (1)$$

Причем точка, в которой ищутся векторы \vec{E}_+ и \vec{E}_- , находится внутри каждого шара. Таким образом, наша задача сводится к расчету поля внутри однородно заряженного шара. Такое

поле является центрально-симметричным и в качестве замкнутой поверхности следует, очевидно, выбрать концентрическую сферу радиусом r , меньшим радиуса шара. Согласно теореме Гаусса имеем

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

Для наших дальнейших целей выражение для напряженности электрического поля шара удобно представить в векторном виде

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}.$$

В этом случае выражение (1) будет выглядеть как

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_+ + \frac{(-\rho)}{3\epsilon_0} \vec{r}_-.$$

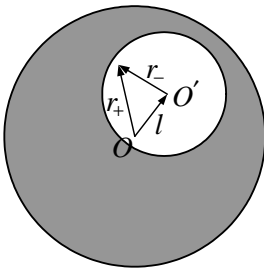


Рис. 1.22

Разность векторов \vec{r}_+ и \vec{r}_- , как видно на рис. 1.22, равна вектору \vec{l} . Таким образом, напряженность электрического поля внутри полости

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{l}.$$

Это поле является однородным (что довольно неожиданно, так как оно сконструировано из двух неоднородных полей), не зависит от размеров полости и шара и определяется только величиной эксцентриситета (расстояние l).

1.2.7. Пересекающиеся шары. Найти напряженность электрического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заряженных разноименными по знаку зарядами с объемной плотностью ρ и $-\rho$, если расстояние между центрами шаров определяется вектором \vec{l} (рис. 1.23).

Очевидно, эта задача является обобщением только что решенной задачи, и для нее получаем точно такой же ответ:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{l}.$$

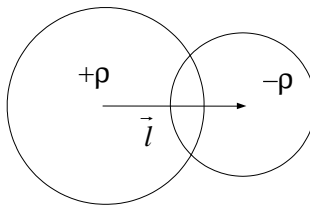


Рис. 1.23

Поле в области пересечения шаров оказалось также однородным и не зависящим от размеров шаров. Это вывод справедлив, в частности, и тогда, когда один шар находится целиком внутри другого (другими словами, когда в шаре имеется сферическая полость).

1.2.8. Атом Томсона. В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд e распределен внутри шара радиусом $R = 10^{-8}$ см. Как должна зависеть от радиуса плотность положительного заряда, чтобы электрон (точечная частица с зарядом $-e$), помещенный внутри шара, совершал гармонические колебания? Найти частоту этих колебаний. Считать, что заряды механически друг на друга не действуют. Магнитным полем движущегося заряда пренебречь.

Для того чтобы электрон мог совершать гармонические колебания, необходимо наличие силы, возвращающей его в положение равновесия. Кроме того, эта сила должна быть пропорциональной отклонению от положения равновесия. Эти условия будут выполнены, если поле внутри шара имеет вид

$$E(r) = \alpha r, \quad (1)$$

где α – некоторый коэффициент пропорциональности. Для определения же плотности распределения заряда внутри шара в зависимости от расстояния r , обеспечивающей требуемое распределение напряженности электрического поля, нам придется обратиться к теореме Гаусса в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

где $\rho(r)$ – объемная плотность заряда.

Распишем более подробно уравнение (2):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

Это уравнение и позволит нам по заданной явной зависимости $E(x, y, z)$ найти распределение плотности заряда шара. Единственная неприятность состоит в том, что выражение для дивергенции записано в декартовой системе. А нам задано поле E в сферической системе координат. Поэтому попытаемся переписать уравнение (3). С учетом сферической симметрии значение $\vec{E}(r)$ можно представить в виде

$$\vec{E} = E(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

или в проекциях

$$E_x = E(r) \frac{x}{r}, \quad E_y = E(r) \frac{y}{r}, \quad E_z = E(r) \frac{z}{r}.$$

Найдем вначале производную $\frac{\partial E_x}{\partial x}$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left(E \frac{x}{r} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Производную $\frac{\partial r}{\partial x}$ можно найти, дифференцируя равен-

ство $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Откуда получаем $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$. В итоге про-

изводная

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE}{dr} \cdot \frac{x^2}{r^2} - \frac{E}{r^3} x^2 + \frac{E}{r}.$$

Аналогичные соотношения получаются и для производных $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial E_z}{\partial z}$:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{dE}{dr} \cdot \frac{y^2}{r^2} - \frac{E}{r^3} y^2 + \frac{E}{r},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{dE}{dr} \cdot \frac{z^2}{r^2} - \frac{E}{r^3} z^2 + \frac{E}{r}.$$

Складывая все три производные, получаем

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E).$$

Таким образом, вид функции распределения плотности заряда шара при сферически симметричном поле будет задан уравнением

$$\rho(r) = \frac{\epsilon_0}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 E(r)].$$

Подставляя сюда выражение (1), находим

$$\rho(r) = 3\alpha\epsilon_0.$$

Осталось только найти значение α . Так как поле на поверхности шара при сферически симметричном распределении совпадает с полем точечного заряда e на расстоянии R , то

$$E(R) = \alpha R = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Откуда находим $\alpha = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ и для плотности заряда шара получаем

$$\rho = \frac{3e}{4\pi R^3},$$

т.е. шар должен быть однородно заряженным (об этом мы могли догадаться еще раньше, учитывая решение задачи 1.2.6). Тем не менее полезно было познакомиться и с дифференциальной формулировкой теоремы Гаусса.

Для определения частоты колебаний электрона с массой m обратимся ко второму закону Ньютона

$$m\ddot{r} = -eE(r),$$

который с учетом явного вида $E(r)$ приводится к стандартному дифференциальному уравнению для гармонических колебаний:

$$m\ddot{r} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r = 0.$$

Теперь нетрудно найти и частоту колебаний:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0 R^3}} \approx 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц.}$$

Это значение по порядку величины совпадает с частотой излучения атома водорода.

1.2.9. Заряженная сфера с однородным полем внутри.

С какой поверхностной плотностью $\sigma(\theta)$ следует распределить заряд по поверхности сферы радиусом R , чтобы поле внутри ее было однородным и равным E_0 ? Как будет выглядеть при этом поле вне сферы?

С математической точки зрения данная задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Однако на этом пути появляются значительные технические трудности. Связано это с тем, что в уравнение (1) входит объемная плотность заряда, которая во всех точках должна иметь конечное значение. А так как по условию задачи сфера заряжена по поверхности, то ρ обращается в бесконечность на поверхности сферы. Правда, с использованием так называемых обобщенных функций дифференциальную форму теоремы Гаусса можно распространить и на этот случай. Поэтому попытаемся найти физический подход к решению данной задачи.

Вспомним решение задачи 1.2.7. Там было показано, что однородное электрическое поле можно получить в области пересечения однородно заряженных шаров с объемной плотностью заряда $+\rho$ и $-\rho$. Причем это поле не зависит от размеров шаров. Поэтому рассмотрим два шара с одинаковыми радиусами, имеющие равномерно распределенные по объему заряды с плотностями ρ и $-\rho$. Пусть центры этих шаров незначительно смещены относительно друг друга на расстояние δl . В нашей исходной задаче заряд отличается от нуля только в приповерхностном слое. Но при малых δl такое распределение объемного заряда приводит к представлению о поверхностной плотности.

Толщина заряженного слоя в точках, определяемых углом θ (рис. 1.24), равна $\delta l \cos \theta$. Значит, на единицу площади в данном месте приходится заряд $\sigma = \rho \delta l \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta$, где $\sigma_0 = \rho \delta l$. Величина σ_0 имеет конечное значение, так как значение ρ очень велико. С учетом решения задачи 1.2.7 имеем

$$E_0 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \delta l = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

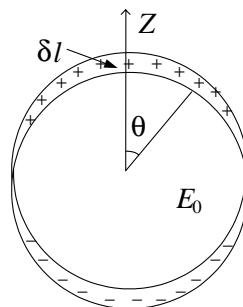


Рис. 1.24

Другими словами, однородное электрическое поле величиной E_0 внутри сферы можно получить, если зарядить сферу по поверхности с плотностью заряда $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, где

$$\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0. \quad (2)$$

Сфера с подобным распределением заряда эквивалентна некоторому диполю с дипольным моментом p . Найдем его.

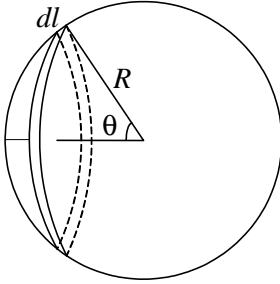


Рис. 1.25

Для этого разобьем сферу на тонкие кольцевые слои радиусом $R \sin \theta$ и шириной $dl = R d\theta$ (рис. 1.25). Заряд такого слоя $dq = \sigma \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta = \sigma_0 2\pi R^2 \cos \theta \sin \theta d\theta$. Центр «тяжести» этого заряда находится на расстоянии $R \cos \theta$ от центра сферы (это половина плеча диполя). Тогда дипольный момент тонкого кольцевого слоя: $dp = 2R \cos \theta dq = \sigma_0 4\pi R^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$. Интегрируя это выражение по θ от нуля до $\pi/2$, получаем

$$p = \sigma_0 4\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\sigma_0 4\pi R^3}{3},$$

или с учетом соотношения (2)

$$p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0.$$

Таким образом, мы показали, что для создания внутри сферы однородного электрического поля напряженностью E_0 необходимо зарядить ее по поверхности, плотность заряда которой изменяется по закону $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$, а вне сферы электрическое поле является полем точечного диполя с дипольным моментом $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$.

1.3. Потенциал. Проводники в электрическом поле

Электрическое поле может быть охарактеризовано не только вектором напряженности \vec{E} . Существует и другой адекватный способ описания поля с помощью скалярной величины φ , называемой потенциалом. Данная величина определяется как некоторая функция координат $\varphi(r)$, убыль которой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Из данного определения следует, что значение потенциала определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Значение этой постоянной не играет никакой роли, так как силовое действие электрического поля определяется напряженностью электрического поля, которая связана с потенциалом соотношением

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi.$$

Потенциал поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Для произвольной системы точечных зарядов

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}.$$

Если же заряды, образующие систему, распределены непрерывно в пространстве с объемной плотностью ρ , то

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r},$$

где интегрирование проводится по объему пространства, содержащему заряды. Аналогичные выражения можно написать и для поверхностного или линейного распределения зарядов.

Преимущество описания электрического поля на языке потенциала связано с тем, что для нахождения напряженности электрического поля легче сначала найти потенциал (это скалярная величина), а затем взять градиент от него. Кроме того, расчет работы сил электрического поля при перемещении заряда легче проводить через понятие потенциальной энергии, нежели прямым вычислением.

При внесении любого вещества в электрическое поле в веществе происходит смещение положительных и отрицательных зарядов (электронов и ядер). Тогда в различных местах вещества появляются нескомпенсированные заряды различного знака. В проводниках эти заряды называются индуцированными, в диэлектриках – поляризационными. Зная внешнее поле и распределение индуцированных (поляризационных) зарядов, можно при нахождении результирующего поля не обращать внимания на наличие самого вещества – его роль уже учтена с помощью индуцированных зарядов.

Наиболее простая ситуация возникает в проводниках, находящихся во внешнем электростатическом поле. В них индуцированные заряды появляются только на поверхности проводника с некоторой плотностью σ' . При этом поле внутри проводника исчезает ($\vec{E} = 0$) и весь объем проводника становится эквипотенциальным (включая поверхность). Внешнее поле вблизи поверхности проводника имеет только нормальную составляющую, которая связана с плотностью σ' соотношением

$$E_n = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}.$$

Очень часто приходится иметь дело с задачами, в которых распределение заряда неизвестно (не задано), но заданы потенциалы проводников, их форма и взаимное расположение. Тогда распределение потенциала $\varphi(r)$ в пространстве между проводниками подчиняется дифференциальному уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

где $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta$ – оператор Лапласа (лапласиан). В декартовых координатах он имеет вид $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. К уравнению Пуассона необходимо добавить еще так называемые граничные условия, задающие значения потенциалов на поверхности самих проводников.

Такая задача имеет единственное решение (теорема единственности). С физической точки зрения этот вывод довольно очевиден: если решение будет не единственным, то в каждой точке значение \vec{E} будет неоднозначным – а это абсурд. Согласно теореме единственности заряд на поверхности проводника в статическом случае распределяется также единственным образом, так как между зарядами проводника и полем вблизи его поверхности есть однозначная связь ($\sigma' = \epsilon_0 E_n$).

Использование теоремы единственности весьма облегчает решение ряда задач электростатики. Каким бы способом (пусть даже путем догадки) мы ни нашли решение, удовлетворяющее уравнению Пуассона и граничным условиям, можно утверждать, что оно (решение) является правильным и единственным.

При наличии определенной симметрии формы проводников для расчета полей применяют так называемый метод

электрических изображений. Это искусственный метод, позволяющий убрать проводящее тело вместе с индуцированными зарядами σ' и заменить его точечными зарядами, которые называются электрическим изображением внешних зарядов. Тогда задача об электрическом поле зарядов, расположенных по одну сторону от проводящей поверхности, сводится к отысканию электрических изображений этих зарядов в этой поверхности.

Рассмотрим реализацию этого метода на самом простом примере точечного заряда q над бесконечной плоской поверхностью проводника.

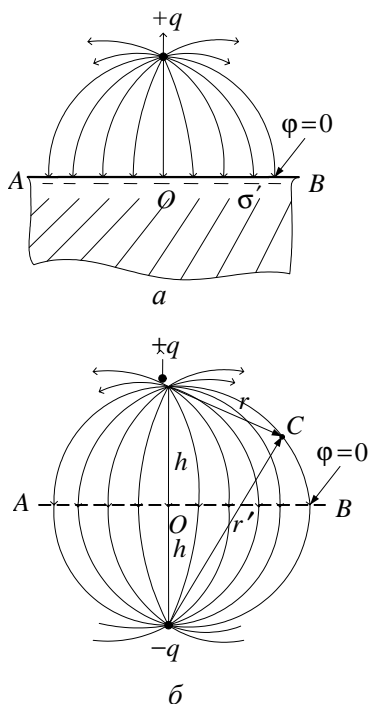


Рис. 1.26

На рис. 1.26, а представлена картина силовых линий во внешнем пространстве. Но очень похожая картина получается и для электрического поля двух зарядов $+q$ и $-q$, находящихся в вакууме (рис. 1.26, б). Совместим со средней эквипотенциальной поверхностью $\phi=0$ (отмечена штриховой линией на рис. 1.26, б) проводящую плоскость и уберем заряд $-q$. При этом электрическое поле в верхнем полупространстве не изменится, так как на проводящей бесконечной плоскости потенциал также равен нулю. Таким образом, электрическим изображением заряда q в плоскости провод-

ника AB будет заряд противоположного знака $q' = -q$, расположенный симметрично по другую сторону плоскости AB . Тогда потенциал любой точки C над поверхностью проводника будет находиться как

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right).$$

Он обращается в нуль на плоскости AB , а потому эта плоскость является эквипотенциальной.

С физической точки зрения действие всех индуцированных зарядов на проводящей плоскости AB можно заменить действием одного заряда $q' = -q$, являющегося зеркальным отражением заряда q в плоскости AB . Отсюда, в частности, следует, что индуцированные заряды притягивают заряд q

с той же силой, что и заряд q' , т.е. с силой $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2h)^2}$,

где h – расстояние заряда q от плоскости AB . Поэтому эта сила называется силой электрического изображения. В нижнем полупространстве проводника индуцированные заряды компенсируют поле заряда q .

По существу метод изображений основан на подгонке потенциала под граничные условия. При этом мы находим другую конфигурацию зарядов, для которой поле в интересующей нас части пространства остается тем же.

1.3.1. Слияние капель. N одинаковых капелек ртути заряжены до одного и того же потенциала φ . Каков будет потенциал большой капли, получившейся при слиянии этих капелек?

Так как капелька, вообще говоря, не является точечным зарядом, то, прежде всего, необходимо научиться рассчитывать ее потенциал. Ртуть – это проводник, поэтому заряд ка-

пельки q сосредоточен только на ее поверхности. В этом случае напряженность поля вне сферы можно рассчитать по формуле

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

И тогда, принимая потенциал бесконечно удаленных точек за нуль, для потенциала капельки находим

$$\varphi = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr'}{r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1)$$

где r – радиус капельки. При слиянии N капелек, очевидно, должны быть выполнены следующие условия

$$Q = Nq, \quad V = Nv,$$

где Q – заряд всей большой капли; V – ее объем; v – объем маленькой капли. Последнее условие дает связь радиусов большой R и малой капли r :

$$R = rN^{1/3}.$$

Тогда аналогично (1) потенциал большой капли Φ можно найти как

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Nq}{4\pi\epsilon_0 rN^{1/3}} = \varphi N^{2/3}.$$

1.3.2. Двухпроводная линия. Какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E_{\max} = 30$ кВ/см, диаметр проводов $d = 1$ см, а расстояние между проводами $b = 5$ м?

Решение данной задачи предполагает в первую очередь знание распределения напряженности электрического поля в пространстве между проводами. Будем полагать, что эти

провода заряжены зарядами разного знака и заряд, приходящийся на единицу длины, одинаков по длине проводов. В силу принципа суперпозиции поле между проводами на расстоянии r от одного из них можно найти как

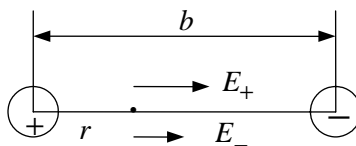


Рис. 1.27

$$E = E_+ + E_- ,$$

где E_+ и E_- – напряженности электрических полей, созданных цилиндрическими проводниками, обладающими зарядами разного знака (рис. 1.27). Из теоремы Гаусса сразу следует

$$E_+ = \frac{\beta}{r}, \quad E_- = \frac{\beta}{b-r},$$

где β – постоянный коэффициент, определяемый линейной плотностью заряда проводников. Разность потенциалов между проводами

$$\Delta\varphi = \int E(r)dr = \int_{d/2}^{b-d/2} \frac{\beta dr}{r} + \int_{d/2}^{b-d/2} \frac{\beta dr}{b-r} = 2\beta \ln \frac{b-d/2}{d/2}.$$

Очевидно, что наибольшее значение напряженности электрического поля (E_{\max}) наблюдается вблизи поверхности одного из проводников и в данном месте можно пренебречь полем другого проводника, т.е. $E_{\max} \approx \frac{\beta}{d/2}$. Откуда можно найти значение β и для максимальной разности потенциалов получаем

$$\Delta\varphi_{\max} \approx E_{\max} d \ln \left(\frac{2b}{d} - 1 \right) \approx E_{\max} d \ln \frac{2b}{d} \approx 207 \text{ кВ}.$$

1.3.3. Потенциал тонкого диска. Найти потенциал на оси тонкого диска и на его краю. Диск заряжен равномерно, его поверхностная плотность σ , радиус R .

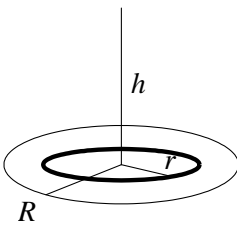


Рис. 1.28

Решение первой части задачи (потенциал на оси диска) не вызывает затруднений в силу хорошей симметрии. Для этого разобьем диск на тонкие кольца радиусом r и шириной dr (рис. 1.28). Тогда для произвольной точки на оси, отстоящей на расстояние h от диска, можно записать

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{h^2 + r^2}},$$

где $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$. Осталось только проинтегрировать по r от нуля до R :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + h^2} - h \right). \quad (1)$$

При $h \rightarrow 0$ (центр диска) $\varphi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$. Далеко от диска не-

обходимо найти предел выражения (1) при $h \rightarrow \infty$:

$$\varphi = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{1 + R^2/h^2} - 1 \right) \approx \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 h} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h}$$

(мы использовали приближенное равенство $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ при $x \ll 1$). Последний результат означает, что на большом расстоянии диск выглядит как точечный заряд q . Это будет справедливым для заряда любой формы на больших расстояниях от него.

Найти же потенциал на краю диска будет более сложной задачей, так как эта точка расположена не так симметрично

по отношению к диску. Для упрощения интегрирования выберем в качестве площадки dS часть кольца радиусом r и шириной dr (рис. 1.29) и будем опираться на свойства окружности. При этом

$$dS = 2\theta r dr, \quad r = 2R \cos \theta.$$

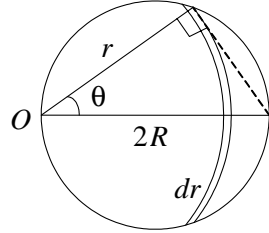


Рис. 1.29

Из последнего равенства следует, что $dr = -2R \sin \theta d\theta$. Тогда для потенциала в точке O получаем

$$\varphi = -\frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \theta \sin \theta d\theta.$$

Для интегрирования по частям обозначим $\theta = u$, $\sin \theta d\theta = dv$. Тогда

$$\int \theta \sin \theta d\theta = -\theta \cos \theta + \int \cos \theta d\theta = -\theta \cos \theta - \sin \theta.$$

После подстановки пределов интегрирования находим

$$\varphi = \frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0},$$

т.е. потенциал на краю диска несколько меньше, чем в его середине.

1.3.4. Потенциал диполя. Найдем вначале потенциал поля диполя. Для произвольной точки P (рис. 1.30) имеем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right).$$

Так как $r \gg l$, то $r_- \approx r_+ - l \cos \theta$ (r — расстояние от точечного диполя до точки P). Тогда

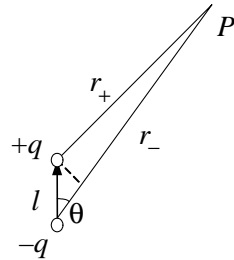


Рис. 1.30

$$\varphi \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + l/\cos\theta} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos\theta}{r^2}.$$

С использованием понятия дипольного момента \vec{p} выражение для потенциала можно записать иначе:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}.$$

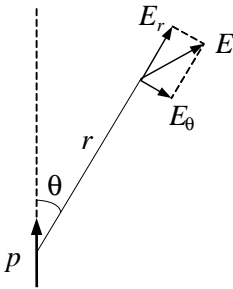


Рис. 1.31

Зная распределение потенциала, нетрудно найти и выражение для вектора напряженности электрического поля. Найдем вначале проекцию поля на направление вектора \vec{r} (рис. 1.31):

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3}.$$

Для определения проекции вектора \vec{E} на направление, перпендикулярное \vec{r} (E_θ), учтем, что бесконечно малое перемещение точки P в направлении, перпендикулярном \vec{r} , равно $rd\theta$, тогда

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{rd\theta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3}.$$

Модуль вектора \vec{E}

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}.$$

Этот же результат мы получали и ранее прямым расчетом напряженности электрического поля для системы двух зарядов.

Найдем теперь энергию диполя как системы двух точечных зарядов во внешнем электрическом поле:

$$W = q(\varphi_+ - \varphi_-).$$

Здесь φ_+ и φ_- – потенциалы внешнего поля в точках расположения зарядов $+q$ и $-q$. Так как эти точки очень близки, то

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial \varphi}{\partial l} l,$$

где $\partial \varphi / \partial l$ – производная потенциала φ по направлению вектора \vec{l} , а это равно со знаком минус проекции поля на направление диполя. Тогда

$$W = -qlE_l = -\vec{p}\vec{E}.$$

Отсюда видно, что положение устойчивого равновесия диполя (ему соответствует минимальная энергия) наблюдается, когда $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}$.

Рассмотрим теперь систему из двух разноименных зарядов, отношение величин которых $q_1/q_2 = \eta > 1$ и расположенных на расстоянии l друг от друга. Покажем, что поверхность нулевого потенциала есть сферическая поверхность. Для этого за начало координат выберем точку, в которой находится первый заряд, и направим ось X в сторону второго заряда. В силу принципа суперпозиции потенциал в точке (x, y) плоскости, проходящей через линию соединения зарядов,

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q_2}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2 + z^2}} \right].$$

Тогда уравнение поверхности нулевого потенциала будет иметь вид

$$\frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q_2}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

При $q_1 \neq q_2$ данное уравнение можно переписать как

$$\left(x - \frac{q_1^2 l}{q_1^2 - q_2^2} \right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{q_1 q_2 l}{q_1^2 - q_2^2} \right)^2,$$

а это есть уравнение сферы с радиусом

$$r = \frac{q_1 q_2}{q_1^2 - q_2^2} l = \frac{\eta l}{\eta^2 - 1},$$

центр которой отстоит от первого заряда на расстояние

$$h = \frac{q_1^2 l}{q_1^2 - q_2^2} = \frac{l}{\eta^2 - 1}.$$

Этот результат довольно неожиданный, так как ни о какой симметрии при неодинаковых зарядах не может быть и речи (а сфера – очень симметричная поверхность).

Пусть теперь точечный электрический диполь с моментом \vec{p}_0 находится во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью \vec{E}_0 , причем $\vec{p}_0 \uparrow\uparrow \vec{E}_0$. Покажем, что одна из эквипотенциальных поверхностей, охватывающих диполь, является сферой и найдем ее радиус.

Прямое решение задачи, подобное вышеприведенному, затруднительно. Поэтому воспользуемся теоремой единственности и тем, что подобная ситуация в некотором смысле нам уже встречалась ранее. Предположим, что в поле, являющемся суммой однородного электрического поля и поля диполя, существует сферическая эквипотенциальная поверхность. Заменим ее сферической проводящей поверхностью и уберем диполь. Тогда на данной поверхности появятся неоднородно распределенные индуцированные заряды разных

знаков с плотностью σ' , а поле внутри данной сферы исчезнет. Это значит, что индуцированные заряды должны создать внутри сферы однородное электрическое поле с напряженностью $-\vec{E}_0$. Вспомним теперь решение задачи 1.2.9. Там было показано, что для создания внутри сферы однородного электрического поля напряженностью E_0 поверхностная плотность зарядов должна изменяться по закону $\sigma' = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$, а вне сферы электрическое поле является полем точечного диполя с электрическим моментом $p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$. Таким образом, вне сферы радиусом R электрическое поле является суммой однородного поля напряженностью E_0 и поля диполя. Именно такое поле и задано в нашей задаче. И если теперь значение p положить равным p_0 , то мы сразу же найдем радиус сферической эквипотенциальной поверхности

$$R = \left(\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}.$$

1.3.5. Проводящий шарик в однородном поле. Во внешнее однородное электрическое поле \vec{E}_0 внесен металлический шарик радиусом r . Как изменится напряженность электрического поля вблизи поверхности шарика?

Мы уже знаем, что внутри проводящего тела в условиях статики, ни при каких условиях не может быть заряда. Кроме этого, внутри такой сферы не будет и электрического поля. Это означает, во-первых, что внешнее электрическое поле E_0 должно индуцировать такие заряды на поверхности сферы, поле которых E' , должно скомпенсировать внутри сферы внешнее электрическое поле. Во-вторых, внешнее электрическое поле должно быть перпендикулярным к поверхности сферы (иначе начнется движение зарядов проводящей сферы). Таким образом, картина распределения поля и зарядов

на сфере будет такой, как показано на рис. 1.32. Причем внешнее поле вблизи сферы связано с плотностью индуцированных зарядов σ' соотношением $E_n = \sigma' / \epsilon_0$ (это вытекает из теоремы Гаусса).

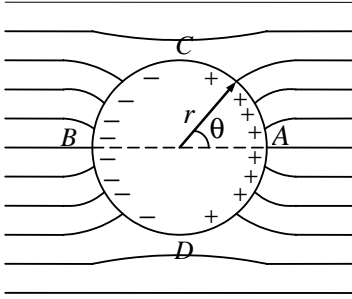


Рис. 1.32

Из наших рассуждений следует, что собственное поле индуцированных зарядов внутри сферы должно быть в точности равным исходному однородному невозмущенному полю E_0 . Если же «заморозить» индуцированные заряды и убрать внешнее поле, то, как следует из задачи 1.2.9, поле этих

зарядов вне сферы будет эквивалентным полю точечного диполя с дипольным моментом

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \vec{E}_0 r^3.$$

Таким образом, поле вне проводящего шарика складывается из двух полей – однородного поля \vec{E}_0 и поля точечного диполя $\vec{E}_{\text{дип}}$: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{дип}}$. Вблизи же шарика электрическое поле проще найти из соотношения $E_n = \sigma' / \epsilon_0$, где σ' – поверхностная плотность индуцированных зарядов. В задаче 1.2.9 было показано, что $\sigma' = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$. Откуда сразу следует, что напряженность электрического поля вблизи поверхности проводящего шарика

$$\vec{E} = 3E_0 \cos \theta \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

где \vec{r} – радиус-вектор, соединяющий центр шарика и точку его поверхности. Таким образом, в точках A и B (см. рис. 1.32) напряженность поля увеличивается в 3 раза, а в точках C и D обращается в нуль.

1.3.6. Взаимодействие проводящих шариков в однородном электрическом поле. Найти величину и направление силы взаимодействия между двумя незаряженными проводящими шариками радиусом r , помещенными в однородное электрическое поле \vec{E}_0 , направленное параллельно линии, соединяющей центры сфер. Расстояние между центрами сфер $R \gg r$.

В предыдущей задаче было показано, что незаряженный металлический шарик радиусом r , находящийся в однородном электрическом поле \vec{E}_0 , эквивалентен точечному диполю с дипольным моментом $\vec{p}_1 = 4\pi\epsilon_0 r^3 \vec{E}_0$. Если же в это поле поместить точно такой же второй незаряженный металлический шарик, то в общем случае его дипольный момент \vec{p}_2 уже не будет равным \vec{p}_1 . Это происходит потому, что второй шарик помещается уже в неоднородное поле (оно было однородным только для первого шарика). Но если расстояние между шариками R достаточно велико по сравнению с размерами шариков, то можно пренебречь искажением поля и считать, что второй шарик также находится в однородном электрическом поле напряженностью E_0 . Таким образом, наша задача сводится к расчету силы взаимодействия двух одинаковых точечных диполей, дипольные моменты которых направлены вдоль соединяющей их прямой. Поэтому воспользуемся готовым решением из задачи 1.1.8:

$$F = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 R^4},$$

где $p_1 = p_2 = 4\pi\epsilon_0 r^3 E_0$. Окончательно получаем

$$F = \frac{24\pi\epsilon_0 r^6 E_0^2}{R^4},$$

и эта сила будет силой притяжения.

Решите эту же задачу, если вектор \vec{E}_0 перпендикулярен линии, соединяющей центры шариков. (Ответ:

$$F = \frac{12\pi\epsilon_0 r^6 E_0^2}{R^4}, \text{ шарики отталкиваются})$$

1.3.7. Распределение индуцированных зарядов на проводящей плоскости. Над бесконечной проводящей плоскостью на расстоянии l от нее находится точечный заряд q . Определить поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию угла θ между перпендикуляром к плоскости и направлением на данную точку.

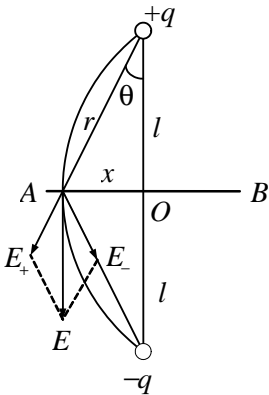


Рис. 1.33

Это классическая задача на использование метода электрических изображений. В соответствии с этим методом можно убрать проводящую плоскость и заменить ее электрическим изображением заряда q . Ранее мы выяснили, что изображением заряда q в бесконечной плоскости будет заряд $q' = -q$, расположенный по другую сторону плоскости на таком же расстоянии l , что и заряд q . Обозначим одну из силовых линий, проходящих через рассматриваемую точку плоскости (рис. 1.33).

Полное поле вне проводника (вектор \vec{E}) в любой точке является суммой двух векторов — \vec{E}_+ (от заряда $+q$) и \vec{E}_- (от заряда $-q$). Вблизи поверхности проводника

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Тогда модуль \vec{E}

$$E = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos \theta,$$

и так как $r = l / \cos \theta$, то

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l^2} \cos^3 \theta.$$

В силу связи плотности индуцированных зарядов и поля вблизи проводника получаем

$$\sigma'(\theta) = -\frac{q}{2\pi l^2} \cos^3 \theta. \quad (1)$$

Полный индуцированный заряд на бесконечной плоскости AB равен и противоположен по знаку заряду q . В этом легко убедиться непосредственным интегрированием выражения (1) по плоскости AB . Для этого разобьем плоскость AB на тонкие кольца радиусом x и шириной dx . Тогда полный заряд плоскости

$$q_{\text{инд}} = \int \sigma' 2\pi x dx.$$

С учетом соотношений $x = l \cdot \operatorname{tg} \theta$, $dx = \frac{l d\theta}{\cos^2 \theta}$ находим

$$q_{\text{инд}} = - \int_0^{\pi/2} 2\pi l \cdot \operatorname{tg} \theta \frac{q \cos^3 \theta}{2\pi l^2} l \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -q \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = -q.$$

Еще проще воспользоваться теоремой Гаусса. Окружим заряд q и индуцированные заряды бесконечно удаленной сферой с центром в точке O . На полусфере, проходящей внутри проводящей среды, поле и его поток равны нулю. На полусфере, проходящей в вакууме, поле совпадает с полем диполя, а потому обратно пропорционально кубу радиуса. И так как сама поверхность полусферы возрастает пропорционально квадрату радиуса, то поток вектора \vec{E} через нее в пределе $r \rightarrow \infty$ обращается в нуль. Тогда по теореме Гаусса должен обращаться в нуль и полный заряд внутри данной сферы. Но этот заряд равен $q + q_{\text{инд}}$, значит, $q_{\text{инд}} = -q$.

1.3.8. Заряд между двумя проводящими плоскостями.

Точечный заряд q находится между двумя большими парал-

лельными проводящими пластинами A и B , отстоящими от заряда на расстояния l_1 и l_2 . Найти полные заряды q_1 и q_2 , наведенные на каждой из пластин, если пластины соединены проводом.

Распределение поля между пластинами носит довольно сложный характер (рис. 1.34, a). Поэтому попробуем так видоизменить постановку задачи, чтобы поле выглядело более

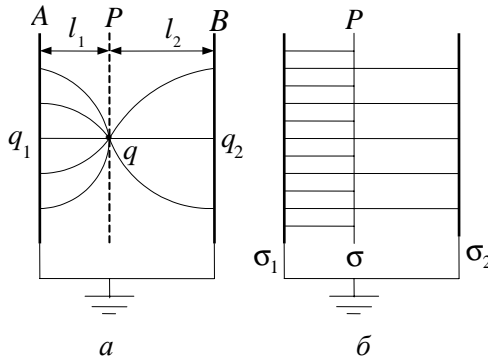


Рис. 1.34

просто, но это никак не повлияло бы на ответ. Будем рассуждать следующим образом. Что произойдет, если заряд q переместить в другую точку плоскости P ? При этом, очевидно, изменится только распределение индуцированных зарядов на плоскостях A и B , сами же заряды q_1 и q_2 останутся прежними: индуцированные заряды просто перемещаются вместе с зарядом q . Если же поместить на плоскость P несколько точечных зарядов, то вследствие принципа суперпозиции каждый заряд индуцирует на плоскостях A и B такие заряды, как если бы он был один. Поэтому, если нас не интересует распределение индуцированных зарядов, а только их величина, то заряд q можно равномерно «размазать» по всей плоскости P с некоторой плотностью σ . От этого индуцирован-

ные заряды не изменятся, а задача становится совсем простой, так как мы приходим к однородному полю (рис. 1.34, б). Заметим, что снаружи пластин A и B поля нет! Из этого сразу следует

$$\sigma = -(\sigma_1 + \sigma_2),$$

где σ_1 и σ_2 – поверхностные плотности зарядов пластин A и B . Причем эти плотности связаны с напряженностью полей E_1 и E_2 соотношениями

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1, \quad \sigma_2 = \varepsilon_0 E_2. \quad (1)$$

Так как пластины соединены, то разность потенциалов между ними равна нулю. Отсюда находим

$$E_1 l_1 = E_2 l_2. \quad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) значения E_1 и E_2 , получаем

$$\sigma_1 = -\sigma \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad \sigma_2 = -\sigma \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

Аналогичный вид имеют и выражения для искоемых зарядов q_1 и q_2 через заряд q .

Решение этой задачи с помощью метода изображений весьма затруднительно: необходим бесконечный ряд фиктивных зарядов, располагающихся на разных расстояниях по обе стороны от пластин A и B . В итоге мы приходим к бесконечному ряду знакопеременных слагаемых, суммирование которого не совсем просто. И задача резко упрощается, если заряд q поместить посередине между пластинами A и B . В связи с этим рассмотрим такую задачу.

Посередине между заземленными проводящими пластинами 1 и 2 находится точечный заряд q . Расстояние между пластинами $2l$. Найти плотности индуцированных зарядов в точках A и B (рис. 1.35, а). Краевыми эффектами пренебречь.

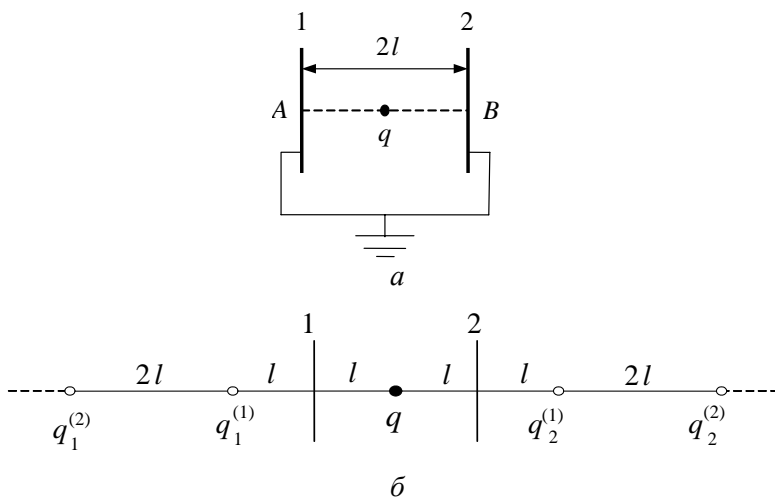


Рис. 1.35

Воспользуемся результатами решения задачи 1.3.7 о распределении индуцированных зарядов по проводящей плоскости. Согласно ей одиночный заряд q индуцирует на каждой проводящей плоскости напротив себя заряд с поверхностной плотностью

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi l^2}. \quad (1)$$

Казалось бы, что это и будет ответом нашей задачи. Это не совсем так. Действие индуцированных зарядов эквивалентно симметрично расположенным зарядам $q_1^{(1)} = q_2^{(1)} = -q$. Их величина и расположение подбирались так, чтобы потенциал проводящей плоскости, в которой производится отражение, был равен нулю. Но теперь заряд $q_1^{(1)}$ даст ненулевой вклад в потенциал второй плоскости (как и заряд $q_2^{(1)}$ в первой плоскости). Для того чтобы исправить ситуацию,

придется добавить еще заряды $q_1^{(2)} = q_2^{(2)} = q$, расположенные симметрично проводящим плоскостям A и B на расстояниях уже $3l$. Легко сообразить, что этот процесс необходимо продолжать и дальше, располагая отраженные заряды на расстояниях $5l, 7l$ и т.д. и при каждом отражении изменять знак заряда на противоположный. Таким образом, картина расположения отраженных зарядов при наличии двух проводящих плоскостей будет выглядеть так, как показано на рис. 1.35, б. На нем обозначено: q – реальный заряд, $q_1^{(n)}$ – n -е отражение заряда q в первой проводящей плоскости, $q_2^{(n)}$ – n -е отражение заряда q во второй проводящей плоскости (аналогичная картина наблюдается и в оптике при наличии нескольких зеркал). Все эти заряды одинаковы по модулю, но у них разные знаки (при каждом последующем отражении знак изменяется на обратный).

В итоге полную плотность индуцированных зарядов на каждой плоскости в точках A и B можно представить в виде бесконечного ряда убывающих знакопеременных слагаемых. В соответствии с формулой (1) и рис. 1.35, б имеем

$$\sigma_A = \sigma_B = -\frac{q}{2\pi l^2} \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right).$$

Этот ряд сходится достаточно быстро и с точностью порядка одного процента (отбрасывая все члены, начиная с 13^2) получаем

$$\sigma_A = \sigma_B = -0,145 \frac{q}{l^2}.$$

1.3.9. Проводящий шар и точечный заряд. Полая проводящая сфера радиусом R имеет заряд Q . В сфере имеется малое отверстие. Как будет меняться потенциал сферы, если точечный заряд q перемещать из бесконечности через отверстие внутрь сферы (рис. 1.36)?

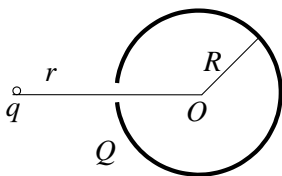


Рис. 1.36

Малость отверстия означает, что оно не влияет на распределение зарядов сферы и создаваемое ими поле. Рассмотрим вначале ситуацию, когда заряд q находится вне сферы. В этом случае внутри сферы нет ни зарядов, ни поля, значит, весь объем сферы является эквипотенциальным. В силу принципа суперпозиции потенциал любой точки поля можно определить как

$$\varphi = \varphi_q + \varphi_Q,$$

где φ_q и φ_Q — потенциалы, создаваемые точечным зарядом q и полным зарядом сферы. При этом следует помнить, что на исходный заряд сферы Q накладываются еще индуцированные заряды, но их сумма в силу закона сохранения заряда всегда равна нулю. Так как потенциал всех точек сферы одинаков, то проще всего найти его для точки O (центр сферы). Только для этой точки характер распределения зарядов на поверхности сферы никак не влияет на значение потенциала:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right) \quad \text{при } r > R. \quad (1)$$

Второе слагаемое было получено интегрированием по всем бесконечно малым зарядам сферы, которые независимо от их распределения отстоят от центра сферы на одинаковое расстояние R .

Как только заряд q «въедет» внутрь сферы, он создаст такое распределение индуцированных зарядов на внутренней поверхности сферы, при котором их поле и поле точечного заряда в толще стенок сферы в сумме обратится в нуль.

Индукцированный же заряд на внешней поверхности сферы (равный q) будет распределен равномерно и поле внутри сферы не создаст. Избыточный заряд сферы Q также останется равномерно распределенным по наружной поверхности. Таким образом, полный заряд внешней поверхности сферы оказывается равномерно распределенным. И за пределами сферы электрическое поле выглядит так, как будто оно создано точечным зарядом $q + Q$, находящимся в центре сферы (рис. 1.37). При этом совершенно не важно, где находится внесенный внутрь сферы заряд q . Тогда потенциал сферы можно найти как

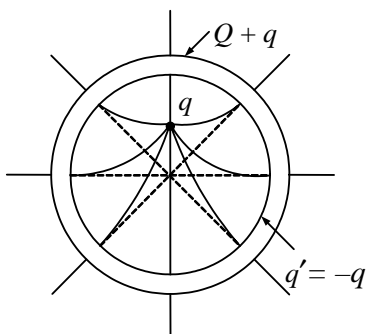


Рис. 1.37

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + Q}{R} \quad \text{при} \quad r \leq R.$$

Пусть теперь точечный заряд q находится на расстоянии r от центра незаряженного проводящего шара радиусом R . Какой заряд протечет по проводнику, если этим проводником заземлить шар?

До заземления потенциал шара в соответствии с формулой (1) был равен $q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Заземление проводящего шара означает, что его потенциал должен стать равным нулю. Для этого на шар из Земли должен прийти заряд q' такой, чтобы выполнилось равенство

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R} = 0.$$

Откуда

$$q' = -q \frac{R}{r}.$$

Именно таким способом можно зарядить металлический шарик, не прикасаясь к нему никаким другим заряженным телом.

1.3.10. Взаимодействие точечного заряда и металлического шара. С какой силой притягивается точечный заряд q к незаряженному заземленному металлическому шару радиусом R ? Заряд находится на расстоянии $l > R$ от центра шара (рис. 1.38). Какова максимальная и минимальная поверхностная плотность индуцированного заряда шара?

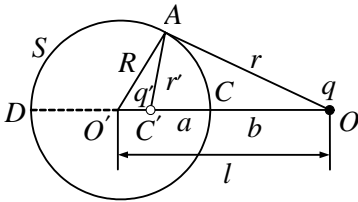


Рис. 1.38

Какова максимальная и минимальная поверхностная плотность индуцированного заряда шара?

Не очень понятно, о какой силе взаимодействия идет речь. Ведь по условию задачи сфера незаряжена. На самом

деле эта сфера была незаряжена до заземления и поднесения к ней точечного заряда. После заземления, как было показано в предыдущей задаче, на сфере появляется заряд. Кроме того, эта сфера находится во внешнем неоднородном поле точечного заряда. Это поле приводит к неоднородному поверхностному распределению индуцированных зарядов на сфере, что также обуславливает притяжение.

Так как сфера S заземлена, то ее потенциал равен нулю. Величина точечного заряда q и его расстояние до центра сферы $l = OO'$ заданы. Этими условиями решение электростатической задачи определяется однозначно. Поля внутри проводящей сферы нет. Для определения же поля вне сферы воспользуемся методом изображений. В соответствии с этим методом задача об электрическом поле заряда, расположенного по одну сторону от проводящей поверхности, сводится

к отысканию электрического изображения этого заряда в этой поверхности. В нашем случае это означает, что потенциал, создаваемый фиктивным зарядом q' (см. рис. 1.38) на поверхности S , должен быть равным и противоположным по знаку потенциалу, создаваемому реальным зарядом q на этой же поверхности. Так как потенциал точечного заряда обратен расстоянию, то задача сводится к следующей. Необходимо найти точку такую C' внутри сферы S , чтобы при любом положении точки A на сфере выполнялось условие

$$\frac{r'}{r} = \text{const} = -\frac{q'}{q}. \quad (1)$$

Такая точка, как легко убедиться, существует, если треугольник $O'AC'$ подобен треугольнику $O'AO$. Из их подобия следует

$$\frac{r'}{r} = \frac{R}{l}. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) показывают, что величина q' не зависит от положения точки A на сфере S . Следовательно, потенциал, создаваемый зарядами q и q' , обращается в нуль во всех точках сферы S , т.е. q' является электрическим изображением заряда q в сфере S .

Общий заряд $q_{\text{инд}}$, индуцированный на сфере S , равен по величине и совпадает по знаку с зарядом q' . Для доказательства возьмем произвольную замкнутую поверхность S' , окружающую сферу S , но не включающую в себя заряд q . На поверхности S' поле \vec{E} совпадает с полем точечных зарядов q и q' , из которых q лежит вне поверхности S' . Поэтому поток Φ этого поля через поверхность S' будет $\Phi = q'/\epsilon_0$. По теореме Гаусса этот же поток равен $q_{\text{инд}}/\epsilon_0$.

Следовательно, $q_{\text{инд}} = q'$. Заметим, что электрические заряды q и q' обладают свойством взаимности: если q' является электрическим изображением заряда q , то справедливо и обратное утверждение – заряд q является электрическим изображением заряда q' . Это замечание позволяет распространить изложенный метод на случай, когда точечный заряд внесен внутрь сферической полости, сделанной в проводнике.

Из рис. 1.38 можно найти расстояние $a = CC'$ от заряда q' до ближайшей точки сферы C и расстояние $b = CO$ от заряда q до точки C

$$a = R \left(1 - \frac{R}{l} \right), \quad b = l - R. \quad (3)$$

Как легко проверить, эти расстояния связаны между собой формулой

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{R}.$$

Не правда ли, очень похоже на известную в оптике формулу, определяющую положение точки и ее изображения в сферическом зеркале!

Найдем теперь с учетом формул (1)–(3) модуль силы взаимодействия зарядов q и q' :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a+b)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R l}{(l^2 - R^2)^2}.$$

Попробуйте найти силу взаимодействия, если сфера S изолирована и задан ее полный заряд Q .

Указание. Для определения поля во внешнем пространстве к зарядам q и q' надо добавить еще третий (фиктивный) заряд $q'' = Q - q'$, поместив его в центр сферы.

$$(\text{Ответ: } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \left[\frac{q^2 R l}{(l^2 - R^2)^2} - \frac{qQ}{l^2} - \frac{q^2 R}{l^3} \right]; \text{ за поло-}$$

жительное направление силы принято направление от заряда q к центру сферы).

Для определения максимальной и минимальной поверхностной плотности индуцированного заряда на сфере воспользуемся связью плотности заряда и напряженности электрического поля $\sigma = \epsilon_0 E_n$, где $E_n = E$ складывается из двух полей – поля заряда q и поля его изображения q' . Величину q' нетрудно найти из соотношений (1) и (2):

$$q' = -q \frac{R}{l}.$$

Тогда минимальное значение напряженности электрического поля (в точке D)

$$E_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(l+R)^2} + \frac{q'}{(x+R)^2} \right],$$

где $x = R - a = R^2 / l$ (см. рис. 1.38). Соответственно

$$\sigma_D = -\frac{q}{4\pi(l+R)^2} \left(\frac{l}{R} - 1 \right).$$

Аналогично получаем и максимальное значение плотности заряда (в точке C):

$$\sigma_C = -\frac{q}{4\pi(l-R)^2} \left(\frac{l}{R} + 1 \right).$$

1.4. Электрическое поле в диэлектриках

При внесении диэлектрика в электрическое поле изменяется как само поле, так и диэлектрик. Нечто подобное происходит и с проводниками, с той лишь разницей, что в условиях равновесия поле внутри проводника обращается в нуль. В диэлектриках же электрическое поле не обращается в нуль и определяется как сторонними зарядами (внешним полем), так и зарядами поляризации. Именно это обстоятельство и усложняет расчет поля при наличии диэлектриков, так как универсальной связи между электрическим полем и поляризационными зарядами, пригодной для всех случаев, не существует.

Одной из фундаментальных теорем электростатики является теорема Гаусса. Однако ее применение для расчета поля в диэлектриках оказывается не эффективным даже при «достаточно хорошей» симметрии. Дело в том, что в соотношение

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = (q + q')$$

входят как сторонние (q), так и связанные (q') заряды, причем величина связанных зарядов явно зависит от неизвестного поля \vec{E} в диэлектрике. Это затруднение, однако, можно обойти, если воспользоваться теоремой Гаусса для вспомогательной величины \vec{D} , которую называют электрическим смещением или электрической индукцией

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q, \quad (1)$$

где

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \quad (2)$$

q – сумма сторонних (не входящих в состав молекул) зарядов, а вектор \vec{P} называется вектором поляризации (поляризованность диэлектрика),

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_i .$$

Здесь ΔV – физически бесконечно малый объем диэлектрика; $\sum \vec{p}_i$ – сумма дипольных моментов всех молекул, входящих в объем ΔV . В дифференциальной форме уравнение (1) имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho ,$$

где ρ – объемная плотность стороннего заряда в той же точке.

Как показывает опыт, для изотропного диэлектрика и не слишком больших полей поляризованность пропорциональна полю внутри диэлектрика, т.е. между \vec{P} и \vec{E} выполняется соотношение

$$\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} , \quad (3)$$

где ϵ – безразмерная величина, называемая диэлектрической восприимчивостью ($\epsilon > 0$). Кроме того, для вектора \vec{P} существует теорема Гаусса

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q'_{\text{внутр}} , \quad (4)$$

где $q'_{\text{внутр}}$ – избыточный связанный заряд диэлектрика в объеме, охватываемом поверхностью S . В дифференциальной форме уравнение (4) имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho' , \quad (5)$$

где ρ' – объемная плотность избыточного связанного заряда в той же точке.

Из соотношений (2) и (3) следует связь векторов \vec{E} и \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E},$$

где $\epsilon = 1 + \epsilon'$ – диэлектрическая проницаемость вещества. Необходимо только помнить, что данная связь выполняется только для однородных и изотропных диэлектриков.

Поле вектора \vec{D} зависит, вообще говоря, как от сторонних, так и связанных зарядов (как и поле вектора \vec{E}). Поэтому в общем случае решение задачи о результирующем поле \vec{E} в диэлектриках наталкивается на серьезные трудности, и универсальной формулы для его нахождения, к сожалению, нет. Тем не менее в некоторых симметричных случаях поле вектора \vec{D} можно определить, зная распределение только сторонних зарядов. Это происходит, например, когда однородный диэлектрик целиком заполняет пространство между эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов (или внешнего поля). Именно для таких случаев вектор \vec{D} оказывается особенно полезным. Тогда расчет поля \vec{E} в диэлектрике сводится к следующему. Вначале определяют поле вектора \vec{D} , а затем, используя связь векторов \vec{D} и \vec{E} , находят напряженность электрического поля \vec{E} (именно это поле имеет непосредственный физический смысл).

Однако так просто дело обстоит только для однородных и изотропных диэлектриков. Присутствие любых границ (границ раздела двух диэлектриков, диэлектрика с вакуумом или металлом) нарушает изотропию. Наличие таких границ можно учесть за счет так называемых граничных условий. Для вектора поляризации \vec{P} вблизи границы раздела двух однородных изотропных диэлектриков существует соотношение

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad (6)$$

где σ' – поверхностная плотность связанных зарядов на границе раздела диэлектриков. Если вторая среда вакуум, то $P_{2n} = 0$ и условие (6) принимает вид

$$\sigma' = P_n \quad \text{или} \quad \sigma' = \epsilon \epsilon_0 E_n,$$

где E_n – проекция вектора \vec{E} внутри диэлектрика вблизи границы на внешнюю нормаль.

Для векторов \vec{E} и \vec{D} существуют следующие граничные условия:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma.$$

Здесь E_τ – тангенциальная (касательная) составляющая вектора \vec{E} ; D_n – нормальная составляющая вектора \vec{D} ; σ – поверхностная плотность сторонних зарядов на границе. Если сторонние заряды на границе отсутствуют, то

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

С учетом связи векторов \vec{E} и \vec{D} нетрудно получить и соотношения, связывающие проекции E_{1n} с E_{2n} и $D_{1\tau}$ с $D_{2\tau}$.

Рассмотрим для иллюстрации задачу о взаимодействии двух точечных зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии r в однородном безграничном диэлектрике с проницаемостью ϵ .

Очевидно, для них закон Кулона, сформулированный для точечных зарядов, находящихся в вакууме, не работает. Вблизи каждого точечного заряда появятся связанные заряды (нельзя в диэлектрик поместить заряды q_1 и q_2 , не сделав полости – а это некоторая граница!). Таким образом, заряд q_2 взаимодействует не только с зарядом q_1 , но и со всеми связанными зарядами. Поэтому поступим следующим об-

разом. Вначале найдем индукцию электрического поля, созданного зарядом q_1 , находящимся в диэлектрике, затем определим напряженность электрического поля и только потом найдем силу взаимодействия. Применим теорему Гаусса для вектора \vec{D} к заряду q_1 . Для этого выберем сферу радиусом r с центром в месте нахождения заряда q_1 , но не включающую в себя заряд q_2 . В силу симметрии получаем

$$D4\pi r^2 = q_1 \rightarrow D(r) = \frac{q_1}{4\pi r^2}.$$

Найдем теперь напряженность электрического поля в месте нахождения заряда q_2 :

$$E(r) = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Тогда на заряд q_2 будет действовать сила

$$F = q_2 E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

т.е. происходит уменьшение силы взаимодействия зарядов q_1 и q_2 по сравнению с силой взаимодействия в вакууме в ϵ раз. Следует помнить, что этот результат применим только для однородного, изотропного и безграничного диэлектрика, например, для зарядов, находящихся в жидком или газообразном диэлектрике.

1.4.1. Диэлектрическая проницаемость гелия. Оценить диэлектрическую проницаемость газообразного гелия при нормальных условиях. Принять радиус атомов гелия равным 10^{-10} м.

Есть только один способ рассчитать диэлектрическую проницаемость вещества: нужно найти его реакцию на внешнее электрическое поле, т.е. установить связь поляризованности среды и напряженности электрического поля. Понятно,

что, прежде всего нам необходимо выбрать разумную модель поведения газообразного гелия в некотором внешнем электрическом поле напряженностью E_0 . Будем полагать атомы гелия хорошо проводящими шариками радиусом a и находящимися на достаточно большом расстоянии друг от друга. Последнее будет выполнено при условии $na^3 \ll 1$, где n – концентрация газа. В этом случае можно пренебречь искажением внешнего поля и полагать, что атомы гелия находятся в однородном поле E_0 .

В отсутствие внешнего поля атомы гелия электрически нейтральны. Под действием приложенного поля центр тяжести электронов незначительно смещается относительно ядра и тем сильнее, чем больше внешнее поле, т.е. атом гелия приобретает дипольный момент $p \sim E_0$. С подобной ситуацией мы уже сталкивались в задаче 1.3.5 о поведении проводящей сферы во внешнем однородном электрическом поле. Там было показано, что приобретаемый дипольный момент такой сферы

$$p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0. \quad (1)$$

Это и будет дипольным моментом одного атома гелия. Для того чтобы получить поляризованность газа, исходя из ее определения, необходимо помножить (1) на число атомов в единице объема, а это есть концентрация n

$$P = n \cdot p = 4\pi\epsilon_0 a^3 n E_0. \quad (2)$$

Воспользуемся теперь связью диэлектрической восприимчивости χ и поляризованности P :

$$P = \chi \epsilon_0 E_0. \quad (3)$$

Из сравнения соотношений (2) и (3) находим

$$\chi = 4\pi a^3 n.$$

Тогда диэлектрическая проницаемость гелия

$$\epsilon = 1 + \alpha = 1 + 4\pi a^3 n .$$

Осталось только найти концентрацию. Для этого воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона

$$p_{\text{He}} = nkT ,$$

где p_{He} – давление газообразного гелия при температуре T ;
 $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Выразив отсюда n , для диэлектрической проницаемости получаем

$$\epsilon = 1 + 4\pi a^3 \frac{p_{\text{He}}}{kT} .$$

Полагая $p_{\text{He}} = 10^5$ Па и $T = 273\text{K}$, находим $\epsilon \approx 1,00033$ (при этом мы убедились, что заложенное нами вначале условие $na^3 \ll 1$ выполняется).

1.4.2. Точечный заряд в центре диэлектрического шара. Точечный сторонний заряд q находится в центре диэлектрического шара радиусом a и проницаемостью ϵ_1 . Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . Найти распределение электрического поля, а также поверхностную плотность связанных зарядов на границе раздела диэлектриков.

Воспользоваться теоремой Гаусса для расчета напряженности электрического поля нам не удастся, так как не известны связанные заряды. Эти заряды появляются не только на границе раздела диэлектриков, но и вблизи точечного заряда q . Поэтому воспользуемся теоремой Гаусса для вектора \vec{D} . В силу радиальной симметрии поля \vec{D} для произвольной сферы радиусом r получаем

$$4\pi r^2 D = q \rightarrow D(r) = \frac{q}{4\pi r^2} .$$

Воспользуемся теперь связью векторов \vec{D} и \vec{E} :
 $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} E_1(r < a) &= \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_1} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_1 r^2}, \\ E_2(r > a) &= \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_2 r^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти формулы свидетельствуют о том, что если однородный диэлектрик целиком заполняет пространство между эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов, то напряженность электрического поля внутри диэлектрика уменьшается в ϵ раз по сравнению с полем в отсутствие диэлектрика. Кроме того, на границе диэлектриков напряженность электрического поля испытывает разрыв.

Для определения поверхностной плотности связанных зарядов на границе раздела диэлектриков σ' воспользуемся граничным условием для вектора поляризации

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',$$

которое можно переписать через значения напряженности электрического поля в первом и втором диэлектрике вблизи границы раздела:

$$(\epsilon_2 \epsilon_0 E_2 - \epsilon_1 \epsilon_0 E_1) \Big|_{r=a} = -\sigma'$$

(ϵ_1 и ϵ_2 – диэлектрические восприимчивости диэлектриков).

После подстановки сюда значений E_1 и E_2 из (1) с учетом связи ϵ и ϵ_0 находим

$$\sigma' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{q}{4\pi a^2}.$$

Отсюда видно, что знак σ' зависит от соотношения диэлектрических проницаемостей ϵ_1 и ϵ_2 .

1.4.3. Объемно заряженный диэлектрический шар.

Находящийся в вакууме шар радиусом R из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ содержит равномерно распределенные по объему сторонние заряды с объемной плотностью ρ . Найти модули векторов \vec{E} и \vec{D} как функцию расстояния r до центра шара, а также поверхностную и объемную плотности связанных зарядов.

Так как нам задано распределение сторонних зарядов, то воспользуемся теоремой Гаусса для вектора \vec{D} с учетом его симметрии (этот вектор, как и вектор \vec{E} , должен иметь только радиальную составляющую). Тогда при $r \leq R$ получаем $4\pi r^2 D = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$. Откуда находим

$$D = \frac{\rho}{3} r, \quad E = \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon \epsilon_0} r.$$

При $r > R$ $4\pi r^2 D = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ и тогда с учетом того, что $\epsilon = 1$, получаем

$$D = \frac{\rho R^3}{3r^2}, \quad E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}.$$

Заметим, что на границе диэлектрика с вакуумом ($r = R$) происходит скачок напряженности электрического поля E , чего нет для индукции D .

Поверхностная плотность поляризационного заряда σ' связана с поляризованностью P соотношением

$$\sigma' = P_n = \epsilon \epsilon_0 E.$$

Здесь E – напряженность электрического поля внутри диэлектрика при $r = R$, равная $\rho R / 3\epsilon \epsilon_0$. Тогда

$$\sigma' = \epsilon \epsilon_0 \frac{\rho R}{3 \epsilon \epsilon_0} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{\rho R}{3}.$$

Для определения объемной плотности связанных зарядов ρ' обратимся к уравнению

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'.$$

С учетом связи $\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ получаем

$$\rho' = -\epsilon \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}.$$

По теореме Гаусса $\operatorname{div} \vec{E}$ определяется полной плотностью заряда в данной точке, т.е. $\operatorname{div} \vec{E} = (\rho + \rho')/\epsilon_0$. Это приводит нас к уравнению

$$\rho' = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\rho + \rho'}{\epsilon_0}.$$

Откуда

$$\rho' = -\frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \rho = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho.$$

Этот результат говорит о том, что в однородном диэлектрике не существует объемной плотности связанных зарядов, если внутри его нет сторонних зарядов.

1.4.4. Шар из диэлектрика в электрическом поле.

Шар радиусом R из однородного и изотропного диэлектрика находится в однородном электрическом поле напряженностью \vec{E}_0 . Найти напряженность электрического поля внутри и вне шара.

До поляризации такой шар можно представить как однородную смесь положительного и отрицательного электричеств с объемными плотностями $+\rho'$ и $-\rho'$ (модель диэлектрика как совокупности положительной и отрицательной

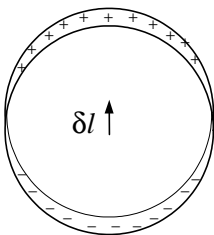


Рис. 1.39

«жидкостей»). При наложении внешнего поля все положительные заряды сдвигаются относительно отрицательных на некоторое малое расстояние $\vec{\delta l}$ (рис. 1.39). При этом возникает однородная поляризация шара. Выделим внутри диэлектрика малый объем ΔV . При возникновении поляризации входящий в этот объем положительный заряд $\rho' \Delta V$ сместится относительно отрицательного заряда на величину $\vec{\delta l}$. Это приводит к тому, что данный объем приобретает дипольный момент $\vec{\delta p} = \rho' \Delta V \vec{\delta l}$. Разделив обе части этого равенства на ΔV , получаем выражение для дипольного момента единицы объема, т.е. вектор поляризации \vec{P} :

$$\vec{P} = \rho' \vec{\delta l}. \quad (1)$$

Ранее (см. задачу 1.2.7) мы выяснили, что в области пересечения двух шаров, равномерно заряженных разноименными зарядами с плотностями $+\rho$ и $-\rho$, появляется однородное поле с напряженностью

$$\vec{E} = -\frac{\rho \vec{\delta l}}{3\epsilon_0}. \quad (2)$$

В дальнейшем все величины, относящиеся к шару, будем снабжать индексом 1, а к пространству вне шара – индексом 2. Из сопоставления формул (1) и (2) следует, что собственное поле \vec{E}'_1 (поле зарядов поляризации) внутри равномерно поляризованного шара связано с его поляризованностью \vec{P} соотношением

$$\vec{E}'_1 = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

Полное поле внутри шара \vec{E}_1 складывается из двух частей: внешнего поля \vec{E}_0 и собственного поля зарядов поляризации \vec{E}'_1 (рис. 1.40):

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1 = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0},$$

или с учетом связи $\vec{P} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}_1$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 - \frac{\epsilon}{3}\vec{E}_1.$$

Откуда сразу находим напряженность электрического поля внутри шара:

$$\vec{E}_1 = \frac{3}{\epsilon + 2}\vec{E}_0. \quad (3)$$

Поляризованность такого однородно поляризованного шара

$$\vec{P} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}_1 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\vec{E}_0, \quad (4)$$

а его дипольный момент

$$\vec{p} = V \cdot \vec{P} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\vec{E}_0. \quad (5)$$

Опираясь на выражение (4), нетрудно найти и поверхностную плотность зарядов поляризации:

$$\sigma' = P_n = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_{0n},$$

где E_{0n} – проекция вектора \vec{E}_0 на нормаль к шару, равная $E_{0n} = E_0 \cos \theta$, θ – угол между нормалью к шару в данной точке и вектором \vec{E}_0 . Тогда для σ' получаем

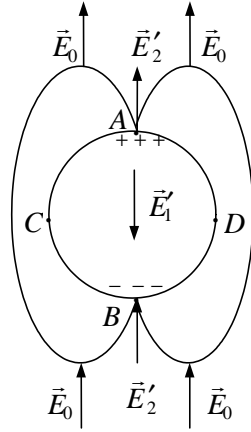


Рис. 1.40

$$\sigma' = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \cos \theta.$$

Полное поле вне шара \vec{E}_2 также складывается из двух частей: внешнего поля \vec{E}_0 и собственного поля диполя вне шара \vec{E}_2' (см. рис. 1.40):

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_2'. \quad (6)$$

В задаче 1.1.5 нами было получено выражение для напряженности электрического поля диполя через его дипольный момент \vec{p} :

$$\vec{E}_{\text{дип}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right].$$

Это выражение можно использовать для расчета собственного поля вне шара, если выразить дипольный момент через вектор поляризации

$$\vec{p} = V \cdot \vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}.$$

Таким образом, собственное поле зарядов поляризации вне поляризованного шара

$$\vec{E}_2' = \frac{R^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{P}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right].$$

Для точек, лежащих на поверхности шара ($r = R$),

$$\vec{E}_2' = \frac{1}{3\epsilon_0} \left[3(\vec{P}\vec{n})\vec{n} - \vec{P} \right],$$

где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности шара.

Ограничимся для простоты расчетом полного поля вблизи «полюсов» поляризованного шара (т.е. в точках A и B). Для них

$$\vec{E}'_2 = \frac{2}{3\epsilon_0} \vec{P},$$

или с учетом выражения (4)

$$\vec{E}'_2 = 2 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0.$$

Подставляя это выражение в (6), найдем напряженность электрического поля вне шара вблизи его «полюсов»:

$$\vec{E}_2 = \frac{3\epsilon}{\epsilon + 2} \vec{E}_0. \quad (7)$$

Из сопоставления выражений (7) и (3) следует $E_2 / E_1 = \epsilon$, что и следовало ожидать. Кроме того, из выражения (7) видно, что происходит сгущение внешнего поля вблизи «полюсов» однородно поляризованного шара. При достаточно больших ϵ происходит увеличение поля почти в 3 раза. Этот вывод хорошо согласуется с результатом задачи 1.3.5 о поведении проводящего шарика в однородном электрическом поле, так как формально проводник можно представить как диэлектрик с бесконечно большой диэлектрической проницаемостью ($\epsilon \rightarrow \infty$). Попробуйте доказать, что во всех точках поверхности шара выполняются граничные условия для векторов \vec{E} и \vec{D} : $D_{ln} = D_{2n}, E_{1\tau} = E_{2\tau}$.

Указание. Учесть определение вектора \vec{D} : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Если диэлектрический шарик находится во внешнем неоднородном поле, то кроме поляризации появляется еще и сила, втягивающая шарик в область усиления поля. Найдем ее. Так как поляризованный шарик представляет собой точечный диполь, то со стороны неоднородного поля $E_0(x)$ появляется сила (см. задачу 1.1.8):

$$F = p \frac{\partial E_0}{\partial x},$$

или с учетом выражения (5)

$$F = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_0^2}{2} \right).$$

Именно эта сила обуславливает притяжение легких наэлектризованных тел.

1.4.5. Поле в полости внутри диэлектрика. Найти напряженность электрического поля \vec{E}' в сферической полости, вырезанной внутри бесконечного равномерно поляризованного диэлектрика. Напряженность электрического поля в диэлектрике равна \vec{E} .

Если полость заполнить тем же равномерно поляризованным диэлектриком, то к полю полости \vec{E}' добавится поле равномерно поляризованного шара \vec{E}'_1 , которое было найдено в предыдущей задаче

$$\vec{E}'_1 = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0},$$

где \vec{P} – поляризованность шара. В результате должно получиться поле \vec{E} , т.е.

$$\vec{E}' - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}.$$

Откуда

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0},$$

или с учетом связи $\vec{P} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$:

$$\vec{E}' = \frac{\epsilon + 2}{3} \vec{E}.$$

1.4.6. Диэлектрическая пластина в «косом» поле.

Пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ помещена в однородное электрическое поле так, что ее нормаль составляет угол α_0 с напряженностью \vec{E}_0 (рис. 1.41). Найти напряженность электрического поля внутри пластины.

Будем полагать, что пластина достаточно длинная и искажением поля вблизи ее краев можно пренебречь. В силу заданной симметрии электрическое поле внутри пластины останется однородным, происходит только преломление силовых линий вектора \vec{E} . Воспользуемся граничным условием для вектора \vec{E} :

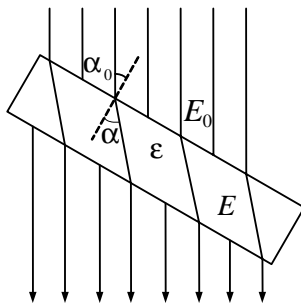


Рис. 1.41

$$E_\tau = E_{0\tau},$$

где E_τ и $E_{0\tau}$ – касательные составляющие полей внутри пластины и вне ее вблизи поверхности. Из рис. 1.41 следует

$$E_\tau = E_0 \sin \alpha_0. \quad (1)$$

Используем теперь граничные условия для вектора \vec{D} :

$$D_n = D_{0n},$$

где D_n и D_{0n} – нормальные составляющие вектора \vec{D} внутри и вне пластины вблизи ее поверхности. Это условие можно переписать через проекции E_n и E_{0n} :

$$\epsilon \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 E_{0n}.$$

Откуда находим

$$E_n = \frac{E_{0n}}{\epsilon} = \frac{E_0 \cos \alpha_0}{\epsilon}. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) позволяют найти модуль вектора напряженности электрического поля внутри пластины:

$$E = \sqrt{E_{\tau}^2 + E_n^2} = E_0 \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \frac{\cos^2 \alpha_0}{\varepsilon^2}} < E_0.$$

Кроме того, из этих соотношений можно найти и угол преломления α линий вектора \vec{E}

$$\frac{E_{\tau}}{E_n} = \operatorname{tg} \alpha = \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Таким образом, линии вектора \vec{E} входят в диэлектрик под большим углом, т.е. происходит их преломление, но само поле уменьшается, как это показано на рис. 1.41.

1.4.7. Точечный заряд над плоской границей диэлектрика. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии h от плоской границы однородного диэлектрика, заполняющего все полупространство. Проницаемость диэлектрика ε . Найти напряженность электрического поля во всем пространстве и распределение поверхностной плотности связанных зарядов.

Точечный заряд вызовет поляризацию диэлектрика и на его поверхности появится связанный заряд с некоторой плотностью σ' (рис. 1.42). В некотором смысле эта ситуация очень похожа на поведение точечного заряда вблизи проводящей плоскости.

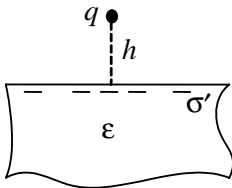


Рис. 1.42

Вспомним, что одним из методов расчета электрического поля точечного заряда над проводящей поверхностью является метод изображений. В связи с этим возникает вопрос: а нельзя ли воспользоваться этим методом (или подобным ему) и найти распределение поля в нашей задаче? Для

этого предположим, что все связанные поверхностные заряды эквивалентны некоторому точечному заряду внутри диэлектрика. Нам нужно только найти его величину q' и расстояние от поверхности h' . Если при этом будут выполнены граничные условия на границе раздела диэлектрика с вакуумом, то в силу теоремы единственности задача построения поля будет нами решена.

В соответствии с нашей идеей полное поле в вакууме является суммой поля заряда q и поля его «изображения» q' (рис. 1.43):

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \vec{r}'. \quad (1)$$

Здесь вектор \vec{r} проводится от заряда q в данную точку пространства, а \vec{r}' – от заряда q' в эту же точку. Эти вектора связаны соотношением $\vec{r}' = \vec{r} + (h + h')\vec{n}$, где \vec{n} – вектор внешней нормали к диэлектрику.

Конечно, выражение (1), по сути, является нашим предположением, которое еще требует проверки. Второе наше предположение заключается в том, что поле в диэлектрике является полем точечного фиктивного заряда q'' , пространственно совмещенного с зарядом q (на рис. 1.43 он не отображен):

$$\vec{E}_2 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (2)$$

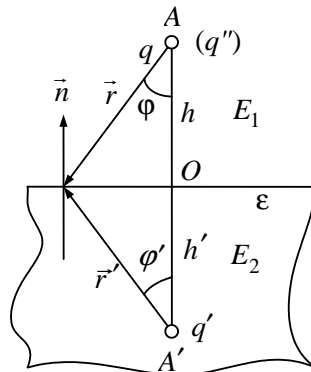


Рис. 1.43

Очевидно, фиктивные заряды q' и q'' должны зависеть от диэлектрической проницаемости ϵ .

Для того чтобы проверить наши предположения, необходимо «сшить» выражения (1) и (2) на границе раздела, т.е. потребовать выполнения граничных условий: непрерывность касательных компонент вектора \vec{E} и нормальных компонент вектора \vec{D} . Первое условие имеет вид

$$q \sin \varphi + q' \sin \varphi' = q'' \sin \varphi, \quad (3)$$

а второе –

$$q \cos \varphi - q' \cos \varphi' = \varepsilon q'' \cos \varphi. \quad (4)$$

Видно, что если потребовать равенства углов φ и φ' (т.е. $h = h'$), то соотношения (3) и (4) могут быть выполнены в любой точке границы при условии соответствующего подбора величин зарядов q' и q'' . Полагая $\varphi = \varphi'$, находим

$$q' = -q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}, \quad (5)$$

$$q'' = q \frac{2}{\varepsilon + 1}. \quad (6)$$

Кроме того, из (3) следует, что заряд q'' равен сумме зарядов q' и q (это можно было предвидеть и заранее, исходя из логики наших рассуждений). Таким образом, мы показали, что заряд q' находится симметрично заряду q относительно границы раздела. С учетом (5) и (6) получаем распределение полей в вакууме и диэлектрике:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \vec{r}', \\ \vec{E}_2 &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 (1 + \varepsilon) r^3} \vec{r}. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти выражения удовлетворяют всем условиям задачи и в силу теоремы единственности дают ее решение. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ они переходят в соответствующие выражения для поля точечного заряда над проводящей плоскостью.

Найдем теперь поверхностную плотность связанных зарядов σ' как функцию расстояния r от точечного заряда q . Из соотношения $\sigma' = P_n = \varepsilon \varepsilon_0 E_n$ находим

$$\sigma' = -\frac{q(\varepsilon - 1)h}{2\pi(1 + \varepsilon)r^3}. \quad (8)$$

Выражение (8) можно получить и не вводя понятий фиктивных зарядов q' и q'' . Электрическое поле вблизи поверхности диэлектрика является суммой поля точечного заряда q и поля зарядов поляризации с плотностью σ' . Воспользуемся непрерывностью нормальной составляющей вектора \vec{D} на границе диэлектрика:

$$D_{2n} = D_{1n} \rightarrow E_{1n} = \varepsilon E_{2n},$$

или

$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos \varphi + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos \varphi - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \right), \quad (9)$$

где слагаемое $\frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$ – составляющая напряженности электрического поля, созданного вблизи рассматриваемого участка плоскости с поверхностной плотностью заряда σ' . Из (9) сразу следует результат (8). При этом мы учли, что $\cos \varphi = h/r$. Если проинтегрировать выражение (8) по всей поверхности диэлектрика, то можно найти и полный связанный заряд q' . Однако его значение (5) мы уже нашли из других соображений.

Найдем теперь силу взаимодействия заряда q и всех зарядов поляризации. Мы уже выяснили, что все эти заряды эквивалентны одному точечному заряду q' , находящемуся от заряда q на расстоянии $2h$. Исходя из закона Кулона с учетом (5) имеем

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 4h^2} = \frac{q^2(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 1)16\pi\epsilon_0 h^2}.$$

Если заряд q находится непосредственно на границе раздела ($h = 0$), исчезают поляризационные заряды на поверхности диэлектрика. Кроме того, так как $\vec{r} = \vec{r}'$, то из (7) следует

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon)r^3} \vec{r} = \vec{E}_2,$$

т.е. поле вектора \vec{E} становится сферически симметричным (довольно неожиданный результат!). Связано это с тем, что исчезли связанные заряды на границе диэлектрика (именно они вносили несимметрию) и остался только связанный заряд непосредственно вблизи точечного заряда q .

Пусть полупространство, заполненное диэлектриком, ограничено проводящей плоскостью, над которой на расстоянии h находится точечный заряд q . Каково теперь значение поверхностной плотности связанных зарядов?

Так как проводящая плоскость бесконечна и в бесконечности нет зарядов, то потенциал плоскости равен нулю. С такой ситуацией мы уже сталкивались. В данном случае в полной мере можно применить метод электрических изображений. Наличие индуцированного заряда на проводящей плоскости эквивалентно точечному заряду $q' = -q$, являющемуся зеркальным отражением заряда q . Но в данной проводящей плоскости происходит отражение и связанных заря-

дов поляризации σ' ! А это эквивалентно тому, что теперь все пространство будет заполнено однородным диэлектриком. Таким образом, мы пришли к задаче о поле двух точечных зарядов q и $-q$, находящихся в бесконечном диэлектрике на расстоянии $2h$. Тогда поле в плоскости симметрии, перпендикулярной прямой, соединяющей заряды q и $-q$, можно найти как

$$E = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cdot \frac{h}{r} = \frac{qh}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r^3},$$

а поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P_n = \epsilon\epsilon_0 E = \frac{(\epsilon - 1)qh}{2\pi\epsilon r^3}.$$

1.4.8. Проводящий шар на границе раздела диэлектриков. Проводящий шар радиусом R и зарядом q находится на плоской границе раздела двух диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Центр шара находится непосредственно на границе раздела (рис. 1.44). Найти модуль напряженности электрического поля в диэлектриках и силу, действующую на шар.

Из симметрии задачи понятно, что как вектор \vec{E} , так и вектор \vec{D} должны иметь только радиальные составляющие: $E_r = E$, $D_r = D$. От-

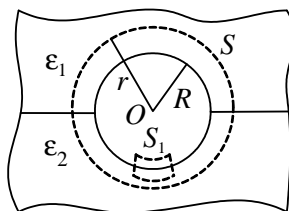


Рис. 1.44

сюда сразу следует, что никаких связанных зарядов на границе раздела диэлектриков не может быть (для появления связанных зарядов необходимо, чтобы вектор \vec{E} имел нормальную составляющую к границе диэлектрика). Тогда не очень понятно, о какой силе, действующей на шар, идет речь. Ответить на этот вопрос можно

только после детального анализа электрического поля вне шара и характера распределения всех зарядов вблизи поверхности шара.

Разберемся сначала с электрическим полем. Для любой точки границы диэлектриков должно выполняться условие $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Это означает, что $E_1 = E_2$, т.е. напряженность электрического поля обладает сферической симметрией. А вот индукция электрического поля в разных диэлектриках разная. Это следует из соотношения

$$\frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{D_2}{\epsilon_2}. \quad (1)$$

Применим теперь теорему Гаусса для вектора \vec{D} , рассматривая в качестве замкнутой поверхности сферу S с радиусом r (см. рис. 1.44):

$$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = q. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим

$$D_1 = \frac{q\epsilon_1}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}, \quad D_2 = \frac{q\epsilon_2}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

Значит, напряженность электрического поля в любой точке (кроме самого шара)

$$E = \frac{D_1}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{D_2}{\epsilon_2 \epsilon_0} = \frac{q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_0}. \quad (3)$$

Попытаемся теперь понять, почему напряженность электрического поля оказалась одинаковой в разных диэлектриках, ведь они имеют разные диэлектрические проницаемости. Связано это, очевидно, с неоднородным распределением, как зарядов поляризации, так и индуцированных зарядов вблизи поверхности шара. Для определения плотности индуцированных зарядов воспользуемся теоремой Гаусса для векто-

ра \vec{D} , рассматривая замкнутую поверхность S_1 , часть которой проходит внутри шара, другая часть – в диэлектрике с проницаемостью ϵ_1 вблизи поверхности шара (см. рис. 1.44). Отсюда сразу следует, что поверхностная плотность индуцированных зарядов на поверхности шара вблизи первого диэлектрика

$$\sigma_1 = D_1 = \frac{q\epsilon_1}{2\pi R^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}. \quad (4)$$

Точно так же находим и поверхностную плотность индуцированных зарядов на поверхности шара вблизи второго диэлектрика:

$$\sigma_2 = D_2 = \frac{q\epsilon_2}{2\pi R^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}. \quad (5)$$

Разберемся теперь со связанными зарядами, пропускающими на границе диэлектрика с проводящим шаром. Применим теорему Гаусса для вектора \vec{E} , используя поверхность S_1 . Имея в виду, что на границе раздела проводника с диэлектриком есть как сторонние (σ), так и связанные (σ') заряды, приходим к выражению

$$E = \frac{(\sigma_1 + \sigma'_1)}{\epsilon_0}.$$

С другой стороны, эта же напряженность

$$E = \frac{D_1}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1 \epsilon_0}.$$

Из этих двух уравнений находим

$$\sigma'_1 = -\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1} \sigma_1 = -\frac{(\epsilon_1 - 1)q}{2\pi R^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}. \quad (6)$$

Аналогично

$$\sigma'_2 = -\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \sigma_2 = -\frac{(\varepsilon_2 - 1)q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \quad (7)$$

Найдем теперь полную поверхностную плотность всех зарядов $\sigma_{1\text{полн}}$ вблизи границы раздела с первым диэлектриком. Для этого сложим выражения (4) и (6)

$$\sigma_{1\text{полн}} = \sigma_1 + \sigma'_1 = \frac{q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Сложим теперь выражения (5) и (7)

$$\sigma_{2\text{полн}} = \sigma_2 + \sigma'_2 = \frac{q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Видно, что полная плотность всех зарядов одинакова для любой точки поверхности шара и не зависит от соотношения диэлектрических проницаемостей. Это и привело к тому, что напряженность электрического поля оказалась одинаковой для обоих диэлектриков и не зависящей от угла. Соотношение же диэлектрических проницаемостей, как видно из выражений (4)–(7), влияет на распределение поверхностной плотности индуцированных и связанных зарядов. Если, например, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то $|\sigma'_1| > |\sigma'_2|$ и соответственно $|\sigma_1| > |\sigma_2|$, т.е. диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью формирует и большие поляризационные заряды. Это приводит к тому, что такой диэлектрик «вытягивает» на себя и большие индуцированные заряды в металле.

Рассчитаем теперь силу, действующую на проводящий шар. Если бы шар был заряжен однородно, то, очевидно, полная сила была бы равна нулю. Но мы уже выяснили, что плотность индуцированных зарядов шара не одинакова. Это и приводит к появлению силы. Для расчета этой силы разо-

бьем поверхность шара на бесконечно малые элементы δS . Произведение δS на плотность индуцированных зарядов σ дает заряд элемента δS . Умножив этот заряд на напряженность электрического поля, получим силу, действующую на элемент δS . Так как любому элементу с плотностью заряда σ_1 противостоит элемент с плотностью заряда σ_2 , то полная сила может быть найдена как сумма значений $(\sigma_1 - \sigma_2)\delta S \cdot \vec{E}$, взятая по одной половине шара. Из решения задачи 1.2.2 следует, что такая сумма будет равна $(\sigma_1 - \sigma_2)S_{\perp}E$, где $S_{\perp} = \pi R^2$. Правда здесь есть нюанс: что же принимать за значение E ? Можно ли считать, что это напряженность электрического поля вблизи шара? Конечно, нет. Дело в том, что значение E , рассчитанное по формуле (3), это не то поле, которое действует на заряды шара. Если считать, что заряд на поверхности проводящего шара занимает какой-то тонкий слой, то поле, действующее на заряды, будет меняться от нуля внутри металла до значения E на его поверхности. Среднее же поле, действующее на поверхностные заряды, будет равно $E/2$. Итак, полная сила F определяется по формуле

$$F = (\sigma_1 - \sigma_2)\pi R^2 \cdot \frac{E}{2}.$$

Подставляя сюда значения σ_1 и σ_2 по формулам (4), (5) и выражение для E по формуле (3) при $r = R$, получаем

$$F = \frac{q^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{8\pi R^2 \epsilon_0 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

И эта сила направлена в сторону диэлектрика с большей проницаемостью.

1.5. Конденсаторы

В соответствии с определением

$$C = \frac{q}{U} \quad (1)$$

расчет емкости конденсаторов любой формы и их произвольного соединения сводится к следующему. К указанным в условии задачи точкам подводится от какого-либо источника тока заряд q . Затем находится распределение напряженности электрического поля между всеми проводниками системы и на этой основе рассчитывается напряжение между указанными точками U . Возможен и обратный вариант, когда задано напряжение U . Тогда необходимо найти заряд, подведенный извне к системе.

Заметим, что о емкости какой-либо системы конденсаторов как о величине, которая зависит только от того, какие взяты конденсаторы и как они соединены между собой, можно говорить только тогда, когда эти конденсаторы соединяются в незаряженном состоянии и только затем подсоединяются к источнику тока. Если же при соединении какие-то из конденсаторов уже заряжены, то емкость системы, вообще говоря, будет зависеть не только от вида окончательной схемы, но и от той последовательности, в которой соединялись в схему предварительно заряженные конденсаторы. В таких условиях использование понятия емкости применительно ко всей схеме вообще нецелесообразно.

Рассмотрим для примера задачу об определении емкости между точками a и b схемы, представленной на рис. 1.45. Здесь мы не видим никакого знакомого соединения конденсаторов – ни параллельного, ни последовательного. Так что известные формулы тут не пройдут. Поступим следующим образом. К точкам a и b подсоединим источник тока с заданной ЭДС \mathcal{E} (тем самым мы задаем напряжение $U = \mathcal{E}$,

приложенное к точкам a и b). И для определения емкости этой системы, нам нужно только найти, какой заряд q поступил в данную систему. Левые обкладки конденсаторов C_1 и C_4 приобретают заряды q_1 и q_4 (их знаки очевидны). Точно такой же в сумме по модулю заряд приобретают и правые обкладки конденсаторов C_2 и C_5 . Это именно тот заряд q , который пришел в систему

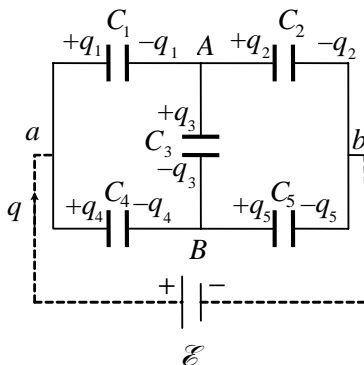


Рис. 1.45

$$q = q_2 + q_5 = q_1 + q_4. \quad (2)$$

Каков же знак заряда q_3 , который приобрел конденсатор C_3 , мы не знаем. Поэтому, не теряя времени на его угадывание, выберем произвольно его знак, например, как показано на рис. 1.45. Если мы не угадали знак заряда q_3 , то из правильно составленных уравнений для всех зарядов системы получится не положительное, а отрицательное значение q_3 . Осталось только написать эти уравнения. Два из них очевидны

$$-q_1 + q_2 + q_3 = 0, \quad (3)$$

$$-q_3 - q_4 + q_5 = 0. \quad (4)$$

Эти уравнения следуют из электронейтральности соединенных между собой обкладок конденсаторов, не имеющих контакта с полюсами источника. Заметим, что уравнение (2) является следствием уравнений (3) и (4), т.е. не является независимым. Так как неизвестных зарядов пять, то нам потре-

буется для них еще три уравнения. Эти уравнения можно получить из теоремы о циркуляции напряженности электрического поля $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$. Нужно только помнить, что в условиях статики, когда уже произошло установление зарядов, внутри проводников нет электрического поля. Оно существует только внутри конденсаторов и внутри источника тока. Внутри каждого конденсатора интеграл $\int E dl$ равен напряжению между его обкладками, а знак напряжения зависит от направления движения (вдоль электрического поля – знак плюс, против – минус). В силу определения емкости (1) напряжение между обкладками можно выразить через их заряд $U = q/C$. Итак, если взять контур $aC_1C_3C_4a$, то получаем

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_4}{C_4} = 0. \quad (5)$$

Аналогично для контура $bC_5C_3C_2b$:

$$\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_5}{C_5} - \frac{q_3}{C_3} = 0. \quad (6)$$

И последнее уравнение получим, обратившись к контуру $\mathcal{E}aC_4C_5b\mathcal{E}$. Для источника тока с ЭДС \mathcal{E} интеграл $\int E dl$ будет равен $\pm \mathcal{E}$ (знак зависит от направления движения внутри источника: плюс – если двигаемся от минуса источника к его плюсу, и минус – в противном случае). Тогда для указанного контура получаем

$$\frac{q_4}{C_4} + \frac{q_5}{C_5} - \mathcal{E} = 0. \quad (7)$$

Неоднородная система уравнений (3)–(7) является полной и линейно независимой. К счастью, нам не нужно знать ее полное решение, необходимо найти либо q_1 и q_4 , либо q_2

и q_5 . Это можно проделать любым известным нам способом и тогда емкость данной системы

$$C = \frac{q_1 + q_4}{\mathcal{E}} \quad (\text{либо} \quad \frac{q_2 + q_5}{\mathcal{E}}).$$

Понятно, что величина \mathcal{E} не войдет в значение C , так как сами заряды пропорциональны \mathcal{E} .

Если система обладает некоторой симметрией, то решение значительно упрощается, так как при этом уменьшается число неизвестных.

1.5.1. Емкость двух металлических шариков. Найти взаимную емкость системы из двух одинаковых металлических шариков радиусом R , расстояние между центрами которых $l \gg R$. Шарика находятся в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ .

Такая система в полном смысле не является конденсатором, так как электрическое поле не сосредоточено полностью внутри ее. Однако на расчет емкости это не повлияет. Зарядим мысленно оба шарика одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами q . Тогда

$$C = \frac{q}{U},$$

где U – напряжение между шариками. При произвольном расстоянии между шариками l их поле не является сферически симметричным, так как каждый шарик своим полем влияет на распределение заряда другого шарика (электростатическая индукция). Если же считать $l \gg R$, то можно пренебречь искажением поля и рассчитывать напряженность электрического поля как для системы двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся в однородном диэлектрике. В силу принципа суперпозиции напряженность электрического поля на прямой между шариками можно найти как

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon(l-r)^2},$$

где r – расстояние от центра одного из шариков до данной точки поля. Тогда

$$U = \int_R^{l-R} E(r)dr = \frac{q \cdot 2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{l-R} \right) \approx \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{l-R}{lR},$$

а емкость

$$C \approx 2\pi\epsilon_0\epsilon R \left(1 + \frac{R}{l} \right).$$

Если $l \rightarrow \infty$, то $C = 2\pi\epsilon_0\epsilon R$, т.е. не зависит от расстояния между шариками. Можно ли это понимать так, как будто второго шарика вообще нет (ведь он находится в бесконечности)? Но тогда емкость и одиночного шарика должна быть равна $2\pi\epsilon_0\epsilon R$, хотя известно, что емкость одиночного шарика равна $4\pi\epsilon_0\epsilon R$. В чем мы ошибаемся? Дело в том, что по определению емкость проводника $C = q/\phi$. Здесь под ϕ нужно понимать изменение потенциала проводника после сообщения ему заряда q , а не сам потенциал. Если в бесконечности находится шарик с зарядом $-q$, то потенциал шарика, емкость которого мы ищем, по отношению к бесконечно удаленной точке уже равен $q/4\pi\epsilon_0\epsilon R$. Сообщение шарiku заряда q увеличивает его потенциал на точно такую же величину $\phi = q/4\pi\epsilon_0\epsilon R$. И тогда емкость одиночного шарика, независимо от нахождения в бесконечности другого заряженного шарика, будет равна $4\pi\epsilon_0\epsilon R$.

1.5.2. Рулонный конденсатор. Плоский конденсатор изготовлен из двух лент шириной a и длиной l . Расстояние между пластинами d , диэлектрическая проницаемость за-

полнителя ε . Определить емкость конденсатора, если его свернуть через тонкий изолирующий слой толщиной b в многovitковый рулон с внутренним радиусом $R \gg d$.

Разрежем мысленно такой конденсатор плоскостью, одно ребро которой совпадает с осью конденсатора (плоскость A на рис. 1.46). Тогда многovitковый конденсатор распадется на несколько почти цилиндрических конденсаторов, радиус кривизны которых плавно изменяется с углом φ по закону

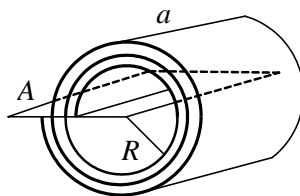


Рис. 1.46

$$r = r_0 + \frac{\varphi(d+b)}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

где r_0 – начальный радиус произвольного витка при $\varphi = 0$. Все эти почти цилиндрические конденсаторы образуют систему параллельно соединенных конденсаторов, так что их суммарная емкость равна сумме емкостей отдельных конденсаторов. Если считать, что угол φ изменяется непрерывно, то для радиуса кривизны всего многovitкового конденсатора можно записать

$$r = R + \frac{\varphi(d+b)}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi < \Phi. \quad (1)$$

Здесь Φ – угол полного поворота от начальной точки конденсатора до его конечной точки, отстоящей от начальной на расстояние l . При малых d можно приближенно принять

$$\Phi \approx \frac{l}{R}. \quad (2)$$

В итоге наша задача сводится к расчету емкости почти цилиндрического конденсатора, внутренняя образующая которого является спиралью. Каждый малый элемент этой спирали можно аппроксимировать дугой окружности. Это значит, что нам вначале нужно получить выражение для емкости цилиндрического конденсатора. Затем найти емкость бесконечно малого элемента, видимого из центра под углом $d\Phi$, и только после этого просуммировать по всем углам от нуля до Φ .

Таким образом, первая часть задачи состоит в расчете емкости цилиндрического конденсатора при условии $r \gg d$

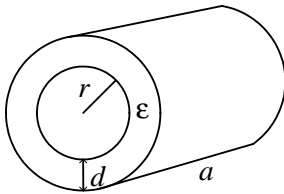


Рис. 1.47

(рис. 1.47). Так как диэлектрик заполняет все пространство между обкладками, то, применяя теорему Гаусса, нетрудно получить выражение для напряженности электрического поля между обкладками на расстоянии r' от оси

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r'}, \quad (3)$$

где λ – линейная плотность заряда обкладок (заряд на единицу длины). Весь заряд конденсатора $q = \lambda a$. Интегрируя (3) по r' , находим напряжение между обкладками

$$U = \int_r^{r+d} E dr' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln\left(1 + \frac{d}{r}\right)$$

и соответственно емкость одиночного цилиндрического конденсатора

$$C_1 = \frac{q}{U} = \frac{2\pi a \epsilon \epsilon_0}{\ln(1 + d/r)}. \quad (4)$$

Это выражение справедливо при любом соотношении параметров d и r , однако есть смысл получить его приближенное представление при $d \ll r$ ($d/r \ll 1$). Связано это с чисто техническими трудностями суммирования выражения (4) при разных r . Поэтому воспользуемся разложением логарифма в ряд при $x \ll 1$: $\ln(1+x) \approx x$. В итоге получаем

$$C_1 \approx \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 ar}{d}.$$

Выделим теперь бесконечно малый элемент поверхности, видимый из центра под углом $d\phi$. Очевидно, что его емкость

$$dC = C_1 \frac{d\phi}{2\pi} = \frac{\epsilon\epsilon_0 ar}{d} d\phi.$$

Интегрируя это соотношение по углу, получаем выражение для полной емкости многovitкового конденсатора

$$C = \int_0^\Phi \frac{\epsilon\epsilon_0 a}{d} r(\phi) d\phi,$$

где $r(\phi)$ дается выражением (1). В результате с учетом (2) получаем

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 a}{d} \int_0^\Phi \left(R + \frac{\phi(d+b)}{2\pi} \right) d\phi = \frac{\epsilon\epsilon_0 al}{d} \left[1 + \frac{l(d+b)}{4\pi R^2} \right].$$

Откуда видно, что закручивание ленты в многovitковый рулон приводит к увеличению емкости.

1.5.3. Плоский конденсатор в металлической коробке. Как изменится емкость плоского конденсатора, если поместить его в металлическую коробку? Расстояние от обкладок до стенок коробки равно расстоянию между обкладками d (рис. 1.48).

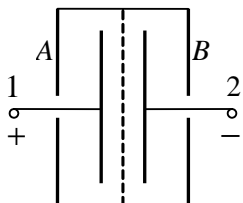


Рис. 1.48

Сообщим пластинам 1 и 2 соответственно заряды $+q$ и $-q$. Если бы электрическое поле не выходило за пределы пластин, то, очевидно, помещение конденсатора в металлическую коробку никак не повлияло бы на его емкость. Но так как пластины имеют конечные размеры, то электрическое поле частично выходит за их пределы (краевой эффект). Это приводит к перемещению зарядов в металлической коробке, вследствие чего появится поле во всем пространстве внутри коробки. При этом на поверхности A появится отрицательный заряд, а на поверхности B – положительный. В итоге изменится поле между пластинами 1 и 2, изменится разность потенциалов и соответственно изменится емкость.

Итак, наша задача состоит в определении разности потенциалов между пластинами 1 и 2 при известном их полном заряде. Примем потенциал средней точки между пластинами 1 и 2 за нуль (это наше право, так как потенциал определяется с точностью до некоторой постоянной). Тогда в силу симметрии системы и в любой другой точке средней линии между пластинами 1 и 2 потенциал будет равен нулю. А так как эта линия заканчивается на металлической коробке, то и ее потенциал также равен нулю. Таким образом, распределение потенциала вдоль оси X , перпендикулярной пластинам,

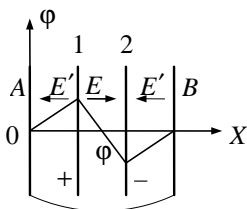


Рис. 1.49

должно иметь вид ломаной прямой линии (рис. 1.49). На рисунке видно, что разность потенциалов U между средними пластинами в 2 раза больше разности потенциалов между крайней парой пластин (как слева, так и справа). Значит, и напряженность поля между средними пластинами E

в 2 раза выше, чем между крайними пластинами $E' : E = 2E'$. Отсюда следует, что и поверхностная плотность заряда на пластине 1 на ее правой стороне $\sigma_{\text{пр}}$ в 2 раза больше, чем на ее левой стороне $\sigma_{\text{лев}}$:

$$\sigma_{\text{пр}} = 2\sigma_{\text{лев}} ,$$

причем $\sigma_{\text{пр}} + \sigma_{\text{лев}} = \frac{q}{S}$. Из этих уравнений находим

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{2}{3} \frac{q}{S} \rightarrow E = \frac{2}{3} \frac{q}{\epsilon_0 S} ,$$

где S – площадь пластин. Тогда для напряжения между пластинами 1 и 2 получаем

$$U = Ed = \frac{2}{3} \frac{qd}{\epsilon_0 S} .$$

Теперь емкость системы между точками 1 и 2

$$C_{12} = \frac{q}{U} = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{3}{2} C ,$$

где C – собственная емкость плоского конденсатора без металлической коробки.

Заметим, что получить этот ответ можно и без столь тщательного анализа распределения электрического поля. Для этого несколько изменим форму пластин 1 и 2 на рис. 1.49, сделав в них узкие разрезы (рис. 1.50, *a*). Такое расположение проводящих пластин соответствует соединению трех одинаковых конденсаторов емкости C , представленному на рис. 1.50, *б*. Откуда сразу получаем прежний ответ. Попробуйте самостоятельно определить, как изменится емкость конденсатора, если в металлическую коробку поместить только одну из пластин (рис. 1.51).

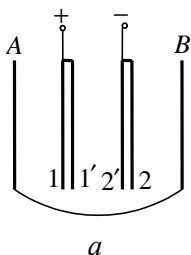
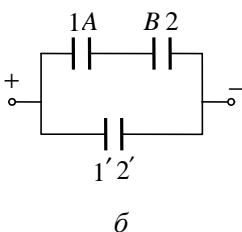


Рис. 1.50



б

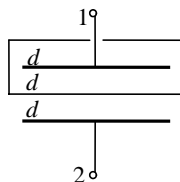


Рис. 1.51

Указание. Перерисовать схему по аналогии с рис. 1.50.

(Ответ: $C_{12} = \frac{4}{3} C$)

1.5.4. Сферический конденсатор. Найти емкость сферического конденсатора, заполненного однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 1.52). Диэлектрики граничат между собой вдоль поверхности конуса с вершиной в точке O . Телесный угол конуса, заполненного первым диэлектриком, равен Ω_1 , вторым диэлектриком – Ω_2 ($\Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi$). Радиусы сферических обкладок R_1 и R_2 .

Будем опираться на результаты решения задачи 1.4.8 (проводящий шар на границе раздела диэлектриков). В ней было показано, что напряженность электрического поля в любой точке диэлектриков имеет только радиальные составляющие: $E_r = E$, $D_r = D$. Кроме того,

для любой точки границы раздела диэлектриков $E_{1r} = E_{2r}$. Это означает, что $E_1 = E_2$ (напряженность электрического поля обладает сферической симметрией), а для индукции электрического поля выполняется соотношение

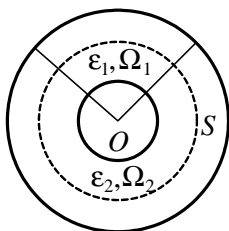


Рис. 1.52

$$\frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2}. \quad (1)$$

Применим теперь теорему Гаусса для вектора \vec{D} , рассматривая в качестве замкнутой поверхности сферу S радиусом r с центром в точке O :

$$D_1 \Omega_1 r^2 + D_2 \Omega_2 r^2 = q. \quad (2)$$

Здесь $\Omega_1 r^2$ – часть площади сферы, находящейся в первом диэлектрике; $\Omega_2 r^2$ – во втором; q – заряд внутренней обкладки конденсатора. Из (1) и (2) находим

$$D_1 = \frac{q\varepsilon_1}{r^2(\Omega_1\varepsilon_1 + \Omega_2\varepsilon_2)}, \quad D_2 = \frac{q\varepsilon_2}{r^2(\Omega_1\varepsilon_1 + \Omega_2\varepsilon_2)}.$$

Соответственно напряженность электрического поля между обкладками

$$E = \frac{D_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{D_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0} = \frac{q}{r^2(\Omega_1\varepsilon_1 + \Omega_2\varepsilon_2)\varepsilon_0}.$$

Это сразу позволяет найти напряжение между обкладками U :

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{(\Omega_1\varepsilon_1 + \Omega_2\varepsilon_2)\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Тогда емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = (\Omega_1\varepsilon_1 + \Omega_2\varepsilon_2)\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ это выражение, очевидно, переходит в выражение для емкости сферического конденсатора, заполненного однородным диэлектриком с проницаемостью ε .

1.5.5. Соединение конденсаторов. В каждое ребро проволочного каркаса, имеющего форму куба, включен конденсатор емкости C (рис. 1.53). Найти емкость системы между точками 1 и 8, расположенными на главной диагонали куба.

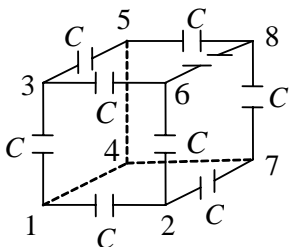


Рис. 1.53

Эта задача, как и две следующие, является хорошей иллюстрацией использования следствий симметрии. Конечно, у нас есть общий способ расчета емкости любого соединения конденсаторов (см. теорию в начале данного подраздела), так что эта задача не представляет принципиальных трудностей. В то же время есть осно-

вания полагать, что наличие симметрии позволит значительно упростить расчет. Что имеется в виду? Давайте повернем нашу пространственную систему вокруг главной диагонали 1–8 на 120° . Так как все конденсаторы одинаковы, то, естественно, мы не обнаружим никаких изменений. Это означает, что и распределение потенциалов в новом положении останется прежним, т.е. потенциалы точек 2, 3 и 4 одинаковы (если бы они были разными, то мы увидели бы другую схему). Если мы соединим эти точки проводником, то это не приведет ни к какому перераспределению потенциалов. Физически точки 2, 3 и 4 представляют собой одну точку, и тогда конденсаторы, включенные в отрезки 1–2, 1–3 и 1–4, оказываются соединенными параллельно. То же самое касается и точек 5, 6 и 7. Более того, и оставшиеся шесть конденсаторов оказываются также соединенными параллельно. В итоге мы приходим к схеме, отображенной на рис. 1.54. Ее емкость, как нетрудно подсчитать, составляет $C_{18} = 6C/5$.

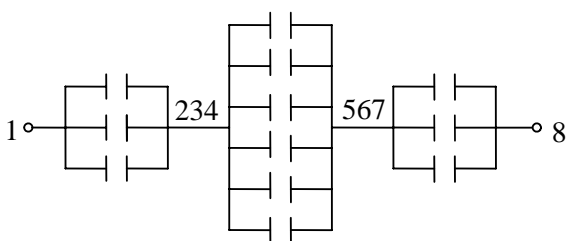


Рис. 1.54

Попробуйте самостоятельно найти емкость между точками 1–2 и 1–7.

Указание. Перерисовать схему аналогично рис. 1.54 и учесть, что точки, обладающие одинаковым потенциалом, можно не только соединять, но и разъединять.

(Ответ: $C_{12} = 12C/7$, $C_{17} = 4C/3$)

Найдем теперь емкость бесконечной цепочки конденсаторов, представленной на рис. 1.55. Это соединение, обладающее суммарной емкостью C_Σ , принципиально отличается от только что рассмотренного тем, что число элементов в нем бесконечно. И если бы мы хотели воспользоваться стандартным способом, то нам пришлось бы составить бесконечную

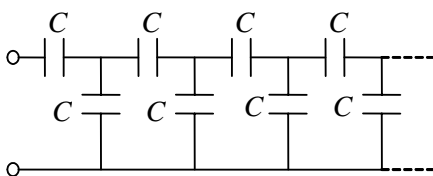


Рис. 1.55

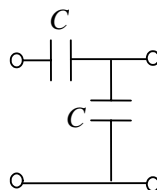


Рис. 1.56

систему уравнений. Конечно, если постараться, то можно поискать и ее решение, но есть и более простой путь. Симметрия данного соединения проявляется в том, что оно образовано повторением одного и того же элемента (рис. 1.56). Как

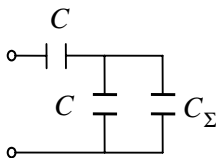


Рис. 1.57

этим воспользоваться? Если мы удалим этот элемент с левого края исходной системы и затем подвинем всю оставшуюся часть схемы на прежнее место, то никакой разницы мы не заметим, соответственно не изменится и суммарная емкость C_{Σ} . Но

мы то знаем, что из этой схемы был удален фрагмент, состоящий из двух конденсаторов. Это означает, что вся бесконечная цепочка емкости C_{Σ} эквивалентна соединению удаленного фрагмента и элемента с емкостью C_{Σ} (рис. 1.57). Емкость данного соединения можно найти из соотношения

$$\frac{1}{C_{\Sigma}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_{\Sigma}},$$

которое сводится к квадратному уравнению относительно C_{Σ} :

$$C_{\Sigma}^2 + CC_{\Sigma} - C^2 = 0.$$

Его решение

$$C_{\Sigma} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} C.$$

Обратимся теперь к схеме, представленной на рис. 1.58, и найдем ее емкость между точками A и B . Эта схема также содержит бесконечное число одинаковых элементов. Однако воспользоваться тем, что мы проделали в предыдущем при-

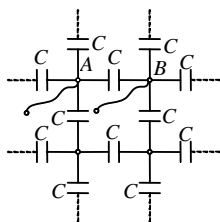


Рис. 1.58

мере нельзя, так как удаление повторяющегося элемента изменяет исходное соединение. Поэтому воспользуемся не только принципом симметрии, но и принципом суперпозиции.

Подключим мысленно к точкам A и B источник тока (на рисунке он не отображен, волнистыми линиями отображе-

ны только подводящие провода) и рассмотрим, каким образом система приходит в установившееся состояние. Подводимые к точке A от источника тока заряды «оседают» на всех близлежащих обкладках четырех конденсаторов. Появившееся электрическое поле внутри этих конденсаторов «вытягивает» индуцированные заряды на противоположных обкладках, что приводит к движению заряда и в проводниках, не соприкасающихся непосредственно с источником тока. Таким образом, возникает движение зарядов во всех проводниках рассматриваемой схемы. Увеличивающийся заряд на обкладках конденсаторов препятствует его дальнейшему росту и тем самым снижает скорость его накопления, т.е. картина накопления заряда на всех конденсаторах плавно изменяется со временем. Однако в силу симметрии системы относительно точки A пространственное распределение направления движения зарядов сохраняется неизменным.

Пусть за время dt к точке A по подводящим проводам поступил заряд dq . Из равноправия направлений его движения четвертая его часть поступит к конденсатору между точками A и B . Точно такой же заряд пойдет и в направлении точки B , т.е. от точки A к точке B «напрямую» пройдет заряд $dq/4$. Но к точке B движется также заряд и от всех других элементов схемы. И этот заряд, прошедший по любому из четырех входящих в точку B проводников, в силу симметрии системы уже относительно точки B , будет равен $dq/4$ (по отводящему проводу должен уйти заряд dq). В итоге полный заряд, который «пройдет» через конденсатор между точками A и B , будет равен $dq/2$ (это половина от всего поступившего в схему заряда). Оставшаяся половина «пройдет» через все остальные конденсаторы бесконечной сетки. Отсюда следует, что емкость всей схемы кроме конденсатора между точками A и B равна его емкости. Таким образом, вся бесконечная цепочка относительно точек A

и B эквивалентна параллельному соединению двух одинаковых конденсаторов емкости C . Значит емкость между точками A и B равна $2C$.

1.5.6. Перетекание заряда. Какие заряды протекут после замыкания ключа K в схеме (рис. 1.59) через сечения 1 и 2 в направлениях, указанных стрелками?

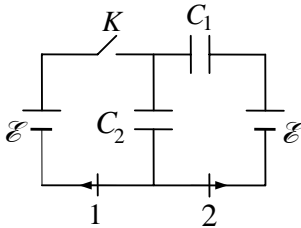


Рис. 1.59

Состояния этой системы до и после замыкания ключа разные. Понятно, что система может перейти из одного состояния в другое разными путями в зависимости от условий перехода. В данном случае условием, определяющим однозначность перехода, является закон сохранения

заряда. Так как изменение заряда может происходить только на конденсаторах, то естественно нам необходимо найти их начальные и конечные заряды, а затем выяснить, какими путями произошли эти изменения. До замыкания ключа конденсаторы C_1 и C_2 были соединены последовательно, значит, их начальные заряды q_1 и q_2 были одинаковы:

$$q_1 = q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}.$$

После замыкания ключа значения зарядов q'_1 и q'_2 можно найти из уравнений

$$\frac{q'_2}{C_2} = \mathcal{E}, \quad \frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_2}{C_2} = \mathcal{E}.$$

Эти уравнения являются следствием теоремы о циркуляции напряженности электрического поля (см. теорию в начале данного подраздела). Из них находим

$$q_1' = 0, \quad q_2' = \mathcal{E}C_2.$$

Изменить заряд конденсатора C_1 можно только по пути 2. Значит, заряд Δq_2 , прошедший через сечение 2, будет равен изменению заряда первого конденсатора:

$$\Delta q_2 = q_1' - q_1 = -\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}.$$

С другой стороны, сумма зарядов, прошедших через сечения 1 и 2, должна быть равна изменению заряда второго конденсатора:

$$\Delta q_1 + \Delta q_2 = q_2' - q_2.$$

Откуда находим

$$\Delta q_1 = q_2' - q_2 - \Delta q_2 = \mathcal{E}C_2.$$

1.6. Энергия электрического поля

Энергетический подход к задачам взаимодействия зарядов является весьма плодотворным, и его практическая значимость обусловлена рядом причин. Во-первых, мы имеем возможность воспользоваться законом сохранения энергии, одним из наиболее общих законов природы. Во-вторых, энергетический метод определения сил позволяет учитывать все силовые взаимодействия (электрические и механические), не вдаваясь в конкретный механизм их возникновения.

Потенциальная энергия W точечного заряда q во внешнем электрическом поле рассчитывается как

$$W = q\phi,$$

где ϕ — потенциал поля в месте нахождения заряда q . Из этой формулы следует, что работа кулоновских сил A при перемещении заряда q из точки поля 1 в точку 2

$$A = q(\phi_1 - \phi_2).$$

Для системы точечных зарядов энергия взаимодействия W имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i, \quad (1)$$

где q_i – i -й заряд системы; φ_i – потенциал, создаваемый в месте нахождения i -го заряда всеми остальными зарядами системы. Если же заряды распределены непрерывно с объемной плотностью ρ , то выражение (1) переходит в выражение

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV, \quad (2)$$

где φ – потенциал, создаваемый всеми зарядами системы в объеме dV . Аналогичные выражения существуют для поверхностного (с плотностью σ) и линейного (с плотностью λ) распределений зарядов.

Несмотря на внешнюю похожесть, выражения (1) и (2) отличаются по содержанию. Расчет энергии по формуле (1) дает только энергию взаимодействия зарядов, формула же (2) дает полную энергию взаимодействия, включая и собственные энергии тел через заряды и потенциалы. Более плодотворной идеей является представление о том, энергия локализована в самом электрическом поле. Для изотропного диэлектрика энергия поля определяется выражением

$$W = \int \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} dV = \int \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} dV.$$

Здесь $w = \epsilon \epsilon_0 E^2 / 2 = \vec{E} \vec{D} / 2$ – объемная плотность энергии электрического поля; E – напряженность; D – индукция.

По отношению к выражению (1) следует сделать важное примечание, которое довольно часто упускается из виду. Его можно применять только для потенциального поля (электрическое поле не в любой ситуации является потенциа-

ным). Если этого не учитывать, то можно прийти к неверному результату. Поясним это на следующем примере. Точечный заряд q находится на расстоянии l от проводящей плоскости. Какую минимальную скорость необходимо сообщить заряду, чтобы он удалился в бесконечность?

Попробуем вначале использовать закон сохранения энергии. Ранее нами было показано, что все индуцированные заряды плоскости эквивалентны заряду-изображению $(-q)$, находящемуся симметрично проводящей плоскости на расстоянии l от нее. Таким образом, мы приходим к системе двух точечных зарядов, находящихся изначально на расстоянии $2l$ друг от друга. Их энергия взаимодействия равна $-q^2 / (4\pi\epsilon_0 \cdot 2l)$. При удалении заряда q в бесконечность энергия взаимодействия обращается в нуль. Тогда закон сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 l} = 0.$$

Откуда находим минимальную скорость заряда:

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 ml}}. \quad (3)$$

Попробуем теперь применить к данной задаче теорему об изменении кинетической энергии (работа всех сил равна изменению кинетической энергии). Работа кулоновской силы взаимодействия зарядов q и $-q$

$$A = \int F(x)dx = -\int_l^\infty \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} dx = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}$$

(выражение для силы было получено с помощью метода изображений). Приравнявая эту работу изменению кинетиче-

ской энергии, равному $-mv^2/2$, получаем другое выражение для скорости, отличающееся от (3) в $\sqrt{2}$ раз:

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 ml}}. \quad (4)$$

Правильным ответом является выражение (4). Дело в том, что в системе отсчета, связанной с проводящей плоскостью, электрическое поле индуцированных зарядов не потенциально. Перемещение заряда q приводит к изменению распределения индуцированных зарядов на плоскости, и их поле оказывается зависящим от времени. В этом случае нельзя использовать ни понятие потенциала, ни понятие потенциальной энергии взаимодействия. То, что мы имеем дело с не совсем обычной ситуацией, можно увидеть из следующих соображений. В формуле $W = q\phi$ под ϕ мы понимаем потенциал точки поля, созданного не зарядом q , и значение потенциала никак не связано с этим зарядом (если убрать заряд q , то потенциал все равно останется!). В нашем же примере заряд q находится в электрическом поле, созданном фактически им самим, и если убрать заряд, то исчезнет и поле.

1.6.1. Преобразование линии в треугольник. Три одинаковых заряженных шарика – каждый зарядом q и массой m – связаны двумя нерастяжимыми нитями, каждая длиной l . Все три шарика неподвижны и расположены вдоль прямой на гладкой горизонтальной поверхности. Какую минимальную скорость v необходимо сообщить центральному шарiku перпендикулярно нитям, чтобы при дальнейшем движении шарики смогли образовать равносторонний треугольник? Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити.

Требование минимальности начальной скорости шарика v означает, что после образования равностороннего тре-

угольника расстояние между крайними шариками не будет дальше уменьшаться, а начнет возрастать. Таким образом, относительная скорость шариков в этот момент обращается в нуль, т.е. все шарики имеют одну и ту же скорость, равную скорости центра инерции системы v_C . Из закона сохранения импульса следует

$$v_C = \frac{1}{3} v. \quad (1)$$

Обратимся теперь к закону сохранения энергии:

$$W_1 + \frac{1}{2} m v^2 = W_2 + \frac{1}{2} 3 m v_C^2. \quad (2)$$

Здесь W_1 – энергия взаимодействия шариков, когда они были на одной прямой; W_2 – энергия взаимодействия шариков, образующих равносторонний треугольник. На практике, если число образующих систему зарядов не очень велико, полную энергию системы $W = \frac{1}{2} \sum q_i \phi_i$ представляют как сумму энергий взаимодействия каждой пары зарядов, на которые можно разбить систему. Необходимо только проследить, чтобы каждая пара зарядов встречалась только один раз. Например, для нашего случая

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23},$$

где $W_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$, r_{ij} – расстояние между зарядами q_i и q_j .

Используя такое представление, нетрудно получить

$$W_1 = \frac{5q}{8\pi\epsilon_0 l}, \quad W_2 = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 l}. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1)–(3), находим минимальную скорость

$$v = \sqrt{\frac{3q}{8\pi\epsilon_0 ml}}.$$

1.6.2. Электрон внутри проводящей сферы. В центр заземленной проводящей сферы радиусом R поместили электрон и толчком сообщили ему небольшую скорость. Какой скоростью он будет обладать на расстоянии $x = \eta R$, где $0 < \eta < 1$?

Так как внутри незаряженной проводящей сферы нет никакого электрического поля, то сразу появляется вопрос: а почему электрон должен изменить скорость? Вначале, когда электрон был в центре сферы, поля на самом деле не было. И хотя электрон индуцирует заряды на поверхности сферы, они располагаются равномерно и не создают поля. Изменение положения электрона приводит к перераспределению индуцированных зарядов (их плотность возрастает в направлении движения электрона), что является причиной появления электрического поля внутри сферы и соответственно увеличения скорости электрона.

Обратимся к решению задачи 1.3.10 (взаимодействие точечного заряда и металлического шара). В ней было показано, что точечный заряд q , находящийся вне проводящей сферы, индуцирует на ее поверхности заряд, эквивалентный точечному заряду-изображению q' , располагающемуся внутри сферы. Кроме того, заряды q и q' обладают свойством взаимности: если q' является электрическим изображением заряда q , то справедливо и обратное – заряд q является изображением заряда q' . Таким образом, наша задача сводится к нахождению величины и положения электрического изображения электрона, находящегося внутри сферы. И если за-

тем определить их силу взаимодействия, то мы всегда можем рассчитать скорость электрона. Весь этот анализ был нами проделан в задаче 1.3.10, поэтому приведем только готовое выражение для силы взаимодействия:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R l}{(l^2 - R^2)^2}. \quad (1)$$

Здесь q – заряд, находящийся за пределами сферы, на расстоянии l от ее центра (рис. 1.60). Величина заряда-изображения q' , находящегося внутри сферы, связана с зарядом q соотношением

$$-\frac{q'}{q} = \frac{R}{l}. \quad (2)$$

В соответствии со свойством взаимности будем полагать, что нам задана величина $q' = -e$ (заряд электрона). Тогда из (2) находим

$$q = -\frac{el}{R}.$$

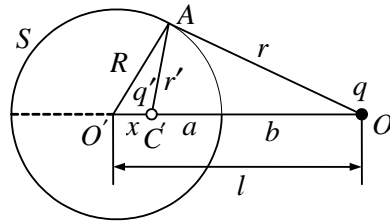


Рис. 1.60

Положение электрона будем задавать через его расстояние от центра сферы x . Из рис. 1.60 нетрудно найти связь x и l :

$$l = \frac{R^2}{x}$$

(треугольники $O'CA$ и $OO'A$ подобны). Теперь мы можем переписать равенство (2) в виде

$$F(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 x^3}{R(R^2 - x^2)^2}.$$

Это и будет выражением для силы, действующей на электрон, находящийся внутри сферы, на расстоянии x от ее центра.

И теперь для определения закона изменения скорости электрона воспользуемся тем, что работа силы F идет на изменение его кинетической энергии. Для этого вначале рассчитаем работу силы F :

$$A = \int F(x) dx = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^R \frac{x^3 dx}{(R^2 - x^2)^2}. \quad (3)$$

Используя последовательную замену переменных $u = x^2$ и $\xi = R^2 - u$, перепишем выражение (3)

$$A = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} \int_{R^2(1-\eta^2)}^{R^2} \frac{(R^2 - \xi) d\xi}{\xi^2}.$$

Этот интеграл выражается через элементарные функции:

$$A = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{\eta^2}{1-\eta^2} + \ln(1-\eta^2) \right].$$

Осталось только приравнять это выражение кинетической энергии электрона $mv^2/2$. Таким образом, в итоге для скорости электрона, находящегося на расстоянии x от центра сферы, получаем

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R} \left[\frac{\eta^2}{1-\eta^2} + \ln(1-\eta^2) \right]},$$

где $\eta = x/R$. Это выражение нельзя использовать при $x \rightarrow R$ (т.е. при $\eta \rightarrow 1$), так как скорость обращается в бесконеч-

ность (изображение электрона приближается к нему самому, и сила взаимодействия стремится к бесконечности). В этом заключается один из недостатков модели точечного заряда.

1.6.3. Энергия индуцированных зарядов. Точечный заряд q находится на расстоянии l от бесконечной проводящей плоскости. Найти собственную энергию индуцированных зарядов на плоскости.

Так как индуцированные заряды распределены по плоскости с некоторой поверхностной плотностью σ' , то их собственную энергию запишем в виде

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma' \varphi dS. \quad (1)$$

Распределение индуцированных зарядов по проводящей плоскости при нахождении около нее точечного заряда q мы рассматривали в задаче 1.3.7, и для него было получено выражение

$$\sigma'(\theta) = -\frac{q}{2\pi l^2} \cos^3 \theta,$$

где θ – угол между перпендикуляром к плоскости и направлением от заряда q на данную точку плоскости (см. рис. 1.33). Предполагая в дальнейшем интегрирование по плоскости, удобно выразить σ' через расстояние x от основания перпендикуляра до данной точки плоскости. Так как $\cos \theta = l / \sqrt{x^2 + l^2}$, то

$$\sigma'(x) = -\frac{ql}{2\pi(l^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Формула (1) требует также знания распределения потенциала по проводящей плоскости. В общем случае это достаточно трудная задача, но в нашей ситуации положение уп-

рощается. В соответствии с идеологией метода изображений все индуцированные заряды плоскости эквивалентны точечному заряду $q' = -q$, расположенному на расстоянии l по другую сторону плоскости от заряда q . Это значит, что потенциал любой точки плоскости, на которой находятся индуцированные заряды, просто равен потенциалу, создаваемому зарядом q' в данной точке:

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(l^2 + x^2)^{1/2}}.$$

С учетом симметрии задачи элемент dS удобно взять в виде тонкого кольца радиусом x и толщиной dx : $dS = 2\pi x dx$. Тогда для энергии взаимодействия запишем

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ql}{2\pi(l^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l^2 + x^2)^{1/2}} 2\pi x dx.$$

Взять этот интеграл не составляет труда, и окончательно получаем

$$W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}.$$

1.6.4. Складывание треугольника. Равномерно заряженный лист, имеющий форму прямоугольного равнобедренного треугольника, сложили по диагонали вдвое (рис. 1.61). При этом была совершена работа A против сил электрического поля. Какую работу A' нужно совершить, чтобы еще раз также сложить полученный треугольник?

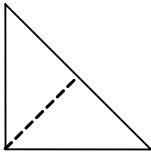


Рис. 1.61

При сгибании треугольника внешние силы производят работу против кулоновских сил отталкивания. Прямой расчет этой работы явля-

ется сложной в техническом плане задачей. Поэтому разумно определить работу через изменение энергии взаимодействия зарядов системы. Главным свойством энергии взаимодействия является ее независимость от пути перехода в данное состояние. Поэтому будем считать, что мы не согнули треугольник пополам, а всесторонне сжали его, уменьшив площадь в 2 раза. Как при этом изменится собственная энергия зарядов полученной фигуры? Для ответа на этот вопрос разобьем заряженную поверхность на бесконечно малые элементы с зарядом δq_i и запишем выражение для энергии их взаимодействия

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \delta q_i \varphi_i .$$

Представим теперь это выражение так, чтобы в него явно вошли геометрические параметры системы. Входящее сюда значение φ_i представляет собой потенциал в месте нахождения заряда δq_i , созданный всеми остальными зарядами системы. В соответствии с принципом суперпозиции его можно представить в виде

$$\varphi_i = \sum_{j \neq i} \frac{\delta q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} ,$$

где $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ – расстояние между зарядами δq_i и δq_j . Теперь энергия взаимодействия может быть записана как

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \delta q_i \sum_{j \neq i} \frac{\delta q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} .$$

Каждое слагаемое этой двойной суммы обратно расстоянию между любыми двумя бесконечно малыми элементами, на которые мы разбили систему. При сжатии треуголь-

ника с сохранением подобия его площадь уменьшилась в 2 раза, следовательно, расстояние между любыми его точками уменьшилось в $\sqrt{2}$ раз. Значит, собственная энергия системы выросла в $\sqrt{2}$ раз. Если энергия всех зарядов треугольника вначале была W_1 , то после первого сгибания она станет $W_2 = \sqrt{2}W_1$. Изменение энергии должно быть равно работе внешних сил, т.е.

$$W_2 - W_1 = A \rightarrow A = W_1(\sqrt{2} - 1). \quad (1)$$

После второго сгибания энергия станет $W_3 = \sqrt{2}W_2$, тогда

$$A' = W_3 - W_2 = (\sqrt{2} - 1)W_2 = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)W_1.$$

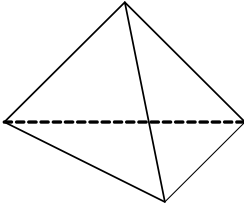


Рис. 1.62

Откуда с учетом (1) получаем $A' = \sqrt{2}A$.

Решите самостоятельно следующую задачу. Равномерно заряженные грани правильного тетраэдра (рис. 1.62) имеют одинаковый заряд. Чтобы сложить две грани тетраэдра вместе, необходимо совершить работу A против сил электрического поля. Какую работу нужно совершить, чтобы сложить все грани тетраэдра в одну стопку? (Ответ: $A' = 6A$)

1.6.5. Энергия точечного заряда. Найти энергию электрического поля точечного заряда q в пустом полупространстве, которое ограничено плоскостью, отстоящей от заряда на расстояние l .

Мы уже знаем, что энергию электрического поля в любом случае можно определить по формуле

$$W = \int \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 dV.$$

Единственная здесь неприятность заключается в выборе элемента объема dV . Все эти элементы, во-первых, должны заполнить все полупространство и, во-вторых, необходимо как-то учесть симметрию задачи. Эти требования будут удовлетворены, если в качестве dV взять тонкий сферический сегмент радиусом $r = a + h$ и толщиной dh (рис. 1.63). Известно, что объем такого сегмента $dV = 2\pi h(a + h)dh$. Тогда для энергии поля запишем

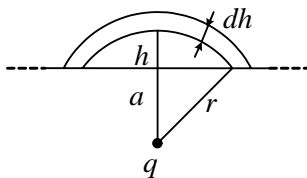


Рис. 1.63

$$W = \int_0^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0(a+h)^2} \right]^2 2\pi h(a+h)dh.$$

Такой интеграл нетрудно взять с использованием замены переменных, и в итоге получаем

$$W = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 a}.$$

1.6.6. Заряд внутри проводящего слоя. Точечный заряд q находится в центре сферического незаряженного проводящего слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно a и b (рис. 1.64). Какую работу совершат кулоновские силы при перемещении заряда через малое отверстие на очень большое расстояние от сферического слоя?

Эта задача похожа на рассмотренную ранее задачу 1.6.2. Здесь также можно было бы воспользоваться методом изображе-

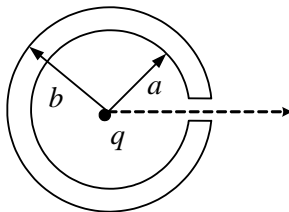


Рис. 1.64

ний, однако более целесообразно исходить из того, что работа кулоновских сил при перемещении заряда должна быть равна убыли энергии системы. Под энергией следует понимать энергию электрического поля. Вначале, когда заряд q находился в центре сферического слоя, поле существовало во всех точках пространства кроме сферического проводящего слоя с радиусами a и b . После удаления заряда в бесконечность электрическое поле появится во всех точках, так как проводящий слой находится бесконечно далеко от заряда и влиянием этого слоя можно пренебречь. Таким образом, электрическое поле изменится только в сферическом слое и тогда работа кулоновских сил при перемещении заряда q будет равна энергии поля в пределах сферического слоя со знаком минус

$$A = - \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV .$$

Подставляя сюда $E = q / 4\pi\epsilon_0 r^2$ и $dV = 4\pi r^2 dr$, получим после интегрирования по r от a до b :

$$A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{a-b}{ab} < 0 .$$

Можно использовать и несколько иную трактовку работы A . После удаления точечного заряда q в бесконечность исчезнут индуцированные заряды на внутренней и внешней поверхностях проводящего сферического слоя. А так как их поле было направлено против поля точечного заряда q , то в целом энергия электрического поля во всем пространстве возрастет, и изменение энергии поля будет равно энергии поля индуцированных зарядов.

1.6.7. Стержень внутри расширяющегося канала.

Вдоль оси длинного цилиндрического канала, вырезанного в проводнике, пролетает тонкий стержень, линейная плот-

ность заряда которого λ (рис. 1.65). Длина стержня l много больше радиусов R_1 и R_2 . Вдали от области сужения канала справа скорость стержня равна v_0 . Найти скорость стержня вдали от области сужения канала слева. Масса стержня m .

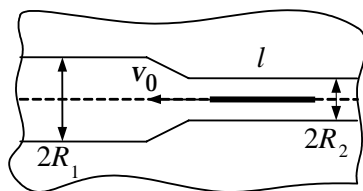


Рис. 1.65

Попытаемся вначале понять причину изменения скорости стержня. Заряженный стержень своим полем формирует индуцированные заряды на внутренней поверхности цилиндрической полости. И если стержень достаточно длинный, то индуцированные заряды не создают поля внутри полости. Но так обстоит дело вдали от области сужения полости. В этой области поле индуцированных зарядов имеет составляющую вдоль оси полости. Иначе говоря, индуцированные заряды, располагающиеся на склоне области сужения полости, начнут притягивать движущийся стержень, что и приводит к замедлению его движения. Конечно, если бы нас интересовал характер движения стержня, то нам пришлось бы провести детальный анализ динамики движения, опираясь на второй закон Ньютона. Но нам требуется только сравнить скорость стержня вдали от области сужения справа и слева от нее. В этом случае самым рациональным будет энергетический подход.

Вместе с движущимся стержнем перемещается и область пространства, заполненного электрическим полем. Причем объем этого пространства слева и справа от области сужения различен. Следовательно, различна и энергия электрического поля. Ее изменение ΔW как раз и равно убыли кинетической энергии движущегося стержня

$$\frac{m v_0^2}{2} - \frac{m v^2}{2} = \Delta W, \quad (1)$$

где $W = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$.

Так как стержень длинный, то напряженность электрического поля, созданного им, нетрудно найти из теоремы Гаусса

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Для цилиндрической области $dV = 2\pi r l dr$. Тогда энергия электрического поля, созданного стержнем толщиной 2δ (он все-таки обладает какой-то толщиной) в цилиндрической полости радиусом R ,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\delta}^R \frac{l \lambda^2 2\pi r dr}{4\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} = \frac{l \lambda^2}{4\pi \epsilon_0} \ln \frac{R}{\delta}.$$

При изменении радиуса полости от R_2 до R_1 энергия поля изменяется на величину

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{l \lambda^2}{4\pi \epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2}.$$

И тогда из (1) находим

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{l \lambda^2}{2\pi \epsilon_0 m v_0^2} \ln \frac{R_1}{R_2}}.$$

1.6.8. Переключения в системе конденсаторов. Сколько теплоты выделится при переключении ключа K из положения 1 в положение 2 в цепи, показанной на рис. 1.66?

При переключении ключа K емкость всей цепи не изменяется (в обоих случаях к конденсатору емкости C подсоединяется последовательно параллельное соединение

конденсаторов емкости C и C_0).

Напряжение на системе конденсаторов также неизменно и равно \mathcal{E} .

Следовательно, полная энергия системы не изменяется, и выделение теплоты может быть связано только с перемещением зарядов по цепи.

Для подсчета этой теплоты необходимо определить заряд, прошедший

через источник тока. Проще всего это сделать, проследив за изменением заряда каждого конденсатора системы (полный заряд всей системы не изменяется). До переключения, как нетрудно убедиться, заряды конденсаторов имели значения

$$q_1 = \mathcal{E} \frac{C^2}{2C + C_0}, \quad q_0 = \mathcal{E} \frac{CC_0}{2C + C_0}, \quad q_2 = \mathcal{E} \frac{C(C + C_0)}{2C + C_0}.$$

После переключения

$$q'_1 = \mathcal{E} \frac{C(C + C_0)}{2C + C_0}, \quad q'_0 = \mathcal{E} \frac{CC_0}{2C + C_0}, \quad q'_2 = \mathcal{E} \frac{C^2}{2C + C_0}$$

Отсюда видно, что изменился заряд только крайних конденсаторов

$$\Delta q_1 = \mathcal{E} \frac{CC_0}{2C + C_0} = -\Delta q_2.$$

Таким образом, через источник тока прошел заряд $\Delta q = \mathcal{E}CC_0 / (2C + C_0)$ и, следовательно, была совершена работа $\mathcal{E}\Delta q$. Тогда выделившееся тепло

$$Q = \mathcal{E}^2 \frac{CC_0}{2C + C_0}.$$

Заметим, что если бы изменился полный заряд системы с одновременным изменением емкости, то нужно было бы

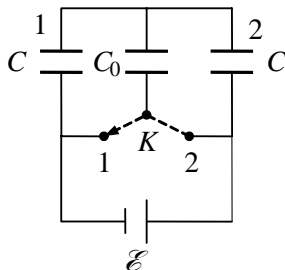


Рис. 1.66

учесть и изменение электрической энергии системы $W = q^2 / 2C$.

1.6.9. Энергетические превращения в конденсаторе.

Внутри плоского конденсатора с площадью пластин S и расстоянием между ними d находится пластинка из стекла с диэлектрической проницаемостью ϵ , целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластинку? Удаление производится при условиях: 1) конденсатор вначале заряжается от батареи с ЭДС, равной U , затем отключается, и только после этого пластинка удаляется; 2) конденсатор все время остается присоединенным к батарее. Какую работу совершают внешние силы по удалению пластинки в том и другом случае?

Рассмотрим вначале первый вариант, когда перед тем как вынуть пластинку, конденсатор отсоединяется от источника. В этом случае в дальнейшем заряды на пластинах конденсатора не могут изменяться. Поэтому для энергии конденсатора W следует взять выражение

$$W = \frac{q^2}{2C}. \quad (1)$$

После удаления диэлектрической пластинки емкость конденсатора уменьшается в ϵ раз ($C = \epsilon \epsilon_0 S / d$), а его энергия в соответствии с (1) вырастет в ϵ раз: $W' = \epsilon W$. Тогда изменение энергии

$$\Delta W^{(1)} = \frac{\epsilon q^2}{2C_0} - \frac{q^2}{2C_0} = (\epsilon - 1) \frac{q^2}{2C_0}.$$

Выражая заряд q через напряжение U , получаем

$$\Delta W^{(1)} = \frac{(\epsilon - 1)C_0 U^2}{2} > 0,$$

где $C_0 = \epsilon_0 S / d$ – емкость конденсатора без диэлектрической пластинки.

Так как источник напряжения отключен, то единственной причиной увеличения энергии может быть только работа, совершаемая внешними силами при вытягивании диэлектрической пластинки. Откуда же берется сила, стремящаяся втянуть пластинку в конденсатор? Диэлектрическая пластинка в целом электронеutrальна. В электрическом поле каждый элемент объема пластинки становится подобным диполю, ориентированному вдоль поля (т.е. перпендикулярно пластинкам конденсатора). В тех местах, где поле однородно, действующие на диполи силы равны нулю. Но в тех местах, где электрическое поле неоднородно (это край конденсатора), сила уже не равна нулю и направлена в сторону усиления поля (т.е. внутрь конденсатора). Работа этой силы должна быть равна изменению энергии электрического поля конденсатора:

$$A^{(1)} = \Delta W^{(1)} = \frac{(\epsilon - 1)C_0 U^2}{2}.$$

Перейдем теперь ко второму варианту. Сейчас целесообразно воспользоваться другим выражением для энергии конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2}$$

(в этом случае остается неизменным напряжение на обкладках конденсатора). Так как при вытягивании диэлектрической пластинки емкость конденсатора уменьшается в ϵ раз, то во столько же раз уменьшается и энергия конденсатора. И теперь ее изменение

$$\Delta W^{(2)} = \frac{C_0 U^2}{2\epsilon} - \frac{C_0 U^2}{2} = -\frac{(\epsilon - 1)C_0 U^2}{2\epsilon} < 0.$$

С чем связано уменьшение энергии конденсатора? Ведь при вытягивании диэлектрической пластинки внешние силы

совершают положительную работу, и энергия системы при этом должна вырасти. Она и действительно возрастает, но только система в этом случае кроме конденсатора содержит еще и источник напряжения. При вытягивании диэлектрической пластинки уменьшается заряд конденсатора. Это уменьшение заряда сопровождается его прохождением через источник в обратном направлении, т.е. источник совершает отрицательную работу. Если источник представляет собой аккумулятор, то он при этом заряжается и его энергия повышается.

Нетрудно показать, что работа источника тока равна удвоенному изменению энергии конденсатора при любых происходящих процессах. Если заряд конденсатора изменился на Δq , то изменение энергии конденсатора

$$\Delta W = \frac{\Delta q U}{2}.$$

При прохождении заряда Δq через источник питания последний совершает работу $A_{\text{ист}} = \Delta q U$. Поэтому

$$A_{\text{ист}} = 2\Delta W.$$

Теперь согласно закону сохранения энергии можно записать для полной работы внешних сил A и работы источника тока $A_{\text{ист}}$:

$$A + A_{\text{ист}} = \Delta W.$$

Отсюда находим

$$A = \Delta W - A_{\text{ист}} = -\Delta W,$$

или

$$A^{(2)} = \frac{(\epsilon - 1)C_0 U^2}{2\epsilon}.$$

Эта работа в ϵ раз меньше, чем работа в первом случае. Связано это с тем, что по мере выдвижения диэлектрической

пластинки при отключенном источнике напряженность электрического поля внутри конденсатора возрастает при сохранении его заряда, в то время как во втором случае при неизменном напряжении уменьшается заряд конденсатора.

1.6.10. Капиллярный вольтметр. Капиллярный вольтметр состоит из капиллярной стеклянной трубочки с металлизированной полупрозрачной внутренней поверхностью, служащей одной из обкладок цилиндрического конденсатора (рис. 1.67). Второй обкладкой является тонкая металлическая проволока, коаксиальная с внутренней цилиндрической поверхностью трубочки. Определить поднятие мениска воды h в вольтметре при наложении на обкладки напряжения U , если внутренний диаметр капилляра d_1 , диаметр проволоки d_2 , плотность воды ρ .

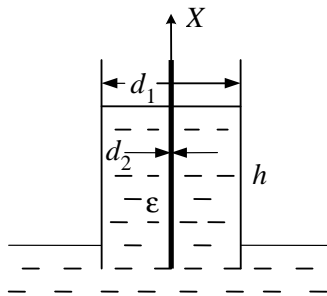


Рис. 1.67

Эта задача является прекрасной иллюстрацией энергетического подхода к расчету сил, действующих на диэлектрик или проводник в электрическом поле. Наиболее просто дело обстоит в случае, когда заряженные проводники отключены от источников напряжения. В этом случае заряды на проводниках остаются постоянными, и можно утверждать, что работа всех внутренних сил системы при малых медленных перемещениях проводников и диэлектриков совершается целиком за счет убыли электрической энергии системы:

$$\delta A = -dW|_q. \quad (1)$$

Здесь символ q подчеркивает, что убыль энергии системы вычисляется при постоянных зарядах на проводниках. Пусть на интересующее нас тело действует сила F_x . Тогда работа

этой силы при малом перемещении тела $\delta A = F_x dx$. Сравнивая это с (1), получаем

$$F_x = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_q. \quad (2)$$

Так как сила зависит только от положения тел и распределения зарядов в данный момент, то она не может зависеть от того, как будет развиваться процесс, если система придет в движение под действием данных сил. А это означает, что для вычисления силы нет необходимости реального выполнения условия постоянства заряда. Нужно только искать приращение энергии dW при формальном условии $q = \text{const}$, а это чисто математический прием.

В нашем случае электрическую энергию системы удобно рассчитывать по формуле

$$W = \frac{q^2}{2C}. \quad (3)$$

И хотя при подъеме жидкого диэлектрика оказывается постоянным напряжение, а заряд конденсатора меняется, расчет силы подъема будем проводить в предположении $q = \text{const}$, т.е. по формуле (2). Дифференцируя (3), получаем

$$F_x = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_q = \frac{q^2}{2} \frac{\partial C / \partial x}{C^2} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что для определения силы подъема диэлектрика необходимо знать, как изменяется емкость системы при различной высоте подъема диэлектрика. В данном случае мы имеем дело с цилиндрическим конденсатором, емкость которого мы находили ранее:

$$C = \frac{2\pi a \epsilon \epsilon_0}{\ln d_1 / d_2},$$

где a — длина конденсатора. Пусть диэлектрик вдвинут в конденсатор на высоту x . Тогда емкость составного конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln d_1/d_2} (\epsilon x + a - x).$$

После подстановки этого выражения в (4) получаем значение силы, втягивающей диэлектрик в конденсатор:

$$F_x = \frac{U^2}{2} \frac{2\pi\epsilon_0 (\epsilon - 1)}{\ln d_1/d_2}.$$

Процесс втягивания закончится, как только сила F_x станет равной силе тяжести поднятого слоя диэлектрика mg :

$$mg = \frac{\pi(d_1^2 - d_2^2)\rho hg}{4}.$$

Таким образом, для высоты подъема диэлектрика получаем

$$h = \frac{4U^2\epsilon_0(\epsilon - 1)}{(d_1^2 - d_2^2)\rho g \ln(d_1/d_2)}.$$

Заметим, что мы нашли установившуюся высоту подъема. На самом деле, если пренебречь силами трения, максимальная высота подъема будет в 2 раза больше из-за возникающих колебаний. Подробно это обсуждалось в части 1 настоящего пособия (см. о подъеме жидкости в капилляре). В нашей задаче мы пренебрегли капиллярными явлениями, но их функции взяли на себя электрические силы.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

2.1. Закон Ома

В изотропных проводниках плотность тока \vec{j} связана с напряженностью электрического поля \vec{E} в данной точке соотношением

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad (1)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление, $\sigma = 1/\rho$ – удельная электропроводимость среды. Для постоянных токов выполняется уравнение непрерывности

$$\nabla \vec{j} = 0 \quad \text{или} \quad \oint \vec{j} d\vec{S} = 0.$$

Соотношение (1) выражает собой закон Ома в локальной форме. Его интегральная форма имеет вид

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2)$$

Здесь I – сила тока, протекающего по однородному проводнику; U – напряжение (разность потенциалов); R – сопротивление проводника. Хотя уравнение (2) и носит название закона, однако оно не отражает какого-либо фундаментального закона природы (как, например, закон Кулона) и выполняется, вообще говоря, не для всех проводников. Из выражений (1) и (2) следует, что в простейшем случае однородного цилиндрического проводника длиной l и площадью поперечного сечения S его сопротивление

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (3)$$

Существует несколько способов расчета сопротивления, и все они, так или иначе, основаны на использовании соот-

ношений (1)–(3). Целесообразность применения того или иного способа зависит от конкретной постановки задачи и от характера ее симметрии.

Для неоднородного участка цепи, на котором кроме кулоновских сил действуют и сторонние силы, закон Ома записывают в виде

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$ – разность потенциалов, \mathcal{E} – электродвижущая сила (ЭДС).

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если использовать правила Кирхгофа.

Первое правило: $\sum I_k = 0$ – алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю. Это уравнение является следствием закона сохранения заряда.

Второе правило отражает закон сохранения энергии применительно к разветвленным цепям: $\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k$ – алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивление равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре. При применении этих правил необходимо следить, чтобы ни одно из уравнений не являлось следствием других.

2.1.1. Опыт Толмена и Стюарта. Для определения удельного заряда носителей тока в металлах был проделан следующий опыт. Катушка радиуса r , содержащая l метров тонкого медного провода с полным сопротивлением R , приводилась во вращение с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Затем катушка резко тормозилась, и с помощью баллистического гальванометра, подключенного через скользящие контакты, измерялся заряд q , протекавший в цепи за время торможения. Найти удельный заряд носителей тока в меди в условиях опыта при $r = 25$ см, $l = 500$ м, $\omega = 300$ рад/с,

$R = 21 \text{ Ом}$ и $q = 10 \text{ нКл}$ (удельный заряд равен отношению заряда носителя тока e' к его массе m).

Будем полагать, что носители тока в металлах достаточно свободны, и при торможении проводника с ускорением \vec{a} они приобретают относительно проводника ускорение $-\vec{a}$. Такое же ускорение им можно сообщить в неподвижном проводнике длиной l , если создать в нем электрическое поле с напряженностью $\vec{E} = -m\vec{a}/e'$. Для этого необходимо приложить к концам проводника разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = - \int_1^2 \frac{m\vec{a}}{e'} d\vec{l} = - \frac{mal}{e'}.$$

В этом случае по проводнику потечет ток силы $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R$. Тогда за время dt при изменении скорости проводника на $d\mathbf{v}$ через его сечение пройдет заряд

$$dq = Idt = - \frac{mal}{e'R} dt = - \frac{ml}{e'R} d\mathbf{v},$$

а за все время торможения

$$q = \int dq = - \int_{v_0}^0 \frac{ml}{e'R} d\mathbf{v} = \frac{m l v_0}{e' R},$$

где $v_0 = \omega r$ – начальная скорость проводника. Откуда находим

$$\frac{e'}{m} = \frac{l\omega r}{qR}.$$

После подстановки числовых данных получаем $e'/m = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$, что соответствует удельному заряду электрона. Наше первоначальное предположение о том, что носители тока в металлах (электроны) свободны, было подтверждено экспериментально. Существование в металлах свобод-

ных электронов является чисто квантовым эффектом и связано с тем, что при образовании кристаллической решетки от атомов отщепляются слабее всего связанные (валентные) электроны, которые становятся «коллективной» собственностью всего металла.

2.1.2. Соединение проводников.

1. Найти сопротивление проволочного каркаса, имеющего форму куба (рис. 2.1), при включении его между точками 1–7. Сопротивление каждого ребра каркаса равно R .

В данной схеме мы не видим ни параллельного, ни последовательного соединения проводников. Конечно, есть способ расчета сопротивления любого соединения проводников – использование правил Кирхгофа. Но в данном случае ситуация гораздо проще, чем кажется, если учесть симметрию схемы.

Если к точкам 1 и 7 подключить некоторое напряжение, то из симметрии схемы относительно этих точек сразу видно, что потенциалы точек 2, 4 и 5 равны между собой. И если точки 2, 4, 5 соединить в одну,

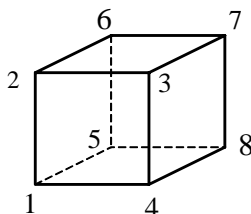


Рис. 2.1

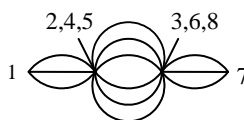


Рис. 2.2

то это никак не скажется на распределении потенциалов и токов в схеме. Значит, и ее сопротивление останется тем же. То же самое можно сказать и о точках 3, 6, 8. Но теперь мы получаем уже знакомое нам соединение (рис. 2.2) и его сопротивление

$$R_{17} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6} R.$$

Найдите самостоятельно сопротивление каркаса между точками 1–4 и 1–3.

Указание. Учесть, что точки одинакового потенциала можно не только соединять, но и разъединять. (Ответ: $R_{14} = 7R/12$, $R_{13} = 3R/4$)

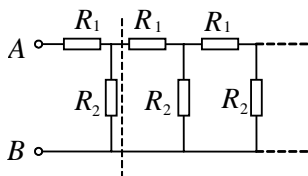


Рис. 2.3

2. На рис. 2.3 представлена бесконечная цепь, образованная повторением одного и того же звена – сопротивлений R_1 и R_2 . Найти ее сопротивление между точками A и B .

В данном случае разумно воспользоваться тем, что цепочка образована бесконечным повторением одно и того же звена, т.е. обладает трансляционной симметрией. И если это звено удалить, то оставшаяся часть (после вертикальной штриховой линии) ничем не будет отличаться от исходной цепочки, обладающей искомым сопротивлением R . Таким образом, всю бесконечную цепочку

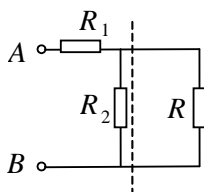


Рис. 2.4

можно представить как соединение звена из двух сопротивлений R_1 , R_2 и искомого сопротивления R (рис. 2.4), причем $R_{AB} = R$. Сопротивление R_{AB} нетрудно найти:

$$R_{AB} = R_1 + \frac{RR_2}{R + R_2}.$$

Приравнявая R_{AB} и R , приходим к уравнению относительно R :

$$R = R_1 + \frac{RR_2}{R + R_2}.$$

Его решение имеет вид

$$R = \frac{R_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{R_2}{R_1}} \right).$$

3. Имеется бесконечная сетка, состоящая из ячеек в виде правильных шестиугольников (рис. 2.5). Определить ее сопротивление между узлами A и B , если сопротивлению каждой стороны ячейки равно R_0 .

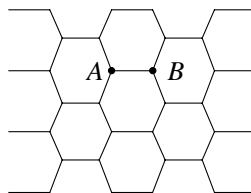


Рис. 2.5

Воспользоваться тем же приемом, что и в предыдущем пункте, нам не удастся, так как удаление любого элемента бесконечной двумерной сетки нарушает трансляционную симметрию. Поэтому воспользуемся законом Ома, который фактически и является определением сопротивления проводника. Для этого подключим мысленно к точкам A и B напряжение U . Тогда в подводящих проводах потечет ток $I = U/R$, где R – исходное сопротивление всей сетки. Этот ток в силу симметрии распределяется одинаково по трем направлениям. Значит, по проводнику AB течет «прямой» ток $I/3$. Но через данный проводник к узлу B течет не только «прямой» ток от узла A . Сюда же поступают токи и от всех остальных элементов сетки. Опять же в силу симметрии токи, поступающие к узлу B от всех удаленных элементов, должны быть одинаковыми во всех направлениях и равными $I/3$. Таким образом, полный ток, прошедший от узла A к узлу B , будет равен $2I/3$. В силу закона Ома можно записать

$$U = IR \quad \text{и} \quad U = \frac{2}{3}IR_0.$$

Откуда сразу находим

$$R = \frac{2}{3}R_0.$$

4. Фигура, отображенная на рис. 2.6, сделана из проволоки постоянного сечения. Число вписанных друг в друга правильных треугольников очень велико. Сопротивление

стороны самого большого треугольника R_1 . Найти сопротивление фигуры между точками A и B .

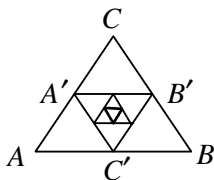


Рис. 2.6

Один из вариантов решения этой задачи мог быть следующим. Вначале находим сопротивление только одного треугольника ABC . Затем вписываем в него еще один треугольник $A'B'C'$, находим следующее приближение и т.д. Это довольно утомительный путь. Поэтому воспользуемся симметрией схемы и тем, что каждый дополнительно вписанный треугольник является подобным предыдущему, причем его сторона каждый раз уменьшается в 2 раза. Пусть все содержимое внутри треугольника $A'B'C'$ имеет между точками A' и B' сопротивление R_0 . Это сопротивление нам не известно, но, очевидно, что оно в 2 раза меньше сопротивления исходного треугольника ABC со всем его содержимым (по своим линейным размерам треугольник ABC в 2 раза больше треугольника $A'B'C'$).

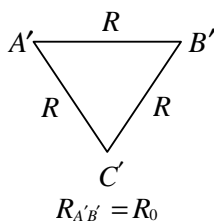


Рис. 2.7

Заменим теперь треугольник $A'B'C'$ со всем его содержимым эквивалентным соединением трех резисторов сопротивлением R (рис. 2.7). Нетрудно убедиться, что $R = 3R_0/2$. Таким образом, мы приходим к представленной на рис. 2.8 довольно простой схеме двух вписанных друг в друга треугольников, причем $R_{AB} = 2R_0$, $R = 3R_0/2$, а значение R_1 задано. Осталось только найти сопротивление двух вписанных друг в друга треугольников. Так как в силу симметрии потенциалы точек C, C' и C'' одинаковы, то эти точки можно объединить в одну. И тогда схема, отображенная на рис. 2.8, может быть представлена как последовательное соединение двух одинаковых участков (рис. 2.9). Из

друг в друга треугольников, причем $R_{AB} = 2R_0$, $R = 3R_0/2$, а значение R_1 задано. Осталось только найти сопротивление двух вписанных друг в друга треугольников. Так как в силу симметрии потенциалы точек C, C' и C'' одинаковы, то эти точки можно объединить в одну. И тогда схема, отображенная на рис. 2.8, может быть представлена как последовательное соединение двух одинаковых участков (рис. 2.9). Из

рис. 2.9, используя правила расчета сопротивления параллельного и последовательного соединений проводников, находим

$$R_{AC'} = \frac{\left(\frac{R_1 R / 6}{R_1 / 2 + R / 3} + R_1 / 2 \right) R_1 / 2}{\frac{R_1 R / 6}{R_1 / 2 + R / 3} + R_1}.$$

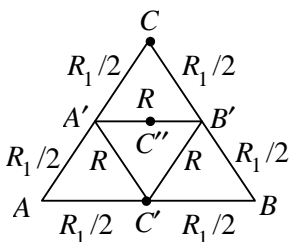


Рис. 2.8

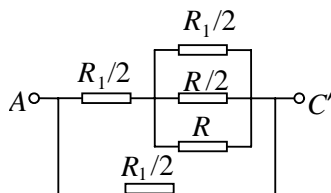


Рис. 2.9

Учитывая, что $R_{AB} = 2R_0 = 2R_{AC'}$ и $R = 3R_0 / 2$, для неизвестного сопротивления R_0 получаем квадратное уравнение

$$3R_0^2 + R_1 R_0 - R_1^2 / 2 = 0.$$

Его решение имеет вид $R_0 = R_1 (\sqrt{7} - 1) / 6$. Таким образом, окончательно получаем

$$R_{AB} = 2R_0 = \frac{R_1}{3} (\sqrt{7} - 1).$$

2.1.3. Сопротивление цилиндрической банки. К центрам противоположных торцов тонкостенной цилиндрической банки диаметром D и высотой h припаяны провода диаметром d (рис. 2.10). Определить сопротивление банки, если она сделана из фольги толщиной $\delta \ll d$ с удельным сопротивлением ρ .

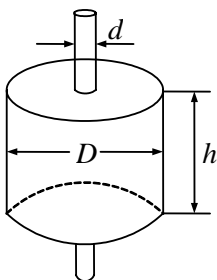


Рис. 2.10

Сопротивление проводников, вообще говоря, зависит не только от их материала и геометрии, но и от характера пространственного распределения в них токов. Поэтому прежде чем находить сопротивление, необходимо выяснить, каково пространственное распределение токов. Для проводника в виде тонкой проволоки этот вопрос не возникает. В нашем же случае ситуация не столь простая. Спасает то, что по условию толщина фольги го-

раздо меньше других размеров проводника. Это означает, что по основанию банки токи направлены радиально, а по цилиндрической образующей банки токи текут вдоль оси банки. Таким образом, полное сопротивление можно представить в виде

$$R = 2R_{\text{осн}} + R_{\text{бок}},$$

где $R_{\text{бок}}$ – сопротивление боковой образующей банки; $R_{\text{осн}}$ – сопротивление одного основания. Для расчета $R_{\text{бок}}$ в соответствии с формулой $R = \rho l / S$ можно сразу записать

$$R_{\text{бок}} = \rho \frac{h}{\pi D \delta}.$$

Сложнее дело обстоит с сопротивлением оснований. Радиальное течение тока нарушается в области перехода от подводящих проводов к основанию, но в силу условия $\delta \ll d$ плотность тока здесь мала, и сопротивлением этой области можно пренебречь. Разобьем каждое основание на тонкие цилиндрические слои радиусом r и шириной dr . Тогда их сопротивление можно рассчитать как

$$R_{\text{очн}} = \int_{d/2}^{D/2} \rho \frac{dr}{2\pi r \delta},$$

и для сопротивления всей банки получаем

$$R = \frac{\rho}{\pi \delta} \left(\frac{h}{D} + \ln \frac{D}{d} \right).$$

2.1.4. Сопротивление однородной среды. Найти сопротивление однородной слабо проводящей среды, заполняющей все пространство между двумя идеально проводящими оболочками произвольной формы. Удельное сопротивление среды ρ , диэлектрическая проницаемость ϵ , взаимная емкость системы электродов-оболочек C .

Воспользоваться, как и в предыдущей задаче, формулой $R = \rho l / S$ мы сейчас не можем, так как неизвестна ни форма проводников, ни пространственное распределение токов. Поэтому обратимся к некоторым общим свойствам электрического поля. Подключим мысленно к электродам постоянную разность потенциалов U . При этом проводники получают заряды $+q$ и $-q$. В проводящей среде возникает движение зарядов, появляется некоторый ток. Так как разность потенциалов между проводниками поддерживается постоянной, то и токи в среде будут стационарными. При этом в каждой точке среды на место уходящих зарядов непрерывно поступают такие же новые. Эти движущиеся заряды создают такое же кулоновское поле, что и неподвижные заряды той же конфигурации. Это означает, что электрическое поле стационарных токов является потенциальным, поверхности проводников эквипотенциальны и конфигурация поля такая же, как и при отсутствии слабо проводящей среды. На этом, кстати, основано моделирование электростатических полей различной конфигурации при пропускании тока в слабо проводящих средах.

Окружим один из проводников (например, с зарядом $+q$) замкнутой поверхностью S , прилегающей к поверхности проводника. В силу теоремы Гаусса: $\oint_S D_n dS = q$, где $D_n = \epsilon_0 \epsilon E_n$ – индукция электрического поля вблизи проводника; E_n – напряженность электрического поля. Так как заряд связан с емкостью системы проводников соотношением $q = CU$, то

$$\epsilon_0 \epsilon \oint_S E_n dS = CU. \quad (1)$$

Воспользуемся теперь связью плотности тока и напряженностью электрического поля $\vec{j} = \vec{E} / \rho$. Проинтегрируем это соотношение по той же поверхности S :

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \frac{1}{\rho} \oint_S E_n dS.$$

Входящий сюда интеграл $\oint_S \vec{j} d\vec{S}$ есть просто полный ток между проводниками I , который в силу закона Ома равен U / R , где R – полное сопротивление среды. Тогда можно записать

$$\frac{1}{\rho} \oint_S E_n dS = \frac{U}{R}. \quad (2)$$

Сопоставляя выражения (1) и (2), находим

$$R = \frac{\epsilon_0 \epsilon \rho}{C}.$$

Этот результат можно получить и из других соображений, не обращаясь к теореме Гаусса. По близким эквипотенциальным поверхностям любую область пространства, заполненную проводящим диэлектриком, можно разбить на

тонкие слои толщиной δl , а их, в свою очередь, на небольшие участки площадью δS , которые можно считать плоскими конденсаторами. Каждый такой участок обладает сопротивлением δR и емкостью δC

$$\delta R = \rho \frac{\delta l}{\delta S}, \quad \delta C = \frac{\epsilon \epsilon_0 \delta S}{\delta l}.$$

Отсюда находим

$$\delta R = \epsilon \epsilon_0 \rho \cdot \frac{1}{\delta C}. \quad (3)$$

При последовательном и параллельном соединении всех участков среды сопротивления и обратные емкости складываются одинаково, и в однородном веществе пропорциональность δR и $1/\delta C$ сохраняется. Следовательно, соотношение, подобное (3), останется и для всей среды.

2.1.5. Напряжения на конденсаторах. Два плоских конденсатора, заполненных веществами с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 и удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 , имеют емкости C_1 и C_2 . Какие напряжения будут на конденсаторах, если их соединить последовательно и подать на них напряжение U ?

Воспользовавшись решением предыдущей задачи, найдем сопротивление каждого конденсатора (сопротивление утечки)

$$R_1 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 \rho_1}{C_1}, \quad R_2 = \frac{\epsilon_2 \epsilon_0 \rho_2}{C_2}.$$

Так как эти сопротивления соединены последовательно, то ток, протекающий через них, будет одинаковым:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{UC_1 C_2}{\epsilon_0 (\epsilon_1 \rho_1 C_2 + \epsilon_2 \rho_2 C_1)}.$$

Соответственно падения напряжения на конденсаторах составят

$$U_1 = \frac{UC_2\rho_1\varepsilon_1}{\varepsilon_1\rho_1C_2 + \varepsilon_2\rho_2C_1}, \quad U_2 = \frac{UC_1\rho_2\varepsilon_2}{\varepsilon_1\rho_1C_2 + \varepsilon_2\rho_2C_1}.$$

2.1.6. Заряд на границе между диэлектриками. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя диэлектрическими слоями 1 и 2 толщиной d_1 и d_2 с проницаемостями ε_1 и ε_2 и удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 . Конденсатор находится под постоянным напряжением U , причем электрическое поле направлено от слоя 1 к слою 2. Найти поверхностную плотность сторонних зарядов на границе раздела диэлектриков.

Внутри однородного проводника при протекании по нему постоянного тока нет избыточных зарядов. Это сразу следует из уравнения непрерывности $\oint \vec{j} d\vec{S} = 0$, если его переписать с учетом закона Ома $\vec{j} = \vec{E}/\rho$. Тогда для однородного проводника получаем

$$\frac{1}{\rho} \oint \vec{E} d\vec{S} = 0. \quad (1)$$

Входящий сюда интеграл в силу теоремы Гаусса пропорционален избыточному заряду внутри замкнутой поверхности и если $\rho = \text{const}$, то и заряд равен нулю. Но в нашей ситуации на границе раздела диэлектриков $\rho \neq \text{const}$. Пусть часть замкнутой поверхности находится в одном диэлектрике, а другая – во втором, вблизи границы раздела. Тогда из соотношения (1) следует

$$\frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2}. \quad (2)$$

Если к этой же замкнутой поверхности применить теорему Гаусса для вектора индукции \vec{D} , то получаем

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma = \epsilon_0 \epsilon_2 E_2 - \epsilon_0 \epsilon_1 E_1. \quad (3)$$

Здесь σ – искомая поверхностная плотность избыточных зарядов на границе раздела диэлектриков. Так как электрическое поле внутри каждого диэлектрика однородное, то для него выполняется условие

$$U = \int E dl = E_1 d_1 + E_2 d_2. \quad (4)$$

Из соотношений (2)–(4) нетрудно найти

$$\sigma = \frac{\epsilon_2 \rho_2 - \epsilon_1 \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} \epsilon_0 U.$$

2.1.7. Конденсатор с переменной емкостью. В плоский конденсатор заданных размеров вдвигается с постоянной скоростью v пластина диэлектрика (рис. 2.11). Определить ток в цепи батареи, подключенной к конденсатору. Считать известными: ЭДС батареи \mathcal{E} , диэлектрическую проницаемость диэлектрика ϵ , толщину пластины d и ее ширину b (на рисунке не отображена).

Так как пластина диэлектрика непроводящая, то откуда в цепи появляется ток? Связано это с тем, что при вдвигании пластины на диэлектрике под действием внешнего электрического поля появляются связанные заряды.

Эти заряды вытягивают на себя заряды от источника тока, и таким образом в цепи появляется ток. Воспользуемся определением силы тока

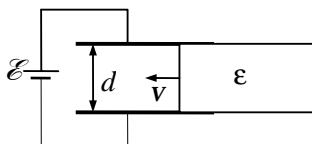


Рис. 2.11

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Здесь dq – заряд, прошедший по цепи за время dt . Величина этого заряда определяется изменением емкости конденсатора dC при вдвигании пластины: $dq = \mathcal{E}dC$. Если за время dt пластина была вдвинута на расстояние $dx = vdt$, то изменение емкости конденсатора составит

$$dC = \frac{\epsilon_0 v dt \cdot b}{d} (\epsilon - 1).$$

Таким образом, сила тока

$$I = \frac{\mathcal{E} \epsilon_0 v dt \cdot b}{d \cdot dt} (\epsilon - 1) = \frac{\mathcal{E} \epsilon_0 (\epsilon - 1) vb}{d}.$$

2.1.8. Дуговой разряд. На рис. 2.12 показана вольт-амперная характеристика разрядного промежутка дугового разряда. Найти максимальное сопротивление резистора R , соединенного последовательно с дугой, при котором дуга еще будет гореть, если эту систему подключить к напряжению $U_0 = 85$ В.

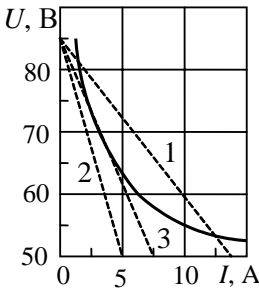


Рис. 2.12

При подаче напряжения U_0 часть его «достанется» резистору R и оставшаяся часть $U_{\text{разр}}$ — разрядному промежутку. Это напряжение не является постоянным и зависит как от тока I , так и от сопротивления резистора R : $U_{\text{разр}} = U_0 - IR$.

Отобразим эту линейную зависимость на вольт-амперной характеристике разрядного промежутка, например, пунктирная прямая 1 (чем больше R , тем эта линия опускается круче). Точки пересечения этой линии и вольт-амперной характеристики определяют значение общего тока всей системы. Если таких точек нет, то невозможно и протекание тока (линия 2), и самое большое значение R будет на прямой, касательной к вольт-амперной характеристике (линия 3). В дан-

ной точке: $I = 3 \text{ А}$, $U_{\text{разр}} = 70 \text{ В}$. Значит, резистору R «досталось» напряжение 15 В , и тогда его сопротивление будет равно 5 Ом .

2.1.9. Цепь с двумя конденсаторами. В схеме, показанной на рис. 2.13, один из конденсаторов зарядили до напряжения U_0 и в момент $t = 0$ замкнули ключ. Найти зависимость от времени тока в цепи.

В процессе перетекания заряда от одного конденсатора к другому ток, очевидно, будет изменяться со временем. И хотя закон Ома был установлен для постоянного тока, он остается справедливым и для мгновенных значений тока и на-

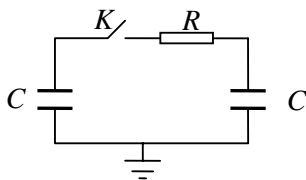


Рис. 2.13

пряжений, если только их изменения происходят не слишком быстро. Распространение электромагнитных возмущений по цепи длиной l происходит со скоростью света c . Если за время $\tau = l/c$, необходимое для передачи возмущения от одного конца цепи до другого, ток изменяется незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи будут практически одинаковы. В этом случае, как говорят, мы имеем дело с квазистационарными токами.

Пусть исходный заряд одного из конденсаторов, например левого, равен q_0 . Его величина связана с напряжением U_0 : $q_0 = CU_0$. Мгновенные значения зарядов обоих конденсаторов обозначим, как q_1 и q_2 , причем в силу закона сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q_0. \quad (1)$$

Запишем теперь закон Ома для участка цепи от точки 1 (верхняя пластина левого конденсатора) до точки 2 (верхняя пластина правого конденсатора):

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Здесь I – мгновенное значение силы тока в цепи (оно во всех сечениях одинаково); φ_1 и φ_2 – потенциалы верхних обкладок конденсаторов. Если принять потенциал нижних обкладок за нуль (это наше право), то

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{C}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{C}.$$

С учетом этих условий закон Ома приобретает вид

$$IR = \frac{q_1}{C} - \frac{q_2}{C}. \quad (2)$$

В это уравнение входят три изменяющиеся со временем величины: I , q_1 и q_2 , причем две из них связаны условием (1). И для определения функции $I(t)$ осталось только связать силу тока и величину заряда (либо q_1 , либо q_2). Для этого воспользуемся определением силы тока

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3)$$

Здесь dq – величина заряда, прошедшего через любое сечение цепи за время dt . Но именно на столько уменьшается заряд левого конденсатора (или увеличивается заряд правого конденсатора) за это же время, т.е.

$$dq = -dq_1 = dq_2. \quad (4)$$

Теперь у нас есть два варианта преобразования уравнения (2): либо выразить все через один из зарядов (q_1 или q_2), либо через силу тока. Второй вариант более предпочтительный, так как мы сразу получим уравнение для искомой силы тока. Для этого продифференцируем по времени равенство (2):

$$R \frac{dI}{dt} = \frac{1}{C} \left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \right).$$

С учетом (3) и (4) имеем

$$R \frac{dI}{dt} = -\frac{2}{C} I,$$

или

$$\frac{dI}{dt} + \frac{2}{RC} I = 0.$$

Решение данного дифференциального уравнения, как легко проверить, имеет вид

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{2}{RC}t},$$

где I_0 – начальное значение тока. Его величину нетрудно найти из закона Ома

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Тогда окончательно получаем

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{2}{RC}t}.$$

Величина $\tau = RC$ называется временем релаксации и характеризует скорость разряда конденсатора (чем больше τ , тем медленнее происходит разряд конденсатора).

2.1.10. Измерение напряжения. К источнику тока через переменное сопротивление R подключен вольтметр. Если сопротивление R уменьшить втрое, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если сопротивление уменьшить до нуля?

В этой задаче неясными остаются два момента, каким образом подключен вольтметр и надо ли учитывать сопротивление источника тока? Судя по условию задачи, вольтметр подключен последовательно переменному со-

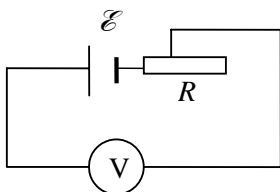


Рис. 2.14

противлению, так как при параллельном подключении уменьшение сопротивления до нуля привело бы к короткому замыканию вольтметра. Таким образом, схема подключения выглядит так, как показано на рис. 2.14 (\mathcal{E} – ЭДС источника тока).

Несколько сложнее дело обстоит с внутренним сопротивлением источника тока r . Полагать его сразу равным нулю мы не имеем права (об этом явно не сказано в условии задачи). С другой стороны, если составленная нами система уравнений, реализующая условия задачи, окажется недостаточной для его определения, то нам придется принять это сопротивление равным нулю.

Пусть первоначальное показание вольтметра при сопротивлении R равно U . Это значение нетрудно найти из закона Ома для замкнутой цепи:

$$U = \frac{\mathcal{E}R_V}{R + r + R_V}, \quad (1)$$

где R_V – сопротивление вольтметра. При уменьшении сопротивления R втрое имеем

$$2U = \frac{\mathcal{E}R_V}{R/3 + r + R_V}. \quad (2)$$

При $R = 0$

$$\eta U = \frac{\mathcal{E}R_V}{r + R_V}, \quad (3)$$

где значение η и является вопросом задачи.

На первый взгляд в трех уравнениях содержится шесть неизвестных: U , \mathcal{E} , R_V , R , r и η . На самом деле независимых переменных только три, некоторые величины входят в виде

отношений. Таким образом, система уравнений (1)–(3) является достаточной для определения величины η , и после несложных вычислений находим: $\eta = 4$, т.е. показания вольтметра возрастают в 4 раза.

2.1.11. Зарядка аккумулятора. Генератор с ЭДС \mathcal{E}_1 и внутренним сопротивлением r_1 подключен к аккумулятору с ЭДС \mathcal{E}_2 и внутренним сопротивлением r_2 через внешнее сопротивление R , как показано на рис. 2.15 (кружком со стрелкой обозначен генератор, стрелка указывает направление тока). При каком наибольшем значении R аккумулятор будет находиться в режиме зарядки?

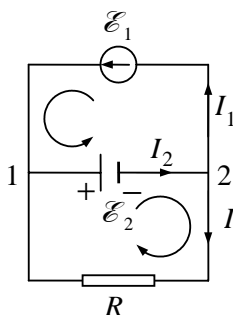


Рис. 2.15

Это классическая задача на применение правил Кирхгофа. Эти правила «на автомате» позволяют написать полную систему алгебраических уравнений, из которых можно найти, например, как неизвестный нам ток, протекающий через аккумулятор, так и все другие токи. При этом нужно учитывать следующее:

а) если в разветвленной цепи имеется N узлов, то число независимых уравнений по первому правилу Кирхгофа можно составить лишь для $N - 1$ узлов;

б) если в разветвленной цепи можно выделить несколько замкнутых контуров, то независимые уравнения по второму правилу Кирхгофа можно составить только для тех контуров, которые не являются наложением уже рассмотренных. Иначе говоря, в каждое следующее уравнение должен входить какой-нибудь новый, не рассматривавшийся ранее участок цепи.

В нашей схеме два узла, значит, число независимых уравнений по первому правилу Кирхгофа только одно. Неза-

висимых контуров – два (например, верхний, включающий в себя \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , и нижний, включающий в себя \mathcal{E}_2 и R). Значит, уравнений по второму правилу Кирхгофа будет только два. Таким образом, для трех неизвестных токов I_1, I_2 и I мы имеем систему из трех независимых уравнений. Обозначим стрелками (не задумываясь) предположительные направления токов I_1, I_2 и I (см. рис. 2.15). Если после вычислений окажется, что какой-то ток отрицателен, то его истинное направление противоположно направлению стрелки (выбранное нами направление тока I_2 соответствует режиму зарядки аккумулятора). Условимся считать ток положительным, если он втекает в узел, и отрицательным – в противном случае. Тогда для узла 2 первое правило Кирхгофа запишется как

$$-I_1 + I_2 - I = 0. \quad (1)$$

Составим теперь уравнения по второму правилу Кирхгофа. Для этого произвольно выберем положительное направление обхода контуров (например, как показано на рис. 2.15). Если предположительное направление некоторого тока совпадает с выбранным направлением обхода контура, то соответствующее слагаемое IR во втором правиле Кирхгофа нужно брать со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус. Аналогично поступаем и с ЭДС – если направление обхода совпадает с направлением действия ЭДС, то ее нужно брать со знаком плюс. Иначе, если контур обходится от плюса ЭДС к ее минусу по внешней цепи, то знак ЭДС положителен. В противном случае знак отрицателен. В соответствии с этими договоренностями имеем

$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \quad (2)$$

$$I_2 r_2 + IR = -\mathcal{E}_2. \quad (3)$$

Здесь r_1 и r_2 – внутренние сопротивления генератора и аккумулятора соответственно.

Решив систему уравнений (1)–(3) относительно I_2 , получаем

$$I_2 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)R - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1(r_2 + R) + r_2 R}.$$

Отсюда видно, что если

$$R > \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2},$$

то аккумулятор находится в режиме зарядки, если же

$$R < \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2},$$

то он разряжается (при этом предполагается, что ЭДС генератора больше ЭДС аккумулятора). При

$$R = \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}$$

ток через аккумулятор не протекает.

2.1.12. Разветвленная цепь с конденсатором. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между обкладками конденсатора C в схеме, представленной на рис. 2.16. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Значение разности потенциалов не входит ни в одно из правил Кирхгофа, но входит в закон Ома для участка цепи. Введем в рассмотрение промежуточные точки 1, 2, 3. Очевидно,

$$\varphi_A - \varphi_B = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3). \quad (1)$$

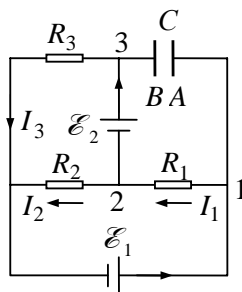


Рис. 2.16

Входящие сюда значения разности потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ и $(\varphi_2 - \varphi_3)$ можно найти из закона Ома для соответствующего участка цепи. Чтобы воспользоваться этим законом, нам придется выбрать предположительные направления токов не только на интересующих нас участках, но и на всех остальных участках цепи (см. рис. 2.16). Тогда для участка цепи между точками 1 и 2 имеем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = I_1 R_1, \quad (2)$$

а для участка 2–3

$$\varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2 = 0. \quad (3)$$

Из уравнений (1)–(3) следует

$$\varphi_A - \varphi_B = I_1 R_1 - \mathcal{E}_2. \quad (4)$$

Видно, что для определения $\varphi_A - \varphi_B$ необходимо знать ток I_1 . Понятно, что его значение связано со всеми остальными токами цепи, поэтому нам придется воспользоваться правилами Кирхгофа. Запишем второе правило Кирхгофа для контура R_3, R_2, \mathcal{E}_2 :

$$I_3 R_3 - I_2 R_2 = \mathcal{E}_2 \quad (5)$$

и для контура R_1, R_2, \mathcal{E}_1 :

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1. \quad (6)$$

Последнее недостающее уравнение (токов три, а уравнений только два) получим по первому правилу Кирхгофа для узла 2:

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (7)$$

После решения системы уравнений (5)–(7) относительно I_1 находим

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_2 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Тогда для искомой разности потенциалов получаем

$$\Phi_A - \Phi_B = \frac{\mathcal{E}_1 R_1 (R_2 + R_3) - \mathcal{E}_2 R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

2.2. Мощность тока. Закон Джоуля–Ленца

Под мощностью тока P на каком-либо участке цепи понимают величину

$$P = (\Phi_1 - \Phi_2) I + \mathcal{E} I.$$

Здесь слагаемое $(\Phi_1 - \Phi_2) I$ определяет мощность кулоновских сил, а слагаемое $\mathcal{E} I$ представляет собой мощность, развиваемую сторонними силами на данном участке, причем она изменяет знак при изменении направления тока.

В случае, когда проводник неподвижен и в нем нет химических превращений, согласно закону сохранения, энергия тока должна выделяться в форме внутренней (тепловой) энергии. Попросту говоря, происходит выделение тепла и проводник должен нагреваться. Величина выделяемой тепловой мощности \dot{Q} (тепло, выделяемое за единицу времени) определяется законом Джоуля–Ленца:

$$\dot{Q} = I^2 R.$$

Для постоянного тока полное тепло за время t

$$Q = I^2 R t,$$

а для переменного тока

$$Q = \int I^2 R dt.$$

В локальной форме закон Джоуля–Ленца представляют в виде

$$\dot{Q}_{\text{уд}} = \rho j^2,$$

где $\dot{Q}_{\text{уд}}$ – удельная тепловая мощность тока (теплота, выделяемая за единицу времени в единице объема проводника); ρ – удельное сопротивление; j – плотность тока. Это уравнение представляет собой наиболее общую форму закона Джоуля–Ленца, применимую к любым проводникам вне зависимости от их формы, однородности и природы сил, рождающих электрический ток. Если же в проводнике действуют только кулоновские силы, то на основании закона Ома можно написать

$$\dot{Q}_{\text{уд}} = \frac{1}{\rho} E^2,$$

где E – напряженность электрического поля.

По отношению к закону Джоуля–Ленца существует принцип, согласно которому токи и напряжения в цепи, состоящей из линейных (подчиняющихся закону Ома) элементов, распределяются таким образом, что диссипируемая в тепло мощность минимальна. Для иллюстрации этого принципа найдем распределение токов в каждом из трех параллельно соединенных сопротивлений R_1, R_2, R_3 , если полный ток, протекающий по ним, равен I .

Суммарная тепловая мощность \dot{Q} во всех трех элементах составляет

$$\dot{Q} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3. \quad (1)$$

В соответствии с указанным выше принципом нам необходимо найти значения токов I_1, I_2, I_3 , обеспечивающих минимум выражения (1) при выполнении условия

$$I_1 + I_2 + I_3 = I . \quad (2)$$

Это известная задача об отыскании условного экстремума функции нескольких переменных. Применим для ее решения метод Лагранжа. Следуя этому методу, найдем дифференциалы выражений (1) и (2) и положим их равными нулю:

$$\sum_{k=1}^{k=3} 2I_k R_k dI_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=3} dI_k = 0 .$$

Затем составим выражение

$$\sum_{k=1}^{k=3} (2I_k R_k + \lambda) dI_k = 0 ,$$

где λ – лагранжев множитель, не зависящий от всех переменных I_k . Его выберем так, чтобы коэффициент при dI_1 обратился в нуль. В этом случае будут равны нулю и коэффициенты при остальных dI_k , так как переменные I_2, I_3 можно принять за независимые. Тогда приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} 2I_1 R_1 + \lambda &= 0, \\ 2I_2 R_2 + \lambda &= 0, \\ 2I_3 R_3 + \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Добавляя к этим уравнениям еще условие (2), получаем полную систему уравнений для определения неизвестных токов I_1, I_2, I_3 и коэффициента λ , обеспечивающих минимум выделяемой тепловой мощности (величина λ играет только вспомогательную роль и нам в дальнейшем не потребуется). Из этой системы линейных уравнений нетрудно найти

$$I_1 = I \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2},$$

$$I_2 = I \frac{R_1 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2},$$

$$I_3 = I \frac{R_2 R_1}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}.$$

Заметим, что этот же результат можно было получить и иначе, если вспомнить, что напряжения на всех трех параллельно соединенных сопротивлениях одинаковы. Но теперь мы знаем, что такому распределению токов соответствует минимум тепловой мощности.

2.2.1. Полезная мощность источника тока. При замыкании источника тока (рис. 2.17) на сопротивление $R = R_1$, рассеиваемая на нем мощность оказалась равной P_1 . Чему

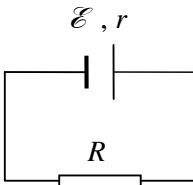


Рис. 2.17

равна ЭДС источника, если при замыкании его на сопротивление $R = R_2$ рассеиваемая на нем мощность осталась прежней?

Для ответа на поставленный вопрос нам, очевидно, необходимо иметь явную зависимость рассеиваемой на внешнем сопротивлении мощности (ее называют еще полезной мощностью) от величины сопротивления. Пусть ЭДС источника равна \mathcal{E} и его внутреннее сопротивление — r . Тогда мощность, рассеиваемая на внешнем сопротивлении R ,

$$P = I^2 R,$$

где I — сила тока, определяемая из закона Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

С учетом этих формул имеем

$$P(R) = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}. \quad (1)$$

И для нахождения ЭДС при известном значении мощности $P_1 = P(R_1) = P(R_2)$ не хватает только внутреннего сопротивления r . Для его определения подставим последовательно в (1) $R = R_1$ и $R = R_2$ и приравняем мощности

$$\frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2 + r)^2}.$$

Из этого равенства нетрудно найти

$$r = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (2)$$

Тогда из (1) находим (например, при $R = R_1$)

$$\mathcal{E} = \sqrt{P_1} (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}).$$

Обсудим теперь более подробно полученное нами выражение для полезной мощности (1). Для этого отобразим его на рис. 2.18. Видно, что одно и то же значение мощности, меньшей некоторого максимального P_{\max} , может быть достигнуто при двух значениях сопротивления нагрузки R_1 и R_2 (и соответственно при двух значениях тока I). Значения R_1 и R_2 связаны соотношением (2). Если допустить, что $R_1 = r$, то должно быть и $R_2 = r$. Очевидно, что это возможно только для максимального значения мощности P_{\max} . Отсюда приходим к тому, что максимальное значение мощности от источника с внутренним сопротивле-

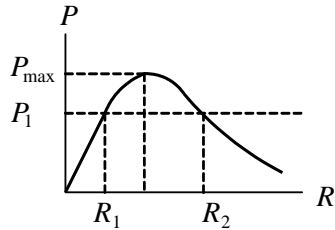


Рис. 2.18

нием r будет отбираться только в том случае, если сопротивление нагрузки тоже равно r . А само максимальное значение мощности составляет

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

Этот вывод можно было получить и иначе, исследуя выражение (1) на максимум стандартными методами. Заметим, что при максимальной полезной мощности коэффициент полезного действия (КПД) источника тока η не достигает максимума. Исходя из определения для КПД, нетрудно получить

$$\eta = \frac{I^2 R}{\mathcal{E} I} = \frac{R}{R + r},$$

и при максимальной мощности его значение составляет всего 50 % (вторая половина развиваемой мощности источника идет попросту на его нагревание).

2.2.2. Максимальная мощность двух параллельно соединенных источников. Два параллельно соединенных источника с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 замкнуты на сопротивление R (рис. 2.19). При каком сопротивлении R выделяемая на нем тепловая мощность практически не будет зависеть от малых изменений этого сопротивления? Чему эта мощность равна?

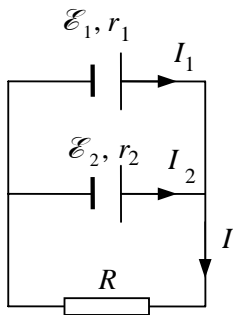


Рис. 2.19

Идея решения этой задачи достаточно прозрачна. Независимость тепловой мощности от малых изменений сопротивления R возможна только в точке экстремума функции

$$P = I^2 R, \quad (1)$$

где I – сила тока, протекающего через сопротивление R , которая зависит от величин $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, r_1$ и r_2 . Таким образом,

задача разбивается на два этапа. Вначале нам необходимо выразить величину тока I через параметры схемы, а затем исследовать на экстремум выражение (1).

Составим уравнения для неизвестных токов по правилам Кирхгофа (см. подразд. 2.1)

$$I_1 + I_2 - I = 0,$$

$$I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2.$$

Из этой системы уравнений находим

$$I = \frac{r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2}.$$

Тогда выражение для мощности (1) приобретает вид

$$P = \left(\frac{r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2} \right)^2 R. \quad (2)$$

Осталось только найти производную dP/dR и положить ее равной нулю. Но этого можно и не делать. Воспользуемся результатами предыдущей задачи. В ней мы нашли, что максимум выражения

$$P(R) = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} \quad (3)$$

выполняется при $R = r$. Сравнивая выражения (2) и (3), легко сообразить, что максимум выражения (2) будет при

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad (4)$$

т.е. при выполнении этого условия малые изменения величины R практически не будут влиять на выделяемую на нем

тепловую мощность. Подставив (4) в (2), находим значение этой мощности

$$P_{\max} = \frac{(r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1)^2 (r_1 + r_2)}{4r_1 r_2}.$$

2.2.3. Мощность лампочки. Лампочку, соединенную параллельно с резистором сопротивлением $R = 2,0$ Ом, подключили к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 15$ В и внутренним сопротивлением $r = 3,0$ Ом. Какая мощность выделяется на лампочке, если зависимость тока от напряжения на ней имеет вид, показанный на рис. 2.20?

Отобразим рассматриваемую цепь на рис. 2.21. В нее входит нелинейный, т.е. не подчиняющийся закону Ома элемент – лампочка (отображена кружком с крестиком). Использовать для расчета ее мощности соотношение $P = I^2 R$ мы не можем, так как неизвестно сопротивление лампочки. Более удобным является выражение $P = IU$, так как значения

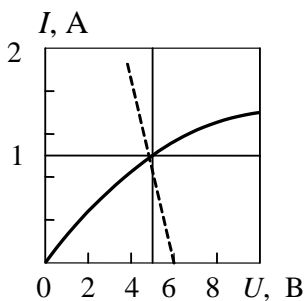


Рис. 2.20

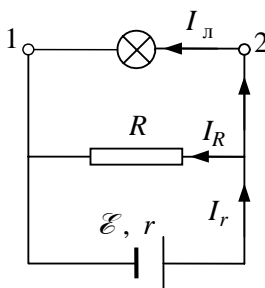


Рис. 2.21

тока и напряжения связаны известной вольт-амперной характеристикой лампочки (см. рис. 2.20). Посмотрим теперь, как ею можно воспользоваться независимо от способа ее задания (в виде графика или аналитически).

Отообразим на схеме соединения две промежуточные точки 1 и 2, отделяющие нелинейный элемент (лампочку) от остальной части схемы. Пусть разность потенциалов этих точек (напряжение) $\varphi_2 - \varphi_1 = U$. Эта величина имеет вполне определенное, но неизвестное нам значение. Предположим, что у нас есть возможность самим задавать величину U . Тогда нетрудно рассчитать ток I , подходящий к точкам 1 и 2, от той части схемы, которая подчиняется закону Ома. В то же время, по известной вольт-амперной характеристике значение U определяет и ток, проходящий через лампочку $I_{\text{л}}$. Таким образом, мы имеем две зависимости – аналитическую $I(U)$ и графическую $I_{\text{л}}(U)$. Конечно, при произвольных значениях U величины $I(U)$ и $I_{\text{л}}(U)$ не равны. И нам необходимо только подобрать (например, графическим способом) такое значение напряжения U , при котором $I(U) = I_{\text{л}}(U)$.

Для расчета зависимости $I(U)$ воспользуемся законом Ома для участка цепи и тем, что сумма токов, сходящихся в любом узле, равна нулю. Тогда придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} I_R R &= U, \\ I_r r &= \mathcal{E} - U, \\ I_r - I_R - I &= 0. \end{aligned}$$

Из них находим

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} - U \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right),$$

или после подстановки числовых значений

$$I = 5 \left(1 - \frac{U}{6} \right).$$

Осталось только отобразить эту зависимость на вольт-амперной характеристике лампочки (пунктирная линия на рис. 2.20) и найти их точку пересечения. Получаем: $I_{\text{л}} \approx 1 \text{ А}$, $U \approx 5 \text{ В}$. Таким образом, мощность, выделяемая на лампочке $P = I_{\text{л}} U \approx 5 \text{ Вт}$.

2.2.4. Мощность электродвигателя. Электродвигатель постоянного тока питается от сети с напряжением $U = 12 \text{ В}$. Какую мощность развивает двигатель при протекании по его обмотке тока $I = 2 \text{ А}$, если в момент запуска протекал ток $I_0 = 3 \text{ А}$? Каков КПД двигателя?

Первый вопрос, который, очевидно, здесь возникает: с чем связано уменьшение тока работающего электродвигателя по сравнению с током запуска? Ведь ни напряжение сети, ни ее сопротивление не изменились. Связано это с явлением электромагнитной индукции (точнее с явлением самоиндукции), проявляющимся при вращении обмотки якоря двигателя в магнитном поле (наличие магнитного поля лежит в основе работы электродвигателя). Так как с этим явлением мы еще не сталкивались, то попробуем применить энергетический подход, не требующий детального анализа процессов, протекающих в электродвигателе.

Полная мощность, потребляемая от сети, равна произведению UI . Часть этой мощности идет на совершение двигателем работы – полезная мощность P , другая ее часть – мощность тепловых потерь, равная $I^2 R$, где R – полное сопротивление цепи, включающее в себя сопротивление обмоток якоря и соединительных проводов. В соответствии с законом сохранения энергии можно записать

$$UI = P + I^2 R. \quad (1)$$

В момент запуска (т.е. еще при невращающемся якоре) это соотношение запишется как

$$UI_0 = I_0^2 R. \quad (2)$$

Из этих уравнений нетрудно найти мощность, развиваемую двигателем:

$$P = UI \left(1 - \frac{I}{I_0} \right) = 8 \text{ Вт},$$

и его КПД:

$$\eta = \frac{P}{UI} = 1 - \frac{I}{I_0} = 1/3.$$

Кроме того, из уравнений (1) и (2) автоматически следует, что рабочий ток электродвигателя I всегда меньше тока запуска I_0 :

$$I_0 = \frac{P}{IR} + I > I.$$

2.2.5. Зарядка конденсатора. Сколько тепла выделится при зарядке конденсатора емкости C от батареи с ЭДС \mathcal{E} ?

Хотя в задаче ничего не говорится о сопротивлении цепи, но оно естественно должно быть. В него входит как сопротивление источника тока, так и сопротивление подводящих проводов. Обозначим его R (рис. 2.22). После замыкания ключа K в момент $t = 0$ по цепи пойдет

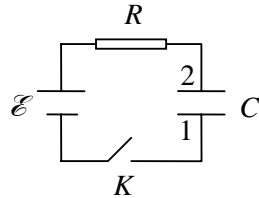


Рис. 2.22

ток, заряжающий конденсатор. Увеличивающиеся заряды на обкладках конденсатора будут все в большей степени препятствовать прохождению тока, постепенно уменьшая его, т.е. сила тока в цепи I будет функцией времени. Поэтому для расчета теплоты нам придется использовать закон Джоуля–Ленца в виде

$$Q = \int RI^2 dt.$$

И теперь наша задача сводится к определению явного вида зависимости $I(t)$. Будем считать ток положительным, если он течет в направлении положительно заряженной обкладки конденсатора. Применим закон Ома для неоднородного участка цепи $1\mathcal{E}R2$:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}.$$

Учитывая, что $I = dq/dt$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E} - q/C}{R}.$$

Тогда после разделения переменных и интегрирования с учетом начального условия ($q = 0$ при $t = 0$) получаем

$$q = q_m \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Здесь $q_m = \mathcal{E}C$ – предельное значение заряда конденсатора при $t \rightarrow \infty$.

Соответственно закон изменения тока зарядки примет вид

$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

где $I_0 = \mathcal{E}/R$.

Таким образом, для полного выделившегося тепла получаем

$$Q = \int_0^{\infty} RI^2(t)dt = I_0^2 R \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt.$$

Это табличный интеграл. Тогда окончательно имеем

$$Q = \frac{I_0^2 R^2 C}{2} = \frac{C \mathcal{E}^2}{2}.$$

Самое замечательное в этом ответе то, что выделившееся тепло никак не зависит от сопротивления и в точности равно энергии, запасенной конденсатором. Нетрудно проверить, что сумма количества теплоты и запасенной энергии конденсатора как раз и равна работе источника тока по зарядке конденсатора.

2.2.6. Разряд сферического конденсатора. Радиусы обкладок сферического конденсатора равны a и b , причем $a < b$. Пространство между обкладками заполнено однородным веществом диэлектрической проницаемости ϵ с удельным сопротивлением ρ . В момент $t = 0$ внутренней обкладке сообщили заряд q_0 . Найти количество теплоты, выделившееся при растекании заряда.

При растекании заряда плотность тока в каждой точке среды будет зависеть не только от положения данной точки, но и от времени. Поэтому разумно воспользоваться для расчета теплоты Q выражением

$$Q = \int \dot{Q}_{\text{уд}} dV dt.$$

Здесь $\dot{Q}_{\text{уд}}$ – удельная тепловая мощность тока (теплота, выделяемая за единицу времени в единице объема проводника). Так как в проводнике действуют только кулоновские силы, то воспользуемся законом Джоуля–Ленца в локальной форме:

$$\dot{Q}_{\text{уд}} = \frac{1}{\rho} E^2,$$

где E – напряженность электрического поля внутри сферического конденсатора с зарядом q :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Выбирая в качестве бесконечно малого элемента объема тонкий сферический слой $dV = 4\pi r^2 dr$, получаем выражение для теплоты

$$Q = \frac{1}{\rho_0} \int_0^\infty dt \int_a^b \frac{q^2(t) 4\pi r^2 dr}{(4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2)^2}.$$

Или после интегрирования по радиусу

$$Q = \frac{b-a}{4\pi\epsilon^2\epsilon_0^2 ab} \int_0^\infty q^2(t) dt. \quad (1)$$

Таким образом, нам осталось только найти зависимость от времени заряда внутренней обкладки сферического конденсатора. Пусть полное сопротивление среды внутри конденсатора равно R , а его емкость – C . Тогда закон Ома для всей среды внутри конденсатора будет иметь вид

$$IR = \frac{q}{C}, \quad (2)$$

где I – сила полного тока внутри конденсатора. Величина этого тока должна быть равна скорости убывания заряда внутренней обкладки конденсатора, взятой с обратным знаком:

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0. \quad (4)$$

В задаче 2.1.4 нами было показано, что для проводников произвольной формы, находящихся в слабо проводящей сре-

де, выполняется связь $RC = \rho\epsilon\epsilon_0$. С учетом этой связи перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\rho\epsilon\epsilon_0} = 0.$$

Данное уравнение, как легко проверить, имеет решение

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\rho\epsilon\epsilon_0}\right).$$

После подстановки данного выражения в (1) и интегрирования по времени находим окончательно

$$Q = \frac{q_0^2 (b-a)}{8\pi\epsilon\epsilon_0 ab}.$$

Нетрудно убедиться, что это тепло в точности равно начальной запасенной электрической энергии сферического конденсатора W :

$$W = \frac{q_0^2}{2C}.$$

3. МАГНЕТИЗМ

3.1. Индукция магнитного поля

Индукция магнитного поля элемента тока $I d\vec{l}$ определяется законом Био–Савара

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \left[d\vec{l} \vec{r} \right]}{r^3},$$

где I – сила тока; $d\vec{l}$ – вектор, модуль которого равен длине элемента проводника dl , а направление совпадает с направлением тока; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Для объемного распределения токов с плотностью \vec{j} закон Био–Савара представляют в виде

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[\vec{j} \vec{r} \right] dV}{r^3},$$

где dV – элементарный объем. Вектор $\vec{j} dV$ называют объемным элементом тока. Полное поле \vec{B} в соответствии с принципом суперпозиции определяется интегрированием по всем элементам тока:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \left[d\vec{l} \vec{r} \right]}{r^3}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\left[\vec{j} \vec{r} \right] dV}{r^3}.$$

Магнитное поле точечного заряда q , движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью \vec{v} , определяется формулой

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \left[\vec{v} \vec{r} \right]}{r^3},$$

причем это выражение справедливо и в случае ускоренно движущегося заряда, но только на достаточно малых рас-

стояниях от него (малых настолько, что за время r/c скорость заряда \vec{v} заметно не изменяется).

Для магнитного поля, как и для электрического, существует теорема Гаусса: $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ – поток вектора \vec{B} через любую замкнутую поверхность S равен нулю. Эта теорема выражает в постулативной форме тот факт, что линии вектора \vec{B} замкнуты (т.е. не имеют ни начала, ни конца). Связано это с тем, что в природе нет магнитных зарядов, на которых начинались бы или заканчивались линии вектора \vec{B} .

Другое важное утверждение, касающееся свойств магнитного поля постоянных токов в вакууме, выражается теоремой о циркуляции вектора \vec{B} : $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_k$ – циркуляция вектора \vec{B} по произвольному контуру L равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром.

В дифференциальной форме теорема Гаусса и теорема о циркуляции выглядят как

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

или с использованием оператора ∇ («набла»)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad [\nabla \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}.$$

3.1.1. Поле элементарного витка (магнитного диполя). Большое значение в физике магнитных явлений имеет понятие элементарного витка с током. Это плоский контур с током и достаточно малыми размерами. Его иногда называют еще магнитным диполем. Поведение магнитного диполя во внешнем магнитном поле и его собственное поле удобно описывать с помощью магнитного момента \vec{p}_m . По определению

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

где I – ток; S – площадь, ограниченная контуром; \vec{n} – единичный вектор нормали к контуру, направление которого связано с направлением тока правилом правого винта (рис. 3.1). Найдем выражение для индукции магнитного поля диполя на расстоянии, значительно превышающем его размеры.

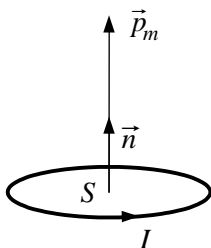


Рис. 3.1

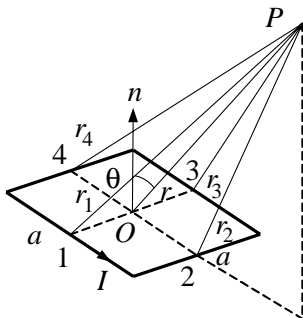


Рис. 3.2

Так как мы будем рассматривать точки, удаленные от диполя, то его форма не имеет никакого значения, и мы вправе выбрать ее по своему усмотрению. Как это выяснится из дальнейшего, наиболее простым для вычислений (как ни странно) оказывается квадратный контур со стороной $a \ll r$ (рис. 3.2). Положение точки P , в которой будем находить вектор \vec{B} , зададим вектором \vec{r} относительно центра контура и углом θ между векторами \vec{n} и \vec{r} .

В соответствии с принципом суперпозиции полное поле \vec{B} в точке P можно представить в виде суммы полей от каждой стороны квадрата по отдельности: $\vec{B} = \sum_{i=1}^{i=4} \vec{B}_i$, где

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I [d\vec{l}_i \vec{r}_i]}{r_i^3},$$

а интеграл берется по длине i -й стороны (они пронумерованы цифрами 1, 2, 3 и 4 на рис. 3.2). Так как длина любой стороны много меньше расстояния до точки P , то приближенно можно записать

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [\vec{a}_i \vec{r}_i]}{r_i^3}.$$

Здесь \vec{a}_i – вектор, имеющий направление тока на i -й стороне с длиной, равной стороне квадрата a ; \vec{r}_i – радиус-вектор, проведенный из середины i -й стороны в точку P (см. рис. 3.2).

Найдем сначала сумму \vec{B}_1 и \vec{B}_3 :

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{[\vec{a}_1 \vec{r}_1]}{r_1^3} + \frac{[\vec{a}_3 \vec{r}_3]}{r_3^3} \right\}.$$

Теперь учтем, что $\vec{a}_3 = -\vec{a}_1$ и $r_1 = r_3 \approx r$. Тогда

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[\vec{a}_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)]}{r^3}.$$

Кроме того, на рис. 3.2 видно, что $\vec{r}_1 - \vec{r}_3 = \vec{a}_2$ и $[\vec{a}_1 \vec{a}_2] = a^2 \vec{n}$. Таким образом, получаем

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I a^2 \vec{n}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3}$$

(мы учли, что $I a^2 \vec{n}$ равно магнитному моменту \vec{p}_m).

Займемся теперь оставшейся суммой \vec{B}_2 и \vec{B}_4 :

$$\vec{B}_2 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{[\vec{a}_2 \vec{r}_2]}{r_2^3} + \frac{[\vec{a}_4 \vec{r}_4]}{r_4^3} \right\}. \quad (1)$$

При условии $r \gg a$

$$r_4 \approx r + \frac{a}{2} \sin \theta, \quad r_2 \approx r - \frac{a}{2} \sin \theta.$$

Тогда

$$\vec{B}_2 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left\{ \frac{[\vec{a}_2 \vec{r}_2]}{\left(1 - \frac{a}{2r} \sin \theta\right)^3} + \frac{[\vec{a}_4 \vec{r}_4]}{\left(1 + \frac{a}{2r} \sin \theta\right)^3} \right\}.$$

Или с учетом того, что $\vec{a}_4 = -\vec{a}_2$, $\vec{r}_4 - \vec{r}_2 = \vec{a}_1$ и $\vec{r}_4 + \vec{r}_2 \approx 2\vec{r}$

$$\vec{B}_2 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} [\vec{a}_4 \vec{a}_1] - \frac{3\mu_0 I a}{4\pi r^4} \sin \theta \cdot [\vec{a}_4 \vec{r}] \quad (2)$$

(при этом мы учли приближенные формулы $(1+x)^3 \approx 1+3x$, $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ для $x \ll 1$). Так как произведение $[\vec{a}_4 \vec{a}_1]$ равно $a^2 \vec{n}$, то первое слагаемое в (2) будет равно $\mu_0 \vec{p}_m / 4\pi r^3$.

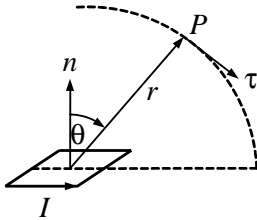


Рис. 3.3

Введем теперь единичный вектор $\vec{\tau}$, касательный к окружности радиуса r с центром в точке O и проходящей через векторы \vec{p}_m и \vec{r} . Направление этого вектора привяжем к направлению отсчета угла θ (рис. 3.3). С использованием данного вектора второе слагаемое в (2) можно записать как

$$\frac{3\mu_0 I a^2 r}{4\pi r^4} \sin \theta \cdot \vec{\tau} = \frac{3\mu_0 \left| [\vec{p}_m \vec{r}] \right|}{r^4} \vec{\tau}.$$

Таким образом,

$$\vec{B}_2 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{p}_m + \frac{3\mu_0 [(\vec{p}_m \vec{r})]}{4\pi r^4} \vec{r}. \quad (3)$$

И в итоге, складывая (1) и (3), получаем

$$\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_\tau = \frac{\mu_0}{2\pi r^3} \vec{p}_m + \frac{3\mu_0 [(\vec{p}_m \vec{r})]}{4\pi r^4} \vec{r}, \quad (4)$$

где векторы \vec{B}_n и \vec{B}_τ представлены на рис. 3.4. Здесь же представлена картина линий вектора \vec{B} . Не правда ли, очень напоминает картину линий вектора \vec{E} поля электрического диполя? На самом деле эти картины абсолютно идентичны. Для того чтобы убедиться в этом перепишем выражение (4) через составляющие поля вдоль направлений векторов \vec{p}_m и \vec{r} . После несложных преобразований приходим к следующему выражению

$$\vec{B} = \frac{3\mu_0 (\vec{p}_m \vec{r}) \vec{r}}{4\pi r^5} - \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3}. \quad (5)$$

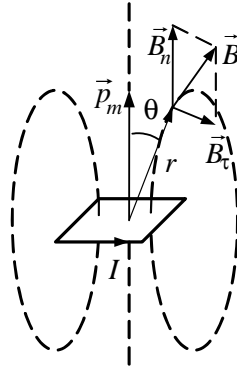


Рис. 3.4

А это полностью совпадает с полученным нами ранее выражением для вектора \vec{E} поля точечного электрического диполя (формула (5) в задаче 1.1.5).

И в заключение найдем модуль вектора \vec{B} . Применив теорему косинусов к выражению (4) или (5), нетрудно получить

$$B = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}, \quad (6)$$

что также полностью совпадает с выражением для модуля вектора \vec{E} поля точечного электрического диполя. Вот почему элементарный контур с током называют магнитным диполем (по аналогии с электрическим диполем).

3.1.2. Поле плоских контуров. На практике часто приходится иметь дело с проводниками, находящимися в одной плоскости с заданной точкой поля. В этом случае закон Био–Савара приобретает особенно простой вид. Так как точка наблюдения находится в плоскости проводника, то вектор $d\vec{B}$ от любого линейного элемента тока $I d\vec{l}$ перпендикулярен плоскости проводника, и тогда интеграл $\int d\vec{B}$ сводится к интегралу от модуля dB :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \varphi}{r^2},$$

где φ – угол между направлением элемента тока и направлением на данную точку пространства P (рис. 3.5). Очевидно, $dl \sin \varphi = r d\varphi$. И тогда для B получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\varphi}{r(\varphi)}, \quad (1)$$

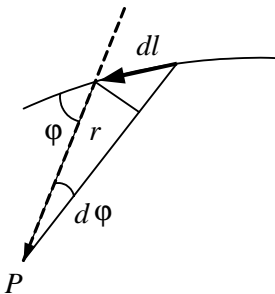


Рис. 3.5

где интегрирование производится по всем углам, под которыми располагаются выбранные элементы тока по отношению к некоторому фиксированному направлению. Рассмотрим теперь некоторые приложения формулы (1).

1. Поле кругового тока в центре. Для всех углов $r(\varphi) = R$, где R – радиус окружности. Тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R} = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

2. Поле в фокусе эллипса, большая и малая полуоси которого равны соответственно a и b . Известно, что уравнение эллипса в полярной системе координат имеет вид

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

где $p = b^2 / a$ – фокальный параметр; $e = \sqrt{a^2 - b^2} / a > 1$ – эксцентриситет. Тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos \varphi) d\varphi}{p} = \frac{\mu_0 I}{2p} = \frac{\mu_0 a I}{2b^2}.$$

3. Поле прямолинейного тока на расстоянии b от него (рис. 3.6). В данном случае удобно зависимость $r(\varphi)$ перевести в зависимость $r(\alpha) = b / \cos \alpha$. Тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha d\alpha}{b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$

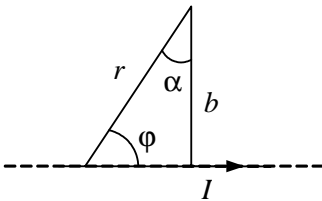


Рис. 3.6

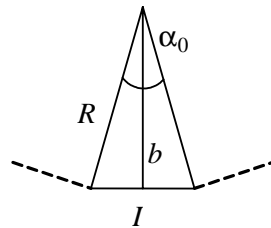


Рис. 3.7

4. Поле в центре правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 3.7). Понятно, что нам достаточно найти поле B_1 от одной стороны n -угольника и затем

помножить на число сторон. Каждая сторона видна из центра под углом $\alpha_0 = 2\pi/n$, причем $b = R \cos \alpha_0/2$. Тогда воспользовавшись решением предыдущей задачи, получаем

$$B_1 = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_0^{\alpha_0/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

И полное поле

$$B = nB_1 = \frac{\mu_0 In}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Очевидно, при $n \rightarrow \infty$ это выражение переходит в выражение для поля кругового тока ($\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \operatorname{tg} \pi/n) = \pi$).

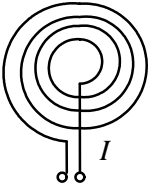


Рис. 3.8

5. Поле плоской спирали. Тонкий изолированный провод образует плоскую спираль из N плотно расположенных витков, по которым протекает ток I . Радиусы внутреннего и внешнего витков равны соответственно a и b (рис. 3.8). Найти индукцию B в центре спирали и магнитный момент.

Уравнение спирали можно представить в виде

$$r(\varphi) = a + \frac{b-a}{2\pi N} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi N.$$

Тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi N} \frac{d\varphi}{a + \frac{b-a}{2\pi N} \varphi} = \frac{\mu_0 IN}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a}.$$

Разбивая спираль на малые секторы площадью $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, ее полный магнитный момент можно записать в виде

$$p_m = \frac{I}{2} \int r^2 d\varphi = \frac{I}{2} \int_0^{2\pi N} \left[a + \frac{b-a}{2\pi N} \varphi \right]^2 d\varphi = \frac{\pi NI}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

3.1.3. Поле полусферы. Деревянный шар радиусом R обмотан тонкой проволокой так, что все витки параллельны между собой. Витки плотно уложены и покрывают половину поверхности шара в один слой (рис. 3.9). По проволоке течет ток I . Найти магнитное поле в центре шара. Общее число витков N . Витки можно считать кольцами, находящимися на равном расстоянии по дуге большего круга, плоскость которого перпендикулярна плоскости колец.

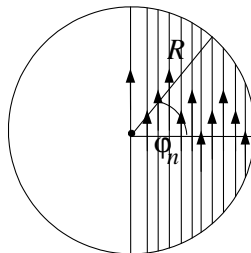


Рис. 3.9

Разумно задавать положение n -го витка через угол φ_n , под которым виден край витка из центра сферы относительно оси симметрии: $\varphi_n = \pi n / 2N$. Опираясь на закон Био–Савара, нетрудно получить значение индукции магнитного поля в центре сферы от одиночного витка с радиусом $r_n = R \sin \varphi_n$:

$$B_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int dl \sin \varphi_n = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^2 \varphi_n.$$

И полное поле N витков

$$B = \sum B_n = \frac{\mu_0 I}{2R} \sum_{n=1}^N \sin^2 \frac{\pi n}{2N}.$$

Входящая сюда сумма является известной:

$$\sum_{n=1}^N \sin^2 nx = \frac{N}{2} - \frac{\cos(N+1)x \cdot \sin Nx}{2 \sin x}.$$

В нашем случае $x = \pi / 2N$. Тогда окончательно получаем

$$B = \frac{\mu_0 I (N+1)}{4R}.$$

3.1.4. Поле треугольной пластины. Определить индукцию магнитного поля в центре однородной металлической пластинки, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной l , если ток I подводится по проводам, присоединенным к двум вершинам треугольника. Магнитным полем подводящих проводов пренебречь.

Понятно, что прямой аналитический расчет представляет большую проблему. Во-первых, необходимо рассчитать распределение токов по пластине и, во-вторых, по найденному и, скорей всего, не простому распределению токов определить создаваемое ими поле. Нас могут спасти только соображения симметрии. Треугольник – довольно симметричная фигура, и точка O , в которой ищем поле, является центром симметрии. Для того чтобы воспользоваться соображениями симметрии добавим еще один проводник к третьей вершине треугольника. Подведем теперь к точкам A и B одинаковые токи $I/3$ (рис. 3.10, *a*). Тогда из точки C должен выйти ток $2I/3$.

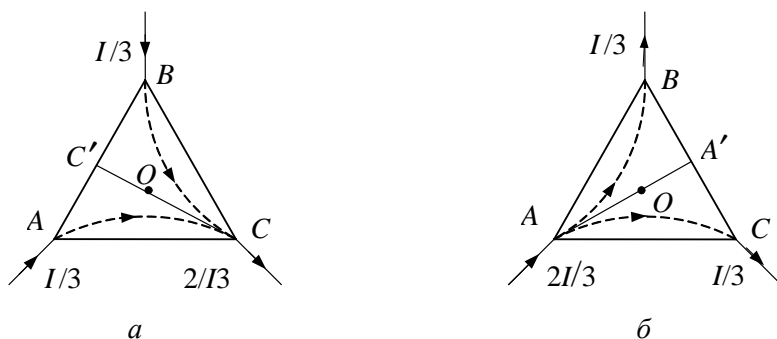


Рис. 3.10

В силу симметрии картина распределения поверхностных токов (отображена пунктирными линиями) внутри пластины должна быть симметричной относительно биссектрисы CC' . А это означает, что индукция магнитного поля на

линии CC' обращается в нуль. Подведем теперь к точке A ток $2I/3$ (рис. 3.10, б). В этом случае через точки B и C должны выйти одинаковые токи $I/3$. Опять же в силу симметрии картина распределения поверхностных токов будет симметричной относительно биссектрисы AA' , и во всех точках на ней магнитное поле равно нулю. При наложении обеих рассмотренных картин складываются как токи, так и их поля. При сложении токов к узлу A будет подводиться суммарный ток I , и этот же ток отводится через узел C (именно это и было заложено в условии задачи). К узлу B ничего не поступает и не отводится, т.е. введенный нами искусственно третий проводник не играет никакой роли. Но при наложении полей в центре треугольника, который принадлежит одновременно прямым AA' и CC' , складываются поля, равные нулю. Значит, в точке O индукция магнитного поля будет равна нулю (это касается только центра симметрии!).

3.1.5. Поле токов, распределенных по поверхности.

На практике часто встречаются задачи, в которых требуется рассчитать магнитное поле, созданное каким-либо участком плоской поверхности, по которой протекают поверхностные токи. В такой ситуации удобно ввести понятие вектора линейной плотности тока \vec{i} . Это вектор, направленный вдоль линий тока, и его модуль равен силе тока, приходящегося на единицу длины, перпендикулярной току (она играет роль «поперечного сечения»). Тогда составляющая вектора магнитной индукции, параллельная поверхности и перпендикулярная вектору линейной плотности тока \vec{i} , определяется формулой $B_{\parallel} = \mu_0 i \Omega / 4\pi$. Здесь Ω – телесный угол, под которым виден участок поверхности из рассматриваемой точки (аналогичное соотношение рассматривалось нами ранее и для электрического поля – см. задачу 1.1.12).

Для доказательства выделим на рассматриваемой поверхности бесконечно малый прямоугольный участок пло-

щадью $\delta S = \delta a \cdot \delta b$ (рис. 3.11). Расстояние от него до рассматриваемой точки – r , а угол, под которым виден участок δS по отношению к нормали к поверхности, – θ . По закону Био–Савара участок δS создает магнитное поле с индукцией

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0 \delta b [\delta a \cdot \vec{i}, \vec{r}]}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \delta S [\vec{i} \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

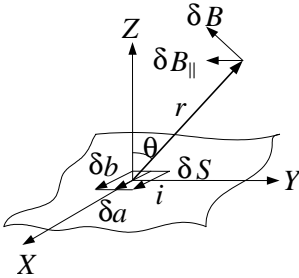


Рис. 3.11

Выберем систему координат так, чтобы ось X совпала с направлением тока, а ось Z совпала с нормалью к элементу δS (см. рис. 3.11). В этом случае нас будет интересовать проекция вектора $\delta \vec{B}$ на ось Y (именно это направление параллельно плоскости протекания тока и перпендикулярно вектору \vec{i})

$$\delta B_y = \frac{\mu_0 \delta S [\vec{i} \vec{r}]_y}{4\pi r^3}.$$

В соответствии с правилом раскрытия векторного произведения нетрудно показать, что $[\vec{i} \vec{r}]_y = i \cdot z = ir \cos \theta$. Тогда

$$\delta B_y = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{\delta S \cos \theta}{r^2}.$$

Входящий сюда множитель $\delta S \cos \theta / r^2$ представляет собой по определению телесный угол $\delta \Omega$, под которым виден элемент δS из рассматриваемой точки пространства. Таким образом,

$$\delta B_y = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \delta \Omega.$$

Суммируя это соотношение по всем участкам плоской поверхности, получаем

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 i \Omega}{4\pi}. \quad (1)$$

На самом деле полученный результат можно применять не только к плоским поверхностям (нужно только соблюсти условия его применения). Посмотрим теперь, как работает формула (1) на примере нескольких задач.

1. Найти индукцию магнитного поля возле бесконечной плоской поверхности, по которой течет ток с линейной плотностью \vec{i} .

В силу симметрии задачи вектор \vec{B} направлен параллельно плоскости и образует с направлением \vec{i} правовинтовую систему. Тогда формула (1) сразу дает модуль вектора \vec{B} :

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 i,$$

так как для бесконечной плоскости $\Omega = 2\pi$.

2. Определить индукцию магнитного поля внутри бесконечно длинного цилиндра, по поверхности которого течет поперечный ток с линейной плотностью \vec{i} . Зависит ли результат от формы поперечного сечения цилиндрической поверхности?

Хотя цилиндрическая поверхность не является плоской, к ней также можно применить формулу (1). Чтобы убедиться в этом, разобьем цилиндрическую поверхность на бесконечно длинные узкие полоски, перпендикулярные направлению тока (рис. 3.12). Поле всех этих полосок внутри цилиндра направлено вдоль его оси, а так

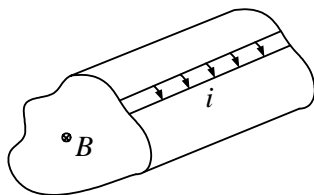


Рис. 3.12

как полный телесный угол, под которым видна вся поверхность из любой точки внутри, равен 4π , то

$$B = \mu_0 i ,$$

и, очевидно, не зависит от формы поперечного сечения (несколько неожиданный результат!).

3. По прямому длинному проводнику, сечение которого – правильный треугольник со стороной a , течет ток плотности j . Найти индукцию магнитного поля на ребрах проводника.

Для того чтобы воспользоваться формулой (1), разобьем поперечное сечение проводника на бесконечно тонкие полоски толщиной dx , параллельные грани напротив ребра, на котором ищем поле (рис. 3.13). Линейную плотность тока, протекающего по каждой полоске, можно связать с плотностью тока j : $di = jdx$. Телесный угол, под которым видна каждая полоска из точки A , $\Omega = 4\pi/6$. Тогда в соответствии с формулой (1) поле полоски $dB = \mu_0 j dx / 6$. И, интегрируя по всем полоскам, получаем

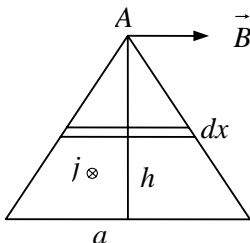


Рис. 3.13

$$B = \frac{\mu_0}{6} j h = \frac{\mu_0 j}{6} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\mu_0 j a}{4\sqrt{3}} .$$

3.1.6. Поле трубки с током. Вдоль длинной тонкостенной цилиндрической трубки радиусом R течет постоянный ток I . В стенке трубки имеется тонкая прорезь шириной $h \ll R$, параллельная оси трубки. Найти магнитное поле B внутри трубки и вне ее на расстоянии $r \gg R$.

Смоделируем наличие прорези (т.е. отсутствие тока в узкой ленте шириной $h \ll R$) пропусканием по ней двух противоположных токов той же линейной плотности, что

и ток в трубке (аналогичная идея была реализована нами при моделировании полости внутри заряженного тела). Тогда полное поле \vec{B} можно представить как сумму двух полей: поля сплошной цилиндрической трубки $\vec{B}_{\text{ц}}$ и поля узкой полоски \vec{B}_1 , которую можно принять за тонкий проводник

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ц}} + \vec{B}_1.$$

Наличие цилиндрической симметрии обоих полей позволяет нам воспользоваться теоремой о циркуляции вектора \vec{B} . Для расчета поля \vec{B}_1 выберем контур в виде окружности радиусом r с центром в месте нахождения линейного проводника. Тогда

$$\oint \vec{B}_1 d\vec{l} = \mu_0 I' \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r},$$

где $I' = I \frac{h}{2\pi R - h} \approx I \frac{h}{2\pi R}$ – сила тока, приходящаяся на прорезь шириной h .

Применяя теперь теорему о циркуляции вектора \vec{B} к полю внутри сплошной цилиндрической трубки, находим

$$\vec{B}_{\text{ц,внутри}} = 0,$$

а для поля вне цилиндра

$$B_{\text{ц,вне}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r + R)} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Здесь r – расстояние от прорези до данной точки поля.

Таким образом, полное поле внутри трубки

$$B_{\text{внутри}} = B_{\text{ц,внутри}} + B_1 \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{h}{2\pi R},$$

а вне

$$B_{\text{вне}} = B_{\text{ц.вне}} - B_1 \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{h}{2\pi R} \right)$$

(мы учли, что векторы $\vec{B}_{\text{ц}}$ и \vec{B}_1 вне трубки имеют противоположные направления, так как токи I и I' имеют разные знаки).

3.1.7. Провод с цилиндрической полостью. Внутри длинного прямого провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней на расстояние \vec{l} . По проводу течет постоянный ток плотностью \vec{j} . Пренебрегая влиянием вещества провода, найти магнитное поле \vec{B} внутри полости.

Воспользуемся здесь тем же приемом, что и в предыдущей задаче. Искомую величину можно представить согласно принципу суперпозиции как

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}',$$

где \vec{B}_0 – вектор магнитной индукции в случае, если бы проводник был сплошным (без полости); \vec{B}' – вектор магнитной индукции в той же точке от тока, текущего по той части проводника, которую мы удалили, образовав полость. Таким образом, мы приходим в обоих случаях к вычислению поля внутри сплошного провода на расстоянии r от его оси. Из симметрии задачи следует, что линии вектора \vec{B} в данном случае должны иметь вид окружностей с центром на оси провода. Воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора \vec{B} , получаем

$$2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j \rightarrow B = \frac{\mu_0 j r}{2}.$$

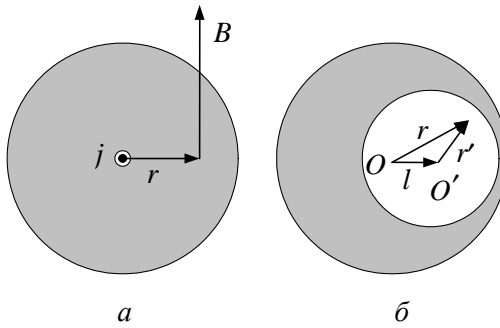


Рис. 3.14

Или в векторном виде (рис. 3.14, а)

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j} \vec{r}]$$

(ток направлен из чертежа к нам). С использованием этой формулы для поля внутри полости имеем

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j} \vec{r}] - \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j} \vec{r}'] = \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j}, (\vec{r} - \vec{r}')], \end{aligned}$$

где векторы \vec{r} и \vec{r}' отображены на рис. 3.14, б. И так как $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{l}$, окончательно получаем

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j} \vec{l}].$$

Очень неожиданный результат – поле в полости оказалось однородным!

3.1.8. Поле соленоида. Намоткой длинного соленоида с радиусом сечения a служит тонкая лента – проводник шириной h , намотанная в один слой практически вплотную. Вдоль ленты течет постоянный ток I . Найти магнитное поле

B внутри и вне такого соленоида как функцию расстояния r от его оси.

В нашем случае вектор линейной плотности тока \vec{i} можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$\vec{i} = \vec{i}_{\perp} + \vec{i}_{\parallel},$$

где векторы \vec{i}_{\perp} и \vec{i}_{\parallel} представлены на рис. 3.15, б. Модули этих векторов можно найти с помощью рис. 3.15, а:

$$i_{\perp} = i \cos \alpha = i \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{I}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi a} \right)^2},$$

$$i_{\parallel} = i \sin \alpha = \frac{I}{2\pi a}.$$

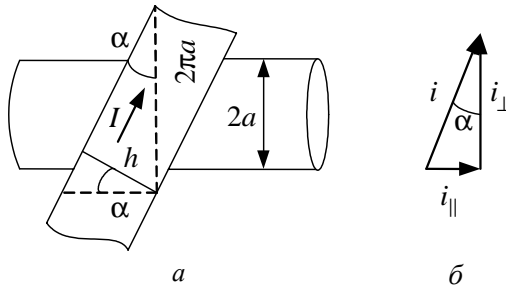


Рис. 3.15

Рассчитаем сначала магнитное поле, создаваемое током i_{\perp} внутри и вне соленоида (рис. 3.16, а). Из соображений симметрии ясно, что линии вектора \vec{B} могут быть направлены только вдоль оси соленоида, причем вектор \vec{B} составляет с направлением тока правовинтовую систему. Выберем прямоугольный контур, две стороны которого длиной l проходят вне соленоида (см. рис. 3.16, а). Согласно

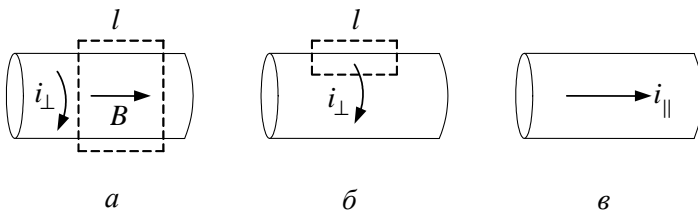


Рис. 3.16

теореме о циркуляции магнитное поле вне соленоида должно быть равным нулю, так как любой ток, пронизывающий поверхность, натянутую на контур, пересекает ее дважды в противоположных направлениях. Применим теперь теорему о циркуляции к прямоугольному контуру, часть которого проходит внутри соленоида (рис. 3.16, б). Согласно этой теореме

$$B_{\text{внутри}} \cdot l = \mu_0 i_{\perp} l.$$

Откуда

$$B_{\text{внутри}} = \mu_0 i_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi R} \right)^2}, \quad (1)$$

т.е. поле внутри длинного соленоида однородно.

Найдем теперь поле, создаваемое током i_{\parallel} внутри и вне соленоида (рис. 3.16, в). Из тех же соображений симметрии ясно, что линии вектора \vec{B} представляют собой окружности с центром на оси соленоида и составляют с током i_{\parallel} правовинтовую систему. Применяя теорему о циркуляции, нетрудно убедиться, что поле тока i_{\parallel} равно нулю внутри соленоида, а вне его

$$B_{\text{вне}} = \frac{\mu_0 i_{\parallel} R}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2)$$

(точно такой же вид имеет поле прямого тока). Из предыдущих рассуждений ясно, что выражения (1) и (2) дают полное поле внутри и вне соленоида, обусловленное исходным током I .

Таким образом, представив ток I в соленоиде в виде суперпозиции «поперечной» и «продольной» составляющих, мы пришли к выводу, что внутри такого соленоида существует только продольная составляющая вектора \vec{B} , определяемая формулой (1), а вне соленоида – только поперечная, как для прямого тока, определяемая формулой (2). Если же уменьшать ширину ленты, оставляя неизменной плотность тока, то при $h \rightarrow 0$ сила тока $I \rightarrow 0$, но отношение $I/h = i = \text{const}$. В этом случае остается только однородное поле внутри соленоида $B = \mu_0 i$ – соленоид становится «идеальным». Значение поля можно также представить в виде $B = \mu_0 n I$, где n – плотность числа витков (число витков на единицу длины соленоида).

3.1.9. Поле полубесконечного соленоида. Длинный соленоид радиусом R имеет n плотно уложенных витков на единицу длины. По нему течет постоянный ток I . Найти индукцию магнитного поля на оси как функцию координаты x , отсчитываемой вдоль оси соленоида от его торца.

Для расчета поля на оси соленоида найдем вначале поле от элементарного витка, а затем просуммируем его по всем виткам. Полагая ток распределенным равномерно по поверх-

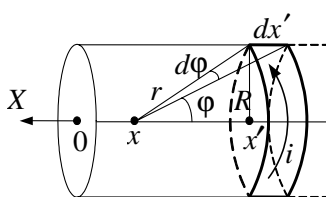


Рис. 3.17

ности соленоида, элементарный виток выберем в виде узкого кольца шириной dx' (рис. 3.17) с центром в точке x' . Тогда, применяя закон Био–Савара, нетрудно найти поле элементарного витка в произвольной точке оси соленоида с координатой x :

$$dB = \frac{\mu_0 i dx' 2\pi R}{4\pi r^2} \sin \varphi.$$

Все обозначения ясны из рис. 3.17, а i – линейная плотность тока. Осталось только проинтегрировать это выражение по всем элементарным виткам. Но для этого необходимо перейти к одной переменной. Выберем в качестве таковой угол φ . Тогда с учетом очевидных соотношений $dx' \sin \varphi = r d\varphi$ и $r = R / \sin \varphi$ получаем

$$B = \int \frac{\mu_0 i}{2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

Здесь φ_1 и φ_2 – углы, под которыми видны края рассматриваемого участка соленоида из точки x . Для полубесконечного соленоида

$$\cos \varphi_1 = 1, \quad \cos \varphi_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}. \quad (1)$$

Выражая линейную плотность тока через произведение In , получаем окончательно

$$B = \frac{\mu_0 In}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right).$$

Напомним, что точкам внутри соленоида соответствует координата $x < 0$. Этот же результат можно получить, опираясь на выражение $B_{||} = \mu_0 i \Omega / 4\pi$, полученное в задаче 3.15 [телесный угол, под которым видна вся внутренняя поверхность соленоида из точки с координатой x на его оси $\Omega = 2\pi(1 - \cos \varphi_2)$, где $\cos \varphi_2$ определяется по выражению (1)]. Линии вектора \vec{B} расположены так, как показано на рис. 3.18. Это сразу следует из принципа суперпозиции: если при-

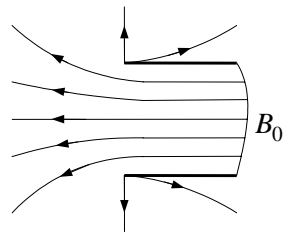


Рис. 3.18

ставить слева точно такой же соленоид, то поле \vec{B} вне образованного таким образом бесконечного соленоида должно обратиться в нуль (см. предыдущую задачу). А это возможно только при указанной на рис. 3.18 конфигурации поля. Кроме того, нормальная составляющая B_n должна быть одинакова по площади торца. Это следует из того, что при образовании составного соленоида $B_n + B_n = B_0$, где B_0 – поле внутри соленоида вдали от его краев. В центре торца $B = B_n = B_0/2 = \mu_0 I n/2$.

3.1.10. Растекание тока в полубесконечной среде.

Ток I , протекающий по длинному проводу, растекается равномерно в однородной проводящей среде (рис. 3.19). Пренебрегая влиянием вещества среды,

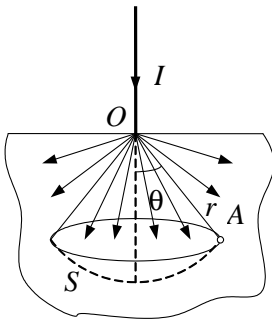


Рис. 3.19

найти индукцию магнитного поля в точке A , отстоящей от точки O на расстояние r под углом θ .

При аксиально-симметричном растекании тока по полупространству линии вектора \vec{B} представляют собой окружности. Поэтому для применения теоремы о циркуляции вектора \vec{B} выберем круговой контур с радиусом $r \sin \theta$, включающий в себя искомую точку пространства A . Тогда из теоремы о циркуляции следует

$$B 2\pi r \sin \theta = \mu_0 I' . \quad (1)$$

Здесь I' – часть полного тока I , попавшая внутрь конуса с углом полураствора θ и вершиной в точке O . В силу равномерности растекания тока по полупространству, очевидно, $I' = I \cdot \Omega / 2\pi$, где Ω – телесный угол, внутри которого сосредоточен ток I' . Значение этого угла нетрудно связать с углом полураствора конуса θ :

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = 2\pi(1 - \cos \theta).$$

Тогда из (1) находим

$$B = \frac{\mu_0 I 2\pi(1 - \cos \theta)}{2\pi r \sin \theta \cdot 2\pi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \operatorname{tg} \theta / 2.$$

3.1.11. Поле вращающегося шарика. Заряженный по поверхности шарик радиусом R с поверхностной плотностью заряда σ равномерно вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω . Пренебрегая влиянием вещества, найти индукцию магнитного поля внутри и вне шарика.

Довольно часто в сложных задачах, которые не укладываются в рамки простого применения какого-либо закона, или, если его применение сопряжено со значительными техническими трудностями, поступают следующим образом. На основании физических соображений (или аналогий) угадывается какое-либо решение, а затем оно проверяется на соответствие условиям задачи. Так и поступим.

При вращении шарика его движущиеся заряды эквивалентны поверхностным токам, которые и создают магнитное поле. Понятно, что для выбора вида предполагаемого решения нам необходимо, прежде всего, знать характер распределения токов. Выделим на поверхности шарика бесконечно узкий пояс, заключенный между углами θ и $\theta + d\theta$ (рис. 3.20). Направим ось Z вдоль угловой скорости вращения шарика $\vec{\omega}$ (начало координат располагается в центре шарика – точка O). Вращаясь с угловой скоростью ω , такой пояс с зарядом dq в соответствии с определением силы

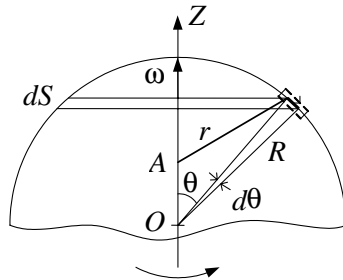


Рис. 3.20

тока эквивалентен круговому току $dI = dq \cdot \omega / 2\pi$, где $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$. Тогда для силы тока dI получаем

$$dI = \sigma \omega R^2 \sin \theta d\theta.$$

Отношение этого тока к длине $Rd\theta$ есть линейная плотность тока

$$i = \sigma \omega R \sin \theta = i_0 \sin \theta,$$

где $i_0 = \sigma \omega R$.

Таким образом, вращающийся шарик эквивалентен круговым токам, линейная плотность которых изменяется с полярным углом θ по закону синуса. В электростатике нами уже решалась задача 1.2.9 об электрическом поле заряженного по поверхности шарика, поверхностная плотность заряда которого также изменялась по закону синуса. Там было показано, что вне шарика электрическое поле является полем точечного электрического диполя, находящегося в центре шарика, а внутри формируется однородное поле. Опираясь на эту аналогию, предположим, что и магнитное поле в нашей задаче вне шарика является полем точечного магнитного диполя, а внутри шарика поле однородно. Это совершенно разумное предположение, основанное на полной аналогии электрических и магнитных полей, в чем мы уже не раз убеждались.

Рассмотрим вначале магнитное поле вне шарика. Оно определяется полным магнитным моментом, который складывается из магнитных моментов отдельных элементарных поясков:

$$\begin{aligned} dp_m &= dI \cdot \pi (R \sin \theta)^2 = \sigma \omega R^2 \sin \theta d\theta \pi R^2 \sin^2 \theta = \\ &= \sigma \omega \pi R^4 \sin^3 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Интегрируя по θ от нуля до π , получаем магнитный момент всего шарика

$$\vec{p}_m = \frac{4\pi\sigma R^4 \vec{\omega}}{3}.$$

Воспользовавшись теперь полученным в задаче 3.1.1 выражением (5) для вектора \vec{B} магнитного диполя, находим

$$\vec{B} = \frac{\sigma R^4 \mu_0}{3} \left[\frac{3(\vec{\omega} \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\omega}}{r^3} \right], \quad (1)$$

где вектор \vec{r} проведен из центра шарика. Модуль вектора \vec{B} равен

$$B = \frac{\sigma R^4 \omega \mu_0}{3r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$$

(угол θ отсчитывается от направления вектора $\vec{\omega}$).

Обратимся теперь к расчету поля внутри шарика. Выше уже говорилось, что это поле возможно однородное. Для проверки этого предположения найдем хотя бы значение \vec{B} на оси Z (с учетом симметрии поле на оси Z направлено вдоль этой оси). В соответствии с законом Био–Савара индукция магнитного поля, созданного в произвольной точке A на оси Z бесконечно малым кольцевым элементом площадью dS (см. рис. 3.20), находится как

$$dB = \frac{\mu_0 i dS \cdot R \sin \theta}{4\pi r^3}.$$

Здесь i – линейная плотность тока на кольцевом пояске площадью $dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$, край которого располагается под углом θ к оси Z ; r – расстояние от края пояска до точки A , заданной координатой z . Значение r нетрудно найти из рис. 3.20, воспользовавшись теоремой косинусов: $r = (R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta)^{1/2}$. И с учетом того, что $i = i_0 \sin \theta$, для dB имеем

$$dB = \frac{\mu_0 i_0 R^3}{2} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta)^{3/2}}.$$

Введем для удобства безразмерную координату $\xi = z/R$ ($0 \leq \xi \leq 1$). Тогда полное поле в произвольной точке на оси Z можно представить в виде интеграла

$$B(\xi) = \frac{\mu_0 i_0}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(1 + \xi^2 - 2\xi \cos \theta)^{3/2}}.$$

С помощью замены переменных $u = \cos \theta$ данный интеграл сводится к двум табличным интегралам, значение которых в сумме равно $4/3$. Таким образом, величина B на оси Z не зависит от положения точки и составляет

$$B = \frac{2\mu_0 i_0}{3}.$$

Это выражение с учетом связи $i_0 = \sigma \omega R$ можно записать в векторном виде

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \vec{\omega}. \quad (2)$$

Используя данный результат и теорему о циркуляции вектора \vec{B} , нетрудно показать, что магнитное поле в любой точке внутри шарика однородно (именно это мы и предполагали ранее) и определяется формулой (2).

И в заключение осталось только проверить обоснованность нашего начального предположения о том, что поле вне шарика является полем точечного магнитного диполя (значение однородного поля внутри шарика мы получили «честно» прямым расчетом). Для этого нужно проверить выполнение условий «сшивания» решений на поверхности шарика. Одно из этих условий заключается в равенстве нормальных со-

ставляющих полей (это следствие теоремы Гаусса для вектора \vec{B}). Из (1) находим

$$B_{n \text{ вне}} \Big|_{r=R} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \cos \theta$$

(мы учли, что направление нормали к поверхности шарика \vec{n} совпадает с направлением вектора \vec{r}). В свою очередь из формулы (2) получаем

$$B_{n \text{ внутри}} \Big|_{r=R} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \cos \theta.$$

Значения $B_{n \text{ вне}} \Big|_{r=R}$ и $B_{n \text{ внутри}} \Big|_{r=R}$ совпали. Применим теперь теорему о циркуляции вектора \vec{B} к любому малому контуру, плотно прилегающему к поверхности шарика, причем, часть контура находится вне шарика, другая часть – внутри (контур отражен на рис. 3.20 пунктирной линией). Из этой теоремы следует, что касательные составляющие вектора \vec{B} внутри и вне шарика должны быть связаны соотношением

$$B_{\tau \text{ внутри}} \Big|_{r=R} - B_{\tau \text{ вне}} \Big|_{r=R} = \mu_0 i \quad (3)$$

(направление обхода контура связано с направлением тока правилом правого винта). Из (1) и (2) находим

$$B_{\tau \text{ вне}} \Big|_{r=R} = -\frac{\mu_0 \sigma R \omega}{3} \sin \theta, \quad B_{\tau \text{ внутри}} \Big|_{r=R} = \frac{2\mu_0 \sigma R \omega}{3} \sin \theta.$$

Если учесть, что $i = \sigma \omega R \sin \theta$, то соотношение (3) также выполняется. Таким образом, предположение о том, что магнитное поле вне шарика является полем точечного магнитного диполя, а внутри шарика – однородно, можно считать доказанным.

3.2. Силы в магнитном поле

На находящийся в магнитном поле проводник с током действует сила Ампера

$$d\vec{F} = I \left[d\vec{l}, \vec{B} \right], \quad (1)$$

где $d\vec{l}$ – вектор, совпадающий по направлению с током и характеризующий элемент длины тонкого проводника. Если же токи распределены в пространстве с плотностью \vec{j} , то

$$d\vec{F} = \left[\vec{j}, \vec{B} \right] dV. \quad (2)$$

Интегрируя выражения (1) и (2) по элементам тока (линейным или объемным), можно найти магнитную силу, действующую на тот или иной объем проводника или его линейный участок. В частности, сила, действующая на контур с током в магнитном поле, определяется как

$$\vec{F} = I \oint \left[d\vec{l}, \vec{B} \right], \quad (3)$$

где интегрирование проводится по данному контуру с током I . При малых размерах контура выражение (3) удобно представлять в виде

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n},$$

где p_m – модуль магнитного момента контура; $\partial \vec{B} / \partial n$ – производная вектора \vec{B} по направлению нормали \vec{n} . Направление вектора силы совпадает с направлением элементарного приращения вектора \vec{B} , взятого в направлении вектора \vec{p}_m в месте расположения контура. Если рассматривать только проекцию силы на некоторое направление X , то

$$F_x = p_m \frac{\partial B_x}{\partial n}.$$

Момент амперовых сил \vec{M} для произвольного контура с током рассчитывается по формуле

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}].$$

Работу амперовых сил можно рассчитывать обычным образом, но иногда удобной оказывается формула

$$\delta A = Id\Phi,$$

где δA – работа амперовых сил при элементарном перемещении контура; $d\Phi$ – приращение магнитного потока сквозь контур при данном перемещении. Если при перемещении поддерживать ток постоянным, то полная работа

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки сквозь контур в начальном

и конечном положениях $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$.

3.2.1. Взаимодействие параллельных проводов. Два длинных провода с пренебрежимо малым сопротивлением замкнуты с одного конца на сопротивление R , а с другого конца подключены к источнику постоянного тока. Радиус сечения каждого провода в η раз меньше расстояния между осями проводов. При каком значении сопротивления R провода отталкиваются?

Поставленный в задаче вопрос кажется несколько странным. Еще из школьного курса физики известно, что разнонаправленные параллельные токи всегда отталкиваются, в этом проявляется магнитное взаимодействие. Откуда же здесь может появиться притяжение? Дело в том, что независимо от наличия тока, на каждом проводнике имеются избыточные поверхностные заряды, причиной которых являются полюса источника тока (рис. 3.21). Эти заряды имеют разные знаки, что и приводит к кулоновскому притяжению про-

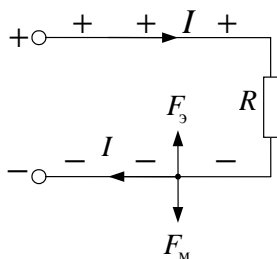


Рис. 3.21

водов. Магнитная и электрическая силы направлены в разные стороны, и при определенных условиях результирующая сила может обратиться в нуль.

Рассчитаем вначале электрическую силу $F_э$. Пусть линейная плотность избыточных зарядов проводов (заряд единицы длины) равна λ . Так как провода имеют пренебрежимо малое собственное сопротивление, то величину λ можно считать постоянной по длине проводов и разной по знаку для разных проводов. В этом случае электрическая сила, действующая на единицу длины провода,

$$F_э = \lambda E ,$$

где E – напряженность электрического поля, созданного другим проводом. Ее значение нетрудно найти из теоремы Гаусса

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 l} ,$$

где l – расстояние между проводами. Тогда

$$F_э = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 l} .$$

Значение магнитной силы, приходящейся на единицу длины провода, найдем как

$$F_м = IB ,$$

где B – индукция магнитного поля, созданного длинным проводником с током I (см. задачу 3.1.2)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} .$$

В итоге

$$F_{\text{м}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi l}.$$

Тогда

$$\frac{F_{\text{м}}}{F_{\text{г}}} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 I^2}{\lambda^2},$$

или с учетом закона Ома

$$\frac{F_{\text{м}}}{F_{\text{г}}} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{R^2} \left(\frac{U}{\lambda} \right)^2,$$

где U – напряжение между проводами. Расчет напряжения в двухпроводной линии проводился нами в задаче 1.3.2, и для него было получено значение

$$U = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \ln \eta.$$

Таким образом,

$$\frac{F_{\text{м}}}{F_{\text{г}}} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{\ln^2 \eta}{\pi^2 R^2}.$$

Для определения сопротивления R_0 , при котором результирующая сила взаимодействия проводов обратится в нуль, необходимо положить $F_{\text{м}} / F_{\text{г}} = 1$. Откуда

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\ln \eta}{\pi}.$$

Если $R < R_0$, то провода отталкиваются, если же $R > R_0$ – притягиваются. Таким образом, наблюдаемое обычно на опыте отталкивание разнонаправленных параллельных токов, происходит только при достаточно малом сопротивлении, когда можно пренебречь электрической силой притяжения.

3.2.2. Прецессия кольца. Равномерно заряженное тонкое непроводящее кольцо массой m и зарядом q вращается с большой угловой скоростью ω вокруг своей оси во внешнем однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} . Найти угловую скорость прецессии кольца Ω , если его ось составляет некоторый угол с вектором \vec{B} .

Явление прецессии возникает, если к быстро вращающемуся симметричному телу приложить постоянный по величине момент внешних сил. В этом случае вектор момента импульса тела описывает конус вокруг фиксированного направления с некоторой угловой скоростью, называемой скоростью прецессии. Одно из самых наглядных проявлений прецессии – вращение оси наклоненного волчка по образующей конуса вокруг вертикальной оси.

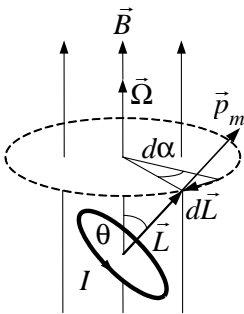


Рис. 3.22

В нашем случае постоянный по величине момент внешних сил обусловлен магнитным взаимодействием кругового тока, образованного вращением заряженного кольца, с внешним магнитным полем. Обратимся к рис. 3.22. Вращающееся заряженное кольцо эквивалентно контуру с током $I = q\omega/2\pi$.

На этот контур со стороны внешнего магнитного поля действует вращательный момент сил $\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$, стремящийся установить магнитный момент \vec{p}_m по направлению поля \vec{B} . Под действием момента \vec{M} вектор \vec{p}_m и соответственно вектор момента импульса \vec{L} совершают в силу инерционности вращающегося кольца прецессию вокруг направления вектора \vec{B} со скоростью Ω . Будем полагать эту скорость много меньше угловой скорости вращения кольца ω .

Динамика движения кольца подчиняется известному из механики уравнению моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (1)$$

За время dt вектор \vec{L} получает приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$, модуль которого $dL = L \sin \theta \cdot d\alpha$, где $d\alpha = \Omega dt$ – угол поворота конца вектора \vec{L} за время dt . Таким образом,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{L \sin \theta \cdot \Omega dt}{dt} = \Omega L \sin \theta . \quad (2)$$

В силу уравнения (1) величина dL/dt должна быть равна модулю момента силы $\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$. Его значение

$$M = p_m B \sin \theta . \quad (3)$$

Приравнивая (2) и (3), получаем

$$\Omega L \sin \theta = p_m B \sin \theta .$$

Откуда находим

$$\Omega = \frac{p_m B}{L} .$$

Осталось только найти величины p_m и L . Так как масса кольца и его заряд сосредоточены на окружности радиусом R , то

$$L = mR^2 \omega, \quad p_m = I\pi R^2 = \frac{q\omega R^2}{2}$$

(здесь мы явно учли, что $\omega \gg \Omega$, – только в этом случае векторы \vec{L} и \vec{p}_m направлены вдоль вектора $(\vec{\omega})$).

Таким образом, окончательно получаем

$$\Omega = \frac{qB}{2m} .$$

Частоту Ω называют частотой ларморовой прецессии или просто ларморовой частотой. Примечательно то, что ее значение не зависит ни от скорости вращения кольца, ни от угла между векторами \vec{B} и $\vec{\omega}$ (или \vec{p}_m). Полученный результат имеет большое значение для объяснения диамагнитных свойств веществ.

3.2.3. Виток около прямого провода. Небольшой виток с током (контур) находится на расстоянии r от длинного прямого проводника с током I . Магнитный момент витка равен \vec{p}_m . Найти модуль и направление силы, действующей на виток, при различных его ориентациях относительно прямого тока.

Значение силы, действующей на элементарный контур с током в неоднородном магнитном поле, определяется выражением

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}.$$

Здесь $\partial \vec{B} / \partial n$ – производная вектора \vec{B} по направлению нормали \vec{n} или по направлению вектора магнитного момента \vec{p}_m . Несмотря на кажущуюся простоту этого выражения, его практическая реализация требует отчетливого понимания понятия «производная по направлению». Для ее расчета необходимо вначале задать вектор небольшого перемещения $\delta \vec{r}$ в заданном направлении неоднородного магнитного поля ($\delta \vec{r} \uparrow \uparrow \vec{p}_m$). Затем отобразить векторы \vec{B}_1 и \vec{B}_2 в исходной и конечной точках перемещения и найти вектор вращения $\delta \vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1$. Тогда модуль производной $\partial \vec{B} / \partial n$ будет равен отношению $\delta B / \delta r$, а направление силы, действующей на магнитный диполь, будет совпадать с направлением вектора $\delta \vec{B}$.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда вектор \vec{p}_m параллелен прямому проводнику с током (рис. 3.23, а). В этом слу-

чае вектор малого перемещения $\delta \vec{r}$ параллелен току. Так как индукция магнитного поля прямого тока зависит только от расстояния до заданной точки, то $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$ и $\delta \vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = 0$. Отношение $\delta B / \delta r$, очевидно, равно нулю, значит, и сила, действующая на магнитный диполь, также равна нулю.

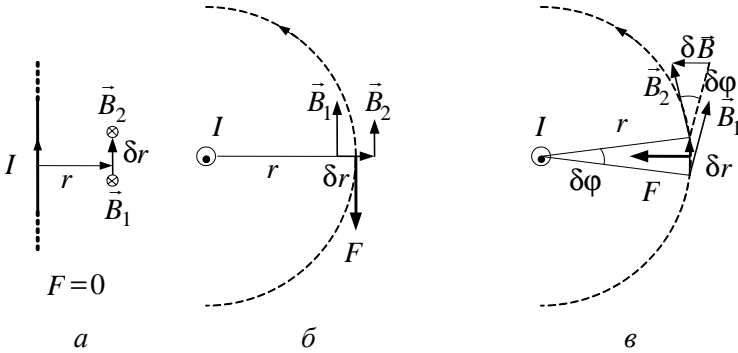


Рис. 3.23

Пусть теперь вектор \vec{p}_m направлен вдоль радиус-вектора \vec{r} . Зададим небольшое перемещение $\delta \vec{r} \uparrow \vec{r}$ (рис. 3.23, б, вектор \vec{p}_m параллелен вектору $\delta \vec{r}$ и на рисунке не отображен). Вспомним, что для прямого тока $B(r) = \mu_0 I / 2\pi r$. Тогда

$$\delta B = |\vec{B}_2 - \vec{B}_1| \approx \left| \frac{dB}{dr} \right| \delta r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \delta r,$$

а сам вектор $\delta \vec{B}$ (как и вектор \vec{F}) смотрит против вектора \vec{B} в месте нахождения витка. В этом случае

$$F = p_m \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} \right| = p_m \frac{\delta B}{\delta r} = \frac{\mu_0 I p_m}{2\pi r^2}.$$

Последний вариант – вектор \vec{p}_m совпадает по направлению с вектором \vec{B} в месте нахождения витка ($\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$). За-

дадим малое перемещение $\delta \vec{r} \uparrow \uparrow \vec{p}_m$, т.е. вдоль касательной к линии вектора \vec{B} (рис. 3.23, в, вектор \vec{p}_m параллелен вектору $\delta \vec{r}$ и на рисунке не отображен). Модуль $\delta r \approx r \delta \varphi$. Тогда

$$|\delta \vec{B}| = |\vec{B}_2 - \vec{B}_1| \approx B \delta \varphi = \frac{\delta r}{r} B.$$

Сейчас приращение $\delta \vec{B}$ обусловлено изменением направления вектора \vec{B} , но не изменением его величины (B – модуль вектора \vec{B} в месте нахождения витка). И для производной $|\partial \vec{B} / \partial n|$ получаем

$$\left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} \right| \approx \frac{\delta B}{\delta r} = \frac{B}{r}.$$

Тогда модуль силы, действующей на виток,

$$F = p_m \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} \right| = p_m \frac{B}{r} = \frac{\mu_0 I p_m}{2\pi r^2},$$

и направлена эта сила вдоль вектора $\delta \vec{B}$, т.е. контур притягивается к прямому току.

3.2.4. Взаимодействие коротких катушек. Две небольшие одинаковые катушки расположены так, что их оси лежат на одной прямой (рис. 3.24). Расстояние между катушками l значительно превышает их линейные размеры. Число витков

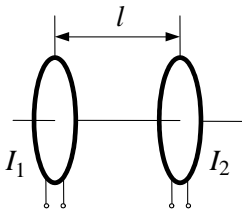


Рис. 3.24

каждой катушки N , площадь витков S . С какой силой взаимодействуют катушки, если по их обмоткам протекают токи I_1 и I_2 ?

Заложенное в условии задачи требование малости линейных размеров катушек по сравнению с расстоянием между ними позволяет нам считать их

элементарными витками (магнитными диполями). Их дипольные моменты

$$p_{m1} = I_1 SN, \quad p_{m2} = I_2 SN. \quad (1)$$

Таким образом, наша задача сводится к расчету взаимодействия двух магнитных диполей, когда их оси расположены на одной прямой, которую примем за ось X . Будем полагать, что одна из этих катушек, например, первая является источником магнитного поля, а вторая находится в этом поле. Тогда с учетом решения предыдущей задачи имеем

$$F = p_{m2} \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (2)$$

Здесь $\partial B / \partial x$ – производная от индукции магнитного поля, созданного первой катушкой в месте расположения второй катушки в направлении ее оси. В задаче 3.1.1 нами было получено выражение для индукции магнитного поля на оси диполя на расстоянии x от него:

$$B(x) = \frac{\mu_0 p_{m1}}{2\pi x^3}.$$

Осталось только найти производную $\partial B / \partial x$ в точке $x = l$ и подставить ее в (2). Тогда с учетом выражений (1) получаем

$$F = \frac{3\mu_0 I_1 I_2 (NS)^2}{2\pi l^4},$$

причем, если токи одного направления, то катушки притягиваются, если разных направлений, то отталкиваются.

3.2.5. Разрыв катушки в магнитном поле. Катушку с током I поместили в однородное магнитное поле так, что ее ось совпала с направлением поля. Обмотка катушки однослойная из медного провода диаметром d , радиус витков R .

При каком значении индукции внешнего магнитного поля обмотка катушки может быть разорвана?

Попробуем вначале разобраться, откуда появляется сила, разрывающая обмотку катушки. Для этого рассмотрим один из ее витков. Из рис. 3.25 видно, что для появления силы разрыва направление внешнего магнитного поля должно составлять с направлением тока правовинтовую систему. В противном случае катушка будет сжиматься.

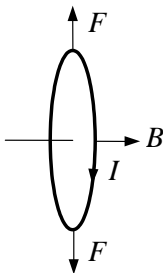


Рис. 3.25

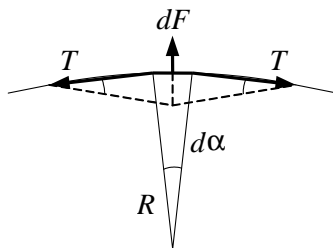


Рис. 3.26

Выделим на витке катушки бесконечно малый элемент длины dl . На него действуют с двух сторон силы натяжения T (рис. 3.26) и магнитная сила взаимодействия этого элемента с внешним магнитным полем dF . Из условия равновесия элемента dl следует

$$dF = Td\alpha, \quad (1)$$

где $d\alpha$ – угол, под которым виден этот элемент из центра катушки. В соответствии с рис. 3.26

$$dF = Idl \cdot B = IRBd\alpha. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$Td\alpha = IRBd\alpha \rightarrow T = IRB.$$

Для разрыва витка необходимо, чтобы механическое напряжение σ превысило предел прочности меди на разрыв σ_m

$$T \geq \sigma_m \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow \sigma = T / (\pi d^2 / 4) \geq \sigma_m.$$

Таким образом, разрыв произойдет при значении $B \geq \pi d^2 \sigma_m / 4RI$.

3.2.6. Давление внутри соленоида. По длинному соленоиду, имеющему n витков на единицу длины, течет ток I . Найти давление, действующее на боковую поверхность соленоида.

Так как собственное поле внутри соленоида образует с током правовинтовую систему, то в соответствии с решением предыдущей задачи давление на витки соленоида направлено изнутри. Для определения этого давления выделим мысленно небольшой элемент поверхности соленоида dS , на который изнутри действует сила dF . Тогда давление

$$P = \frac{dF}{dS}.$$

Нетрудно показать, что сила Ампера dF , действующая на поверхностный элемент тока соленоида,

$$dF = idS \cdot B' = IndS \cdot B'.$$

Здесь i – линейная плотность тока (ток, приходящийся на единицу длины вдоль соленоида); B' – индукция магнитного поля, созданного в месте нахождения данного элемента тока всеми другими поверхностными элементами соленоида, исключая данный. Для расчета этого поля обратимся к рис. 3.27, на котором отражен участок поверхности соленоида без выделенного элемента dS (крестиками указано направление тока). Точка 1 находится вне соленоида в районе удаленного

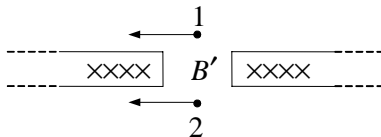


Рис. 3.27

элемента dS , а близкая к ней точка 2 – внутри соленоида. Значение поля B' в точках 1 и 2 должно быть одинаковым, так как между ними нет никаких токов (следствие теоремы о циркуляции вектора \vec{B}). Пусть индукция магнитного поля

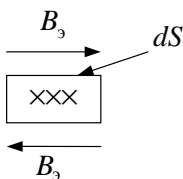


Рис. 3.28

самого элемента dS вблизи него равна B_s (рис. 3.28, сверху и снизу элемента векторы B_s имеют противоположное направление). Если мы вставим данный элемент в зазор, указанный на рис. 3.27, то, естественно, получим поле соленоида со сплошной поверхностью. Это означает, что в точке 1 поле должно исчезнуть, а в точке 2 поле станет равным

$\mu_0 i = \mu_0 In$ (см. задачу 3.1.8). Математически это можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} B' - B_s &= 0, \\ B' + B_s &= \mu_0 i. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует $B' = \mu_0 i / 2 = \mu_0 In / 2$. С учетом этого значения находим

$$P = \frac{dF}{dS} = InB' = \frac{\mu_0 (In)^2}{2}.$$

3.2.7. Соленоид в аксиально-симметричном поле. Соленоид с током I и числом витков на единицу длины n находится в аксиально-симметричном магнитном поле, ось симметрии которого совпадает с осью соленоида. Найти модуль силы, действующей на соленоид, если магнитные потоки, входящий и выходящий через торцы соленоида, равны Φ_1 и Φ_2 .

Выделим на соленоиде узкий кольцевой слой шириной dz (рис. 3.29). На любой элемент такого слоя длиной dl будет действовать сила

$$dF = i \cdot dz dl \cdot B ,$$

где i – линейная плотность тока. Эта сила имеет две проекции: радиальную – dF_r и осевую – dF_z . В силу аксиальной симметрии поля сумма всех радиальных составляющих сил dF_r , очевидно, обратится в нуль. Сумма же осевых составляющих и даст нам полную искомую силу, действующую на соленоид $F = \int dF_z$, где $dF_z = i \cdot dz dl \cdot B \cos \alpha$. Произведение $dz dl \cdot B \cos \alpha$ представляет собой элементарный поток $d\Phi$ вектора индукции магнитного поля через площадку $dS = dz dl$, поэтому

$$dF_z = i d\Phi .$$

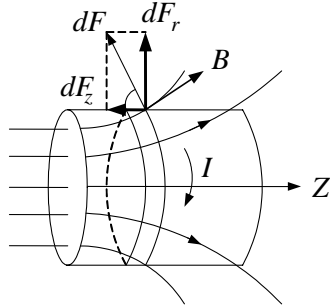


Рис. 3.29

Интегрируя это выражение по всем элементам боковой поверхности соленоида (только там протекает ток), получаем

$$F = i \Phi_{\text{бок}} ,$$

где $\Phi_{\text{бок}}$ – магнитный поток через всю боковую поверхность соленоида. Этот поток в силу теоремы Гаусса для магнитного поля $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ будет равен модулю разности магнитных потоков через торцы соленоида

$$\Phi_{\text{бок}} = |\Phi_1 - \Phi_2| .$$

Таким образом, окончательно получаем

$$F = i |\Phi_1 - \Phi_2| = In |\Phi_1 - \Phi_2| . \quad (1)$$

Воспользовавшись этим результатом, найдем силу, с которой одна половина бесконечно длинного соленоида действует на другую половину. Радиус соленоида R .

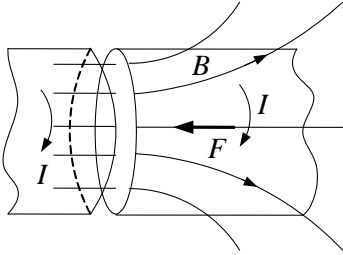


Рис. 3.30

Разделим мысленно бесконечно длинный соленоид на две полубесконечные половинки (рис. 3.30). Пусть левая половинка является источником аксиально-симметричного поля, а правая находится в этом поле. Токи в обеих половинках имеют одинаковое направление, поэтому они притягиваются с силой, даваемой выражением (1). Пусть Φ_1 – магнитный поток, входящий через левый торец правой половинки соленоида. Так как правый край этой половинки соленоида уходит в бесконечность, то, очевидно, магнитный поток через него равен нулю ($\Phi_2 = 0$). В задаче 3.1.9 мы уже находили значение поля на торце полубесконечного соленоида: $B = \mu_0 i / 2$. Поэтому

$$\Phi_1 = \mu_0 i \pi R^2 / 2 = \mu_0 n I \pi R^2 / 2.$$

Для силы взаимодействия получаем

$$F = i \Phi_1 = \frac{\mu_0 n^2 I^2 \pi R^2}{2}.$$

3.2.8. Проводник в электролите. Внутри длинного цилиндрического сосуда радиусом a параллельно его оси расположен проводящий стержень радиусом b с тонкой изоляцией. Расстояние между осями стержня и сосуда равно l . Сосуд заполнили электролитом и пустили вдоль оси ток I , возвращающийся обратно по стержню. Найти модуль и направление магнитной силы, действующей на единицу длины стержня.

Данная задача является прекрасной иллюстрацией того, насколько отличаются по трудоемкости различные подходы к решению. У нас есть два варианта. В первом случае вначале необходимо разбить каждый проводник на тонкие линейные

проводники. Далее найти силу взаимодействия каждой пары линейных проводников, один из которых принадлежит электrolиту, а другой – стержню. Затем просуммировать эти силы по сечениям каждого проводника. Причем эта операция оказывается очень трудоемкой, так как задача сведется к двойному интегралу по векторам. Именно так и поступили бы мы, если сечения проводников не обладали бы симметрией. Если же учесть симметрию, то появляется и другой подход. Найдем вначале магнитное поле, создаваемое электролитом в его цилиндрической полости. А затем найдем силу взаимодействия стержня с этим полем. Тем более что первая часть этой задачи нами уже решена ранее. В задаче 3.1.7 было показано, что внутри цилиндрической полости, располагающейся в проводнике, вдоль оси которого течет ток постоянной плотности, формируется однородное магнитное поле с индукцией

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j} \vec{l}].$$

Здесь \vec{j} – плотность тока; \vec{l} – вектор смещения оси цилиндрической полости относительно оси проводника (рис. 3.31).

Модуль вектора \vec{B}

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 j l.$$

То, что это поле оказалось однородным, резко упрощает расчет силы взаимодействия поля и второго проводника (стержня) с током I . Ее значение, приходящееся на единицу длины, очевидно,

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 j l \cdot I.$$

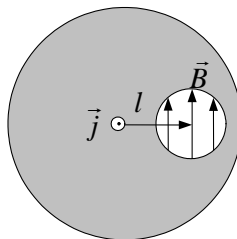


Рис. 3.31

С учетом того, что плотность тока $j = I / \pi(a^2 - b^2)$, получаем окончательно для силы выталкивания стержня из электролита

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi(a^2 - b^2)}.$$

3.2.9. Электролит в кювете. В прямоугольную кювету (рис. 3.32), передняя и задняя стенки которой металлические, а остальные диэлектрические, налит электролит с удельной проводимостью λ . К металлическим стенкам приложено напряжение U , и вся кювета помещена в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B . Длина кюветы L , ширина b , плотность электролита ρ . Определить разность уровней электролита Δh около непроводящих (правой и левой) стенок кюветы.

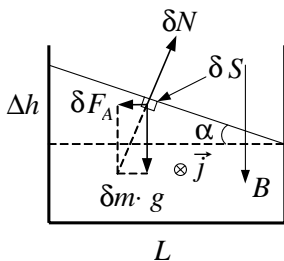


Рис. 3.32

Наклон свободной поверхности электролита на угол α связан с появлением дополнительной силы Ампера при пропускании тока. Выделим мысленно вблизи свободной поверхности электролита тонкий проводящий слой площадью сечения δS и длиной b (рис. 3.32).

Вдоль него течет ток с плотностью j (например, за чертеж). На этот проводник действует сила Ампера

$$\delta F_A = j \cdot \delta S \cdot b \cdot B.$$

Кроме этой силы есть также сила тяжести $\delta m \cdot g$ (δm — масса тонкого проводящего слоя) и сила давления со стороны внутренних слоев δN . Из того, что сумма этих сил должна быть равна нулю, сразу следует

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta F_A}{\delta m \cdot g}.$$

Силу тяжести $\delta m \cdot g$ нетрудно выразить через плотность и объем $\delta m g = \rho \cdot \delta S \cdot b \cdot g$, а для расчета силы Ампера δF_A необходимо знать плотность тока j . Воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме и связью напряженности электрического поля E с напряжением U нетрудно получить

$$j = \lambda E = \lambda \frac{U}{b}.$$

Тогда для угла наклона α находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda U \cdot \delta S \cdot b B}{b \rho \cdot \delta S \cdot b g} = \frac{\lambda U B}{b \rho g}.$$

В итоге разность уровней Δh около правой и левой стенок кюветы составит

$$\Delta h = L \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda U B L}{b \rho g}.$$

3.2.10. Электромагнитный насос. В электромагнитном насосе для перекачки расплавленного металла участок трубы прямоугольного сечения высотой a находится в однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 3.33). Через этот участок трубы в перпендикулярном вектору \vec{B} и оси трубы направлению пропускают равномерно распределенный ток I . Найти избыточное давление, создаваемое насосом.

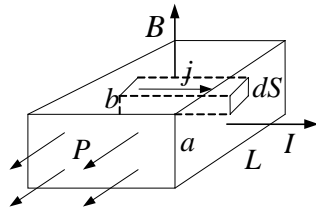


Рис. 3.33

Избыточное давление насоса создается тем, что на любой выде-

ленный в направлении тока элементарный участок жидкого металла площадью dS и длиной b действует сила Ампера $dF_A = jdS \cdot b \cdot B$. Так как каждый участок находится в однородном магнитном поле и плотность тока постоянна по сечению ($j = I/aL$), то, очевидно, полная сила, просуммированная по всем участкам,

$$F_A = \int dF_A = jaLbB = IbB.$$

Тогда давление можно найти как

$$P = \frac{F_A}{ab} = \frac{IbB}{a}.$$

3.2.11. Давление внутри жидкого проводника. Вдоль оси цилиндрического жидкого проводника радиусом R равномерно по сечению течет ток I . Найти давление $P(r)$, обусловленное взаимодействием тока с созданным им магнитным полем.

В данной ситуации давление возникает из-за взаимодействия любого выделенного элемента тока с собственным магнитным полем всех элементов тока. Учитывая симметрию

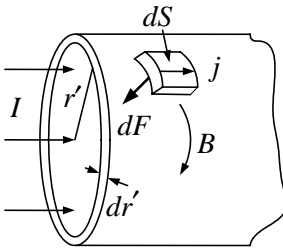


Рис. 3.34

задачи, выделим в цилиндрическом жидком проводнике тонкий цилиндрический слой радиусом r' и толщиной dr' (рис. 3.34). Вырежем мысленно на этом слое бесконечно малый элемент площадью dS и толщиной dr' . Легко увидеть, что сила, приложенная к элементу dS , направлена к оси цилиндра. Именно

эта сила и вызывает давление на внутреннюю поверхность тонкого цилиндрического слоя. Для расчета этой силы нам необходимо знать величину индукции магнитного поля B

в районе выделенного элемента dS . Из теоремы о циркуляции вектора \vec{B} следует

$$B \cdot 2\pi r' = \mu_0 j \pi r'^2, \quad (1)$$

где $j = I / \pi R^2$ – плотность тока. Из (1) находим

$$B(r') = \frac{\mu_0 j r'}{2}.$$

Найдем теперь силу, действующую на элемент dS :

$$dF = jB \cdot dS \cdot dr' = \frac{\mu_0 j^2 r'}{2} dS dr',$$

и соответственно давление

$$dP = \frac{dF}{dS} = \frac{\mu_0 j^2}{2} r' dr'. \quad (2)$$

Это давление создано только элементом толщиной dr' . Для нахождения полного давления, созданного всеми элементами тока, находящимися в слое конечной толщины в интервале радиусов $r < r' < R$, проинтегрируем выражение (2):

$$P = \frac{\mu_0 j^2}{2} \int_r^R r' dr' = \frac{\mu_0 j^2}{4} (R^2 - r^2).$$

Тогда после подстановки сюда значения плотности тока ($j = I / \pi R^2$) окончательно получаем

$$P = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4} (R^2 - r^2).$$

Максимум давления наблюдается на оси жидкого проводника и составляет

$$P_m = \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi R} \right)^2.$$

3.3. Магнитное поле в веществе. Сверхпроводники

При внесении магнетика в магнитное поле изменяется как само поле, так и магнетик. Нечто подобное происходит и с диэлектриками. Однако наблюдается и существенное отличие: если в диэлектриках электрическое поле всегда ослабляется, то в магнетиках магнитное поле может как ослабиться, так и усилиться.

Одним из фундаментальных утверждений для магнитного поля является теорема о циркуляции вектора \vec{B} :

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I'). \quad (1)$$

Однако использование данной теоремы для расчета поля в магнетиках является неэффективным, так как циркуляция вектора \vec{B} определяется не только токами проводимости (I), но и токами намагничивания (I'). Причем величина токов намагничивания, причиной которых являются молекулярные токи, явно зависит от неизвестного поля \vec{B} . Это затруднение можно обойти, если ввести вспомогательный вектор напряженности магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (2)$$

где \vec{J} – вектор намагниченности (намагниченность магнетика)

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m.$$

Здесь суммирование производится по всем магнитным моментам молекул физически бесконечно малого объема ΔV . Поле вектора \vec{J} обладает тем свойством, что его циркуляция

по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов намагничивания, охватываемых данным контуром:

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I' . \quad (3)$$

Соотношение (3) не означает, что поле вектора \vec{J} определяется только токами намагничивания. Однако в некоторых случаях определенной симметрии это поле выглядит так, как будто оно определяется только токами намагничивания. Из соотношений (1)–(3) сразу следует теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I ,$$

полезная тем, что в нее входят только токи проводимости. Правило знаков для токов проводимости то же, что и в случае циркуляции вектора \vec{B} .

Как показывает опыт, для однородного и изотропного магнетика и не слишком больших полей зависимость между \vec{J} и \vec{H} имеет линейный характер, а именно:

$$\vec{J} = \chi \vec{H} , \quad (4)$$

где χ – безразмерная величина, называемая магнитной восприимчивостью. В отличие от электрической восприимчивости ϵ , которая всегда положительна, магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной. Для большинства магнетиков $|\chi|$ незначительно больше нуля, т.е. магнитные свойства выражены слабо. Но для ферромагнетиков χ значительно больше единицы. Кроме того, для них зависимость $J(H)$ имеет весьма сложный характер и наблюдается гистерезис (зависимость от предыстории магнетика). Для магнетиков, которые подчиняются зависимости (4), выражение (2) приобретает вид

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad (5)$$

где $\mu = 1 + \chi$ – магнитная проницаемость среды. Следует помнить, что соотношение (5) можно применять «без оглядки» только в том случае, если однородный магнетик заполняет все пространство, занятое полем.

Поле вектора \vec{H} зависит, вообще говоря, как от токов проводимости, так и токов намагничивания (как и поле вектора \vec{B}). Поэтому в общем случае решение задачи о результирующем поле \vec{B} невозможно, и универсальной формулы для его нахождения нет. Однако в некоторых случаях поле вектора \vec{H} определяется только токами проводимости, например, когда однородный магнетик заполняет все пространство либо объем, ограниченный поверхностями, образованными линиями вектора индукции магнитного поля токов проводимости. Именно для таких случаев вектор \vec{H} оказывается весьма полезным. Тогда расчет поля \vec{B} в магнетиках сводится к следующему. Вначале определяют поле вектора напряженности магнитного поля, а затем, используя связь векторов \vec{B} и \vec{H} , находят индукцию магнитного поля \vec{B} (именно это поле имеет непосредственный физический смысл).

Наличие границ раздела магнетиков можно учесть за счет так называемых граничных условий. Эти условия вытекают из теоремы Гаусса для вектора \vec{B} : $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ и теоремы о циркуляции вектора \vec{H} : $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$.

Очень интересно поведение сверхпроводников в магнитном поле. При охлаждении сверхпроводника ниже критической температуры магнитное поле полностью вытесняется из него (эффект Мейсснера–Оксенфельда). Так как в сверхпроводнике нет магнитного поля, то в его объеме

не могут течь и электрические токи, т.е. внутри сверхпроводника всегда выполняются условия

$$\vec{B} = 0, \quad \vec{j} = 0.$$

Все токи могут течь только по поверхности сверхпроводника. Эти поверхностные токи возбуждают магнитное поле, компенсирующее внутри проводника внешнее приложенное магнитное поле (оно вытесняется наружу).

3.3.1. Связь намагниченности \vec{J} и поля \vec{B} , \vec{H} магнетика. Намагничивание вещества обусловлено преимущественной ориентацией или индуцированием магнитных моментов отдельных молекул в направлении, противоположном магнитному полю (диамагнетики) или совпадающем с ним (парамагнетики). Это в свою очередь приводит к упорядочиванию молекулярных токов и, как следствие, ведет к появлению макроскопических токов I' , определяющих собственное поле магнетика \vec{B}' . Величина этого поля зависит не только от токов намагничивания I' и формы магнетика, но и от того, как (в каком направлении) намагничен магнетик. Установим эту связь для тел наиболее простой формы – цилиндр, пластина и шар.

Рассмотрим вначале бесконечный цилиндр из однородного ферромагнетика, намагниченность которого \vec{J} направлена вдоль оси цилиндра и одинакова по сечению. Обратимся к рис. 3.35. Молекулярные токи в намагниченном магнетике ориентированы перпендикулярно вектору намагничивания \vec{J} . У соседних молекул молекулярные токи в местах их соприкосновения текут в противополо-

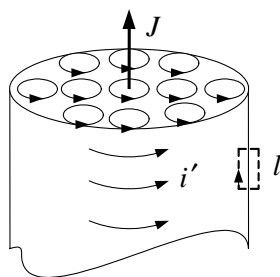


Рис. 3.35

ложных направлениях и взаимно компенсируют друг друга за исключением токов, выходящих на боковую поверхность цилиндра. Эти токи образуют макроскопический поверхностный ток намагничивания, циркулирующий по боковой поверхности цилиндра. Обозначим его линейную плотность как i' . Этот ток возбуждает такое же макроскопическое магнитное поле, что и все молекулярные токи вместе взятые. Значение i' нетрудно связать с намагниченностью J . Для этого применим теорему о циркуляции вектора \vec{J} к контуру, указанному на рис. 3.35 (отмечен штриховой линией):

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I' \rightarrow J l = i' l \rightarrow i' = J$$

(заметим, что векторы \vec{i}' и \vec{J} взаимно перпендикулярны).

Таким образом, мы приходим к известной нам задаче расчета индукции магнитного поля бесконечного соленоида с заданной линейной плотностью тока $i' = J$. В этом случае

$$B'_{\text{внутри}} = \mu_0 i' = \mu_0 J, \quad B'_{\text{вне}} = 0.$$

А из связи $H = B/\mu_0 - J$ сразу следует $H_{\text{внутри}} = 0$, $H_{\text{вне}} = 0$ (так как $J_{\text{вне}} = 0$).

Рассмотрим теперь бесконечную плоскую пластину из однородно намагниченного ферромагнетика, причем вектор намагниченности \vec{J} параллелен плоскости пластины

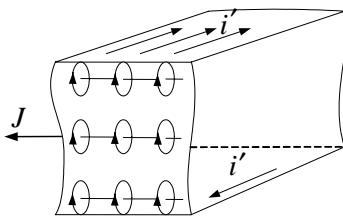


Рис. 3.36

(рис. 3.36). Нетрудно понять, что вектор линейной плотности поверхностного тока i' на верхней поверхности направлен за чертеж, а на нижней — из чертежа (внутри пластины нет токов намагничивания). Как было показано ранее, ин-

дукция магнитного поля таких токов $B = \mu_0 i' / 2$, причем внутри пластины векторы \vec{B} этих токов направлены в одну сторону (вдоль вектора \vec{J}), т.е.

$$\vec{B}'_{\text{внутри}} = \mu_0 \vec{J},$$

а вне пластины векторы направлены в разные стороны, т.е. $B'_{\text{вне}} = 0$. Отсюда сразу следует

$$H_{\text{внутри}} = H_{\text{вне}} = 0.$$

Пусть теперь вектор \vec{J} перпендикулярен плоскости пластины (рис. 3.37). В этом случае все молекулярные токи $I'_{\text{мол}}$ в сумме компенсируют друг друга по всему объему пластины и, очевидно, создаваемая ими индукция магнитного поля всюду равна нулю:

$$B'_{\text{внутри}} = B'_{\text{вне}} = 0.$$

А для напряженности магнитного поля получаем

$$\vec{H}_{\text{внутри}} = -\vec{J}, \quad H_{\text{вне}} = 0.$$

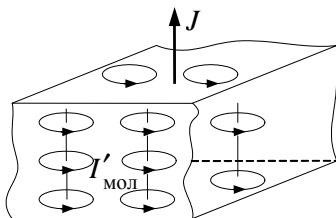


Рис. 3.37

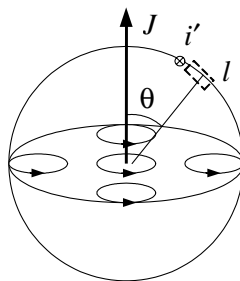


Рис. 3.38

И в заключение рассмотрим магнитное поле однородно намагниченного шара радиусом R с намагниченностью \vec{J} (рис. 3.38). Нетрудно понять, что на поверхности шара фор-

мируются поверхностные токи с линейной плотностью i' , а внутри шара токи намагничивания в сумме компенсируют друг друга. Для определения i' применим теорему о циркуляции вектора \vec{J} к небольшому контуру, располагающемуся под углом θ к направлению вектора \vec{J} (отображен штриховой линией):

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I' \rightarrow J l \sin \theta = i' l \rightarrow i' = J \sin \theta .$$

Видно, что ток i' изменяется с углом θ по закону синуса. Этот результат не является неожиданным, так как намагниченный шар с поверхностными токами подобен вращающемуся шару, заряженному с некоторой поверхностной плотностью заряда. И, как было показано в задаче 3.1.10, в этом случае возникает именно такое распределение токов $i = i_0 \sin \theta$, где $i_0 = J$. Поэтому сразу воспользуемся полученным в задаче 3.1.10 результатом

$$\vec{B}'_{\text{внутри}} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{J} , \quad (1)$$

а для напряженности магнитного поля получаем

$$\vec{H}_{\text{внутри}} = \frac{\vec{B}_{\text{внутри}}}{\mu_0} - \vec{J} = -\frac{1}{3} \vec{J} .$$

Обратимся к полю вне шара. В задаче 3.1.10 было доказано, что магнитное поле вне шара является полем точечного магнитного диполя, находящимся в центре шара. Из определения вектора намагниченности следует, что магнитный момент шара

$$\vec{p}_m = V \cdot \vec{J} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \vec{J} .$$

Подставив это значение в известную нам формулу индукции магнитного поля точечного магнитного диполя (задача 3.1.1)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{p}_m \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{p}_m \right],$$

находим индукцию магнитного поля вне шара:

$$\vec{B}'_{\text{вне}} = \frac{\mu_0 R^3}{3r^3} \left[\frac{3(\vec{J} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{J} \right],$$

и соответственно

$$\vec{H}_{\text{вне}} = \frac{\vec{B}'_{\text{вне}}}{\mu_0} = \frac{R^3}{3r^3} \left[\frac{3(\vec{J} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{J} \right].$$

Найдем теперь намагниченность \vec{J} и индукцию магнитного поля \vec{B} внутри магнетика с проницаемостью μ при наложении на него внешнего однородного поля \vec{B}_0 (величина намагниченности существенно влияет на взаимодействие магнетика с внешним полем). Рассмотрим несколько случаев.

Длинный цилиндр. Пусть внешнее поле \vec{B}_0 направлено вдоль оси цилиндра. Полное поле внутри складывается из внешнего поля \vec{B}_0 и поля токов намагничивания \vec{B}' :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J},$$

или с учетом связи $\vec{J} = \chi \vec{H} = \chi \vec{B} / \mu_0 \mu$:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{\chi \vec{B}}{\mu}.$$

Откуда сразу находим

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0,$$

т.е. поле внутри длинного цилиндра усиливается в μ раз.

Намагниченность цилиндра

$$J = \frac{\chi B}{\mu \mu_0} = \frac{\mu - 1}{\mu_0} B_0 .$$

Плоская пластина. Если внешнее поле параллельно плоскости пластины, то, опираясь на полученные выше результаты, имеем

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0$$

(поле усиливается в μ раз), а

$$J = \frac{\mu - 1}{\mu_0} B_0 .$$

Если же внешнее поле перпендикулярно плоскости пластины, то

$$\vec{B} = \vec{B}_0$$

(нет усиления поля), а

$$J = \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} B_0 .$$

Нетрудно показать, что если вектор \vec{B}_0 составляет произвольный угол α с плоскостью пластины, то

$$B = B_0 \sqrt{\sin^2 \alpha + \mu^2 \cos^2 \alpha} .$$

Шар. Собственное поле внутри такого шара \vec{B}' (поле токов намагничивания) можно определить по формуле (1):

$$\vec{B}' = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{J} .$$

Полное поле внутри шара складывается из внешнего поля и поля токов намагничивания:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0\vec{J},$$

или с учетом связи $\vec{J} = \chi\vec{H} = \chi\vec{B}/\mu_0\mu$:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{2\chi}{3\mu}\vec{B}.$$

Откуда находим индукцию магнитного поля внутри шара

$$\vec{B}_{\text{внутри}} = \frac{3\mu}{\mu + 2}\vec{B}_0$$

и его намагниченность

$$\vec{J} = \frac{3(\mu - 1)}{(\mu + 2)\mu_0}\vec{B}_0.$$

Зависимость намагничивания от формы тела можно продемонстрировать с помощью следующего эффектного опыта. Берется пучок тонких железных стержней, перевязанных нитками, и помещается на столе в вертикальном положении. Верхний конец пучка немного входит внутрь вертикальной катушки, расположенной над пучком. По обмотке катушки пропускается постоянный ток такой величины, чтобы сила, втягивающая пучок в катушку, была несколько меньше веса пучка. Пучок подобен пластине в перпендикулярном к ней магнитном поле и намагничивается относительно слабо. Если пережечь нитки, то стержни с силой втягиваются в катушку и удерживаются в ней. Это происходит потому, что каждый стержень ведет себя почти независимо от других стержней и, являясь длинным цилиндром, намагничивается значительно сильнее.

3.3.2. Поле прямого тока. Вдоль оси длинного цилиндра, заполненного магнетиком с проницаемостью μ , течет ток I . Радиус цилиндра – R . Найти магнитную индукцию B и напряженность H во всем пространстве.

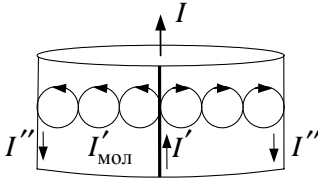


Рис. 3.39

Рассмотрим прежде всего характер распределения токов намагничивания. Пусть для определенности среда является парамагнетиком ($\chi > 0, \mu > 1$). Линии вектора \vec{B} являются окружностями с центром на оси проводника.

В этом случае молекулярные микротоки $I'_{\text{мол}}$ расположены в плоскости, проходящей через проводник с током (рис. 3.39). Их суммарное действие приводит к тому, что у провода на оси системы макроскопический ток намагничивания I' совпадает с током I , а на поверхности цилиндра поверхностный ток намагничивания I'' направлен против тока I . Нетрудно показать, что $I' = I''$. Для этого применим теорему о циркуляции вектора намагничивания $\oint \vec{J} d\vec{l} = I'$ к круговому контуру, охватывающему цилиндр. По этой теореме, поскольку во всех точках контура $\vec{J} = 0$, алгебраическая сумма всех токов намагничивания равна нулю, т.е. $I' + I'' = 0$. Отсюда следует, что токи I' и I'' равны по величине и противоположны по направлению. Применим теперь эту же теорему к любому контуру, охватывающему ток I внутри магнетика. Тогда с учетом связи $\vec{J} = \chi \vec{H}$ получаем

$$I' = \chi \oint \vec{H} d\vec{l}.$$

Так как оставшийся интеграл равен току проводимости I , то

$$I' = \chi I.$$

Именно с этим связано усиление индукции магнитного поля внутри парамагнетика. На ток I накладывается ток $I' = \chi I$, а поверхностный ток I'' , направленный в противоположную сторону, не оказывает влияния на поле \vec{B} в магнети-

ке. Вне магнетика магнитные поля обоих токов намагничивания I' и I'' компенсируют друг друга.

Рассчитаем теперь значения B и H . Начнем с поля H . По теореме о циркуляции вектора \vec{H} для окружности радиусом r с центром на оси проводника

$$2\pi r H = I \rightarrow H(r) = \frac{I}{2\pi r}.$$

Это соотношение справедливо как внутри цилиндра, так и вне его. А для индукции магнитного поля получаем

$$B(r < R) = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}, \quad B(r > R) = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

При переходе границы раздела магнетик – вакуум индукция магнитного поля B испытывает скачок в отличие от H (рис. 3.40).

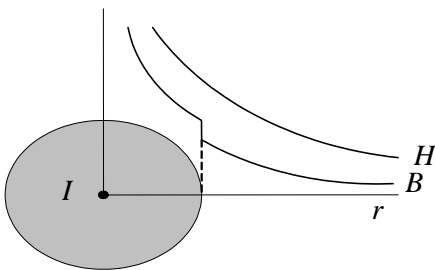


Рис. 3.40

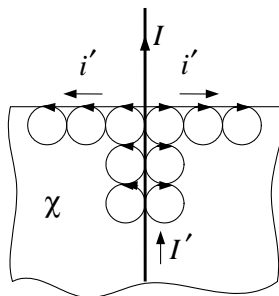


Рис. 3.41

Пусть теперь проводник с током I расположен перпендикулярно плоской границе раздела магнетик – вакуум (рис. 3.41). Найдем распределение токов намагничивания и полей B и H во всем пространстве. Из соображений симметрии следует, что линии векторов \vec{B} и \vec{H} должны иметь вид окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных проводнику с током I . Это вызывает линейный ток намагни-

чивания I' вблизи проводника и растекающийся радиально поверхностный ток намагничивания с линейной плотностью i' . Как и в предыдущей задаче, $I' = \chi I = (\mu - 1)I$. Значение H нетрудно найти из теоремы о циркуляции вектора \vec{H} для окружности радиусом r с центром на оси проводника:

$$2\pi r H = I \rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} = H_0.$$

Здесь H и H_0 – значения напряженности магнитного поля в магнетике и вакууме. Соответственно

$$B_0 = \mu_0 H_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad B = \mu B_0 = \frac{\mu \mu_0 I}{2\pi r}.$$

Для расчета распределения поверхностного тока i' воспользуемся теоремой о циркуляции вектора намагничивания, взяв в качестве контура небольшой прямоугольник, расположенный вблизи границы раздела магнетик – вакуум и плоскость которого перпендикулярна току i' . Часть контура длиной l находится в магнетике, другая часть – в вакууме. Тогда получаем

$$Jl = i'l \rightarrow i' = J$$

и из связи $J = \chi H = (\mu - 1)H$ имеем

$$i' = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi r}.$$

Расположим теперь проводник с током I в плоскости раздела вакуум – магнетик с проницаемостью μ (рис. 3.42). Ясно, что линии вектора \vec{B} являются окружностями с центром на оси проводника и на границе раздела не испытывают разрыва:

$$B = B_0 \tag{1}$$

(это следует из теоремы $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$). Токи намагничивания во всем магнетике обращаются в нуль, кроме области, непосредственно примыкающей к проводнику с током. Обозначим H и H_0 – значения напряженности магнитного поля в магнетике и вакууме. Они теперь не равны. Это сразу следует из (1). Тогда по теореме о циркуляции вектора \vec{H} для окружности радиусом r с центром на оси проводника имеем

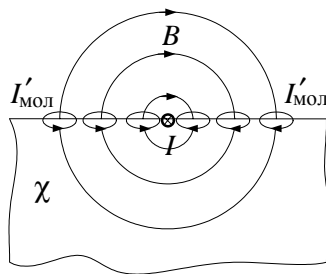


Рис. 3.42

$$\pi r H + \pi r H_0 = I. \quad (2)$$

А из (1) следует

$$\mu H = H_0. \quad (3)$$

После решения системы уравнений (2), (3) получаем:

$$H = \frac{I}{(1 + \mu)\pi r}, \quad H_0 = \frac{\mu I}{(1 + \mu)\pi r},$$

$$B = B_0 = \mu \mu_0 H = \frac{\mu \mu_0 I}{(1 + \mu)\pi r}.$$

Полученные выражения для H свидетельствуют о том, что напряженность магнитного поля в общем случае зависит не только от токов проводимости, но и от токов намагничивания (они входят через магнитную проницаемость среды).

3.3.3. Магнитная проницаемость железа. На тороидальном железном сердечнике со средним диаметром $d = 50$ см имеется обмотка с числом витков $N = 1000$. В сердечнике сделана поперечная прорезь шириной $b = 1$ мм

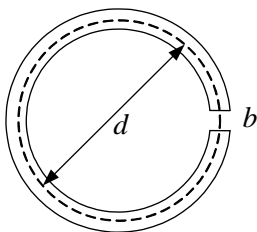


Рис. 3.43

(рис. 3.43). По обмотке протекает ток $I = 0,85$ А. Пренебрегая рассеянием магнитного поля на краях зазора, найти магнитную проницаемость железа, если:

а) индукция магнитного поля в зазоре $B = 0,9$ Тл;

б) известна основная кривая намагничивания железа.

Значение магнитной проницаемости μ можно определить из соотношения

$$B = \mu \mu_0 H. \quad (1)$$

И при заданном значении B осталось только найти величину напряженности магнитного поля H . Для ее определения воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{H} , взяв в качестве контура окружность диаметром d :

$$(\pi d - b)H + bH_0 = NI, \quad (2)$$

здесь H и H_0 – модули вектора \vec{H} соответственно в железе и прорези, связанные с индукцией магнитного поля выражением (1):

$$H = \frac{B}{\mu \mu_0}, \quad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}. \quad (3)$$

Пренебрегая рассеянием магнитного поля в зазоре, можно считать, что

$$B = B_0. \quad (4)$$

Из уравнений (2)–(4) нетрудно получить

$$\mu = \frac{(\pi d - b)B}{\mu_0 NI - bB} \approx \frac{\pi d \cdot B}{\mu_0 NI - bB} = 8,43 \cdot 10^3.$$

Посмотрим теперь, как можно воспользоваться экспериментальной зависимостью $B(H)$. Для этого перепишем уравнение (2) так, чтобы в него явно вошли значения B и H в железе

$$\pi d \cdot H + b \frac{B}{\mu_0} = NI \quad (5)$$

(мы учли, что $b \ll d$ и $B = B_0$).

Из (5) находим

$$B = \frac{NI\mu_0}{b} - \frac{\pi d\mu_0}{b} H \approx 1,07 - 1,97 \cdot H \text{ (кА/м)}. \quad (6)$$

Кроме того, между B и H есть зависимость, представленная на рис. 3.44. Искомые значения B и H , определяющие величину μ , должны удовлетворять одновременно линейной зависимости (6) (представлена на рисунке пунктиром) и нелинейной $B(H)$. Из графика находим $B = 0,9$ Тл, $H = 0,08$ кА/м. И тогда получаем

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} \approx 8,9 \cdot 10^3.$$

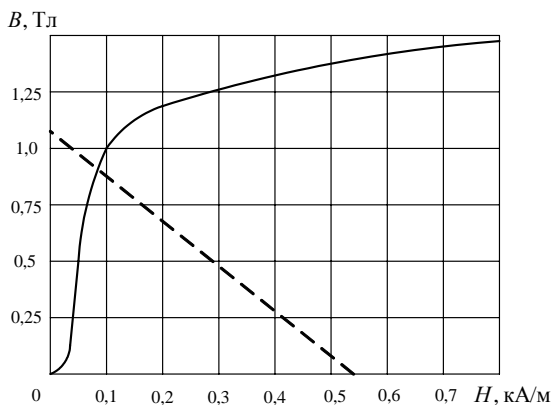


Рис. 3.44

3.3.4. Парамагнитная жидкость в капилляре. Длинный соленоид, намотанный на тонкостенный капилляр, погружен одним концом в парамагнитную жидкость на глубину, значительно превышающую его диаметр (рис. 3.45). Плотность жидкости ρ , магнитная проницаемость μ . На сколько поднимется уровень жидкости в капилляре, если по соленоиду пропустить ток I ? Число витков на единицу длины соленоида равно n .

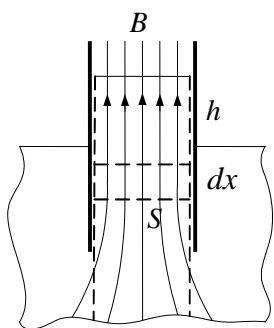


Рис. 3.45

Подъем жидкости в капилляре обусловлен взаимодействием молекулярных микротоков парамагнетика с неоднородным магнитным полем соленоида вблизи конца, находящегося в парамагнетике. Понятно, что, прежде всего, нам необходимо рассчитать эту силу взаимодействия. Для этого выделим вертикальный столбик жидкости с площадью сечения, равной площади сечения соленоида S (выделен пунктирной линией). На каждый малый элемент этого столбика толщиной dx действует сила

$$dF = dp_m \frac{dB}{dx},$$

где dp_m – магнитный момент выделенного элемента столбика; dB/dx – вертикальный градиент индукции магнитного поля в месте нахождения данного элемента. Правда, здесь возникает вопрос, о каком поле идет речь? Это индукция магнитного поля в присутствии магнетика или собственное поле соленоида без магнетика? Полное поле в магнетике \vec{B} складывается из двух полей: внешнего поля \vec{B}_0 , созданного токами проводимости, и собственного поля \vec{B}' , созданного тока-

ми намагничивания. В соответствии с этим сила взаимодействия магнетика с магнитным полем также состоит из двух частей: взаимодействие магнетика с внешним полем \vec{B}_0 и собственным полем \vec{B}' . Очевидно, полная сила взаимодействия микротоков намагничивания с собственным полем \vec{B}' должна быть равна нулю. Это взаимодействие может привести только к появлению внутренних механических напряжений. Значит, под полем \vec{B} нужно понимать собственное поле соленоида $B_0 = \mu_0 H$, где H – напряженность магнитного поля соленоида без учета магнетика.

Полагая магнитное поле однородным по сечению S , для магнитного момента dp_m находим

$$dp_m = JdV = \chi H(x)Sdx = (\mu - 1)SH(x)dx ,$$

где J – намагниченность парамагнетика; χ – его восприимчивость. И для силы dF имеем

$$dF = (\mu - 1)HSdx \frac{dB}{dx} = (\mu - 1)\mu_0 SHdH .$$

После интегрирования по всем элементам выделенного столбика жидкости получаем

$$F = (\mu - 1)\mu_0 S \int_0^{H_0} HdH = \frac{(\mu - 1)\mu_0 SH_0^2}{2} ,$$

здесь H_0 – напряженность магнитного поля внутри соленоида без магнетика вдали от края соленоида: $H_0 = nI$ (при этом мы полагали, что поле вдали от соленоида обращается в нуль).

Окончательно имеем

$$F = \frac{(\mu - 1)\mu_0 S n^2 I^2}{2} . \quad (1)$$

Под действием данной силы жидкость будет подниматься до тех пор, пока эта сила не уравнивается силой тяжести выступающего над первоначальным уровнем на высоту h столбика жидкости (пренебрегая колебаниями)

$$mg = \rho Shg . \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), получаем

$$h = \frac{\mu_0 (\mu - 1) n^2 I^2}{2\rho g} .$$

3.3.5. Провод над сверхпроводящей плоскостью. Над плоской поверхностью сверхпроводника параллельно этой поверхности подвешен тонкий прямолинейный провод на расстоянии h от плоскости. По проводу течет постоянный ток I . Найти распределение линейной плотности сверхпроводящих токов по поверхности сверхпроводника и силу, действующую на единицу длины проводника.

Как отмечалось во введении к данному параграфу, внутри сверхпроводника нет магнитного поля и нет объемно-распределенных токов. Вытеснение магнитного поля обусловлено появлением поверхностных индукционных токов, которые согласно правилу Ленца препятствуют всякому изменению магнитного потока внутри сверхпроводника. Эти поверхностные токи возбуждают такое магнитное поле, которое компенсирует внутри сверхпроводника внешнее магнитное поле. Данная ситуация очень напоминает поведение проводника в электрическом поле. Компенсация внешнего электрического поля внутри проводника происходит из-за появления индуцированных зарядов на поверхности проводника. И при наличии определенной симметрии формы проводников для расчета полей мы использовали так называемый метод электрических изображений. Посмотрим, нельзя ли воспользоваться аналогичным приемом и для расчета магнитного поля.

Метод изображений в электростатике основан на подгонке потенциала под граничные условия. Мы находим другую конфигурацию зарядов, для которой поле вектора \vec{E} в интересующей нас части пространства остается тем же. При этом линии вектора \vec{E} должны подходить к поверхности проводника перпендикулярно. А что должно быть в случае магнитного поля? Нетрудно понять, что линии вектора \vec{B} должны быть параллельными поверхности сверхпроводника. Это связано с теоремой Гаусса для вектора \vec{B} . Возьмем небольшую замкнутую поверхность, часть которой S_1 находится в вакууме, прилегая к поверхности сверхпроводника, другая часть S_2 – внутри сверхпроводника (рис. 3.46). Так как $\vec{B} = 0$ на поверхности сверхпроводника, то из соотношения $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ сразу следует, что B_n на S_1 также равно нулю, т.е. линии вектора \vec{B} вне сверхпроводника параллельны его поверхности.

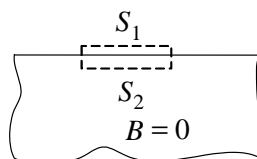


Рис. 3.46

Таким образом, в нашей задаче необходимо подобрать такой фиктивный линейный ток, который в сумме с заданным линейным током над поверхностью сверхпроводника создал магнитное поле, подходящее параллельно поверхности сверхпроводника. Нетрудно сообразить, что в случае плоской поверхности сверхпроводника фиктивный линейный ток I' должен быть равным току I и являться зеркальным отражением реального тока I относительно поверхности сверхпроводника, а его направление противоположно току I . Только в этом случае мы получим заданную конфигурацию поля вблизи поверхности сверхпроводника (рис. 3.47). Можно сказать, что суммарное действие всех поверхностных токов эквивалентно действию искусственно введенного тока I' .

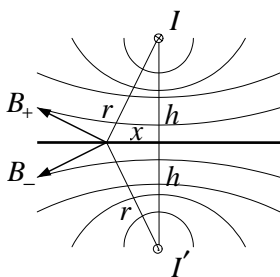


Рис. 3.47

Поверхностные токи с линейной плотностью i' в нашем случае направлены перпендикулярно рисунку из чертежа к нам. Их величина связана с полем \vec{B} теоремой о циркуляции вектора \vec{B} . Обратимся к рис. 3.46 (теперь пунктирной линией изображен маленький контур). Из теоремы $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$ сразу следует, что

$$i' = \frac{B}{\mu_0}, \quad (1)$$

т.е. для определения i' необходимо знать распределение поля B вблизи поверхности сверхпроводника, которое складывается из двух частей:

$$\vec{B} = \vec{B}_+ + \vec{B}_-.$$

здесь \vec{B}_+ – поле тока I , \vec{B}_- – поле тока I' . Модули этих полей

$$B_+ = B_- = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

Складывая векторы \vec{B}_+ и \vec{B}_- , получаем

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{h}{r} = \frac{\mu_0 I h}{\pi r^2}.$$

Тогда из (1) следует

$$i' = \frac{I h}{\pi(x^2 + h^2)}.$$

Для силы взаимодействия тока I и сверхпроводящих поверхностных токов получаем

$$F_{\text{ед}} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi h}.$$

3.3.6. Магнитик над сверхпроводником. На какой высоте h постоянный магнитик с магнитным моментом \vec{p}_m и массой m будет парить над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника?

Для того чтобы понять, почему магнитик зависает над сверхпроводником, представим магнитик в виде небольшого витка с током (магнитный диполь). Как мы уже знаем из предыдущей задачи, любой малый элемент тока зеркально отражается относительно поверхности сверхпроводника со сменой направления тока (рис. 3.48). Это приводит к отталкиванию проводника с током от сверхпроводника. Так как сила отталкивания убывает с увеличением расстояния до сверхпроводника, то при наличии силы тяжести магнитик зависнет над сверхпроводником на некоторой высоте. Это произойдет при выполнении условия

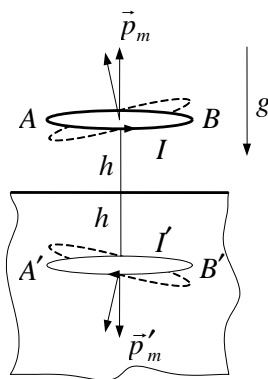


Рис. 3.48

$$F_{\text{магн}} = mg, \quad (1)$$

где $F_{\text{магн}}$ – сила магнитного взаимодействия реального контура с током и его изображения. Осталось только выяснить, в каком положении контур зависнет над сверхпроводником (это определяет силу отталкивания). Нетрудно понять, что в положении устойчивого равновесия плоскость витка должна быть параллельна поверхности сверхпроводника, т.е. вектор магнитного момента \vec{p}_m будет направлен перпендикулярно поверхности сверхпроводника. Если, например, виток из равновесного положения повернуть против часовой стрелки, то расстояние между точками A и A' уменьшится (см. рис. 3.48). Это влечет за собой увеличение силы оттал-

кивания между элементами, близкими к этим точкам. Расстояние же между точками B и B' возрастет, что приводит к уменьшению силы отталкивания между элементами, близкими к этим точкам. В итоге при любом малом отклонении витка от положения равновесия появляется момент сил, возвращающий виток в прежнее состояние.

Сила взаимодействия магнитика с магнитным моментом \vec{p}_m и магнитного поля, созданного токами сверхпроводимости, определяется выражением

$$F_{\text{магн}} = p_m \left| \frac{\partial B}{\partial x} \right|, \quad (2)$$

где $\partial B / \partial x$ – градиент магнитного поля вдоль вектора \vec{p}_m . Это поле эквивалентно полю зеркально отраженного магнитного диполя, для которого нами было ранее получено выражение (формула (6) задачи 3.1.1 при $\theta = 0$):

$$B(x) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi x^3} \cdot 2.$$

Подставляя это выражение в (2), получаем

$$F_{\text{магн}} = p_m \cdot \frac{3\mu_0 p_m}{2\pi x^4} \bigg|_{x=2h} = \frac{3\mu_0 p_m^2}{32\pi h^4}.$$

Тогда из (1) находим

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi mg} \right)^{1/4}.$$

4. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

4.1. Электромагнитная индукция

До сих пор мы занимались задачами, в которых рассматривались электрическое и магнитное поле по отдельности, не обнаруживая никакой связи между ними. Это было возможно, потому что поля являлись статическими. На самом деле электрическое и магнитное поле являются компонентами единого электромагнитного поля, соотношение между которыми в решающей степени зависит от системы отсчета. Например, движущийся с постоянной скоростью заряд в неподвижной системе отсчета создает как электрическое, так и магнитное поле, причем эти поля являются переменными во времени. Если же перейти в систему отсчета, движущуюся вместе с зарядом, то, так как в ней заряд покоится, мы наблюдаем только электрическое поле.

Кроме того, существует и более глубокая связь между электрическим и магнитным полями и обнаруживается это в явлениях электромагнитной индукции. Это одно из наиболее фундаментальных открытий в электродинамике. Заключается оно в том, что в замкнутом проводящем контуре при любом изменении магнитного потока Φ , связанного с этим контуром, появляется индукционный электрический ток. Возникающая в контуре ЭДС индукции \mathcal{E}_i определяется как

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Знак минус в этой формуле связан с так называемым правилом Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. Соотношение (1) замечательно тем, что в нем никак не оговаривается причина изменения магнитного потока и, по сути, явля-

ется следствием закона сохранения энергии применительно к электромагнитным явлениям. Если магнитный поток изменяется за счет движения проводящего контура, то появление ЭДС индукции связано с действием магнитной силы, возникающей при движении проводника и пропорциональной $[\vec{v}\vec{B}]$. При действии же на контур изменяющегося со временем магнитного поля причина возникновения ЭДС индукции совершенно другая. По идее Максвелла изменяющееся со временем магнитное поле приводит к появлению в пространстве вихревого электрического поля независимо от наличия проводящего контура. Циркуляция напряженности этого поля \vec{E}^* по любому неподвижному контуру определяется как

$$\oint \vec{E}^* d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

или в дифференциальном виде

$$\text{rot } \vec{E}^* = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Эти соотношения остаются справедливыми и в общем случае, когда электрическое поле складывается из электростатического поля и поля, обусловленного изменяющимся во времени магнитным полем.

Если в контуре течет изменяющийся со временем ток, то изменение магнитного поля этого тока приводит к изменению магнитного потока через контур, и, как следствие, возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}, \quad (2)$$

где L – индуктивность контура. Она определяется как отношение магнитного потока к силе тока

$$L = \frac{\Phi}{I} . \quad (3)$$

Знак минус в (2) показывает, что \mathcal{E}_s всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока. Формула (3) содержит некоторый элемент неопределенности, так как точно не фиксировано, как внутри проводника задавать геометрический контур, относительно которого находится магнитный поток Φ . Но для тонкого провода эта неопределенность не существенна. Кроме того, от нее можно полностью избавиться, если использовать энергетический подход (см. об этом далее).

Особого внимания заслуживает поведение сверхпроводников в магнитном поле. Если сверхпроводящий контур движется в постоянном или переменном магнитном поле, то в нем индуцируется ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_s}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} .$$

Так как сопротивление контура $R = 0$, то требование конечности тока может быть выполнено только при условии $d\Phi/dt = 0$. Иначе говоря, отсутствие сопротивления приводит к тому, что при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле сохраняется магнитный поток, пронизывающий контур провода. Такое сохранение обусловлено индукционными токами, которые, согласно правилу Ленца, препятствуют всякому изменению магнитного потока. Пусть, например, в однородном магнитном поле с индукцией B находится сверхпроводящее кольцо радиусом a и индуктивностью L . Плоскость кольца перпендикулярна вектору \vec{B} . При выключении поля по кольцу потечет ток I , который можно найти из следующих соображений. Так как магнитный поток через кольцо не может измениться, то возникший ток I должен создать свой магнитный поток $L \cdot I$, равный

исходному потоку $\pi a^2 B$. Поэтому $LI = \pi a^2 B$, откуда находим $I = \pi a^2 B / L$. Тенденция к сохранению магнитного потока сквозь контур имеется в любом случае, но наиболее полно она проявляется в контурах из сверхпроводников.

При наличии магнитной связи между двумя контурами 1 и 2 изменение тока в одном контуре порождает ЭДС взаимной индукции в другом контуре

$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

где L_{12} и L_{21} называют взаимной индуктивностью контуров. Они определяются как коэффициенты пропорциональности в соотношениях

$$\Phi_2 = L_{21} I_1, \quad \Phi_1 = L_{12} I_2.$$

При отсутствии ферромагнетиков выполняется теорема взаимности

$$L_{12} = L_{21}.$$

Создание тока I в контуре с индуктивностью L требует совершения работы против ЭДС самоиндукции, в связи с чем существует магнитная энергия тока

$$W = \frac{1}{2} LI^2. \quad (4)$$

Соотношение (4), как и для электрического поля, можно выразить непосредственно через индукцию магнитного поля B и напряженность H

$$W = \int \frac{B^2}{2\mu\mu_0} dV = \int \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV. \quad (5)$$

Эти выражения применимы только к расчету энергии магнитного поля в пара- и диамагнетиках и не применимы к ферромагнетикам.

Сопоставление формул (4) и (5) дает возможность находить индуктивность проводящего контура из выражения для энергии

$$L = \frac{1}{I^2} \int \frac{B^2}{\mu\mu_0} dV. \quad (6)$$

Нахождение L таким способом свободно от неопределенности, связанной с вычислением магнитного потока в формуле (3). Входящие же в формулу (6) значения тока и магнитной энергии – величины, определяемые совершенно однозначно, в отличие от магнитного потока. Более того, эта формула может служить определением индуктивности и в случае толстого провода.

Для иллюстрации того, что расчет индуктивности по формулам (3) и (6) приводит к разным результатам, найдем индуктивность единицы длины коаксиального кабеля. Он состоит из внутреннего сплошного проводника радиусом a и наружной проводящей тонкостенной трубки радиусом b . Будем полагать распределение тока по сечению внутреннего проводника равномерным и магнитную проницаемость всюду равной единице.

Выберем в качестве элемента объема dV тонкий цилиндрический слой радиусом r и толщиной dr . Тогда

$$L_{\text{ед}} = \frac{1}{I^2} \int_0^b \frac{B^2}{\mu_0} 2\pi r dr. \quad (7)$$

Используя теорему о циркуляции вектора \vec{B} , нетрудно получить

$$B_{r < a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r, \quad B_{a < r < b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad B_{r > b} = 0.$$

С учетом этих выражений интеграл (7) разбивается на две части и после интегрирования имеем

$$L_{\text{ед}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right). \quad (8)$$

Если же использовать выражение (3), то для индуктивности нетрудно получить

$$L_{\text{ед}} = \frac{1}{I} \int_0^b B(r) dr = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{b}{a} \right).$$

У нас нет оснований не доверять энергетическому подходу, поэтому правильным является выражение (8). И чем тоньше центральный проводник, тем меньше относительное различие полученных результатов.

4.1.1. Вращающиеся диски. Два диска радиусами R_1 и R_2 вращаются с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной их плоскости (рис. 4.1). Центры дисков присоединены к обкладкам конденсатора C_1 , ободы – через скользящие контакты к обкладкам конденсатора C_2 . Найти напряжения на конденсаторах, если диски вращаются в одном направлении и если в разных.

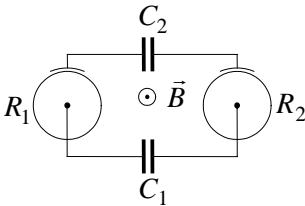


Рис. 4.1

Заряд конденсаторов происходит из-за возникновения ЭДС индукции при движении проводника (вращающийся диск) в магнитном поле. Для расчета ЭДС индукции выделим на диске тонкий радиальный элемент длиной, равной радиусу диска. За время dt этот элемент поворачивается на угол $d\alpha = \omega dt$ и «заметает» площадь $dS = \frac{1}{2} R^2 d\alpha$. Магнитный поток через данную площадь $d\Phi = B dS = \frac{1}{2} B R^2 \omega dt$. Его отношение ко времени dt и равно модулю ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} BR^2 \omega.$$

Если диски вращаются в одном направлении, то полная ЭДС индукции, действующая в контуре, будет равна $|\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2|$, если в разных направлениях, то $|\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2|$, где

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} BR_1^2 \omega, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} BR_2^2 \omega.$$

Осталось только найти напряжения на конденсаторах. Подобная задача нами решалась ранее, поэтому сразу запишем ответ:

$$U_1 = \frac{B\omega |R_1^2 \pm R_2^2| C_2}{2(C_1 + C_2)}, \quad U_2 = \frac{B\omega |R_1^2 \pm R_2^2| C_1}{2(C_1 + C_2)}.$$

Здесь знак плюс относится к случаю вращения дисков в разные стороны, минус – к вращению дисков в одну сторону.

4.1.2. Движущийся в магнитном поле проводник. По двум вертикальным медным шинам, соединенным сверху батареей с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , без трения скользит проводник длиной l и массой m (рис. 4.2). Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной к плоскости рисунка и направленной из чертежа. Найти установившуюся скорость проводника в поле силы тяжести, пренебрегая сопротивлением шин и проводника, а также индуктивностью контура.

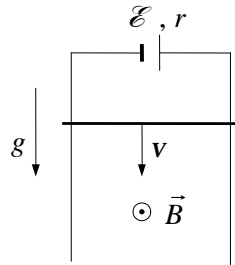


Рис. 4.2

Движение проводника определяется двумя силами – силой тяжести mg и силой Ампера F_A . Значение этой силы определяется током проводника, который можно найти из закона Ома

$$Ir = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}. \quad (1)$$

Здесь $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$ – ЭДС индукции, возникающая в движущемся в магнитном поле проводнике (за положительное направление обхода контура выбран обход против часовой стрелки). В результате расчета, аналогичного проделанному в предыдущей задаче, получаем

$$\mathcal{E}_i = Blv. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$I = \frac{\mathcal{E} + Blv}{r}.$$

Обратимся теперь ко второму закону Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_A = mg - \frac{\mathcal{E} + Blv}{r} lB. \quad (3)$$

Интегрирование этого уравнения с учетом начальных условий даст нам зависимость скорости проводника от времени. Но так как нас интересует только установившаяся скорость, то в уравнении (3) следует положить $dv/dt = 0$. Таким образом, находим

$$v = \frac{mgr - \mathcal{E}lB}{B^2 l^2}.$$

Откуда видно, что если $mg > \mathcal{E}lB/r$, то проводник движется вниз, в противном случае – вверх.

Изменим несколько постановку задачи. Пусть теперь шины расположены горизонтально и замкнуты с одного конца соленоидом с индуктивностью L (рис. 4.3). В момент времени $t = 0$

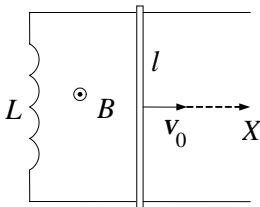


Рис. 4.3

проводнику толчком сообщили скорость v_0 . Пренебрегая сопротивлением контура, найти закон движения проводника $x(t)$.

Очевидно, движение проводника не может быть равномерным. При движении в нем рождается ЭДС индукции \mathcal{E}_i , пропорциональная скорости проводника, и появляется индукционный ток. Взаимодействие этого тока с магнитным полем приводит к торможению проводника. И если бы индуктивность равнялась нулю, то, в конце концов, проводник просто остановился бы, не возобновляя движения. Наличие же индуктивности кардинально меняет ситуацию. Появляется ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s , зависящая уже от скорости изменения тока, и предугадать дальнейшее развитие событий достаточно трудно. Поэтому обратимся ко второму закону Ньютона. Так как на проводник действует единственная сила Ампера, равная IlB , то

$$m\dot{v} = IlB. \quad (4)$$

Отсюда следует, что для определения характера движения проводника нам нужна явная зависимость тока контура от времени. Это можно сделать, воспользовавшись законом Ома: $\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_s = 0$, где $\mathcal{E}_s = -LdI/dt$, а $\mathcal{E}_i = Blv$. Тогда получаем связь скорости изменения тока и скорости проводника:

$$-L\dot{I} - Blv = 0. \quad (5)$$

Таким образом, наша задача сводится к решению замкнутой системы дифференциальных уравнений (4), (5), из которой можно найти как закон движения проводника $x(t)$, так и зависимость тока контура от времени $I(t)$. Для решения этой системы уравнений продифференцируем по времени равенство (4):

$$m\ddot{v} = \dot{I}lB.$$

После подстановки в данное соотношение значения \dot{I} из (5) приходим к дифференциальному уравнению для скорости v :

$$m\ddot{v} = -\frac{l^2 B^2}{L} v,$$

или после деления на m

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0, \quad (6)$$

где

$$\omega = \frac{lB}{\sqrt{mL}}. \quad (7)$$

Уравнение (6) является типичным уравнением гармонических колебаний, поэтому, исходя из начальных условий, сразу запишем его решение

$$v(t) = v_0 \cos \omega t.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

где значение ω дается выражением (7).

Итак, проводник совершает гармонические колебания (весьма неожиданно!). Кроме того, как следует из уравнения (4), гармонически изменяется и сила тока в контуре

$$I(t) = \frac{m\dot{v}}{lB} = -v_0 \sqrt{\frac{m}{L}} \sin \omega t$$

(минус связан с выбранным направлением обхода контура). Заметим, что значение максимального тока

$$I_0 = v_0 \sqrt{\frac{m}{L}}$$

можно легко получить и из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}.$$

В данном случае мы имеем дело со своеобразным колебательным контуром, в котором роль конденсатора взял на себя движущийся проводник.

4.1.3. Проводящее кольцо в соленоиде. В длинном соленоиде с числом витков на единицу длины n изменяют ток со скоростью $\dot{I}_0 A/c$. В середине соленоида находится коаксиальное кольцо прямоугольного сечения из проводящего материала с удельным сопротивлением ρ . Толщина кольца h , его внутренний и внешний радиусы a и b . Найти индукционный ток в кольце.

Казалось бы, что ход решения задачи прост. Нужно найти магнитный поток через поперечное сечение кольца площадью $S = \pi(b^2 - a^2)$, взять от потока производную по времени и результат поделить на сопротивление кольца. Однако при этом мы совершим ошибку. Следует помнить, что основной закон электромагнитной индукции написан для тонкого проводящего контура, а не для толстого кольца. Поэтому следует разбить кольцо на бесконечно тонкие кольцевые слои, найти протекающие в них токи и просуммировать их по сечению кольца.

Плотность тока j в любом тонком кольцевом слое радиусом r связана с напряженностью вихревого электрического поля E^* законом Ома:

$$j = \frac{1}{\rho} E^*.$$

Циркуляция E^* определяется скоростью изменения магнитного потока через сечение кольца:

$$\oint \vec{E}^* d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{S}. \quad (1)$$

Из соображений симметрии, очевидно, линии вектора E^* представляют собой окружности. Поэтому соотношение (1) примет вид

$$E^* 2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \pi r^2 \quad (2)$$

(мы опустили знак минус, так как он сейчас не имеет никакого значения). Из (2) находим

$$E^* = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \frac{r}{2}.$$

Вспомним теперь, что индукция магнитного поля внутри длинного соленоида рассчитывается как $B = \mu_0 n I_0$ (I_0 — ток соленоида). С учетом этого для E^* получаем

$$E^* = \frac{\mu_0 n \dot{I}_0}{2} r.$$

Таким образом, плотность тока в любой точке кольца на расстоянии r от оси

$$j = \frac{\mu_0 n \dot{I}_0}{2\rho} r.$$

Интегрируя плотность тока по сечению всего кольца, находим искомый ток

$$I = \int j dS = \int j h dr = \frac{\mu_0 n \dot{I}_0 h (b^2 - a^2)}{4\rho}.$$

4.1.4. Непроводящее кольцо в магнитном поле. Непроводящее тонкое кольцо массой m , имеющее заряд q , может свободно вращаться вокруг своей оси. В момент $t = 0$ включили однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца. Индукция поля начала расти по некоторому закону $B(t)$. Найти угловую скорость кольца ω как функцию B .

Раскрутка кольца обусловлена действием кулоновских сил. При изменении магнитного поля появляется вихревое

электрическое поле E^* . Его линии представляют собой окружности, одна из которых совпадает с непроводящим заряженным кольцом. Динамика вращения кольца определяется уравнением

$$M = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (1)$$

где M – момент кулоновских сил; I – момент инерции кольца $I = mr^2$ (r – радиус кольца). Осталось только найти момент сил.

$$M = E^* qr.$$

Поступая аналогично предыдущей задаче для E^* получаем

$$E^* = \frac{\dot{B}}{2} r.$$

Тогда (1) запишется в виде

$$\frac{\dot{B}}{2} rqr = mr^2 \dot{\omega}.$$

И так как вначале кольцо не крутилось, то его угловая скорость будет зависеть от времени синхронно с изменением индукции магнитного поля

$$\vec{\omega} = -\frac{\vec{B}q}{2m}$$

(знак минус связан с правилом Ленца и показывает, что направление вектора $\vec{\omega}$ противоположно вектору \vec{B}).

4.1.5. Импульс рамки. Прямоугольная рамка со сторонами a и b находится на расстоянии l в одной плоскости с прямым проводом с током I_0 (рис. 4.4). Какой импульс получит рамка при выключении тока I_0 , если ее сопротивление равно R ?

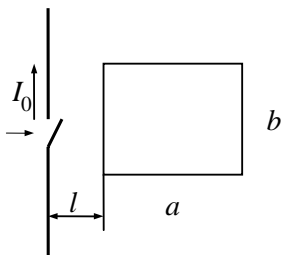


Рис. 4.4

Прежде всего попытаемся понять, каким образом и импульс какого направления получит рамка? Так как провод с током I_0 обладает индуктивностью, то даже размыкание ключа не устранил ток мгновенно. В этом случае по проводу будет течь быстро уменьшающийся со временем ток $I(t)$. Его изменяющееся магнитное поле возбуждает в рамке индукционный ток $i(t)$. По правилу Ленца этот ток должен препятствовать уменьшению магнитного потока через рамку, т.е. магнитное поле индукционного тока направлено туда же, что и поле тока I . Поэтому индукционный ток будет направлен по часовой стрелке, а это в конечном итоге приведет к притяжению провода и рамки. Таким образом, идея решения задачи будет следующей. Вначале рассчитаем индукционный ток рамки $i(t)$, который должен быть связан с током провода $I(t)$. Затем найдем амперовскую силу взаимодействия рамки и провода $F(t)$. Ну а значение этой силы даст нам импульс рамки $p = \int F(t)dt$, где интегрирование проводится по времени исчезновения тока провода. Правда, это время нам неизвестно, но, как увидим из дальнейшего, оно нам и не потребуется.

Пренебрегая индуктивным сопротивлением рамки, ее ток можно найти из закона Ома

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R},$$

где \mathcal{E}_i – ЭДС индукции, обусловленная изменением магнитного потока через площадь рамки,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как поле прямого провода нам известно ($B = \mu_0 I / 2\pi r$), то магнитный поток

$$\Phi(t) = b \int_l^{a+l} B dr = \frac{b\mu_0 I(t)}{2\pi} \ln \frac{a+l}{l}.$$

Тогда для тока рамки имеем

$$i(t) = \frac{\mu_0 b}{2\pi R} \ln \frac{a+l}{l} \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Этот ток обуславливает притяжение ближней стороны рамки и отталкивание дальней стороны. Полная сила Ампера находится как

$$F = \frac{\mu_0 b I \cdot i}{2\pi} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+a} \right).$$

Подставляя сюда выражение для $i(t)$, получаем

$$F(t) = \left(\frac{\mu_0 b}{2\pi} \right)^2 \frac{a}{Rl(l+a)} \ln \frac{a+l}{l} \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} I^2(t).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$I \frac{dI}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dI^2}{dt}.$$

И окончательно находим

$$p = \int F(t) dt = \left(\frac{\mu_0 b I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{a}{2Rl(l+a)} \ln \frac{a+l}{l}.$$

4.1.6. Соединение индуктивностей. Две катушки индуктивности L_1 и L_2 соединяют либо последовательно, либо параллельно. Пренебрегая взаимной индуктивностью катушек, найти индуктивность системы в обоих случаях.

Представим, что мы имеем две системы проводников, обладающих одинаковой индуктивностью. Такие системы, естественно, должны вести себя одинаковым образом. В частности, должны создавать магнитные поля с одинаковой энергией при подводе к ним одинаковых токов. Попробуем этим воспользоваться. Так как мы пренебрегаем взаимным влиянием катушек, то полная энергия этой системы составит $1/2 \cdot L_1 I_1^2 + 1/2 \cdot L_2 I_2^2$, где I_1 и I_2 – токи, протекающие по катушкам индуктивности L_1 и L_2 . И эта энергия должна быть равна $1/2 \cdot L I^2$, где I – ток, протекающий по катушке с индуктивностью L , заменяющей систему соединенных индуктивностей L_1 и L_2 . Таким образом, мы потребуем выполнение равенства

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2, \quad (1)$$

независимо от вида соединения катушек.

Пусть катушки соединяются последовательно. В этом случае, очевидно, все токи одинаковы:

$$I_1 = I_2 = I. \quad (2)$$

Тогда из (1) немедленно следует, что

$$L = L_1 + L_2.$$

Соединим теперь катушки параллельно. Сейчас же сумма токов отдельных катушек должна быть равна току, протекающему через катушку с индуктивностью L :

$$I = I_1 + I_2. \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что равенства (1) и (3) могут быть выполнены одновременно только при условии

$$L I = L_1 I_1 = L_2 I_2. \quad (4)$$

Перепишем теперь равенство (3) в виде

$$\frac{LI}{L} = \frac{L_1 I_1}{L_1} + \frac{L_2 I_2}{L_2}.$$

Отсюда с учетом (4) получаем

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

Заметим, что расчет индуктивностей при их последовательном и параллельном соединениях проводится точно так же, как и расчет сопротивлений. Это становится понятным, если учесть, что индуктивное сопротивление переменному току с частотой ω равно ωL .

4.1.7. Взаимная индуктивность треугольных контуров. Два одинаковых контура в виде равносторонних треугольников (из тонких проводов с изоляцией) одной стороной совмещены, а расстояние между противоположными вершинами равно стороне треугольников. Индуктивность каждого контура L . Найти их взаимную индуктивность.

Расчет взаимной индуктивности тонких контуров обычно проводится по следующей схеме. Запускают ток I в один контур и находят магнитный поток через второй контур. Отношение этих величин и есть взаимная индуктивность L_{21} . Понятно, что здесь не удастся провести прямой расчет взаимной индуктивности, так как не известны геометрические параметры контуров. Поэтому воспользуемся соображениями симметрии и тем, что индуктивность каждого контура нам известна. По определению индуктивность контура есть отношение магнитного потока Φ_1 через поверхность, натянутую на контур, к его силе тока I_1 :

$$L = \frac{\Phi_1}{I_1}.$$

Аналогично

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1},$$

где Φ_2 – магнитный поток через второй контур. Приставим теперь мысленно к этим двум треугольным контурам еще два таких же контура, образовав тетраэдр. Тогда в качестве второго контура может быть взят любой из трех контуров, одна сторона которых соприкасается со сторонами первого контура. В силу полной симметрии их магнитные потоки Φ_2 будут одинаковыми и равными одной трети от полного магнитного потока трех соприкасающихся граней тетраэдра. Этот поток в силу теоремы Гаусса $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ равен Φ_1 . Таким образом, $\Phi_2 = \Phi_1 / 3$. Откуда сразу следует, что

$$L_{21} = \frac{L}{3}.$$

4.1.8. Теорема взаимности. Рассмотрим несколько полезных применений теоремы взаимности $L_{21} = L_{12}$.

1. Имеется тонкое кольцо радиусом a с током I . Найти индукцию магнитного поля в плоскости кольца в точке, находящейся на расстоянии r от центра, если $r \gg a$.

Ранее мы уже решали подобную задачу прямым расчетом поля, исходя из закона Био–Савара (см. задачу 3.1.1). Воспользуемся теперь теоремой взаимности. Для этого введем еще один проводящий круговой контур радиусом $r \gg a$. Если по нему пропустить тот же ток I , что и через кольцо радиусом a , то по теореме взаимности $L_{12}I = L_{21}I$. Отсюда следует, что магнитный поток Φ_1 , создаваемый кольцом радиусом a через площадь контура радиусом r , равен потоку Φ_2 , создаваемому контуром радиусом r внутри себя через поверхность кольца радиусом a . Так как задано условие $r \gg a$, то

$$\Phi_2 \approx \frac{\mu_0 I}{2r} \pi a^2.$$

В силу аксиальной симметрии поля, создаваемого кольцом радиусом a , его магнитный поток Φ_1 можно представить в виде

$$\Phi_1 \approx \int_0^r B(r') 2\pi r' dr'.$$

Таким образом, для отыскания зависимости $B(r)$ мы имеем интегральное уравнение

$$\int_0^r B(r') 2\pi r' dr' = \frac{\mu_0 I}{2r} \pi a^2.$$

Дифференцируя это равенство по r , получаем

$$B(r) 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2r^2} \pi a^2$$

(знак минус мы опустили). Откуда сразу следует ответ

$$B(r) = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}.$$

2. Ток I течет по рамке в виде квадратного контура со стороной a . Найти магнитный поток через полу-плоскость P (рис. 4.5), граница которой OO' отстоит от ближайшей стороны рамки на расстояние b . Полу-плоскость P и рамка лежат в одной плоскости.

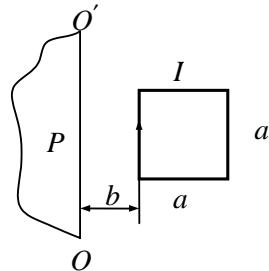


Рис. 4.5

Магнитное поле тока I имеет еще более сложную конфигурацию, чем в предыдущей задаче, поэтому непосредственно вычислить интересующий нас поток Φ очень трудно. Поэтому также

воспользуемся теоремой взаимности. Представим, что вдоль границы полуплоскости P , огибая ее на бесконечности, течет такой же ток I . Магнитное поле этого тока – это поле прямого тока $B = \mu_0 I / 2\pi r$. Его магнитный поток через прямоугольный контур

$$\Phi = \int_b^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}.$$

И этот поток по теореме взаимности равен искомому потоку от прямоугольного контура.

4.1.9. Электрическая цепь с индуктивностью. Найти закон изменения со временем тока, текущего через индуктивность L (рис. 4.6) после замыкания ключа K в момент $t = 0$.

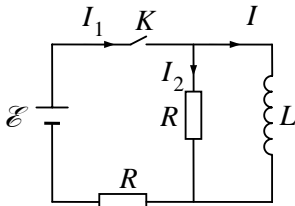


Рис. 4.6

Кроме искомого тока I присутствуют еще два тока I_1 и I_2 . Для их определения воспользуемся правилами Кирхгофа для контуров $\mathcal{E}R$ и RL :

$$I_2 R + I_1 R = \mathcal{E},$$

$$-I_2 R = \mathcal{E}_s,$$

где $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ – ЭДС самоиндукции. Кроме того,

$$I + I_2 = I_1.$$

Исключая из этой системы уравнений не интересующие нас токи I_1 и I_2 , для тока I получаем дифференциальное уравнение

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{R}{2} I = \frac{\mathcal{E}}{2}.$$

Решение этого неоднородного уравнения складывается из двух частей. Первая часть – это общее решение однородного уравнения

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{R}{2} I = 0.$$

Как легко проверить, оно имеет вид

$$I = C \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right),$$

здесь C – некоторая константа.

Вторая часть – некоторое частное решение, например, $I = \mathcal{E} / R$. Поэтому полное решение

$$I = C \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) + \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Так как при $t=0$ ток был равен нулю, то, очевидно, $C = -\mathcal{E} / R$. Таким образом, получаем окончательно

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \right].$$

4.1.10. Пролет сверхпроводящего стержня через соленоид. Сверхпроводящий тонкий стержень сечением S , длиной l и массой m летит издалека по направлению к соленоиду вдоль его оси. Индукция поля в центре соленоида B . Какой минимальной скоростью должен обладать стержень, чтобы он смог пролететь через соленоид насквозь?

Для того чтобы стержень смог пролететь соленоид, ему достаточно дойти до области максимального поля внутри соленоида с индукцией B . Но в чем причина торможения стержня? Вдали от соленоида внутри стержня не было магнитного поля. Но его не должно быть и в момент пролета соленоида. Вытеснение магнитного поля из сверхпроводящего стержня связано с появлением индукционных токов на поверхности стержня. В соответствии с правилом Ленца эти индукционные токи и обуславливают торможение стержня.

В данном случае разумно воспользоваться законом сохранения энергии. Работа по созданию индукционных токов A равна энергии магнитного поля W в объеме, занимаемом стержнем

$$A = W = \frac{B^2}{2\mu_0} Sl.$$

В силу закона сохранения энергии эта работа совершается за счет изменения кинетической энергии стержня, т.е.

$$\frac{B^2}{2\mu_0} Sl = \frac{mv^2}{2}.$$

Откуда находим

$$v = B \sqrt{\frac{Sl}{\mu_0 m}}.$$

4.2. Электрические колебания

При протекании изменяющегося со временем тока, вообще говоря, в каждый момент времени ток оказывается не одинаковым на разных участках цепи (это происходит из-за того, что электромагнитные возмущения распространяются хотя и с очень большой, но конечной скоростью). Для того чтобы можно было пользоваться законом Ома, необходимо выполнение условия квазистационарности: $l \ll cT$, где l – длина цепи; c – скорость распространения электромагнитных возмущений (очень часто она совпадает со скоростью света); T – период возмущений. При невыполнении условия квазистационарности (это происходит при очень больших частотах, или очень длинных цепях), законом Ома уже нельзя пользоваться и требуется совершенно другой подход (этому будет посвящена отдельная задача).

Как правило, электрические колебания зарождаются в так называемом колебательном контуре. Под ним обычно понимают контур, содержащий катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C . В таком контуре при отсутствии сопротивления проводников совершаются периодические колебания, при которых изменяется заряд конденсатора, напряжение на нем и ток через индуктивность. Если же сопротивление проводников $R \neq 0$, то будет происходить также преобразование электромагнитной энергии в джоулеву теплоту.

Рассмотрим общий подход к исследованию электрических колебаний на примере стандартного колебательного контура (рис. 4.7), включающего в себя кроме указанных ранее элементов генератор с ЭДС \mathcal{E} .

Выберем положительное направление обхода контура (для применения закона Ома), например, по часовой стрелке. Пусть в некоторый момент времени нижняя обкладка конденсатора (2) имеет заряд $q > 0$. Тогда за время dt заряд получит приращение $dq > 0$:

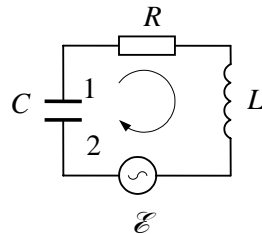


Рис. 4.7

$$dq = Idt, \quad (1)$$

где I – мгновенное значение силы тока (при другом выборе направления обхода контура в соотношении (1) следовало бы сменить знак перед I).

Запишем закон Ома для участка цепи 1RL2 (внутри конденсатора ток не течет!)

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s + \mathcal{E}, \quad (2)$$

где $\mathcal{E}_s = -LdI/dt$ – ЭДС самоиндукции; $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$ – разность потенциалов на обкладках конденсатора. С учетом (1) уравнение (2) можно представить в виде

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (3)$$

Данное уравнение называется уравнением колебательного контура. В общем случае – это линейное дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Найдя из него функцию $q(t)$, можно в дальнейшем рассчитать напряжение на конденсаторе $U_C = q/C$, силу тока и др. Если ввести обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \beta = \frac{R}{2L},$$

то уравнение (3) приводится к стандартному уравнению колебаний

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}(t)}{L}, \quad (4)$$

здесь ω_0 – собственная частота контура, β – коэффициент затухания.

При $\mathcal{E} = 0$ колебания принято называть собственными или свободными, при $R = 0$ они являются и незатухающими. Следует заметить, что уравнение (4) можно получить и из энергетических соображений. И, как правило, задачи на электрические колебания сводятся к решению уравнения (4) в его различных частных случаях.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные случаи общего подхода к исследованию электрических колебаний.

4.2.1. Конденсатор с утечкой. Колебательный контур содержит катушку с индуктивностью L и конденсатор с утечкой. Емкость конденсатора C , его активное сопротивление R . Найти частоту затухающих колебаний такого контура, пренебрегая сопротивлением катушки.

Наличие утечки означает, что небольшая часть тока I' , поступающего на одну из обкладок конденсатора, проходит

через диэлектрик внутри конденсатора на другую обкладку (рис. 4.8). Запишем закон Ома для участка цепи $-q$, L , $+q$:

$$L \frac{dI}{dt} + U = 0, \quad (1)$$

где U – напряжение на конденсаторе, определяемое мгновенным значением заряда конденсатора

$$q = CU. \quad (2)$$

Кроме того, значение U можно связать с протекающим внутри конденсатора током I' :

$$U = RI'. \quad (3)$$

При наличии утечки скорость изменения заряда конденсатора определяется разностью токов I и I' :

$$\frac{dq}{dt} = I - I'. \quad (4)$$

Для определения частоты колебаний нам необходимо иметь явное выражение для какой-либо изменяющейся величины: тока, заряда либо напряжения. Попробуем найти, например, закон изменения напряжения на конденсаторе U . Исключая из системы уравнений (1)–(4) величины q , I и I' , нетрудно получить дифференциальное уравнение для напряжения на конденсаторе

$$\ddot{U} + 2\beta\dot{U} + \omega_0^2 U = 0, \quad (5)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \beta = \frac{1}{2RC}. \quad (6)$$

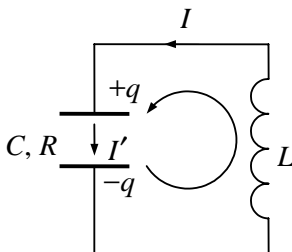


Рис. 4.8

Хорошо известно, что решением уравнения (5) при $\beta < \omega_0$ является функция

$$U(t) = U_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \alpha),$$

где ω – искомая частота затухающих колебаний,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}.$$

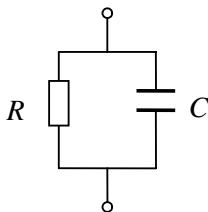


Рис. 4.9

Это выражение является ответом задачи и существенно отличается от частоты затухающих колебаний для контура с активным сопротивлением и конденсатора без утечки:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что конденсатор с утечкой можно смоделировать как параллельное соединение идеального конденсатора и сопротивления R (рис. 4.9).

4.2.2. Треугольный колебательный контур. Электрический контур представляет собой треугольник, каждая сторона которого содержит емкость C , а вершины соединены с общей центральной точкой индуктивностями. Пренебрегая сопротивлением и взаимной индуктивностью, найти частоту возможных колебаний.

Как выглядит контур, ясно из условия задачи. Неясным остается только один вопрос, в какой последовательности чередуются знаки заряда конденсаторов? Это, как мы увидим, определяет характер протекания токов при разряде конденсаторов. Так как все индуктивности, как и конденсаторы, одинаковы, то существует только две физически различные последовательности знаков заряда конденсаторов (рис. 4.10).

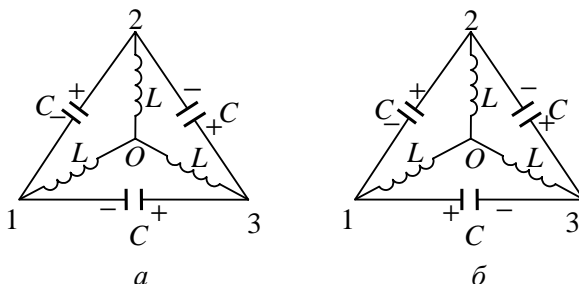


Рис. 4.10

В ситуации, отображенной на рис. 4.10, б, ни одна индуктивность не «работает», т.е. через них не протекает ток. Ток течет только по проводам, соединяющим разноименно заряженные обкладки соседних конденсаторов. В такой схеме ни о каких колебаниях не может идти и речи. В ситуации же, отображенной на рис. 4.10, а,

не «работает» только одна индуктивность между точками O и 2. По оставшимся двум индуктивностям будет протекать ток. Если убрать «неработающую» индуктивность, то мы придем к довольно простой схеме обычного колебательного контура (рис. 4.11).

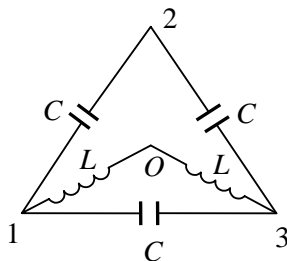


Рис. 4.11

Емкость такого контура $C' = 3C/2$, а индуктивность $L' = 2L$ (соединение индуктивностей мы рассматривали в задаче 4.1.6). Таким образом, частота колебаний в таком контуре

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{3LC}}.$$

4.2.3. Контур с индуктивной связью. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью C и соленоид с индуктивностью L_1 (рис. 4.12). Соленоид индуктивно связан с короткозамкнутой катушкой, имеющей индуктивность L_2

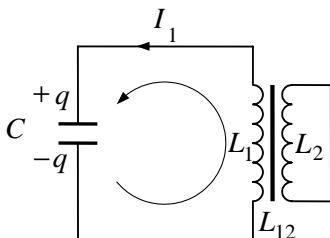


Рис. 4.12

и пренебрежимо малое активное сопротивление. Их взаимная индуктивность L_{12} . Найти собственную частоту данного колебательного контура.

Казалось бы, что можно сразу воспользоваться формулой $\omega = 1/\sqrt{LC}$, где под L понимается значение L_1 . Но это не со-

всем так. Поведение индуктивности определяется не только ее собственными параметрами, но и окружением. В данном случае катушка L_1 имеет индуктивную связь с катушкой L_2 . И тогда возникает вопрос, а чему же равна эффективная индуктивность контура? Рассмотрим более подробно характер протекания тока в контуре CL_1 . Запишем для выбранного направления обхода этого контура закон Ома:

$$-\frac{q}{C} + \mathcal{E}_{s1} + \mathcal{E}_{i1} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\mathcal{E}_{s1} = -L_1 dI_1 / dt$ – ЭДС самоиндукции, определяемая скоростью изменения тока I_1 ; $\mathcal{E}_{i1} = -L_{12} dI_2 / dt$ – ЭДС взаимной индукции, определяемая скоростью изменения тока в контуре, содержащем L_2 . Значение $I_1 = dq / dt$. Таким образом, уравнение (1) можно записать как

$$-\frac{q}{C} - L_1 \ddot{q} - L_{12} \dot{I}_2 = 0. \quad (2)$$

В данном уравнении присутствуют две неизвестные функции $q(t)$ и $I_2(t)$. Значит, нужно еще одно уравнение их связывающее. Для этого запишем закон Ома для короткозамкнутого контура, содержащего L_2 :

$$\mathcal{E}_{s2} + \mathcal{E}_{i2} = 0, \quad (3)$$

где $\mathcal{E}_{s2} = -L_2 dI_2 / dt$ – ЭДС самоиндукции, а $\mathcal{E}_{i2} = -L_{12} dI_1 / dt$ – ЭДС взаимной индукции. Таким образом, уравнение (3) будет выглядеть как

$$-L_2 \dot{I}_2 - L_{12} \ddot{q} = 0 \quad (4)$$

(мы учли, что $I_1 = \dot{q}$). Исключая из уравнений (2) и (4) значение I_2 , приходим к дифференциальному уравнению относительно $q(t)$:

$$\ddot{q} \left(L_1 - \frac{L_{12}^2}{L_2} \right) + \frac{q}{C} = 0.$$

Отсюда сразу видно, что эффективная индуктивность первого контура равна $L_1 - L_{12}^2 / L_2$, поэтому частота его колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{L_2}{(L_1 L_2 - L_{12}^2) C}}.$$

4.2.4. Контур в магнитном поле. Катушка колебательного контура с индуктивностью L помещена между полюсами электромагнита, создающего в ней постоянный магнитный поток Φ_0 . Конденсатор емкостью C вначале не заряжен. Активное сопротивление контура равно нулю. В момент времени $t=0$ магнитное поле выключается. Время выключения мало по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти зависимость от времени тока в контуре.

Так как время выключения магнитного поля очень мало, то появившийся индуктивный ток еще не успеет зарядить конденсатор. Поэтому согласно закону Ома

$$RI = -\frac{d\Phi}{dt} - L\frac{dI}{dt}.$$

В нашем случае $R=0$, значит, $\dot{\Phi} + L\dot{I} = 0$. Интегрируя это уравнение, получаем $\Phi_0 = LI_0$, где I_0 – значение начального тока сразу после выключения поля. Дальнейший процесс изменения тока будет описываться стандартным уравнением

$$0 = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt}, \quad (1)$$

решение которого относительно тока имеет вид

$$I(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Здесь I_m – максимальный ток; α – начальная фаза; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Значения I_m и α нетрудно найти из начальных условий

$$I(0) = I_0, \quad \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

(второе условие вытекает из уравнения (1), так как при $t=0$ заряд конденсатора был еще равен нулю). Из этих условий находим $\alpha = 0$ и $I_m = I_0$. Таким образом, закон колебаний тока будет иметь вид

$$I(t) = I_0 \cos \omega_0 t = \frac{\Phi_0}{L} \cos \left(\frac{t}{\sqrt{LC}} \right).$$

4.2.5. Контур с постоянной ЭДС. Найти закон изменения тока и напряжения на конденсаторе после замыкания ключа K в схеме, изображенной на рис. 4.13.

Запишем закон Ома для участка цепи $-q, \mathcal{E}, +q$ при указанном направлении обхода: $-q/C + \mathcal{E} - LdI/dt = 0$. Или

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}.$$

Решение данного неоднородного дифференциального уравнения, как легко убедиться, имеет вид

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) + C\mathcal{E},$$

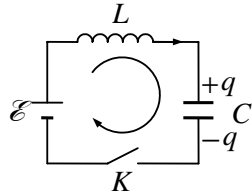


Рис. 4.13

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а значения постоянных q_0 и α находятся из начальных условий $q(0) = 0$ и $\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = I(0) = 0$ (вначале конденсатор был не заряжен и тока в цепи еще не было). Следовательно, для определения q_0 и α имеем систему уравнений

$$q_0 \sin \alpha + C\mathcal{E} = 0,$$

$$q_0 \omega_0 \cos \alpha = 0.$$

Отсюда сразу следует $\alpha = \pi/2$, $q_0 = -C\mathcal{E}$. Таким образом, закон изменения заряда конденсатора имеет вид

$$q(t) = C\mathcal{E} (1 - \cos \omega_0 t).$$

Теперь можно найти как закон изменения тока

$$I(t) = \dot{q} = C\mathcal{E} \omega_0 \sin \omega_0 t,$$

так и напряжения на конденсаторе

$$U = \frac{q}{C} = \mathcal{E} (1 - \cos \omega_0 t).$$

Причем максимальный ток в контуре

$$I_{\max} = C\mathcal{E} \omega_0 = \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}},$$

а максимальное напряжение на конденсаторе

$$U_{\max} = 2\mathcal{E}.$$

4.2.6. Установление колебаний. Катушку с индуктивностью L и активным сопротивлением R подключили в момент времени $t=0$ к источнику напряжения $U = U_m \cos \omega t$

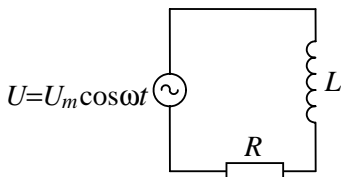


Рис. 4.14

(рис. 4.14). Найти закон изменения тока в катушке.

Запишем закон Ома для данного контура $RI = U - LdI/dt$, или

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (1)$$

Решение этого уравнения складывается из двух слагаемых. Первое слагаемое – общее решение однородного уравнения

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{R}{L}I_1 = 0.$$

Оно, как мы знаем, имеет вид

$$I_1 = A \exp\left(-\frac{R}{L}t\right),$$

где A – произвольная постоянная, которую можно найти из начального условия $I(0) = 0$. Второе слагаемое – частное решение неоднородного уравнения. Предположим, что оно, как и внешнее напряжение, также имеет гармонический вид (это разумное предположение):

$$I_2 = B \cos(\omega t - \varphi),$$

где B – амплитуда гармонической части тока; φ – сдвиг фазы колебаний тока относительно внешнего напряжения. Их можно определить после подстановки выражения (2) в уравнение (1). Проделав это, приходим к равенству

$$B\omega\cos(\omega t - \varphi + \pi/2) + B\frac{R}{L}\cos(\omega t - \varphi) = \frac{U_m}{L}\cos\omega t. \quad (3)$$

Один из эффективных методов решения подобных уравнений сводится к применению векторной диаграммы. Напомним, что выражению вида $A\cos(\omega t + \alpha)$ можно сопоставить вектор с длиной A , составляющий угол α с выбранной осью X . В нашем случае в качестве оси X удобно взять ось внешнего напряжения. Тогда каждый член в уравнении (3) можно отобразить с помощью векторной диаграммы, представленной на рис. 4.15. Из нее сразу следует

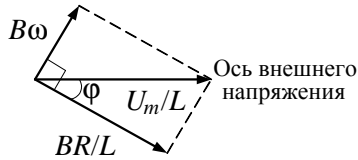


Рис. 4.15

$$B = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}. \quad (4)$$

Таким образом, полное решение уравнения (1) имеет вид

$$I(t) = A \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi).$$

Осталось только найти постоянную A . Из условия $I(0) = 0$ находим

$$A = -\frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos \varphi.$$

И окончательно

$$I(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left[\cos(\omega t - \varphi) - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \cos \varphi \right], \quad (5)$$

где значение φ определяется условием (4).

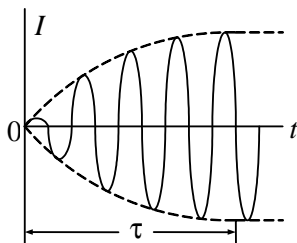


Рис. 4.16

Качественно поведение тока отображено на рис. 4.16. Время установления колебаний τ порядка R/L . При достаточно больших временах второе слагаемое в (5) становится пренебрежимо малым, и мы приходим к установившимся колебаниям $I(t) \propto \cos(\omega t - \varphi)$.

4.2.7. Сглаживающий фильтр. На рис. 4.17 показана простейшая схема сглаживающего фильтра. На вход подается напряжение $U = U_0(1 + \cos \omega t)$. Найти выходное напряжение $U'(t)$.

Для участка цепи $1UR2$ закон Ома запишется как

$$RI = U - \frac{q}{C}, \quad (1)$$

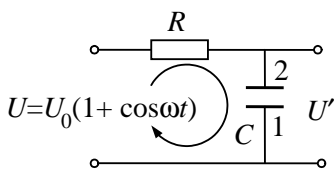


Рис. 4.17

где q — мгновенное значение заряда конденсатора. Отношение q/C как раз и является искомым сглаженным напряжением. С учетом $I = dq/dt$ перепишем уравнение (1):

$$q + RC\dot{q} = CU_0(1 + \cos \omega t). \quad (2)$$

Как и в предыдущей задаче, решение данного неоднородного дифференциального уравнения состоит из двух слагаемых. Очевидно, общее решение однородного уравнения имеет экспоненциально затухающий вид и им можно пренебречь при достаточно больших временах. Поэтому будем искать только частное решение уравнения (2). Разумно его взять в виде

$$q = CU_0 [1 + A \cos(\omega t - \varphi)], \quad (3)$$

где ACU_0 – амплитуда гармонической части заряда (величина A нам пока неизвестна); φ – сдвиг фазы колебаний заряда относительно внешнего напряжения. Наличие постоянной части в (3) очевидно, так как при постоянном входном напряжении оно все «сядет» на конденсаторе. Подставляя (3) в (2), приходим к тригонометрическому равенству

$$A \cos(\omega t - \varphi) - RCA\omega \sin(\omega t - \varphi) = \cos \omega t.$$

Представим на рис. 4.18 для него векторную диаграмму, заменив $\sin(\omega t - \varphi)$ на $\cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$. Из данной диаграммы находим

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \omega RC.$$

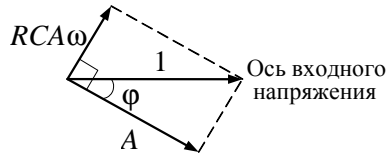


Рис. 4.18

Таким образом, напряжение на конденсаторе будет иметь вид

$$U' = \frac{q}{C} = U_0 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \right].$$

Отсюда следует, что увеличение значения RC приводит к уменьшению амплитуды переменной составляющей напряжения на выходе по сравнению с постоянной составляющей напряжения на входе.

4.2.8. Правила Кирхгофа для переменных синусоидальных токов. При протекании переменных токов по разветвленным цепям, содержащим индуктивности, емкости и сопротивления, бывает удобно вместо закона Ома приме-

нять правила Кирхгофа аналогично тому, как это делается для постоянных токов.

Первое правило Кирхгофа применимо без всяких изменений. Это следует из того, что точки схождения проводов (узлы) обладают пренебрежимо малыми емкостями и в них не накапливаются заряды. Поэтому в любой момент времени сумма токов, подходящих к узлу, должна быть равна сумме токов, отходящих от узла.

Для того чтобы понять, как будет работать второе правило Кирхгофа, рассмотрим метод, отличающийся от метода векторных диаграмм только по форме. В этом методе колеблющаяся величина представляется уже не вектором, а комплексным числом. Пусть, например, колеблющаяся величина x изменяется по закону $x = A \cos(\omega t + \alpha)$. Тогда, используя известную формулу Эйлера $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ($i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица), величину x можно представить как вещественную часть выражения

$$\operatorname{Re} \left[A e^{i(\omega t + \alpha)} \right] = A \cos(\omega t + \alpha) = x.$$

Условимся опускать знак взятия вещественной части Re и писать просто

$$x = A e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Это символическое равенство не следует понимать буквально. Его понимают в том смысле, что величина x равна вещественной части выражения, стоящего в этом равенстве справа. Модуль этого комплексного выражения A равен амплитуде колебания, а его аргумент $\omega t + \alpha$ – фазе.

Рассмотрим теперь в разветвленной цепи какой-либо замкнутый контур (рис. 4.19). Применим к этому контуру теорему о циркуляции напряженности электрического поля при наличии переменного магнитного поля

$$\oint E_l dl = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

При выполнении условия квазистационарности данная теорема запишется в виде

$$\sum_k \left(I_k R_k + \frac{q_k}{C_k} - \mathcal{E}_k \right) = -\sum_k L_k \frac{dI_k}{dt}. \quad (1)$$

Пусть электродвижущие силы \mathcal{E}_k меняются во времени по синусоидальному закону, т.е. в комплексном виде $\mathcal{E}_k \propto \exp(i\omega t)$. Тогда при установившихся процессах токи I_k будут меняться во времени аналогично с некоторым сдвигом фазы $I_k \propto \exp[i(\omega t + \alpha)]$. В этом случае с учетом соотношений

$$\frac{dI_k}{dt} = i\omega I_k, \quad q_k = \int I_k dt = -\frac{i}{\omega} I_k$$

уравнение (1) примет вид

$$\sum_k I_k \left(R_k + i\omega L_k - \frac{i}{\omega C_k} \right) = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (2)$$

В сокращенном виде равенство (2) можно записать как

$$\sum Z_k I_k = \sum \mathcal{E}_k, \quad (3)$$

где величины Z_k называются комплексными сопротивлениями (импедансами). Для чисто омического сопротивления $Z = R$ – активное сопротивление; для катушки индуктивности $Z = i\omega L$ – индуктивное сопротивление; для конденсатора $Z = -i/\omega C$ – емкостное сопротивление. Равенство (3) и есть

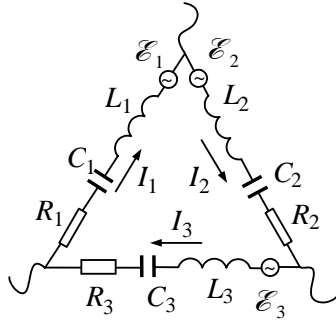


Рис. 4.19

второе правило Кирхгофа для переменных синусоидальных токов.

Все результаты, полученные формальным применением правил Кирхгофа к постоянным токам, в комплексной форме сохраняются и для установившихся синусоидальных токов. В частности, при параллельном соединении комплексных сопротивлений Z_k результирующее сопротивление Z определяется как

$$\frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_k}. \quad (4)$$

Применение комплексной формы позволяет часто избежать громоздких формул и делает сами формулы более общими и обозримыми. Следует только помнить, что в полученных окончательных выражениях должна быть оставлена только вещественная часть.

Рассмотрим для примера подключенные к генератору переменного напряжения с ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, соединенные параллельно индуктивность и конденсатор (рис. 4.20). По первому правилу Кирхгофа

$$I + I_2 = I_1. \quad (5)$$

По второму правилу для контура LC получаем

$$i\omega L \cdot I_1 - \frac{i}{\omega C} I_2 = 0, \quad (6)$$

а для контура $\mathcal{E}L$

$$\mathcal{E} = i\omega L \cdot I_1. \quad (7)$$

Из системы уравнений (5)–(7) трудно найти как значение тока I , под-

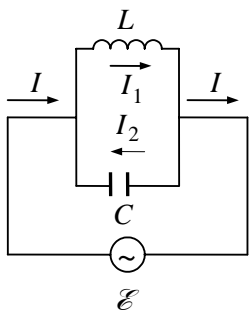


Рис. 4.20

питающего колебательный контур LC , так и токи I_1 и I_2 . В частности,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{i\omega L} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right), \quad (8)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Найдем вещественную часть выражения (8). С помощью формулы Эйлера получаем

$$I = \operatorname{Re} \left[\frac{\mathcal{E}_0 \exp(i\omega t)}{i\omega L} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right] = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \sin \omega t.$$

При $\omega = \omega_0$ ток I обращается в нуль и, следовательно, $I_1 = I_2$. Это означает, что колебания в контуре становятся совершенно независимыми от внешнего генератора, т.е. для поддержания колебаний генератор фактически не нужен. Причина здесь в том, что при $\omega = \omega_0$ (т.е. при $\omega L = 1/\omega C$) комплексное сопротивление контура Z обращается в бесконечность и колебания в нем носят резонансный характер. Это сразу следует из формулы (4). В этом случае колебательный контур становится для тока генератора абсолютно непроницаемым! Возникает законный вопрос, как в колебательном контуре могли появиться токи $I_1 = I_2$, если его сопротивление переменному току бесконечно велико? Дело здесь в том, что соотношения, которыми мы пользовались, относятся только к установившимся состояниям. Эти состояния устанавливаются в результате переходных процессов, во время которых ток во внешней цепи не равен нулю. В это время в колебательный контур поступают заряды и токи, идет накопление электромагнитной энергии. Это происходит до тех пор, пока в любой момент времени напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности не уравниваются внешним приложенным напряжением. Тогда дальнейшее поступление

новых зарядов и токов в колебательный контур прекратится и начнут совершаться свободные колебания, как если бы контур был автономной колебательной системой. Разумеется, незатухающие колебания в колебательном контуре без поступления энергии извне возможны только при отсутствии омического (активного) сопротивления контура.

4.2.9. Колебания в двухпроводной линии. Рассмотрим теперь задачу о распространении электрических зарядов в длинной двухпроводной линии, в которой с помощью генератора могут возбуждаться переменные токи высокой частоты (система Лехера). Связь проводов с генератором может быть либо емкостной, либо индуктивной. Примем, что по отношению к поперечным размерам системы условие квазистационарности выполнено, а по отношению к продольным размерам – нет (для частот около сотни мегагерц длина линии составляет несколько метров). Поэтому электрические токи в проводах не квазистационарны, сила тока I , а также линейная плотность заряда q существенно изменяются вдоль проводов.

Пусть для конкретности данная двухпроводная линия является коаксиальным кабелем, не обладающим активным сопротивлением (рис. 4.21).

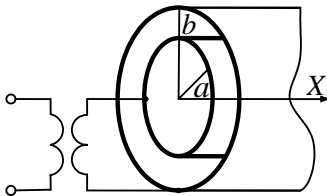


Рис. 4.21

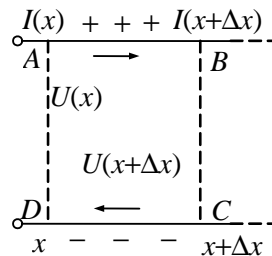


Рис. 4.22

Схематично данная линия отображена на рис. 4.22. При выполнении условия квазистационарности по отношению к поперечным размерам можно ввести емкость и индуктивность единицы длины – C_0 и L_0 . Так как ток I изменяется со временем, то наличие индуктивности вызовет падение напряжения между проводами, различное вдоль оси X . Для расчета $U(x)$ выделим небольшой контур $ABCD$ (см. рис. 4.22) и применим к нему основной закон электромагнитной индукции $\oint E_l dl = -d\Phi/dt$. Интеграл по контуру равен $U(x + \Delta x) - U(x)$ (напомним, что сами провода не обладают активным сопротивлением). Производная же $d\Phi/dt$ будет равна $L_0 \Delta x \cdot dI/dt$. Таким образом,

$$U(x + \Delta x) - U(x) \approx -L_0 \Delta x \frac{\partial I}{\partial t}.$$

С учетом приближенного равенства $U(x + \Delta x) - U(x) \approx \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x$ последнее соотношение принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (1)$$

Так как $I(x) \neq I(x + \Delta x)$, то на участке Δx появляется заряд $q = C_0 \Delta x U$. Скорость изменения этого заряда $dq/dt = C_0 \Delta x \cdot dU/dt$ должна быть равна разности токов $I(x) - I(x + \Delta x) \approx -dI/dx \cdot \Delta x$. Таким образом,

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) мы поставили знаки частных производных, подчеркивая, что значения тока и напряжения зависят от двух переменных x и t . Эти уравнения называются основными уравнениями двухпроводной линии передачи.

Объединяя их, нетрудно получить уравнения, описывающие процессы распространения тока и напряжения вдоль проводов

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} &= \frac{1}{C_0 L_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{1}{C_0 L_0} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}.\end{aligned}\tag{3}$$

Уравнения (3) являются типично волновыми уравнениями, т.е. в однородной передающей линии напряжения и токи распространяются вдоль линии как волна со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Если линия бесконечна, то вдоль нее распространяется бегущая волна. Из механики волновых процессов известно, что в бегущей волне выполняется равенство плотностей кинетической и потенциальной энергии. Здесь же выполняется равенство

$$\frac{1}{2} L_0 I^2 = \frac{1}{2} C_0 U^2,$$

из которого следует

$$U = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} I.$$

Это соотношение похоже на закон Ома, но аналогия чисто внешняя, так как здесь U – напряжение между проводами, т.е. вдоль прямой, перпендикулярной току. В законе же Ома речь идет о напряжении вдоль провода, по которому течет ток. Величина

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

называется волновым сопротивлением линии.

Найдем теперь скорость распространения волны тока и напряжения вдоль коаксиального кабеля. Ранее мы уже находили его емкость и индуктивность

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a}.$$

Тогда

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c.$$

Иначе говоря, вдоль коаксиального кабеля электрические колебания распространяются в виде волны со скоростью света. Если линия не бесконечна (свободные концы, либо они закорочены), то происходит отражение волны и появляется стоячая волна с пучностями и узлами тока и напряжения.

4.3. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях

При движении частицы с зарядом q и массой m в электрическом и магнитном полях на нее действует сила Лоренца \vec{F} , которая складывается из кулоновской силы $\vec{F}_k = q\vec{E}$ и магнитной $\vec{F}_m = q[\vec{v}\vec{B}]$:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}].$$

Само движение подчиняется второму закону Ньютона, который при релятивистских скоростях имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \vec{F}.$$

В общем случае, когда электрические и магнитные поля неоднородны и изменяются со временем, движение частиц носит весьма сложный и запутанный характер. Проинтегри-

ровать уравнения движения в аналитическом виде удастся не всегда. Но если магнитное поле сильное (по сравнению с электрическим), а его изменения в пространстве и времени достаточно медленные, то ситуация значительно упрощается. Ну и наконец, если поля стационарные и однородные, то задача, как правило, становится совсем простой. В этом случае иногда бывает удобно перейти в другую инерциальную систему отсчета, в которой можно исключить электрическое поле и исследовать движение частицы только в магнитном поле. Связано это с тем, что при переходе от одной системы отсчета к другой поля \vec{E} и \vec{B} определенным образом преобразуются. Законы этих преобразований устанавливаются в специальной теории относительности. Если K' -система движется относительно K -системы со скоростью $v_0 \ll c$, то поля \vec{E}' и \vec{B}' связаны с полями \vec{E} и \vec{B} следующим образом:

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}_0 \vec{B}], \quad \vec{B}' = \vec{B} - [\vec{v}_0 \vec{E}] / c^2. \quad (1)$$

Первая из этих формул получается достаточно просто. Пусть в K -системе в некоторый момент времени t заряд q имеет скорость \vec{v}_0 . На него действует сила $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}_0 \vec{B}]$. Если перейти в K' -систему, движущуюся относительно K -системы со скоростью \vec{v}_0 , то в ней исчезает магнитная сила и остается только кулоновская сила $\vec{F}' = q\vec{E}$. Так как при $v_0 \ll c$ сила инвариантна ($\vec{F}' = \vec{F}$), то приходим к первой из формул в (1). Кроме того, для нерелятивистских частиц можно считать, что $\vec{B}' = \vec{B}$.

Рассмотрим для примера движение заряда в скрещенных однородных и стационарных электрическом и магнитном полях. Пусть в момент времени $t = 0$ частица с удельным заря-

дом q/m находится в начале координат. В это время включаются взаимно перпендикулярные поля \vec{E} и \vec{B} (рис. 4.23). Описать дальнейшее нерелятивистское движение частицы.

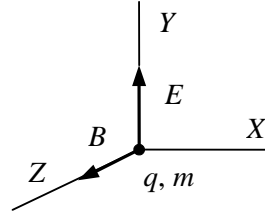


Рис. 4.23

Нетрудно сообразить, что ее движение будет происходить все время в плоскости XY . Конечно, можно последовательно проинтегрировать записанный в проекциях второй закон Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}].$$

Однако это достаточно утомительная задача, поэтому попробуем перейти в такую K' -систему отсчета, в которой будет наблюдаться только магнитное поле. Из преобразований (1) следует, что электрическое поле исчезает в системе отсчета, движущейся со скоростью \vec{v}_0 , удовлетворяющей соотношению $\vec{E} = -[\vec{v}_0\vec{B}]$. Отсюда видно, что движение частицы будет наиболее простым, если вектор \vec{v}_0 направить вдоль оси X . Итак, если перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью $v_0 = E/B$ в направлении оси X , поле \vec{E}' обращается в нуль, а так как $v_0 \ll c$, то магнитное поле остается прежним.

В новой системе отсчета частица будет двигаться только в магнитном поле перпендикулярно вектору \vec{B} , т.е. по окружности радиусом R , который можно найти из уравнения движения

$$\frac{mv_0^2}{R} = qv_0B.$$

Таким образом, частица движется равномерно со скоростью v_0 по окружности в K' -системе, которая перемещается

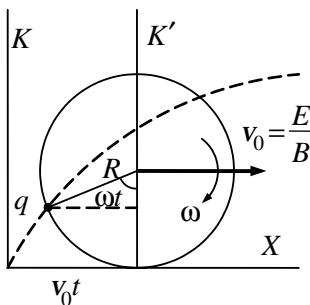


Рис. 4.24

в направлении оси X также со скоростью $v_0 = E/B$. Такое циклоидальное движение рассматривалось нами ранее (см. часть 1, подразд. 3.1) и его можно описать как движение точки обода колеса радиусом R , катящегося без проскальзывания с угловой скоростью $\omega = v_0/R = qB/m$ (рис. 4.24, пунктирной линией отражена траектория частицы).

Координаты частицы q в момент времени t находятся как

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t - R \sin \omega t = a(\omega t - \sin \omega t), \\ y(t) &= R - R \cos \omega t = a(1 - \cos \omega t). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $a = mE/qB^2$, а значение $\omega = qB/m$ называется циклотронной частотой. Уравнения (2) описывают так называемый электрический дрейф частицы, а скорость $\vec{v}_0 = [\vec{E}\vec{B}]/B^2$ — скорость дрейфа.

4.3.1. Преломление электронного пучка. Электроны, движущиеся со скоростью v_1 , переходят из области электрического поля с потенциалом ϕ_1

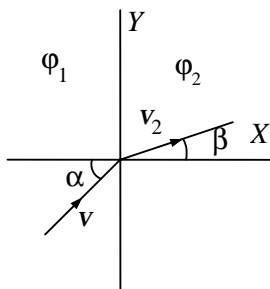


Рис. 4.25

в область с потенциалом ϕ_2 . Под каким углом к нормали к границе раздела областей будет двигаться пучок, если он подходит к ней под углом α ?

Выберем направление нормали к границе раздела за ось X (рис. 4.25). Преломление электронного пучка происходит из-за того,

что в направлении, перпендикулярном границе раздела областей с разными потенциалами, т.е. вдоль оси X действует сила. Эта сила изменяет только составляющую скорости v_x , но не изменяет составляющую v_y . Воспользуемся законом сохранения энергии для одиночного электрона:

$$\frac{mv_{1x}^2}{2} + \frac{mv_{1y}^2}{2} - e\varphi_1 = \frac{mv_{2x}^2}{2} + \frac{mv_{2y}^2}{2} - e\varphi_2,$$

где величины, помеченные индексом 1, относятся к первой области, а индексом 2 – ко второй области. Так как $v_{1y} = v_{2y}$, то приходим к более простому равенству

$$\frac{mv_{1x}^2}{2} - e\varphi_1 = \frac{mv_{2x}^2}{2} - e\varphi_2. \quad (1)$$

Из рис. 4.25 следует, что $\operatorname{tg} \beta = v_{2y} / v_{2x}$. Найдем v_{2x} из (1):

$$v_{2x} = v_{1x} \sqrt{1 + \frac{2e(\varphi_2 - \varphi_1)}{mv_{1x}^2}}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_{2y}}{v_{1x} \sqrt{1 + \frac{2e(\varphi_2 - \varphi_1)}{mv_{1x}^2}}}.$$

И так как $v_{2y} / v_{1x} = \operatorname{tg} \alpha$, а $v_{1x} = v \cos \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \left[1 + \frac{2e(\varphi_2 - \varphi_1)}{mv^2 \cos^2 \alpha} \right]^{-1/2}.$$

4.3.2. Угловой разброс электронов. Узкий пучок электронов, ускоренный напряжением U , входит в плоский конденсатор параллельно его пластинам, расстояние между которыми d много меньше его длины (рис. 4.26). Каков максимальный угловой разброс электронов, если на пластины подается переменное напряжение $U_0 \sin \omega t$?

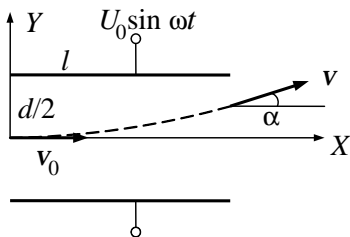


Рис. 4.26

Будем полагать, что период изменения напряжения на конденсаторе много больше времени пролета электронов вдоль пластин, т.е.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \gg \frac{l}{v_0},$$

где v_0 – начальная скорость электронов, которую можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (1)$$

В этом случае за время пролета электронов через конденсатор напряжение на нем не успевает изменить знак и происходит плавное изменение угла отклонения электронов. Значение этого угла при выходе из конденсатора можно найти из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y}{v_0}. \quad (2)$$

Запишем теперь для направления Y второй закон Ньютона

$$m\dot{v}_y = -eE_0 \sin \omega t, \quad (3)$$

где $E_0 = U_0/d$ – амплитуда напряженности электрического поля. Но интегрировать уравнение (3) будет не совсем правильным, так как момент входа электронов в конденсатор никак не синхронизирован с переменным напряжением на конденсаторе. И если мы хотим найти максимальный угловой разброс электронов, то из подаваемого на конденсатор напряжения $U = U_0 \sin \omega t$ необходимо взять временной участок, на котором электрическое поле будет максимальным.

Таким образом, необходимо интегрировать на самом деле уравнение

$$m\dot{v}_y = eE_0 \cos \omega t$$

в интервале времени от $-\frac{l}{2v_0}$ до $\frac{l}{2v_0}$. Именно на этом участке электроны испытывают максимальное возмущение. Прделав это, получаем

$$v_y = \frac{2eE_0}{m\omega} \sin \frac{\omega l}{2v_0}.$$

Тогда максимальный угловой разброс электронов с учетом формул (1) и (2) можно найти как

$$\alpha = \pm \arctg \left[\sqrt{\frac{2e}{mU}} \frac{U_0}{d\omega} \sin \left(\frac{\omega l}{2} \sqrt{\frac{m}{2eU}} \right) \right].$$

4.3.3. Расширение электронного пучка. Бесконечно длинная щель шириной d выделяет плоский пучок электронов с энергией W (рис. 4.27). На каком расстоянии x от щели ширина электронного пучка удвоится из-за кулоновского расталкивания электронов, если электронный ток, приходящийся на единицу длины щели, равен i ?

Будем полагать, что пучок расширяется достаточно медленно, так что продольное электрическое поле E_x можно не учитывать. Запишем уравнение движения в направлении оси Y для граничных электронов (на краю пучка за щелью):

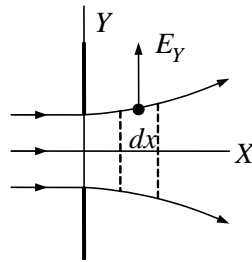


Рис. 4.27

$$m\ddot{y} = -eE, \quad (1)$$

где E – напряженность электрического поля на краю пучка. Для ее определения выделим тонкий слой электронного пучка

ка толщиной dx в направлении движения электронов и единичной ширины в направлении щели. Применим к этому слою теорему Гаусса $\oint \vec{E} d\vec{S} = q / \epsilon_0$:

$$2Edx = \frac{dq}{\epsilon_0}.$$

Здесь dq – заряд всех электронов пучка, находящихся в выделенном слое. Этот заряд можно найти как $dq = idt = idx / v$, где v – скорость электронов. Тогда

$$E = \frac{i}{2v}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем дифференциальное уравнение для границы пучка $y = y(x)$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{ei}{2mv^3} \quad (3)$$

(при этом мы воспользовались тождеством $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot v^2$).

Интегрируя уравнение (3) при начальном условии $y(0) = d/2$, получаем

$$y(x) = \frac{d}{2} - \frac{ei}{4mv^3} x^2.$$

Потребуем теперь удвоения толщины пучка при заданном x . Отсюда находим

$$x = \sqrt{\frac{2mv^3 d}{ei}},$$

где значение v находится как $v = \sqrt{2W/m}$.

4.3.4. Фокусировка в магнитном поле. Слабо расходящийся пучок нерелятивистских заряженных частиц, уско-

ренных напряжением U , выходит из точки A вдоль оси прямого соленоида. Пучок фокусируется на расстоянии l от точки A при двух последовательных значениях индукции магнитного поля – B_1 и B_2 . Найти удельный заряд q/m этих частиц.

Термин «слабо расходящийся пучок» означает, что заряды движутся в магнитном поле по сильно вытянутым винтовым линиям, у которых отличаются радиусы кривизны R , но одинаков период обращения T и шаг винтовой линии L . В этом нетрудно убедиться, обратившись ко второму закону Ньютона:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = qv_{\perp}B \rightarrow R = \frac{mv_{\perp}}{qB},$$

здесь v_{\perp} – составляющая скорости, перпендикулярная вектору \vec{B} (для разных зарядов она разная).

Найдем теперь шаг винтовой линии:

$$L = v_{\parallel}T \approx v \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m v}{qB}.$$

Здесь v_{\parallel} – составляющая скорости, параллельная вектору \vec{B} (при малых углах расхождения $v_{\parallel} \approx v$). Видно, что шаг винтовой линии для зарядов, движущихся под малыми углами к вектору \vec{B} , одинаков и определяется величиной индукции магнитного поля. Это и позволяет сфокусировать пучок в одной точке. Пусть при значении $B = B_1$ пучок сфокусировался, сделав n оборотов, т.е. $l = n \cdot L(B_1)$. Или

$$l = n \frac{2\pi m v}{qB_1}. \quad (1)$$

Увеличивая последовательно значение поля до $B = B_2$, мы снова приходим к фокусировке, но пучок уже сделает на один оборот больше, т.е.

$$l = (n+1) \frac{2\pi m v}{q B_2}. \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) значение n , приходим к соотношению

$$l(B_2 - B_1) = \frac{2\pi m v}{q}.$$

Тогда с учетом $v = \sqrt{2qU/m}$ для удельного заряда получаем

$$\frac{q}{m} = \frac{8\pi^2 U}{l^2 (B_2 - B_1)^2}.$$

4.3.5. Удаление электрона от провода. С поверхности цилиндрического провода радиусом a , по которому течет постоянный ток I , вылетает электрон с начальной скоростью v_0 , перпендикулярно поверхности провода. На какое максимальное расстояние удалится электрон от оси провода, прежде чем повернуть обратно под действием магнитного поля тока?

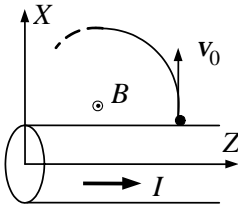


Рис. 4.28

Выберем систему координат, как показано на рис. 4.28. Очевидно, движение электрона происходит в плоскости XZ и описывается вторым законом Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q [\vec{v} \vec{B}]. \quad (1)$$

Значение индукции магнитного поля прямого провода мы знаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \beta x \quad \left(\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \right).$$

Распишем уравнение (1) в проекциях на оси X и Z :

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= q v_z \frac{\beta}{x}, \\ m \frac{dv_z}{dt} &= q v_x \frac{\beta}{x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Совместное интегрирование этих уравнений позволит нам найти, как $x(t)$ и $z(t)$, так и вид траектории $x(z)$. Нам же нужно найти только точку максимального удаления электрона от провода. В этой точке $x = x_{\max}$ и $v_z = v_0$ (магнитное поле работы не совершает!). Поэтому нам достаточно только второго уравнения в (2), которое можно представить в виде

$$m dv_z = q \beta \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе его части по x от a до x_{\max} и соответственно по v_z от нуля до v_0 :

$$m v_0 = q \beta \ln \frac{x_{\max}}{a}.$$

После потенцирования находим точку наибольшего удаления

$$x_{\max} = a \exp \left(\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 q I} \right).$$

4.3.6. Пролет электрона через конденсатор. Плоский конденсатор помещен в однородное магнитное поле с индук-

цией B , которое параллельно пластинам. Внутри конденсатора есть также электрическое поле, перпендикулярное магнитному, с напряженностью E . Перпендикулярно этим полям на равном расстоянии от пластин конденсатора влетают электроны, ускоренные напряжением U . При каком ускоряющем напряжении U электроны будут проходить через конденсатор, если его длина много больше расстояния между пластинами h ? Считать электрическое поле слабым по отношению к магнитному ($E \ll cB$, c – скорость света).

Заложенное в задаче условие $E \ll cB$ означает, что мы имеем право использовать формулы нерелятивистской динамики. Для ответа на поставленный в задаче вопрос нам необходимо, прежде всего, разобраться в характере движения электронов. В отсутствие электрического поля траекторией движения была бы окружность радиусом $R = mv/qB$ (v –

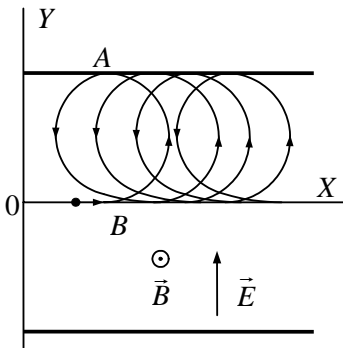


Рис. 4.29

скорость входа электрона в конденсатор). При наложении электрического поля скорость электрона в разных точках будет разная. При его перемещении вверх (рис. 4.29) она ниже, чем при перемещении вниз за счет совершения электрическим полем работы. Кроме того, в точке A силы электрического и магнитного поля действуют на электрон в одном направ-

лении, а в точке B – в разных направлениях. Оба этих обстоятельства приводят к тому, что радиус кривизны r траектории в верхней ее части уменьшается, а в нижней увеличивается. В результате окружность переходит в незамкнутую кривую, двигаясь по которой электрон медленно перемещается вправо, совершая дрейфовое движение.

Попробуем теперь описать вид траектории. Для этого обратимся ко второму закону Ньютона:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}].$$

В проекциях на оси X и Y это уравнение распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -ev_y B, \\ m \frac{dv_y}{dt} &= ev_x B - eE. \end{aligned} \quad (1)$$

Опираясь на наш качественный анализ движения электрона, предположим, что проекции его скорости имеют вид

$$v_x = b + a \cos \omega t, \quad v_y = a \sin \omega t, \quad (2)$$

где величины a, b и ω можно определить после подстановки (2) в (1) с учетом начального условия $v_x(0) = v_0$ (v_0 – скорость входа электрона в конденсатор). Прделав это, находим

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad (3)$$

$$a = v_0 - \frac{E}{B}, \quad b = \frac{E}{B}.$$

Таким образом, проекции скорости электрона изменяются как

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{E}{B} + \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \cos \omega t, \\ v_y &= \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin \omega t. \end{aligned}$$

После интегрирования с учетом начальных условий $x(0) = 0, y(0) = 0$ находим уравнение траектории в параметрическом виде:

$$x(t) = \frac{E}{B}t + \frac{1}{\omega} \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin \omega t,$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \left(v_0 - \frac{E}{B} \right) (1 - \cos \omega t),$$

где значение ω определяется выражением (3).

Заметим, что этот же результат можно получить и иначе, перейдя в систему отсчета, движущуюся вправо со скоростью $v = E/B$. В данной системе отсчета исчезает электрическое поле и остается только магнитное поле (это достаточно подробно мы рассматривали во введении к данному параграфу). Теперь мы готовы к ответу на поставленный в задаче вопрос. Один ответ очевиден. Если скорость электрона $v_0 = E/B$, то траектория является прямой линией, т.е. электрон движется равномерно и прямолинейно и без труда пройдет через конденсатор. Но есть и другой вариант. Даже двигаясь по незамкнутой кривой (см. рис. 4.29), электрон пройдет конденсатор, если выполнить условие

$$\frac{1}{\omega} \left| v_0 - \frac{E}{B} \right| \leq \frac{h}{4}.$$

Оно означает, что удвоенный радиус окружности должен быть меньше или равен полуширине конденсатора. Знак модуля здесь поставлен из-за того, что скорость электрона v_0 может быть как больше E/B , так и меньше E/B . Таким образом, двигаясь в интервале скоростей

$$\frac{E}{B} - \frac{hBe}{4m} \leq v_0 \leq \frac{hBe}{4m} + \frac{E}{B},$$

электрон не заденет пластины конденсатора, каким бы длинным он ни был. Тогда для ускоряющего напряжения U должно быть выполнено условие

$$\frac{m}{2e} \left(\frac{E}{B} - \frac{hBe}{4m} \right)^2 \leq U \leq \frac{m}{2e} \left(\frac{E}{B} + \frac{hBe}{4m} \right)^2.$$

4.3.7. Магнетрон. Магнетрон – это эвакуированный прибор, состоящий из нити накала радиусом a и коаксиального цилиндрического анода радиусом b , которые находятся в однородном магнитном поле, параллельном нити. Между нитью и анодом приложена ускоряющая разность потенциалов U . Найти значение индукции магнитного поля, при котором электроны, вылетающие с нулевой начальной скоростью из нити, будут достигать анода.

В отсутствие магнитного поля электроны в любом случае будут достигать анода, так как их движение будет прямолинейным. Включение магнитного поля приводит к искривлению траектории, и при некотором граничном значении индукции магнитного поля B электроны будут подходить к аноду со скоростью, касательной к окружности анода

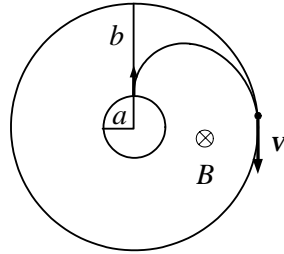


Рис. 4.30

(рис. 4.30). Для нахождения этого поля нам, естественно, нужно обратиться к уравнениям динамики движения электрона.

Это либо второй закон Ньютона $\left(\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \right)$, либо уравнение моментов $\left(\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \right)$. Как будет видно из дальнейшего,

более удобным является уравнение моментов, которое в проекции на ось Z , параллельную вектору \vec{B} , имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (1)$$

Здесь L_z – проекция момента импульса $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$; M_z – проекция момента силы $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$. Так как на электрон действует сила Лоренца $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]$, то

$$M_z = [\vec{r}\vec{F}]_z = q[\vec{r}\vec{E}]_z + q[\vec{r}[\vec{v}\vec{B}]]_z.$$

Первое слагаемое, очевидно, равно нулю, так как векторы \vec{r} и \vec{E} коллинеарны. Раскроем теперь второе слагаемое, являющееся двойным векторным произведением:

$$\begin{aligned} q[\vec{r}[\vec{v}\vec{B}]]_z &= q(\vec{v}(\vec{r}\vec{B}) - \vec{B}(\vec{r}\vec{v}))_z = \\ &= -q\vec{B}\left(\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_z = -qB\frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{dL_z}{dt} = -qB\frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2.$$

Осталось только проинтегрировать по траектории движения, помня, что в начале движения $L_z = 0$, а при касании электроном анода (т.е. при $r = b$) $L_z = bmv$. В итоге получаем

$$bmv = \frac{Be}{2}(b^2 - a^2)$$

(мы учли, что $q = -e$). Подставляя сюда значение скорости

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}},$$

находим окончательно величину индукции магнитного поля, при которой электроны еще будут достигать анода:

$$B \leq \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mU}{e}}.$$

4.3.8. Циклотрон. Заряженные частицы ускоряют так, что максимальный радиус орбиты R . Частота генератора циклотрона ν , эффективное напряжение между дуантами U . Пренебрегая зазором между дуантами и начальной энергией частиц, найти полное время ускорения частиц и приближенное значение их пути за весь цикл ускорения.

Принцип работы циклотрона, как ускорителя заряженных частиц (рис. 4.31), основан на независимости периода обращения частицы в магнитном поле от ее скорости. В задаче 4.3.4 нами были получены выражения для радиуса окружности r , по которой двигаются частицы, и периода обращения T (для нерелятивистских скоростей):

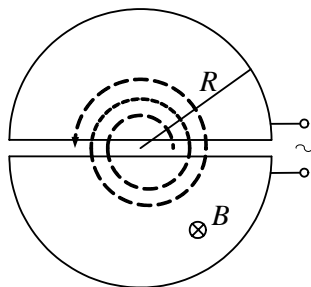


Рис. 4.31

$$r = \frac{mv}{qB}, \quad T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (1)$$

Так как на каждом обороте за время T частицы приобретают энергию $2qU$, то их полное время разгона t до окружности радиусом R можно найти как

$$t = T \cdot \frac{W}{2qU}, \quad (2)$$

где $W = mv^2/2$ – кинетическая энергия частиц, движущихся по окружности радиусом R . Подставляя в (2) значения R и T из (1), получаем

$$t = \frac{\pi R^2 B}{2U}. \quad (3)$$

Нам неизвестно значение индукции магнитного поля B , но задана частота генератора циклотрона $\nu = 1/T$, которая в силу соотношений (1) связана с B

$$B = \frac{2\pi m v}{q} . \quad (4)$$

Используя эту связь, находим время ускорения:

$$t = \frac{\pi^2 m v R^2}{q U} .$$

Несколько сложнее дело обстоит с расчетом полного пути S , так как частицы движутся по окружности радиусом r_n , который с каждым оборотом увеличивается:

$$S = \sum 2\pi r_n .$$

Здесь суммирование проводится от $n=1$ до $n=N$ – полное число оборотов. Значение N можно найти, умножая полное время t на частоту ν :

$$N = \frac{\pi \nu R^2 B}{2U} .$$

Осталось найти закон изменения радиуса r_n :

$$r_n = \frac{m v_n}{q B} .$$

На каждом последующем обороте частицы приобретают дополнительную энергию $2qU$, поэтому значение скорости на n -м обороте

$$v_n = 2\sqrt{\frac{qU}{m}} \cdot \sqrt{n} .$$

Тогда

$$S = \frac{2\pi m}{qB} 2\sqrt{\frac{qU}{m}} \sum_{n=1}^N \sqrt{n} .$$

Так как N велико, то сумму по n можно заменить интегралом

$$\sum \sqrt{n} \approx \int \sqrt{n} dn = \frac{2}{3} N^{3/2} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi \nu R^2 B}{2U} \right)^{3/2}.$$

С учетом (4) окончательно получаем

$$S \approx \frac{4\pi^3 m \nu^2 R^3}{3qU}.$$

4.3.9. Бетатрон. В индукционном ускорителе электронов – бетатроне разгон электронов совершается вихревым электрическим полем. Такой ускоритель подобен трансформатору, у которого роль вторичной обмотки из одного витка играет пучок электронов. Этот ускоритель состоит из тороидальной evacuated камеры, расположенной между полюсами электромагнита специальной формы (рис. 4.32). Изменяющееся со временем магнитное поле, созданное переменным током обмотки электромагнита, рождает вихревое электрическое поле. Это поле ускоряет электроны и одновременно удерживает их на равновесной круговой орбите. За время нарастания магнитного поля (порядка нескольких миллисекунд) электроны приобретают энергию порядка 400 МэВ и их скорость приближается к скорости света. Но для движения электронов по равновесной круговой орбите необходимо, чтобы индукция магнитного поля на этой орбите B_0 была равна половине среднего по площади орбиты значения магнитного поля $\langle B \rangle$, т.е. $B_0 = \langle B \rangle / 2$. Покажем это.

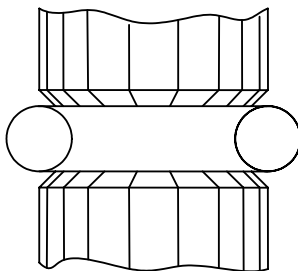


Рис. 4.32

Значение индукции магнитного поля в заданной точке B_0 можно определить из второго закона Ньютона, так как

оно частично определяет силу, действующую на электрон. Среднее же значение индукции магнитного поля $\langle B \rangle$ входит в основной закон электромагнитной индукции. Поэтому обратимся к данным законам. Пусть радиус равновесной круговой орбиты равен r_0 . Двигаться по ней со скоростью v заставляет магнитное поле с индукцией B_0 . Эти величины связаны вторым законом Ньютона, спроектированным на нормаль к орбите:

$$\frac{mv^2}{r_0} = evB_0.$$

Отсюда следует, что импульс электрона $p = mv = er_0 B_0$. Найдем теперь производную dp/dt при условии $r_0 = \text{const}$:

$$\frac{dp}{dt} = er_0 \frac{dB_0}{dt}. \quad (1)$$

Эту же производную можно найти и из второго закона Ньютона, спроектированного на касательную к орбите (в этом направлении действует вихревое электрическое поле с напряженностью E):

$$\frac{dp}{dt} = eE. \quad (2)$$

Вспомним теперь про закон электромагнитной индукции:

$$\oint E_t dl = -\frac{d\Phi}{dt},$$

в котором Φ – магнитный поток через площадь круговой орбиты. Его значение можно представить как $\Phi = \pi r_0^2 \langle B \rangle$. Тогда без учета знака получаем

$$E 2\pi r_0 = \pi r_0^2 \frac{d}{dt} \langle B \rangle.$$

Найденное отсюда значение E подставим в (2)

$$\frac{dp}{dt} = e \frac{r_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle, \quad (3)$$

и тогда из сравнения выражений (2) и (3) следует

$$\frac{d}{dt} B_0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle.$$

Это равенство может быть выполнено, в частности, если считать

$$B_0 = \frac{1}{2} \langle B \rangle.$$

Тем самым мы получили так называемое бетатронное условие. Практически оно достигается за счет применения полюсных наконечников в форме усеченных конусов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие: в 5 т. – Т. 3: Электричество. – М.: Наука, 1983. – 688 с.
2. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие для вузов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 432 с.
3. Задачи по физике: учеб. пособие / И.И. Воробьев [и др.]; под ред. О.Я. Савченко. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
4. Сборник задач по общему курсу физики: учеб. пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 2: Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В.А. Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 368 с.
5. Иродов И.Е. Электромагнетизм. – 5-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 320 с.

Учебное издание

ПАРШАКОВ Александр Николаевич

ПРИНЦИПЫ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

Часть 2. Электромагнетизм

Учебное пособие

Редактор и корректор *Н.В. Бабинова*

Подписано в печать 24.03.10. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 19,625. Тираж 100 экз. Заказ № 59/2010.

Издательство
Пермского государственного технического университета.
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.
Тел. (342) 219-80-33.