ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERNARD MALGRANGE

Intégrales asymptotiques et monodromie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 3 (1974), p. 405-430
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_3_405_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 7, 1974, p. 405 à 430.

INTÉGRALES ASYMPTOTIQUES ET MONODROMIE

PAR BERNARD MALGRANGE

1. Introduction

On rencontre, dans diverses questions, le problème suivant : soient $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, et $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$; étudier, pour $\tau \to \pm\infty$, le comportement asymptotique de l'intégrale $\mathrm{I}(\tau) = \int e^{i\tau\varphi} f\, dx_1 \ldots dx_n$.

Pour préciser ce que l'on entend par là, considérons d'abord le cas où φ n'a pas de point critique sur Supp (f), le support de f; quitte à faire une partition de l'unité, on peut alors se ramener au cas où $\varphi = x_1$; il est alors immédiat de démontrer, au moyen d'intégrations par parties successives, que I est une fonction à décroissance rapide [i. e. $\mathrm{I}(\tau) = 0(\tau^{-\mathrm{N}})$, pour tout N, $\tau \to \pm\infty$] ainsi que toutes ses dérivées; autrement dit, avec les notations de L. Schwartz, on a $\mathrm{I} \in \mathscr{S}$.

Dans le cas général, nous appellerons « comportement asymptotique » de I la classe $\tilde{\mathrm{I}}$ de I module $\mathscr{S}$; $\tilde{\mathrm{I}}$ ne dépend donc que des valeurs de φ au voisinage de son ensemble critique $\mathrm{S}(\varphi)$.

Si φ est analytique, il est facile d'obtenir un résultat plus précis : $\tilde{\mathrm{I}}$ ne dépend que de f et de ses dérivées sur $\mathrm{S}(\varphi)$; supposons en effet φ analytique, et f plate (i. e. nulle d'ordre infini) sur $\mathrm{S}(\varphi)$; comme $\mathrm{S}(\varphi)$ est défini par l'équation

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0,$$

il résulte de l'inégalité de Lojasiewicz que la fonction $f/\sum[(\partial\varphi/\partial x_i)^2]$, définie sur $\mathbf{R}^n\text{-}\mathrm{S}(\varphi)$, se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^n$, plate sur $\mathrm{S}(\varphi)$ (*voir* par exemple [24]); en particulier, on a

$$f = \sum g_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \qquad g_j \in \mathscr{C}^\infty, \qquad \text{plats sur } \mathrm{S}(\varphi);$$

en intégrant par parties, il vient

$$\mathrm{I}(\tau) = \frac{-1}{i\tau}\int e^{i\tau\varphi} \sum \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

donc $\mathrm{I}(\tau) = 0(\tau^{-1})$; en itérant, on trouve que I est à décroissance rapide; enfin, comme on a

$$\frac{d^p}{d\tau^p}\mathrm{I} = \int e^{i\tau\varphi}(i\varphi)^p f\,dx_1\ldots dx_n,$$

le même raisonnement montre que les dérivées de I sont à décroissance rapide; donc on a bien $\mathrm{I} \in \mathscr{S}$, et $\tilde{\mathrm{I}} = 0$.

En fait, on a un résultat plus précis que nous énoncerons seulement dans le cas où φ a pour seule valeur critique 0, le cas général s'y ramenant par une partition de l'unité :

THÉORÈME (1.1). — *Si* φ *est analytique, et n'a que la valeur critique* 0, *on a, pour* $\tau \to +\infty$

$$\tilde{\mathrm{I}}(\tau) = \sum_{\alpha, p, q} c_{\alpha, p, q}(f)\,\tau^{\alpha-p}(\log\tau)^q,$$

où α *parcourt* A, *ensemble fini de rationnels* < 0; $p \in \mathbf{N}$; *q est entier, avec* $0 \leqq q \leqq n-1$; *enfin la fonction* $f \to c_{\alpha,p,q}(f)$ *est une distribution de support contenu dans* $\mathrm{S}(\varphi)$.

Ce théorème se démontre aisément en se ramenant au cas où $\varphi = x_1^{p_1}\ldots x_n^{p_n}$ grâce au théorème de désingularisation de Hironaka. De ce fait, la démonstration ne donne que peu d'indications sur les valeurs de α, p, q qui interviennent effectivement, et leur signification géométrique.

Ce problème, qui semble difficile dans le cas général, se simplifie considérablement dans le cas où φ n'a que des singularités isolées : il est en effet facile, dans ce cas, de relier les (α, p, q) à la monodromie des singularités en question dans le domaine complexe; quoique cette relation soit probablement connue de certains spécialistes, elle n'est pas explicitée en détail dans la littérature. Un des buts de cet article est de combler cette lacune.

Chemin faisant, nous serons amenés à reprendre quelques points de la théorie de la connexion de Gauss-Manin des singularités isolées, notamment en donnant une méthode analytique de calcul du « nombre de Milnor », et une démonstration du « théorème de régularité » qui donne un résultat plus précis que le résultat habituel, à savoir la positivité des « exposants caractéristiques » de l'équation de Gauss-Manin.

2. Rappel sur les connexions

Nous nous limiterons au cas d'une variable; soient $\mathcal{O}$ l'espace des germes de fonc, tions holomorphes en $0 \in \mathbf{C}$, et Ω l'espace des germes de formes holomorphes en 0. Une connexion sur un $\mathcal{O}$-module E est une application $\mathbf{C}$-linéaire $\nabla : \mathrm{E} \to \mathrm{E} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega$ vérifiant- pour $f \in \mathcal{O}$, $e \in \mathrm{E}$:

$$\nabla(fe) = e \otimes df + f\,\nabla e;$$

en posant

$$\nabla f = \mathrm{D}f \otimes dt,$$

on voit qu'il revient au même de se donner $\mathrm{D} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, $\mathbf{C}$-linéaire, et vérifiant

$$\mathrm{D}(fe) = \frac{df}{dt}e + f\,\mathrm{D}e.$$

Rappelons un lemme bien connu, et d'ailleurs vrai aussi à plusieurs variables, avec la même démonstration.

LEMME (2.1). — *Si* E *est fini sur* $\mathcal{O}$, *et s'il est muni d'une connexion, il est libre.*

Soit en effet $e_1, \ldots, e_p$ un système de générateurs de E sur $\mathcal{O}$, choisis de manière que les classes e_i mod $\mathfrak{m}$ E ($\mathfrak{m}$, l'idéal maximal de $\mathcal{O}$) forment une base de E/$\mathfrak{m}$ E sur **C**. Un tel choix est possible en vertu du lemme de Nakayama. Montrons qu'il n'existe aucune relation non triviale entre les e_i : sinon, il existerait $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{O}$, avec $f_1 e_1 + \ldots + f_p e_p = 0$; dans une telle relation, on a nécessairement

$$f_1(0) = \ldots = f_p(0) = 0,$$

sinon les e_i mod $\mathfrak{m}$ E ne seraient pas libres sur **C**. Soit alors $q \geqq 1$ le plus grand entier tel que tous les f_i s'annulent à l'ordre q en 0; montrons qu'il existe une autre relation où q est remplacé par $q-1$, ce qui, par récurrence, conduira à une contradiction.

De $\sum f_i e_i = 0$, on tire

$$D(\sum f_i e_i) = \sum f_i D e_i + \sum \frac{df_i}{dt} e_i = 0;$$

on a

$$D e_i = \sum c_{ij} e_j, \qquad c_{ij} \in \mathcal{O};$$

d'où

$$\sum_i \left(\frac{df_i}{dt} + \sum f_j c_{ij} \right) e_i = 0$$

comme l'un des df_i/dt au moins ne s'annule qu'à l'ordre $q-1$, cela donne la relation cherchée.

C. Q. F. D.

REMARQUE (2.2). — Gardant les hypothèses et les notations de la démonstration précédente, notons aussi que le choix d'une base de E permet d'identifier D au système différentiel

$$(f_1, \ldots, f_p) \to \left(\frac{df_i}{dt} + \sum c_{ji} f_j \right);$$

il résulte alors du théorème de Cauchy que D est surjectif, et que son noyau est un espace vectoriel sur **C** de dimension égale à $p = \text{rang}_{\mathcal{O}}$ E.

Soit maintenant K le corps des fractions de $\mathcal{O}$; une connexion sur un K-module M sera encore définie par une application **C**-linéaire D : M $\to$ M vérifiant, pour $f \in$ K, m $\in$ M :

$$D(fm) = \frac{df}{dt} m + f\, D m;$$

en choisissant une base de K, D s'identifie à un système différentiel avec point singulier en O; rappelons que l'on parle de « point singulier régulier » ou de « connexion régulière » si l'on peut choisir la base e_i de manière que la matrice de la connexion c_i^j, définie par $\mathrm{D}\, e_i = \sum c_i^j\, e_j$ ait au plus un pôle simple.

Soient $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ deux $\mathcal{O}$-modules. Supposons donnée une application $\mathbf{C}$-linéaire $\mathrm{D} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, vérifiant, pour $e \in \mathrm{E}$, $f \in \mathcal{O}$,

$$\mathrm{D}(f e) = \frac{df}{dt} e + f\, \mathrm{D}\, e.$$

Nous dirons alors que nous avons une (E, F) connexion. Supposons que E et F soient finis sur $\mathcal{O}$, et F/E de torsion (donc F/E fini sur $\mathbf{C}$) : on a alors $\mathrm{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{K} = \mathrm{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{K}$; on peut alors définir sur $\mathrm{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{K}$ considéré comme K-module une connexion de la manière suivante. Tout d'abord, soient E^{T} et F^{T} les sous-modules de torsion de E et F; on a $\mathrm{DE}^{\mathrm{T}} \subset \mathrm{F}^{\mathrm{T}}$ puisque si $t^k e = 0$, on a

$$0 = \mathrm{D}(t^k e) = k t^{k-1} e + t^k \mathrm{D}(e) \qquad \text{d'où} \quad t^{k+1} \mathrm{D}(e) = 0;$$

par passage au quotient, D définit alors une $(\overline{\mathrm{E}}, \overline{\mathrm{F}})$ connexion $\overline{\mathrm{D}}$, avec $\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E}/\mathrm{E}^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F}/\mathrm{F}^{\mathrm{T}}$; enfin, $\overline{\mathrm{E}}$ étant libre, $\overline{\mathrm{D}}$ s'étend immédiatement en une connexion sur $\overline{\mathrm{E}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{K} = \mathrm{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{K}$.

Nous utiliserons le « théorème de l'indice analytique » suivant :

THÉORÈME (2.3). — *Soit* D *une* (E, F) *connexion; supposons* E *et* F *finis sur* $\mathcal{O}$ *et* E/F *de torsion. Alors :*

1° *Le noyau et le conoyau de* D *sont de dimension finie sur* $\mathbf{C}$.

2° *Désignant par* $\chi(\mathrm{D};\ \mathrm{E},\ \mathrm{F})$ *l'indice de* D, *c'est-à-dire* $\dim_{\mathbf{C}} \ker \mathrm{D} - \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{coker} \mathrm{D}$, *on a* $\chi(\mathrm{D};\ \mathrm{E},\ \mathrm{F}) + \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{F}/\mathrm{E} = \operatorname{rang} \mathrm{E} \ (\underset{\text{déf.}}{=} \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{K})$.

Supposons d'abord E et F libres; il existe k tel que $x^k\, \mathrm{D}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$; alors, il est démontré dans [14] que $x^k\, \mathrm{D} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ a un noyau et un conoyau de dimensions finies, et qu'on a $\chi(x^k \mathrm{D};\ \mathrm{E},\ \mathrm{E}) = p(1-k)$, avec $p = \operatorname{rang} \mathrm{E}$ d'où $\chi(x^k \mathrm{D};\ \mathrm{E},\ \mathrm{F}) + \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{F}/\mathrm{E} = p(1-\mathrm{k})$; le résultat s'en déduit immédiatement en factorisant $x^k \mathrm{D} : \mathrm{E} \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{F} \xrightarrow{x^k} \mathrm{F}$ et en utilisant l'additivité de l'indice.

Dans le cas général, on écrit le diagramme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{E}^{\mathrm{T}} & \to & \mathrm{E} & \to & \overline{\mathrm{E}} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}^{\mathrm{T}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{D}}} & & \\ 0 & \to & \mathrm{F}^{\mathrm{T}} & \to & \mathrm{F} & \to & \overline{\mathrm{F}} & \to & 0 \end{array}$$

On a

$$\chi(\mathrm{D};\ \mathrm{E},\ \mathrm{F}) = \chi(\overline{\mathrm{D}};\ \overline{\mathrm{E}},\ \overline{\mathrm{F}}) + \chi(\mathrm{D}^{\mathrm{T}};\ \mathrm{E}^{\mathrm{T}},\ \mathrm{F}^{\mathrm{T}}),$$

et comme E^{T} et F^{T} sont de dimension finie, on a

$$\chi(\mathrm{D}^{\mathrm{T}};\ \mathrm{E}^{\mathrm{T}},\ \mathrm{F}^{\mathrm{T}}) = -\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{F}^{\mathrm{T}}/\mathrm{E}^{\mathrm{T}},$$

d'où

$$\chi(\mathrm{D};\ \mathrm{E},\ \mathrm{F}) + \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{F}/\mathrm{E} = \chi(\overline{\mathrm{D}};\ \overline{\mathrm{E}},\ \overline{\mathrm{F}}) + \dim_{\mathbf{C}} \overline{\mathrm{F}}/\overline{\mathrm{E}} = \operatorname{rang} \overline{\mathrm{E}} = \operatorname{rang} \mathrm{E}.$$

3. **La connexion de Gauss-Manin d'une singularité isolée**

Nous reprendrons ici, avec essentiellement les mêmes notations, l'exposé de Brieskorn [6]. Soit φ une fonction holomorphe au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^n$, vérifiant $\varphi(0) = 0$, et ayant une singularité isolée en 0. Fixons deux nombres $0 < \eta < \varepsilon$, et notons $B_\varepsilon \subset \mathbf{C}^n$ la boule $\| x \|^2 = \sum | x_i |^2 < \varepsilon^2$, S_ε la sphère $\| x \| = \varepsilon$, $T \subset \mathbf{C}$ le disque $| t | < \eta$, et T^* la couronne $T - \{ 0 \}$; posons encore

$$X = B_\varepsilon \cap \varphi^{-1}(T), \qquad X^* = X - \varphi^{-1}(0), \qquad X(t) = \varphi^{-1}(t) \cap X \quad (t \in T);$$

pour ε et η convenables (ε assez petit, et η assez petit par rapport à ε), l'application $\varphi : X^* \to T^*$ est une fibration $\mathscr{C}^\infty$, équivalente à la fibration de Milnor [18], et indépendante de ε et η. Soit $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_T$) le faisceau des fonctions holomorphes sur X (resp. T), et Ω_X^p le faisceau des p-formes holomorphes sur X. On pose comme d'habitude

$$\Omega_{X/T}^p = \frac{\Omega_X^p}{d\varphi \wedge \Omega_X^{p-1}};$$

on note d la différentielle extérieure « absolue » $\Omega_X^p \to \Omega_X^{p+1}$, et $d_{X/T}$ (ou d quand aucune confusion n'est possible) la différentielle extérieure relative obtenue par passage au quotient : $\Omega_{X/T}^p \to \Omega_{X/T}^{p+1}$; les deux complexes ainsi obtenus sont notés $\Omega_X^\cdot$ et $\Omega_{X/T}^\cdot$. Rappelons le résultat suivant [6] :

THÉORÈME (3.1). — 1° *Les* $H^p(\varphi_* \Omega_{X/T}^\cdot)$ *sont cohérents.*

2° *La restriction de* $H^p(\varphi_* \Omega_{X/T}^\cdot)$ *à* T^* *est localement libre, et s'identifie au faisceau des sections holomorphes du fibré* $t \to H^p(X(t), \mathbf{C})$.

3° *L'application naturelle* $H^p(\varphi_* \Omega_{X/T}^\cdot)_0 \to H^p(\Omega_{X/T,0}^\cdot)$ *est un isomorphisme.*

Précisons à propos du 2° que, pour t' voisin de t, il existe un isomorphisme canonique $H^p(X(t), \mathbf{C}) \simeq H^p(X(t'), \mathbf{C})$; autrement dit le fibré en question est un « système local », ce qui permet de parler de ses sections holomorphes, et aussi de munir canoniquement le faisceau des dites sections d'une connexion (*voir* [7]); la connexion de Gauss-Manin sur $H^p(\varphi_* \Omega_{X/T}^\cdot)_0$ dont nous allons rappeler la définition est le prolongement à $t = 0$ de la connexion précédente.

Rappelons le lemme suivant :

LEMME (3.2). — *La suite*

$$0 \to \mathcal{O}_{X,0} \xrightarrow{d\varphi\wedge} \Omega_{X,0}^1 \xrightarrow{d\varphi\wedge} \dots \xrightarrow{d\varphi\wedge} \Omega_{X,0}^n$$

est exacte.

Ceci résulte du fait que, φ ayant une singularité isolée en 0, les $\partial\varphi/\partial x_i$ forment un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,0}$ (*voir* [23]).

Il résulte du lemme précédent que l'application $d\varphi \wedge : \Omega_{X,0}^p \to d\varphi \wedge \Omega_{X,0}^p$ donne, pour $p < n$ un isomorphisme $\Omega_{X/T,0}^p \to d\varphi \wedge \Omega_{X,0}^p$; comme cet isomorphisme commute (au signe près) avec la différentielle extérieure, on en déduit un isomorphisme pour tout p :

$$\mathrm{H}^p({}'\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},\,0}) \simeq \mathrm{H}^{p+1}(d\varphi \wedge \Omega^{\cdot}_{\mathrm{X},\,0}), \tag{3.3}$$

où ${}'\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},\,0}$ désigne le complexe $\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},\,0}$, avec $\Omega^{n}_{\mathrm{X/T},\,0}$ remplacé par 0.

Dans la suite de ce paragraphe, nous omettrons les indices 0 lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

Considérons alors la suite exacte de complexes

$$0 \to d\varphi \wedge \Omega^{\cdot}_{\mathrm{X}} \to \Omega^{\cdot}_{\mathrm{X}} \to \Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}} \to 0.$$

Écrivons la suite exacte de cohomologie, en tenant compte de (3.3) et du fait que $\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X}}$ est une résolution de $\mathbf{C}$; on trouve une suite exacte

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathrm{H}^0(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}} \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^0({}'\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}}) \to 0, \tag{3.4}$$

et pour $p \geqq 1$, des isomorphismes

$$\mathrm{H}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}}) \xrightarrow[\sim]{\partial} \mathrm{H}^p({}'\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}}). \tag{3.5}$$

Supposons à partir de maintenant que l'on a $n \geqq 2$, en laissant le lecteur examiner le cas $n = 1$; d'après le théorème 2.1, le rang sur $\mathcal{O}_{\mathrm{T},\,0}$ de $\mathrm{H}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}})$ est égal à $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^p(\mathrm{X}(t), \mathbf{C})$, c'est-à-dire au p-ième nombre de Betti b_p de la fibre $\mathrm{X}(t)$; montrons comment la considération de (3.4) et (3.5) permet de retrouver la valeur de b_p.

(a) Pour $p \geqq n$, on a

$$\mathrm{H}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}}) = 0$$

et aussi

$$\mathrm{H}^p({}'\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}}) = 0;$$

ces égalités sont évidentes, sauf peut-être la première, pour $p = n$; dans ce cas, on a

$$\mathrm{H}^n(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}}) = \frac{\Omega^n_{\mathrm{X/T}}}{d\Omega^{n-1}_{\mathrm{X/T}}} = \frac{\Omega^n_{\mathrm{X}}}{d\varphi \wedge \Omega^{n-1}_{\mathrm{X}} + d\Omega^{n-1}_{\mathrm{X}}} = 0.$$

Par suite, on a

$$b_p = 0 \qquad \text{pour} \quad p \geqq n,$$

ce qui du reste était évident *a priori*, puisque $\mathrm{X}(t)$ est une variété de Stein de dimension complexe $n-1$.

(b) Pour $p \leqq n-2$, la définition de ${}'\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}}$ montre qu'on a un isomorphisme $i : \mathrm{H}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}}) \to \mathrm{H}^p({}'\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}})$. Ceci, joint à (3.4) et (3.5) définit une application

$$\mathrm{D} = i^{-1} \circ \partial : \quad \mathrm{H}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}}) \to \mathrm{H}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T}})$$

qui est un isomorphisme pour $1 \leqq p \leqq n-2$, et est surjective et de noyau $\mathbf{C}$ pour $p = 0$.

On vérifie tout de suite que D peut être définie de manière terre à terre de la façon suivante; prenons $\omega \in \mathrm{Z}(\Omega^p_{\mathrm{X/T}})$, i. e. $\omega \in \Omega^p_{\mathrm{X/T}}$, $d\omega = 0$; si l'on relève ω en $\tilde{\omega} \in \Omega^p_{\mathrm{X}}$, alors on a

$$d\tilde{\omega} = d\varphi \wedge \tilde{\pi}, \qquad \tilde{\pi} \in \Omega^p_{\mathrm{X}};$$

soit π l'image de $\tilde{\pi}$ dans $\Omega^p_{X/T}$; alors π est un cocycle et l'on a, en désignant par $[\pi]$ sa classe de cohomologie $D[\omega] = [\pi]$.

Soit alors $f \in \mathcal{O}_{T,0}$; avec les notations précédentes, on a :

LEMME (3.6) :

$$D[f\omega] = \frac{df}{dt}[\omega] + f\,D[\omega].$$

En effet, $f\omega = (f \circ \varphi)\,\omega$ se relève en $(f \circ \varphi)\,\tilde{\omega}$; alors

$$d(f\circ\varphi)\tilde{\omega} = (f\circ\varphi)\,d\tilde{\omega} + (f'\circ\varphi)\,d\varphi \wedge \tilde{\omega} = d\varphi \wedge [(f\circ\varphi)\tilde{\pi} + (f'\circ\varphi)\tilde{\omega}]\left(f' = \frac{df}{dt}\right)$$

d'où immédiatement la formule cherchée.

De là résulte que D est une *connexion* sur $H^p(\Omega^{\cdot}_{X/T})$, considéré comme $\mathcal{O}_{T,0}$-module (ou plus exactement, D est la dérivée par rapport au champ d/dt d'une telle connexion). Comme $H^p(\Omega^{\cdot}_{X/T})$ est fini sur $\mathcal{O}_{T,0}$, il est libre d'après le lemme (2.1); alors d'après la remarque (2.2), il est de rang 1 pour $p = 0$, et de rang 0 pour $p \geqq 1$; donc on a

$$b_0 = 1, \qquad b_p = 0 \qquad (1 \leqq p \leqq n-2).$$

(*c*) Reste à examiner le cas le plus intéressant, celui où $p = n-1$. Posons

$$E = H^{n-1}(\Omega^{\cdot}_{X/T}), \qquad F = H^{n-1}({}'\Omega^{\cdot}_{X/T});$$

on a

$$E = \frac{Z(\Omega^{n-1}_{X/T})}{d\Omega^{n-2}_{X/T}}, \qquad F = \frac{\Omega^{n-1}_{X/T}}{d\Omega^{n-2}_{X/T}}.$$

D'où une injection naturelle $E \subset F$; notons ici D la bijection $E \to F$ notée ∂ dans (3.5); D peut être défini de manière terre à terre comme en (*b*), et on vérifie de la même manière qu'en (3.6) que c'est une (E, F) connexion. D'autre part, on a un isomorphisme

$$\frac{F}{E} = \frac{\Omega^{n-1}_{X/T}}{Z(\Omega^{n-2}_{X/T})} \xrightarrow[\sim]{d} \Omega^n_{X/T};$$

enfin l'application $f \to dx_1 \wedge \ldots \wedge f\,dx_n$ donne un isomorphisme

$$\frac{\mathcal{O}_X}{\partial\varphi/\partial x_i} \xrightarrow{\sim} \frac{\Omega^n_X}{d\varphi \wedge \Omega^{n-1}_X} = \Omega^n_{X/T}.$$

Désignons par μ (« le nombre de Milnor de φ ») la dimension sur **C** de $\mathcal{O}_{X,0}/(\partial\varphi/\partial x_i)$; en appliquant le théorème (2.3) à (D; E, F) on trouve que le rang de E est égal à μ, d'où $b_{n-1} = \mu$. Finalement, on a le résultat suivant :

THÉORÈME (3.7) (Milnor [18], Palamodov [20]). — *Pour* $n \geqq 2$, *on a*

$$\dim_{\mathbf{C}} H^p(X(t); \mathbf{C}) = \begin{cases} 1 & si \quad p = 0, \\ 0 & si \quad p \neq 0, n-1, \\ \mu & si \quad p = n-1, \end{cases}$$

avec $\mu = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X,0}/(\partial\varphi/\partial x_i)$.

En fait, les résultats de Milnor, obtenus par voie topologique, sont bien plus précis : *la fibre* X (t) *a le type d'homotopie d'un bouquet de* μ *sphères ;* ce résultat ne peut évidemment pas être obtenu par les méthodes analytiques, qui ne donnent que la cohomologie rationnelle.

4. La connexion de Gauss-Manin : Régularité

Nous reprenons les notations du paragraphe 3; soit K le corps des fractions de $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathrm{T},0}$; par définition, la connexion de Gauss-Manin (locale) de φ est la connexion sur $\mathrm{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{K}$ déduite de la (E, F) connexion considérée en 3 (c); elle sera aussi notée D dans la suite. Rappelons le résultat suivant, qui est un cas particulier d'un théorème de Nilsson [19] et Griffiths [9] (*voir* aussi Deligne [7]).

THÉORÈME (4.1). — *La connexion de Gauss-Manin est régulière.*

Nous allons redonner deux démonstrations de ce résultat.

A. *Première démonstration.* — Désignons par E^{T} le sous-module de torsion de E, par $\overline{\mathrm{E}}$ le quotient $\mathrm{E}/\mathrm{E}^{\mathrm{T}}$, et par $\hat{\mathrm{E}}$, $\hat{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}$, $\hat{\overline{\mathrm{E}}}$ leurs complétés pour la topologie $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{\mathrm{T},0})$-adique; avec des notations évidentes, il suffit, d'après un théorème de [14], de démontrer l'égalité $\chi(\overline{\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{E}}; \overline{\mathrm{F}}) = \chi(\hat{\overline{\mathrm{D}}}, \hat{\overline{\mathrm{E}}}; \hat{\overline{\mathrm{F}}})$. Comme $\mathrm{E}^{\mathrm{T}} = \hat{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}$ et $\mathrm{F}^{\mathrm{T}} = \hat{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}$ sont finis sur **C**, il suffit, par un argument analogue à celui de (2.3), de démontrer l'égalité $\chi(\mathrm{D}; \mathrm{E}, \mathrm{F}) = \chi(\hat{\mathrm{D}}; \hat{\mathrm{E}}, \hat{\mathrm{F}})$.

Pour obtenir ce dernier résultat, il suffit de reprendre dans le « cas formel » les calculs du paragraphe 3 et d'appliquer le résultat suivant de Bloom-Brieskorn [6].

PROPOSITION (4.2). — *Désignons par* $\hat{\Omega}^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0}$ *le complété du* $\mathcal{O}_{\mathrm{X},0}$*-module* $\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0}$ *pour la topologie* $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},0})$*-adique, et par* $\hat{\mathrm{H}}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0})$ *le complété du* $\mathcal{O}_{\mathrm{T},0}$*-module* $\mathrm{H}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0})$ *pour la topologie* $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{\mathrm{T},0})$*-adique. Alors, pour tout* p, $\mathrm{H}^p(\hat{\Omega}^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0})$ *est un* $\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{T},0}$*-module séparé et complet, et l'application naturelle* $\mathrm{H}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0}) \to \mathrm{H}^p(\hat{\Omega}_{\mathrm{X/T},0})$ *se prolonge en un isomorphisme* $\hat{\mathrm{H}}^p(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(\hat{\Omega}^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0})$.

Même énoncé avec $\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0}$ *remplacé par* $'\Omega^{\cdot}_{\mathrm{X/T},0}$.

En fait, d'après le théorème de Sebastiani [21] que nous allons redémontrer dans un instant, on a $\mathrm{E}^{\mathrm{T}} = \mathrm{F}^{\mathrm{T}} = 0$; donc le petit exorcisme que nous avons dû pratiquer sur la torsion dans la démonstration précédente et dans (2.3) aurait pu à la rigueur être évité.

La démonstration précédente utilise la désingularisation, camouflée sous la proposition (4.2); de ce fait, elle ne diffère pas essentiellement de celle que donne Deligne dans [7], sinon que celle de Deligne s'applique à un cas beaucoup plus général. La démonstration que nous allons donner maintenant repose sur un principe très différent, et est plus proche de celles de Nilsson [19] et Griffiths [9].

B. *Deuxième démonstration.* — Soit $\mathrm{S} \xrightarrow{\pi} \mathrm{T}^*$ le revêtement universel de T^*; pour tout $s \in \mathrm{S}$, soit $\gamma(s) \in \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}(\pi(s)), \mathbf{C})$, $\gamma(s)$ « dépendant continûment de s » c'est-à-dire que s' voisin de s, $\gamma(s')$ est l'image de $\gamma(s)$ par l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}(\pi(s')), \mathbf{C}) \simeq \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}(\pi(s)), \mathbf{C});$$

nous ferons l'abus de notation usuel d'écrire $\gamma(t)$ au lieu de $\gamma(s)$, avec $\pi(s) = t$, en précisant si nécessaire « l'argument de t ». Pour $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n-1}_{X/T})$, considérons la fonction sur S (« fonction multiforme sur T* ») définie par $I(t) = \int_{\gamma(t)} \omega$.

Il résulte de (3.1) que, pour t assez petit, I ne dépend que de la classe $[\omega]$ de ω dans $F \otimes_{\mathcal{O}} K$; la restriction « t assez petit » pourrait d'ailleurs être levée en montrant qu'on a

$$H^{n-1}(\Gamma(X, \Omega^{\cdot}_{X/T})) = \Gamma(T, H^{n-1}\varphi_*(\Omega^{\cdot}_{X/T})),$$

ce qui se démontre en même temps que (3.1). Rappelons alors que, de Stokes, on déduit que I est holomorphe et qu'on a

$$\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma(t)} D[\omega]; \tag{4.3}$$

quitte à rétrécir T, on peut trouver $\omega_1, \ldots, \omega_\mu \in \Gamma(X, \Omega^{\cdot}_{X/T})$ tels que $[\omega_1], \ldots, [\omega_\mu]$ forment une base de $F \otimes_{\mathcal{O}} K$; posons

$$D[\omega_j] = \sum c_{jk}[\omega_k], \qquad c_{jk} \in K;$$

posant

$$I_j(t) = \int_{\gamma(t)} [\omega_j],$$

on aura

$$\frac{dI_j}{dt} = \sum c_{jk} I_k. \tag{4.4}$$

Donc $(I_1, \ldots, I_\mu)$ est solution du système différentiel dual de celui défini par D et les $[\omega_j]$; autrement dit, γ définit une « section horizontale de la connexion duale de $(D, F \otimes_{\mathcal{O}} K)$ »; en vertu de la dualité entre H^{n-1} et H_{n-1} on obtient ainsi, en faisant varier γ, une fois et une seule, toutes les solutions de (4.4). Pour démontrer le théorème (4.1) il suffit donc, d'après un résultat classique de la théorie des points singuliers réguliers de montrer ceci : *lorsque* $t \to 0$, *avec* $\alpha \leqq \arg t \leqq \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$, *les* $I_j(t)$ *sont à croissance modérée*, i. e. il existe N tel que $t^{-N} I_j(t)$ soit borné. En fait, nous allons obtenir un résultat plus précis, qui repose sur le lemme suivant :

LEMME (4.5). — *Soit* $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n-1}_{X/T})$; *pour tout* γ *défini comme précédemment, on a*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ \arg t = 0}} = \int_{\gamma(t)} \omega = 0.$$

Choisissons $\tilde{\omega} \in \Gamma(X, \Omega^{n-1}_X)$ dont l'image dans $\Gamma(X, \Omega^{n-1}_{X/T})$ soit ω; c'est possible car X est un ouvert de Stein. Choisissons d'autre part $t_0 \in T$, $t_0 > 0$, et soit $Y = \varphi^{-1}([0, t_0]) \subset X$; Y est un ensemble semi-analytique, et du fait que $X(0)$ est contractile, on voit facilement que Y est contractile.

D'après un théorème de Lojasiewicz [13], on peut trouver une triangulation semi-analytique K de Y, telle que $X(t_0)$ soit un sous-complexe K_0 de K; on peut alors trouver un cycle Γ de K_0 et une chaîne Δ de K tels qu'on ait $\partial\Delta = \Gamma$ et que Γ représente la classe $\gamma(t_0) \in H_{n-1}(X(t_0), \mathbf{C})$. D'après un théorème de Herrera [10], les intégrales $\int_\Gamma \tilde{\omega}$ et $\int_\Delta d\tilde{\omega}$ sont bien définies, et l'on a

$$I(t_0) = \int_\Gamma \tilde{\omega} = \int_\Delta d\tilde{\omega}.$$

Posons, pour $t \in]0, t_0]$:

$$\Delta_t = \varphi^{-1}[0, t] \cap \Delta$$

et montrons qu'on a

$$I(t) = \int_{\Delta_t} d\tilde{\omega};$$

quitte à remplacer la triangulation donnée par une subdivision convenable, on peut supposer que $X(t)$ est un sous-complexe de K; on aura alors $\Delta = \Delta_t + \Delta'$, le support des simplexes de Δ' étant contenu dans $\varphi^{-1}([t, t_0])$; on aura alors $\partial\Delta' = \Gamma - \Gamma_t$, support $(\Gamma_t) \subset X_t$; donc Γ_t représente $\gamma(t)$; par Stokes-Herrera, on aura alors

$$\int_{\Delta'} d\tilde{\omega} = \int_\Gamma \tilde{\omega} = I(t_0) - I(t);$$

d'où le résultat.

Pour établir le lemme, il suffit maintenant de faire tendre t vers zéro; la théorie classique de l'intégration montre qu'on a

$$\lim_{t\to 0} \int_{\Delta_t} d\tilde{\omega} = \int_{\Delta_0} d\tilde{\omega} \qquad \text{avec} \quad \Delta_0 = X(0) \cap \Delta;$$

mais la restriction de $d\tilde{\omega}$ à la partie régulière de $X(0)$ est nulle; on a donc (*cf.* Herrera, *loc. cit.*) $\int_{\Delta_0} d\tilde{\omega} = 0.$

C. Q. F. D.

Évidemment, la démonstration précédente est valable dans des cas plus généraux (*voir* un énoncé de ce genre dans [15]).

Pour établir le théorème (4.1), il suffit maintenant de démontrer ceci : dans les hypothèses du lemme (4.5), pour $\alpha \leqq \arg t \leqq \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$, $I(t)$ reste borné pour $t \to 0$ [en fait, on a même

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ \alpha \leqq \arg t \leqq \beta}} I(t) = 0,$$

comme nous le verrons un peu plus loin].

Il suffit d'établir ce résultat pour les I_j, puisque I est combinaison linéaire des I_j à coefficients dans $\mathcal{O}_{T,0}$; or, de (4.4) on déduit qu'on a, avec C, $k > 0$ convenables

$$\left|\frac{dI_j}{dt}\right| \leqq \frac{C}{k+1} \frac{1}{|t|^{k+1}} \sup(|I_1|, \ldots, |I_\mu|);$$

en passant en coordonnées polaires (r, t) et en intégrant en r, on en déduit que, lorsque $\arg t$ reste borné, on a $|I_j(t)| \leqq C' e^{C|t|^{-k}}$; lorsque $|\beta-\alpha| < \pi/k$, le résultat se déduit alors immédiatement du lemme (4.5) et d'un théorème classique de Phragmén-Lindelöf; enfin, on passe immédiatement de là au cas où α et β sont quelconques.

Remarque (4.6). — Au lieu de conclure par Phragmén-Lindelöf, on aurait pu aussi bien utiliser les résultats de Turritin sur le développement asymptotique des solutions d'une équation différentielle au voisinage d'un point singulier irrégulier (*voir* [25] ou [14]).

Rappelons maintenant le « théorème de monodromie » : prenons $t_0 \in T^*$, avec $\arg t_0 = 0$ pour fixer les idées; soit h l'endomorphisme de $H_{n-1}(X(t_0), \mathbf{C})$ induit par l'action du générateur de $\pi_1(T^*, t_0)$: $\lambda \to e^{2\pi i\lambda} t_0$, $\lambda \in [0, 1]$; on sait que h possède les propriétés suivantes :

1° Les valeurs propres de h sont des racines de l'unité.

2° Si $h = SU$, S semi-simples, U unipotente, avec $[S, U] = 0$, alors on a $(U-I)^n = 0$. (*Voir* par exemple [12].) Des exemples montrent que le 2° ne peut pas être amélioré en général (*voir* [1] et [16]). Prenons $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ tels que $\gamma_1(t_0), \ldots, \gamma_\mu(t_0)$ forment une base de $H_{n-1}(X(t_0), \mathbf{C})$, avec par exemple $\int_{\gamma_k(t_0)} \omega_j = \delta_{jk}$, et posons

$$I_{jk}(t) = \int_{\gamma_k(t)} \omega_j ;$$

les $(I_{1k}, \ldots, I_{\mu k})$ forment une base de l'espace des solutions de (4.4); de la théorie classique des équations différentielles et du théorème (4.1) résulte alors de la matrice $I = (I_{jk})$ a la forme suivante :

$$I(t) = J(t) \exp(C \log t),$$

avec $J \in Gl(\mu, K)$ et $C \in \operatorname{End}(\mathbf{C}^\mu)$; évidemment $\exp(2\pi i C)$ est égal à l'expression de h dans la base $(\gamma_j(t_0))$; autrement dit, la monodromie de la connexion de Gauss-Manin est égale à h.

En mettant alors C sous forme de Jordan, on voit ceci : soit $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n-1}_{X/T})$ et soit γ comme ci-dessus; on a un développement en série convergent dans T^* :

$$\int_{\gamma(t)} \omega = \sum C_{\alpha, q} t^\alpha (\log t)^q, \tag{4.7.1}$$

avec

(4.7.2) $\exp(2\pi i\alpha) \in V(\varphi)$, l'ensemble des valeurs propres de h (donc $\alpha \in \mathbf{Q}$) :

$$0 \leqq q \leqq n-1. \tag{4.7.3}$$

De plus, l'ensemble des α est borné inférieurement puisque J est méromorphe; on déduit alors facilement du lemme (4.5) qu'on a ceci

$$C_{\alpha, q} \neq 0 \quad \text{entraîne}\ \alpha > 0. \tag{4.7.4}$$

REMARQUE (4.8). — Désignons par $\sigma(\varphi)$ la borne inférieure des α tels qu'il existe γ, ω et q pour lesquels on ait $C_{\alpha,q} \neq 0$. En un certain sens, $\sigma(\varphi)$ mesure la singularité de φ en 0. Il est très probable que $\sigma(\varphi)$ est semi-continu inférieurement par déformation de φ (*voir* à ce propos Arnol'd [2] et [3]). En particulier, il est probable que $\sigma(\varphi)$ est contant par déformation de φ « à μ constant » (je ne sais même pas démontrer ce dernier résultat).

5. **La connexion de Gauss-Manin : Compléments**

Montrons d'abord comment le lemme (4.5) permet de retrouver un résultat de Sebastiani [21] [en fait la démonstration de (4.5) a été inspirée par celle de Sebastiani]; rappelons qu'on a posé

$$E = H^{n-1}(\Omega^{\bullet}_{X/T,0}), \qquad F = H^{n-1}({}'\Omega^{\bullet}_{X/T,0}),$$

et posons

$$F_1 = \frac{d\varphi \wedge \Omega^{n-1}_{X,0}}{d\varphi \wedge d\Omega^{n-2}_{X,0}}, \qquad G_1 = \frac{\Omega^{n}_{X,0}}{d\varphi \wedge d\Omega^{n-2}_{X,0}};$$

observons, avec Brieskorn, que l'application $d\varphi \wedge^{\bullet} : \Omega^{n-1}_{X,0} \to \Omega^{n}_{X,0}$ induit un homomorphisme $F \xrightarrow{\sim} F_1$; modulo cet isomorphisme, la connexion $D : E \to F$ se prolonge en une connexion $D_1 : F_1 \to G_1$ définie ainsi; soit $\omega \in F_1$ et $\tilde{\omega} = d\varphi \wedge \tilde{\pi}$ un relèvement de ω dans $d\varphi \wedge \Omega^{n-1}_{X,0}$; on prend $D_1 \omega =$ (classe de $d\tilde{\pi}$); on voit encore par le lemme (3.2) que D_1 est bijectif (nous laissons les détails au lecteur).

THÉORÈME (5.1) (Sebastiani). — G_1 *est sans torsion sur* $\mathcal{O}_{T,0}$; a fortiori, E *et* F *sont sans torsion sur* $\mathcal{O}_{T,0}$.

Désignons respectivement par F_1^T et G_1^T les modules de torsion de F_1 et G_1; supposons qu'on ait $G_1^T \neq 0$; on a $D_1 F_1^T \subset G_1^T$; nécessairement on a $F_1^T \neq G_1^T$, sinon, d'après (2.1), on aurait $G_1^T = 0$. Comme D_1 est un isomorphisme, on en déduit que l'application

$$D_1 : \bar{F}_1 = \frac{F_1}{F_1^T} \to \bar{G}_1 = \frac{G_1}{G_1^T}$$

a un noyau non nul. En tensorisant par K, et en tenant compte de l'isomorphisme $F \simeq F_1$ et de l'injectivité de l'application $\bar{F} \to F \otimes_{\mathcal{O}} K$, on trouve donc un $\omega \in \Omega^{n-1}_{X/T,0}$ tel que sa classe $[\omega]$ dans $F \otimes_{\mathcal{O}} K$ vérifie $[\omega] \neq 0$ et $D[\omega] = 0$; mais alors, d'après (4.3), pour tout γ, on trouve $\int_{\gamma(t)} \omega = \mathrm{Cte}$, d'où par (4.5) $\int_{\gamma(t)} \omega = 0$. D'après (3.1), cela contredit l'hypothèse $[\omega] \neq 0$.

C. Q. F. D.

Montrons maintenant comment les considérations du paragraphe 4 B permettent de retrouver la proposition (4.2) dans le cas crucial $p = n-1$ sans utiliser la désingularisation; les calculs que nous aurons à faire à cette occasion seront d'ailleurs utiles au prochain paragraphe. Pour cela, désignons par F_1^t le $\mathcal{O}_{T,0}$-module F_1 muni de la topologie

$\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{T,0})$-adique et par F_1^x le même ensemble, muni de la topologie quotient de $d\varphi \wedge \Omega_{X,0}^{n-1}$, ce dernier étant muni de la topologie $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,0})$-adique; en notant $\hat{\Omega}_{X,0}^p$ le complété de $\Omega_{X,0}^p$ pour la topologie $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,0})$-adique, et $\hat{F}_1^x$ le séparé-complété de F_1^x, on a d'abord le lemme suivant :

LEMME (5.2). — *L'application naturelle :* $d\varphi \wedge \hat{\Omega}_{X,0}^{n-1}/d\varphi \wedge d\hat{\Omega}_{X,0}^{n-2} \to \hat{F}_1^x$ *est un isomorphisme.*

Cette application est évidemment surjective : soit en effet $\alpha \in \hat{F}_1^x$; on peut écrire

$$\alpha = \sum \alpha_p, \qquad \alpha_p \in F_1^x/\overline{\{0\}} \text{ convergeant vers zéro;}$$

il suffit alors de relever la suite α_p en une suite $\tilde{\alpha}_p \in d\varphi \wedge \Omega_{X,0}^{n-1}$ convergeant vers zéro et de poser

$$\tilde{\alpha} = \sum \tilde{\alpha}_p$$

pour avoir un relèvement de α.

Pour démontrer que l'application est injective, il suffit d'établir que $d\varphi \wedge d\hat{\Omega}_{X,0}^{n-2}$ est fermé dans $d\varphi \wedge \hat{\Omega}_{X,0}^{n-1}$. Prenons alors un ω adhérent à $d\varphi \wedge d\hat{\Omega}_{X,0}^{n-2}$, et cherchons $\pi \in \hat{\Omega}_{X,0}^{n-2}$ tel qu'on ait $\omega = d\varphi \wedge d\pi$; en écrivant les développements en série de ω et π, on est ramené à un système linéaire d'une infinité d'équations, et l'hypothèse faite sur ω entraîne que tout sous-système fini est compatible; d'après un lemme connu, le système a alors une solution.

C. Q. F. D.

PROPOSITION (5.3). — *Les topologies* F_1^t *et* F_1^x *sont équivalentes.*

On a $\varphi^* \mathfrak{m}(\mathcal{O}_{T,0}) \subset \mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,0})$ donc la topologie F_1^t est plus fine que la topologie F_1^x; pour établir la réciproque, remarquons d'abord que l'isomorphisme $D_1 : F_1 \to G_1$ définit une application D_1^{-1} de F_1 dans lui-même (puisque $F_1 \subset G_1$); filtrons alors F_1 par les $D_1^{-k} F_1$, et notons F_1^τ la topologie définie par cette filtration. La proposition va maintenant résulter des deux lemmes suivants :

LEMME (5.4). — *L'identité* $F_1^x \to F_1^\tau$ *est continue.*

Désignons en effet par $\mathcal{I}$ l'idéal

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) \subset \mathcal{O}_{X,0};$$

comme c'est un idéal de définition, la topologie $\mathcal{I}$-adique de $\Omega_{X,0}^n$ coïncide avec la topologie $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,0})$-adique. Désignons encore par p la projection $\Omega_{X,0}^n \to G_1$ et, par restriction, la projection $d\varphi \wedge \Omega_{X,0}^{n-1} \to F_1$; nous allons montrer, par récurrence sur k, qu'on a la formule suivante :

$$p(\mathcal{I}^{2k+1}\Omega_{X,0}^n) \subset D_1^{-k} F_1. \tag{5.5}$$

La formule est vraie pour $k = 0$, puisqu'on a

$$\mathcal{I}\,\Omega_{X,0}^n = d\varphi \wedge \Omega_{X,0}^{n-1}.$$

Supposons-le vérifié pour $k-1$, et démontrons-le pour k. Prenons $\omega \in \mathscr{I}^{2k+1}\,\Omega^n_{X,0}$; il existe $\pi \in \mathscr{I}^{2k}\,\Omega^{n-1}_{X,0}$ tel qu'on ait $\omega = d\varphi \wedge \pi$, on a alors

$$d\pi \in \mathscr{I}^{2k-1}\,\Omega^n_{X,0} \qquad \text{et} \qquad D_1\, p(\omega) = p(d\pi) \in D_1^{1-k}\, F_1,$$

par hypothèse de récurrence; donc on a $p(\omega) \in D_1^{-k}\, F_1$, ce qui démontre (5.5) et le lemme.

LEMME (5.6). — *Les topologies* F_1^t *et* F_1^τ *sont équivalentes.*

En fait, nous allons même voir que les filtrations par lesquelles nous avons défini ces topologies sont équivalentes. D'après (5.1) F_1 se plonge dans $F_1 \otimes_{\mathcal{O}} K$, ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{T,0}$) où il est un réseau i. e. un sous-$\mathcal{O}$-module libre de rang maximum; la connexion D_1 se prolonge en une connexion, notée encore D_1, sur $F_1 \otimes_{\mathcal{O}} K$, qui est régulière d'après (4.1). On sait alors qu'en saturant F_1 pour l'application $t\,D_1$, on obtient un autre réseau $H_1 \supset F_1$ (*voir* Manin [17]) ou Gérard-Levelt [8]). Montrons que l'application $t\,D_1 : H_1 \to H_1$ est bijective. Tout d'abord elle est injective; prenons en effet $\omega \in H_1$; on peut écrire

$$\omega = \sum_0^k (t\,D_1)^k\, \omega_k \qquad \text{avec} \quad \omega_k \in F_1,$$

ou encore, en désignant par $1/d\varphi$ l'isomorphisme $F_1 \otimes K \to F \otimes K$:

$$\frac{\omega}{d\varphi} = \sum_0^l (t\,D)^k\, \frac{\omega_k}{d\varphi}.$$

En prenant γ comme au paragraphe 4, et en appliquant (4.7.1) aux $\omega_k/d\varphi$, on trouve que $\int_\gamma \omega/d\varphi$ vérifie une formule de type (4.7.1) et que (4.7.4) est vérifié. Soit alors $\omega \in H_1$ vérifiant $D_1\,\omega = 0$; on a

$$D\left(\frac{\omega}{d\varphi}\right) = 0,$$

donc, pour tout γ, on a

$$\int_\gamma \frac{\omega}{d\varphi} = \text{Cte};$$

d'après (4.7.4), la constante est nulle, donc

$$\int_\gamma \frac{\omega}{d\varphi} = 0;$$

par conséquent,

$$\frac{\omega}{d\varphi} = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega = 0.$$

Le fait que $t\,D_1 : H_1 \to H_1$ est surjective résulte maintenant de son injectivité et du théorème de l'indice analytique (2.3) [ou plus exactement d'une variance de (2.3) que nous laissons le lecteur expliciter].

Il résulte facilement de ce qui précède que, pour tout $k \geqq 0$, on a

$$D^{-k} H_1 = t^k H_1;$$

donc, sur H_1, les filtrations définies de manière analogue à celles que nous avons définies sur F_1 coïncident; pour passer de là à F_1, il suffit de remarquer que, H_1 étant un réseau, on a pour un certain $l \geqq 0$, $t^l H_1 \subset F_1$; d'où $t^{l+k} H_1 \subset t^k F_1 \subset t^k H_1$, et d'autre part

$$D^{-k} t^l H_1 = D^{-k-l} H_1 \subset D^{-k} F_1 \subset D^{-k} H_1;$$

l'équivalence des deux filtrations en résulte immédiatement.

C. Q. F. D.

SORITES (5.7). — Définissons $\hat{E}$, $\hat{F}$, $\hat{F}_1$, $\hat{G}_1$ de manière analogue à E, F, F_1, G_1, en remplaçant les séries convergentes en x par les séries formelles en x; le lemme (5.2) et la proposition (5.3) montrent que $\hat{F}_1$ est isomorphe à $\hat{F}_1^t$, complété de $\hat{F}_1$ pour la topologie $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{T,0})$-adique. Le même résultat est vrai encore pour F à cause des isomorphismes $F \simeq F_1$, $\hat{F} \simeq \hat{F}_1$, et aussi pour E et G_1 en utilisant le fait que E (resp. $\hat{E}$, resp. F_1, resp. $\hat{F}_1$) est d'indice fini dans F (resp. $\hat{F}$, resp. G_1, resp. $\hat{G}_1$). En particulier, cela redémontre la proposition (4.2) pour $p = n-1$.

On notera encore $D : \hat{E} \to \hat{F}$ et $D_1 : \hat{F}_1 \to \hat{G}_1$ les connexions définies de manière analogue à D et D_1 en remplaçant « séries convergentes » par « séries formelles » [ou, ce qui revient au même, les prolongements de D et D_1 aux complétés $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{T,0})$-adiques]. Ces applications sont encore bijectives : on le voit en appliquant aux séries formelles en x les mêmes raisonnements qu'on a fait avec les séries convergentes (on pourrait aussi le voir par complétion, en utilisant la régularité de D et D_1).

On déduit encore de (5.1) que $\hat{G}_1$ est sans torsion, de la démonstration de (5.4) que la filtration $(D_1^{-k})\hat{F}_1$ de $\hat{F}_1$ est équivalente à la filtration $\mathfrak{m}(\hat{\mathcal{O}}_{T,0})$-adique, et enfin, de là les énoncés analogues pour les autres espaces considérés ici. Nous laissons les détails au lecteur.

6. Intégrales asymptotiques dans le domaine complexe

Reprenons les notations du début du paragraphe 2; pour fixer les idées, nous supposerons $n > 1$. Soit T^- l'ensemble des $t \in T$, vérifiant $\operatorname{Re} t < 0$, et posons

$$X^- = X \cap \varphi^{-1}(T^-).$$

Soient Γ une n-chaîne singulière de X, avec $\partial\Gamma \subset X^-$, et $\psi \in \Gamma(X, \Omega_X^n)$; on se propose d'étudier le comportement asymptotique (au sens de l'introduction) de l'intégrale $\int_\Gamma e^{\tau\varphi}\psi$, pour $\tau \to +\infty$, comportement que nous noterons en abrégé $\tilde{\int}_\Gamma e^{\tau\varphi}\psi$; notons d'abord qu'il ne dépend que de la classe de Γ dans $H_n(X, X^-)$; en effet, si Γ et Γ' ont même classe dans $H_n(X, X^-)$, on a

$$\Gamma = \Gamma' + \partial\Gamma_1 + \Gamma_2 \qquad \text{avec} \quad \Gamma_2 \subset X^-,$$

d'où

$$\int_\Gamma e^{\tau\varphi}\psi = \int_{\Gamma'} e^{\tau\varphi}\psi + \int_{\Gamma_2} e^{\tau\varphi}\psi,$$

et la dernière intégrale est à décroissance exponentielle ainsi que toutes ses dérivées pour $\tau \to +\infty$, donc $\int_{\Gamma_2}^{\sim} e^{\tau\varphi}\,\omega = 0$.

De la suite exacte d'homologie

$$\ldots \to \mathrm{H}_n(\mathrm{X}) \to \mathrm{H}_n(\mathrm{X}, \mathrm{X}^-) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}^-) \to \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}) \to \ldots$$

et de la contractibilité de X (*voir* [18]), on déduit que ∂ est un isomorphisme $\mathrm{H}_n(\mathrm{X}, \mathrm{X}^-) \to \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}^-)$, ou encore, comme X^- est une fibration sur T^-, un isomorphisme $\mathrm{H}_n(\mathrm{X}, \mathrm{X}^-) \to \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}(-1))$ (on suppose ici $-1 \in \mathrm{T}$).

Soit alors $\Gamma \in \mathrm{H}_n(\mathrm{X}, \mathrm{X}^-)$, de bord $\partial\Gamma = \gamma(-1) \in \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}(-1))$; on peut supposer Γ représenté par une chaîne dont le bord est contenu dans $\mathrm{X}(-1)$; pour $t \in]0, -1]$, désignons par $\gamma(t)$ l'élément de $\mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}(t))$ obtenu par continuité à partir de $\gamma(-1)$.

Pour $\psi \in \Gamma(\mathrm{X}, \Omega_\mathrm{X}^n)$, prenons un $\omega \in \Gamma(\mathrm{X}, \Omega_\mathrm{X}^{n-1})$ tel qu'on ait $d\omega = \psi$ (c'est possible puisque X est de Stein et contractile); d'autre part, désignons par

$$\frac{\psi}{d\varphi} \in \Gamma(\mathrm{X}^*, \Omega_{\mathrm{X}/\mathrm{T}}^{n-1})$$

l'unique forme relative α qui vérifie $d\varphi \wedge \alpha = \psi$; cette forme se prolonge en une section méromorphe sur X de $\Omega_{\mathrm{X}/\mathrm{T}}^{n-1}$; en effet, si k est tel qu'on ait

$$\varphi^k \in \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right),$$

$\varphi^k\,\psi/d\varphi$ est holomorphe sur X comme on le vérifie aussitôt. Par Stokes, on a alors

$$\int_\Gamma \psi = \int_{\gamma(-1)} \omega;$$

d'autre part [*cf.* (4.3)], on a

$$\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma(t)} \frac{\psi}{d\varphi},$$

et par conséquent, d'après (4.5) :

$$\int_{\gamma(-1)} \omega = \int_0^{-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\psi}{d\varphi}.$$

En appliquant ces formules à $e^{\tau\varphi}\psi$ au lieu de ψ, il vient

$$(6.1) \qquad \int_\Gamma e^{\tau\varphi}\psi = \int_0^{-1} e^{\tau t}\,dt \int_{\gamma(t)} \frac{\psi}{d\varphi}.$$

Pour t assez petit, donc pour tout $t \in T^*$ par prolongement analytique, $\int_{\gamma(t)} \omega$ $\left(\text{resp. } \int_{\gamma(t)} \psi/d\varphi\right)$ ne dépend que de la classe de ω (resp. $\psi/d\varphi$) dans $F \otimes_{\mathcal{O}} K$; la première intégrale sera exprimée par (4.7.1), la seconde en dérivant cette formule; donc on aura

$$\int_{\gamma(t)} \frac{\psi}{d\varphi} = \sum d_{\alpha,q}\, t^{\alpha} (\log t)^q, \tag{6.2}$$

(en choisissant par exemple $\arg t = \pi$); (4.7.2) et (4.7.3) seront encore vraies, et (4.7.4) doit être remplacé par « $d_{\alpha,q} \neq 0$ entraîne $\alpha > -1$ ».

On vérifie alors facilement que le développement asymptotique de (6.1) s'obtient terme à terme, et qu'on peut aussi bien dans chaque terme remplacer $\int_0^{-1}$ par $\int_0^{-\infty}$; ceci donne finalement

$$\tilde{\int_{\Gamma}} e^{\tau\varphi}\psi = -\sum d_{\alpha,q} \frac{d^q}{d\alpha^q}\left[\frac{e^{i\pi\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)}{\tau^{\alpha+1}}\right],$$

ce qui, en explicitant les dérivations, conduit à une expression de la forme

$$\tilde{\int_{\Gamma}} e^{\tau\varphi}\psi = \sum d'_{\alpha,q}\, \tau^{-\alpha-1} (\log \tau)^q. \tag{6.3}$$

Il est facile de voir qu'inversement, les $d'_{\alpha,q}$ déterminent les $d_{\alpha,q}$ (nous laissons les détails au lecteur).

Remarquons maintenant que, Γ étant fixé dans $H_n(X, X^-)$, les développements de $\int_{\gamma(t)} \omega$ et $\tilde{\int_{\Gamma}} e^{\tau\varphi}\psi$ gardent un sens pour des germes $\omega \in \Omega^{n-1}_{X,0}$ et $\psi = d\omega \in \Omega^n_{X,0}$ et ne dépendent que de la classe $[\omega]$ de ω dans F, ou si l'on préfère, de la classe $[\psi]$ de ψ dans G_1 (il suffit pour le voir de rétrécir X et T, ce qui ne change pars la fibration). Le développement de $\int_{\gamma(t)}$ dépend continûment de la filtration F^t, donc par (5.3) de la filtration F^x;par suite le développement de $\tilde{\int_{\Gamma}} e^{\tau\varphi}\psi$ dépend continûment de la filtration G^1_x [comparer à ce propos la démonstration du lemme (5.4) au raisonnement de l'introduction]; autrement dit, pour $\omega \in \hat{\Omega}^{n-1}_{X,0}$ (resp. $\psi \in \hat{\Omega}^n_{X,0}$) on peut définir par continuité à partir des séries convergentes un « développement en série formelle en $t^{\alpha} (\log t)^q$ » qu'on notera encore $\int_{\gamma(t)} \omega$ $\Big[$resp. un développement en série formelle en $\tau^{-\alpha} (\log \tau)^q$ qu'on notera $\tilde{\int_{\Gamma}} e^{\tau\varphi}\psi$, ou encore $\langle e^{\tau\varphi}, [\psi] \rangle_{\Gamma}\Big]$.

On a les formules suivantes :

$$\langle e^{\tau\varphi}, [\psi] \rangle_{\Gamma} = -\tau \langle e^{\tau\varphi}, D_1^{-1}[\psi] \rangle_{\Gamma}, \tag{6.4}$$

$$\frac{d}{d\tau}\langle e^{\tau\varphi}, [\psi] \rangle_{\Gamma} = \langle e^{\tau\varphi}, t[\psi] \rangle_{\Gamma}. \tag{6.5}$$

Par continuité, il suffit d'établir ces formules pour ψ convergent; la seconde est simplement la formule de dérivation sous le signe $\int$:

$$\frac{d}{dt}\int_\Gamma e^{\tau\varphi}\psi = \int_\Gamma e^{\tau\varphi}\varphi\psi,$$

dont on voit aisément qu'elle reste vraie en passant aux développements asymptotiques; pour la première notons qu'on a $D_1^{-1}[\psi] = [d\varphi \wedge \omega]$, avec $d\omega = \psi$; la formule se réduit alors à la formule immédiate

$$\int_\Gamma e^{\tau\varphi}\, d\omega = -\tau \int_\Gamma e^{\tau\varphi}\, d\varphi \wedge \omega .$$

Ceci nous incite à munir $\hat{G}_1$ d'une structure de $\mathbf{C}[[\tau^{-1}]]$ module en posant, pour $f = \sum_0^{+\infty} a_k \tau^{-k}$:

$$f[\psi] = \sum_0^{+\infty} (-1)^k a_k D_1^{-k}[\psi],$$

série convergente dans $\hat{G}_1$ d'après (5.7); ce module est libre de rang μ : en effet on a d'abord $\tau^{-1}\hat{G}_1 = \hat{F}_1$, d'où

$$\frac{\hat{G}_1}{\tau^{-1}\hat{G}_1} = \frac{\hat{G}_1}{\hat{F}_1} \simeq \frac{\hat{\Omega}^n_{X,0}}{d\varphi \wedge \hat{\Omega}^{n-1}_{X,0}} \simeq \frac{\hat{\mathcal{O}}^n_{X,0}}{\tilde{\mathcal{J}}}$$

avec

$$\tilde{\mathcal{J}} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right).$$

Prenant alors $e_1, \ldots, e_\mu \in \hat{G}_1$ tels que leurs classes modulo $\hat{F}_1$ forment une base du quotient sur $\mathbf{C}$, il est immédiat de vérifier que tout élément de $\hat{G}_1$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum f_i e_i$, $f_i \in \mathbf{C}[[\tau^{-1}]]$ (pratiquement, il suffira de prendre une base de $\mathcal{O}^n_{X,0}$ modulo $\mathcal{J}$, formée par exemple de monômes x^α, et de prendre $e_\alpha =$ la classe de $x^\alpha\, dx$ dans $\hat{G}_1$).

La formule (6.5) suggère que ce module est muni d'une connexion lorsqu'on pose

$$\nabla_\tau[\psi] = t[\psi] \otimes d\tau;$$

on écrira aussi $D_\tau[\psi] = t[\psi]$; pour le vérifier, il suffit de voir qu'on a

$$D_\tau(\tau^{-k}[\psi]) = \tau^{-k} D_\tau[\psi] - k\tau^{-k-1}[\psi],$$

ou encore

$$[t, \tau^{-k}] = -k\tau^{-k-1},$$

ou encore

$$[t, D_1^{-k}] = (-1)^{k+1} k D_1^{-k-1}.$$

ce qui se vérifie immédiatement par récurrence sur k. En faisant le changement de variables $\tau \to \tau^{-1}$, on voit en fait que cette connexion a un point singulier à l'infini (*a priori*, la matrice de cette connexion aura un pôle double).

THÉORÈME (6.6). — *Sur le* $\mathbf{C}[[\tau^{-1}]]$ *module* $\hat{G}_1$, *la connexion* ∇_τ *est régulière.*

De plus, sa monodromie est égale à l'inverse de la monodromie de la connexion de Gauss-Manin (*i. e. celle de la fibration* $X \to T$).

On sait, par la théorie des équations différentielles à points singuliers réguliers, qu'il existe $e_1, \ldots, e_n \in \hat{G}_1$, formant une base sur $\hat{K}$ de $\hat{G}_1 \otimes_{\hat{\mathcal{O}}} \hat{K}$ ($\hat{K}$ = corps des fractions de $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}}_{T,0} = \mathbf{C}[[t]]$) tel qu'on ait

$$t D_1 e_j = \sum_j m_{ij} e_j, \qquad m_{ij} \in \mathbf{C};$$

en posant $M = (m_{ij})$, la monodromie de la connexion de Gauss-Manin est alors $\exp(-2\pi i M)$; quitte à multiplier e_i par t^k, ce qui revient à remplacer M par $M + kI$, on peut supposer par exemple $D_1 e_i \in \hat{G}_1$, i. e. $e_i \in \hat{F}_1$; on aura alors

$$-D_\tau(\tau e_i) = \sum m_{ij} e_j \qquad \text{ou} \qquad \tau D_\tau e_i = \sum (\delta_{ij} - m_{ij}) e_j,$$

et il suffit pour établir le théorème de démontrer que les e_i sont libres sur $\mathbf{C}[[\tau^{-1}]]$.

Pour cela considérons le réseau $\hat{H} \subset \hat{G}_1$ engendré sur $\mathbf{C}[[t]]$ par $e_1, \ldots, e_\mu$; on a $t D_1 \hat{H} \subset \hat{H}$, donc $D_1 t \hat{H} \subset \hat{H}$, ou encore $t \hat{H} \subset \tau^{-1} \hat{H}$; en considérant les inclusions $\hat{G}_1 \supset \hat{H} \supset t \hat{H}$ et $\hat{G}_1 \supset \tau^{-1} \hat{G}_1 \supset \tau^{-1} \hat{H}$, on voit que $t \hat{H}$ et $\tau^{-1} \hat{H}$ ont même indice dans $\hat{G}_1$; donc on a $t \hat{H} = \tau^{-1} \hat{H}$; en particulier, on a $\tau^{-1} \hat{H} \subset \hat{H}$, donc $\hat{H}$ est un $\mathbf{C}[[\tau^{-1}]]$ module, qui est libre puisque $\hat{G}_1$ est libre; comme les classes des e_i modulo $t \hat{H} = \tau^{-1} \hat{H}$ forment une base de $\hat{H}/\tau^{-1} \hat{H}$, les e_i forment une base de $\hat{H}$ sur $\mathbf{C}[[\tau^{-1}]]$. D'où le théorème.

Pratiquement, pour écrire ∇_τ, il suffit d'opérer ainsi : on choisit des monômes x^α formant une base de $\mathcal{O}_{X,0}/\mathcal{J}$; pour Γ quelconque, posons

$$e_\alpha(\tau) = \int_\Gamma e^{\tau\varphi} x^\alpha \, dx;$$

pour $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X,0}$ donné, on écrit :

$$f = \sum c_\alpha x^\alpha + \sum g_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

d'où

$$\int_\Gamma e^{\tau\varphi} f \, dx = \sum c_\alpha e_\alpha(\tau) - \frac{1}{\tau} \int e^{\tau\varphi} \left(\sum \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) dx.$$

En recommençant avec $\sum \partial g_i/\partial x_i$ au lieu de f, et « continuant indéfiniment », on obtient l'expression de $\int_\Gamma e^{\tau\varphi} f dx$ en fonction des e_α. Pour obtenir l'expression de ∇_τ dans la base $[x^\alpha dx]$, il suffit alors d'écrire

$$\frac{d}{d\tau}\int_\Gamma e^{\tau\varphi}x^\alpha dx = \int_\Gamma e^{\tau\varphi}\varphi x^\alpha dx,$$

et de faire le calcul précédent avec $f = \varphi x^\alpha$.

EXEMPLE (6.7) (*cf.* Brieskorn [6]). — Supposons que f soit un polynôme quasi-homogène de poids $(m_1, \ldots, m_n)$ (m_i rationnels > 0), c'est-à-dire que le développement $f = \sum a_\beta x^\beta$ ne comporte que des monômes vérifiant $\sum m_i \beta_i = 1$. Autrement dit, on a

$$\sum m_i x_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \varphi.$$

On a alors immédiatement, pour tout monôme x^α :

$$\frac{d}{d\tau}\int_\Gamma e^{\tau\varphi}x^\alpha dx = -\frac{1}{\tau}\sum m_i(\alpha_i+1)\int_\Gamma e^{\tau\varphi}x^\alpha dx.$$

Il en résulte aussitôt que la matrice de monodromie de φ est diagonalisable, de valeurs propres $\exp(2\pi i \Sigma m_j(\alpha_j+1)$, les $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ étant choisis de manière que les x^α forment une base de $\mathcal{O}_{X,0}/\mathcal{J}$. D'autre part, on a, avec la définition (4.8) : $\sigma(\varphi) = \Sigma m_i$.

EXEMPLE (6.8). — Supposons qu'on ait

$$\varphi(x) = \varphi'(x') + \varphi''(x'') \qquad \text{avec} \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n'}), \quad x'' = (x_{n'+1}, \ldots, x_n);$$

définissons X', X'', etc. comme X, avec φ remplacé par φ' et φ''. Si x'^α ($\alpha \in A$) est une base de $\mathcal{O}_{X',0}/\mathcal{J}'$, et x''^β ($\beta \in B$) une base de $\mathcal{O}_{X'',0}/\mathcal{J}''$, une base de $\mathcal{O}_{X,0}/\mathcal{J}$ est formée des $x'^\alpha x''^\beta$. La construction précédente montre qu'on a alors

$$\nabla_\tau = \nabla'_\tau \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \nabla''_\tau,$$

par conséquent, on trouve que la monodromie de X est le produit tensoriel des monodromies de X' et X'', résultat dû à Thom et Sebastiani [22] (en fait, leur résultat est même vrai sur **Z**, ce qu'on ne peut évidemment pas obtenir ici). A noter que si n' ou $n''-n'$ est égal à 1, le résultat reste vrai à condition de remplacer l'homologie de la fibre par son homologie réduite; nous laissons le lecteur examiner ce cas.

La correspondance entre les homologies des trois fibrations peut être décrite de façon plus précise : soient $\Gamma' \in H_{n'}(X', X'^-)$ et $\Gamma'' \in H_{n''}(X'', X''^-)$, avec $n'' = n-n'$; supposons Γ' et Γ'' représentés par des chaînes sur lesquelles on a

$$-a \leqq \mathrm{Re}\,\varphi' < \frac{a}{2}, \qquad -a \leqq \mathrm{Re}\,\varphi'' < \frac{a}{2},$$

avec en outre $\varphi' = -a$ sur $\partial\Gamma'$, $\varphi'' = -a$ sur $\partial\Gamma''$, a étant > 0 assez petit; il est clair que $\Gamma' \times \Gamma''$ est une n-chaîne de X, de bord contenu dans X^- : l'énoncé donné par Thom-Sebastiani équivaut à dire que l'application $(\Gamma', \Gamma'') \to \Gamma' \times \Gamma''$ induit un isomorphisme

$$H_{n'}(X', X'^-) \otimes H_{n''}(X'', X''^-) \xrightarrow{\sim} H_n(X, X^-),$$

et ceci en homologie entière; en homologie à coefficients dans $\mathbf{C}$, cela résulte immédiatement des considérations qui précèdent et de la formule de Fubini :

$$\int_{\Gamma' \times \Gamma''} e^{\tau\varphi} x'^{\alpha} x''^{\beta} dx = \int_{\Gamma'} e^{\tau\varphi'} x'^{\alpha} dx' \int_{\Gamma''} e^{\tau\varphi''} x''^{\beta} dx''.$$

On déduit aussi de là qu'on a, avec la définition (4.8) :

$$\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi')\,\sigma(\varphi'').$$

REMARQUE (6.9). — Il paraît intéressant d'examiner ce qui demeure vrai des considérations de ce paragraphe lorsque φ n'est plus à singularité isolée, et, en particulier, d'examiner sous quelle forme le théorème de Thom-Sebastiani peut être généralisé.

7. **Intégrales asymptotiques dans le domaine réel**

Commençons par démontrer le théorème (1.1). Soit φ une fonction analytique, à valeurs réelles, dans un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$, avec $0 \in U$, $\varphi(0) = 0$. Soit V_φ l'ensemble critique de φ; sur toutes les strates d'une stratification de V_φ, φ est constante; donc φ est constante sur les composantes connexes de V_φ; en restreignant au besoin U, on peut supposer que V_φ est connexe, et que $t = 0$ est la seule valeur critique de φ. Prenons alors $f \in \mathscr{C}^\infty(U; \mathbf{R})$, à support compact dans U, on a

$$\int e^{i\tau\varphi} f\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t}\,dt \int_{\delta(t)} f \frac{dx}{d\varphi}, \tag{7.1}$$

$\delta(t)$ désignant la sous-variété $f = t$ $(t \neq 0)$ orientée comme bord de $f \leqq t$. La fonction $t \mapsto \int_{\delta(t)} f\,dx/d\varphi$ est $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de 0, et nulle en dehors d'un compact. D'après Jeanquartier [11], elle admet pour $t > 0$, $t \to 0$ un développement asymptotique, indéfiniment dérivable terme à terme

$$\int_{\delta(t)} f \frac{dx}{d\varphi} \sim \sum a_{\alpha,q}\, t^\alpha (\log t)^q, \tag{7.2}$$

avec $0 \leqq q \leqq n-1$, $\alpha = -1+p/r$, p parcourant les entiers > 0, et r entier > 0 fixé (indépendant de f). Pour $t < 0$, $t \to 0$, on aura de même

$$\int_{\delta(t)} f \frac{dx}{d\varphi} \sim \sum b_{\alpha,q} (-t)^\alpha (\log(-t))^q \tag{7.2'}$$

avec α et q parcourant les mêmes ensembles; de plus les formes linéaires $f \mapsto a_{\alpha,q}(f)$ et $f \mapsto b_{\alpha,q}(f)$ sont des distributions dans U; leur support est contenu dans $\delta(0)$ puisque, si f est nul au voisinage de $\delta(0)$, les développements précédents sont identiquement nuls; on a même un résultats plus précis : si f est nul au voisinage de V_f, la fonction $t \mapsto \int_{\delta(t)} f\,dx/d\varphi$ est aussi $\mathscr{C}^\infty$ à l'origine; par suite, pour α non entier, ou $q \neq 0$, les distributions précédentes ont leur support dans V_f; et si α est entier, la distribution « saut » $f \mapsto a_{\alpha,0}(f)-(-1)^\alpha b_{\alpha,0}(f)$ a aussi son support dans V_f.

Prenons maintenant $\theta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, égal à 1 au voisinage de 0, et à support compact. Un calcul élémentaire montre que, pour $\tau \to +\infty$, on a le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^{+\infty} e^{i\tau t} t^\alpha (\log t)^q \theta(t)\, dt \sim \frac{d^q}{d\alpha^q} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(-i\tau)^{\alpha+1}} \qquad \left(\arg - i\tau = \frac{\pi}{2}\right). \tag{7.3}$$

De même, on trouve, pour $\tau \to +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{i\tau t} (-t)^\alpha (\log(-t))^q \theta(t)\, dt \sim \frac{d^q}{d\alpha^q} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(i\tau)^{\alpha+1}} \qquad \left(\arg i\tau = \frac{\pi}{2}\right). \tag{7.3'}$$

On montre aisément que le développement asymptotique de (7.1) s'obtient terme à terme à partir des expressions précédentes (nous laissons cette question au lecteur). Par suite, pour $\tau \to +\infty$, on aura

$$\int e^{i\tau\varphi} f\, dx \sim \sum c_{\alpha,q} \tau^{-(\alpha+1)} (\log \tau)^q, \tag{7.4}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_q c_{\alpha,q} \tau^{-(\alpha+1)} (\log \tau)^q = \sum_q a_{\alpha,q} \frac{d^q}{d\alpha^q} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(-i\tau)^{\alpha+1}} + b_{\alpha,q} \frac{d^q}{d\alpha^q} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(i\tau)^{\alpha+1}} \\ \displaystyle\qquad\qquad \left(\arg \pm i\tau = \pm\frac{\pi}{2}\right). \end{array} \right. \tag{7.5}$$

Il résulte aussi des considérations précédentes que les formes linéaires $f \mapsto c_{\alpha,q}(f)$ sont des distributions à support dans V_f; ceci démontre le théorème (1.1).

Si φ a une singularité isolée en 0, i. e. si 0 est isolé dans V_f, on peut, en restreignant U, supposer qu'on a $V_f = \{0\}$; comme $f \to c_{\alpha,q}(f)$ est une distribution de support 0, on a $c_{\alpha,q}(f) = 0$ dès que f s'annule à un ordre assez grand en 0 : ceci montre que le développement (7.4) ne dépend que de la série de Taylor $\hat{f}$ de f en 0, et même qu'il en dépend continûment pour la filtration $\mathfrak{m}$-adique de l'anneau des séries formelles.

A partir de maintenant, faisons l'hypothèse plus forte que φ a une singularité isolée en 0 dans le domaine complexe, i. e. que, dans $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$, l'idéal $(\partial\varphi/\partial x_1, \ldots, \partial\varphi/\partial x_n)$ est de codimension finie. En passant dans le domaine complexe, nous sommes alors dans la situation étudiée dans les paragraphes précédents, dont nous reprendrons les notations, avec la modification suivante : nous poserons

$$X^+ = \{x \in X \mid \operatorname{Im}\varphi > 0\}, \qquad X^- = \{x \in X \mid \operatorname{Im}\varphi < 0\}.$$

Pour $\Gamma \in H_n(X, X^+)$, les calculs du paragraphe 6, *via* la substitution $\varphi \to i\varphi$, permettent de définir le développement asymptotique $\int_\Gamma^\sim e^{i\tau\varphi} \hat{f}\, dx$, $\tau - +\infty$.

PROPOSITION (7.6). — *Il existe* $\Gamma^+ \in H_n(X, X^+)$ *tel qu'on ait, pour tout* f

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\tau\varphi} f\,dx \sim \int_{\Gamma^+}^{\sim} e^{i\tau\varphi} \hat{f}\,dx, \qquad \tau \to +\infty.$$

Choisissons en effet $r > 0$, assez petit, et considérons un champ de vecteurs $\mathscr{C}^\infty$, ξ, sur X, égal à 0 pour $|x| \leqq r/4$, et vérifiant partout $\xi(\operatorname{Im}\varphi) \geqq 0$, $\xi(\operatorname{Im}\varphi) > 0$ au voisinage de $|x| \geqq r/2$ (ceci est possible, car $\operatorname{Im}\varphi$ n'a pas d'autre point critique que 0). Soit B_r (resp. S_r) l'intersection de $\mathbf{R}^n$ avec la boule $|x| \leqq r$ (resp. la sphère $|x| = r$); pour $s > 0$, assez petit, $\exp(s\,\xi)$ définit un plongement $B_r(s)$ de B_r dans X, et il envoie S_r dans X^+; en particulier, il définit une classe $\Gamma^+ \in H_n(X, X^+)$, visiblement indépendante de s, dont le bord est $\gamma^+ \in H_{n-1}(X^+)$, classe de l'image de S_r par $\exp(s\,\xi)$. Montrons que Γ^+ répond à la question.

Puisque les deux développements considérés en (7.6) dépendent continûment de $\hat{f}$, on peut supposer que f est, au voisinage de 0, égal à un polynôme g. Prenons alors $\theta \in \mathscr{C}^\infty(X)$, $\theta = 1$ sur $B_{r/2}$, θ à support compact dans $\mathring{B}_r$; on peut supposer que f est la restriction à $\mathbf{R}^n$ de θg, puisque ceci ne change pas f au voisinage de 0.

D'une part, les intégrales $\int_{B_r(s)} e^{i\tau\varphi} g\,\theta\,dx$ et $\int_{B_r(s)} e^{i\tau\varphi} g dx$ ne diffèrent que sur un compact de X^-; donc leur différence est à décroissance exponentielle ainsi que toutes ses dérivées; elles ont donc même développement asymptotique.

D'autre part, on a

$$\int_{B_r(s)} e^{i\tau\varphi}\theta\,g dx = \int_{Br} \exp(s\,\xi)^* \left[e^{i\tau\varphi}\theta\,g dx\right].$$

Désignons par $e^{i\tau\varphi}(\theta\,g)_s\,dx$ la restriction à $\mathbf{R}_n$ de $\exp(s\,\xi)^*\left[e^{i\tau\varphi} g\,\theta\,dx\right]$; pour $s > 0$ assez petit, on a les propriétés suivantes :

(*a*) $\operatorname{Im}\varphi_s \geqq 0$, et φ_s n'a pas de point critique dans B_r.

(*b*) $(\theta\,g)_s$ est à support compact dans B_r.

(*c*) Au voisinage de 0, on a

$$\varphi_s = \varphi \qquad \text{et} \qquad (\theta\,g)_s = \theta\,g = g.$$

Il résulte aisément de là que

$$\int_{B_r} e^{i\tau\varphi}\theta\,g dx \qquad \text{et} \qquad \int_{B_r} e^{i\tau\varphi_s}(\theta\,g)_s\,dx$$

ont même développement asymptotique pour $\tau \to +\infty$. Cela démontre la proposition.

On définira de même

$$\Gamma^- \in H_n(X, X^-) \qquad \text{et} \qquad \gamma^- = \partial\Gamma^- \in H_{n-1}(X^-)$$

tels qu'on ait une formule analogue à (7.6) pour $\tau \to -\infty$.

Pour « expliciter » les développements obtenus, désignons par $\gamma^+(it)$ la classe de $H_{n-1}(X(it))$ $(t > 0)$ obtenue en « concentrant » γ^+ dans $X(it)$. D'après les calculs du paragraphe 6, si l'on a

$$(7.7)\qquad \int_{\gamma^+(it)} \hat{f}\frac{dx}{d\varphi} = \sum d_{\alpha,q}(it)^{\alpha}(\log it)^q \qquad \left(\arg it = \frac{\pi}{2}\right),$$

les coefficients de (7.4) seront donnés par

$$(7.8)\qquad \sum_q c_{\alpha,q}\tau^{-(\alpha+1)}(\log \tau)^q = \sum_q d_{\alpha,q}\frac{d^q}{d\alpha^q}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(-i\tau)^{\alpha+1}} \qquad \left(\arg -i\tau = -\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour terminer, donnons, sans détailler les démonstrations, quelques indications sur la comparaison de ce résultat avec celui que donne (7.5). Nous nous limiterons pour cela au cas où f change de signe dans $\mathbf{R}^n$, le cas opposé étant trivial [en effet, $\delta(t)$ est alors compact, l'intégrale (7.2) se ramène immédiatement aux intégrales traitées dans les paragraphes précédents, et les deux méthodes de « calcul » du développement (7.4) sont trivialement équivalentes].

Tout d'abord, observons que la connaissance des $c_{\alpha,q}$ détermine entièrement les $a_{\alpha,q}$ et $b_{\alpha,q}$ pour $\alpha \notin \mathbf{Z}$ ou $q \neq 0$, et les $a_{\alpha,q}-(-1)^{\alpha} b_{\alpha,0}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) puisqu'une fonction intégrable dont la transformée de Fourier est à décroissance rapide est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ [on pourrait aussi vérifier directement cette assertion sur la formule (7.5), ce qui serait particulièrement fastidieux]. Comme les $c_{\alpha,q}$ sont d'autre part donnés par (7.8), on en tire la conséquence suivante :

THÉORÈME (7.9). — *S'il existe un f vérifiant $a_{\alpha,q}(f) \neq 0$, alors*

1° *Pour* $\alpha \notin \mathbf{Z}$, $\exp(2\pi i\alpha)$ *est valeur propre de la monodromie h de φ de multiplicité $\geqq q+1$ dans le polynôme minimal de φ.*

2° *Pour* $\alpha \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$, $\exp(2\pi i\alpha) = 1$ *est valeur propre de h, de multiplicité $\geqq q$.*

Il résulte aussitôt de là que, si s est un pôle du prolongement analytique de $\mathrm{Y}(\varphi)\varphi^s$ (*voir* [4] ou [5]; on note ici Y la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$), alors $s \in \mathbf{Z}$, ou bien $\exp(-2\pi is)$ est une valeur propre de h; en particulier, soit s_0 la plus grande valeur de $s \in \mathbf{R}$ pour laquelle $\mathrm{Y}(\varphi)\varphi^s$ ne soit pas intégrable au voisinage de 0; on a évidemment $s_0 \geqq -1$ [puisqu'au voisinage de $x \in \mathbf{R}^n$ $x \neq 0$, avec $\varphi(x) = 0$, $\mathrm{Y}(\varphi)\varphi^{-1}$ n'est pas intégrable]. Par suite, on a $s_0 = -1$, ou bien $\exp(-2\pi is_0)$ est valeur propre de h.

Ces résultats sont en fait un cas particulier de la formule suivante : désignons par $\mathrm{Var}\int_{\delta(t)} f(dx/d\varphi)$ $(t > 0)$ le développement asymptotique

$$\sum a_{\alpha,q}t^{\alpha}(\log t)^q\big|_{\arg t = 2\pi} - \sum a_{\alpha,q}t^{\alpha}(\log t)^q\big|_{\arg t = 0};$$

désignons d'autre part, par $\mathrm{Var}\,\delta(t) \in \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{X}(t))$ la *variation* au sens de Lefschetz de $\delta(t)$; alors, on a

$$(7.10)\qquad \mathrm{Var}\int_{\delta(t)} f\frac{dx}{d\varphi} = \int_{\mathrm{Var}\,\delta(t)} \hat{f}\frac{dx}{d\varphi}.$$

[Rappelons que la variation se définit ainsi : comme la fibration de X est triviale loin de 0, on peut réaliser l'action de la monodromie sur $\mathrm{X}(t)$ par un homéomorphisme H_t

à support compact unique à isotopie près; alors $H_t \delta(t) = \delta(t)$ hors d'un compact, donc $H_t \delta(t) - \delta(t)$ est un cycle de $X(t)$, dont la classe d'homologie est par définition $\operatorname{Var} \delta(t)$.]

Il est probable que la formule (7.10) peut s'établir directement (et facilement) sans passer par l'intermédiaire des intégrales asymptotiques. Signalons cependant qu'elle peut, en tout cas, être établie à partir de la comparaison de (7.5) et (7.8), quoique d'une manière un peu pénible. Pour cela, on opère ainsi :

Désignons par $\gamma^+(t)$ $(t > 0)$ la classe de $H_{n-1}(X(t))$ obtenue à partir de $\gamma^+(it)$ par une rotation de $-\pi/2$, par $h_* \gamma^+(it)$ sa transformée par la monodromie (i. e. par une rotation de 2π), et par $\gamma^-(t)$ la classe de $H_{n-1}(X(t))$ obtenue par une rotation de $\pi/2$ à partir de $\gamma^-(-it)$; un calcul d'identification à partir de (7.5) et (7.8) montre qu'on a

$$\operatorname{Var} \int_{\delta(t)} f \frac{dx}{d\varphi} = \int_{h_*\gamma^+(t)-\gamma^-(t)} \hat{f} \frac{dx}{d\varphi}.$$

D'autre part, en utilisant « l'équivalence » de la fibration de X avec la « fibration de Milnor » de la sphère $|x| = r$ (*voir* Milnor [18]), on montre qu'on a $h_* \gamma^+(t) - \gamma^-(t) = \operatorname{Var} \delta(t)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. A'Campo, *Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes* (*Invent. Math.*, vol. 20, 1973, p. 147-169).

[2] V. I. Arnol'd, *Normal forms for functions near degenerate critical points* (*Funct. Anal. and appl.*, 6-4, 1972, p. 254-272.)

[3] V. I. Arnol'd, *Remarques sur la méthode de la phase stationnaire* [*Uspekhi Mat. Nauk*, 28-5, 1973, p. 17-45, (en russe)].

[4] M. F. Atiyah, *Resolution of singularities and division of distributions* (*Comm. pure and appl. Math.*, vol. 23, 1970, p. 145-150).

[5] I. N. Bernstein et S. I. Gelfand, *Meromorphic property of the function* P^λ, (*Funct. Anal. and appl.*, 3-1, 1969, p. 84-85).

[6] E. Brieskorn, *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen* (*Manuscripta Math.*, vol. 2, 1970, p. 103-161).

[7] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers* (*Lecture notes in Math.*, n° 163, Springer-Verlag, 1970).

[8] R. Gerard et A. H. M. Levelt, *Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 23, 1973, p. 157-195).

[9] P. A. Griffiths, *Monodromy of homology and periods of Integrals on Algebraic Manifolds*, Notes miméographiées, Princeton University, 1968).

[10] M. Herrera, *Integration on a semi-analytic set* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 94, 1966, p. 141-180).

[11] P. Jeanquartier, *Développement asymptotique de la distribution de Dirac*, (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, série A, 1970, p. 1159-1161).

[12] N. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem* (*Publ. Math. I. H. E. S.*, vol. 39, 1971, p. 355-412.)

[13] S. Lojasiewicz, *Triangulation of semi-analytic sets* (*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, III-18-4, 1964, p. 449-474).

[14] B. Malgrange, *Sur les points singuliers des équations différentielles*. A paraître dans l'*Enseignement Mathématique* (*voir* aussi *Séminaire Goulaouic-Schwartz*, Exposés, nos 20-22, 1971-1972).

[15] B. Malgrange, *Sur les polynômes de I. N. Bernstein* (à paraître).

[16] B. MALGRANGE, *Letter to the editors* (*Invent. Math.*, vol. 20, 1973, p. 171-172).
[17] Y. MANIN, *Moduli Fuschsiani* (*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, III-19, 1965, p. 113-126).
[18] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces* (*Ann. of Math. Studies*, n° 61, Princeton, 1968).
[19] N. NILSSON, *Some growth and ramification properties of certain integrals* (*Arkiv for Math.*, vol. 5, 1963-1965, p. 527-540).
[20] V. P. PALAMODOV, *On the multiplicity of holomorphic mappings* (*Funct. Anal. and appl.*, vol. 1-3, 1967, p. 54-65).
[21] M. SEBASTIANI, *Preuve d'une conjecture de Brieskorn* (*Man. Math.*, vol. 2, 1970, p. 301-308).
[22] M. SEBASTIANI et R. THOM, *Un résultat sur la monodromie* (*Invent. Math.*, vol. 13, 1971, p. 90-96.)
[23] J.-P. SERRE, *Algèbre locale; multiplicités* (*Lectures notes in Math.*, n° 11, Springer-Verlag, 1965).
[24] J.-C. TOUGERON, *Idéaux de fonctions différentiables* (*Ergeb. der Math.*, vol. 71, Springer-Verlag, 1972).
[25] W. WASOW, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, (Interscience Publishers, 1965).

(Manuscrit reçu le 6 mars 1974.)

Bernard MALGRANGE,
Institut de Mathématiques pures,
B. P. n° 116,
38042 Saint-Martin-d'Hères.