



## Fleurs, arbres et cellules: un invariant galoisien pour une famille d'arbres

LEONARDO ZAPPONI

*Université de Franche-Comté, Laboratoire de Mathématiques, 16, route de Gray,  
25030 Besançon Cedex, France, e-mail: zapponi@math.univ-fcomte.fr*

(Received: 5 November 1997; accepted: 5 April 1999).

**Abstract.** This paper is principally concerned with the action of the absolute Galois group on a family of dessins d'enfants i.e. isomorphism classes of coverings of the projective line unramified outside three points. More precisely, we prove a generalisation of a conjecture proposed by Yu. Kotchetkov in 1997. The main tool used in this work is a correspondence between dessins d'enfants and ribbon graphs arising from the theory of Strebel differentials.

**Mathematics Subject Classifications (2000):** 14H30, 14H25, 14D22, 14G05.

**Key words:** covers of the projective line, dessins d'enfants, moduli spaces, Strebel differentials

**Mots clés:** Revêtements de la sphère de Riemann, dessins d'enfants, espaces des modules, différentielles de Strebel.

### FLEURS

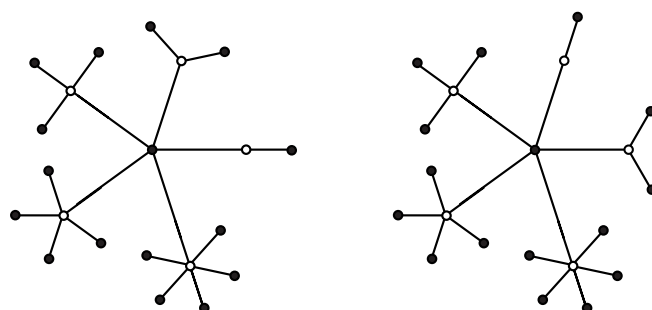
La théorie des courbes algébriques, dans ses divers aspects, est le point de rencontre de plusieurs disciplines mathématiques, allant de la théorie des nombres (corps de définition, points rationnels, ...) à la topologie (groupe fondamental, ...), en passant par l'analyse. La théorie des dessins d'enfants de Grothendieck, où l'on assimile un revêtement de la sphère de Riemann à une "carte finie" (un objet topologico-combinatoire) est peut-être l'expression la plus élégante et raffinée de cette multiplicité. Son but essentiel, qui a été d'ailleurs le moteur initial de ce travail, consiste à décrypter l'action naturelle du groupe de Galois absolu  $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  (noté  $\Pi$  dans [G]) sur de telles structures. A ce propos, nous avons retenu ces quelques lignes de l'Esquisse d'un programme [G]:

*"Voici donc ce mystérieux groupe  $\Pi$  intervenir comme agent transformateur sur des formes topologico-combinatoires de la nature la plus élémentaire qui soit, ...*

*... il y a une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part, et la géométrie des courbes algébriques définies sur des corps de*

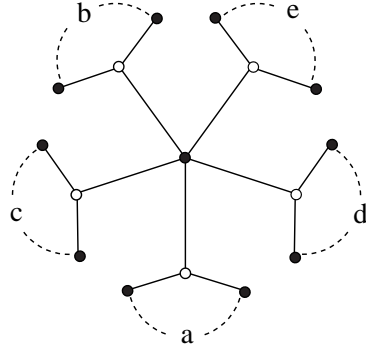
*nombres, de l'autre. Ce résultat profond, joint à l'interprétation algébrique-géométrique des cartes finies, ouvre la porte sur un monde nouveau, inexploré – et à la portée de main de tous, qui passent sans le voir.”*

Pour affronter ce problème, la stratégie adoptée le plus souvent se réduit à la recherche d'invariants galoisiens combinatoires simples pour des familles de dessins d'enfants. Ce travail s'avère d'autant plus complexe qu'il n'est pas facile de se faire une idée intuitive de l'action de  $G_{\mathbb{Q}}$ . Le recours à l'informatique a été, il faut le dire, une source inépuisable de renseignements et d'inspirations. Beaucoup de conjectures ont été formulées ou réfutées suite à des calculs explicites par ordinateur (cf. Maple, PARI, ...). Dans ce contexte, il est commode de restreindre le domaine de recherche aux arbres – une classe particulière de dessins d'enfants – qui, par leur simplicité combinatoire, sont les meilleurs candidats pour une première étude systématique. Cet article est lui-même le résultat de longues observations expérimentales, étroitement liées à un exemple présenté par Leila Schneps il y a quelques années: deux arbres, connus depuis comme les “fleurs de Leila”, qui ne sont pas conjugués tout en ayant (pratiquement) les mêmes caractéristiques combinatoires.



*Les deux arbres de diamètre 4 connus sous le nom de “fleurs de Leila”.*

Dans ce cas particulier, le groupe de Galois absolu n'a donc pas le droit de permuter deux “pétales” adjacentes de la fleur. Le fait étonnant est que cette propriété n'est pas générale mais plutôt exceptionnelle. D'autres exemples “anormaux” ont été répertoriés depuis, mais jusqu'au début de l'année 1997, aucune hypothèse théorique pouvant expliquer une telle dichotomie n'avait été proposée. C'est à cette date que le mathématicien russe Kotchetkov [Ko] a conjecturé qu'un tel phénomène ne se produisait que dans de circonstances bien particulières, liées aux valences des sommets des arbres en question. Cette conjecture concernait les arbres de diamètre 4 à cinq branches. Ces derniers, introduits par G. Shabat dans le contexte



Un arbre de type  $IV_{a,b,c,d,e}$ .

des dessins d'enfants [Sh], constituent un excellent exemple du conflit entre complexité arithmétique et simplicité combinatoire: fixons cinq entiers positifs  $a < b < c < d < e$ . Nous dirons qu'un arbre est de type  $IV_{a,b,c,d,e}$  s'il possède un seul sommet central de valence 5 (le "cœur") connecté à cinq sommets de valences respectives  $a, b, c, d, e$  (les "pétales").

Le type d'un tel arbre est un invariant galoisien et  $G_{\mathbb{Q}}$  opère en permutant les pétales. En particulier il existe exactement 24 arbres de type  $IV_{a,b,c,d,e}$ . En ayant introduit ces notation, la conjecture de Kotchetkov peut s'énoncer ainsi:

**CONJECTURE.** Soient  $a < b < c < d < e$  des entiers positifs. Si  $abcde(a + b + c + d + e)$  est un carré parfait alors les arbres de type  $IV_{a,b,c,d,e}$  forment au moins deux orbites galoisiennes.

Par exemple, les fleurs de Leila sont des arbres de type  $IV_{2,3,4,5,6}$  et vérifient  $abcde(a + b + c + d + e) = 14400 = (120)^2$ .

Une première version de l'article était consacrée à la démonstration de cette conjecture. Il s'est vite avéré que les techniques utilisées pouvaient être appliquées dans un contexte bien plus général, et cette version définitive en est le témoignage. En ce qui concerne sa structure, on peut distinguer deux parties principales: en un premier temps, la question est affrontée de manière purement algébrique. Les méthodes sont élémentaires et la nature particulière du problème permet d'introduire un invariant galoisien (algébrique) simple pour une famille d'arbres très générale. Cet invariant est un nombre algébrique  $\delta$ , tel que le  $\delta^2$  est rationnel et ne dépend que des caractéristiques combinatoires de l'arbre (liste des indices de ramification). En se restreignant aux familles étudiées par Kotchetkov, on obtient

$$\delta^2 = \frac{abcde}{a + b + c + d + e}.$$

En particulier,  $\delta$  est réel ou imaginaire pur, et ce n'est que son signe qui doit être

déterminé. Un calcul par ordinateur montre que cet invariant est capable de séparer les fleurs de Leila et de nombreux autres exemples similaires. Malheureusement, les simples considérations algébriques ne tiennent pas compte de la nature topologico-combinatoire du problème et une expression explicite de  $\delta$  reste peu envisageable.

On introduit alors les graphes enrubannés (métriques), qui sont une généralisation “continue” du concept de dessin d’enfant. Ils proviennent des travaux de Penner et Kontsevich sur la décomposition cellulaire des espaces des modules des courbes “décorées”. Ces idées s’appuient sur un résultat fondamental de K. Strebel concernant la géométrie des différentielles quadratiques méromorphes sur une surface de Riemann compacte. Les premiers paragraphes de la deuxième partie de l’article sont un survol de cette théorie. L’analogie avec les dessins d’enfants est frappante et peut être poussée au delà du simple aspect combinatoire. C’est ce qui est fait dans le théorème 9, qui peut être considéré comme la clef de voûte de tout le travail. Les méthodes introduites dans la première partie se transposent naturellement dans ce nouveau contexte et l’avantage essentiel est qu’il est possible de parler de déformation et de continuité. L’étape successive est alors de construire un complexe cellulaire topologique (proche de ceux étudiés par Penner ou Kontsevich [P1],[P2],[K]) paramétrisant les arbres étudiés (qui correspondent à des points à “coordonnées entières”). A la lumière de cette généralisation, il est possible de calculer l’invariant  $\delta$  de façon simple et purement combinatoire à partir des données topologiques de l’arbre.

## ARBRES

### 1. Rappels et définitions

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Une *application de Belyi* est une fonction méromorphe  $\beta$  sur  $X$  induisant un revêtement  $\beta:X \rightarrow \mathbb{P}^1$  non ramifié en dehors de  $\{0, 1, \infty\}$ . Le couple  $(X, \beta)$  est appelé *paire de Belyi*. Par un critère de rigidité de Weil,  $X$  et le revêtement lui-même peuvent être définis sur un corps de nombres. En 1978, le mathématicien russe Belyi [B] a démontré que la réciproque est vraie, i.e. il est possible de construire une application de Belyi pour toute courbe projective définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , en répondant ainsi à une question posée par A. Grothendieck [G]. Deux paires de Belyi  $(X, \beta)$  et  $(X', \beta')$  sont isomorphes s’il existe un isomorphisme analytique  $\Phi:X \rightarrow X'$  tel que  $\beta = \beta' \Phi$ . Les classes d’isomorphisme de paires de Belyi sont appelées *dessins d’enfants*. Cette terminologie, introduite par A. Grothendieck [G], est justifiée par la construction topologique suivante: étant donnée une application de Belyi, la préimage de l’intervalle fermé  $[0, 1]$  est un CW-complexe  $W$  immergé dans la surface de Riemann induisant une décomposition cellulaire de celle-ci. Les sommets de  $W$  sont les préimages de 0 et 1 et sont appelés sommets *positifs* et *négatifs* respectivement; tous les sommets voisins d’un sommet donné

sont du signe opposé. Il existe une préimage unique de  $\infty$  dans chaque face du dessin. Une *arête* est une composante connexe de la préimage de l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ . Le fait essentiel est que les données combinatoires de  $W$  (tenant compte de l'immersion) déterminent complètement le revêtement. Pour une introduction complète et détaillée à la théorie des dessins d'enfants nous renvoyons la lectrice ou le lecteur à [S].

Un *arbre* correspond à une paire de Belyi  $(\mathbb{P}^1, \beta)$ , où  $\beta$  est un polynôme; ceci revient à dire que le dessin correspondant a une seule face. Soient  $p_1 \leq \dots \leq p_n$  et  $n_1 \leq \dots \leq n_m$  des entiers positifs tels que

$$p_1 + \dots + p_n = n_1 + \dots + n_m = n + m - 1$$

Nous dirons qu'un arbre  $T$  est de type  $V_{p_1, \dots, p_n}^{n_1, \dots, n_m}$  s'il a  $n$  sommets positifs de valences respectives  $p_1, \dots, p_n$  et  $m$  sommets négatifs de valences  $n_1, \dots, n_m$ . Un tel arbre est dit *positivement générique* (resp. *négativement générique*) si  $p_1 < \dots < p_n$  (resp.  $n_1 < \dots < n_m$ ). L'ensemble des arbres de type  $V_{p_1, \dots, p_n}^{n_1, \dots, n_m}$  est une *classe de valence* (cf. [S]).

## 2. Modèles normalisés. Polynômes caractéristiques

Si  $\beta(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$  est un modèle polynomial associé à un arbre  $T$  de type  $V_{p_1, \dots, p_n}^{n_1, \dots, n_m}$ , nous écrirons désormais

$$\beta(X) = c(X - X_1)^{p_1} \dots (X - X_n)^{p_n} = 1 + c(X - Y_1)^{n_1} \dots (X - Y_m)^{n_m},$$

où  $c \in \overline{\mathbb{Q}}$  est une constante. Si  $c = 1$  nous dirons que  $\beta$  est un *modèle normalisé*. Quitte à composer  $\beta$  avec une homothétie  $\Phi(X) = aX$ , on peut supposer que le modèle  $\beta$  est normalisé. Deux modèles normalisés  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont isomorphes si et seulement si  $\beta_2(X) = \beta_1(\zeta X + a)$  où  $\zeta$  est une racine  $(n + m - 1)$ -ième de l'unité et  $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ . De manière générale les polynômes définis par

$$p_+(X) = (X - X_1) \dots (X - X_n) \quad \text{et} \quad p_-(X) = (X - Y_1) \dots (X - Y_m)$$

sont appelés *polynômes caractéristiques* de  $\beta$ .

**PROPOSITION 1.** Soit  $\beta(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$  un modèle normalisé associé à un arbre de type  $V_{p_1, \dots, p_n}^{n_1, \dots, n_m}$ . On a alors l'identité polynomiale

$$\sum_{i=1}^m \frac{n_i}{X - Y_i} - \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{X - X_i} = \frac{n + m - 1}{p_+(X)p_-(X)}, \quad (*)$$

où  $p_+(X) = \prod_{i=1}^n (X - X_i)$  et  $p_-(X) = \prod_{i=1}^m (X - Y_i)$  sont les polynômes caractéristiques de  $\beta$ .

*Démonstration.* La relation (\*) est conséquence des deux identités suivantes:

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{X - X_i} = (n + m - 1) \frac{\beta(X) - 1}{p_+(X)p_-(X)}, \quad (**)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{n_i}{X - Y_i} = (n + m - 1) \frac{\beta(X)}{p_+(X)p_-(X)}.$$

Démonstrons la première de ces égalités (pour la deuxième, il suffit de remplacer  $\beta$  par  $\beta - 1$ ): le terme de gauche est simplement  $\beta'(X)/\beta(X)$ , calculé en partant de l'expression de  $\beta$  donnée plus haut. D'autre part,

$$\begin{aligned} \beta'(X) &= (n + m - 1) \frac{\beta(X)(\beta(X) - 1)}{p_+(X)p_-(X)} \\ &= (n + m - 1)(X - X_1)^{p_1-1} \dots (X - X_n)^{p_n-1} (X - Y_1)^{n_1-1} \dots (X - Y_m)^{n_m-1}. \end{aligned}$$

En divisant par  $\beta(X)$  on arrive à l'égalité voulue.  $\square$

Le corollaire suivant décrit le lien entre les zéros de  $\beta(\beta - 1)$  et les entiers  $p_1, \dots, p_n, n_1, \dots, n_m$ . Dans la suite, pour deux polynômes  $p$  et  $q$ , nous indiquerons par  $\Delta(p)$  le discriminant de  $p$  et par  $R(p, q)$  le résultant de  $p$  et  $q$ .

**COROLLAIRE 2.** *Avec les hypothèses de la proposition 1,*

$$\Delta(p_+)R(p_+, p_-) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{(n + m - 1)^n}{p_1 \dots p_n},$$

$$\Delta(p_-)R(p_-, p_+) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(n + m - 1)^m}{n_1 \dots n_m}.$$

*En particulier, on a*

$$p_1 \dots p_n (n + m - 1)^m \Delta(p_+) = (-1)^{\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}} n_1 \dots n_m (n + m - 1)^n \Delta(p_-).$$

*Démonstration.* En multipliant l'identité (\*) par  $p_+(X)p_-(X)$  et en posant  $X = X_i$  on obtient

$$p'_+(X_i)p_-(X_i) = -\frac{n + m - 1}{p_i}.$$

De même, pour  $X = Y_j$  on arrive à

$$p'_-(Y_j)p_+(Y_j) = \frac{n + m - 1}{n_j}.$$

Il suffit alors de considérer le produit des égalités pour  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, m$  respectivement.  $\square$

Remarquons que les zéros de  $\beta$  ont été numérotés de telle sorte que  $X_i$  corresponde au sommet de valence  $p_i$ . Une telle numérotation est bien déterminée uniquement si l'arbre est positivement générique.

### 3. Action de $G_{\mathbb{Q}}$ et corps des modules

De manière générale, le corps des modules d'une paire de Belyi  $(X, \beta)$  (définie sur un corps de nombres) est le sous-corps  $M_\beta$  de  $\overline{\mathbb{Q}}$  fixé par les éléments  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  tels que  ${}^\sigma(X, \beta) \cong (X, \beta)$ . Si  $(X, \beta) \cong (X', \beta')$ , alors  $M_\beta = M_{\beta'}$ . Il est donc possible de parler du corps des modules d'un dessin d'enfant.

Les résultats du paragraphe précédent permettent d'avoir quelques informations sur le corps des modules d'un arbre générique (positivement ou négativement). Soit  $\beta$  un modèle associé à un arbre de type  $V_{p_1, \dots, p_n}^{n_1, \dots, n_m}$ . Les éléments  $\tau \in G_{M_\beta}$  sont déterminés par la relation  ${}^\tau\beta(X) = \beta(a_\tau X + b_\tau)$  avec  $a_\tau, b_\tau \in \overline{\mathbb{Q}}$ . Si  $n, n_1, \dots, n_m$  sont impairs et l'arbre est positivement générique, posons

$$\delta_+(\beta) = \frac{\prod_{i < j} (X_i - X_j)}{q_-(X_1) \dots q_-(X_n)},$$

où  $q_-(X) = \prod_i (X - Y_i)^{\frac{n_i-1}{2}}$ . Remarquons que si  $\beta_1$  est isomorphe à  $\beta_2$  i.e.  $\beta_2(X) = \beta_1(aX + b)$ , alors  $\delta_+(\beta_1) = \delta_+(\beta_2)$ . En particulier,  $\delta_+(\beta)$  appartient au corps des modules de l'arbre  $T$  et nous l'indiquerons par  $\delta_+(T)$ . De plus, en se réduisant à un modèle normalisé,  $q_-(X_i)^2 p_-(X_i) = \beta(X_i) - 1 = -1 \Rightarrow (q_-(X_1) \dots q_-(X_n))^2 \times p_-(X_1) \dots p_-(X_n) = R(p_+, q_-)^2 R(p_+, p_-) = (-1)^n = -1$  et le corollaire 2 affirme alors que

$$\delta_+(T)^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n+m-1)^n}{p_1 \dots p_n}.$$

Si  $m, p_1, \dots, p_n$  sont impairs et  $T$  est négativement générique, on définit de façon analogue  $\delta_-(T)$  et on obtient

$$\delta_-(T)^2 = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(n+m-1)^m}{n_1 \dots n_m}.$$

Le corollaire suivant est un résumé de ces quelques considérations. Pour des raisons de symétrie il ne traite que le cas positivement générique.

**COROLLAIRE 3.** Soient  $T$  et  $T'$  deux arbres positivement génériques de type  $V_{p_1, \dots, p_n}^{n_1, \dots, n_m}$  avec  $n, n_1, \dots, n_m$  impairs. Posons  $\Delta = (-1)^{\frac{n-1}{2}} p_1 \dots p_n (n+m-1)$  et  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ .

- (i) Si  $\Delta$  n'est pas un carré, alors  $T$  n'est pas défini sur  $\mathbb{Q}$ . En particulier,  $K$  est contenu dans son corps des modules.
- (ii) Si  $T$  et  $T'$  sont conjugués par un élément de  $G_K$  alors  $\delta_+(T) = \delta_+(T')$ .

## CELLULES

### 1. $n$ -différentielles sur une surface de Riemann. Diviseurs et résidus

Nous allons commencer cette deuxième partie en introduisant quelques notions et notations qui seront utiles par la suite. Soient  $\mathbf{X}$  une surface de Riemann compacte et  $n \geq 0$  un entier. Une  $n$ -forme différentielle (ou simplement une  $n$ -différentielle) est par définition une section méromorphe  $\omega$  du fibré  $\chi_{\mathbf{X}}^{\otimes n}$  où  $\chi_{\mathbf{X}}$  est le fibré canonique de  $\mathbf{X}$ . Ceci revient à dire que si  $z$  est un paramètre local pour un ouvert  $U \subset \mathbf{X}$ , on a  $\omega = f(z)dz^{\otimes n}$  où  $f(z)$  est une fonction méromorphe sur  $U$ . Dans la suite,  $\Omega^n(\mathbf{X})$  désignera le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des  $n$ -différentielles sur  $\mathbf{X}$ . Pour  $n = 0$  on retrouve le corps  $\mathbb{C}(\mathbf{X})$  des fonctions méromorphes sur  $\mathbf{X}$ . Si  $n = 2$  nous parlerons de *différentielles quadratiques*.

Soit  $\text{Div}(\mathbf{X})$  le groupe des diviseurs de  $\mathbf{X}$ . Si  $D \in \text{Div}(\mathbf{X})$ , nous écrirons  $D = p_1[X_1] + \dots + p_n[X_n]$  avec  $p_i \in \mathbb{Z}$  et  $X_i \in \mathbf{X}$ . Le diviseur  $D$  est *simple* si  $p_1 = \dots = p_n = 1$ . Pour tout  $\mathbb{Z}$ -module  $A$ , posons  $\text{Div}_A(\mathbf{X}) = \text{Div}(\mathbf{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$  (c'est le groupe des diviseurs de  $\mathbf{X}$  à coefficients dans  $A$ ). Si  $A$  est un sous- $\mathbb{Z}$ -module de  $B$  alors  $\text{Div}_B(\mathbf{X})/\text{Div}_A(\mathbf{X})$  est canoniquement isomorphe à  $\text{Div}_{B/A}(\mathbf{X})$ . On a de plus une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Div}_A^0(\mathbf{X}) \rightarrow \text{Div}_A(\mathbf{X}) \xrightarrow{\deg} A \rightarrow 0,$$

où  $\deg(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = a_1 + \dots + a_n$ . Si  $A$  est un groupe additif totalement ordonné, considérons le sous-ensemble  $\text{Div}_A^+(\mathbf{X})$  de  $\text{Div}_A(\mathbf{X})$  formé par les éléments positifs i.e.  $D = a_1[X_1] + \dots + a_n[X_n]$  où  $0 < a_i \in A$ .

Si  $\omega$  est une  $n$ -différentielle sur  $\mathbf{X}$  et  $z$  est une uniformisante en un point  $P \in \mathbf{X}$ , nous pouvons écrire  $\omega = z^v(a_0 + a_1z + \dots)dz^{\otimes n}$  avec  $a_0 \in \mathbb{C}^*$ . L'entier  $v = v_P(\omega)$  est invariant par changement de paramètre local, c'est l'*ordre* de  $\omega$  en  $P$ . On a  $v_P(\omega) \neq 0$  pour un nombre fini de points; il est donc possible de définir une application  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\Omega^n(\mathbf{X}) \xrightarrow{\text{div}} (\mathbf{X})$$

$$\omega \mapsto \sum_{P \in \mathbf{X}} v_P(\omega)[P]$$

On a alors la relation  $\deg(\text{div}(\omega)) = 2n(g - 1)$ , où  $g$  est le genre de  $\mathbf{X}$ . Finalement, autour d'un point  $P \in \mathbf{X}$ , en développant en série on obtient

$$\omega = (\dots + a_{-n-1}z^{-n-1} + a_{-n}z^{-n} + a_{-n+1}z^{-n+1} + \dots)dz^{\otimes n},$$

où  $a_{-n} \in \mathbb{C}$  est invariant par changement de paramètre. Nous écrirons  $a_{-n} = \text{Res}_P(\omega)$  et nous dirons, par abus de langage, que  $a_{-n}$  est le *résidu* de  $\omega$



en  $P$ . Pour  $n > 0$ , nous pouvons définir une deuxième application  $\mathbb{C}$ -linéaire

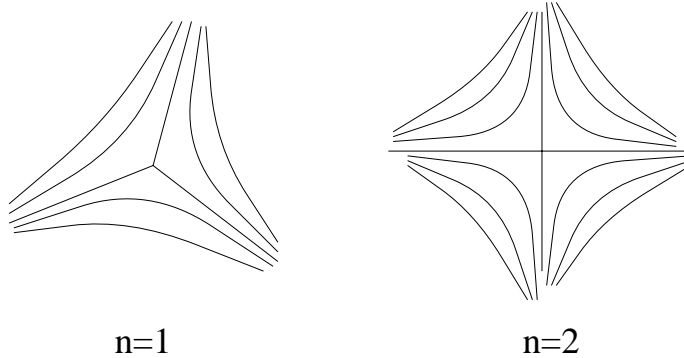
$$\Omega^n(\mathbf{X}) \xrightarrow{\text{Res}} \text{Div}_{\mathbb{C}}(\mathbf{X})$$

$$ga \mapsto \sum_{P \in \mathbf{X}} \text{Res}_P(\omega)[P]$$

Pour  $n = 1$  on a la relation  $\deg(\text{Res}(\omega)) = 0$ .

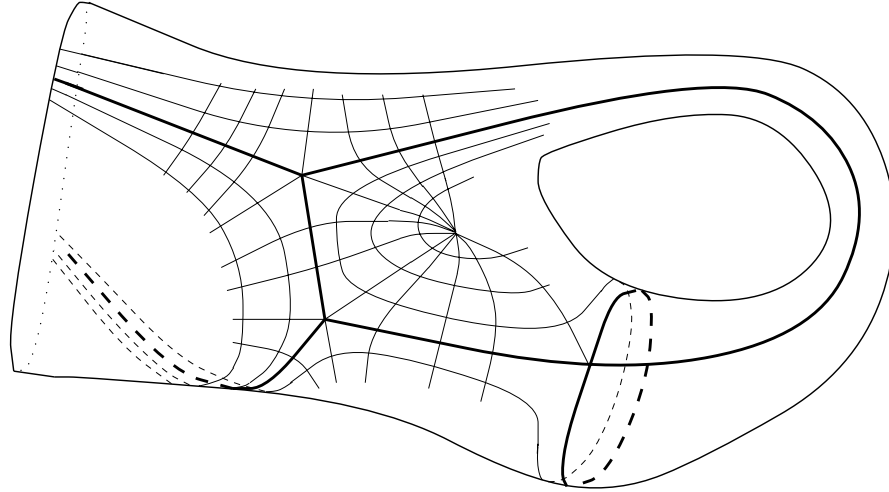
## 2. Différentielles de Strebel, graphes enrubannés

La théorie des différentielles de Strebel est, par de nombreux aspects, une généralisation de la théorie des dessins d'enfants. Elle permet, entre autre, de définir un concept de "déformation". Fixons une surface de Riemann compacte  $\mathbf{X}$  de genre  $g$  et considérons une différentielle quadratique  $\omega \in \Omega^2(\mathbf{X})$ . Soient  $\mathbf{Z}$  l'ensemble des zéros de  $\omega \in \Omega^2(\mathbf{X})$  et  $\mathbf{P}$  l'ensemble de ses pôles. Considérons les ouverts de  $\mathbf{X}$  définis par  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X} - \mathbf{P}$  et  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 - \mathbf{Z}$ . On définit une métrique localement euclidienne sur



*Comportement des trajectoires horizontales autour d'un zéro d'ordre  $n$ .*

$\mathbf{X}_1$  en posant  $ds^2 = \frac{1}{4\pi^2} |\omega|$ . Dans la suite, nous parlerons de  $\omega$ -métrique, celle-ci pouvant être étendue de façon naturelle à  $\mathbf{X}_0$ . Une  $\omega$ -géodésique  $\gamma$  est alors déterminée par la relation  $\text{Arg}(\omega(\gamma')) = c^{\text{te}}$ . Les *trajectoires horizontales* (resp. *verticales*) sont les  $\omega$ -géodésiques  $\gamma$  telles que  $\omega(\gamma') \leq 0$  (resp.  $\omega(\gamma') \geq 0$ ). Cette appellation est justifiée par le fait que les feuilletages qu'elles induisent sont localement isométriques aux feuilletages horizontaux et verticaux usuels. La figure précédente décrit l'allure des trajectoires horizontales autour des zéros de  $\omega$  (seuls points singuliers pour la  $\omega$ -métrique sur  $\mathbf{X}_0$ ). Une trajectoire horizontale est dite *critique* si elle passe par un des zéros de  $\omega$ . Il existe  $n + 2$  trajectoires critiques sortant d'un zéro de  $\omega$  d'ordre  $n$ .



*Décomposition cellulaire induite par une différentielle de Strebel.*

A partir de maintenant nous supposons que *tous les pôles de  $\omega$  sont doubles*. Un tel choix est naturellement lié au comportement des trajectoires horizontales autour de  $P \in \mathbf{P}$ . En effet, si  $\alpha_P = \text{Res}_P(\omega) > 0$  celles-ci sont fermées et ont toutes même  $\omega$ -longueur, égale à  $\sqrt{\alpha_P}$ . Nous pouvons définir à présent le *disque maximal*  $D_0(P)$  comme étant l'union des trajectoires horizontales fermées autour de  $P$ .  $D_0(P)$  est naturellement homéomorphe à un disque pointé. Posons  $D(P) = D_0(P) \cup \{P\}$  et  $\Gamma = \mathbf{X} - \cup_{P \in \mathbf{P}} D(P)$ . Nous dirons que  $\omega$  est une *différentielle de Strebel (cellulaire)* si  $\Gamma$  est l'union des trajectoires critiques, et forme un *CW-complexe connexe* de dimension 1 immergé dans  $\mathbf{X}$ , appelé *graphe critique* de  $\omega$ . En d'autres termes, le  $\omega$ -feuilletage horizontal de  $\mathbf{X}$  détermine une décomposition cellulaire de la surface de Riemann.

Les cellules bidimensionnelles (les *faces*) sont les  $D(P)$  avec  $P \in \mathbf{P}$ . Les *arêtes* sont les composantes connexes de  $\Gamma - \mathbf{Z}$  et les *sommets* sont les éléments de  $\mathbf{Z}$ . La valence de ces derniers est toujours  $\geq 3$ . L'immersion de  $\Gamma$  dans  $\mathbf{X}$  définit un ordre cyclique des arêtes sortant d'un même sommet. Un *CW-complexe connexe*  $\Gamma$  de dimension 1 muni d'un tel ordre et ayant tous les sommets de valence  $\geq 3$  est appelé *graphe enrubanné* (traduction de *ribbon graph* [P1],[P2]). De plus, on associe à toute arête sa  $\omega$ -longueur, et nous parlerons de graphes enrubannés *métriques*. Comme pour les dessins d'enfants, il existe une construction réciproque: on associe canoniquement à tout graphe enrubanné métrique  $\Gamma$  une surface de Riemann  $\mathbf{X}$  et une différentielle de Strebel  $\omega$  sur  $\mathbf{X}$  pour laquelle le graphe critique associé (muni de la  $\omega$ -longueur) s'identifie avec  $\Gamma$  (cf. [Z1]). Si  $P$  est un pôle de  $\omega$ , on a  $\text{Res}_P(\omega) = p^2$  où  $p$  est le périmètre de la face associée à  $P$ .

Nous dirons que  $(\mathbf{X}, \omega)$  est une *paire de Strebel* et que c'est un *modèle* pour le graphe enrubanné métrique correspondant. Deux paires de Strebel  $(\mathbf{X}, \omega)$  et

$(Y, \eta)$  sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme analytique  $\phi : X \rightarrow Y$  tel que  $\phi^*\eta = \omega$ . En particulier, l'ensemble des graphes enrubannés métriques s'identifie avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de paires de Strebel.

Si  $\text{St}(X)$  désigne l'ensemble des différentielles de Strebel sur  $X$ , on obtient par restriction une application  $\text{St}(X) \xrightarrow{\text{Res}} \text{Div}_{\mathbb{R}}^+(X)$ . On a alors le théorème fondamental d'existence et unicité suivant [St]:

**THÉORÈME 4 (Strebel).** Pour toute surface de Riemann compacte  $X$ , l'application Res définit une bijection entre  $\text{St}(X)$  et  $\text{Div}_{\mathbb{R}}^+(X)$ .

### 3. Complexes cellulaires. Décomposition des espaces des modules décorés d'après R.C. Penner et M. Kontsevich. Un survol

Soient  $n$  et  $g$  deux entiers tels que  $g \geq 0$ ,  $n > 0$  et  $2 - 2g - n < 0$ . Considérons l'ensemble  $V_{g,n}$  formé par les graphes enrubannés métriques de genre  $g$  ayant  $n$  faces *numérotées*. Nous allons commencer par définir une topologie sur  $V_{g,n}$ . D'un point de vue purement combinatoire, soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux graphes enrubannés (non métriques) ayant les faces numérotées. Si  $\Gamma$  est obtenu en faisant dégénérer une arête  $A$  de  $\Gamma'$  (en supposant que  $A$  n'est pas une *boucle* i.e. les deux extrémités de  $A$  coïncident) nous dirons que  $\Gamma'$  est obtenu par *éclatement simple* de  $\Gamma$  et que l'arête  $A$  est *exceptionnelle* par rapport à  $\Gamma$ . De manière générale,  $\Gamma'$  est un *éclatement* de  $\Gamma$  s'il est obtenu par une suite d'éclatements simples; nous écrirons  $\Gamma' \rightsquigarrow \Gamma$  et  $\text{Ex}_{\Gamma}(\Gamma')$  sera l'ensemble des arêtes exceptionnelles. Si  $\Gamma' \rightsquigarrow \Gamma$  et  $A$  est une arête non exceptionnelle de  $\Gamma'$ ,  $A^c$  sera par définition l'arête de  $\Gamma$  correspondante. Dans le cas métrique,  $l(A)$  désignera la longueur de l'arête  $A$ . On définit un système fondamental de voisinages ouverts de  $\Gamma \in V_{g,n}$  en posant

$$U_{\epsilon}(\Gamma) = \{\Gamma' \rightsquigarrow \Gamma \mid l(A) < \epsilon \text{ si } A \in \text{Ex}_{\Gamma}(\Gamma') \text{ et } |l(A) - l(A^c)| < \epsilon \text{ sinon}\}.$$

Le type combinatoire du graphe associé à  $\Gamma$  détermine une décomposition cellulaire de  $V_{g,n}$ . La cellule correspondant à un graphe enrubanné  $\Gamma$  (non métrique) ayant  $m$  arêtes s'identifie au quotient de  $\mathbb{R}_+^m$  par l'action d'un groupe fini (celui-ci s'identifiant avec un groupe d'automorphismes combinatoires de  $\Gamma$ ).  $V_{g,n}$  a donc une structure naturelle d'*orbifold topologique*. La strate ouverte est constituée par les cellules associées à des graphes enrubannés ayant toutes les valences des sommets égales à 3. L'opération de *déformation des longueurs* est continue sur  $V_{g,n}$ .

On obtient une construction analogue en considérant l'ensemble  $V_{g,[n]}$  formé par les graphes enrubannés métriques de genre  $g$  ayant  $n$  faces *non numérotées*. On a alors un revêtement d'orbifolds  $V_{g,n} \rightarrow V_{g,[n]}$  et  $V_{g,[n]}$  s'identifie avec le quotient de  $V_{g,n}$  par rapport à l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .

Soit maintenant  $\mathcal{M}_{g,n}$  l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre  $g$  ayant  $n$  points marqués *ordonnés*. Un point de  $\mathcal{M}_{g,n}$  correspond à une classe d'isomorphisme  $[X, (P_1, \dots, P_n)]$ , où  $X$  est une surface de Riemann compacte de

genre  $g$  et  $P_1, \dots, P_n$  sont  $n$  points distincts de  $\mathbf{X}$  (par définition, deux surfaces de Riemann  $n$ -maquées  $(\mathbf{X}, (P_1, \dots, P_n))$  et  $(\mathbf{Y}, (Q_1, \dots, Q_n))$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme analytique  $\Phi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  tel que  $\Phi(P_i) = Q_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ ). Dans la théorie classique,  $\mathcal{M}_{g,n}$  est muni d'une structure différentiable qui en fait un orbifold de dimension (réelle)  $6g - 6 + 2n$ . L'espace des modules *décoré*  $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{déc}}$  est simplement le produit de  $\mathcal{M}_{g,n}$  et de  $\mathbb{R}_+^n$  i.e. on associe à chaque point marqué un réel positif. En reprenant les notations du paragraphe précédent, on peut dire que  $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{déc}}$  paramétrise les classes d'isomorphisme de paires  $(\mathbf{X}, D)$  où  $D$  est un diviseur positif à coefficients réels *muni d'une numérotation* de  $\text{Supp}(D)$ . Il existe une action naturelle du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{déc}}$  et le quotient est noté  $\mathcal{M}_{g,[n]}^{\text{déc}}$ . On retrouve une projection canonique  $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{déc}} \rightarrow \mathcal{M}_{g,[n]}^{\text{déc}}$ .

D'après le théorème de Strebel, on associe à toute surface de Riemann décorée  $(\mathbf{X}, D)$  une unique différentielle de Strebel  $\omega$  (i.e. un graphe enrubonné muni d'une métrique) telle que  $\text{Res}(\omega) = D$ . Cette correspondance est stable par isomorphisme et on obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{g,n}^{\text{déc}} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{V}_{g,n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_{g,[n]}^{\text{déc}} & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \mathbf{V}_{g,[n]} \end{array}$$

Le théorème suivant est le point de départ de la théorie combinatoire des espaces des modules (cf. [K],[P1],[P2]).

**THÉORÈME 5.** *L'application  $\Psi : \mathcal{M}_{g,n}^{\text{déc}} \rightarrow \mathbf{V}_{g,n}$  est un homéomorphisme.*

On en déduit que  $\tilde{\Psi}$  est un homéomorphisme entre  $\mathcal{M}_{g,[n]}^{\text{déc}}$  et  $\mathbf{V}_{g,[n]}$ . La décomposition cellulaire de  $\mathbf{V}_{g,n}$  induit une décomposition cellulaire de  $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{déc}}$ . Nous indiquerons par  $\mathcal{M}(\Gamma)$  la cellule correspondant au graphe enrubonné  $\Gamma$  (non métrique, ayant les faces numérotées). On définit de façon analogue  $\mathcal{M}[\Gamma] \subset \mathcal{M}_{g,[n]}^{\text{déc}}$ . La dimension d'une cellule est égale au nombre d'arêtes du graphe enrubonné correspondant et varie d'un maximum de  $6g - 6 + 3n$  (*strate ouverte*, les graphes enrubonnés sont *trivalents*) à un minimum de  $2g - 1 + n$  (les graphes enrubonnés ont *un seul sommet*).

#### 4. Graphes enrubonnés orientables sur la sphère de Riemann

Nous dirons qu'un graphe enrubonné est *bicoloriable* ou *orientable* s'il est possible de colorier les faces (avec deux couleurs) de telle sorte que deux faces ayant une arête en commun n'aient jamais la même couleur. On démontre facilement (cf. [Z1]) que *le graphe critique associé à une différentielle de Strebel  $\omega$  est orientable si et seulement si  $\omega = \alpha^{\otimes 2}$  est le carré d'une forme différentielle méromorphe ordinaire.*

Il est alors possible de choisir deux orientations différentes, opposées l'une de l'autre. Pour chacune de ces orientations, les trajectoires horizontales sont orientées canoniquement et les faces se partagent en deux classes en fonction de leur orientation (ou couleur). Nous parlerons de faces *positives* et *négatives*. En particulier, si  $\text{Res}(\alpha) = p_1[X_1] + \dots + p_n[X_n]$ , alors  $\text{Res}(\alpha^{\otimes 2}) = p_1^2[X_1] + \dots + p_n^2[X_n]$ . Ici,  $|p_i|$  est le périmètre de la face  $F_i$  du graphe critique de  $\omega$  centrée en  $X_i$ . Le signe de  $p_i$  ne dépend que de l'orientation de  $F_i$ . On a alors  $\sum_i p_i = \deg(\text{Res}(\alpha)) = 0$ . En analogie avec le §4, nous dirons que  $(\mathbf{X}, \alpha)$  est une *paire de Strebel orientable et orientée*.

Nous allons commencer l'étude des graphes enrubannés orientables en genre 0 en démontrant, de façon purement analytique, un lemme de nature combinatoire:

**LEMME 6.** *Un graphe enrubanné sur la sphère de Riemann est orientable si et seulement si les valences de ses sommets sont toutes paires.*

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  un graphe enrubanné sur la sphère de Riemann. Considérons une différentielle de Strebel  $\omega = (q(X)/p(X)^2)dX^{\otimes 2}$  ayant  $\Gamma$  comme graphe critique. Nous pouvons supposer que  $X = \infty$  est un pôle de  $\omega$ . Nous rappelons que si  $P$  est un zéro de  $\omega$  d'ordre  $m$ , alors le sommet correspondant aura valence  $m + 2$ . Si  $\omega = \alpha^{\otimes 2}$  i.e.  $\Gamma$  est orientable, alors tous ses zéros sont doubles et il en est de même pour les valences des sommets. Réciproquement, si tous les sommets de  $\Gamma$  ont une valence paire, alors tous les zéros de  $q(X)$  sont d'ordre pair  $\Rightarrow q(X)$  est un carré  $\Rightarrow \omega = \alpha^{\otimes 2}$ .  $\square$

De manière générale, étant donnée une surface de Riemann compacte  $\mathbf{X}$ , on peut se demander quels diviseurs  $D \in \text{Div}_{\mathbb{R}}^0(\mathbf{X})$  peuvent s'écrire comme  $\text{Res}(\omega)$  avec  $\omega^{\otimes 2} \in \text{St}(\mathbf{X})$ . Sur la sphère de Riemann, le problème peut être résolu complètement. Tout d'abord, si  $D$  est un diviseur de degré zéro (à coefficients réels) sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , nous supposons toujours que  $X = \infty$  est un point du support de  $D$ . Dans ce cas, nous pouvons écrire  $D = p_0[\infty] + \sum_{i>0} p_i[X_i]$  avec  $X_i \in \mathbb{C}$ . Les polynômes unitaires

$$p_D(X) = \prod_i (X - X_i) \quad \text{et} \quad q_D(X) = -\frac{1}{p_0} p_D(X) \sum_i \frac{p_i}{X - X_i}$$

sont appelés *polynômes caractéristiques* de  $D$ . On considère de plus la fonction (continue)  $| \cdot |_D : \mathbb{C} - D_- \rightarrow \mathbb{R}_+$ , où  $D_- = \{X_i \mid p_i < 0\}$ , définie par  $|X|_D = \prod |X - X_i|^{p_i}$

**THÉORÈME 7.** *Soit  $D = p_0[\infty] + p_1[X_1] + \dots + p_n[X_n] \in \text{Div}_{\mathbb{R}}^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $D = \text{Res}(\omega)$ , avec  $\omega^{\otimes 2} \in \text{St}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ ,

(ii) *En posant*

$$\omega_D = p_0 \frac{q_D(X)}{p_D(X)} dX = \sum_{i=1}^n p_i \frac{dX}{X - X_i},$$

on a  $\omega_D^{\otimes 2} \in \text{St}(\mathbb{P}^1 \mathbb{C})$ ,

(iii)  $|Y|_D = |Y'|_D \forall Y, Y'$  zéros de  $q_D(X)$

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Par définition de l'application  $\text{Res}$ , la forme différentielle  $\omega$  possède  $n$  pôles simples en  $X_1, \dots, X_n$  de résidus respectifs  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$  et un pôle simple en  $X_0 = \infty$  de résidu  $p_0 = -(p_1 + \dots + p_n)$ . La forme  $\omega_D$  vérifie une telle condition. On a donc  $\omega - \omega_D$  holomorphe sur  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \Rightarrow \omega = \omega_D$  (ce qui démontre, entre autre, l'unicité de  $\omega$ ). L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) est triviale. Pour établir une équivalence entre (ii) et (iii), il suffit de remarquer que les trajectoires horizontales de  $\omega_D^{\otimes 2}$  sont les (composantes connexes des) courbes de niveau  $N_\epsilon = \{X \in \mathbb{C} - D_- \mid |X|_D = \epsilon\}$ , où  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ . En particulier,  $\omega_D^{\otimes 2}$  est de Strebel si et seulement s'il existe un  $\epsilon_0$  pour lequel  $N_{\epsilon_0}$  passe par tous les zéros de  $q_D(X)$ , ce qui est une reformulation de la condition (iii).  $\square$

**COROLLAIRE 8.** Soit  $\omega = p_0(p(X)/q(X))dX$  avec  $\omega^{\otimes 2} \in \text{St}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$  et  $\infty \in \text{Sup-}p(\text{Res}(\omega))$ . On a alors la relation

$$\frac{\Delta(p)}{R(p, q)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{p_0^n}{p_1 \dots p_n}$$

*Démonstration.* D'après le théorème 7, on a l'égalité

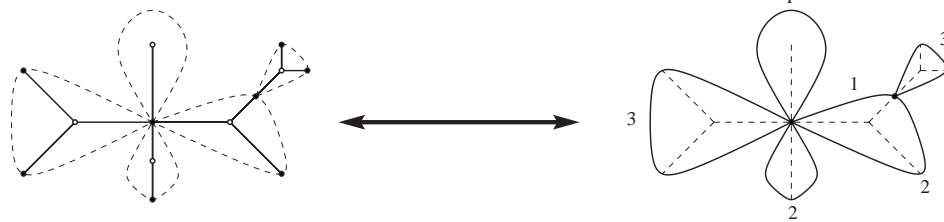
$$p_0 \frac{q(X)}{p(X)} = \frac{p_1}{X - X_1} + \dots + \frac{p_n}{X - X_n}.$$

Comme dans la démonstration du corollaire 2, il suffit alors de multiplier l'identité par  $p(X)$  et de considérer le produit des  $n$  égalités obtenues en remplaçant  $X$  par  $X_i$ . La même méthode s'applique pour  $X_i \neq \infty \forall i$ .  $\square$

## 5. Le graphe enrubonné associé à un dessin d'enfant

Nous allons à présent définir une correspondance entre dessins d'enfants et graphes enrubonnés métriques orientables, ce qui nous permettra ensuite de reprendre l'étude des arbres dans le contexte des différentielles de Strebel. Nous dirons qu'une paire de Strebel  $(\mathbf{X}, \omega)$  est *entière* si les longueurs du graphe enrubonné correspondant sont des entiers (positifs).

**THÉORÈME 9.** Il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des paires de Belyi et l'ensemble des paires de Strebel entières orientables et orientées (cf. Section 4).



La correspondance entre dessins d'enfants et graphes enrubannés.

*Démonstration.* Considérons une paire de Belyi  $(X, \beta)$ . La différentielle  $\left(\frac{d\beta}{\beta}\right)^{\otimes 2}$  est de Strebel (par construction) et son graphe critique est  $\Gamma_\beta = \beta^{-1}(S^1)$  où  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Le graphe enrubanné  $\Gamma_\beta$  est orientable. Orientons ses faces de telle sorte que les faces positives (resp. négatives) correspondent aux sommets positifs (resp. faces) du dessin associé à  $(X, \beta)$ . Les sommets de  $\Gamma_\beta$  sont les zéros de  $\beta - 1$  d'ordre  $m > 1$  (sommets négatifs de valence  $\geq 2$  du dessin associé à  $(X, \beta)$ ). La longueur d'une arête de  $\Gamma_\beta$  contenant  $k$  zéros simples de  $\beta - 1$  est alors égale à  $k + 1$ .

Soient maintenant  $X$  une surface de Riemann compacte,  $\omega^{\otimes 2} \in \text{St}(X)$  et  $P_0$  un zéro (fixé) de  $\omega$ . La fonction  $\beta(P) = \exp\left(\int_{P_0}^P \omega\right)$  est alors méromorphe et non ramifiée en dehors de  $\{0, 1, \infty\}$  i.e.  $(X, \beta)$  est une paire de Belyi. On vérifie facilement que les correspondances que nous venons de définir sont inverses l'une de l'autre.  $\square$

**COROLLAIRE 10.** *Il existe une bijection entre l'ensemble des dessins d'enfants et l'ensemble des graphes enrubannés entiers orientables et orientés.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que la correspondance que nous venons de définir est compatible avec la notion d'isomorphisme.  $\square$

## 6. Le complexe cellulaire $A_n$

Nous allons à présent construire un espace permettant de paramétriser les arbres considérés précédemment. Nous commencerons par une description purement combinatoire, que nous interpréterons ensuite de manière algébrique.

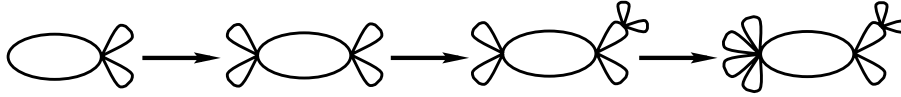
Soit  $n$  un entier positif *impair* et considérons l'ensemble  $A_n$  formé par les graphes enrubannés métriques  $\Gamma$  en genre 0 vérifiant les conditions suivantes:

- (i)  $\Gamma$  est orientable,
- (ii)  $\Gamma$  possède une seule face négative et  $n$  faces positives *numérotées*,
- (iii) Si  $2m$  est la valence d'un sommet de  $\Gamma$ , alors  $m$  est impair.

On a une projection naturelle  $\pi : A_n \rightarrow A_{[n]} = A_n / \mathfrak{S}_n$  (oubli de la numérotation), et la fibre au dessus d'un graphe enrubanné métrique  $\Gamma \in A_{[n]}$  correspond aux

différentes numérotations de ses faces. D'après le corollaire 10, *il existe une bijection entre les éléments entiers de  $\mathbf{A}_{[n]}$  et les arbres  $T$  ayant  $n$  sommets positifs et tous les sommets négatifs de valence impaire.*

En suivant la construction du Section 3, il est possible de munir  $\mathbf{A}_n$  d'une topologie faisant de ce dernier un *sous-complexe cellulaire* de  $\mathbf{V}_{0,n+1}$  i.e. l'union de cellules de  $\mathbf{V}_{0,n+1}$ . Sa dimension (réelle) est égale à  $\frac{3}{2}(n-1)$  et la strate ouverte correspond aux graphes enrubannés ayant tous les sommets de valence 6. D'un point de vue topologico-combinatoire, les graphes enrubannés associés aux cellules de  $\mathbf{A}_{[n]}$  sont obtenus en recollant un bouquet de deux  $S^1$  aux graphes enrubannés associés aux cellules de  $\mathbf{A}_{[n-2]}$  (voir figure suivante). Dans le cas ordonné, il faut en plus choisir une numérotation des faces (positives).



Construction récursive des cellules de  $\mathbf{A}_{[n]}$ .

Considérons deux éléments  $P$  et  $P'$  de  $\mathbf{A}_{[n]}$  correspondant à des graphes enrubannés (non métriques)  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  respectivement. Si  $\Gamma' \rightsquigarrow \Gamma$  (i.e.  $\Gamma$  est obtenu en faisant dégénérer des arêtes de  $\Gamma'$ ), alors il existe un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}_{[n]}$  joignant  $P$  et  $P'$ . De plus, la cellule correspondant au graphe enrubanné que l'on note  $IV_n$ , ayant un seul sommet et  $n$  arêtes (c'est un "trèfle à  $n$  feuilles") est la seule cellule de dimension minimale, et tous les graphes enrubannés considérés ici sont des éclatements de  $IV_n$ . Nous en déduisons que  $\mathbf{A}_{[n]}$  est *connexe*. Dans le cas ordonné, il existe  $(n-1)!$  cellules de dimension minimale, correspondant aux numérotations des faces positives de  $IV_n$  (modulo une permutation cyclique). L'espace  $\mathbf{A}_n$  possède *deux composantes connexes*. Deux éléments de  $\pi^{-1}(\Gamma)$  appartiennent à la même composante connexe si et seulement si les numérotations des faces positives de  $\Gamma$  qui les caractérisent coïncident modulo une permutation *paire*.

Passons à présent à l'aspect algébrique du problème: d'après le théorème 5, il existe un homéomorphisme  $\Psi$  entre  $\mathbf{V}_{0,n+1}$  et  $\mathcal{M}_{0,n+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$ . Dans la théorie classique, l'espace  $\mathcal{M}_{0,n+1}$  se réalise comme quotient de  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^{n+1} - \Delta$  (où  $\Delta$  est le lieu discriminant) par rapport à l'action diagonale de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ . En ce qui concerne  $\mathbf{A}_n$ , nous allons procéder de manière différente: Si  $\omega^{\otimes 2} \in \mathrm{St}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$  est un modèle associé à  $\Gamma \in \mathbf{A}_n$ , nous pouvons supposer que  $X = \infty$  est le (seul) pôle de  $\omega$  résidu négatif. Le complexe  $\mathbf{A}_n$  s'identifie alors (topologiquement) avec un sous-ensemble du quotient de  $\mathbf{X}_n = (\mathbb{C}^n - \Delta) \times \mathbb{R}_+^n$  par rapport à l'action diagonale de  $L_2(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$  sur le premier terme du produit. Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  opère de manière naturelle sur  $\mathbf{X}_n$  et on obtient une projection  $\mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_{[n]} = \mathbf{X}_n / \mathfrak{S}_n$ . On peut assimiler les éléments de  $\mathbf{X}_{[n]}$  à des diviseurs positifs (à coefficients réels) sur la sphère de Riemann, ayant  $n$  points comme support.



On définit une application  $\eta : \mathbf{X}_n \rightarrow \text{Div}_{\mathbb{R}}^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$  en posant

$$\eta(X_1, \dots, X_n, p_1, \dots, p_n) = p_1[X_1] + \dots + p_n[X_n] - (p_1 + \dots + p_n)[\infty]$$

On remarquera que  $\eta$  est  $\mathfrak{S}_n$ -invariante et peut donc se définir sur  $\mathbf{X}_{[n]}$ .

**PROPOSITION 11.** *Soit  $P$  un point de  $\mathbf{X}_n$  et posons  $D = \eta(P)$ . En suivant les notations introduites dans la Section 4,  $P$  définit un point de  $\mathbf{A}_n$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées:*

- (i)  $q_D(X)$  est un carré,
- (ii)  $|Y|_D = |Y'|_D \forall Y, Y'$  zéros de  $q_D(X)$ .

*Démonstration.* D'après le Théorème 7,  $\omega_D^{\otimes 2}$  est de Strebel si et seulement si la condition (ii) est vérifiée. Dans ce cas, dire que le graphe enrubanné métrique associé à  $\omega_D$  définit un élément de  $\mathbf{A}_n$  revient à affirmer que les valences de ses sommets sont congruentes à 2 modulo 4 i.e. les zéros de  $q_D(X)$  sont tous pairs, ce qui amène à la condition (i).  $\square$

Cette proposition permet de voir  $\mathbf{A}_n$  comme sous-espace de

$$\mathbf{Y}_n = \{P \in \mathbf{X}_n \mid q_{\eta(P)}(X) \text{ est un carré}\},$$

celui-ci étant muni de la topologie induite par  $\mathbf{X}_n$ . Pour tout élément  $P = (X_1, \dots, X_n, p_1, \dots, p_n)$  de  $\mathbf{Y}_n$ , en posant  $D = \eta(P)$ , il existe un unique polynôme unitaire  $r_D(X)$  tel que  $r_D(X)^2 = q_D(X)$ , et on peut considérer l'application continue  $\phi_n : \mathbf{Y}_n \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

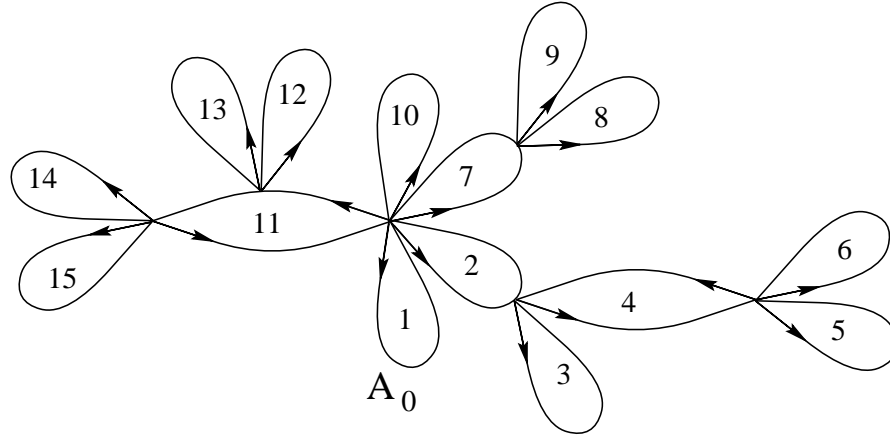
$$\phi_n(P) = \frac{\prod_{i < j} (X_i - X_j)}{R(r_D(X), p_D(X))}$$

D'après le corollaire 8, on a l'identité

$$\phi_n(P)^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(p_1 + \dots + p_n)^n}{p_1 \dots p_n}.$$

On en déduit que  $\phi_n$  est réelle ou imaginaire pure (ceci ne dépendant que de la parité de  $(n-1)/2$ ); nous pouvons donc parler de son *signe*. De plus,  $\phi_n$  est  $L_2(\mathbb{C})$ -invariante et définit une application continue  $\Phi_n : \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbb{C}$ . Pour tout  $P \in \mathbf{A}_n$ , le signe de  $\Phi_n(P)$  ne dépend que de la composante connexe contenant  $P$ .

Il est clair que la fonction  $\Phi_n^2$  est  $\mathfrak{S}_n$ -invariante et définit une fonction continue sur  $\mathbf{A}_{[n]}$ . Nous allons maintenant résoudre un problème de “descente” en démontrant qu'il existe une application continue  $\Phi_{[n]} : \mathbf{A}_{[n]} \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $\Phi_{[n]}^2 = \Phi_n^2$ . L'existence d'une telle fonction est un fait assez étonnant, car la numérotation des faces positives est essentielle dans la définition de  $\Phi_n$ . Nous allons affronter le problème de manière combinatoire.



Numérotation des faces d'un élément de  $\mathbf{A}_{[n]}$ .

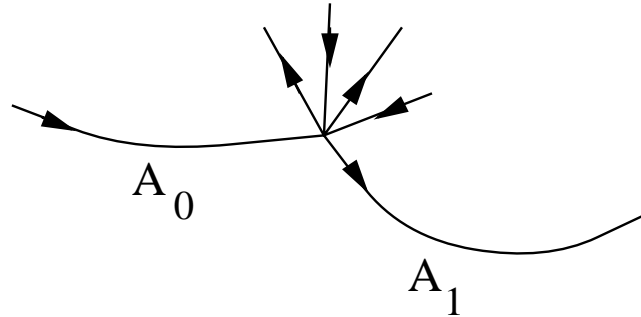
Choisissons une arête  $A_0$  de  $\Gamma \in \mathbf{A}_{[n]}$ . En partant de  $A_0$  et en suivant l'ordre positif de parcours (le graphe est orienté), il est alors possible de numéroter les faces positives de  $\Gamma$  (voir figure). Nous parlerons de la *numérotation canonique* de  $\Gamma$  associée à  $A_0$ .

LEMME 12. *Les numérotations canoniques associées à deux arêtes  $A_0$  et  $A_1$  d'un élément de  $\mathbf{A}_{[n]}$  coïncident modulo une permutation paire.*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer l'assertion dans le cas où  $A_0$  est l'arête qui précède  $A_1$  (en suivant le sens positif de parcours), auquel cas nous dirons qu'elles sont adjacentes (voir figure).

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  la permutation obtenue en passant de la numérotation associée à  $A_0$  à la numérotation déterminée par  $A_1$ . Distinguons deux cas:

a)  $A_0$  est une boucle (i.e. est la seule composante du bord d'une face du graphe enrubanné). Dans ce cas,  $\sigma = (n \ n-1 \ n-2 \ \dots \ 2 \ 1)$  qui est paire car  $n$  est impair.



Deux arêtes adjacentes.

b)  $A_0$  appartient à une face  $F$  formée par plus d'une arête. Dans ce cas, Soit  $m$  le nombre de faces de  $\Gamma$  par lesquelles on passe avant de revenir à une arête de  $F$ . La permutation  $\sigma$  est alors égale à  $(m+1 \ m \ \dots \ 2 \ 1)$  et  $m$  est pair (pour s'en convaincre, il suffit de considérer la construction récursive des éléments de  $\mathbf{A}_{[n]}$  décrite précédemment, qui consiste à recoller des bouquets de deux  $S^1$ ).  $\square$

Pour tout  $\Gamma \in \mathbf{A}_{[n]}$ , posons  $\Phi_{[n]}(\Gamma) = \Phi_n(\Gamma')$  où  $\Gamma'$  est l'élément de  $\mathbf{A}_n$  correspondant à une numérotation canonique de  $\Gamma$ . Le lemme précédent permet d'affirmer que  $\Phi_{[n]}$  est *bien définie*.

**PROPOSITION 13.** *L'application  $\Phi_{[n]}$  est continue.*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que  $\Phi_{[n]}^2$  est continue. Il faut donc démontrer que la numérotation canonique varie de manière continue i.e. que les éléments de  $\mathbf{A}_n$  obtenus par numérotation canonique appartiennent à la même composante connexe. A l'intérieur d'une cellule de  $\mathbf{A}_n$ , l'application  $\Phi_{[n]}$  est certainement continue, car les numérotations canoniques d'un graphe enrubanné ne dépendent pas de la métrique. On est donc réduit à l'étude des phénomènes se produisant lors du changement de cellule. En d'autres termes, nous devons démontrer que si  $\Gamma' \rightsquigarrow \Gamma$ , les numérotations canoniques de  $\Gamma$  sont obtenues (par dégénérescence de l'arête exceptionnelle) à partir des numérotations canoniques de  $\Gamma'$ , ce qui est immédiat.  $\square$

**CORROLAIRE 14.** *Si  $\Gamma \in \mathbf{A}_{[n]}$  et  $p_1, \dots, p_n$  sont les périmètres de ses faces positives, on a*

$$\Phi_{[n]}(\Gamma) = i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{(p_1 + \dots + p_n)^n}{p_1 \cdots p_n}}$$

*Démonstration.* Nous savons déjà que

$$|\Phi_{[n]}(\Gamma)| = \sqrt{\frac{(p_1 + \dots + p_n)^n}{p_1 \cdots p_n}}.$$

Il ne nous reste qu'à déterminer son signe (qui est constant car  $\Phi_{[n]}$  est continue, ne s'annule jamais, et  $\mathbf{A}_{[n]}$  est connexe). Pour cela, il suffit de se réduire au graphe enrubanné le plus simple (correspondant au graphe enrubanné  $IV_n$  muni de la métrique "unitaire" i.e. toutes les arêtes ont longueur unitaire) et d'effectuer les calculs explicitement.  $\square$

## 7. Expression combinatoire d'un caractère de $G_{\mathbb{Q}}$

Nous pouvons finalement appliquer aux arbres les résultats obtenus dans le paragraphe précédent: Soit  $T$  un arbre de type  $V_{p_1, \dots, p_n}^{n_1, \dots, n_m}$  et  $\Gamma_T$  le graphe enrubanné métrique associé. Si  $\beta$  est un modèle (normalisé) pour  $T$ ,  $\omega = \frac{d\beta}{\beta}$  est un modèle pour  $\Gamma_T$ . Une numérotation canonique des faces positives de  $\Gamma_T$  se traduit par une numérotation  $X_1, \dots, X_n$  des zéros de  $\beta$  (sommets positifs).

Si l'arbre est positivement générique et les sommets sont ordonnés canoniquement, nous pouvons considérer la permutation  $\sigma \in S_n$  telle que  $p_{\sigma(1)} < p_{\sigma(2)} < \dots < p_{\sigma(n)}$  (on réordonne les périmètres des faces). Cette permutation dépend évidemment du choix de l'arête de référence mais les considérations du paragraphe précédent permettent d'affirmer que sa signature ne dépend que de l'arbre. Nous l'indiquerons par  $s_+(T)$  et nous dirons que c'est la *signature positive* de  $T$ . Si  $T$  est négativement générique on définit de façon analogue sa *signature négative*. Comme précédemment, pour des raisons de symétrie nous ne traitons que le cas positivement générique. De façon générale, si  $K/\mathbb{Q}$  est une extension quadratique, on peut voir la projection canonique  $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  comme un caractère  $\chi_K : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \{\pm 1\}$ . Si  $T$  est un arbre positivement générique pour lequel tous les sommets négatifs ont des valences impaires, considérons le caractère

$$G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\chi_T} \{\pm 1\}$$

$$\sigma \mapsto \frac{s_+(\sigma T)}{s_+(T)}$$

**THÉORÈME 15.** *Soit  $T$  un arbre positivement générique de type  $V_{p_1, \dots, p_n}^{n_1, \dots, n_m}$  avec  $n, n_1, \dots, n_m$  impairs. Posons  $\Delta = (-1)^{\frac{n-1}{2}} p_1 \dots p_n (p_1 + \dots + p_n)$  et  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ . On a alors  $\chi_K = \chi_T$ . En particulier,  $s_+(T)$  est  $G_K$ -invariant.*

*Démonstration.* Soit  $T$  un arbre vérifiant les conditions de l'énoncé. Il suffit de remarquer, en suivant les notations introduites précédemment, que  $\delta_+(T) \neq 0$  et que  $s_+(T)\delta_+(T) = \Phi_{[n]}(\Gamma_T) = \Phi_{[n]}(\Gamma_{\sigma T}) = s_+(\sigma T)\delta_+(\sigma T) = s_+(\sigma T)\chi_K(\sigma)\delta_+(T)$ .  $\square$

Revenons un instant aux fleurs de Leila. On vérifie immédiatement que ces deux arbres ne sont pas conjugués car ils n'ont pas la même signature positive et que  $\Delta = a_1 \dots a_n(n+m-1)$  est un carré parfait. De manière plus générale, le corollaire suivant démontre (une généralisation de) la conjecture de Kotchetkov.

**COROLLAIRE 16.** *Soient  $n, m, p_1, \dots, p_n, m_1, \dots, m_m$  des entiers positifs tels que*

- (i)  $p_1 < \dots < p_n, n_1 \leq \dots \leq n_m$  et  $p_1 + \dots + p_n = n_1 + \dots + n_m = n + m - 1$ .
- (ii) *Tous les  $n_i$  sont impairs.*
- (iii)  $n \equiv 1 \pmod{4}$
- (iv)  $p_1 \dots p_n (p_1 + \dots + p_n)$  *est un carré parfait.*

*Alors la classe de valence  $V_{p_1, \dots, p_n}^{n_1, \dots, n_m}$  se décompose en au moins deux orbites galoisiennes.*

## Remerciements

Ces résultats, ainsi que l'ensemble de mes recherches, ont été profondément inspirés par l'esquisse d'un programme d'Alexandre Grothendieck [G]. Je ne peux qu'exprimer ma gratitude à Enrico Arbarello, qui, lors de la rédaction de [Z1] m'a fourni une version (non publiée à l'époque) du manuscrit. C'est toujours lui qui m'a initialement orienté vers l'étude des différentielles de Strebel et des graphes enrubannés, indispensables dans le présent travail. Je le remercie entre autre pour avoir établi mes premiers contacts avec le monde de la recherche français. C'est à Paris que j'ai pu approfondir mes connaissances sur les dessins d'enfants. Je retiens en particulier les noms de Leila Schneps (qui a ensuite dirigé ma thèse [Z2]) et de Pierre Lochak. Leur apport, mathématique et humain, a été déterminant et irremplaçable tout au long de ces trois dernières années. Je ne peux oublier non plus que c'est Leila qui m'a communiqué la conjecture de Kotchetkov et qui n'a cessé de m'encourager tout au long du travail de recherche. En ce qui concerne les questions de continuité de la fonction  $\Phi_{[n]}$  du Section 6 j'ai pu profiter des conseils de deux spécialistes tels que John Hubbard et Adrien Douady. Finalement, les conversations avec Jean-Marc Couveignes et Louis Granboulan ont été très enrichissantes et motivantes. Je termine en remerciant les Département de Mathématiques de l'Université de Franche-Comté et de l'École Normale Supérieure de Paris pour avoir mis à ma disposition le matériel nécessaire au développement de ces idées.

## Références

- [G] Grothendieck, A.: Esquisse d'un programme, dans *Geometric Galois Actions*, volume I, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [K] Kontsevich, M.: Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Comm. Math. Phys.* **147** (1992), 1–23.
- [Ko] Kotchetkov, Yu. Yu.: On nontrivially decomposable types (en Russe), *Uspekhi Mat. Nauk* **52** (4(316)), (1997), 203–204; traduit dans *Russian Math. Surveys* **52**(4) (1997), 836–837.
- [P1] Penner, R. C.: The decorated Teichmüller space of punctured surfaces, *Comm. Math. Phys.* **113** (1987), 229–339.
- [P2] Penner, R. C.: Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces, *J. Differential Geom.* **27** (1988), 23–53.
- [S] Schneps, L.: Dessins d'enfants on the Riemann sphere, in: L. Schneps, (ed.), *The Grothendieck Theory of dessins d'enfants*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 200, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [Sh] Shabat, G.: Plane trees, in: L. Schneps (ed.), *The Grothendieck Theory of dessins d'enfants*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 200, Cambridge Univ. Press.
- [St] Strebel, K.: *Quadratic differentials*, Springer, New York, 1984.
- [SV] Shabat, G. and Voevodsky, V.: Drawing curves over number fields, in: *The Grothendieck Festschrift* 3, Birkhäuser, Basel, 1990.
- [Z1] Zapponi, L.: Grafi, differenziali di Strebel e curve, Tesi di Laurea, università degli studi di Roma “La Sapienza”, 1995.
- [Z2] Zapponi, L.: Dessins d'enfants et action galoisienne, thèse de doctorat, université de Franche-comté. 1998.