Sprawozdanie - laboratorium nr 1
Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Damian Płóciennik

27 lutego 2019

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Układ równań liniowych

Przyjmijmy układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Powyższy układ można zapisać również w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}, \tag{2}$$

gdzie:
- macierz współczynników układu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

- szukany wektor rozwiązań

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

- wektor wyrazów wolnych

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

1.2 Metoda Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa-Jordana służy do efektywnego rozwiązywania układów równań liniowych z wieloma niewiadomymi oraz do obliczania macierzy odwrotnych.

1.2.1 Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Gaussa-Jordana

Rozwiązywanie układów równań metodą Gaussa-Jordana polega na wyzerowaniu współczynników pod i nad przekątną w macierzy (3) i doprowadzeniu jej do postaci jednostkowej. Korzystając z tej metody nie możemy wykonywać operacji na kolumnach, natomiast dozwolone są podstawowe operacje na wierszach:

- mnożenie wiersza przez niezerowy skalar,
- dodawanie/odejmowanie wierszy od siebie,
- zamiana wierszy między sobą.

Po doprowadzeniu macierzy współczynników (3) do postaci jednostkowej uzyskujemy:

$$\mathbf{I} \cdot \vec{x} = \vec{b}', \tag{6}$$

dzięki czemu możemy odczytać jednoznacznie wartości poszukiwanych zmiennych z wektora $\vec{b}'$.

1.2.2 Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą Gaussa-Jordana

W celu obliczenia macierzy odwrotnej (o ile macierz ta jest odwracalna) metodą Gaussa-Jordana obok danej macierzy współczynników (3) należy zapisać macierz jednostkową, a następnie wykonując wymienione w poprzednim punkcie podstawowe operacje na wierszach, jednocześnie na macierzy współczynników i macierzy jednostkowej, doprowadzić macierz współczynników do postaci jednostkowej, a macierz jednostkowa zamieni się w poszukiwaną macierz odwrotną. W przeciwieństwie do rozwiązywania układów równań liniowych tutaj nie możemy zamieniać wierszy między sobą.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Jednym ze źródeł UARL mogą być równania różniczkowe. Dla prostego oscylatora harmonicznego z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m} x(t) = -\omega^2 x(t). \tag{7}$$

Przybliżając występującą po lewej stronie równania (7) drugą pochodną położenia x w chwili t ilorazem różnicowym:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} \tag{8}$$

i wprowadzając oznaczenia $\Delta t = h$, $x_i = x(ih)$ otrzymujemy z równania (7) iteracyjny przepis pozwalający na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1}:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i+1} = 0. \tag{9}$$

Do jednoznaczego rozwiązania potrzeba jeszcze informacji o wartościach x_0 i x_1. Dają je warunki początkowe: $x_0 = A$ jest początkowym wychyleniem z położenia równowagi, zaś iloraz $(x_1 - x_0)/h = v_0$ informuje o początkowej wartości prędkości ciała.

Równanie (9) wraz z warunkami początkowymi daje się zapisać w postaci macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Przyjęto $k/m = 1$, warunki początkowe $v_0 = 0$, $A = 1$ oraz krok całkowania $h = 0.1$.

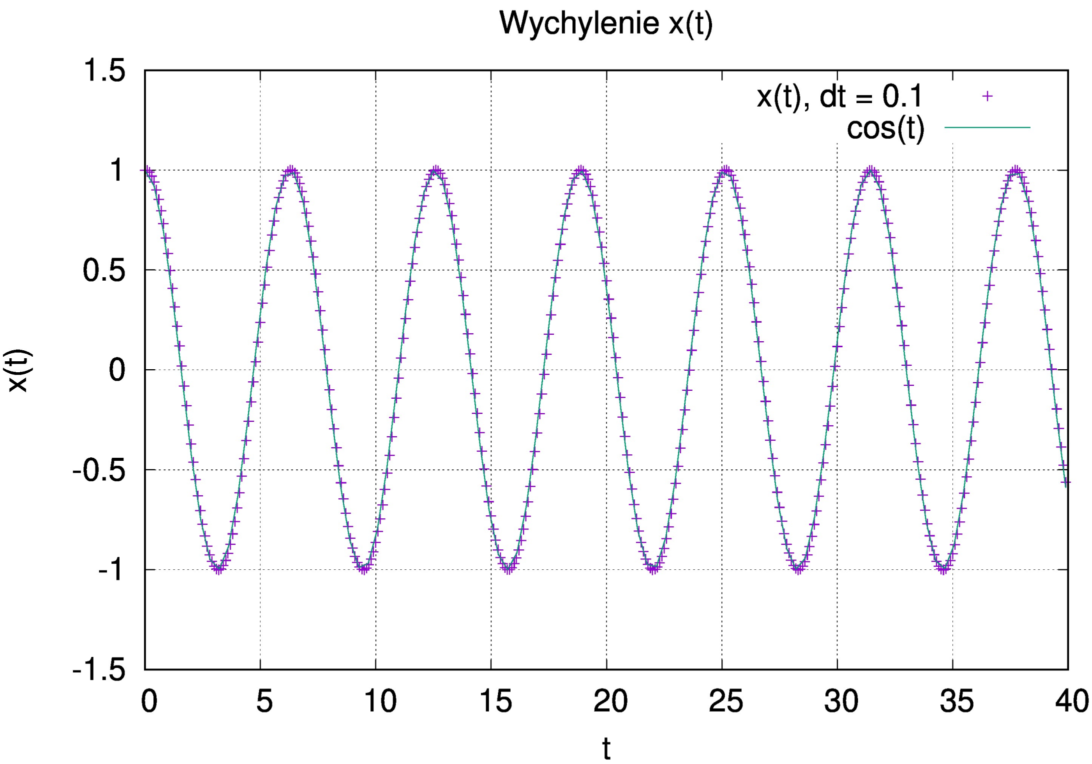
Celem zadania jest rozwiązanie układu (10) metodą Gaussa-Jordana i narysowanie zależności wychylenia z położenia równowagi dla tego układu na przestrzeni kilku okresów drgań.

2.2 Wyniki

Z wykorzystaniem programu napisanego w języku C przy użyciu metody Gaussa-Jordana obliczono numerycznie zależności wychylenia od czasu dla kroku czasowego równego 0.1s. Punkty te przedstawiono na wykresie i porównano z wartościami analitycznymi otrzymanymi ze wzoru:

$$x(t) = A\cos(\omega t), \tag{11}$$

dla przyjętych wcześniej warunków $A = 1$, $\omega = 1$.



Rysunek 1: Wykres zależności wychylenia od czasu dla wartości otrzymanych metodą Gaussa-Jordana oraz wykres funkcji cos(t)

Jak łatwo zauważyć na wykresie (1) dane otrzymane metodą numeryczną z bardzo dużą dokładnością pokrywają się z danymi otrzymanymi analitycznie.

3 Wnioski

Dane wygenerowane przez program pokrywają się niemal z funkcją cosinus, co dowodzi bardzo wysokiej dokładności metody Gaussa-Jordana przy obliczaniu macierzy dużych wymiarów. Drobne rozbieżności wynikaja z przyjetych wcześniej zaokrągleń. Wadą zastosowanego rozwiązania jest to, że operujemy macierzą rzadką (większość elementów wypełniona zerami), co zajmuje niepotrzebne miejsce w pamięci komputera.
Reasumując metoda Gaussa-Jordana jest bardzo dobrym sposobem do obliczania macierzy dużych wymiarów z wysoką dokładnością.