# Sprawozdanie - laboratorium nr 7
# Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Damian Płóciennik

10 kwietnia 2019

## 1 Wstęp teoretyczny

### 1.1 Interpolacja

Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami iterpolacji oraz na oszacowaniu błędu przybliżonych wartości. Problem interpolacji możemy więc sprowadzić do znalezenia funkcji interpolującej $F(x)$, która w węzłach interpolacji przyjmuje wartości takie jak funkcja $y = f(x)$, czyli funkcja interpolowana (której postać funkcyjna może nie być nawet znana).

### 1.2 Ilorazy różnicowe

Funkcja $f(x)$ przyjmuje w punktach $x_i, i = 0, 1, \ldots, n \quad x_i \neq x_j$ wartości

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n). \tag{1}$$

Zakładamy że odległości międzywęzłowe mogą nie być stałe:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Ilorazy różnicowe można zdefiniować następująco:

- 1-go rzędu
$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{3}$$
- 2-go rzędu
$$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} \tag{4}$$
- $n$-tego rzędu
$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i} \tag{5}$$

### 1.3 Interpolacja metodą Newtona

Zakładając, że odległości między węzłami mogą być różne szukamy wielomianu interpolacyjnego postaci:

$$W_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{j-1}(x - x_{j+1})(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \ldots (x_j - x_{j-1}(x_j - x_{j+1})(x_j - x_n)}, \tag{6}$$

który spełnia warunki w węzłach interpolacji:

$$W_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2 \ldots, n. \tag{7}$$

Szukany wieloman można zapisać w równoważnej postaci

$$W_n(x) = W_0(x) + [W_1(x) - W_0(x)] + [W_2(x) - W_1(x)] + \cdots + [W_n(x) - W_{n-1}(x)], \tag{8}$$

gdzie różnice:

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) \tag{9}$$

są wielomianami zdefiniowanymi następująco:

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}), \quad A_k = const. \tag{10}$$

Wielomian interpolacyjny można zapisać przy użyciu formuły opisującej n-ty iloraz różnicowy:

$$W_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)\omega_0(x) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)\omega_{n-1}(x) \tag{11}$$

### 1.4 Efekt Rungego

Zwiększanie liczby węzłów interpolacji nie zawsze prowadzi do mniejszego oszacowania błędu. Wpływ na to mają oscylacje wielomianów wyższych rzędów. Takie zjawisko nazywamy efektem Rungego. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów $n$ przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście $n$, zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów.

Takie zachowanie się wielomianu interpolującego jest zjawiskiem typowym dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów. Występuje ono również, jeśli interpolowana funkcja jest nieciągła albo odbiega znacząco od funkcji gładkiej.

Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Takimi węzłami mogą być na przykład miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa $n$-tego stopnia.

### 1.5 Wielomiany Czebyszewa

Wielomianami Czebyszewa nazywamy układy wielomianów ortogonalnych, tworzące bazę w przestrzeni wielomianów. Zdefiniowane są one rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_k(x) &= 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \end{aligned} \tag{12}$$

Rozwiązaniem powyższej rekurencji jest:

$$T_k(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k}{2} \tag{13}$$

Wielomian Czebyszewa $T_k(x)$ posiada $k$ zer rzeczywistych należących do przdziału [-1, 1], danych wzorem:

$$x_j = \cos\left(\frac{2 \cdot j - 1}{2 \cdot k} \cdot \pi\right) \qquad j = 1, 2, \dots, k \tag{14}$$

## 2 Zadanie do wykonania

### 2.1 Opis problemu

Należało przeprowadzić interpolację wielomianową Newtona dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{15}$$

Wzór interpolacyjny został zapisany w postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i) \tag{16}$$

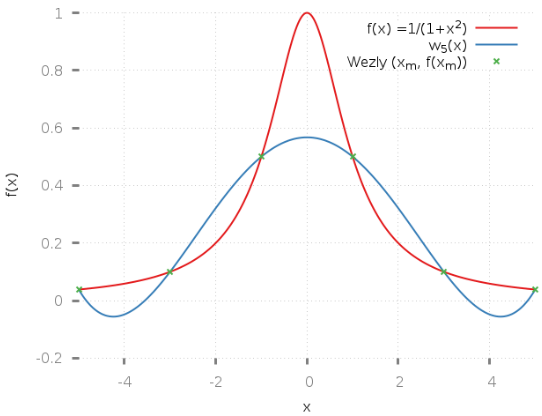
gdzie: $f^{(j)}(x_0)$ to iloraz rzędu $j$ liczony dla węzła $x_0$, a $x_i$ są położeniami węzłów.

Badanie zostało przeprowadzone dla węzłow rozłożonych równomiernie oraz dla tych będących zerami wielomianu Czebyszewa, wyznaczonych ze wzoru:

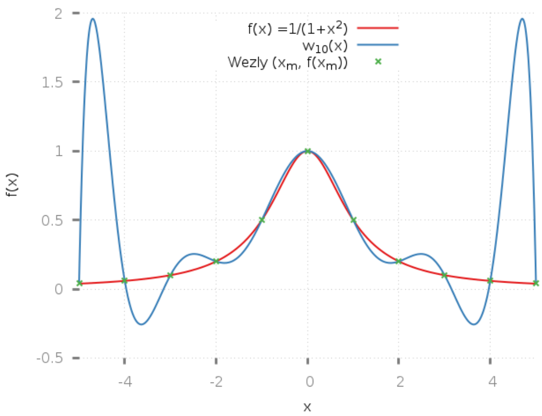
$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max})\cos\left(\pi\frac{2i+1}{2n+2}\right) + (x_{min} + x_{max})\right], \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Podczas wykonywania zadania węzły indeksowano $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Interpolację wykonano kolejno dla $n = 5, 10, 15, 20$. Badany przedział ustalono na $x \in [-5, 5]$.

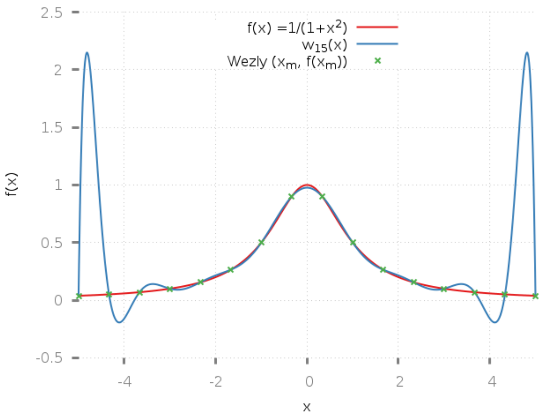
## 2.2 Wyniki



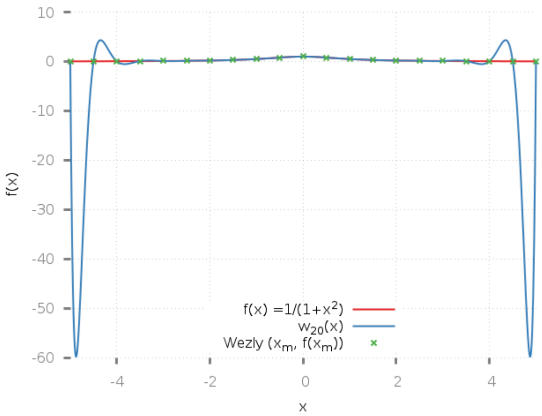

(a) $n = 5 \Rightarrow \Delta x = 2$




(b) $n = 10 \Rightarrow \Delta x = 1$



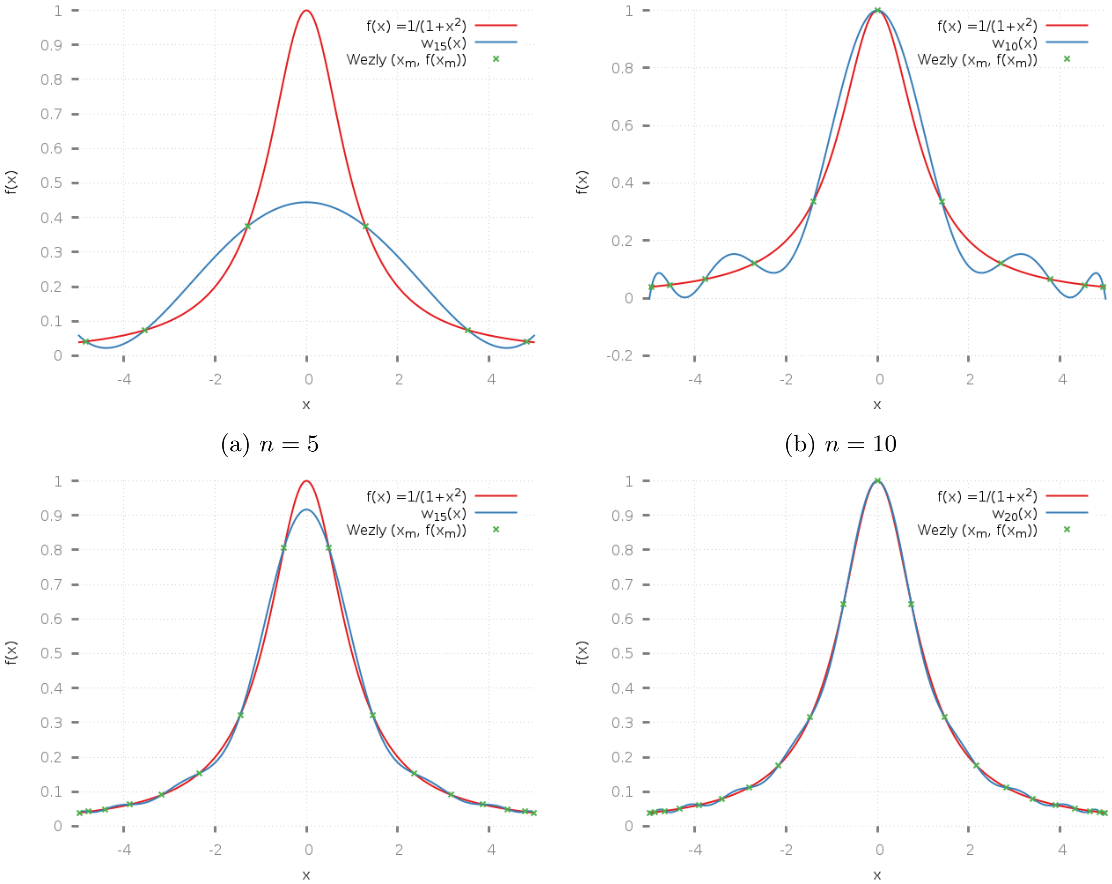

(c) $n = 15 \Rightarrow \Delta x = \frac{2}{3}$




(d) $n = 20 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}$

Rysunek 1: Wyniki interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$ z równoodległymi węzłami; liczba węzłów: $n + 1$.

Łatwo zauważyć, że w tym przypadku zwiększanie n powoduje polepszenie się interpolacji na środku wykresu, jednak na skrajach przedziału dochodzi do coraz większych oscylacji, co spowodowane jest efektem Rungego. Występuje tam bardzo duży przerzut wartości.




(a) $n = 5$

(b) $n = 10$

(c) $n = 15$

(d) $n = 20$

Rysunek 2: Wyniki interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$ z węzłami, których współrzędne są wyznaczone przez miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa; liczba węzłów: $n + 1$.

Na powyższych wykresach można zobaczyć, ze wielomian interpolowany na podstawie węzłów Czebyszewa radzi sobie znacznie lepiej. O ile dla $n = 5$ różnica jest nie tak duża, to dla więszej ilości węzłów osiągnięto dużo lepszą interpolację i brak przerzutu spowodowanego efektem Rungego. Dla $n = 20$ kształt wykresu funkcji interpolującej jest bardzo zbliżony do wykresu oryginału.

# 3 Wnioski

Zwiększanie liczby węzłów interpolacji nie zawsze prowadzi do mniejszego oszacowania błędu, co zostało zaobserwowane dla interpolacji Newtona z równoodległymi węzłami. Pomimo tego, że otrzymana funkcja bliżej centrum układu coraz bardziej pokrywa się z analityczną, to na krańcach przedziału dochodzi do oscylacji z przeregulowaniem, które to osiąga drastycznie wysokie wartości dla dużych $n$. Dobór węzłów z wykorzystaniem miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa okazuje się zdecydowanie lepszym pomysłem, dzięki zwiększającej się gęstości węzłów na krańcu przedziału, co pozwala na zminimalizowanie efektu Rungego. Również i w tym przypadku można dostrzec lekkie oscylacje, jednak są one nieuniknione w przypadku stosowania metod wielomianowych. Interpolacja Newtona z węzłami wyznaczonymi na podstawie miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa pozwoliła dla $n = 20$ otrzymać zadowające odwzorowanie, którego przebieg jedynie delikatnie oscyluje względem oryginalnej funkcji.

Reasumując, interpolacja wielomianowa z wykorzystaniem metody Newtona jest skuteczna, oile zostanie wybrane odpowiednie położenie węzłów interpolacji.

# 4 Bibliografia


- Efekt Rungego – Wikipedia, wolna encyklopedia [online]. [dostęp: 16.04.2019]. Dostęp w Internecie: `https://pl.wikipedia.org/wiki/Efekt_Rungego`.

- Wielomiany Czebyszewa – Wikipedia, wolna encyklopedia [online]. [dostęp: 16.04.2019]. Dostęp w Internecie: `https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Czebyszewa`.

- Chwiej Tomasz: Interpolacja. [online]. [dostęp: 16.04.2019]. Dostęp w Internecie: `http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/interpolacja_1819.pdf`