

Całkowanie numeryczne metodą Romberga

Tomasz Chwiej

19 grudnia 2011

1 Metoda Romberga

Proszę zaprogramować metodę Romberga całkowania numerycznego, tak aby uzyskać tablicę całek:

$$\begin{array}{ccccccc} D_{0,0} & & & & & & \\ D_{1,0} & D_{1,1} & & & & & \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ D_{n,0} & D_{n,1} & D_{n,2} & \dots & D_{n,n} & & \end{array} \quad (1)$$

gdzie $D_{n,k}$ z pierwszej kolumny określone są następująco

$$D_{0,0} = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) \quad (2)$$

oraz

$$D_{n,0} = \frac{1}{2}D_{n-1,0} + h_n \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + (2i-1)h_n) \quad (3)$$

z krokiem całkowania

$$h_n = \frac{b-a}{2^n} \quad (4)$$

Elementy w kolejnych kolumnach liczymy korzystając ze wzoru:

$$D_{n,k} = \frac{4^k D_{n,k-1} - D_{n-1,k-1}}{4^k - 1} \quad (5)$$

2 Zadania do wykonania

Przy pomocy swojego programu należy:

1. Obliczyć numerycznie wartość całki

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \quad (= 0.94608307) \quad (6)$$

Do pliku proszę zapisać tablicę całek (1) dla $n = 7$.

Uwaga: aby uniknąć dzielenia $\frac{0}{0}$ dla $x = 0$ można do argumentu dodać niewielką liczbę np.: $x = x + 0.0000001$.

2. Obliczyć numerycznie wartość całki

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos(x) - e^x}{\sin(x)} dx \quad (= -2.246591721) \quad (7)$$

Do pliku proszę zapisać tablicę całek (1) dla $n = 15$.

Uwaga: aby uniknąć dzielenia $\frac{0}{0}$ dla $x = 0$ można do argumentu dodać niewielką liczbę np.: $x = x + 0.0000001$.

3. Obliczyć numerycznie wartość całki

$$\int_1^{\infty} (xe^x)^{-1} dx \quad (= 0.219383934) \quad (8)$$

Uwaga: aby obliczyć całkę należy najpierw dokonać podstawienia $x = \frac{1}{t}$ a następnie przekształcić całkę do postaci akceptowalnej przez program.

Do pliku proszę zapisać tablicę całek (1) dla $n = 7$.

4. W sprawozdaniu proszę przeanalizować zbieżność elementów $D_{n,0}$ i $D_{n,n}$ (elementy diagonalne).