Sprawozdanie - laboratorium nr 4
Uogólniony (symetryczny) problem własny - wyznaczanie modów własnych struny w 1D

Damian Płóciennik

20 marca 2019

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Wartości i wektory własne macierzy kwadratowych

Liczbę zespoloną λ nazywamy wartością własną macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$, jeżeli istnieje niezerowy wektor $\vec{v}$ taki, że

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}. \tag{1}$$

Każdy niezerowy wektor $\vec{v}$ spełniający równanie (1) nazywamy wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym wartości własnej λ.

1.2 Macierz symetryczna

Macierz symetryczna jest to macierz kwadratowa $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ stopnia n, która dla $i, j = 1, \ldots, n$ spełnia warunek

$$a_{i,j} = a_{j,i}, \tag{2}$$

który można zapisać krótko przy pomocy transpozycji jako

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}. \tag{3}$$

1.3 Uogólniony problem własny

Uogólniony problem własny definiujemy następująco

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\mathbf{B}\vec{x}, \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami kwadratowymi.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Na laboratorium zajęto się wyznaczaniem częstości drgań własnych struny, której wychylenie w czasie i przestrzeni opisuje funkcja $\psi = \psi(x,t)$. Dynamiką struny rządzi równanie falowe (N - naciąg struny, $\rho(x)$ - liniowy rozkład gęstości):

$$\frac{N}{\rho(x)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{5}$$

Dokonano separacji zmiennych: najpierw podstawiając $\psi(x,t) = u(x)\theta(t)$, a następnie dzieląc przez iloczyn $u\theta$

$$\frac{N}{\rho(x)}\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = const = -\lambda \qquad (\lambda = \omega^2,\ \omega \text{ - częstość własna drgań}), \tag{6}$$

dzięki czemu otrzymano równanie różniczkowe zależne tylko od zmiennej położeniowej

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda \frac{\rho(x)}{N} u. \tag{7}$$

Struna przymocowana jest w punktach $\pm L/2$ (L - długość struny). Wprowadzono siatkę równoodległych węzłów: $x = x_i$, $u(x) = u_i$, $\rho(x) = \rho_i$. Odległość pomiędzy węzłami wynosi

$$\Delta x = \frac{L}{n+1}, \tag{8}$$

a położenie w przestrzeni można wyznaczyć ze wzoru

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Następnie można dokonać dyskretyzacji równania (7) podstawiając trójpunktowy iloraz różnicowy centralny za drugą pochodną

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda \frac{\rho_i}{N} u_i, \tag{10}$$

co można zapisać w postaci

$$\mathbf{A}\vec{u} = \lambda \mathbf{B}\vec{u}, \tag{11}$$

co stanowi tzw. uogólniony problem własny, w którym elementy macierzowe są zdefiniowane następująco

$$A_{i,j} = \frac{-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}}{\Delta x^2} \tag{12}$$

oraz

$$B_{i,j} = \frac{\rho_i}{N} \delta_{i,j}, \tag{13}$$

gdzie

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j \end{cases} \tag{14}$$

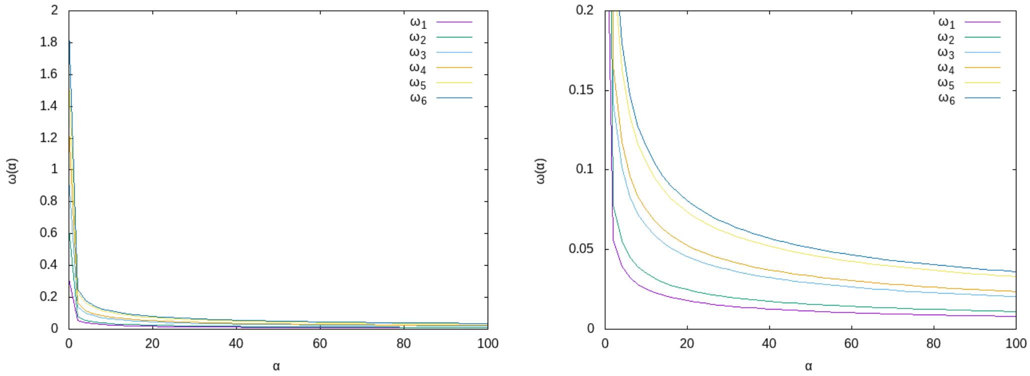
jest deltą Kroneckera.

W celu wykonania zadania przyjęto parametry: $L = 10$, $n = 200$, $\rho(x) = 1 + 4\alpha x^2$, $N = 1$.

Następnie należało utworzyć i uzupełnić macierze **A** i **B** oraz rozwiązać równanie (11) dla $\alpha \in [0, 100]$ z krokiem $\Delta\alpha = 2$. Dla każdej wartości parametru α do pliku należało zapisać wartości pierwiastków z 6 kolejnych najmniejszych wartości własnych i sporządzić odpowiedni wykres ($\omega = \sqrt{\lambda} = f(\alpha)$). Dla $\alpha = 0$ oraz $\alpha = 100$ należało zapisać do pliku wektory własne odpowiadające 6 najniższym wartościom własnym i sporządzić ich wykresy.

2.2 Wyniki

Zdefiniowany układ udało się rozwiązać w języku C przy wykorzystaniu biblioteki GSL, służącej do obliczeń numerycznych. Wykonano wykres częstości własnej struny w funkcji α dla 6 kolejnych najmniejszych wartości własnych.

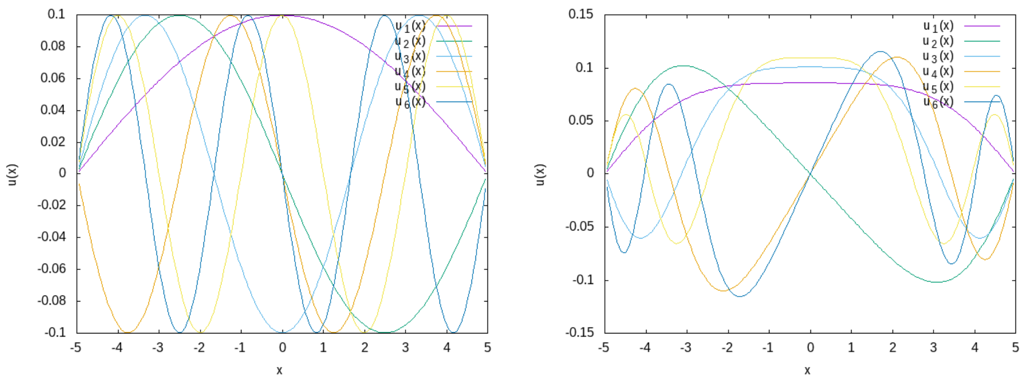


(a) (b)

Rysunek 1: Częstość własna struny w funkcji α (pierwiastki z sześciu najniższych wartości własnych: $\omega k = \sqrt{\lambda} k$)

Na powyższym wykresie można zaobserwować spadek częstości własnej struny wraz ze wzrostem parametru α. Początkowo spadek jest bardzo duży, a następnie powolny, jednak częstości asymptotycznie zbliżają się do zera. Można także zauważyć, że częstości grupują się w pary.

Następnie sporządzono wykresy wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla $\alpha = 0$ oraz $\alpha = 100$.



(a) Przypadek z jednorodną gęstością: $\alpha = 0$ (b) Przypadek z niejednorodną gęstością: $\alpha = 100$

Rysunek 2: Wektory własne odpowiadające sześciu najniższym wartościom własnym

Jak łatwo zauważyć wszystkie funkcje na wykresie (a) mają charakter sinusoidalny, ponieważ dla $\alpha = 0$ gęstość jest jednorodna, czyli nie zależy od punktu na strunie. Stała jest także amplituda, zmienia się natomiast częstotliwość, która jest zależna od wartości wektora własnego.

Na wykresie (b) rozpatrzono przypadek z gęstością niejednorodną. Zmiana gęstości została podyktowana zmianą parametru α. Ze względu, że gęstość jest określona zależnością $\rho(x) = 1+4\alpha x^2$, tzn. przy użyciu funkcji kwadratowej, rośnie ona tak samo podczas oddalania się od środka położenia struny w którąkolwiek ze stron.

W obu przypadkach funkcje wektorów własnych cechują się naprzemiennie parzystością/nieparzystością dla kolejnych odpowiadających im wartości własnych.

3 Wnioski

Rozwiązanie uogólnionego problemu własnego pozwoliło na wyznaczenie modów własnych struny. Dla parametru $\alpha = 0$ gęstość była jednorodna, a zatem niezależna od położenia na strunie. Wykresy wektorów własnych w tym przypadku miały sinusoidalny charakter z częstotliwością coraz większą dla kolejnych odpowiadających wartości własnych. Zwiększenie parametru α, spowodowało, że gęstość zależała już od położenia, a mody struny zostały zniekształcone.
Częstości własne struny zgrupowały się w pary, a w każdej parze występowała kolejno nieparzysta i parzysta funkcja wektorów własnych.