Sprawozdanie - laboratorium nr 8
Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Damian Płóciennik

17 kwietnia 2019

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja funkcjami sklejanymi

W przedziale [a, b] mamy $n+1$ punktów takich, że:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

Punkty te określają podział przedziału [a, b] na n podprzedziałów tj. $[x_i,\ x_{i+1}]$. Funkcję $s(x)$ określoną na przedziale [a, b] nazywamy funkcją sklejaną stopnia m $()m \geqslant 1)$ jeżeli:

1. $s(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale $(x_i,\ x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$,

2. $s(x) \in C^m$.

Punkty x_j nazywamy węzłami funkcji sklejanej. Funkcja $s(x)$ występuje więc w postaci wielomianu, który można przedstawić wzorem:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0}, \qquad x \in (x_i; x_{x+1}). \tag{2}$$

Funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(\text{x})\}$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x) \quad x \in [a, b]. \tag{3}$$

1.2 Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Funkcję $s(x)$ nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji $f(x)$, jeżeli:

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n \quad \text{dla} \ \ n \geqslant 2. \tag{4}$$

Do określenia funkcji $s(x)$ stopnia trzeciego konieczne jest wyznaczenie $n+3$ parametrów. Ponieważ ilość węzłów jest równa $n+1$ pozostają dwa stopnie swobody. Należy zatem nałożyć dwa dodatkowe warunki, których rodzaj zależy od funkcji $f(x)$ lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału [a, b]. Warunki są następujące:

- 1 rodzaj (1 pochodna) - $s^{(1)}(a+0) = \alpha_1 \quad s^{(1)}(a+0) = \beta_1$,
- 2 rodzaj (2 pochodna) - $s^{(2)}(a+0) = \alpha_2 \quad s^{(2)}(b-0) = \beta_2$,
- 3 rodzaj (okresowe) - $s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0) \quad i = 1, 2$.

Funkcje sklejane trzeciego stopnia są najczęściej stosowane.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadaniem było napisanie programu do interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych będących wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Poddane analizie zostały dwie funkcje dane wzorami:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}, \tag{5}$$

$$f_2(x) = \cos(2x). \tag{6}$$

Przyjęto warunki z drugą pochodną równą 0 na obu krańcach przedziału interpolacji ($\alpha = \beta = 0$).

Dodatkowo dla funkcji f_1 oraz $n = 10$ węzłów w przedziale $x \in [-5, 5]$ wyznaczono wartości drugich pochodnych i porównano je z "dokładniejszymi" wartościami liczonymi zgodnie z wzorem:

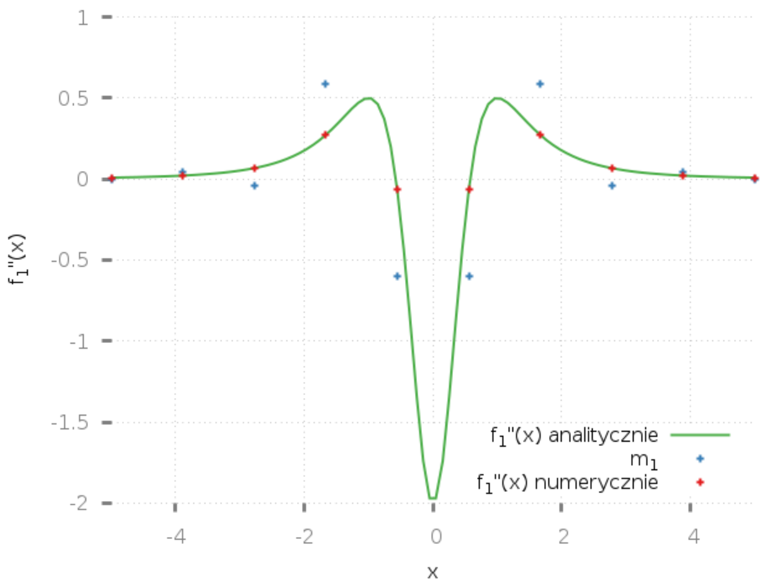
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \approx \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2}. \tag{7}$$

Przyjęto $\Delta x = 0.01$.

Następnie dla f_1 oraz f_2 na zadanym przedziale oraz zmiennej liczbie węzłów interpolacji równych kolejno $n = 5, 8, 21$ dokonano interpolacji oraz porównania funkcji interpolowanych z interpolującymi.

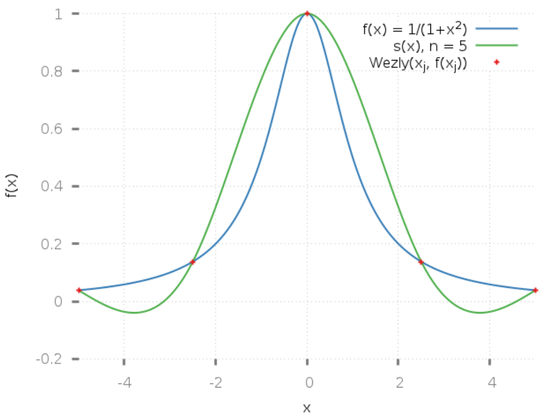
2.2 Wyniki

Do zrealizowania zadania napisano program z wykorzystaniem języka C i biblioteki Numerical Recipes.

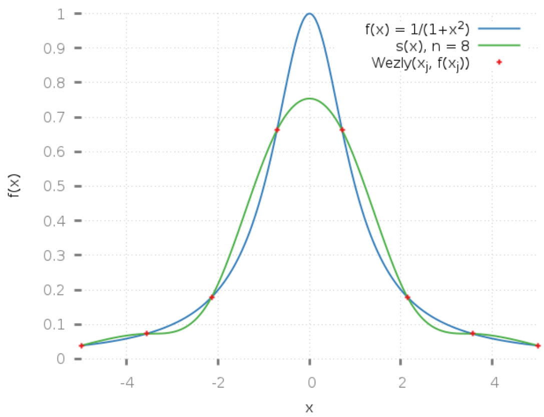


Rysunek 1: Wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla $n = 10$ węzłów porównane z wartościami wynikającymi z ilorazu różnicowego oraz z pochodną wyprowadzoną analitycznie.

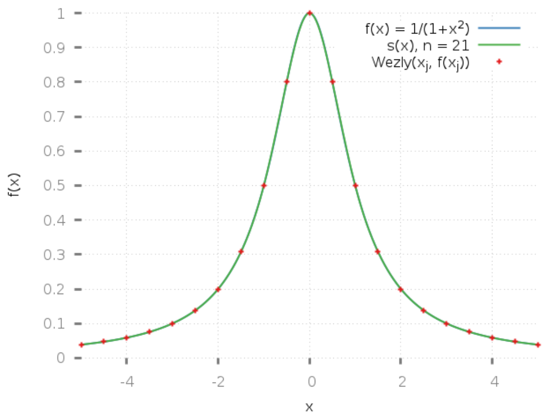
Na powyższym wykresie widać wartości drugich pochodnych dla dziesięciu węzłów wyznaczonych algorytmem interpolacji funkcji f_1 kubicznymi funkcjami sklejanymi i porównanie ich z wartościami wynikającymi z ilorazu różnicowego (7) oraz z pochodną wyprowadzoną analitycznie. Łatwo zauważyć, że wartości wyznaczone numerycznie pokrywają się z krzywą analityczną, natomiast wartości wyznaczone algorytmem interpolacji na krańcach przedziałów praktycznie pokrywają się z wartościami teoretycznymi, a w centralnej części wykresu różnice między nimi są większe.



(a) $n = 5 \Rightarrow h = 2.5$



(b) $n = 8 \Rightarrow h = \frac{10}{7}$

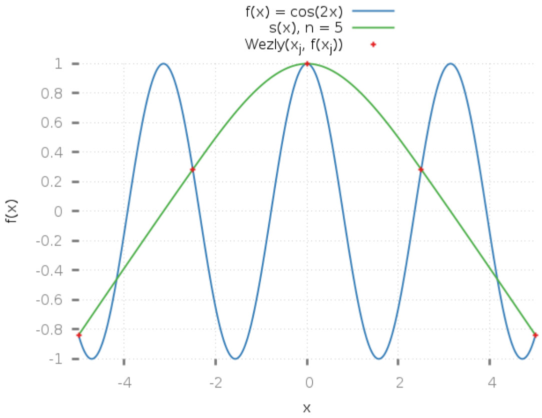


(c) $n = 21 \Rightarrow h = 0.5$

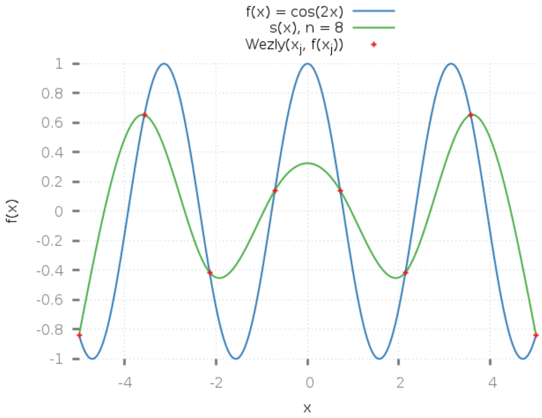
Rysunek 2: Wyniki interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n węzłów.

Na powyższym rysunku przedstawiono wyniki interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla zmiennej liczby węzłów. Łatwo zauważyć, że wraz ze zwiększeniem liczby węzłów następuje zwiększenie się jakości interpolacji. O ile dla $n = 5$ oraz $n = 8$ wykres funkcji interpolującej jeszcze wyraźnie odbiega od wykresu funkcji interpolowanej, to dla $n = 21$ te wykresy się pokrywają.

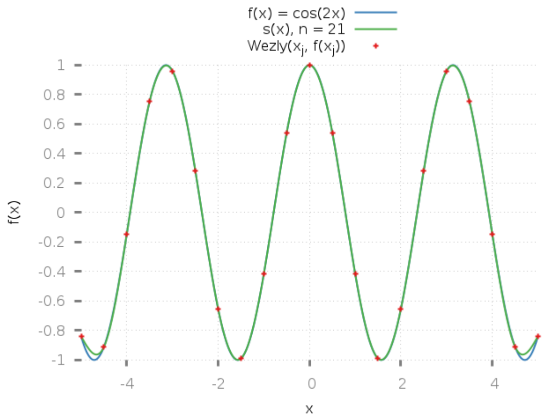
Dodatkowo można zauważyć, że w przypadku nieparzystej ilości węzłów intepolacji, jeden z punktów znajduje się w centrum wykresu, w miejscu występowania ekstremum funkcji. Tak więc dla przypadku $n = 5$ udało się uzyskać ekstremum funkcji interpolującej w tym samym punkcie jak w funkcji interpolowanej, natomiast dla $n = 8$, pomimo większej jakości interpolacji, ekstremum jest inne.



(a) $n = 5 \Rightarrow h = 2.5$



(b) $n = 8 \Rightarrow h = \frac{10}{7}$



(c) $n = 21 \Rightarrow h = 0.5$

Rysunek 3: Wyniki interpolacji funkcji $f_2(x) = \cos(2x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n węzłów.

Na powyższym rysunku przedstawiono wyniki interpolacji funkcji $f_2(x) = \cos(2x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla zmiennej liczby węzłów. W tym przypadku również łatwo zauważalny jest znaczny wpływ wzrostu liczby węzłów na jakość interpolacji. Wynik interpolacji dla $n = 5$ można uznać za bardzo słaby, ponieważ otrzymany kształt znacznie odbiega od interpolowanej funkcji trygonometrycznej. Zwiększenie liczby węzłów do ośmiu spowodowało, że otrzymany wykres funkcji interpolującej coraz bardziej przypomina oczekiwany kształt, posiada taką samą liczbę ekstremów jak wykres funkcji interpolowanej, lecz nadal nie jest akceptowalny. Dla $n = 21$ wynik jest już bardzo bliski wykresowi oryginalnej funkcji, chociaż nie nakłada się tak dokładnie jak w przypadku interpolacji funkcji f_1. Widać tutaj nieznaczne odchylenia na krańcach przedziału, co spowodowane jest między innymi nadal zbyt małą liczbą węzłów interpolacji.

3 Wnioski

Z wykorzystaniem interpolacji funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach udalo nam się uzyskać funkcje interpolujące, które są praktycznie odpowiadające kształtem badanym funkcjom trygonometrycznym i hiperbolicznym, już dla $n = 21$ węzłów. W przypadku wcześniej rozważanych metod interpolacji uzyskanie tak dużej jakości przy takiej ilości węzłów, wymagałoby zmieniania ich położenia (jak np. zera Czebyszewa). Dla obu analizowanych funkcji zwiększanie ilości węzłów poprawiało znacznie jakość interpolacji.

Reasumując, interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach jest bardzo dobrą i dość szybką metodą interpolacji dla równoodległych węzłów.

4 Bibliografia

- Chwiej Tomasz: Interpolacja. [online]. [dostęp: 28.04.2019]. Dostęp w Internecie: `http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/interpolacja_1819.pdf`