# Sprawozdanie - laboratorium nr 9
## Aproksymacja w bazie wielomianów Grama.

Damian Płóciennik

24 kwietnia 2019

# 1 Wstęp teoretyczny

## 1.1 Aproksymacja

Aproksymacja liniowa funkcji $f(x)$ (aproksymowanej - przybliżanej) polega na wyznaczeniu współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ funkcji aproksymującej, takich że:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x), \tag{1}$$

gdzie $\varphi_i(x)$ są funkcjami bazowymi $(m+1)$ wymiarowej podprzestrzeni $X_{m+1}$.

Żądamy, aby funkcja $F(x)$ spełniała warunek

$$||f(x) - F(x)|| = minimum. \tag{2}$$

Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu:

1. Podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą - 1, sin(x), cos(x), ..., sin(kx), cos(kx)
2. Podprzestrzeń wielomianów stopnia $m$ z bazą - 1, $x$, $x^2$, $x^3$, ..., $x^m$ (lub wielomiany ortogonalne)
3. Podprzestrzeń zwiazaną z własnościami rozważanego problemu, np.: $\exp(-ax^2 + bx + c)$

# 2 Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów ortogonalnych

Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów $x_1, x_2, \dots, x_n$, jeśli funkcje $f$ i $g$ spełniają warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i) = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 > 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{n} [g(x_i)]^2 > 0. \tag{5}$$

W aproksymacji średniokwadratowej ciąg funkcyjny

$$\{\varphi_m(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) \tag{6}$$

stanowi bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji $x_1, x_2, \dots, x_n$, jeśli narzucimy dwa warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = 0, \quad j \neq k, \tag{7}$$

oraz nie wszystkie węzły są zerami tych wielomianów

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i) > 0. \tag{8}$$

Wówczas macierz układu normalnego przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi jest macierzą diagonalną.

Macierz układu jest dobrze uwarunkowana więc układ posiada jedno rozwiązanie.

W celu znalezienia wektorów ortogonalnych na siatce zakładamy, że węzły są równoodległe

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

i wykonujemy przekształcenie

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad x_i \to q_i. \tag{10}$$

Naszym zadaniem jest znalezienie ciągu wielomianów

$$\{F_i^{(n)}(q)\} = F_0^{(n)}(q), F_1^{(n)}(q), \ldots, F_m^{(n)}(q) \tag{11}$$

postaci

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q(q-1) + \cdots + a_k q(q-1)\cdots(q-k+1) \tag{12}$$

spełniające warunek ortogonalności

$$\sum_{i=0}^{n} F_j^{(n)}(i) F_k^{(n)}(i) = 0 \Longleftrightarrow j \neq k. \tag{13}$$

Korzystamy z postaci wielomianu czynnikowego

$$q^{[k]} = q(q-1)\cdots(q-k+1), \tag{14}$$

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q^{[1]} + a_2 q^{[2]} + \cdots + a_k q^{[k]} \tag{15}$$

i dodatkowo normujemy wielomiany do 1 tzn. mają one postać

$$\hat{F}_k^{(n)}(0) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m, \tag{16}$$

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = 1 + b_1 q^{[1]} + b_2 q^{[2]} + \cdots + b_k q^{[k]}. \tag{17}$$

Szukane wielomiany ortogonalne są wielomianami Grama

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[n]}}. \tag{18}$$

Mając zdefiniowaną bazę można znaleźć funkcję aproksymującą $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{i=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \hat{F}_k^{(n)}\left(\frac{x - x_0}{h}\right), \quad m \leqslant n, \tag{19}$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i F_k^{(n)}(x_i) \tag{20}$$

$$s_k = \sum_{i=0}^{n} \left[F_k^{(n)}(q)\right]^2. \tag{21}$$

# 3 Zadanie do wykonania

## 3.1 Opis problemu

Zadaniem było wykonanie aproksymacji funkcji

$$f_{szum} = f(x) + C_{rand}(x) \tag{22}$$

przy użyciu wielomianów Grama w przedziale $x \in [x_{min}, x_{max}]$ na siatce równoodległych węzłów, gdzie funkcja $f(x)$ jest zdefiniowana następująco:

$$f(x) = \sin\left(\frac{14\pi x}{x_{max} - x_{min}}\right)\left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}\right)\right), \tag{23}$$

a $C_{rand}$ jest niewielkim zaburzeniem stochastycznym zdefiniowanym jako:

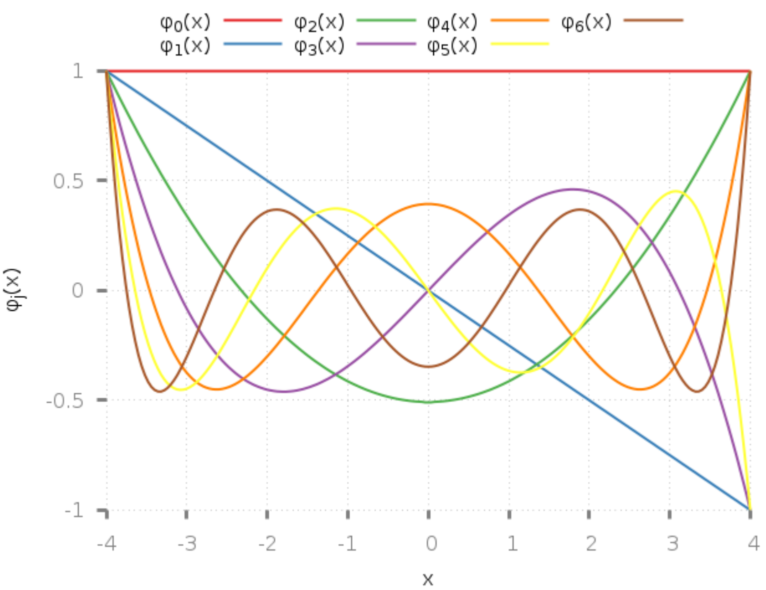
$$C_{rand} = \frac{Y - 0.5}{5}, \tag{24}$$

gdzie $Y \in [0, 1]$ jest liczbą pseudolosową o rozkładzie równomiernym.

Przyjęto liczbę węzłów równą 201. Aproksymację funkcji przeprowadzono kolejno dla $m = 10, 30, 50$ wielomianów. Przyjęto wagę w(x) = 1.0. Funkcję aproksymującą porównano na wykresach z funkcją aproksymowaną oraz bez szumu. W celu porównania wyników wykonano również aproksymację funkcji $f(x)$ bez szumu.

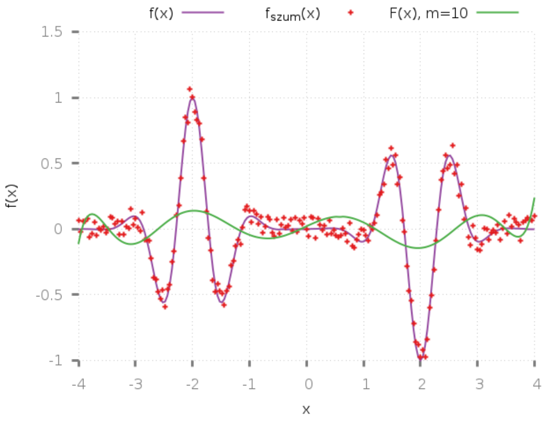
## 3.2 Wyniki

Do zrealizowania zadania wykorzystano program napisany przy użyciu języka C.

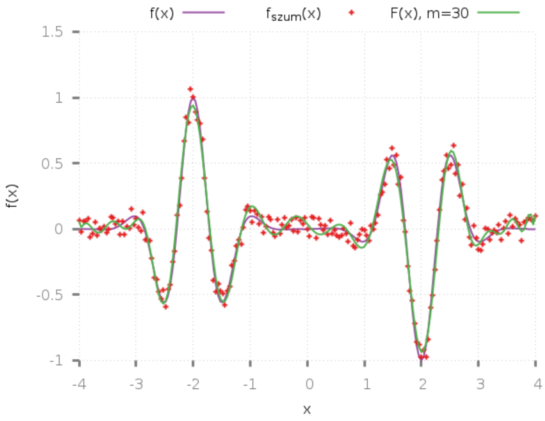



Rysunek 1: Siedem pierwszych wielomianów Grama w przedziale $[-4, 4]$

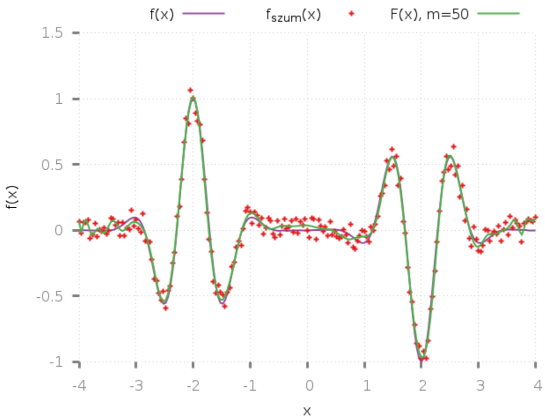
Na powyższym wykresie przedstawiono siedem pierwszych wielomianów Grama w przedziale $[-4, 4]$. Porównując przebiegi wielomianów przedstawione na wykresie ze wzorem (17) można stwierdzić, że zostały one wyznaczone poprawnie.




(a) $m = 10$



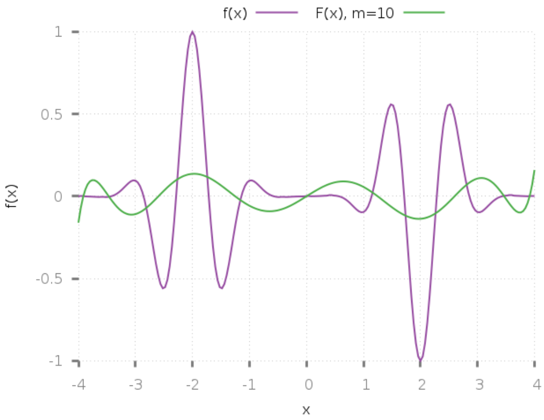

(b) $m = 30$



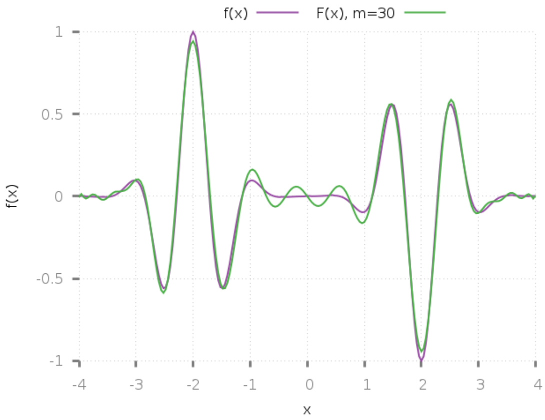

(c) $m = 50$

Rysunek 2: Wyniki aproksymacji według danych $f_{szum}(x)$ dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama: użyto $m + 1$ wielomianów.

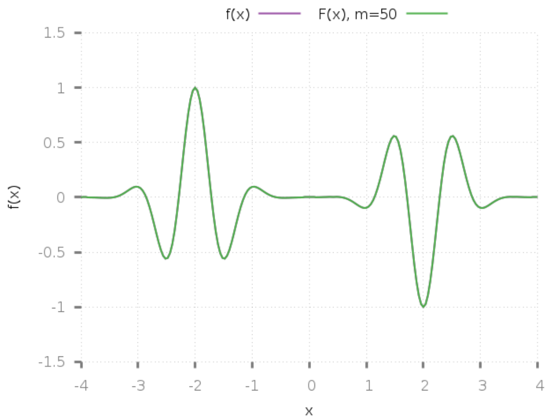
Na powyższym rysunku przedstawiono wyniki aproksymacji funkcji $f_{szum}(x)$ dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama. Łatwo zauważyć, że dla $m = 10$ wykres funkcji aproksymującej znacznie odbiega od oczekiwanego. Dla $m = 30$ wykres $F(x)$ jest zbliżony do wykresu funkcji oryginalnej, ale występują zauważalne oscylacje w miejscach, gdzie jest duże skupisko punktów funkcji aproksymowanej - zaszumionej. W ostatnim przypadku wykres wyraźnie przypomina funkcję $f(x)$, oscylacje uległy zmniejszeniu, lecz nadal występują, co jest spowodowane występowaniem szumu.




(a) $m = 10$




(b) $m = 30$




(c) $m = 50$

Rysunek 3: Wyniki aproksymacji według danych $f(x)$ dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama: użyto $m + 1$ wielomianów.

Na powyższym rysunku przedstawiono wyniki aproksymacji funkcji $f(x)$ (niezaszumionej) dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama. Podobnie jak w poprzednim przypadku można zauważyć, że zwiększenie liczby wielomianów spowodowało lepszą aproksymację, wykresy uległy wygładzeniu, a oscylacje zostały zredukowane. O ile dla $m = 10$ wykres $F(x)$ znacznie odbiega od wykresu funkcji aproksymowanej, dla $m = 30$ już go przypomina, ale nadal zauważalne są oscylacje, to dla przypadku $m = 50$ wykres funkcji aproksymującej praktycznie pokrywa się z wykresem oryginalnej funkcji, co pokazuje, że aproksymacja została dobrze przeprowadzona.

# 4 Wnioski

Metoda aproksymacji w bazie wielomianów Grama pozwoliła na uzyskanie funkcji zbliżonej do funkcji oryginalnej pomimo występowanie wyraźnego szumu. Należy jednak podkreślić, że wykres funkcji aproksymującej nie pokrywał się w pełni z wykresem funkcji oczekiwanej nawet dla liczby wielomianów równej 50. Efekt taki uzyskano dopiero, gdy funkcją aproksymowaną została funkcja niezaszumiona. Podczas wykonywania zadania zauważono, że poprzez zwiększenie liczby wielomianów polepszała się jakość aproksymacji, wykresy ulegały wygładzeniu, a oscylacje były redukowane.

Reasumując, metoda aproksymacji w bazie wielomianów Grama jest skuteczną metodą aproksymacji, pozwalającą na uzyskanie dobrego przybliżenia funkcji aproksymowanej.

## 5 Bibliografia


- Chwiej Tomasz: Aproksymacja. [online]. [dostęp: 29.04.2019]. Dostęp w Internecie: `http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/aproksymacja_1819.pdf`