UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS
Matemática para Computação
Prof. Rodrigo Orsini Braga

Conjuntos finitos e o Princípio da Enumeração

Já vimos na aula do Módulo 2 que um conjunto é finito se possui um número específico de elementos diferentes, ou seja, se contém um número n de elementos distintos, onde n representa um número inteiro não negativo. Caso contrário, o conjunto é infinito. Por exemplo, o conjunto vazio $\emptyset$, o conjunto dos dígitos e o conjunto de letras do alfabeto são conjuntos finitos, enquanto que o conjunto dos números inteiros positivos pares, {2, 4, 6,...}, é infinito.

Se A for um conjunto finito, o seu número de elementos é a cardinalidade (ou ordem) de A, denotada por $|A|$ ou $\#(A)$ ou $n(A)$. Assim, por exemplo, $|\emptyset|=0$, |{dígitos}|=10 e |{letras do alfabeto}| = 26.

Os teoremas abaixo são utilizados para se definir o número de elementos envolvidos na união e interseção de conjuntos.

Lema 1: Se A e B são conjuntos finitos disjuntos $(A\cap B=\emptyset)$, então $A\cup B$ é finito e

$$|A\cup B| = |A|+|B|.$$

Prova: ao contarmos os elementos de $A\cup B$, primeiramente contamos os que estão em A. Existem $|A|$ elementos em A. Os únicos outros elementos que estão em B, mas não em A. Mas como A e B são disjuntos, nenhum elemento de B está em A e, portanto, existem $|B|$ elementos que estão em B mas não estão em A. Logo $|A\cup B| = |A|+|B|$. ☺

Lema 2: Se A e B são conjuntos finitos, então $A-B$ e $A\cap B$ são finitos e

$$|A-B| = |A|-|A\cap B|.$$

Prova: Como $A-B\subseteq A\,,\, A\cap B\subseteq A$ então $|A-B|\leqslant|A|\ e\ |A\cap B|\leqslant|A|$. Cada elemento de A pode ser ou não elemento de B. Assim, temos que o conjunto A é formado pelos elementos que estão em A e B e pelos elementos que estão em A e não estão em B, ou seja, A é a união disjunta dos conjuntos $A\cap B$ e $A-B$. Pelo Lema 1, $|A| = |A\cap B|+|A-B|$, ou seja, $|A-B| = |A|-|A\cap B|$. ☺

O resultado abaixo é uma fórmula geral para $|A\cup B|$ mesmo quando os conjuntos não são disjuntos. É o chamado *Princípio da Inclusão-Exclusão*.

Teorema:(***Princípio da Inclusão-Exclusão***) Se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|.$$

Prova: Conforme demonstração do Lema 1, vimos que ao contarmos os elementos de $A\cup B$, primeiramente contamos os que estão em A e os outros elementos são os que estão em B, mas não em A. Ou seja, $A\cup B$ é a união disjunta dos conjuntos A e $B-A$. Assim, pelo Lema 1, $|A\cup B| = |A|+|B-A|$. Por outro lado, pelo Lema 2, $|B-A| = |B|-|A\cap B|$. Portanto, temos que $|A\cup B| = |A|+|B-A| = |A|+|B|-|A\cap B|$. ☺

Podemos aplicar esse resultado para obter uma fórmula similar para 3 conjuntos.

Corolário: Se A, B e C são conjuntos finitos, então

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

Usando-se a indução matemática (veremos isto mais adiante), pode-se generalizar este resultado para qualquer número finito de conjuntos.

Exemplo: Considere os seguintes dados sobre 120 estudantes de matemática no que diz respeito aos idiomas francês, alemão e russo.

65 estudam francês
45 estudam alemão
42 estudam russo
20 estudam francês e alemão
25 estudam francês e russo
15 estudam alemão e russo
8 estudam os três idiomas

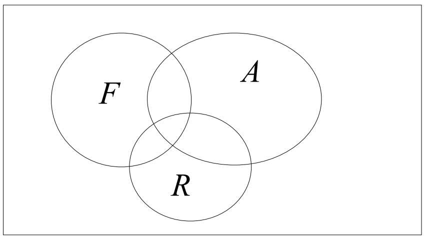
Queremos determinar o número de alunos que estudam pelo menos um dos três idiomas e quantos não estudam nenhum dos três idiomas.

Solução: Sejam F, A e R os conjuntos de alunos que estudam francês, alemão e russo, respectivamente. O número de alunos que estudam pelo menos um dos três idiomas é dado por $|F \cup A \cup R|$. Usando o resultado anterior, temos que:

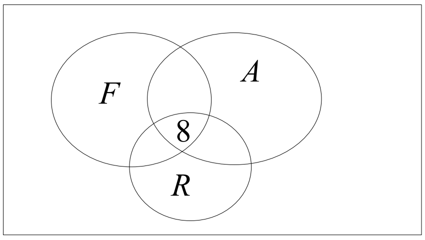
$$\begin{aligned} |F \cup A \cup R| &= |F| + |A| + |R| - |F \cap A| - |F \cap R| - |A \cap R| + |F \cap A \cap R| \\ &= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100\,. \end{aligned}$$

Portanto, 100 alunos falam pelo menos um dos três idiomas. Como eram 120 estudantes, então 20 alunos não falam nenhum dos três idiomas.

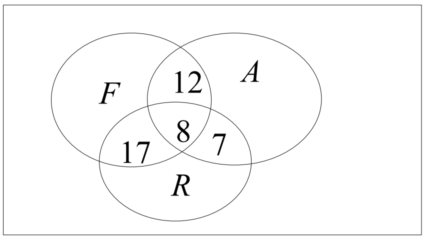
Uma outra forma de chegar a esta conclusão é usando Diagramas de Venn para representar os três conjuntos.



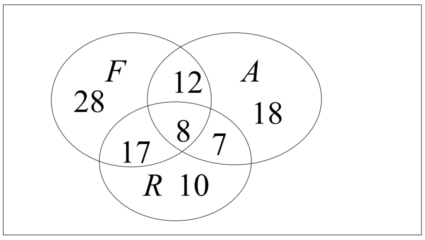
Começamos a preencher o diagrama de dentro para fora, ou seja, começamos pelo conjunto $F \cap A \cap R$, ou seja, dos alunos que falam os três idiomas e colocamos este número na intersecção dos três conjuntos.



Após, vamos preenchendo as intersecções dois a dois. Comecemos pelos que estudam francês e alemão mas não russo, ou seja $|(F \cap A) - R| = |F \cap A| - |F \cap A \cap R| = 20 - 8 = 12$. Analogamente, 25 – 8 = 17 estudam francês e russo, mas não alemão; e 15 – 8 = 7 estudam alemão e russo, mas não francês.



Após, preenchemos os espaços que indicam os que falam apenas um dos três idiomas.
65 – 12 – 8 – 17 = 28 estudam apenas francês
45 – 12 – 8 – 7 = 18 estudam apenas alemão
42 – 17 – 8 – 7 = 10 estudam apenas francês.



Somando todos os números que aparecem nos conjuntos, temos 28+12+8+17+7+18+10 = 100. Logo, os que estão fora dos três conjuntos, como o universo é 120, resulta em 20 estudantes que não estudam nenhum dos três idiomas.