UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS
Matemática para Computação
Prof. Rodrigo Orsini Braga

Álgebra de Conjuntos

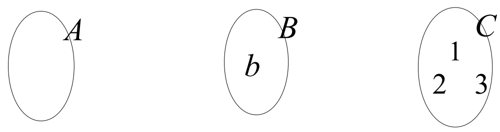
O termo *álgebra*, desde a sua origem até hoje, refere-se a cálculos. Por exemplo, as operações aritméticas básicas (adição, multiplicação, etc.) sobre o conjunto dos números reais constituem uma álgebra. Vamos aqui considerar que uma *Álgebra* é constituída de operações sobre uma coleção de objetos. Neste contexto, *Álgebra de Conjuntos* corresponderia às operações definidas sobre todos os conjuntos.

Assim, como os números podem ser somados ou multiplicados e os valores lógicos podem ser combinados com $\wedge$ ou $\vee$, há várias operações que podemos fazer sobre os conjuntos. Nesta aula, iremos abordar justamente quais são estas operações sobre os conjuntos.

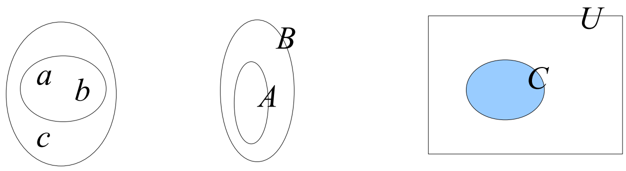
Até aqui, o tratamento dado aos conjuntos e às definições relacionadas a conjuntos usou uma linguagem textual. Porém, na medida em que outros conceitos são desenvolvidos, como as operações sobre conjuntos, uma linguagem por meio de diagramas facilita o entendimento de definições e permite uma identificação e compreensão fácil e rápida destes conceitos.

Os *Diagramas de Venn* (John Venn (1834-1923), matemático inglês) são universalmente conhecidos e largamente utilizados na Teoria de Conjuntos. Os diagramas usam figuras geométricas planas para representar um conjunto. Tais figuras podem ser diversas. Em geral, o conjunto universo é representado por um retângulo e os demais conjuntos por círculos, elipses, etc. Os seguintes exemplos ilustram diversos Diagramas de Venn.

<u>**Exemplo 1**</u>: Vamos representar um dado conjunto A, um determindo elemento $b \in B$ e o conjunto $C = \{1,2,3\}$.



<u>**Exemplo 2**</u>: Vamos representar que $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$, $A \subseteq B$ e para um dado conjunto universo U, um conjunto $C \subseteq U$.



Observe que o conjunto $C \subseteq U$. é destacado para auxiliar visualmente o conjunto que se deseja representar. Tal destaque será importante na interpretação das operações sobre os conjuntos.

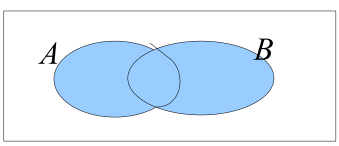
<u>Operações com Conjuntos</u>:

<u>**Definição 1**</u>**:** Chamamos de <u>união</u> de dois conjuntos A e B o conjunto denotado por $A \cup B$ e dado por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Relacionando com a Lógica, a união corresponde à noção de disjunção. Ou seja, $A \cup B$ considera todos os elementos que pertencem ao conjunto A *ou* ao conjunto B. Observe que o símbolo de união $\cup$ lembra o símbolo de disjunção $\vee$.

<u>**Exemplo 3**</u>: No diagrama de Venn abaixo, sombreamos $A \cup B$, isto é, a área de A e a área de B.



Exemplo 4: Sejam $A=\{a,b,c,d\}$ e $B=\{f,b,d,g\}$. Assim, $A\cup B=\{a,b,c,d,f,g\}$.

Obs. 1: Deduz-se diretamente da definição da união de dois conjuntos que $A\cup B$ e $B\cup A$ são o mesmo conjunto, isto é,

$$A\cup B=B\cup A.$$

Obs. 2: A e B são sempre subconjuntos de $A\cup B$, isto é,

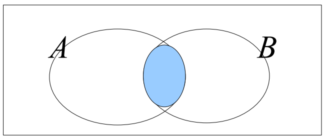
$$A\subseteq(A\cup B) \text{ e } B\subseteq(A\cup B).$$

Definição 2: Chamamos de intersecção de dois conjuntos A e B o conjunto denotado por $A\cap B$ e dado por

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}.$$

Relacionando com a Lógica, a intersecção corresponde à noção de conjunção. Ou seja, $A\cap B$ considera todos os elementos que pertencem *simultaneamente* aos dois conjuntos, ou seja, que pertencem ao conjunto A *e* ao conjunto B. Observe que o símbolo de intersecção $\cap$ lembra o símbolo de conjunção $\wedge$.

Exemplo 5: No diagrama de Venn abaixo, sombreamos $A\cap B$, ou seja, a área que é comum tanto a A como a B.



Exemplo 6: Sejam $A=\{a,b,c,d\}$ e $B=\{f,b,d,g\}$. Assim, $A\cap B=\{b,d\}$.

Exemplo 7: Seja $V=\{2,4,6,\ldots\}$, isto é, os números inteiros positivos múltiplos de 2; e seja $W=\{3,6,9,\ldots\}$, isto é, os números inteiros positivos múltiplos de 3. Assim,

$$V\cap W=\{6,12,18,\ldots\} \text{ (os mútiplos positivos de 6).}$$

Obs. 3: Segue-se diretamente da definição de intersecção de dois conjuntos que

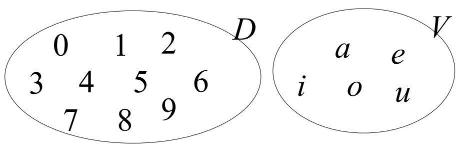
$$A\cap B=B\cap A.$$

Obs. 4: Cada um dos conjuntos A e B contém $A\cap B$ como subconjunto, isto é,

$$(A\cap B)\subseteq A \text{ e } (A\cap B)\subseteq B.$$

Se os conjuntos A e B não tem elementos em comum, isto é, se $A\cap B=\emptyset$, então A e B são ditos *conjuntos disjuntos*, *conjuntos independentes* ou *conjuntos mutuamente exclusivos*. Representamos conjuntos disjuntos por Diagramas de Venn, de tal maneira que as elipses não se intersectem.

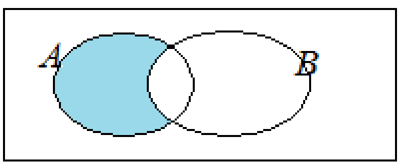
Exemplo 8: Se $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ é o conjunto de dígitos numéricos, e $V=\{a,e,i,o,u\}$ o conjunto das vogais do alfabeto, então $D\cap V=\emptyset$.



Definição 3: Chamamos de diferença entre dois conjuntos A e B o conjunto $A-B$ dado por

$$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}.$$

Exemplo 9: No Diagrama de Venn abaixo, destacamos $A-B$, isto é, a área do conjunto A que não é parte do conjunto B.



Obs. 5: $A-B$ é subconjunto de A, ou seja, $(A-B)\subseteq A$.

Obs. 6: Note que, em geral, $A-B \neq B-A$.
Exemplo 10: Se $A=\{a,b,c,d\}$ e $B=\{f,b,d,g\}$, então $A-B=\{a,c\}$ e $B-A=\{f,g\}$.

Obs. 7: Os conjuntos $A-B$, $A \cap B$ e $B-A$ são *mutuamente disjuntos*, ou seja, a intersecção de qualquer dois destes conjuntos é o conjunto vazio.

Um caso particular de diferença:

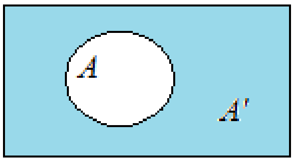
Definição 4: Sejam A e B conjuntos tais que $A \subseteq B$. Chamamos de complementar de A em relação a B o conjunto:

$$C_B A = B - A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}.$$

Além disso, o complementar de um conjunto A em relação ao conjunto universo é usualmente representado por A', ou seja:

$$A' = C_U A = U - A = \{x | x \notin A\}.$$

Exemplo 11: No Diagrama de Venn abaixo, destacamos o complemento de A, isto é, a área por fora de A. Lembre-se que representamos o conjunto universo pela área do retângulo.



Exemplo 12: Consideremos que o conjunto universo seja o alfabeto e seja $T=\{a,b,c\}$. Então $T'=\{d,e,f,\ldots,y,z\}$.

Nossa próxima observação mostra como a diferença de dois conjuntos pode ser definida em termos do complementar de um conjunto e da interseção de dois conjuntos.

Obs.8: A diferença de A e B é igual à intersecção de A e o complementar de B, isto é,

$$A-B=A \cap B'.$$

A prova disto ocorre diretamente das definições:

$$A-B=\{x | x \in A \wedge x \notin B\} = \{x | x \in A \wedge x \in B'\} = A \cap B'.$$