#Лабораторная работа 3
#Диференциальные уравнения
#Выполнила Антонова Лидия Сергеевна, гр. 353504
#Вариант 1

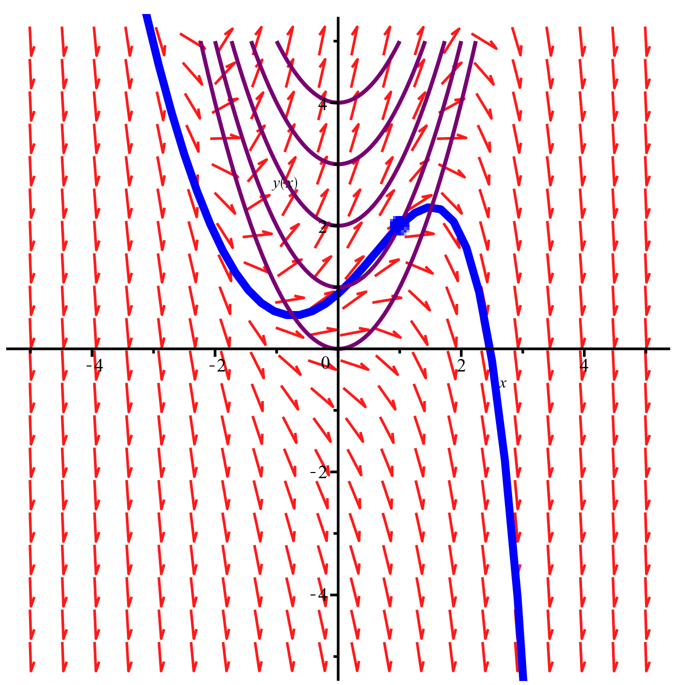
#Часть1.

#Задание 1. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин постройте интегральную кривую, проходящую через точку M.

```
restart :
with(DEtools) :
de := diff(y(x), x) = y(x) - x^2;
solveDe := dsolve({de, y(1) = 2}, y(x)) :
rootsDe := rhs(solveDe);
dplot := DEplot(de, y(x), x = -5 ..5, y = -5 ..5, [y(1) = 2], linecolor = blue) :
for i from 0 to 5 do
k[i] := plots[implicitplot](y - x^2 = i, x = -5 ..5, y = -5 ..5, color = purple);
end:
pM := plot([[1, 2]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = blue) :
plots[display](dplot, k[0], k[1], k[2], k[3], k[4], k[5], pM);
```

$$de := \frac{d}{dx}\, y(x) = y(x) - x^2$$

$$rootsDe := x^2 + 2\,x + 2 - \frac{3\,e^x}{e}$$



#Задание 2. 1-ая часть. Найдите линию, проходящую через точку M0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор MN с концом на оси Oy имеет длину, равную a, и образует острый угол с положительным направлением оси Oy. Сделайте чертеж.

$a := 25;$

$\#x0 := 15;\ y0 := 1;$

$f := x \to -\mathrm{sqrt}\left(-x^2 + 625\right) + 21 :$

$p1 := plot(f(x), x = -20\,..20, y = -20\,..20, color = purple) :$

$func\_value := subs(x = 15, f(x)) :$

$shtrih\_value := subs(x = 15, diff(f(x), x)) :$

$p2 := plot(func\_value + shtrih\_value \cdot (x - 15), x = -20\,..20, y = -20\,..20, color = red) :$

$plots[display](p1, p2);$

#Задание 2. 2-ая часть. Найдите линию, проходящую через точку M0, и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор MN с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox, обратно пропорциональную абсциссе точки M. Коэффициент пропорциональности равен a. Сделайте чертеж.

$a := -\frac{1}{2};$

$x0 := 1;\ y0 := \mathrm{e};$

$ex := x - xn = \frac{a}{x};$

$de := solve((x - xn) \cdot diff(y(x), x) = y(x), xn);$

$res := dsolve(subs(xn = de, ex));$

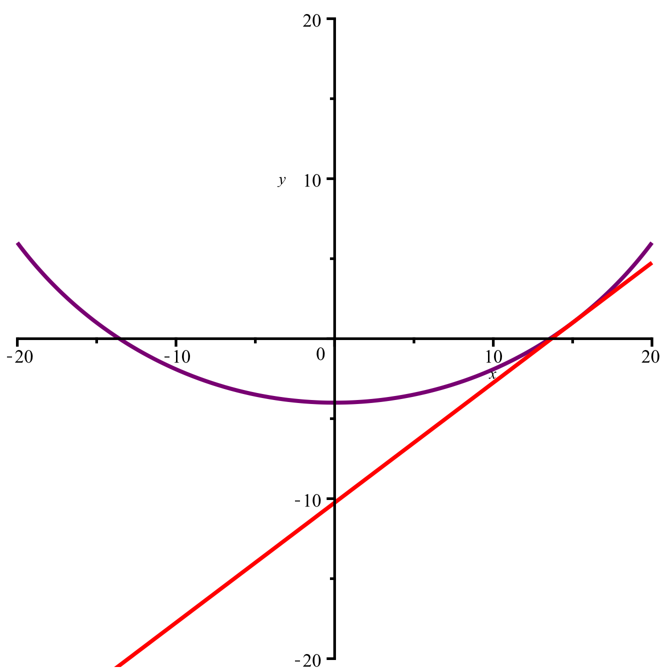
$simplify(dsolve(\{subs(xn = de, ex), y(x0) = y0\}));$

$findLine := plot(rhs(\%), x = -8\,..8, color = black) :$

$plotM := plot([[x0, y0]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = blue) :$

$plots[display](findLine, plotM);$

$$a := 25$$



$$a := -\frac{1}{2}$$

$$x0 := 1$$

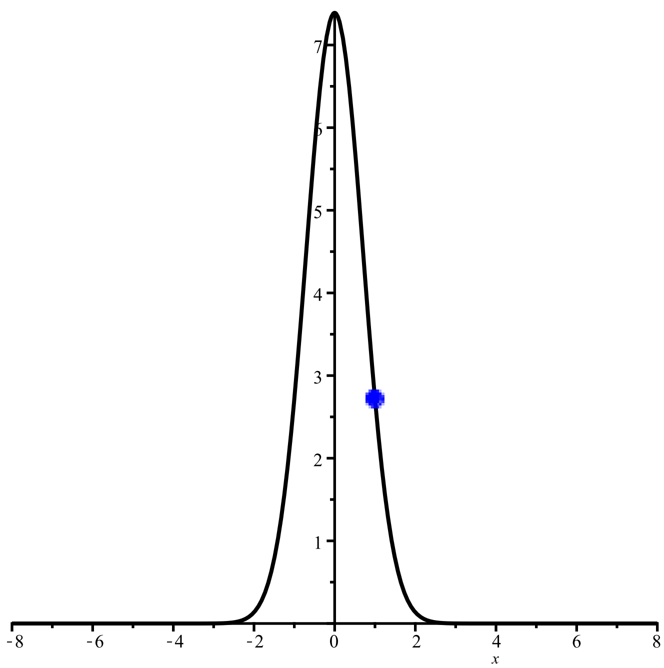
$$y0 := \mathrm{e}$$

$$ex := x - xn = -\frac{1}{2\,x}$$

$$de := \frac{\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)x - y(x)}{\frac{d}{dx}\,y(x)}$$

$$res := y(x) = \_C1\,e^{-x^2}$$

$$y(x) = e^{-x^2+2}$$



> *#Задание 3. Найдите общий интеграл уравнения. Постройте на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую. Сделайте вывод о типе особой точки.*

$restart:$
$with(DEtools):$
$de := diff(y(x), x) = \frac{4\,x + 21\cdot y(x) - 25}{24\,x + y(x) - 25};$
$dsolve(de, y(x));$
$solve(\{4\,x + 21\,y - 25 = 0, 24\,x + y - 25 = 0\});$
$dplot := DEplot(de, y(x), x = -5..5, y = -5..5, [y(-1.5) = -2, y(3) = 4], linecolor = blue):$
$plotPoint := plot([[1, 1]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = black):$
$plots[display](dplot, plotPoint);$

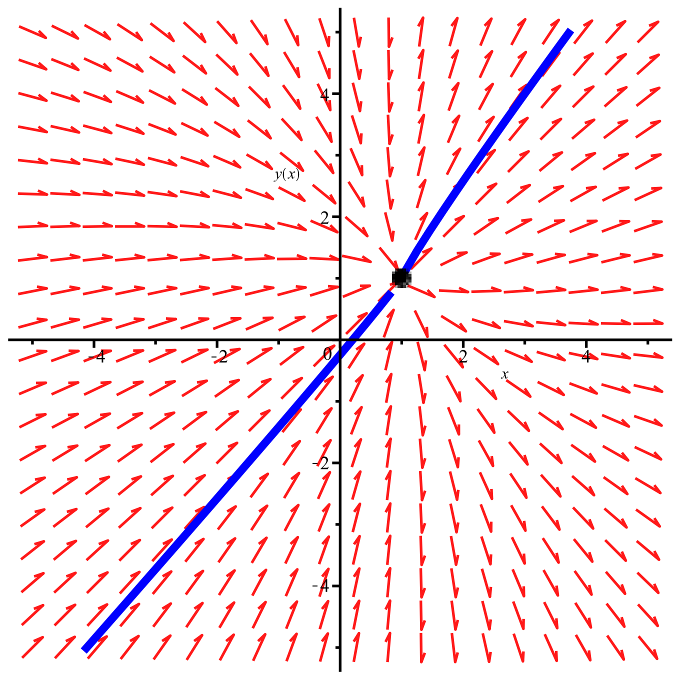
$M := Matrix([[24 - \lambda, 1], [4, 21 - \lambda]]);$
$solve(LinearAlgebra[Determinant](M) = 0);$
λ1, λ2 больше 0, *неустойчивое седло*

$$de := \frac{d}{dx}\,y(x) = \frac{4\,x + 21\,y(x) - 25}{24\,x + y(x) - 25}$$

$$-5\ln\left(\frac{-y(x)+x}{x-1}\right)+4\ln\left(-\frac{-5+y(x)+4x}{x-1}\right)-\ln(x-1)-\_C1=0$$

$$\{x=1, y=1\}$$

```
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were
issued:
   cannot evaluate the solution further right of 1.0000112,
maxfun limit exceeded (see ?dsolve,maxfun for details)
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were
issued:
   cannot evaluate the solution further left of .99999722,
maxfun limit exceeded (see ?dsolve,maxfun for details)
```



$$M := \begin{bmatrix} 24-\lambda & 1 \\ 4 & 21-\lambda \end{bmatrix}$$

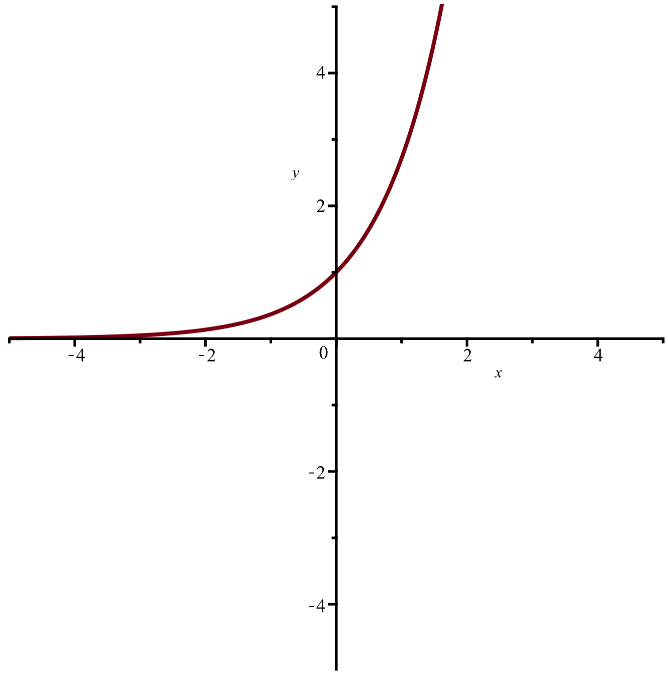
$$25, 20$$

$$\lambda 1, \lambda 2 \text{ знака разного} - \text{седло} \quad \textbf{(1)}$$

> *#Задание 4. Найдите решение задачи Коши. Сделайте чертеж интегральной кривой.*
> *restart* :
> *with*(*DEtools*) :
> $de := diff(y(x), x) + x \cdot y(x) = (1+x)\cdot e^{-x}\cdot (y(x))^2;$
> $ans := solve(dsolve(\{de, y(0)=1\}), y(x));$
> $plot(ans, x=-5..5, y=-5..5);$

$$de := \frac{d}{dx}\, y(x) + x\, y(x) = (1+x)\, e^{-x} y(x)^2$$

$$ans := \frac{1}{e^{-x}}$$



> #Задание 5. Решите дифференциальные уравнения. Постройте в одной системе координат интегральные кривые при целых значениях произвольной постоянной от –1 до 1.

$restart:$

$with(DEtools):$

$de1 := x = diff(y(x), x) \cdot \arcsin(diff(y(x), x)) + \mathrm{sqrt}\left(1 - diff(y(x), x)^2\right);$

$X1 := t \cdot \arcsin(t) + \mathrm{sqrt}\left(1 - t^2\right);$

$\mathrm{Y1} := \mathrm{solve}(\mathrm{dsolve}(diff(y(t), t) = t \cdot \arcsin(t)), y(t));$

$plot([seq([X1, Y1, t = -10..10], \_C1 = -1..1)], x = 0..3, y = -2..2);$

$de2 := y(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{abs}\left(\frac{1 + diff(y(x), x)}{1 - diff(y(x), x)}\right)\right) - diff(y(x), x);$

$Y2 := \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{abs}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right) - t;$

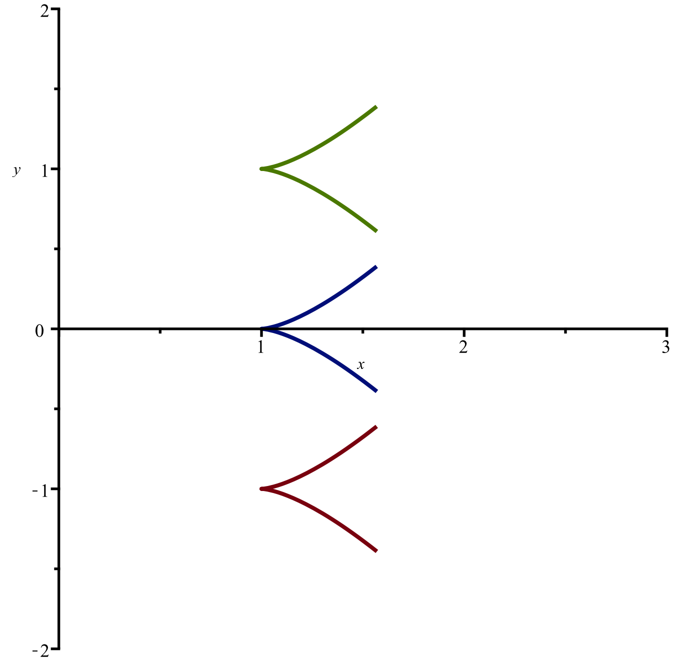
$X2 := solve\left(dsolve\left(diff(x(t), t) = \frac{t}{1 - t^2}\right), x(t)\right);$

$plot([seq([X2, Y2, t = -10..10], \_C1 = -1..1)], x = -10..10, y = -10..10);$

$$de1 := x = \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) \arcsin\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right)^2}$$

$$X1 := t \arcsin(t) + \sqrt{-t^2 + 1}$$

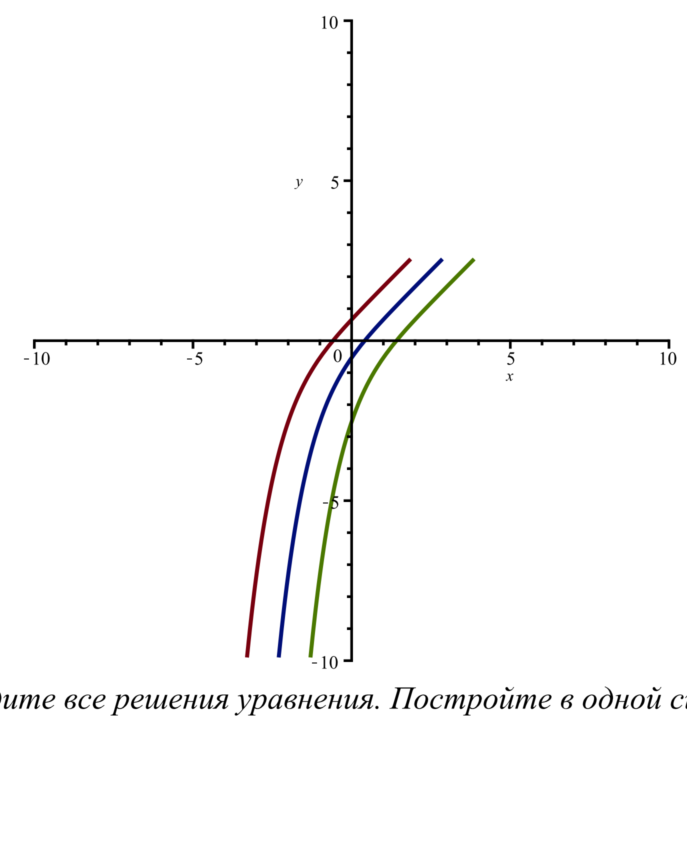
$$Y1 := \frac{t^2 \arcsin(t)}{2} + \frac{t\sqrt{-t^2+1}}{4} - \frac{\arcsin(t)}{4} + \_C1$$



$$de2 := y(x) = \frac{\ln\left(\left|\frac{1+\frac{d}{dx}y(x)}{\frac{d}{dx}y(x)-1}\right|\right)}{2} - \frac{d}{dx}y(x)$$

$$Y2 := \frac{\ln\left(\left|\frac{1+t}{t-1}\right|\right)}{2} - t$$

$$X2 := -\frac{\ln(t-1)}{2} - \frac{\ln(1+t)}{2} + \_C1$$



> *#Задание 6. Найдите все решения уравнения. Постройте в одной системе координат*

график особого решения и интегральных кривых при целых значениях произвольной постоянной от –3 до 3.

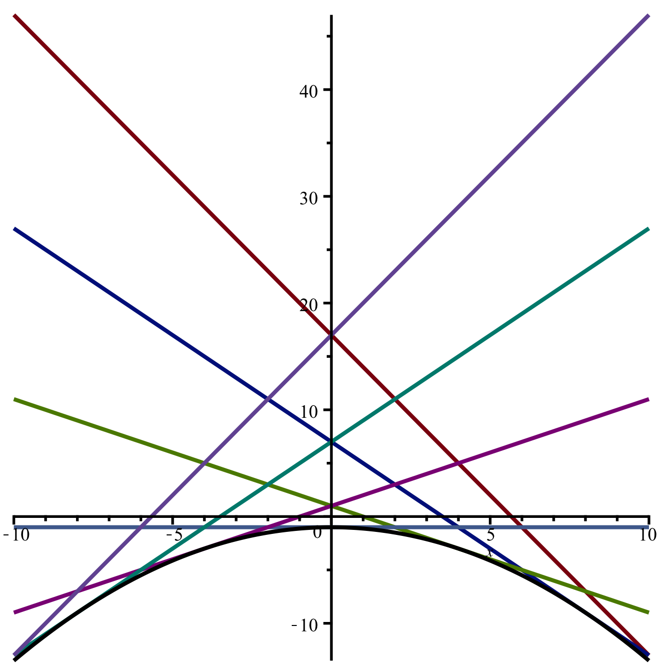
```
restart :
with(DEtools) :
de := y(x) = x·diff(y(x), x) + 2·diff(y(x), x)^2 − 1;
rootsDe := dsolve(de, y(x));
root1 := solve(rootsDe[1], y(x));
root2 := solve(rootsDe[2], y(x));
plotSeq := plot([seq(root2, _C1 = -3 ..3)]) :
plotRoot1 := plot(root1, color = black) :
plots[display](plotSeq, plotRoot1);
```

$$de := y(x) = x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - 1$$

$$rootsDe := y(x) = -\frac{x^2}{8} - 1, y(x) = 2\,\_C1^2 + x\,\_C1 - 1$$

$$root1 := -\frac{x^2}{8} - 1$$

$$root2 := 2\,\_C1^2 + x\,\_C1 - 1$$



>

```
> #Часть2.
#Задание 1. Решите уравнения и сравните с результатами, полученными в Maple.
    Постройте в одной системе координат несколько интегральных кривых.
de1 := diff(y(x), x$2) + exp(-diff(y(x), x$2)) = 0;
X1 := t + exp(-t);
dX1 := diff(X1, t);
Y1 := diff(y(t), t) = int(t · (1 - exp(-t)), t);
sol1 := y(t) = int(rhs(Y1) + _C1, t) + _C2;
plot([seq(seq(rhs(sol1), _C2 = -1 .. 1), _C1 = -1 .. 1)], t = -5 .. 5, y = -10 .. 10, thickness
```

$=2);$

$de2 := y(x)\cdot diff(y(x), x\$2) - diff(y(x), x)^2 - y(x)\cdot diff(y(x), x)\cdot \cot(x) = 0;$
$sol2 := dsolve(de2);$
$plot([seq(seq(rhs(sol2), \_C2 = -1 .. 1), \_C1 = -1 .. 1)], x = -5 .. 5, y = -10 .. 10, thickness$
$= 2);$

$de3 := diff(y(x), x\$2)\cdot\left(1 + y(x)^2\right) + diff(y(x), x)^3 = 0;$
$P := diff(p(y), y)\cdot p(y)\cdot\left(y^2 + 1\right) + p(y)^3 = 0;$
$dP := dsolve(P, p(y));$
$de3Subs := diff(y(x) = subs(y = y(x), rhs(dP[2]));$
$sol3 := dsolve(de3Subs, y(x));$
$plot([seq(seq(rhs(sol3), \_C2 = -1 .. 1), \_C1 = -1 .. 1)], x = -5 .. 5, y = -10 .. 10, thickness$
$= 2);$

$de4 := diff(y(x), x\$2) = 3\left(\frac{diff(y(x), x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right);$
$sol4 := dsolve(de4);$
$plot([seq(seq(rhs(sol4), \_C2 = -1 .. 1), \_C1 = -1 .. 1)], x = -5 .. 5, y = -10 .. 10, thickness$
$= 2);$

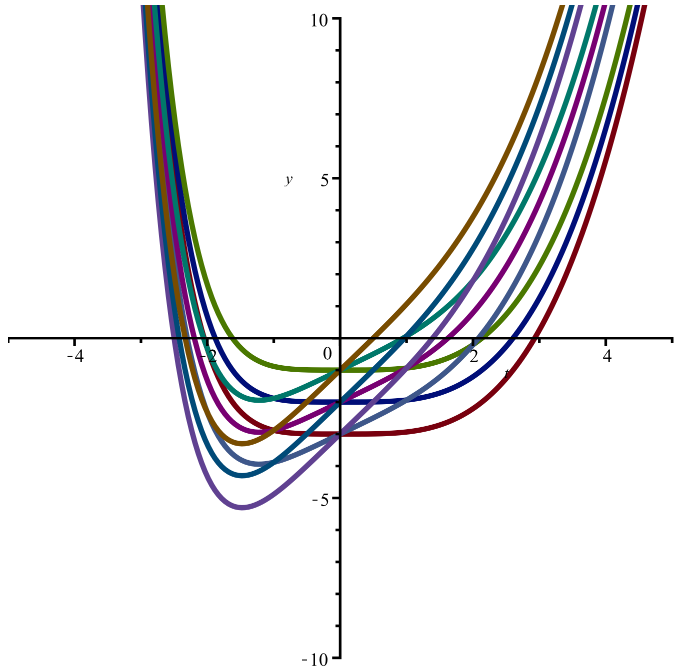
$$de1 := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + e^{-\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)} = 0$$

$$X1 := t + e^{-t}$$

$$dX1 := 1 - e^{-t}$$

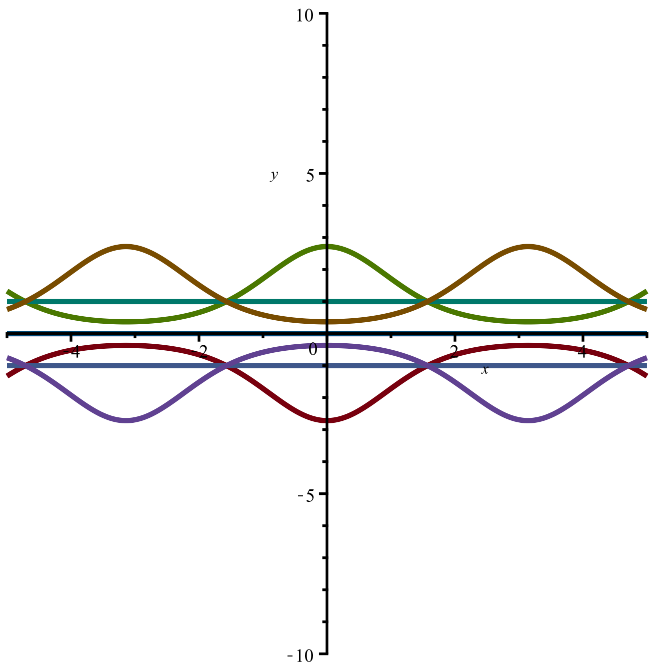
$$Y1 := \frac{d}{dt}\,y(t) = \frac{t^2}{2} + t\,e^{-t} + e^{-t}$$

$$sol1 := y(t) = \_C1\,t - t\,e^{-t} - 2\,e^{-t} + \frac{t^3}{6} + \_C2$$



$$de2 := y(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)\cot(x) = 0$$

$$sol2 := y(x) = \frac{\_C2}{e^{-\_C1\cos(x)}}$$



$$de3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right)\left(1 + y(x)^2\right) + \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^3 = 0$$

$$P := \left(\frac{d}{dy}\,p(y)\right)p(y)\left(y^2 + 1\right) + p(y)^3 = 0$$

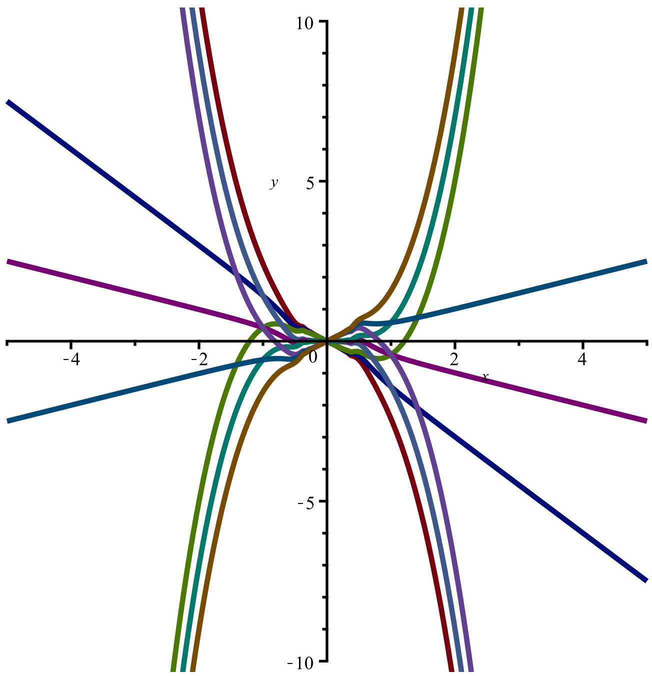
$$dP := p(y) = 0, p(y) = \frac{1}{\arctan(y) + \_C1}$$

$$de3Subs := \frac{1}{\arctan(y(x)) + \_C1}$$

```
Error, (in dsolve) expecting an ODE or a set or list of ODEs. 
Received 1/(arctan(y(x))+_C1)
Error, invalid input: rhs expects 1 argument, but received 2
```

$$de4 := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) = \frac{3\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right)}{x} - \frac{3\, y(x)}{x^2} + \frac{2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}$$

$$sol4 := y(x) = x^3\, \_C2 + x\, \_C1 - \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2}$$



> #*Задание 2. Найдите общее решение уравнения и сравните с результатом, полученным в системе Maple.*

$de := diff(y(x), x\$3)\cdot x\cdot \ln x = diff(y(x), x\$2);$

$dsolve(de);$

$$de := \left(\frac{d^3}{dx^3}\, y(x)\right) x^2 \ln = \frac{d^2}{dx^2}\, y(x)$$

$$y(x) = \frac{\_C1\, e^{-\frac{1}{x \ln}}\, x^2}{2} - \frac{\_C1\, \mathrm{Ei}_1\left(\frac{1}{x \ln}\right) x}{\ln} + \frac{\_C1\, x\, e^{-\frac{1}{x \ln}}}{2 \ln} - \frac{\_C1\, \mathrm{Ei}_1\left(\frac{1}{x \ln}\right)}{2 \ln^2} + \_C2\, x + \_C3 \quad \textbf{(2)}$$

> #*Задание 3. Найдите общее решение дифференциального уравнения.*

$de := diff(y(x), x\$2) + 2\cdot diff(y(x), x) = 4\cdot exp(x)\cdot(\sin x + \cos x);$

$dsolve(de);$

$$de := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + 2\, \frac{d}{dx}\, y(x) = 4\, e\,xp(x)\, (\cos x + \sin x)$$

$$y(x) = \int \left(4 \left(\int xp(x)\, x\, e^{1+2x}\, dx\right) \cos + 4 \left(\int xp(x)\, x\, e^{1+2x}\, dx\right) \sin + \_C1\right) e^{-2x}\, dx + \_C2 \quad \textbf{(3)}$$

\>

\> *#Часть3.*
#Задание1. Исследуйте поведение фазовых кривых системы уравнений вблизи точки покоя. Сделайте чертеж. Определите тип точки покоя по фазовому портрету и собственным значениям матрицы системы. Найдите общее решение системы и выделите фундаментальную систему решений. Сравните с результатами, полученными в Maple. Постройте в прямоугольной системе Oxy1y2 пространственные кривые, удовлетворяющие заданной системе и содержащие соответственно точки . Значения возьмите те же, что использовались для постороения фазового портрета. Сравните чертежи, полученные на плоскости и в пространстве. Перейдите от системы уравнений к однородному дифференциальному уравнению 1 − го порядка относительно функции , постройте его поле направлений в окрестности особой точки. Сравните с фазовым портретом системы.

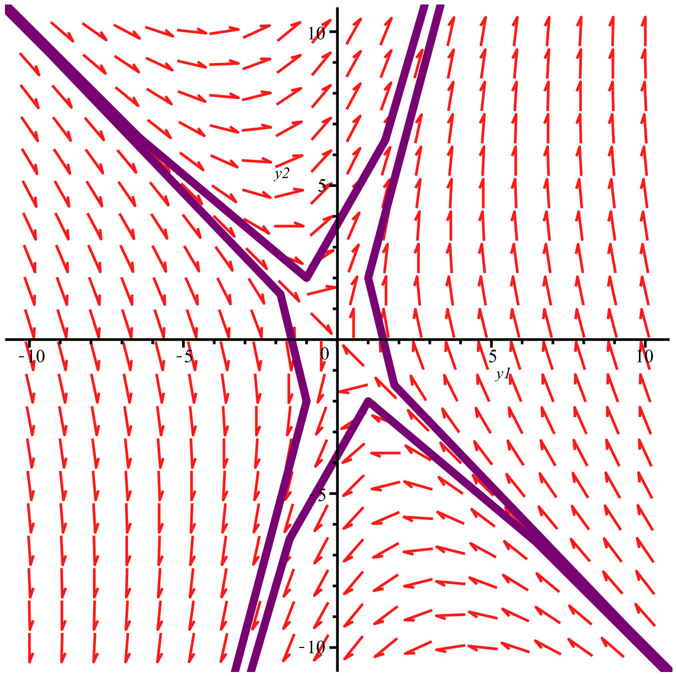
```
Y1 := diff(y1(x), x) = -2·y1(x) + 2·y2(x);
Y2 := diff(y2(x), x) = 7·y1(x) + 3·y2(x);
with(DEtools) :
pp := phaseportrait([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, 1, 2], [0, -1, -2], [0, -1, 2], [0, 1, -2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = purple);

M := Matrix([[-2 − λ, 2], [7, 3 − λ]]);
solve(LinearAlgebra[Determinant](M) = 0);
λ1, λ2 разного знака - седло

dsolve([Y1, Y2]);

p1 := DEplot3d([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, 1, 2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = violet) :
p2 := DEplot3d([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, -1, -2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = purple) :
p3 := DEplot3d([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, -1, 2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = blue) :
p4 := DEplot3d([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, 1, -2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = green) :
plots[display](p1, p2, p3, p4);
```

$$p := dfieldplot\left(diff(y2(y1), y1) = \frac{-2\cdot y1 + 2\cdot y2(y1)}{7\cdot y1 + 3\cdot y2(y1)}, y2(y1), y1 = -10..10, y2(y1) = -10..10\right):$$

```
solve([-2·y1 + 2·y2 = 0, 7·y1 + 3·y2 = 0]);
plotPoint := plot([[0, 0]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = purple) :
plots[display](p, plotPoint);
```

$$Y1 := \frac{d}{dx}\, y1(x) = -2\, y1(x) + 2\, y2(x)$$

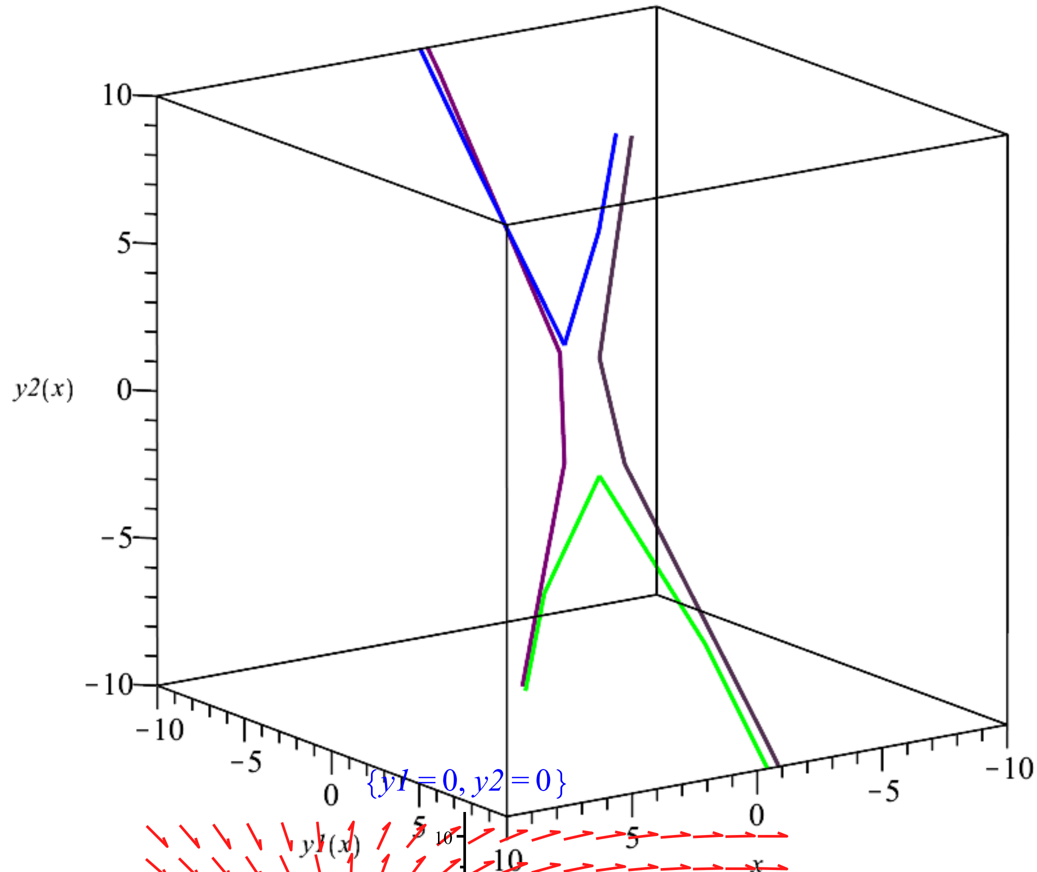
$$Y2 := \frac{d}{dx}\, y2(x) = 7\, y1(x) + 3\, y2(x)$$



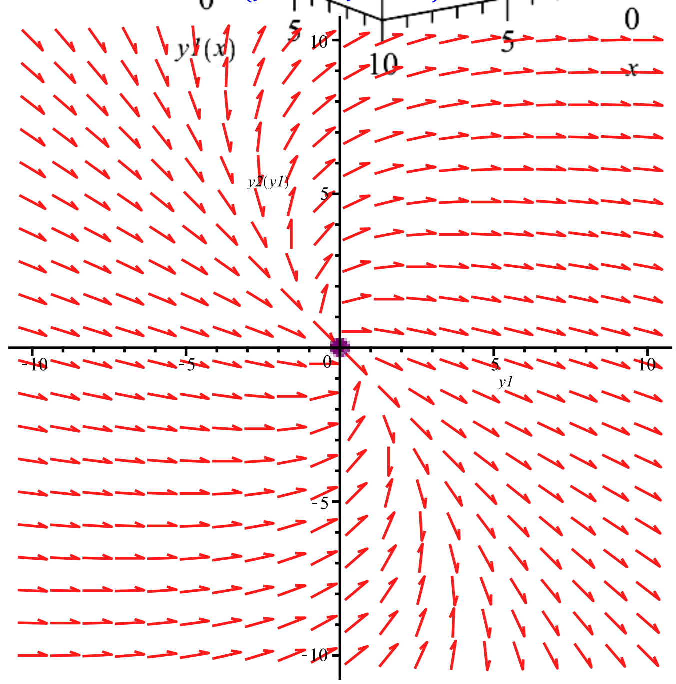
$$M := \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 7 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$5, -4$$

λ1, λ2 разного знака − седло $\left\{ y1(x) = \_C1\, e^{-4x} + \_C2\, e^{5x}, y2(x) = -\_C1\, e^{-4x} + \frac{7\, \_C2\, e^{5x}}{2} \right\}$



$\{y1 = 0, y2 = 0\}$



> #Задание 2. Решите систему уравнений методом исключений и сравните результат с ответом, полученным в Maple.

$Y1 := diff(y1(x), x) = 5 \cdot y1(x) + 3 \cdot y2(x);$

$Y2 := diff(y2(x), x) = 4 \cdot y1(x) + 9 \cdot y2(x);$

dsolve([*Y1*, *Y2*]);

$$Y1 := \frac{d}{dx}\, y1(x) = 5\, y1(x) + 3\, y2(x)$$

$$Y2 := \frac{d}{dx}\, y2(x) = 4\, y1(x) + 9\, y2(x)$$

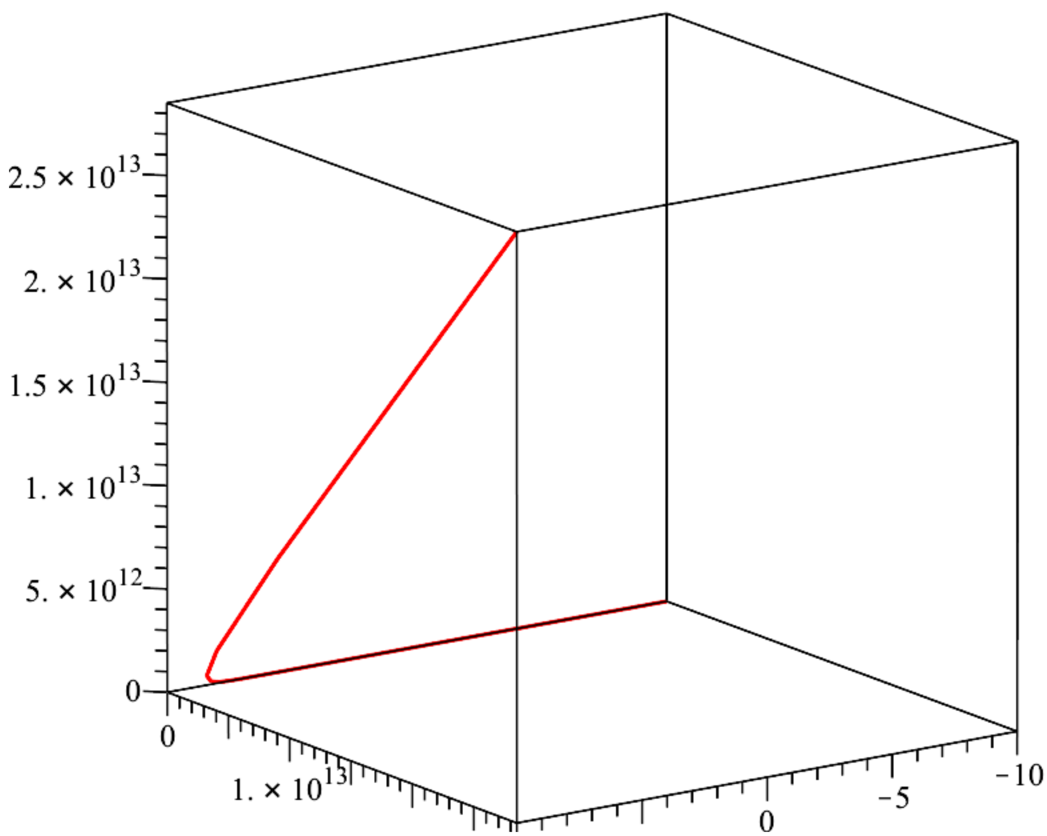
$$\left\{y1(x) = \_C1\, e^{3x} + \_C2\, e^{11x}, y2(x) = -\frac{2\,\_C1\, e^{3x}}{3} + 2\,\_C2\, e^{11x}\right\} \qquad \textbf{(4)}$$

> *#Задание 3. Решите задачу Коши с помощью методов Лагранжа и Даламбера. Сравните с результатом, полученным в Maple. Сделайте чертеж.*
Dx := *diff*(*x*(*u*), *u*) = *x*(*u*) + 2·*y*(*u*);
Dy := *diff*(*y*(*u*), *u*) = 2·*x*(*u*) + *y*(*u*) + 1;
dsolve([*Dx*, *Dy*, *x*(0) = 0, *y*(0) = 5]); *with*(*DEtools*) :
DEplot3d([*Dx*, *Dy*], [*x*(*u*), *y*(*u*)], *u* =- 10 ..10, [[*x*(0) = 0, *y*(0) = 5]], *linecolor* = *red*);

$$Dx := \frac{d}{du}\, x(u) = x(u) + 2\, y(u)$$

$$Dy := \frac{d}{du}\, y(u) = 2\, x(u) + y(u) + 1$$

$$\left\{x(u) = \frac{8\, e^{3u}}{3} - 2\, e^{-u} - \frac{2}{3}, y(u) = \frac{8\, e^{3u}}{3} + 2\, e^{-u} + \frac{1}{3}\right\}$$



>