#Лабораторная работа 1
#Операции с математическими выражениями
#Выполнила Антонова Лидия Сергеевна, гр. 353504
#Вариант 1

MathematicalFunctions

> *#Задание 1. Упростите алгебраическое выражение`.`*

$p1 := \dfrac{x^4 - x^3 - 11\,x^2 + 9\,x + 18}{x^4 - 3\,x^3 - 7\,x^2 + 27\,x - 18}$:

$p2 := \dfrac{x^3 - 9\,x^2 + 26\,x - 24}{x^3 - 8\,x^2 + 19\,x - 12}$:

$p := \dfrac{p1}{p2}$:

simplify(*p*);

#Функция simplify(p) упрощает выражение (p), приводя его к более компактной форме. Упрощение рациональной функции включает сокращение общих множителей в числителе и знаменателе. Это может включать разложение многочленов на множители и сокращение одинаковых множителей.

$$\frac{x+1}{x-2} \tag{1}$$

> *#Задание 2. Приведите выражение к многочлену стандартного вида.*

$p := (2\,x - 1)\cdot\left(3\,x^2 + 5\right)\cdot(5\,x + 2)$:

expand(*p*);

#Функция expand(p) раскрывает скобки и приводит выражение к стандартному виду многочлена. Произведение многочленов включает умножение каждого члена одного многочлена на каждый член другого многочлена. Сначала умножаем первые два многочлена. Затем умножаем результат на третий многочлен. После раскрытия скобок, все подобные члены (члены с одинаковыми степенями (x)) складываются, чтобы получить окончательный многочлен.

$$30\,x^4 - 3\,x^3 + 44\,x^2 - 5\,x - 10 \tag{2}$$

> *#Задание 3. Разложите многочлен на множители*

$p := 14\,x^4 - 46\,x^3 - 82\,x^2 + 138\,x + 120$:

factor(*p*); *#Функция factor(p) раскладывает многочлен на множители.*

solve(*p*); *#Функция solve(p) находит корни многочлена, то есть значения (x), при которых многочлен равен нулю*

. Это может включать нахождение действительных и *комплексных корней.*

$$2\,(7\,x + 5)\,(x - 4)\,\left(x^2 - 3\right)$$

$$-\frac{5}{7}, 4, \sqrt{3}, -\sqrt{3} \tag{3}$$

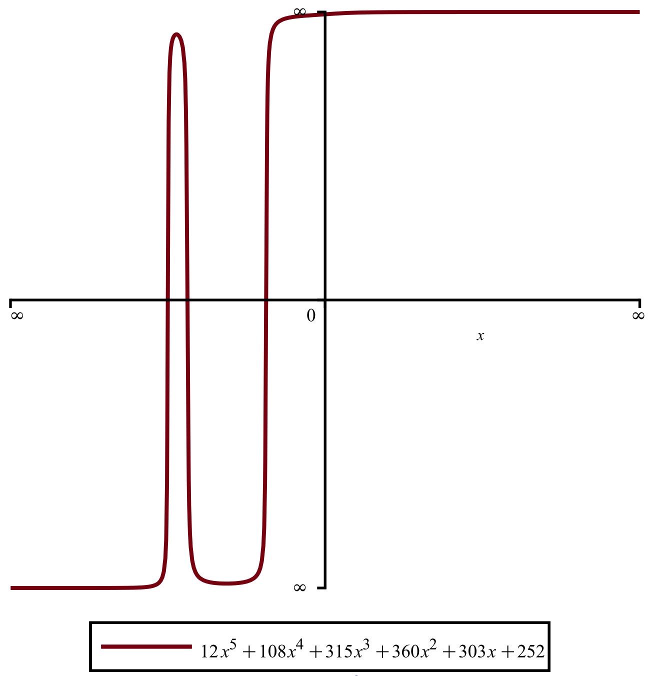
> *#Задание 4. Постройте график многочлена* $P_5(x)$ и *найдите все его корни.*

$p := 12\,x^5 + 108\,x^4 + 315\,x^3 + 360\,x^2 + 303\,x + 252$:

plot(*p*, *x* = -*infinity*..*infinity*, *legend* = *p*);

#Функция plot(p, x = -infinity .. infinity, legend = p) строит график многочлена (p) на

всей числовой оси (x).
roots are solve($p = 0$); *#Функция solve(p) находит корни многочлена, то есть значения (x), при которых многочлен равен нулю . Это может включать нахождение действительных* и *комплексных корней.*



$$\textit{roots are}\left(\quad\frac{7}{2},\quad\frac{3}{2}, -4, \mathrm{I}, -\mathrm{I}\right) \tag{4}$$

> *#Задание 5. Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей.*

$$p := \frac{5\,x^4 + 7\,x^3 + 5\,x \quad 4}{\left(x^2 + 4\right)\cdot\left(x \quad 2\right)^2\cdot\left(x^2 \quad 1\right)}:$$

convert(*p*, *parfrac*);

#Функция convert(p, parfrac) преобразует рациональную функцию в сумму частичных дробей. Преобразование в частичные дроби включает разложение рациональной функции на сумму более простых дробей, каждая из которых имеет в знаменателе один из множителей исходного знаменателя.

$$\frac{13}{10\,(x \quad 1)} + \frac{11}{90\,(x + 1)} + \frac{19\,x \quad 23}{20\,\left(x^2 + 4\right)} + \frac{71}{12\,(x \quad 2)^2} \qquad \frac{17}{36\,(x \quad 2)} \tag{5}$$

> *#Задание 6. Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10 ^{5} .*

p1 := ln($x \quad 1$)^2;
p2 := 3 * cos(2 * *x*)   1;

 # Строим графики функций p1 и p2 на всей области определения
plot([*p1*, *p2*], *x* =   infinity .. infinity, *color* = ["Red", "Blue"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

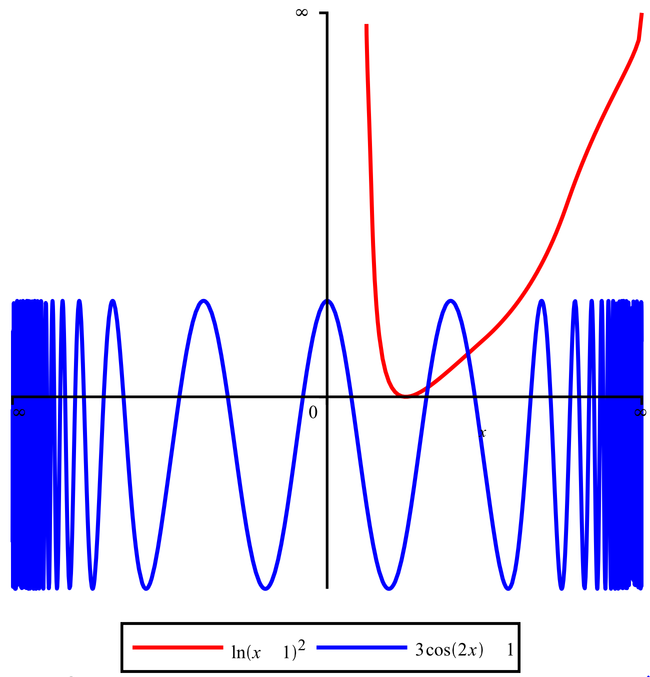
 # Строим графики функций p1 и p2 на небольшом интервале около x = 2.56172
plot([*p1*, *p2*], *x* = 2.56172 .. 2.56173, *color* = ["Red", "Blue"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

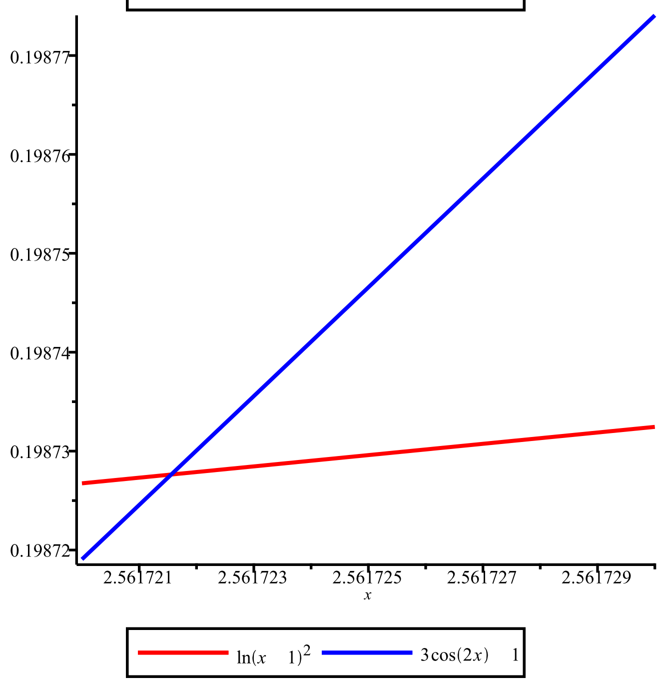
 # Строим графики функций p1 и p2 на небольшом интервале около x = 3.58382
plot([*p1*, *p2*], *x* = 3.58382 .. 3.58383, *color* = ["Red", "Blue"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

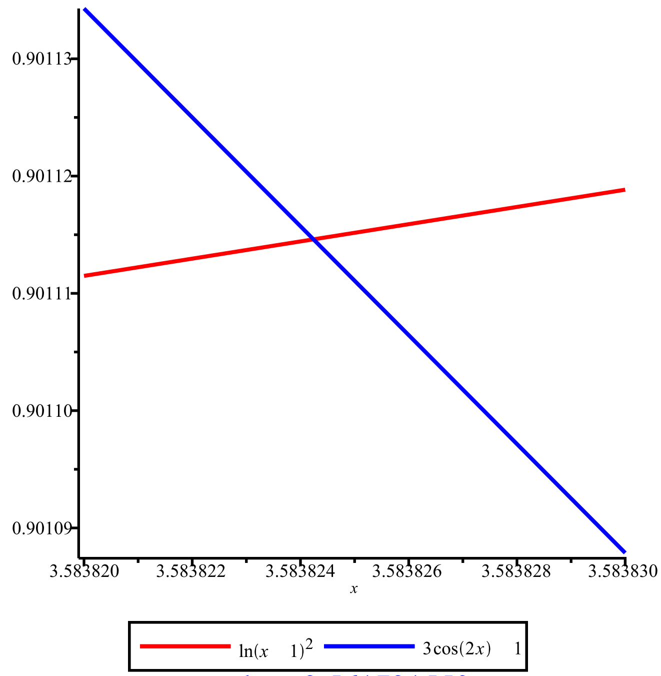
 # Находим численные решения уравнения p1 = p2 на интервале от 2 до 4
$ans1 := fsolve(p1 = p2, x = 2 .. 4);$

 # Находим численные решения уравнения p1 = p2 на интервале от 3 до 4
$ans2 := fsolve(p1 = p2, x = 3 .. 4);$

$$p1 := \ln(x-1)^2$$
$$p2 := 3\cos(2x) - 1$$







$ans1 := 2.561721559$

$ans2 := 3.583824240$ **(6)**

> #*Задание 7. Докажите, что* $\lim_{n \to \text{infinity}} (a_n) = a$, *определив номер* n_ε ,
начиная с *которого все члены последовательности* (a_n) *попадут* в ε
окрестность точки a
. *Проиллюстрируйте полученный результат* с *помощью чертежа* в *Maple, положив* ε
= 0, 1.

```
 # Определяем последовательность an
an := (5*n    2)/(2*n    1);

# Находим предел последовательности an при n, стремящемся к бесконечности
a := limit(an, n = infinity);

# Задаем значение ε (эпсилон) для окрестности предела
varepsilon := 1/10;


    # Решаем неравенство для нахождения N, начиная с которого все элементы
    последовательности an
# находятся в ε-окрестности предела a
N := solve(a    varepsilon < an and an < a + varepsilon, n);

# Строим график точек последовательности an для n от 3 до 40
 y1 := plots[pointplot]({seq([n, an], n = 3 .. 40)}) :

# Строим линии, представляющие предел a и его ε-окрестность
y2 := plot([a    1/10, a, a + 1/10], x = 3 .. 40, color = [blue, red, blue]) :

# Отображаем оба графика вместе
```

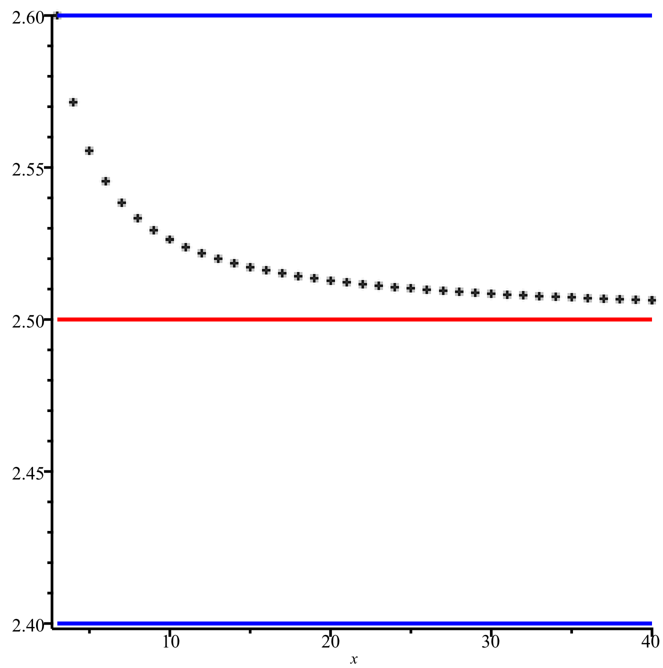
$plots[display](y1, y2);$

$$an := \frac{5\,n-2}{2\,n-1}$$

$$a := \frac{5}{2}$$

$$\varepsilon := \frac{1}{10}$$

$$N := (-\infty, -2), (3, \infty)$$



> \# *Задание 8. Вычислите пределы числовых последовательностей.*

$p1 := n \cdot \left(\mathrm{sqrt}\left(n^2+1\right) - \mathrm{sqrt}\left(n^2-1\right)\right)$:
$limit(p1, n = \mathrm{infinity});$

$p2 := \left(\dfrac{3 \cdot n^2 - 6 \cdot n + 7}{3 \cdot n^2 + 20 \cdot n - 1}\right)^{1-n}$:
$limit(p2, n = \mathrm{infinity});$

$$\frac{1}{e^{\frac{26}{3}}} \qquad \textbf{(7)}$$

> \# *Задание 9. Для заданной кусочно−непрерывной функции выполните следующие действия.*

\# *Определите ее через функциональный оператор и постройте график.*

$$f := x \to \begin{cases} 5 \cdot \sin(2\,x) & x < -\mathrm{Pi} \\ 7 \cdot e^{-\frac{x}{2}} & x \geq -\mathrm{Pi} \end{cases} :$$

$plot(f(x), x = -\mathrm{infinity}..\mathrm{infinity}, color = \text{"Green"}, legend = f(x));$

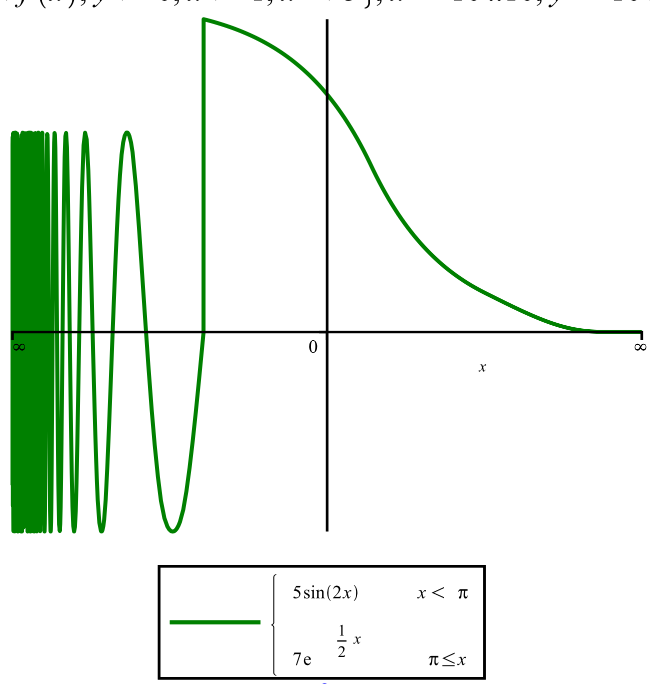
В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.
limit(f(x), x=-Pi, left) ;
limit(f(x), x=-Pi, right) ;
limit(f(x), x=-infinity) ;
limit(f(x), x=infinity);

# Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.
diff(f(x), x);
int(f(x), x);

# Постройте в одной системе координат графики функции, производной и какой−нибудь первообразной.
plot([f(x), diff(f(x), x), int(f(x), x)], legend= [f(x), diff(f(x), x), int(f(x), x)], discont =true);

# Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми x = 1, x = 5, y = 0. Сделайте чертеж.
# Вычисляем определенный интеграл функции f на интервале от 1 до 5
S=int(f(x), x=1 ..5);

# Строим область, ограниченную функцией f, осью x и вертикальными линиями x = 1 и x = 5
plots[inequal]({y < f(x), y > 0, x > 1, x < 5}, x=-10 ..10, y=-10 ..10);



$$0$$

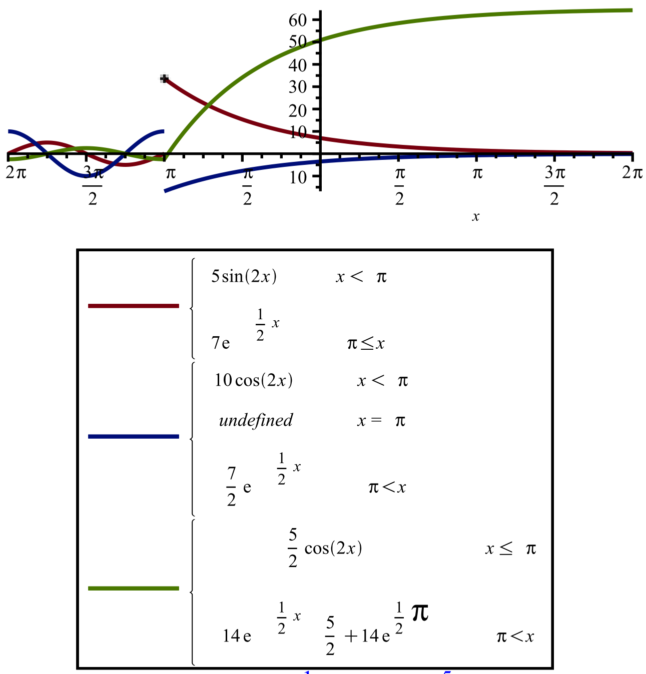
$$7\,e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-5\,..5$$

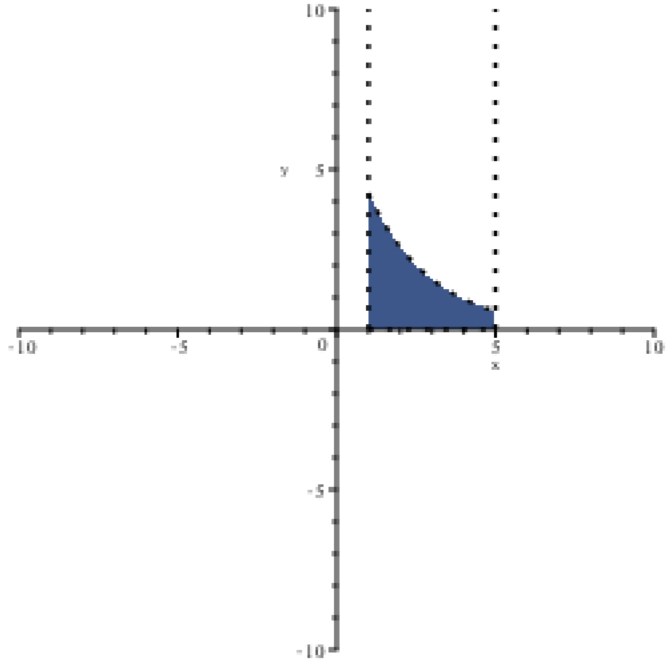
$$0$$

$$\begin{cases} 10\cos(2\,x) & x < -\pi \\ \mathit{undefined} & x = -\pi \\ -\dfrac{7\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2} & -\pi < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{5\cos(2\,x)}{2} & x \le -\pi \\ -14\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{5}{2} + 14\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} & -\pi < x \end{cases}$$



$$S = 14\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \quad 14\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$$



> $g := x \rightarrow \begin{cases} 3\cdot\cos(2\,x) & x < -\mathrm{Pi} \\ 5\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2\,x}{5}} & x \geq -\mathrm{Pi} \end{cases}$:

plot(*g*(*x*), *x* = −infinity ..infinity, *color* = "Blue", *legend* = *g*(*x*));

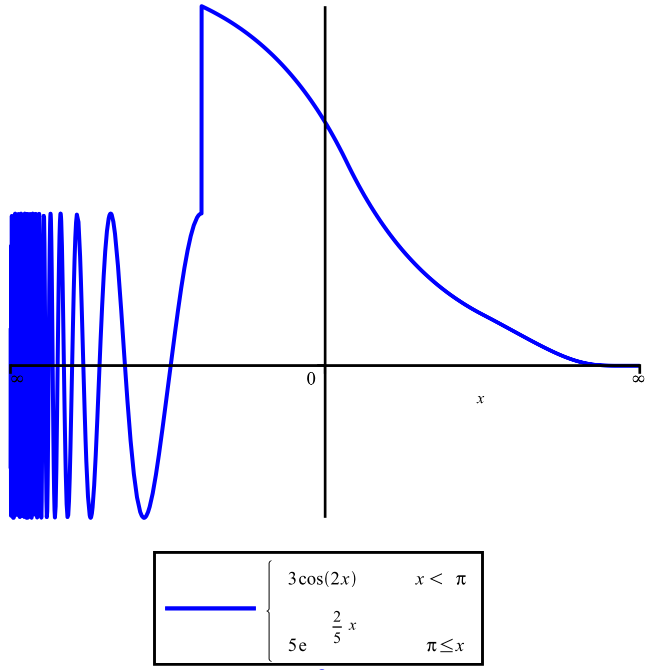
 # В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.
limit(*g*(*x*), *x* =−Pi, *left*) ;
limit(*g*(*x*), *x* =−Pi, *right*) ;
limit(*g*(*x*), *x* =−infinity) ;
limit(*g*(*x*), *x* = infinity);

 # Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.
diff (*g*(*x*), *x*);
int(*g*(*x*), *x*);

 # Постройте в одной системе координат графики функции, производной и какой−нибудь первообразной.
plot([*g*(*x*), *diff* (*g*(*x*), *x*), *int*(*g*(*x*), *x*)], *legend* = [*g*(*x*), *diff* (*g*(*x*), *x*), *int*(*g*(*x*), *x*)], *discont* = *true*);

 # Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми x = 1, x = 5, y = 0. Сделайте чертеж.
 # Вычисляем определенный интеграл функции f на интервале от 1 до 5
S = *int*(*g*(*x*), *x* = 1 ..5);

 # Строим область, ограниченную функцией f, осью x и вертикальными линиями x = 1 и x = 5
plots[*inequal*]({*y* < *g*(*x*), *y* > 0, *x* > 1, *x* < 5}, *x* =−10 ..10, *y* =−10 ..10);



$$3$$

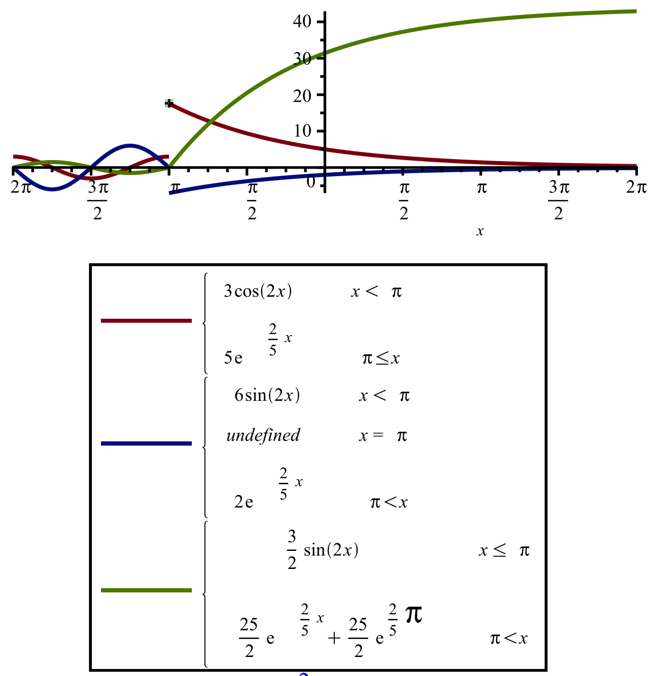
$$5\,e^{\frac{2\pi}{5}}$$

$$-3\,..3$$

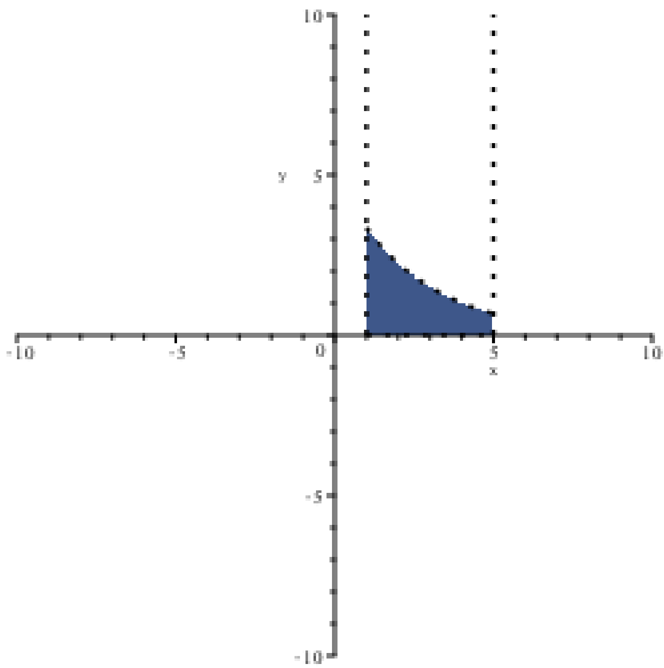
$$0$$

$$\begin{cases} 6\sin(2x) & x < \pi \\ \mathit{undefined} & x = \pi \\ 2\,e^{\frac{2x}{5}} & \pi < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3\sin(2x)}{2} & x \le \pi \\[2ex] \dfrac{25\,e^{\frac{2x}{5}}}{2} + \dfrac{25\,e^{\frac{2\pi}{5}}}{2} & \pi < x \end{cases}$$



$$S = \frac{25\,\mathrm{e}^{\frac{2}{5}}}{2} \quad \frac{25\,\mathrm{e}^{-2}}{2}$$



> *#Задание 10. Постройте кривые на плоскости. Для кривой 2−го порядка найдите каноническое уравнение с помощью ортогонального преобразования.*

$p1 := \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{3x}{5}} \cdot \sin(5x+3)$:

plot(*p1*, *x* = infinity..∞, *color* = "Pink", *legend* = *p1*);

$p2 := (x, y) \rightarrow 5 \cdot x^2 \quad 6 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 \quad 24 \cdot x \quad 32 = 0$;

plots[*implicitplot*](*p2*(*x*, *y*), *x* = 10..10, *y* = 10..10, *color* = "Blue", *legend* = *p2*(*x*, *y*));

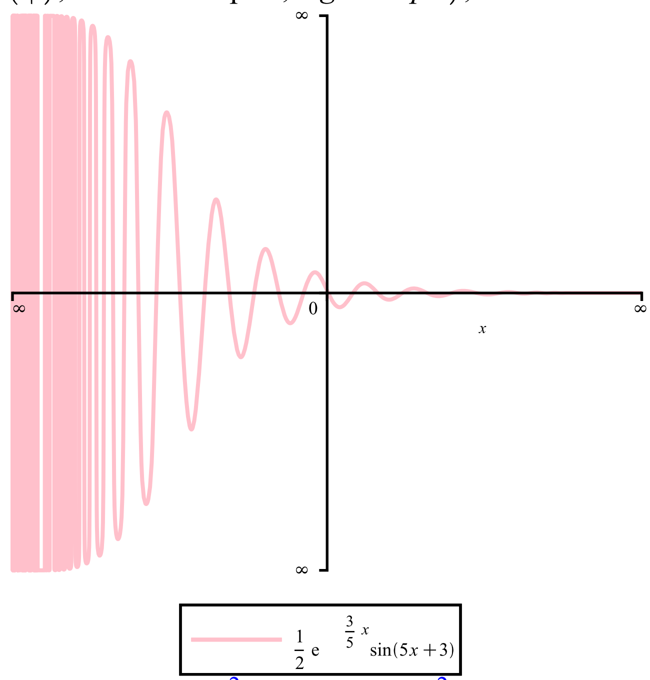
$p3x := t \rightarrow 2 \cdot (t + \sin(t))$:

$p3y := t \rightarrow 2 \cdot (1 - \cos(t))$:

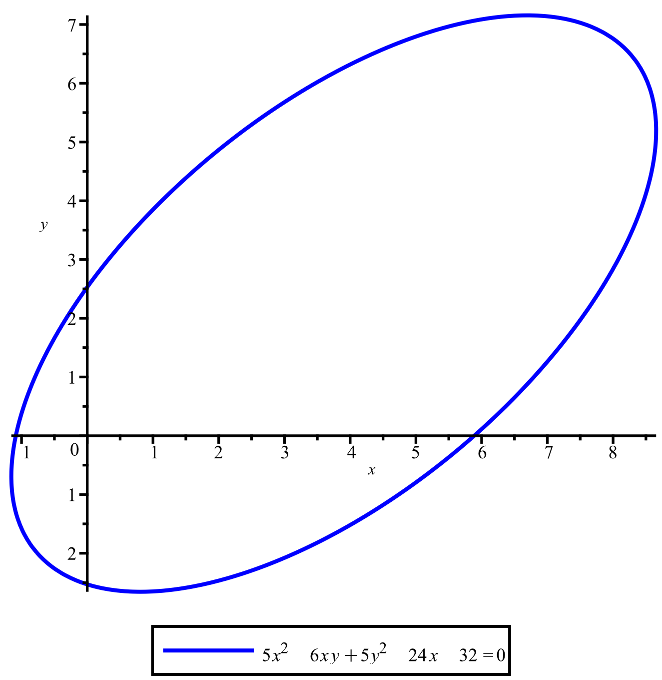
$plot([p3x(t), p3y(t), t = -\text{infinity} .. \text{infinity}], color = \text{"Yellow"}, legend = \{x = p3x(t), y = p3y(t)\});$

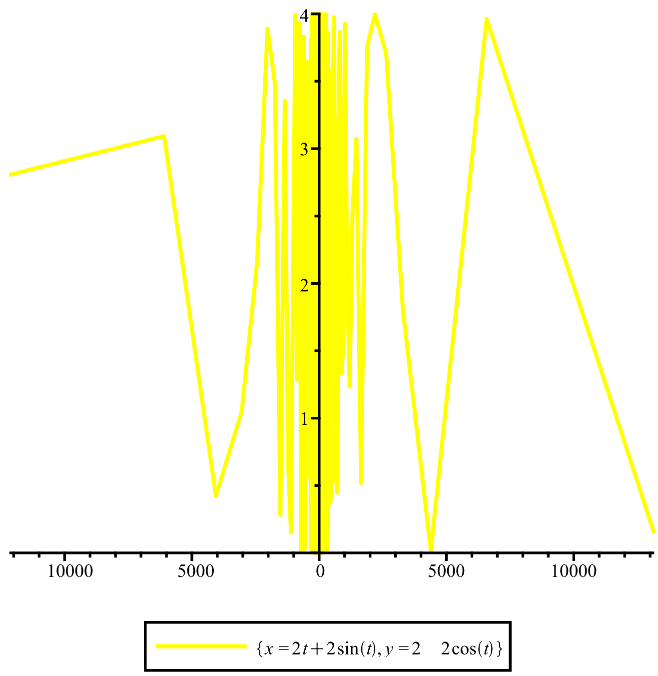
$p4 := 1 + 2 \cdot \sin\left(3\,\phi + \frac{\text{Pi}}{4}\right)$:

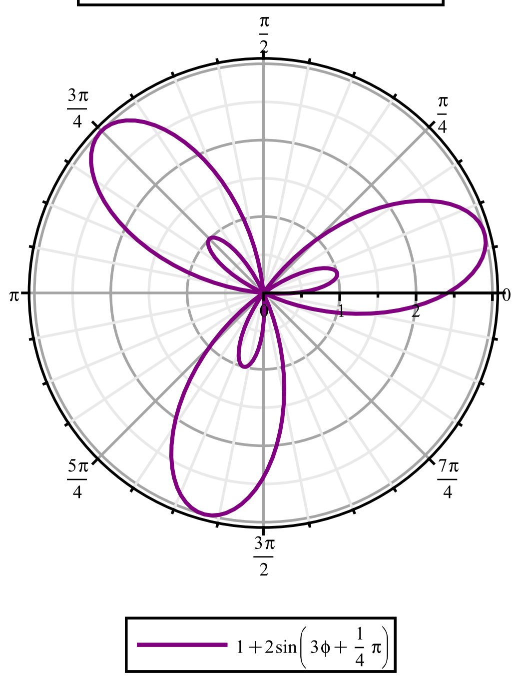
$plots[polarplot](p4(\phi), color = \text{"Purple"}, legend = p4);$



$p2 := (x, y) \mapsto 5 \cdot x^2 \quad 6 \cdot y \cdot x + 5 \cdot y^2 \quad 24 \cdot x \quad 32 = 0$








```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :

   A := Matrix([[5, 3], [3, 5]]) :
   #detA := det(A);

  # Находим собственные значения и собственные векторы матрицы A
   lambda := Eigenvectors(A);

   # Находим нормированные вектора
  e1 := Normalize(Column(lambda[2], [1]), Euclidean);
   e2 := Normalize(Column(lambda[2], [2]), Euclidean);
```

$expr := simplify\left(subs\left(x = e1[1] \cdot x1 + e2[1] \cdot y1, y = e1[2] \cdot x1 + e2[2] \cdot y1, 5 \cdot x^2 - 6 \cdot y \cdot x + 5 \cdot y^2 - 24 \cdot x - 32\right)\right);$

$pseudocanon\_expr := Student[Precalculus][CompleteSquare](expr);$

$canon\_expr := subs\left(y1 = y2 + 3\sqrt{2}, x1 = x2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}, pseudocanon\_expr\right);$

$plots[implicitplot]\left(\left[5 \cdot x^2 - 6 \cdot y \cdot x + 5 \cdot y^2 - 24 \cdot x - 32 = 0, 2\left(y - 3\sqrt{2}\right)^2 + 8\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 77 = 0, 8x^2 + 2y^2 - 77 = 0\right], x = -100..100, y = -100..100, scaling = constrained, color = ["Blue", "Pink", "Red"], legend = \left[5 \cdot x^2 - 6 \cdot y \cdot x + 5 \cdot y^2 - 24 \cdot x - 32 = 0, 2\left(y - 3\sqrt{2}\right)^2 + 8\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 77 = 0, 8x^2 + 2y^2 - 77 = 0\right]\right);$

$$\lambda := \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

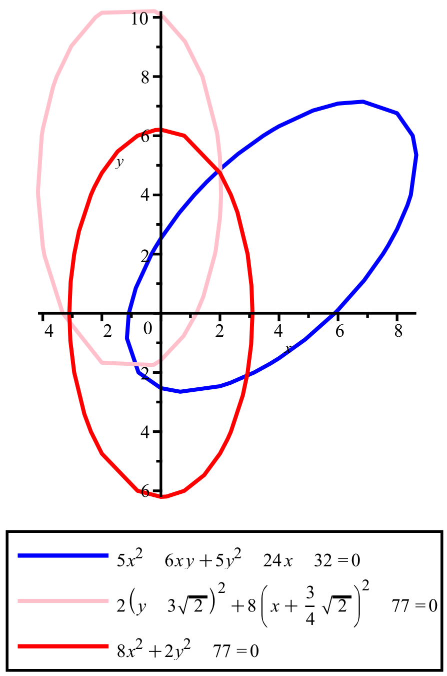
$$e1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$e2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$expr := (-12\,x1 + 12\,y1)\sqrt{2} + 2\,x1^2 + 8\,y1^2 - 32$$

$$pseudocanon\_expr := 8\left(y1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2\left(x1 - 3\sqrt{2}\right)^2 - 77$$

$$canon\_expr := 8\left(y2 + \frac{15\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2\left(x2 - \frac{15\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 77$$


y
x
5x^2 6xy + 5y^2 24x 32 = 0
2(y 3√2)^2 + 8(x + 3/4 √2)^2 77 = 0
8x^2 + 2y^2 77 = 0