> **#Лабораторная работа 4**
> **#Элементы операционного исчисления**
> **#Выполнила Антонова Лидия Сергеевна, гр. 353504**
> **#Вариант 1**

> *#Задание 1. По данному графику функции-оригинала найти ее изображение Лапласа. Получить ответ в системе Maple и сравнить результаты.*

$restart:$

$f := a \rightarrow piecewise\left(t \le 0, 0, 0 < t \le a, -1, a < t \le 3 \cdot a, -2 + \frac{t}{a}, 3 \cdot a < t, 4 - \frac{t}{a}\right);$

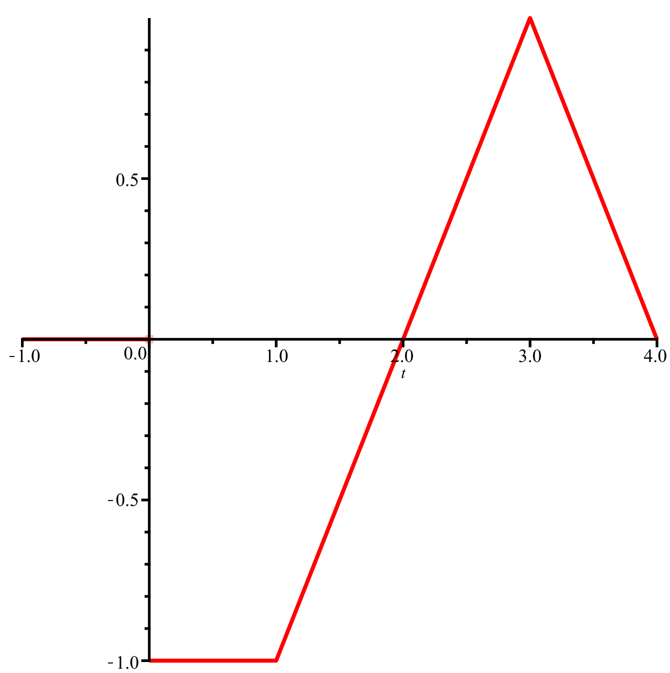
$plot(f(1), t = -1..4, discont = true, color = red);$

$f := t \rightarrow -\mathrm{Heaviside}(t) + \frac{1}{a}(t-a) \cdot \mathrm{Heaviside}(t-a) - \frac{2}{a}(t - 3a) \cdot \mathrm{Heaviside}(t - 3a);$

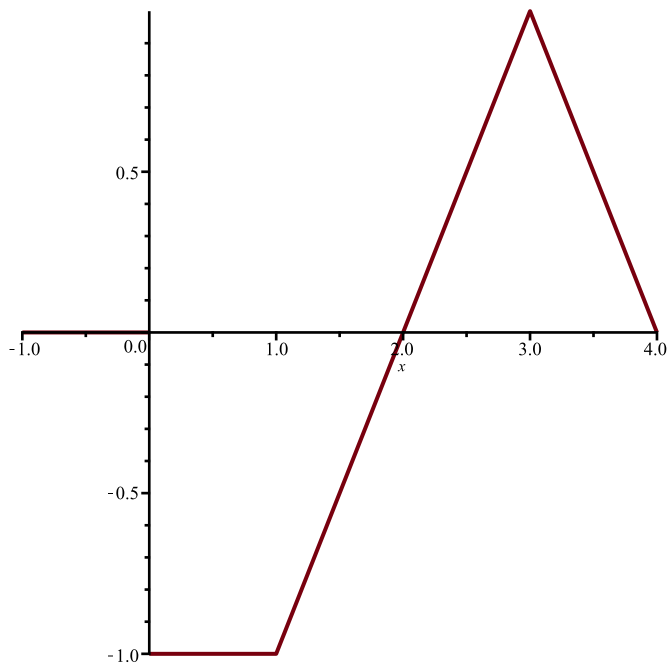
$a := 1:$

$plot(f(x), x = -1..4, discont = true);$

$$f := a \mapsto \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ -1 & 0 < t \le a \\ -2 + \frac{t}{a} & a < t \le 3 \cdot a \\ 4 - \frac{t}{a} & 3 \cdot a < t \end{cases}$$



$$f := t \mapsto -\mathrm{Heaviside}(t) + \frac{(t-a) \cdot \mathrm{Heaviside}(t-a)}{a} - \frac{2 \cdot (t - 3 \cdot a) \cdot \mathrm{Heaviside}(t - 3 \cdot a)}{a}$$



> $a := 'a'$:
$assume(a > 0)$;
$F(p) = inttrans[laplace](f(t), t, p)$;

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{e^{-p\,a\sim} - 2\,e^{-3\,p\,a\sim}}{a\sim p^2} \tag{1}$$

> #Задание 2. Найдите оригинал по заданному изображению «вручную» и с помощью Maple.

$with(inttrans)$:
$F := \dfrac{4\,p + 5}{(p-2)\cdot\left(p^2 + 4\,p + 5\right)}$;
$invlaplace(F, p, t)$;

$$F := \frac{4\,p + 5}{(p-2)\,\left(p^2 + 4\,p + 5\right)}$$

$$\frac{13\,e^{2\,t}}{17} + \frac{(-13\cos(t) + 16\sin(t))\,e^{-2\,t}}{17} \tag{2}$$

> #Задание 3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$,
операторным методом (используя интеграл Дюамеля) и методом Лагранжа
. Сравните результаты и проконтролируйте их с помощью системы Maple.

$de := diff(y(t), t\$2) - 2\cdot diff(y(t), t) + y(t) = \dfrac{e^t}{1+t^2}$;

$dsolve(de)$;
$dsolve(\{de, y(0) = 0, D(y)(0) = 0\})$;

$$de := \frac{d^2}{dt^2}\,y(t) - 2\,\frac{d}{dt}\,y(t) + y(t) = \frac{e^t}{t^2 + 1}$$

$$y(t) = e^{t}\_C2 + e^{t}\,t\,\_C1 - \frac{e^{t}\left(-2\arctan(t)\,t + \ln\left(t^2+1\right)\right)}{2}$$

$$y(t) = -\frac{e^{t}\left(-2\arctan(t)\,t + \ln\left(t^2+1\right)\right)}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

> *#Задание 4. Операторным методом решите задачу Коши и сравните с решением в Maple.*
> $de := diff(y(t), t\$2) + y(t) = 6e^{-t};$
> $dsolve(\{de, y(0) = 3, D(y)(0) = 1\});$

$$de := \frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + y(t) = 6\,e^{-t}$$

$$y(t) = 4\sin(t) + 3\,e^{-t} \qquad \textbf{(4)}$$

> *#Задание 5. Решите систему дифференциальных уравнений операторным методом. Сравните с решением, полученным в Maple.*
> $dsys := \{diff(x(t), t) = x(t) + 3\,y(t) + 2, diff(y(t), t) = x(t) - y(t) + 1\};$
> $dsolve(\{dsys[1], dsys[2], x(0) = -1, y(0) = 2\});$

$$dsys := \left\{\frac{d}{dt}\,x(t) = x(t) + 3\,y(t) + 2,\ \frac{d}{dt}\,y(t) = x(t) - y(t) + 1\right\}$$

$$\left\{x(t) = -\frac{13\,e^{-2t}}{8} + \frac{15\,e^{2t}}{8} - \frac{5}{4},\ y(t) = \frac{13\,e^{-2t}}{8} + \frac{5\,e^{2t}}{8} - \frac{1}{4}\right\} \qquad \textbf{(5)}$$

>