Pagina 1 - Definizioni

Dato lo spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$, una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e una successione di funzioni $f_n : X \to \mathbb{R}$ si possono definire 5 modi di convergenza differenti:

- si dice che f_n converge **puntualmente** a f su $X \iff \forall x \in X$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left|f_n(x) - f(x)\right|\right) = 0$$

  ovvero se in ogni punto x il limite della successione di funzioni è il valore della funzione f in x.

- si dice che f_n converge **uniformemente** a f su $X \iff$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} \left|f_n(x) - f(x)\right|\right) = 0$$

  ovvero se definitivamente per $n \to \infty$ il grafico di f_n è compreso nell'intorno tubolare tra $f - \epsilon$ e $f + \epsilon$.

- si dice che f_n converge a f **quasi ovunque** $\iff$

$$\mu\left(\left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} \left(\left| f_n(x) - f(x)\right|\right) \neq 0\right\}\right) = 0$$

  ovvero se l'insieme dei punti in cui non c'è convergenza puntuale ha misura nulla.

- si dice che f_n converge a f **in** $L^1 \iff$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

  ovvero se all'aumentare di n l'area compresa tra f_n e f tende a 0. Questo consente di avere dei picchi che si distanziano dalla funzione limite, l'importante è solo che abbiano area piccola.

- si dice che f_n converge a f **in misura** $\iff \forall \epsilon > 0$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \epsilon\right\}\right) = 0$$

  ovvero se la misura dell'insieme dei punti della funzione che non sono contenuti nell'intorno tubolare di f tende a 0.

Pagina 5 - Teoremi e Applicazioni convergenza

In questa sezione sono presenti gli enunciati di alcuni teoremi riguardanti la convergenza, studiati in parte nell'insegnamento di Analisi 3 e in parte in corsi precedenti. Per la dimostrazione e maggiori dettagli sono presenti le fonti su cui approfondire i vari argomenti.

Analisi 3

I primi due risultati sono criteri per mostrare la convergenza uniforme di successioni e serie di funzioni.
`http://www-dimat.unipv.it/pier/teaching/note-longhi-mauri.pdf`
`http://poincare.unile.it/campiti/tracce/02-serie-di-funzioni.pdf`
`http://calvino.polito.it/~lucipan/materiale_html/Analisi-2-PANDOLFI.pdf`

- **Criterio di Cauchy**
  Data la successione di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha che
  f_n converge uniformemente a f su $I \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad$ vale $\quad | f_{n+p}(x) - f_n(x) |< \epsilon \quad \forall x \in I$
  OSS: Il vantaggio di questo criterio è che non è necessario conoscere a priori la funzione limite f.

  `https://it.wikipedia.org/wiki/Criterio_di_convergenza_di_Cauchy`
  "Analisi Matematica 2" - Pagani-Salsa, Paragrafo 2 Capitolo 3

- **Criterio di Weierstrass**
  Data la successione di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $\exists$ una successione $c_n \in \mathbb{R}^+$ tale che:

  - $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in I \quad \forall n \geq 1 \qquad$ (c_n maggiorazione uniforme)
  - la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge

  Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su I
  `https://it.wikipedia.org/wiki/Criterio_di_Weierstrass`
  "Analisi Matematica 2" - Pagani Salsa, Proposizione 2.1 Capitolo 3

I teoremi seguenti invece sfruttano la teoria della misura e dell'integrazione di Lebsgue per ottenere il passaggio al limite sotto il segno di integrale e trovare relazioni fra i modi di convergenza studiati.

- **Teorema di Convergenza Monotona (o di Beppo Levi)**
  Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \to [0, +\infty]$ tali che:
  - le f_n sono funzioni misurabili
  - $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

  Allora:
  - f è misurabile
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

  https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_della_convergenza_monotona
  http://web.math.unifi.it/users/magnanin/Istit/a3gsm11.pdf - cap 4
  "Real and complex analysis" – Rudin, Teorema 1.26

- **Teorema di Convergenza Dominata**
  Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ tali che:
  - le f_n sono funzioni misurabili
  - $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$
  - $\exists g \in L^1(\mu) \quad$ t.c. $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in X$

  Allora:
  - $f \in L^1(\mu)$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X | f_n - f | \, d\mu = 0$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

  https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_della_convergenza_dominata
  http://www.dmi.unict.it/~villani/Complementi%20di%20Analisi%20matematica/CONVERGENZA%20DOMINATA.pdf
  http://web.math.unifi.it/users/magnanin/Istit/a3gsm11.pdf - cap 4
  "Real and complex analysis" – Rudin, Teorema 1.34

- **Teorema**
  Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ tali che:

- f_n integrabile $\forall n$
- $\exists f : X \to \mathbb{R}$ t.c. f_n converge a f uniformemente su X
- $\mu(X) < +\infty$

Allora:

- f è integrabile
- f_n converge a f in $L^1(\mu)$

"Real Analysis" - Folland, Paragrafo 2.4

- **Teorema inverso della convergenza dominata**
  Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ tali che:

  - f_n converge a f in $L^1(\mu)$

  Allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} tale che:

  - f_{n_k} converge a f quasi ovunque su X
  - $\exists g \in L^1(\mu) \quad$ t.c. $|f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall n_k \quad \forall x \in X$

  OSS: questo significa che a meno di sottosuccessioni la convergenza in L^1 implica quella quasi ovunque.

  "Real Analysis" - Folland, Paragrafo 2.4

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Anche in probabilità e statistica è molto importante il concetto di convergenza di variabili aleatorie e si differenziano vari modi. Ecco riportati alcuni risultati fondamentali. Per questa parte oltre ai link specifici per i vari teoremi si può fare riferimento a:
G. Grimmett, D. Stirzaker "Probability and Random Processes", Third Edition, Oxford Un. Press, 2001
`http://www.tlc.unipr.it/bononi/didattica/TSA/beucher/EntwurfVorlesung.pdf` (p. 11-12)
`http://oldwww.unibas.it/utenti/dinardo/sedicilezio.pdf`
`http://boccignone.di.unimi.it/SAD_2017_files/lez10.pdf`

- **Leggi dei grandi numeri**
  Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con valore atteso $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\quad$ sia $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la media empirica. Allora valgono:

- Legge debole dei grandi numeri (o teorema di Bernoulli)

$$\forall \eta > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| > \eta\right) = 0$$

- Legge forte dei grandi numeri

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1$$

https://it.wikipedia.org/wiki/Legge_dei_grandi_numeri

- Data una variabile aleatoria X e una successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{R}$ con funzioni di distribuzione F_{X_n}, abbiamo studiato 3 tipi di convergenza:

  - si dice che $(X_n)_n$ converge a X **in probabilità** (e si indica con $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) se $\quad \forall \eta > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(| X_n - X | > \eta) = 0$.
  - si dice che $(X_n)_n$ converge **in distribuzione** (o in legge) a X con funzione di distribuzione F_X (e si indica con $X_n \xrightarrow{d} X$) se $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall$ punto di continuità di F_X.
  - si dice che $(X_n)_n$ converge a X **quasi certamente** (e si indica con $X_n \xrightarrow{q.c.} X$) se $\quad \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1$.

  OSS: anche qua come per le funzioni alcuni modi di convergenza sono più forti di altri. In particolare vale:
  convergenza $q.c.$ $\Rightarrow$ convergenza in $\mathbb{P}$ $\Rightarrow$ convergenza in d.
  https://it.wikipedia.org/wiki/Convergenza_di_variabili_casuali
  https://www.mat.unical.it/~gianfelice/didattica/P&PS/appti_P&PS.pdf - capitolo 2

- **Teorema di Levy**
  Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie con funzione caratteristica $\varphi_{X_n}(\theta)$ tale che $X_n \xrightarrow{d} X$, sia φ_X la funzione caratteristica di X. Allora:

$$\varphi_{X_n}(\theta) \to \varphi_X(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

  https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_continuit%C3%A0_di_L%C3%A9vy

- **Teorema del limite centrale**
  Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}$ indipendenti e identicamente distribuite con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{Var}X_i = \sigma^2 \quad \forall i$.

Allora:

$$S_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

`https://it.wikipedia.org/wiki/Teoremi_centrali_del_limite`
`http://users.dma.unipi.it/~flandoli/StatI_TLC.pdf`

Analisi Numerica

- aiuto sono troppi faccio poi