Definizioni

Dato lo spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$, una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e una successione di funzioni $f_n : X \to \mathbb{R}$ si possono definire 5 modi di convergenza differenti:

- si dice che f_n converge **puntualmente** a f su $X \iff \forall x \in X$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left| f_n\left(x\right) - f\left(x\right) \right| \right) = 0$$

  ovvero se in ogni punto x il limite della successione di funzioni è il valore della funzione f in x.

- si dice che f_n converge **uniformemente** a f su $X \iff$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} \left| f_n\left(x\right) - f\left(x\right) \right| \right) = 0$$

  ovvero se definitivamente per $n \to \infty$ il grafico di f_n è compreso nell'intorno tubolare tra $f - \epsilon$ e $f + \epsilon$.

- si dice che f_n converge a f **quasi ovunque** $\iff$

$$\mu \left(\left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \left(\left| f_n\left(x\right) - f\left(x\right) \right| \right) \neq 0 \right\} \right) = 0$$

  ovvero se l'insieme dei punti in cui non c'è convergenza puntuale ha misura nulla.

- si dice che f_n converge a f **in** $L^1 \iff$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

  ovvero se all'aumentare di n l'area compresa tra f_n e f tende a 0. Questo consente di avere dei picchi che si distanziano dalla funzione limite, l'importante è solo che abbiano area piccola.

- si dice che f_n converge a f **in misura** $\iff \forall \epsilon > 0$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \mu \left(\left\{ x \in X : \left| f_n\left(x\right) - f\left(x\right) \right| \geq \epsilon \right\} \right) = 0$$

  ovvero se la misura dell'insieme dei punti della funzione che non sono contenuti nell'intorno tubolare di f tende a 0.