Teoremi e Applicazioni convergenza

In questa sezione sono presenti gli enunciati di alcuni teoremi riguardanti la convergenza, studiati in parte nell'insegnamento di Analisi 3 e in parte in corsi precedenti. Per la dimostrazione e maggiori dettagli sono presenti le fonti su cui approfondire i vari argomenti.

Analisi 3

I primi due risultati sono criteri per mostrare la convergenza uniforme di successioni e serie di funzioni.
`http://www-dimat.unipv.it/pier/teaching/note-longhi-mauri.pdf`
`http://poincare.unile.it/campiti/tracce/02-serie-di-funzioni.pdf`
`http://calvino.polito.it/~lucipan/materiale_html/Analisi-2-PANDOLFI.pdf`

- **Criterio di Cauchy**
  Data la successione di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha che
  f_n converge uniformemente a f su $I \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$
  tale che $\quad \forall n \geq \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad$ vale $\quad | f_{n+p}(x) - f_n(x) | < \epsilon \quad \forall x \in I$
  OSS: Il vantaggio di questo criterio è che non è necessario conoscere a priori la funzione limite f.

  `https://it.wikipedia.org/wiki/Criterio_di_convergenza_di_Cauchy`
  ”Analisi Matematica 2” - Pagani-Salsa, Paragrafo 2 Capitolo 3

- **Criterio di Weierstrass**
  Data la successione di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $\exists$ una successione $c_n \in \mathbb{R}^+$ tale che:

  - $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in I \quad \forall n \geq 1 \quad$ (c_n maggiorazione uniforme)
  - la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge

  Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su I
  `https://it.wikipedia.org/wiki/Criterio_di_Weierstrass`
  ”Analisi Matematica 2” - Pagani Salsa, Proposizione 2.1 Capitolo 3

I teoremi seguenti invece sfruttano la teoria della misura e dell'integrazione di Lebsgue per ottenere il passaggio al limite sotto il segno di integrale e trovare relazioni fra i modi di convergenza studiati.

- **Teorema di Convergenza Monotona (o di Beppo Levi)**
  Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \to [0, +\infty]$ tali che:
  - le f_n sono funzioni misurabili
  - $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$
  - $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

  Allora:
  - f è misurabile
  - $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

  https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_della_convergenza_monotona
  http://web.math.unifi.it/users/magnanin/Istit/a3gsm11.pdf - cap 4
  "Real and complex analysis" – Rudin, Teorema 1.26

- **Teorema di Convergenza Dominata**
  Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ tali che:
  - le f_n sono funzioni misurabili
  - $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$
  - $\exists g \in L^1(\mu) \quad \text{t.c. } |f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in X$

  Allora:
  - $f \in L^1(\mu)$
  - $\lim_{n\to\infty} \int_X | f_n - f | d\mu = 0$
  - $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

  https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_della_convergenza_dominata
  http://www.dmi.unict.it/~villani/Complementi%20di%20Analisi%20matematica/CONVERGENZA%20DOMINATA.pdf
  http://web.math.unifi.it/users/magnanin/Istit/a3gsm11.pdf - cap 4
  "Real and complex analysis" – Rudin, Teorema 1.34

  OSS: Si sottolinea come l'utilizzo dell'ipotesi di convergenza puntuale nei teoremi di convergenza monotona e dominata si può indebolire a convergenza q.o., consci di poter sempre attuare un completamento della misura qualora fosse necessario.

- **Teorema**
  Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ tali che:
  - f_n integrabile $\forall n$
  - $\exists f : X \to \mathbb{R}$ t.c. f_n converge a f uniformemente su X
  - $\mu(X) < +\infty$

  Allora:
  - f è integrabile
  - f_n converge a f in $L^1(\mu)$

  ”Real Analysis” - Folland, Paragrafo 2.4

- **Teorema inverso della convergenza dominata**
  Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ tali che:
  - f_n converge a f in $L^1(\mu)$

  Allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} tale che:
  - f_{n_k} converge a f quasi ovunque su X
  - $\exists g \in L^1(\mu) \quad$ t.c. $|f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall n_k \quad \forall x \in X$

  OSS: questo significa che a meno di sottosuccessioni la convergenza in L^1 implica quella quasi ovunque.

  ”Real Analysis” - Folland, Paragrafo 2.4

- **Teorema di Egorov**
  Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ tali che:
  - f_n misurabile $\forall n \geq 1$
  - f_n converge a f quasi ovunque
  - $\mu(X) < +\infty$

  Allora: $\quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists E \subset X$ t.c. $\mu(E) < \epsilon$ e f_n converge a f uniformemente su E^c.

  ”Real Analysis” - Folland, Teorema 2.33

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Anche in probabilità e statistica è molto importante il concetto di convergenza di variabili aleatorie e si differenziano vari modi. Ecco riportati alcuni risultati fondamentali. Per questa parte oltre ai link specifici per i vari teoremi si può fare riferimento a:
G. Grimmett, D. Stirzaker "Probability and Random Processes", Third Edition, Oxford Un. Press, 2001
`http://www.tlc.unipr.it/bononi/didattica/TSA/beucher/EntwurfVorlesung.pdf` (p. 11-12)
`http://oldwww.unibas.it/utenti/dinardo/sedicilezio.pdf`
`http://boccignone.di.unimi.it/SAD_2017_files/lez10.pdf`

- **Leggi dei grandi numeri**
  Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con valore atteso $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, sia $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la media empirica. Allora valgono:
  - Legge debole dei grandi numeri (o teorema di Bernoulli)
  $$\forall \eta > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mu\,| > \eta\right) = 0$$
  - Legge forte dei grandi numeri
  $$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1$$

  `https://it.wikipedia.org/wiki/Legge_dei_grandi_numeri`

- Data una variabile aleatoria X e una successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{R}$ con funzioni di distribuzione F_{X_n}, abbiamo studiato 3 tipi di convergenza:
  - si dice che $(X_n)_n$ converge a X **in probabilità** (e si indica con $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) se $\forall \eta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\, X_n - X\,| > \eta\right) = 0$.
  - si dice che $(X_n)_n$ converge **in distribuzione** (o in legge) a X con funzione di distribuzione F_X (e si indica con $X_n \xrightarrow{d} X$) se $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall$ punto di continuità di F_X.
  - si dice che $(X_n)_n$ converge a X **quasi certamente** (e si indica con $X_n \xrightarrow{q.c.} X$) se $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}\right) = 1$.

OSS: anche qua come per le funzioni alcuni modi di convergenza sono più forti di altri. In particolare vale:
convergenza $q.c.$ $\Rightarrow$ convergenza in $\mathbb{P}$ $\Rightarrow$ convergenza in d.
Si osserva inoltre come la convergenza in distribuzione o in legge sia la più debole delle tre, ma è ampiamente utilizzata: si pensi già solo al toerema del limite centrale.
`https://it.wikipedia.org/wiki/Convergenza_di_variabili_casuali`
`https://www.mat.unical.it/~gianfelice/didattica/P&PS/appti_P&PS.pdf` - capitolo 2

- **Teorema di Levy**
  Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie con funzione caratteristica $\varphi_{X_n}(\theta)$ tale che $X_n \xrightarrow{d} X$, sia φ_X la funzione caratteristica di X. Allora:
  $$\varphi_{X_n}(\theta) \to \varphi_X(\theta) \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$$

- **Teorema del limite centrale**
  Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}$ indipendenti e identicamente distribuite con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{Var}X_i = \sigma^2 \quad \forall i$. Allora:
  $$S_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

`https://it.wikipedia.org/wiki/Teoremi_centrali_del_limite`
`http://users.dma.unipi.it/~flandoli/StatI_TLC.pdf`

Analisi Numerica

In Analisi Numerica il concetto di convergenza dei vari metodi alla soluzione che si vuole approssimare è fondamentale per capire quali metodi sono migliori e quante iterazioni sono necessarie.
R.L. Burden, J.D. Faires, ”Numerical Analysis”, 9th edition, Thomson Brooks/Cole, 2011
Collegato alle nozioni presentate nel corso di Analisi 3 si può citare il fondamentale:

- **Teorema di approssimazione di Weierstrass**
  Data $f :$ [a, b] $\to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sull'intervallo [a, b], esiste una successione di polinomi $(p_n)_{n\geq 1}$ tale che:
  $\lim_{x\to\infty} p_n(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$
  OSS: Si osservi che il limite è da intendersi non solo come limite puntuale, ma anche uniforme. Ne consegue che la convergenza della successione dei polinomi approssimanti la funzione f è uniforme.
  `https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_approssimazione_di_Weierstrass`