

1 Differenzenquotient für Randpunkte

An den Randpunkten kann der zentrale Differenzenquotient nicht mehr benutzt werden. Deshalb muss ein einseitiger Differenzenquotient der Ordnung 2 benutzt werden. Eine Möglichkeit:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z) = \frac{11f(x, y, z) - 28f(x - h, y, z) + 17f(x - 2h, y, z)}{38h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z) = \frac{11f(x, y, z) - 28f(x + h, y, z) + 17f(x + 2h, y, z)}{38h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Der Laplace-Operator ist eine Zusammensetzung dieser Ableitungen, wobei an einfachen Randpunkten die anderen Richtungen mit Hilfe des zentralen Differenzenquotienten berechnet werden. An den zweifachen Randpunkten benötigt man zweimal den einseitigen Differenzenquotienten und an dreifachen sogar dreimal.

2 Neumann-Randbedingungen

Zur Berechnung des einseitigen Differenzenquotienten der ersten Ableitung kann dieser Differenzenquotient benutzt werden.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{(3f(x, y, z) - f(x - h, y, z) + 4f(x - 2h, y, z))}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{(3f(x, y, z) - f(x + h, y, z) + 4f(x + 2h, y, z))}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

In den Neumann-Randbedingungen wird $\nabla f(x, y, z) \cdot n$ benötigt. Da n abhängig von der Art des Randpunktes ist, kann ein Ergebnis allgemein nicht angegeben werden.