МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по научно-исследовательской работе

Тема: Аппроксимация временных рядов с помощью B-сплайнов

Студент гр. 3304	____________________	Осипов В.Г.
Руководители	____________________	Середа В. И.
	____________________	Кринкин К.В.

Санкт-Петербург
2018

ЗАДАНИЕ

НА НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКУЮ РАБОТУ

Студент Осипов В.Г.

Группа 3304

Тема НИР: Аппроксимация временных рядов с помощью B-сплайнов

Задание на НИР:

Работа над темой НИР.

Сроки выполнения НИР: 13.09.2018 – 27.12.2018

Дата сдачи отчета: 25.12.2018

Дата защиты отчета: 25.12.2018

Студент	________________	Осипов В.Г.
Руководители	________________	Середа В. И.
	________________	Кринкин К.В.

АННОТАЦИЯ

В работе были рассмотрены методы интерполяции на регулярной сетке с помощью кривых Безье, кубических сплайнов в виде алгебраических многочленов и сплайнов в виде линейной комбинации кубических B-сплайнов. Определены условия однозначного существования решения.

SUMMARY

Interpolation methods on a regular grid using Bezier curves, cubic splines in the form of algebraic polynomials and splines in the form of a linear combination of cubic B-splines were considered. The conditions for an unambiguous solution are determined.

Содержание

Введение

Анализ временных рядов включает в себя методы анализа данных с целью получения значимых статистических и других характеристик анализируемых данных.

Для построения модели явления, являющегося источником анализируемого временного ряда, необходимо выявление структуры временного ряда. Сюда входят методы приближения с помощью кривых, интерполяции, аппроксимации и др. Модели временных рядов могут иметь различные формы и представлять различные стохастические процессы.

Анализ результатов любого эксперимента основывается на обработке полученных данных. Во многих случаях эти данные представляют собой временные ряды – расположенные в хронологическом порядке последовательности значений одной или нескольких измеряемых величин [1].

Актуальность работы заключается в том, что интерполяция является частным случаем аппроксимации и может быть использована для обработки данных в форме временного ряда. Аппроксимация используется во многих областях, в частности, в задачах регрессии.

В работе исследуются вопросы аппроксимации функций одной переменной с помощью кубических сплайнов, выраженных в различных формах.

Цель работы состоит в описании методов аппроксимации, в том числе и с помощью B-сплайнов.

Таким образом, имеются следующие задачи:

1) формирование списка существующих методов;
2) описание методов аппроксимации;
3) сравнение рассмотренных методов.

1. Обзор предметной области и аналогов

1.1 Интерполяция

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на m равных неперекрывающихся отрезков $\omega = [x_i, x_{i+1}]$ – сетка интерполяции, где $x_0 = a, x_m = b, x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, m$ – узлы интерполяции, $h = \frac{b-a}{m}$ – шаг интерполяции. Известны значения функции f_i в точках x_i:

$$f_i = f(x_i).$$

Задача приближенного восстановления значений функции f в произвольной точке x внутри отрезка $[a, b]$ называется задачей интерполяции, а приближенное восстановление функции f по формуле $f(x) \approx S(x)$ называется интерполяцией функции [2, 3].

1.2 Полиномиальная аппроксимация

Задана сетка $\omega = [t_i, t_{i+1}], i = 0,1, \dots m$ и набор данных

$$y_0, y_2, \dots, y_m.$$

При предположении, что данные представляют собой некоторую лежащую в их основе функцию $b(t)$, для которой $y_i = b(t_i)$ [4], т.е. задана модель данных в виде

наблюдение = модель + ошибка.

Иными словами, можно записать функцию $b(x)$ следующим образом

$$y_i \approx x_0\phi_0(t_i) + x_0\phi_0(t_i) + \dots + x_n\phi_n(t_i),$$

где $\phi_j(t)$ – модельные функции.

Согласно методу наименьших квадратов, для минимизации значений $b - Ax$ необходимо решить задачу

$$\min_x \sum_{j=0}^{m} \left[(b - Ax)_j\right]^2$$

В случаях, когда не все данные одинаково важны или известно, что данные имеют разную точность, можно ввести веса $w_i > 0, \sum_{i=0}^{n} w_i = 1$ и минимизировать сумму

$$\sum_{j=0}^{m} w_j\left[(b-Ax)_j\right]^2.$$

Если данные аппроксимируются полиномиальной функцией регрессии одной переменной $f(x) = b_0 + \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$, то, матричные уравнения в данном случае примут вид

$$\begin{pmatrix} n & \sum\limits_n x_t & \cdots & \sum\limits_n x_t^k \\ \sum\limits_n x_t & \sum\limits_n x_t^2 & \cdots & \sum\limits_n x_t^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_n x_t^k & \sum\limits_n x_t^{k+1} & \cdots & \sum\limits_n x_t^{2k} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_n y_t \\ \sum\limits_n x_t y_t \\ \vdots \\ \sum\limits_n x_t^k y_t \end{bmatrix}.$$

1.3 Аппроксимация B-сплайнами

Сплайн $S(x)$ k-й степени на интервале $[a, b]$ на сетке ω из $m + 1$ узла может быть записан в виде линейной комбинации B-сплайнов:

$$S(x) = \sum_{i=-k}^{m-1} \alpha_i N_i^k(x)$$

где коэффициенты α_i условиями задачи определяются однозначно [5].

Для решения задачи аппроксимации, необходимо подобрать коэффициенты c_i, чтобы минимизировать функцию [4]

$$\delta(c) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[w_i \Big(y_i - \sum_{i=0}^{g+k} c_j N_{j,k+1}(x_i) \Big) \right]^2,$$

где w_i – весовые коэффициенты, g – число узлов.

1.4 Сравнение

Критериями для сравнения были выбраны: влияние шума на построение аппроксимирующей функции, и сложность алгоритма построения аппроксимирующей функции.

При интерполяции в узлах значения функции-интерполянта в точности равны данным, в то время как при аппроксимации допустимы отклонения от заданных точек. Так как при измерении возникают погрешности, имеет смысл их не учитывать [4].

Решение задач интерполяции и аппроксимации сводится к решению СЛАУ. При построении сплайнов, матрица СЛАУ является трехдиагональной, т.е. система может быть решена за линейное время методом прогонки [3]. При полиномиальной аппроксимации в общем виде, решение полной системы методом Гаусса происходит за кубическое время [2, 3].

В табл. 1 приведена сравнительная характеристика методов, рассмотренных в данном разделе.

Таблица 1. Сравнение методов аппроксимации

Критерий	Интерполяция	Полиномиальная аппроксимация	Аппроксимация В-сплайнами
Шум	Шум влияет на результат	Происходит сглаживание	Происходит сглаживание
Сложность алгоритма	Вычисление коэффициентов для функции-интерполянта – решение СЛАУ с трехдиагональной матрицей.	Вычисление оптимальных коэффициентов – решение СЛАУ.	Вычисление оптимальных коэффициентов – решение СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

Список литературы

1. Истомин И. А., Котляров О. Л., Лоскутов А. Ю. К проблеме обработки временных рядов: расширение возможностей метода локальной аппроксимации посредством сингулярного спектрального анализа //Теоретическая и математическая физика. – 2005. – Т. 142. – №. 1. – С. 148-159.

2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. – 1962.

3. Волков Е. Численные методы. – 1987.

4. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М. : Мир, 1998.

5. Шикин Е. В., Плис А. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. – М. : АО" Диалог-МИФИ", 1996.

6. Роджерс Д. Математические основы машинной графики. – 1980.

7. Бур К. Практическое руководство по сплайнам. – 1985.