Ecuaciones Lineales

Método:

- Montante
- Gauss-Jordán
- Eliminación Gaussiana
- Gauss-Seidel
- Jacobi

Ejemplo. Gauss-Seidel

1) $3a - 0.1b - 0.2c = 7.85$
2) $0.1a + 7b - 0.3c = -19.3$
3) $0.3a - 0.2b + 10c = 71.4$

$\boxed{\varepsilon = 0.001}$

Analizar la Diagonal Dominante

Despejando "a" de la ec.1, "b" de la ec.2 y "c" de la ec.3.

4) $a = \dfrac{7.85 + 0.1b + 0.2c}{3}$
5) $b = \dfrac{-19.3 - 0.1a + 0.3c}{7}$
6) $c = \dfrac{71.4 - 0.3a + 0.2b}{10}$

Utilizar las ecuaciones 4, 5 y 6 para las iteraciones.

Se les asigna un valor de cero a todas las variables al iniciar.

$a_0 = 0$, $b_0 = 0$ y $c_0 = 0$

1er. Iteración.

Con $b_0 = 0$ y $c_0 = 0$, obtener "a_1"

$a_1 = \dfrac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(0)}{3}$

$\boxed{a_1 = 2.616666667}$

Considerando $a_1 = 2.616666667$ y $c_0 = 0$, obtener "b_1"

$b_1 = \dfrac{-19.3 - 0.1(2.616666667) + 0.3(0)}{7}$

$\boxed{b_1 = -2.79452381}$

Siendo $a_1 = 2.616666667$ y $b_1 = -2.79452381$, obtener "c_1"

$c_1 = \dfrac{71.4 - 0.3(2.616666667) + 0.2(-2.79452381)}{10}$

$\boxed{c_1 = 7.005609524}$

2da. Iteración.

Con $b_1 = -2.79452381$ y $c_1 = 7.005609524$, obtener "a_2"

$a_2 = \dfrac{7.85 + 0.1(-2.79452381) + 0.2(7.005609524)}{3}$

$\boxed{a_2 = 2.990556508}$

Considerando $a_2 = 2.990556508$ y $c_1 = 7.005609524$, obtener "b_2"

$b_2 = \dfrac{-19.3 - 0.1(2.990556508) + 0.3(7.005609524)}{7}$

$\boxed{b_2 = -2.499624685}$

Siendo $a_2 = 2.990556508$ y $b_2 = -2.499624685$, obtener "c_2"

$c_2 = \dfrac{71.4 - 0.3(2.990556508) + 0.2(-2.499624685)}{10}$

$\boxed{c_2 = 7.000290811}$

3era. Iteración.

Con $b_2 = -2.499624685$ y $c_2 = 7.000290811$, obtener "a_3"

$$a_3 = \frac{7.85 + 0.1(-2.499624685) + 0.2(7.000290811)}{3}$$

$$\boxed{a_3 = 3.000031898}$$

Considerando $a_3 = 3.000031898$ y $c_2 = 7.000290811$, obtener "b_3"

$$b_3 = \frac{-19.3 - 0.1(3.000031898) + 0.3(7.000290811)}{7}$$

$$\boxed{b_3 = -2.499987992}$$

Siendo $a_3 = 3.000031898$ y $b_3 = -2.499987992$, obtener "c_3"

$$c_3 = \frac{71.4 - 0.3(3.000031898) + 0.2(-2.499987992)}{10}$$

$$\boxed{c_3 = 6.999999283}$$

4a. Iteración.

Con $b_3 = -2.499987992$ y $c_3 = 6.999999283$, obtener "a_4"

$$a_4 = \frac{7.85 + 0.1(-2.499987992) + 0.2(6.999999283)}{3}$$

$$\boxed{a_4 = 3.000000352}$$

Considerando $a_4 = 3.000000352$ y $c_3 = 6.999999283$, obtener "b_4"

$$b_4 = \frac{-19.3 - 0.1(3.000000352) + 0.3(6.999999283)}{7}$$

$$\boxed{b_4 = -2.500000036}$$

Siendo $a_4 = 3.000000352$ y $b_4 = -2.500000036$, obtener "c_4"

$$c_4 = \frac{71.4 - 0.3(3.000000352) + 0.2(-2.500000036)}{10}$$

$$\boxed{c_4 = 6.999999989}$$

i	a	b	c
0	0	0	0
1	2.616666667	-2.794523810	7.005609524
2	2.990556508	-2.499624685	7.000290811
3	3.000031898	-2.499987992	6.999999283
4	3.000000352	-2.500000036	6.999999989

$\varepsilon_a = |a_4 - a_3|$ $\varepsilon_b = |b_4 - b_3|$ $\varepsilon_c = |c_4 - c_3|$

$\boxed{\varepsilon_a = 0.000031545}$ $\boxed{\varepsilon_b = 0.000012043}$ $\boxed{\varepsilon_c = 0.000000706}$

Ejemplo. Jacobi

1) $3a - 0.1b - 0.2c = 7.85$
2) $0.1a + 7b - 0.3c = -19.3$
3) $0.3a - 0.2b + 10c = 71.4$

$\boxed{\varepsilon = 0.001}$

Analizar la Diagonal Dominante

Despejando "a" de la ec.1, "b" de la ec.2 y "c" de la ec.3.

4) $a = \dfrac{7.85 + 0.1b + 0.2c}{3}$

5) $b = \dfrac{-19.3 - 0.1a + 0.3c}{7}$

6) $c = \dfrac{71.4 - 0.3a + 0.2b}{10}$

Utilizar las ecuaciones 4, 5 y 6 para las iteraciones.

Se les asigna un valor de uno a todas las variables al iniciar.

$a_0 = 1$, $b_0 = 1$ y $c_0 = 1$

1er. Iteración.

Con $b_0 = 1$ y $c_0 = 1$, obtener "a_1"

$a_1 = \dfrac{7.85 + 0.1(1) + 0.2(1)}{3}$

$\boxed{a_1 = 2.716666667}$

Considerando $a_0 = 1$ y $c_0 = 1$, obtener "b_1"

$b_1 = \dfrac{-19.3 - 0.1(1) + 0.3(1)}{7}$

$\boxed{b_1 = -2.728571429}$

Siendo $a_0 = 1$ y $b_0 = 1$, obtener "c_1"

$c_1 = \dfrac{71.4 - 0.3(1) + 0.2(1)}{10}$

$\boxed{c_1 = 7.13}$

2da. Iteración.

Con $b_1 = -2.728571429$ y $c_1 = 7.13$, obtener "a_2"

$a_2 = \dfrac{7.85 + 0.1(-2.728571429) + 0.2(7.13)}{3}$

$\boxed{a_2 = 3.001047619}$

Considerando $a_1 = 2.716666667$ y $c_1 = 7.13$, obtener "b_2"

$b_2 = \dfrac{-19.3 - 0.1(2.716666667) + 0.3(7.13)}{7}$

$\boxed{b_2 = -2.490380952}$

Siendo $a_1 = 2.716666667$ y $b_1 = -2.728571429$, obtener "c_2"

$c_2 = \dfrac{71.4 - 0.3(2.716666667) + 0.2(-2.728571429)}{10}$

$\boxed{c_2 = 7.003928571}$

3era. Iteración.

Con $b_2 = -2.490380952$ y $c_2 = 7.003928571$, obtener "a_3"

$$a_3 = \frac{7.85 + 0.1(-2.490380952) + 0.2(7.003928571)}{3}$$

$$\boxed{a_3 = 3.00058254}$$

Considerando $a_2 = 3.001047619$ y $c_2 = 7.003928571$, obtener "b_3"

$$b_3 = \frac{-19.3 - 0.1(3.001047619) + 0.3(7.003928571)}{7}$$

$$\boxed{b_3 = -2.499846599}$$

Siendo $a_2 = 3.001047619$ y $b_2 = -2.490380952$, obtener "c_3"

$$c_3 = \frac{71.4 - 0.3(3.001047619) + 0.2(-2.490380952)}{10}$$

$$\boxed{c_3 = 7.000160952}$$

4a. Iteración.

Con $b_3 = -2.499846599$ y $c_3 = 7.000160952$, obtener "a_4"

$$a_4 = \frac{7.85 + 0.1(-2.499846599) + 0.2(7.000160952)}{3}$$

$$\boxed{a_4 = 3.000015844}$$

Considerando $a_3 = 3.00058254$ y $c_3 = 7.000160952$, obtener "b_4"

$$b_4 = \frac{-19.3 - 0.1(3.00058254) + 0.3(7.000160952)}{7}$$

$$\boxed{b_4 = -2.500001424}$$

Siendo $a_3 = 3.00058254$ y $b_3 = -2.499846599$, obtener "c_4"

$$c_4 = \frac{71.4 - 0.3(3.00058254) + 0.2(-2.499846599)}{10}$$

$$\boxed{c_4 = 6.999985592}$$

i	a	b	c
0	1	1	1
1	2.716666667	-2.728571429	7.130000000
2	3.001047619	-2.490380952	7.003928571
3	3.000582540	-2.499846599	7.000160952
4	3.000015844	-2.500001424	6.999985592

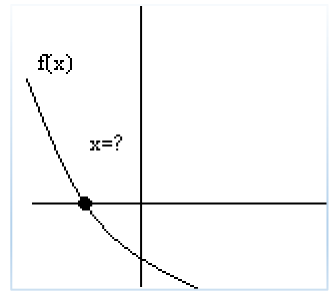
$\varepsilon_a = |a_4 - a_3|$ $\varepsilon_b = |b_4 - b_3|$ $\varepsilon_c = |c_4 - c_3|$

$\boxed{\varepsilon_a = 0.000566696}$ $\boxed{\varepsilon_b = 0.000154825}$ $\boxed{\varepsilon_c = 0.00017536}$

Ecuaciones no lineales
(Raíces de la ec´n)
ec´n =0

No se debe desechar ningún dato intermedio.
Método:

- **Gráfico**
- **Bisectriz.**
- **Punto fijo ó sustituciones sucesivas**
- **Newton Raphson**
- **Falsa posición ó Regula – Falsi (Latín)**
- **Secante**



Se descompone el valor de x, y Es aquel que al sustituir en la ecuación esta se hace cero.

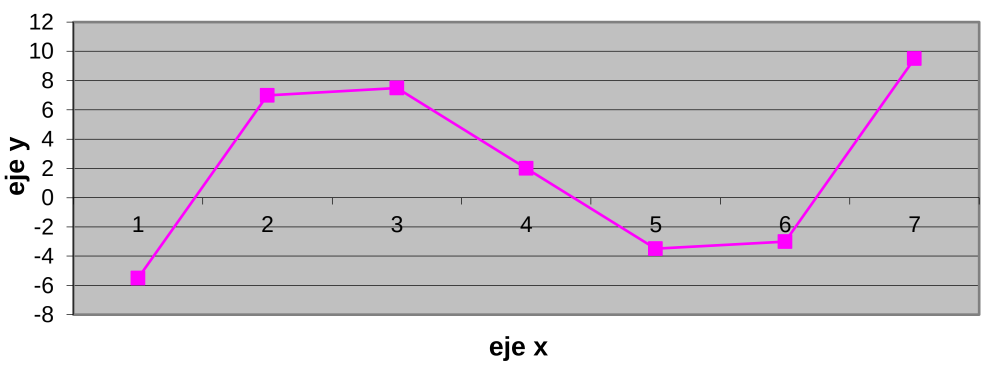
Método Gráfico

Método simple para obtener una aproximación f(x)=0, consiste en graficar la función y observar donde cruza el eje x. Este punto que representa el valor de f(x)=0 ofrece una aproximación inicial de la raíz.

Ejemplo.- $y = x^3 - 6.5x + 2$

X	Y
-3	-5.5
-2	7
-1	7.5
0	2
1	-3.5
2	-3
3	9.5

El cambio de signo indica una raíz



Método de la Bisectriz

Es el punto medio entre dos puntos

Fórmula $x = \frac{a + b}{2}$

Ejemplo.- En la gráfica de la función $y = x^3 - 6.5x + 2$

a	b	x	comportamiento
0	1	0.5	-
0	0.5	0.25	+
0.25	0.5	0.375	-
0.25	0.375	0.3125	-
0.25	0.3175	0.28375	+
0.3	0.3175	0.3087	+

Cuando el valor entre los dos últimos sea igual 0.001, aquí se termina.
Buscando x que es el punto medio entre a y b

Margen de *Error* Є

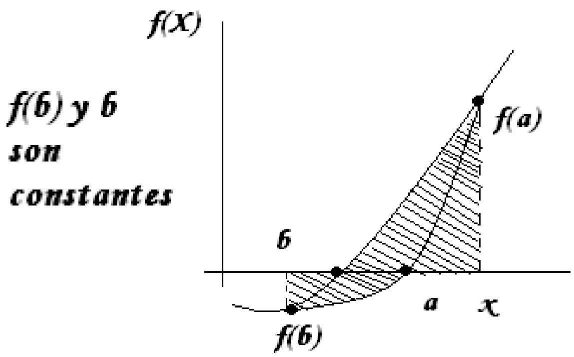
$$Є = \left| x_{i+1} - x_i \right| = 0.001$$

Método de la Falsa Posición o Regula – Falsi (Latín)

Se basa en una visualización gráfica. Si f (b) está mucho más cercana a cero que f(a), es lógico que la raíz se encuentre más cerca de "b" que dé "a".

Este método de alternativo aprovecha esta visualización gráfica y consiste en unir f (b) y f(a) con una línea recta.

La intersección de esta línea con el eje de las x representa una mejor aproximación de la raíz.



Usando triángulos semejantes la intersección de la línea recta con el eje x se estima mediante:

$$\frac{f(b)}{x-b} = \frac{f(a)}{x-a}$$

Despejando x;

$$\boxed{x = a - \frac{f(a)\ (b-a)}{f(b) - f(a)}}$$

Tiene un punto fijo que es" b" por lo tanto también lo es f(b)

$$\boxed{\epsilon = \text{Error} = \left| x_{i+1} - x_i \right| = 0.001}$$

Ejemplo.-

Calcule la raíz para $f(x)= 3x^3 – 2x – 3$

x	f(x)
-2	-23
-1	-4
0	-3
a→ 1	**-2→ f(a)**
b→ 2	**17→ f(b)**

$$\boxed{\mathbf{x = a - \frac{f(a)\ (b-a)}{f(b) - f(a)}}}$$

$f(a)= 3a^3 – 2a – 3$

i	**b**	**f(b)**	**a**	**x**	**f(a)**	**Є = $\mid x_{i+1} - x_i \mid$**
0	2	17	1	-	-2	-
1	2	17	1	1.105263158	-2	-
2	2	17	1.105263158	1.162412993	-1.159935851	0.057149835
3	2	17	1.162412993	1.191557573	-0.612854845	0.02914457996
4	2	17	1.191557573	1.205933036	-0.307761039	0.014375463
5	2	17	1.205933036	1.21290545	-0.150593126	0.006972414
6	2	17	1.21290545	1.216244225	-0.072751076	0.003338775
7	2	17	1.216244225	1.217859143	-0.035100587	0.001614918

$Є = \mid x_{i7} – x_{i6} \mid = \mid 1.217859143 – 1.216244225 \mid$

$$\boxed{\mathbf{Є = 0.001614918}}$$

Método Newton Raphson.

Consiste en un procedimiento que lleva la ec. f (x) = 0.

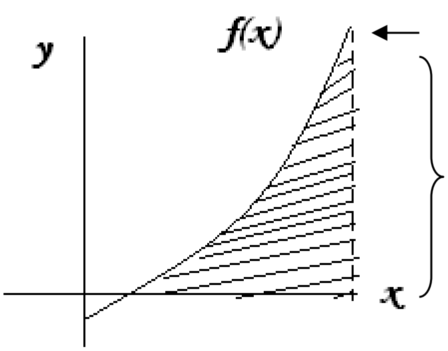
La solución única es tener un valor inicial que sea “suficiente” cercano a la raíz.

Encuentra una raíz, siempre y cuando se conozca una estimación inicial para la raíz deseada.

Utiliza de forma interactiva las rectas tangentes que pasan por aproximaciones consecutivas de la raíz.

Requiere una buena estimación inicial, de lo contrario la solución iterativa puede divergir o converger a una solución irrelevante.

La razón de convergencia iterativa es alta, cuando funciona el método.



$(x_0, f(x_0))$

Pendiente
$f(x_0)$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right)}$$

X inicial puede ser “0” o un valor cercano a la raíz.

El margen de error es igual a “0” cero.

Ejemplo .-

Encuentre la raíz real de la ecuación $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$

i	x_{i+1}	$\epsilon = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	$x_o = 1$	
1	$x_1 = x_o - \left(\frac{x_o^3 + 2x_o^2 + 10x_o - 20}{3x_o^2 + 4x_o + 10} \right)$ $x_1 = 1 - \left(\frac{(1)^3 + 2(1)^2 + 10(1) - 20}{3(1)^2 + 4(1) + 10} \right)$ **$x_1 = 1.411764706$**	$\lvert x_1 - x_0 \rvert =$ $\lvert 1.411764706 - 1 \rvert$ $= 0.411764706$
2	$x_2 = x_1 - \left(\frac{x_1^3 + 2x_1^2 + 10x_1 - 20}{3x_1^2 + 4x_1 + 10} \right)$ $x_2 = 1.411764706 - \left(\frac{(1.411764706)^3 + 2(1.411764706)^2 + 10(1.411764706) - 20}{3(1.411764706)^2 + 4(1.411764706) + 10} \right)$ **$x_2 = 1.369336471$**	$\lvert x_2 - x_1 \rvert =$ $\lvert 1.369336471 - 1.411764706 \rvert$ $= 0.042428235$
3	$x_3 = x_2 - \left(\frac{x_2^3 + 2x_2^2 + 10x_2 - 20}{3x_2^2 + 4x_2 + 10} \right)$ $x_3 = 1.369336471 - \left(\frac{(1.369336471)^3 + 2(1.369336471)^2 + 10(1.369336471) - 20}{3(1.369336471)^2 + 4(1.369336471) + 10} \right)$ **$x_3 = 1.368808189$**	$\lvert x_3 - x_2 \rvert =$ $\lvert 1.368808189 - 1.369336471 \rvert$ $= 0.000528282$
4	$x_4 = x_3 - \left(\frac{x_3^3 + 2x_3^2 + 10x_3 - 20}{3x_3^2 + 4x_3 + 10} \right)$ $x_4 = 1.368808189 - \left(\frac{(1.368808189)^3 + 2(1.368808189)^2 + 10(1.368808189) - 20}{3(1.368808189)^2 + 4(1.368808189) + 10} \right)$ **$\boxed{x_4 = 1.368808108}$**	$\lvert x_4 - x_3 \rvert =$ $\lvert 1.368808108 - 1.368808189 \rvert$ **$= 0.0000000$**

Punto Fijo ó Sustituciones Sucesivas

Es un método abierto que emplea una fórmula para predecir la raíz.

Esta fórmula puede desarrollarse con el método de punto fijo, llamado también sustitución sucesiva, iteración de punto fijo ó iteración simple de punto fijo.

Sea la ecuación general f(x)=0; de la cual se desea encontrar una raíz real.

1) Consiste en transformar algebraicamente f(x) = 0 a la forma equivalente x = g(x).

Si se tiene $2x^2 – x – 5 = 0$

a) $x = 2x^2 - 5$ **despejando el 2° término**

b) $x = \sqrt{x + 5/2}$ **despejar "x" del 1° término**

c) $x = 5/ 2x - 1$ **factorizando "x" y despejándola**

d) $x = 2x^2 - 5$ **sumando "x" a cada lado de la igualdad**

2) Una vez que se ha determinado una fórmula equivalente, hay que examinar una raíz, esta se puede hacer por observación directa de la ecuación.

Se denota el valor de exploración ó valor de inicio como x_0.

3) Encontrando x_0, se evalúa g(x) en x_0, denotándose el resultado de esta evaluación como x; esto es $g(x_0) = x_1$.

La utilidad de x = g(x) es proporcionar una fórmula para predecir un nuevo valor de x en función del valor anterior de la misma. De esta manera, dado un valor inicial para la raíz x_i.

La ecuación x = g(x) se utiliza para obtener una nueva aproximación x_{i+1} expresada por la fórmula iterativa $x_{i+1} = g(x_i)$.

$$\boxed{\text{El margen de error } (\varepsilon) \text{ es } 0}$$

Ejemplo.

Localizar la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$, la función se puede separar directamente y expresarse en la forma $x_{i+1} = g(x_i)$.

$X_{i+1} = e^{-x_i}$ empezando con un valor inicial $X_0 = 0$. Se aplica esta ecuación iterativa para calcular.

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$e^{-x} - x = 0$$

Despejar x :

1) $x = e^{-x}$
2) $e^{-x} = x \rightarrow \cancel{Ln\, e^{-x}} = Ln\, x \rightarrow -x = Ln\, x \rightarrow x = -Ln\, x$

i	e^{-x}		x_i	$\epsilon = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-		0	-
1	e^{-0}	=	1	1
2	e^{-1}	=	0.367879441	0.632120558
3	$e^{-0.367879441}$	=	0.692200627	0.324321186
4	$e^{-0.692200627}$	=	0.500473500	0.191727127
5	$e^{-0.5004735}$	=	0.606243535	0.105770034
6	$e^{-0.606243535}$	=	0.545395786	0.060847749
7	$e^{-0.\ 545395786}$	=	0.579612335	0.034216549
8	$e^{-0.579612335}$	=	0.560115461	0.019496874
9	$e^{-0.560115461}$	=	0.571143115	0.011027653
10	$e^{-0.571143115}$	=	0.564879347	0.006263767689
11	$e^{-0.564879347}$	=	0.568428725	0.003549377638
12	$e^{-0.568428725}$	=	0.566414733	0.002013991882
13	$e^{-0.566414733}$	=	0.567556637	0.001141904181

$$\boxed{x_{22} = 0.5671407819}$$

El margen de error se encuentra en: $\varepsilon = |\ x_{22} - x_{21}\ |$

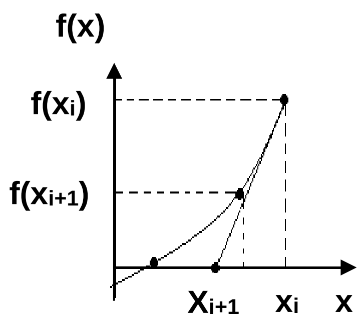
$\varepsilon = |\ 0.5671407819 - 0.5671477143\ | = 0.00000693285432$

$$\boxed{\varepsilon = 0.00000693285432}$$

Secante

Predice la aproximación de una raíz extrapolando una tangente de la función del eje x. Se basa en la fórmula de interpolación lineal.

Es más eficiente que el método Newton.



$$X_{i+1} = x_{i+1} - \left(\frac{f(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \right)$$

$$\epsilon = \text{Error} = \left| x_{i+1} - x_i \right| = 0.001$$

Requiere de dos valores iniciales: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Ejemplo.- Calcule la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$.

$x_0 = 0$	$f(x_0) = e^{-0} - 0$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = 1$	$f(x_1) = e^{-1} - 1$	$f(x_1) = -0.632120558$
$x_2 = 0.612699836$	$f(x_2) = e^{-0.612699836} - 0.612699836$	$f(x_2) = -0.070813946$
$x_3 = 0.563838389$	$f(x_3) = e^{-0.563838389} - 0.563838389$	$f(x_3) = 0.005182354419$
$x_4 = 0.567170358$	$f(x_4) = e^{-0.567170358} - 0.5671703580$	$f(x_4) = -0.00004241924099$

i	x_i	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	$x_0 = 0$	
1	$x_1 = 1$	$\lvert x_1 - x_0 \rvert = \lvert 1 - 0 \rvert = 1$
2	$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\,(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - \left\{\frac{(-0.632120558)\,(1-0)}{(-0.632120558) - 1}\right\}$ $x_2 = 0.612699836$	$\lvert x_2 - x_1 \rvert =$ $= \lvert 0.612699836 - 1 \rvert$ $= 0.387300613$
3	$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\,(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$ $= 0.612699836 - \left\{\frac{(-0.070813947)(0.612699836 - 1)}{(-0.070813947) - (-0.632120558)}\right\}$ $x_3 = 0.563838389$	$\lvert x_3 - x_2 \rvert =$ $= \lvert 0.563838389 - 0.612699836 \rvert =$ $= 0.048861447$
4	$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)\,(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)}$ $x_4 = 0.563838423 - \left\{\frac{0.005182354419)(0.563838389 - 0.612699836)}{0.005182354419 - (-0.070813946)}\right\}$ $x_4 = 0.567170358$	$\lvert x_4 - x_3 \rvert =$ $= \lvert 0.567170358 - 0.563838389 \rvert =$ $= 0.003331969259$
5	$X_5 = x_4 - \frac{f(x_4)\,(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)}$ $x_5 = 0.567170358 - \left\{\frac{(-0.00004241924099)(0.567170358 - 0.563838389)}{(-0.00004241924099) - 0.005182354419}\right\}$ $\boxed{x_5 = 0.567143306}$	$\lvert x_5 - x_4 \rvert =$ $= \lvert 0.567143306 - 0.567170358 \rvert =$ $= 0.00002705181386$

Interpolación

Es aquella que pasa a través de puntos dados como datos que se muestran por tablas de valores ó se consideran directamente de una función dada.

Es la base para varios modelos numéricos fundamentales.

La interpolación consiste en encontrar un valor dentro de un intervalo en el que se conocen los valores de los extremos.

Interpolación polinomial

La interpolación de los datos consiste en determinar el polinomio único de n-ésimo grado que se ajusta a n+1 puntos.

Se realiza mediante:

- **a) Polinomio**
- **b) Función racional**
- **c) Función simple**
- **d) Series de Fourier**

Interpolación por método:

1. **Interpolación lineal**
2. **Newton hacia adelante**
3. **Newton hacia atrás**
4. **Newton con diferencias divididas**
5. **Lagrange**

Interpolación Lineal

Consiste en unir dos puntos con una línea recta.

Es una aproximación a la primera derivada de la función (gradiente).

Se deduce del modelo de integración llamado regla del trapecio.

$$\boxed{g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)}$$

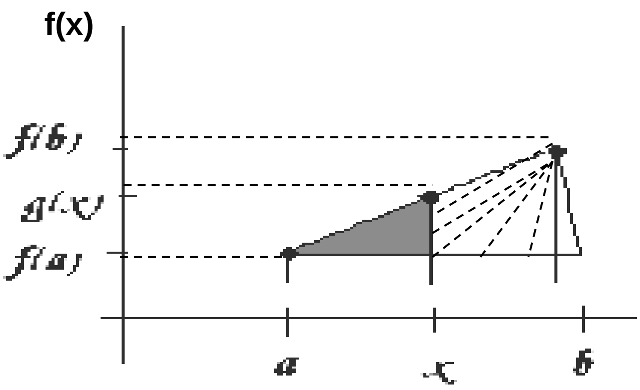
La notación de g(x) designa que éste es un polinomio de interpolación de primer grado.

El término $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es una aproximación en la diferencia dividida finita a

la primera derivada.

Es decir, cuanto menor sea el intervalo entre los datos, mejor será la aproximación.

Esto se debe a que conforme el intervalo disminuye una función continua estará mejor aproximada por una línea recta.



Margen de Error Є

Є = │f(x) – g(x) │= │valor real – valor calculado│

Ejemplo.

Estimar el Ln de 3 mediante interpolación lineal.

a) Primero realice el cálculo entre Ln 2 y Ln 5.

b) Después desarrolle el procedimiento pero esta vez con intervalos menores de Ln 2 y Ln 4.

Solución.

a)

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Ln 2 = 0.69314718
Ln 5 = 1.609437912
a = 2
b = 5
f(a) = Ln 2 = 0.69314718
f(b) = Ln 5 = 1.609437912
x = 3
Ln 3 = 1.098612289
f(x) = Ln 3 = 1.098612289

$$g(x) = \frac{1.609437912) - 0.69314718}{5 - 2}(3 - 2) + 0.69314718$$

$$\boxed{g(x) = 0.998577424}$$

$$Є = \left| f(x) - g(x) \right|$$

$$Є = \left| 1.098612289 - 0.998577424 \right|$$

$$\boxed{Є = 0.100034865}$$

b)

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Ln 2 = 0.69314718
Ln 4 = 1.386294361
a = 2
b = 4
f(a) = Ln 2 = 0.69314718
f(b) = Ln 4 = 1.386294361
x = 3
Ln 3 = 1.098612289
f(x) = Ln 3 = 1.098612289

$$g(x) = \frac{1.386294361 - 0.69314718}{4 - 2}(3 - 2) + 0.69314718$$

$$\boxed{g(x) = 1.039720771}$$

$$Є = \left| f(x) - g(x) \right|$$

$$Є = \left| 1.098612289 - 1.039720771 \right|$$

$$\boxed{Є = 0.058891517}$$

Lagrange

Se aplica para intervalos uniformes y no uniformes.

$$g(x) = \Sigma\, y_i \prod_{\substack{j=x \\ j\neq x}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$g(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

$$+\, y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$+\, y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}$$

$$+\, y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

$$+\, y_n$$

Esta ecuación es equivalente a la serie de potencias que se determinan resolviendo la ecuación lineal.

Desventajas:

1) **La cantidad de cálculos necesarios para la interpolación es grande.**

2) **La interpolación para otro valor “x” requiere la misma cantidad de cálculos adicionales, ya que no se puede utilizar partes de la aplicación previa.**

3) **Cuando el número de datos tiene que incrementarse o decrementarse, no se pueden utilizar los resultados en los cálculos previos.**

4) **La evaluación de error no es fácil.**

Lagrange

Ejemplo. - Obtener g(x) para x = 2.4

x_i	y_i
2.2	2.54
2.5	2.82
2.8	3.21
3.1	3.32
3.4	3.41

	x_i		y_i
x_1	2.2	y_1	2.54
x_2	2.5	y_2	2.82
x_3	2.8	y_3	3.21
x_4	3.1	y_4	3.32
x_5	3.4	y_5	3.41

Newton con Diferencias Divididas.

Se aplica este método cuando los intervalos son no uniformes.

De acuerdo a la fórmula se puede observar:

1) **Se requiere tener i+1 puntos de "y".**
2) **La resta de dos diferencias de tipo i-1, es el numerador.**
3) **La resta de dos valores no comunes en el numerador es el denominador.**

$$\boxed{g(x)= D^0 + D^1 (x - x_1) + D^2 (x - x_1)(x - x_2) + D^3 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \ldots}$$

Ejemplo.- Encuentre g(x) para x = 7

x_i	y_i
7.3	-0.28
6.5	-1.35
6.1	-1.96

$$X = 7 \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 \;\; 7.3 & y_1 \;\; -0.28 \\ x_2 \;\; 6.5 & y_2 \;\; -1.35 \end{array} \right\} \; g(x)$$

	x_i	y_i
x_1	7.3	y_1 -0.28
x_2	6.5	y_2 -1.35
x_3	6.1	y_3 -1.96

$h = \left| x_{i+1} - x_i \right|$

$h_1 = \left| x_2 - x_1 \right| = \left| 6.5 - 7.3 \right| = 0.8$

$h_2 = \left| x_3 - x_2 \right| = \left| 6.1 - 6.5 \right| = 0.4$

Los intervalos son no uniformes

x_i	y_i D^0	$D^1 f(x_i)$	$D^2 f(x_i)$
x_1 7.3	y_1 - 0.28	$D^1_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1.35 - (-0.28)}{6.5 - 7.3}$ $D^1_1 = 1.3375$	$D^2_1 = \frac{D^1_2 - D^1_1}{x_3 - x_1} = \frac{1.525 - 1.3375}{6.1 - 7.3}$ $D^2_1 = -0.15625$
x_2 6.5	y_2 - 1.35	$D^1_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{-1.96 - (-1.35)}{6.1 - 6.5}$ $D^1_2 = 1.525$	
x_3 6.1	y_3 - 1.96		

$g(x) = D^0 + D^1_1 (x - x_1) + D^2_1 (x - x_1)(x - x_2)$

$g(x) = (-0.28) + (1.3375)(7 - 7.3) + (-0.15625)(7-7.3)(7-6.5)$

$g(x) = (-0.28) + (1.3375)(-0.3) + (-0.15625)(-0.3)(0.5)$

$g(x) = (-0.28) + (-0.40125) + 0.0234375$

$g(x) = -0.28 - 0.40125 + 0.0234375$

$\boxed{g(x) = -0.657813}$

g(x) está entre - 0.28 y - 1.35 con respecto a “y”.

Nota: El margen de error permitido es de 2 diez milésimas.

Si los intervalos son no uniformes también se puede resolver por el método de Lagrange.

Newton hacia Adelante

Las abscisas de los datos tienen igual separación con un tamaño de intervalo h, los puntos se denotan por (x_i, f_i).

Para evaluar una fórmula de interpolación de Newton hacia Adelante son necesarios:

1. **tablas de coeficientes hacia adelante**
2. **coeficientes binomiales**

- **Tiene intervalos iguales**

- **Intervalos uniformes** $h = | x_{i+1} - x_i |$

El valor inferior – el valor superior de acuerdo a la cantidad de puntos.

$$\Delta^{k+1} f(x_{i+1}) = \Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^k f(x_i) \prod_{j=0}^{k} \frac{(s - j)}{(j+1)!}$$

Factor binomial "s".

Es una coordenada local.

Siempre positivo (izquierda a derecha).

Si no lo es se invierten los valores de "x" y "y" (derecha a izquierda).

Los coeficientes binomiales están dados por:

$$\begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} s \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{s(s-1)}{2!} \qquad s = \frac{x - x_i}{h}$$

$$\begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} = s \qquad \begin{bmatrix} s \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \qquad \begin{bmatrix} s \\ n \end{bmatrix} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots[s-(n+1)]}{n!}$$

$$g(x) = y_i \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta' f(x_i) \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} + \Delta^2 f(x_i) \begin{bmatrix} \frac{s(s-1)}{2!} \end{bmatrix} + \ldots..$$

Nota. Obtener "h" y ver si es uniforme; si lo es se resuelve por el método de Newton hacia Atrás ó Lagrange.

Ejemplo.- Obtener g(x) para x = 3.

x_i	y_i
1.7	0.35
2.4	0.87
3.1	1.03

	x_i	y_i	
	x_1 1.7	y_1 0.35	
x = 3	x_2 2.4	y_2 0.87	g(x)
	x_3 3.1	y_3 1.03	

$h = | x_{i+1} - x_i |$

$h_1 = | 2.4 - 1.7 | = | x_2 - x_1 | = 0.7$
$h_2 = | 3.1 - 2.4 | = | x_3 - x_2 | = 0.7$

Los intervalos son uniformes

x_i	y_i	$\Delta' f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
x_1 1.7	y_1 0.35	$\Delta'_1 = y_2 - y_1$ $= 0.87 - 0.35$ $= 0.52$	$\Delta^2_1 = \Delta'_2 - \Delta'_1$ $= 0.16 - 0.52$ $= -0.36$
x_2 2.4	y_2 0.87	$\Delta'_2 = y_3 - y_2$ $= 1.03 - 0.87$ $= 0.16$	
x_3 3.1	y_3 1.03		

$s = \frac{x - x_i}{h}$ $\qquad s = \frac{3 - 1.7}{0.7}$ $\qquad \boxed{s = 1.857142857}$

$\binom{s}{0} = 1 \qquad \binom{s}{1} = s = 1.857142875$

$g(x) = y_1 \binom{s}{0} + \Delta'_1 \binom{s}{1} + \Delta^2{}_1 \left[\frac{s(s-1)}{2!}\right]$

$g(x) = 0.35(1) + (0.52)(1.857142857) + (-0.36)\left[\frac{(1.857142857)(1.857142857-1)}{2!}\right]$

$\boxed{g(x) = 1.029183673}$

Nota: g(x) se encuentra entre los valores 0.87 y 1.03 con respecto a "y".

Newton hacia atrás

Requiere que los intervalos sean uniformes para que no exista mucha discrepancia en los valores.

Existen dos cambios con respecto al tema anterior.

$$\nabla^{k-1} f(x_{i+1}) = \nabla^{k} f(x_{i+1}) - \nabla^{k} f(x_i)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \nabla^{k} f(x_i) \prod_{j=0}^{k} \frac{(s+j)}{(j+1)!}$$

Factor binomial "s".

Es una coordenada local.

Siempre negativo.

Los coeficientes binomiales están dados por:

$$\binom{s}{0} = 1 \qquad \binom{s}{1} = s \qquad \binom{s}{2} = \frac{s(s+1)}{2!}$$

$$s = \frac{x - x_i}{h}$$

$$g(x) = y_i \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} + \nabla' f(x_i) \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} + \nabla^{2} f(x_i) \left(\frac{s\,(s+1)}{2!} \right) + \ldots\ldots$$

X_i Es el último número que se interpola.

Nota. Obtener "h" y ver si es uniforme; si lo es se resuelve también por el método de Newton hacia Adelante ó Lagrange.

Ejemplo.- Obtener g(x) para x = 3

x_i	y_i
1.7	0.35
2.4	0.87
3.1	1.03

$$x = 3 \quad \left\{ \begin{array}{ll} & x_i \\ x_1 & 1.7 \\ x_2 & 2.4 \\ x_3 & 3.1 \end{array} \right. \qquad \left. \begin{array}{ll} & y_i \\ y_1 & 0.35 \\ y_2 & 0.87 \\ y_3 & 1.03 \end{array} \right\} \ g(x)$$

$$h = | x_{i+1} - x_i |$$

$$h_1 = | x_2 - x_1 | = | 2.4 - 1.7 | = 0.7$$
$$h_2 = | x_3 - x_2 | = | 3.1 - 2.4 | = 0.7$$

$\boxed{\text{Los intervalos son uniformes}}$

x_i	y_i	$\nabla' f(x_i)$	$\nabla^2 f(x_i)$
x_1 1.7	y_1 0.35		
x_2 2.4	y_2 0.87	$\nabla'_1 = y_2 - y_1$ $= 0.87 - 0.35$ $= 0.52$	
x_3 3.1	y_3 1.03	$\nabla'_2 = y_3 - y_2$ $= 1.03 - 0.87$ $= 0.16$	$\nabla^2_1 = \nabla'_2 - \nabla'_1$ $= 0.16 - 0.52$ $= -0.36$

$$s = \frac{x - x_i}{h} \qquad s = \frac{3 - 3.1}{0.7} \qquad \boxed{s = -0.142857142}$$

$$\binom{s}{0} = 1 \qquad \binom{s}{1} = s = -0.142857142$$

$$g(x) = y_3 \binom{s}{0} + \nabla'_1 \binom{s}{1} + \nabla^2{}_1 \left(\frac{s(s+1)}{2!} \right)$$

$$g(x) = 1.03(1) + (0.16)(-0.142857142) + (-0.36) \left[\frac{(-0.142857142)(-0.142857142 + 1)}{2!} \right]$$

$$\boxed{g(x) = 1.029183673}$$

Nota: g(x) se encuentra entre los valores 0.87 y 1.03 con respecto a ”y”.

OZ