

Euler Modificado

Características:

1. Es más exacto que el método Euler hacia Adelante.
2. Su estabilidad es excelente.
3. Se obtiene aplicando la regla trapezoidal para integrar.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1}) \right]$$

$$y' = y_0 + \frac{h}{2} \left[f(y_0, t_0) + f(y_1, t_1) \right]$$

Ejemplo.

$$3y' - 5yt + 1 = 0 \quad y_0 = 1.2 \quad h = 0.2 \quad y_1 = 2$$

Despejar y'

$$y' = \frac{5yt - 1}{3}$$

$$y' = y_0 + \frac{h}{2} \left\{ \left(\frac{5y_0 t_0 - 1}{3} \right) + \left(\frac{5y_1 t_1 - 1}{3} \right) \right\}$$

Considerar $t_0 = 0$ y $t_1 = t_0 + h = 0 + 0.2$ entonces $t_1 = 0.2$

$$y' = 1.2 + \left(\frac{0.2}{2} \right) \left\{ \left(\frac{5(1.2)(0) - 1}{3} \right) + \left(\frac{5(2)(0.2) - 1}{3} \right) \right\}$$

$$y' = 1.2 + [0.1] [-0.333333333333 + 0.333333333333]$$

$$y' = 1.2 + 0.1 (0)$$

Para obtener y''

$$t_0 = 0.2$$

$$y' = 1.2$$

considerar $t_0 = t_1 = 0.2$ y
 $t_1 = t_0 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$

$$t_1 = 0.4$$

$$y_0 = y_1 = 2 \quad y_1 = y' = 1.2 \quad h = 0.2$$

Runge – Kutta de 2º orden

Se tienen dos pasos de iteración.

$$\begin{aligned}k_1 &= h f(y_n, t_n) \\k_2 &= h f(y_n + k_1, t_n + h) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)\end{aligned}$$

k.- son las relaciones de recurrencia.

Entonces:

k_1 aparece en la ecuación de k_2
 k_2 en la ecuación de k_3

Siendo, cada k una evolución funcional por lo cual los métodos Runge – Kutta son más eficientes debido a esta recurrencia.

$$\text{Ejemplo } y' - 5yt + 1 = 0 \quad y_0 = 2 \quad h = 0.2$$

Despejar: y'

$$y' = 5yt - 1 \quad t_0 = 0$$

$$k_1 = h f(y_n, t_n)$$

$$k_1 = 0.2 \left[5(2)(0) - 1 \right]$$

$$k_1 = -0.2$$

$$k_2 = h f(y_n + k_1, t_n + h)$$

$$k_2 = 0.2 \left\{ \left[5(2 + (-0.2))(0 + 0.2) \right] - 1 \right\}$$

$$k_2 = 0.2 \left\{ \left[5(1.8)(0.2) \right] - 1 \right\}$$

$$k_2 = 0.16$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

$$y_1 = 2 + \frac{1}{2}(-0.2 + 0.16)$$

$$y_1 = 1.98$$

Para obtener y_2
considerar $t_1 = t_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$ $t_1 = 0.2$
 $y_0 = y_1 = 1.98 \quad h = 0.2$

Runge-Kutta de 3er. Orden

$$\begin{aligned}k_1 &= h f(y_n, t_n) \\k_2 &= h f(y_n + k_1/2, t_n + h/2) \\k_3 &= h f(y_n - k_1 + 2 k_2, t_n + h) \\y_{n+1} &= y_n + 1/6 (k_1 + 4k_2 + k_3)\end{aligned}$$

Ejemplo.

$$y' - 5yt + 1 = 0 \quad y_0 = 2 \quad h = 0.2$$

Encontrar: $k_1, k_2, k_3, y_1, \text{ así como } y_2$

Runge – Kutta de 4to. Orden

Utiliza múltiples estimaciones de la pendiente y así se obtiene un promedio de la misma en el intervalo más exacto.

En este caso k representa la pendiente.

Método Runge – Kutta de 4to. Orden por 1/3 de Simpson.

$$k_1 = h f(y_n, t_n)$$

$$k_2 = h f(y_n + k_1/2, t_n + h/2)$$

$$k_3 = h f(y_n + k_2/2, t_n + h/2)$$

$$k_4 = h f(y_n + k_3, t_n + h)$$

$$y_{n+1} = y_n + 1/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\text{Ejemplo } y' - 5yt + 1 = 0 \quad y_0 = 2 \quad h = 0.2$$

Despejar: y'

$$y' = 5yt - 1 \quad t_0 = 0$$

$$k_1 = h f(y_n, t_n)$$

$$k_1 = 0.2 \left[5(2)(0) - 1 \right]$$

$$k_1 = -0.2$$

$$k_2 = h f(y_n + k_1/2, t_n + h/2)$$

$$k_2 = (0.2) \left\{ \left[5 \left(2 + (-0.2/2) \right) (0 + 0.2/2) \right] - 1 \right\}$$

$$k_2 = (0.2) \left\{ \left[5 (1.9) (0.1) \right] - 1 \right\}$$

$$k_2 = -0.01$$

$$k_3 = h f(y_n + k_2/2, t_n + h/2)$$

$$k_3 = (0.2) \left\{ 5 \left[2 + (-0.01/2) \right] (0 + 0.2/2) \right\} - 1$$

$$k_3 = (0.2) \left\{ 5 (1.995) (0.1) \right\} - 1$$

$$K_3 = -0.0005$$

$$y' = 5yt - 1$$

$$k_4 = h f(y_n + k_3, t_n + h)$$

$$K_4 = (0.2) \left\{ 5 \left[2 + (-0.0005) \right] (0 + 0.2) \right\} - 1$$

$$K_4 = (0.2) \left\{ 5 (1.9995) (0.2) \right\} - 1$$

$$K_4 = 0.1999$$

$$y_{n+1} = y_n + 1/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_1 = 2 + 1/6 \left\{ -0.2 + 2 (-0.01) + 2 (-0.0005) + 0.1999 \right\}$$

$$y_1 = 2 + 1/6(-0.0211)$$

$$y_1 = 2 - 0.003516666$$

$$y_1 = 1.996483333$$

Calcular y_2

Runge - Kutta de 4to. Orden por 3/8 de Simpson

$$k_1 = h f(y_n, t_n)$$

$$k_2 = h f(y_n + k_1/3, t_n + h/3)$$

$$k_3 = h f(y_n + k_1/3 + k_2/3, t_n + 2/3h)$$

$$k_4 = h f(y_n + k_1 - k_2 + k_3, t_n + h)$$

$$y_{n+1} = y_n + 1/8 (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

Ejemplo.

$$y' - 5yt + 1 = 0 \quad y_0 = 2 \quad h = 0.2$$

Encontrar: $k_1, k_2, k_3, k_4, y_1, y_2$

Runge – Kutta de Orden Superior

La mayor exactitud se ve afectada por un excesivo trabajo computacional así como de complejidad.

$$k_1 = h V_n$$

$$m_1 = h [\pm a V_n \pm b U_n, q_n]$$

$$k_2 = h (V_n + m_1)$$

$$m_2 = h [\pm a (V_n + m_1) \pm b (U_n + k_1), q_n + h]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

$$y'_n = y'_n + \frac{1}{2} (m_1 + m_2)$$

$$V_n = y' \quad U_n = y \quad q_n = t$$

Ejemplo.

$$y'' - y't - y = 0 \quad y_0 = 1 \quad h = 0.5 \quad y'_0 = 2$$

Entonces

$$y'' = y't + y$$

Por lo tanto.

$$a = 1, b = 1, V_n = y'_0 = 2, U_n = y_0 = 1, q_n = t = 0$$

$$k_1 = h (y'_0) \quad k_1 = h (V_n)$$

$$k_1 = 0.5 (2)$$

$$\boxed{k_1 = 1}$$

$$m_1 = h \left\{ y't + y \right\} \quad m_1 = h \left\{ V_n q_n + U_n \right\}$$

$$m_1 = 0.5 \left\{ (2)(0) + 1 \right\}$$

$$\boxed{m_1 = 0.5}$$

$$k_2 = h (y'_0 + m_1) \quad k_2 = h (V_n + m_1)$$

$$k_2 = 0.5 \left[2 + (0.5) \right] = 0.5 (2.5)$$

$$\boxed{k_2 = 1.25}$$

$$m_2 = h \left\{ a (y'_0 + m_1) (t + h) + b (y_0 + k_1) \right\}$$

$$m_2 = h \left\{ a (V_n + m_1) (q_n + h) + b (U_n + k_1) \right\}$$

$$m_2 = 0.5 \left\{ (1) (2 + 0.5) (0+0.5) + (1) (1 + 1) \right\}$$

$$m_2 = 1.625$$

$$y_1 = y_0 + 1/2 (k_1 + k_2)$$

$$y_1 = U_n + 1/2 (k_1 + k_2)$$

$$y_1 = 1 + 1/2 (1 + 1.25)$$

$$y_1 = 2.125$$

$$y'_1 = y'_0 + 1/2 (m_1 + m_2)$$

$$y'_1 = V_n + 1/2 (m_1 + m_2)$$

$$y'_1 = 2 + 1/2 ((0.5) + 1.625)$$

$$y'_1 = 3.0625$$

Encontrar: y_2, y'_2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Son ecuaciones compuestas por: una función desconocida y derivadas.

La clasificación de las mismas en los problemas depende:

- **Condiciones iniciales.** Los problemas con condiciones iniciales estos dependen del tiempo, es decir, sus condiciones iniciales se basan en el tiempo inicial para la solución.
- **Condiciones en la frontera.** Son diferentes los métodos numéricos en forma significativa de los que se usa para problemas con condiciones iniciales.

Aquí solo se analizan los problemas con condiciones iniciales por medio de métodos de solución numérica.

También se clasifican de acuerdo a su orden:

- ✓ (EDO) de primer orden
- ✓ (EDO) de segundo orden

Entonces una ecuación de n-ésimo orden tiene una n-ésima derivada.

Un sistema de ecuaciones de primer orden es la reducción de las ecuaciones de orden superior.

Euler

Por sencillo se considera óptimo para una rápida programación.

Entre más complicado sea el sistema de ecuaciones se recomienda el método Euler, frecuentemente se le conoce como Cauchy ó punto pendiente.

En él se basan para la solución de ecuaciones parciales parabólicas e hiperbólicas que son muy complicadas.

Tiene tres versiones Euler:

- Hacia Adelante
- Modificado
- Hacia Atrás

Runge – Kutta

Se utiliza para resolver problemas de valor inicial (PVI) sin utilizar el cálculo de derivadas de orden superior.

Obtienen la exactitud de la serie Taylor, siendo el resultado basado en un número finito de términos de la misma.

Su precisión se incrementa al utilizar puntos intermedios en cada intervalo.

Al ser la precisión más exacta, los errores disminuyen al reducir “h” en un corto tiempo.

Son varios métodos iterativos implícitos y explícitos, para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En estos métodos se llama etapas a las sucesivas evaluaciones de la función “f”.

El número de etapas es la cantidad de veces que la función es evaluada en cada iteración.

Se prefieren el menor número posible de etapas para que al evaluar la función sea mínimo el costo computacional.

Método **Runge – Kutta**:

- 2º orden
- 3er. Orden
- 4to. Orden por:
 - 1/3 de Simpson
 - 3/8 de Simpson
- Orden Superior

Constantes para las fórmulas Cerradas de Newton – Cotes

| n | α | i = 0 | i = 1 | i = 2 | i = 3 | i = 4 | i = 5 | i = 6 | i = 7 | i = 8 | i = 9 | i = 10 |
|----|----------|-------|--------|--------|--------|---------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 1/2 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1/3 | 1 | 4 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 3/8 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 2/45 | 7 | 32 | 12 | 32 | 7 | | | | | | |
| 5 | 5/288 | 19 | 75 | 50 | 50 | 75 | 19 | | | | | |
| 6 | 1/140 | 41 | 216 | 27 | 272 | 27 | 216 | 41 | | | | |
| 7 | 7/17280 | 751 | 3577 | 1323 | 2989 | 2989 | 1323 | 3577 | 751 | | | |
| 8 | 14/14175 | 989 | 5888 | -928 | 10946 | -4540 | 10946 | -928 | 5888 | 989 | | |
| 9 | 9/89600 | 2857 | 15741 | 1080 | 19344 | 5788 | 5788 | 19344 | 1080 | 15741 | 2857 | |
| 10 | 5/299376 | 16067 | 106300 | -48525 | 272400 | -260550 | 427368 | -260550 | 272400 | -48525 | 106300 | 16067 |

Constantes para las fórmulas Abiertas de Newton – Cotes

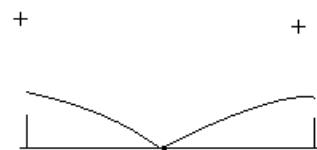
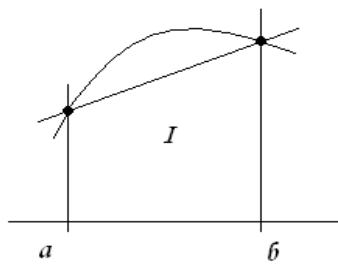
| n | α | i = 0 | i = 1 | i = 2 | i = 3 | i = 4 | i = 5 | i = 6 | i = 7 | i = 8 |
|---|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 3/2 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | | |
| 2 | 4/3 | 0 | 2 | -1 | 2 | 0 | | | | |
| 3 | 5/24 | 0 | 11 | 1 | 1 | 11 | 0 | | | |
| 4 | 6/20 | 0 | 11 | -14 | 26 | -14 | 11 | 0 | | |
| 5 | 7/1440 | 0 | 611 | -453 | 562 | 562 | -453 | 611 | 0 | |
| 6 | 8/945 | 0 | 460 | -954 | 2196 | -2459 | 2196 | -954 | 460 | 0 |

Integración

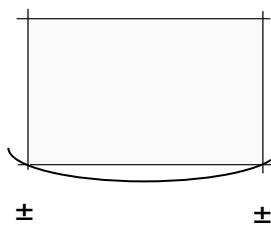
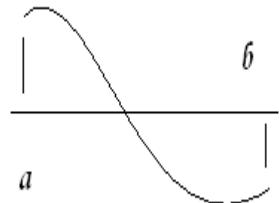
Considerando la derivada como media de cambio puntual o instantánea y la suma de los mismos como la integral.

Las siguientes técnicas son fundamentales en actividades de ingeniería o ciencias pues con ellas se pueden integrar funciones analíticas y complejas.

$$\int_a^b f(x) dx$$



Dada por el área bajo
la curva de $f(x)$



Método:

- Regla Trapezoidal
- Regla de 1/3 Simpson
- Regla de 3/8 Simpson
- Newton – Cotes Cerradas
- Newton – Cotes Abiertas

Ejercicio.-

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx$$

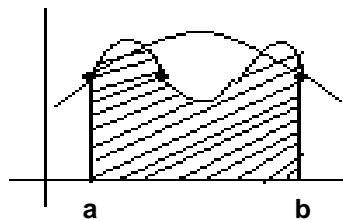
Regla de 1/3 Simpson

Resulta al realizar la integración de un polinomio de interpolación de 2º grado.

Es otra forma de obtener la estimación exacta de la integral usando polinomios de grado superior para la unión de puntos.

Consiste en considerar el área bajo una parábola que une puntos. Se puede aplicar a un número par de intervalos.

$$I = \frac{h}{3} \left\{ f(a) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + 2 \sum_{i=2}^{n-2} f(a + ih) + f(b) \right\}$$



$$h = \frac{b - a}{n}$$

n.- siempre par

Ejemplo.

$$\int_0^1 (1 - x^2) dx \quad n=4$$

Solución:

$$a = 0 \text{ y } b = 1$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$h = \frac{1}{4}$$

Se incrementa $x = a + ih$

$$I = \frac{1/4}{3} \left\{ f(x=a) + 4f(x=a+h) + 2f(x=a+2h) + 4f(x=a+3h) + f(x=b) \right\}$$

Considerar la función de la integral: $1 - x^2$

$$I = \frac{1/4}{3} \left\{ [1 - (0)^2] + 4[1 - (1/4)^2] + 2[1 - (2/4)^2] + 4[1 - (3/4)^2] + [1 - (1)^2] \right\}$$

$$I = \frac{1/4}{3} \left\{ 1 + 4\left(\frac{15}{16}\right) + 2\left(\frac{12}{16}\right) + 4\left(\frac{7}{16}\right) + 0 \right\}$$

$$I = \frac{1/4}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{60}{16}\right) + \left(\frac{24}{16}\right) + \left(\frac{28}{16}\right) + 0 \right\}$$

$$I = \frac{1}{12} [8]$$

$$I = 0.6666666666666667$$

Regla de 3/8 Simpson

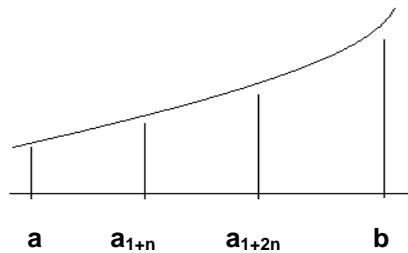
Se ajusta el polinomio de Lagrange de 3er. grado a cuatro puntos e integrar.

Como “h” se multiplica por 3/8 recibe el nombre de 3/8 de Simpson, por lo cual los puntos tienen un peso de tres octavos.

Es más exacta que la regla de 1/3 de Simpson. Cuando el número de segmentos es impar es muy útil.

Se va aplicar esta regla cuando es un número de intervalos múltiplos de tres.

$$I = \frac{3}{8} h \left(f(a) + 3 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + f(b) \right)$$



$$h = \frac{b - a}{n}$$

n.- siempre impar

Ejemplo.

$$\int_0^1 (1 - x^2) dx \quad n=4 \text{ Resolver con otro valor de } n \text{ pues especifica que debe ser impar.}$$

Solución:

$$a = 0 \text{ y } b = 1$$

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$h = ?$$

Se incrementa $x = a + ih$

Considerar la función de la integral: $1 - x^2$

$$I = ?$$

Newton-Cotes Cerradas

$$I = \sum_{i=0}^n w_i f(a + ih) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Constantes para las fórmulas Cerradas de Newton – Cotes

| n | α | i = 0 | i = 1 | i = 2 | i = 3 | i = 4 | i = 5 | i = 6 | i = 7 | i = 8 | i = 9 | i = 10 |
|----|----------|-------|--------|--------|--------|---------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 1/2 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1/3 | 1 | 4 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 3/8 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 2/45 | 7 | 32 | 12 | 32 | 7 | | | | | | |
| 5 | 5/288 | 19 | 75 | 50 | 50 | 75 | 19 | | | | | |
| 6 | 1/140 | 41 | 216 | 27 | 272 | 27 | 216 | 41 | | | | |
| 7 | 7/17280 | 751 | 3577 | 1323 | 2989 | 2989 | 1323 | 3577 | 751 | | | |
| 8 | 14/14175 | 989 | 5888 | -928 | 10946 | -4540 | 10946 | -928 | 5888 | 989 | | |
| 9 | 9/89600 | 2857 | 15741 | 1080 | 19344 | 5788 | 5788 | 19344 | 1080 | 15741 | 2857 | |
| 10 | 5/299376 | 16067 | 106300 | -48525 | 272400 | -260550 | 427368 | -260550 | 272400 | -48525 | 106300 | 16067 |

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx \quad n = 4$$

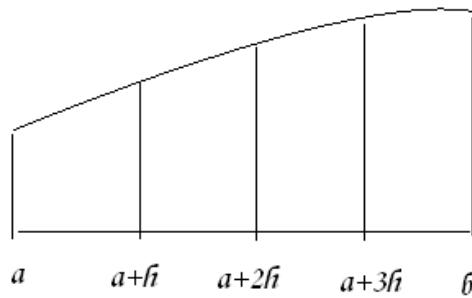
Regla trapezoidal

Es un método de integración numérica sencilla y óptima para la solución de integrales impropias.

Corresponde al caso donde el polinomio es de primer grado.

Para obtener una precisión aceptable requiere de un gran número de subintervalos.

$$I = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^n f(a + ih) + f(b) \right]$$



$$h = \frac{b - a}{n}$$

(Siempre van a ser positivos los valores)

Ejemplo.

$$\int_0^1 (1 - x^2) dx \quad n=4$$

Solución:

$$a = 0 \text{ y } b = 1$$

$$I = \frac{b-a}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + f(b) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$h = \frac{1}{4}$$

Se incrementa $x = a + ih$

$$I = \frac{1/4}{2} \left\{ f(x=0) + 2 \left(f(x=1/4) + f(x=2/4) + f(x=3/4) \right) + f(x=1) \right\}$$

Considerar la función de la integral: $1 - x^2$

$$I = \frac{1/4}{2} \left\{ (1 - (0)^2) + 2 \left([1 - (1/4)^2] + [1 - (2/4)^2] + [1 - (3/4)^2] \right) + (1 - (1)^2) \right\}$$

$$I = \frac{1/4}{2} \left\{ 1 + 2 \left[\frac{15}{16} + \frac{12}{16} + \frac{7}{16} \right] + 0 \right\}$$

$$I = \frac{1/4}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{30}{16} \right) + \left(\frac{24}{16} \right) + \left(\frac{14}{16} \right) + 0 \right\}$$

$$I = \frac{1}{8} [5.25]$$

$$I = 0.65625$$

Newton–Cotes Cerradas y Abiertas

Los métodos de integración numérica que se obtiene al integrar las fórmulas de interpolación de Newton reciben el nombre de fórmulas de Newton–Cotes.

La regla del trapecio o trapezoidal y las dos reglas de Simpson son casos de las fórmulas de Newton–Cotes, las cuales se dividen en fórmulas cerradas y abiertas.

La ecuación recibe el nombre de fórmula cerrada, debido a que el dominio de integración está cerrado por el primer y último dato.

$$I = \sum_{i=0}^n w_i f(a + ih) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Las fórmulas abiertas de Newton–Cotes se obtienen al extender la integración hasta un intervalo a la izquierda del primer dato y un intervalo a la derecha del último dato.

$$I = \sum_{i=0}^{n+2} w_i f(a + ih) \quad h = \frac{b-a}{n+2}$$

Ventajas de las fórmulas

Utilizan puntos con igual operación. Se dispone de fórmulas abiertas y cerradas.

Desventajas.

Las fórmulas de orden superior no necesariamente son precisas.

Ejemplo.- Newton-Cotes (Abiertas).

Ejemplo.

$$\int_0^1 (1 - x^2) dx \quad n=4$$

$$I = h \sum_{i=0}^{n+2} w_i f(a + ih) \quad h = \frac{b-a}{n+2}$$

Solución:

$$a = 0 \text{ y } b = 1$$

$$h = \frac{b-a}{n+2} = \frac{1-0}{4+2} = \frac{1}{6}$$

$$h = \frac{1}{6}$$

Se incrementa $x = a + ih$

$$I = \left[\frac{6}{20} \right] \left(\frac{1}{6} \right) \left\{ (0) f(x=0) + (11) f(x=1/6) + (-14) f(x=2/6) + (26) f(x=3/6) \right. \\ \left. + (-14) f(x=4/6) + (11) f(x=5/6) + (0) f(x=1) \right\}$$

$$I = \left[\frac{1}{20} \right] \left\{ (0) [1 - (0)^2] + (11) [1 - (1/6)^2] + (-14) [1 - (2/6)^2] + (26) [1 - (3/6)^2] \right. \\ \left. + (-14) [1 - (4/6)^2] + (11) [1 - (5/6)^2] + (0) [1 - (1)^2] \right\}$$

$$I = \left[\frac{1}{20} \right] \left\{ (0)(1) + (11)(35/36) + (-14)(32/36) + (26)(27/36) \right. \\ \left. + (-14)(20/36) + (11)(11/36) + (0)(0) \right\}$$

$$I = \left[\frac{1}{20} \right] \left\{ 0 + \frac{385}{36} - \frac{448}{36} + \frac{702}{36} - \frac{280}{36} + \frac{121}{36} + 0 \right\}$$

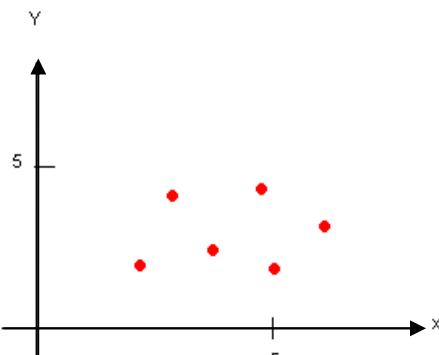
$$I = \left[\frac{1}{20} \right] \left(\frac{480}{36} \right) = \frac{480}{720}$$

$$I = 0.6666666666666667$$

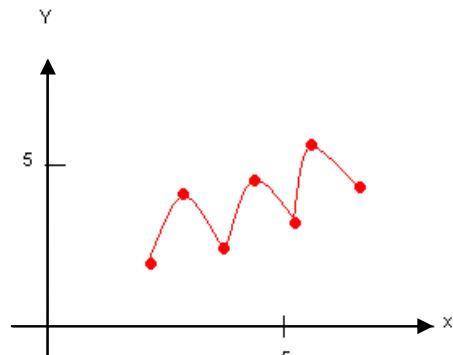
Nota. Resolver este mismo ejemplo por el método de Newton Cotes (cerradas).

Mínimos Cuadrados

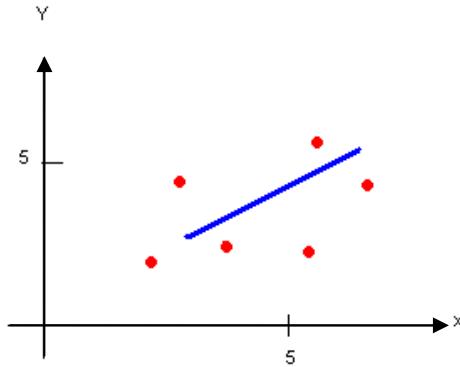
Se utiliza para cuando los datos tienen errores sustanciales.



Datos que muestran un error significativo



Ajuste polinomial oscilando más allá del rango de datos.



Resultados más satisfactorios mediante el ajuste de Polinomios.

La estrategia apropiada es obtener una función aproximada con tendencia general o ajuste a la forma de datos.

Sin implicar todos los puntos hay que considerar un criterio para establecer una base para el ajuste.

Esto se puede lograr por medio de una técnica de Mínimos Cuadrados, es decir, se obtiene una curva que minimiza la dispersión entre la curva y los puntos.

Ajuste a:

- Línea Recta
- Cuadrática
- Cúbica
- Lineal con Función
- Cuadrática con Función

Cuadrática

$$\text{Ecuación } g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 x & a_2 x^2 & g(x) \\ \left[\begin{array}{cccc} n & \sum x & \sum x^2 & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum xy \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^2 y \end{array} \right] \end{array}$$

Cúbica

$$\text{Ecuación } g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 x & a_2 x^2 & a_3 x^3 & g(x) \\ \left[\begin{array}{ccccc} n & \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum xy \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 & \sum x^2 y \\ \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 & \sum x^6 & \sum x^3 y \end{array} \right] \end{array}$$

Lineal con Función

Ecuación $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 [función(x)]$

Función (x) - {

- e^x
- $\sin(x)$
- $\cos(x)$
- $\tan(x)$
- $\ln(x)$, etc.

| a_0 | $a_1 x$ | $a_2 f(x)$ | $g(x)$ |
|-------------|---------------|---------------|---------------|
| n | $\sum x$ | $\sum f(x)$ | $\sum y$ |
| $\sum x$ | $\sum x^2$ | $\sum x f(x)$ | $\sum x y$ |
| $\sum f(x)$ | $\sum x f(x)$ | $\sum f(x)^2$ | $\sum y f(x)$ |

Cuadrática con Función

Ecuación $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 [función(x)]$

Función (x) - {

- e^x
- $\sin(x)$
- $\cos(x)$
- $\tan(x)$
- $\ln(x)$, etc.

| a_0 | $a_1 x$ | $a_2 x^2$ | $a_3 f(x)$ | $g(x)$ |
|-------------|---------------|-----------------|-----------------|---------------|
| n | $\sum x$ | $\sum x^2$ | $\sum f(x)$ | $\sum y$ |
| $\sum x$ | $\sum x^2$ | $\sum x^3$ | $\sum x f(x)$ | $\sum x y$ |
| $\sum x^2$ | $\sum x^3$ | $\sum x^4$ | $\sum x^2 f(x)$ | $\sum x^2 y$ |
| $\sum f(x)$ | $\sum x f(x)$ | $\sum x^2 f(x)$ | $\sum f(x)^2$ | $\sum y f(x)$ |

Línea Recta

Ajustar una línea recta o varias observaciones por puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
 $\dots \dots (X_n, y_n)$

$$\text{Ecuación: } g(x) = a_0 + a_1 x$$

Donde a_0 y a_1 son coeficientes representativos de la intersección de la pendiente y el eje x.

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 x & g(x) \\ \left[\begin{array}{ccc} n & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum xy \end{array} \right] \end{array}$$

n.- es el número de valores dados a "x".

Ejemplo.

| x | y |
|-------------|------------|
| 1.1 | 2.5 |
| 1.9 | 2.7 |
| 2.4 | 3.7 |
| 4.8 | 5.2 |
| 5.1 | 6.0 |
| 10.5 | 8.3 |

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 x & g(x) \\ \left[\begin{array}{ccc} n & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum xy \end{array} \right] \end{array}$$

n.- es el número de valores dados a x

$$n = 6 \quad \left[\begin{array}{ccccc} x & y & x^2 & xy & \\ \hline 1.1 & 2.5 & (1.1)^2 = 1.21 & (1.1)(2.5) = 2.75 & \\ 1.9 & 2.7 & (1.9)^2 = 3.61 & (1.9)(2.7) = 5.13 & \\ 2.4 & 3.7 & (2.4)^2 = 5.76 & (2.4)(3.7) = 8.88 & \\ 4.8 & 5.2 & (4.8)^2 = 23.04 & (4.8)(5.2) = 24.96 & \\ 5.1 & 6.0 & (5.1)^2 = 26.01 & (5.1)(6.0) = 30.6 & \\ \hline \underline{10.5} & \underline{8.3} & \underline{(10.5)^2 = 110.25} & \underline{(10.5)(8.3) = 87.15} & \\ \hline \sum x = 25.8 & \sum y = 28.4 & \sum x^2 = 169.88 & \sum xy = 159.47 & \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_0 & a_1 x & g(x) \\ n & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum xy \end{array} \right\}$$

Ecuaciones:

$$1) 6 a_0 + 25.8 a_1 = 28.4$$

$$2) 25.8 a_0 + 169.88 a_1 = 159.47$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} 6 & 25.8 & 28.4 \\ 25.8 & 169.88 & 159.47 \end{array} \right\}$$

Multiplicar la ecuación 1 por el factor de - 4.3 y se obtiene la siguiente ecuación 3.

$$3) - 25.8 a_0 - 110.94 a_1 = -122.12$$

Sumar las ecuaciones 2 y 3.

$$- 25.8 a_0 - 110.94 a_1 = -122.12$$

$$\underline{25.8 a_0 + 169.88 a_1 = 159.47}$$

$$0 a_0 + 58.94 a_1 = 37.35$$

$$a_1 = \frac{37.35}{58.94}$$

$$a_1 = 0.633695283$$

Entonces en la ecuación 1, se sustituye el valor de a_1 obtenido anteriormente para encontrar el de a_0 .

$$6a_0 + 25.8 a_1 = 28.4$$

$$6a_0 + 25.8 (0.633695283) = 28.4$$

$$6a_0 + 16.34933831 = 28.4$$

$$6a_0 = 28.4 - 16.4018663$$

$$6a_0 = 12.05066169$$

$$a_0 = 12.05066169 / 6$$

$$a_0 = 2.008443615$$

Encontrar $g(x)$ con los valores de a_0 , y a_1 así como con cada valor de x .

$$a_0 + a_1 x = g(x)$$

$$2.008443615 + 0.633695283 (1.1) = 2.705508427$$

$$2.008443615 + 0.633695283 (1.9) = 3.212464653$$

$$2.008443615 + 0.633695283 (2.4) = 3.529312295$$

$$2.008443615 + 0.633695283 (4.8) = 5.050180975$$

$$2.008443615 + 0.633695283 (5.1) = 5.240289560$$

$$2.008443615 + 0.633695283 (10.5) = 8.662244090$$

Por último se gráfica en el mismo plano con las siguientes coordenadas:

- 1) [x, y]**
- 2) [x, g(x)]**

Para analizar el ajuste de la función original con respecto a la obtenida con la aplicación del método de Línea Recta.