
Proyecto Herramientas computacionales: Caracterización del Caos en la Vía Láctea y en Andrómeda

C.A. Enciso¹, M.V. Vega², A.D. Antibar³

aantibarg@unal.edu.co, mavegac@unal.edu.co, cencisom@unal.edu.co

¹ *Herramientas Computacionales, Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, Bogotá, Colombia.*

Recibido: 05/2023

Resumen

En el presente trabajo se abordó la teoría del caos en sistemas dinámicos astrofísicos por medio de las coordenadas de sus órbitas a lo largo del tiempo, se determinó cuantitativamente una aproximación para la presencia del caos en galaxias del grupo local tales como la Vía Láctea y Andrómeda. Se tuvo como fin calcular el índice GALI2 para concluir si en la región de datos tratados existe o no un comportamiento caótico. Para realizar lo antes mencionado, por medio del método iterativo Runge-Kutta de 4to orden, fue posible obtener la evolución del GALI2 en el tiempo, denotando una baja caoticidad.

1. Introducción

La teoría del caos se refiere al estudio de sistemas complejos y sistemas dinámicos no lineales que se encuentran en campos como las matemáticas, la física y otras ciencias, como la biología y la meteorología. Estos sistemas son altamente sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Incluso pequeños cambios en estas condiciones pueden tener un impacto significativo en su comportamiento futuro, lo que dificulta la predicción a largo plazo. Aunque estos sistemas son deterministas en su naturaleza, lo que significa que su comportamiento puede ser completamente determinado si se conocen las condiciones iniciales, exhiben un comportamiento caótico.

Un sistema de ecuaciones diferenciales que presenta caos no lo presenta en todas las condiciones iniciales, si se toman dos soluciones que se mantienen inicialmente cercanas a una distancia finita en relación a un atractor del sistema dinámico (una de las soluciones estables de las ecuaciones diferenciales), con el tiempo, estas soluciones se moverán alrededor del atractor de manera irregular. Eventualmente, las soluciones dejarán de ser cercanas entre sí, pero seguirán siendo cualitativamente similares. De esta manera, el sistema permanece en una región de su espacio de estados sin converger hacia el atractor [5].

2. Medida del Caos

2.1. Exponentes de Lyapunov

Nuestro objetivo es disponer de una herramienta que nos ayude a determinar si una órbita asociada a un problema de valor inicial es caótica. Actualmente no hay un consenso global sobre la definición precisa de una órbita caótica, pero todas las alternativas existentes coinciden en que se requiere una alta sensibilidad a las perturbaciones en las condiciones iniciales.

En presencia de caos, dos órbitas asociadas a condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas pueden alejarse exponencialmente rápido en un corto período de tiempo. A menudo, cuando una órbita acotada exhibe esta propiedad de alta sensibilidad a las condiciones iniciales, se considera que es caótica.

Una herramienta que permite estimar este comportamiento es el cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov. Cuando existe al menos un exponente característico de Lyapunov positivo, se concluye que la órbita es caótica. Por esta razón, los exponentes de Lyapunov se utilizan con frecuencia como indicadores de la presencia de caos en un sistema.

2.2. GALI 2

El cálculo del GALI2 (Global Lyapunov Characteristic Indicator 2) utiliza los exponentes de Lyapunov para evaluar la estabilidad o el caos en un sistema dinámico. Para determinar este índice primero se calculan los exponentes de Lyapunov del sistema. Estos exponentes cuantifican la tasa de divergencia de órbitas cercanas en el espacio de fase del sistema [3].

Una vez que se obtienen los exponentes de Lyapunov, se ordenan en forma decreciente. Los exponentes de Lyapunov negativos representan la estabilidad local, mientras que los positivos indican la presencia de caos. El GALI 2 resulta de tomar la relación entre los dos exponentes de Lyapunov más cercanos al origen, es decir, los exponentes más pequeños en magnitud. Se toma el cociente de estos dos exponentes y se eleva al cuadrado.

Como este índice proporciona información sobre la presencia de caos en el sistema. Si el GALI 2 es cercano a cero, indica que las órbitas están cercanas entre sí y el sistema es estable. Por otro lado, si el valor obtenido es mayor que cero, sugiere que las órbitas se están separando exponencialmente, lo que indica la presencia de caos en el sistema. Ahora bien el índice de GALI 2 se puede calcular de la siguiente manera:

$$GALI2 = \log(|\vec{v}_t|) / \log(dt) \quad (1)$$

En donde $|\vec{v}_t|$ es el vector tangente, que se define de la siguiente manera:

$$\vec{v}_t = \frac{t_p - t}{\epsilon} \quad (2)$$

En donde t_p es la trayectoria perturbada y t es la trayectoria sin perturbar.

Como son galaxias espirales barradas se espera que el logaritmo del índice de GALI 2 con respecto al tiempo tenga el comportamiento mostrado en la siguiente figura:

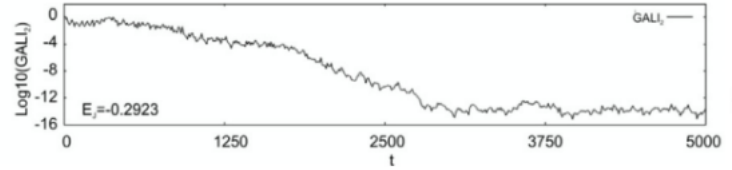


Figura 1: $\log(GALI2)$ en función del tiempo

3. Metodología

Para el desarrollo de este trabajo, se extrajeron los datos recolectados por el telescopio tomados en 2016.[3]. Para buscar los datos correspondientes a la vía láctea se utilizó la coordenadas celestes del centro de la galaxia, en donde para RA es $RA = 17h45m40,04s$ y $DEC = -29^{\circ}00m28,1s$ y el radio máximo que se nos permitió escoger fue de 3900 arco segundos. De igual manera, para los datos de Andrómeda sólo se pudieron escoger datos dentro de ese mismo radio. Esto puede ser un limitante ya que el radio estimado de la vía láctea es de aproximadamente 883626.15 arco segundos. Para poder trabajar

con los datos obtenidos se realizan las respectivas conversiones de unidades, es decir los datos RA y DEC hay que pasarlos a coordenadas cartesianas y los momentos propios también hay que hacer la conversión a momentos lineales para cada una de las coordenadas x,y y z. Asumiendo que la galaxia tenga un movimiento radial en la dirección z, la velocidad radial va a ser la velocidad en z definida de la siguiente manera:

$$v_z = v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3)$$

Ahora como en los datos que se obtuvieron hay valores tipo NAN hay que descartarlos para evitar algún tipo de overflow a la hora de hacer la simulación. Posteriormente, como los datos están en coordenadas celestes, para poder trabajar con ellos hay que convertirlos a coordenadas cartesianas.

Luego, en el artículo "Chaoticity in the vicinity of complex unstable periodic orbits in galactic type potentials"[4], para las galaxias barradas espirales el potencial es la suma de tres potenciales: El potencial de Miyamoto, el potencial del cúmulo de estrellas y el potencial de Halo. Debido a que los datos que se obtuvieron son de una región cercana al centro de la galaxia solo se consideró el potencial del cúmulo, descrito en la ecuación 4.

$$V(x, y, z) = -G \cdot \frac{M_b}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a_b^2}} \quad (4)$$

Donde M_b es la masa del cúmulo, a_b el radio de ese cúmulo y G es la constante gravitacional. En el caso de la vía láctea la masa M_b es aproximadamente igual a $2,0 \cdot 10^{10}$ masas solares y a_b es aproximadamente igual a $2kpc$ [5]. Para Andrómeda estos valores son de $M_b = 2,2 \cdot 10^{10}$ masas solares y $a_b = 1,3kpc$. [2]

Ahora bien, el hamiltoniano del sistema es el siguiente:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) - \Omega(xp_y - yp_x) \quad (5)$$

En donde Ω es la velocidad rotacional. Para la vía láctea tiene un valor de $\Omega = 0,22kpc/s$ y para Andrómeda es de $\Omega = 0,23kpc/s$. [1].

Para calcular las trayectorias utilizamos el método de integración de Rugen-Kutta de cuarto orden, en donde

utilizaremos las ecuaciones de movimiento dadas en el artículo "Chaoticity in the vicinity of complex unstable periodic orbits in galactic type potentials ". [4]

4. Resultados y Análisis

Con el procedimiento mencionado anteriormente, se obtuvo la siguiente gráfica del logaritmo del índice del GALI2 para la vía Láctea.

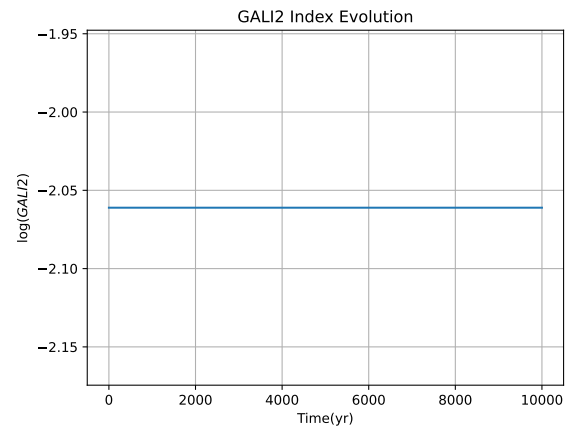


Figura 2: Logaritmo del índice $gali_2$ en función del tiempo para la vía Láctea.

Como se puede observar en un intervalo de diez mil años, el logaritmo de el GALI 2 para los datos tomados de la vía láctea permanece constante, pero este valor es negativo, en este caso fue de $\log(GALI2) = -2,06$. Lo que significa que el valor del GALI 2 está siempre por debajo de 1 lo que quiere decir que las trayectorias de las orbitas convergen, luego el sistema es estable. Sin embargo cabe resaltar que este resultado fue únicamente para una pequeña región de la galaxia y también se necesita de una base de datos de mayor tamaño para tener un resultado más preciso. Por lo tanto, se concluye que el sistema, al menos en el cúmulo de galaxias, no es caótico, ya que no muestra un comportamiento dinámico impredecible y sensible a las condiciones iniciales y a pequeñas perturbaciones.

Haciendo el mismo procedimiento con los datos obtenidos de Andr3meda, se obtuvo la siguiente gr3fica.

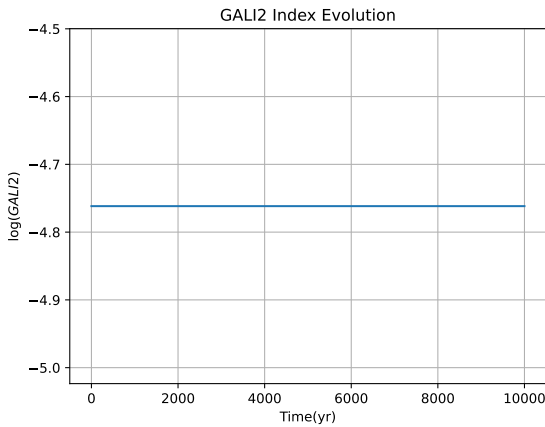


Figura 3: logaritmo del 3ndice de GALI2 con respecto al tiempo

Para el caso de Andr3meda se obtuvo que el logaritmo del coeficiente del GALI 2 fue de $-4,76$, por lo que, de forma an3loga con lo anterior, tampoco presenta un comportamiento ca3tico. De igual manera, debido a la falta de acceso de datos no podemos afirmar que este sea un resultado preciso. Adem3s que solo se pudo estudiar una regi3n muy peque1a de la galaxia por lo que no sabemos si los cuerpos ubicados en los brazos de las espirales tengan un comportamiento ca3tico sensible a las condiciones iniciales y a peque1as perturbaciones.

5. Conclusiones

Al implementar el 3ndice de GALI2 no se observa un comportamiento ca3tico en las galaxias de Andr3meda y la v3a l3ctea, ambas pertenecientes al grupo local. Esto puede ser debido a la falta de datos, por lo que no se obtuvo el resultado que se esperaba, como se muestra en la figura 1. Por lo tanto, para tener un resultado m3s preciso se recomienda utilizar una base de datos m3s grande con el fin de abarcar m3s 3rea de la galaxia y apreciar el efecto que tiene los potenciales del disco y el potencial de Halo.

Es importante tener en cuenta que el GALI2 es una medida global y no proporciona informaci3n detallada sobre la din3mica del sistema. Sin embargo, se utiliza como una herramienta r3pida para detectar la presencia de caos y establecer una indicaci3n cualitativa de la estabilidad o la falta de ella en un sistema din3mico.

Referencias

- [1] Jun. de 2023. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Andromeda_Galaxy.
- [2] URL: <https://www.mpe.mpg.de/6704661/M31>.
- [3] Gaia archive. 2016. URL: <https://gea.esac.esa.int/archive/>.
- [4] P.A Patsis et al. “Chaoticity in the vicinity of complex unstable periodic orbits in galactic type potentials”. En: *Physica D* (oct. de 2021).
- [5] E. Valenti et al. *Stellar density profile and mass of the milky way bulge from VVV Data*. Mar. de 2016. URL: <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2016/03/aa27500-15/aa27500-15.html>.