

FYS2150 Modul 3

BEVEGELSESMOTSTAND:

Friksjon og viskositet i gasser og væsker

C.A. Lütken, A. Read, Department of Physics, University of Oslo (Dated: November 27, 2019)
Revidert Nina Jeppesen Edin (Februar 2020)

Vi undersøker *laminære* og *turbulente* strømninger ved å studere kuler i fritt fall i gasser og væsker med indre friksjon (bevegelsesmotstand). Vi slipper isoporkuler i luft, fra fjerde etasje i et av trappehusene på FI for at de skal få tid til å nå sin *terminalhastighet*. Vi slipper små stålkuler og 3D-printede plastkuler i hhv. olje-fylte og vannfylte rør, hvor vi håper å kunne verifisere *Stoke's lov*, som har viktige anvendelser i mange deler av naturvitenskapen. To appendikser inneholder utfyllende informasjon som ikke trengs for å utføre oppgaven.

Uten en (fallskjerm-) tråd

I januar 1972 eksploderte en bombe i flyet der 22 år gamle Vesna Vulovic jobbet. Hun falt $s \approx 10$ km uten fallskjerm, men landet i sne og overlevde. Mange andre har overlevd lignende fall, men hvordan er det mulig? Hvis Vesna bare hadde hatt oppdriften B (Archimedes' lov) til å motvirke tyngdekraften G mens hun var i fritt fall, så ville den konstante nettokraften $F = ma = G - B = \delta mg$ gitt henne en konstant akselerasjon $g = (\delta m/m)g \approx g$. Etter 35 s ville hun ha brutt lydmuren, og ti sekunder senere ville hun ha truffet kloden med en hastighet $v = \sqrt{2sg} \approx 1600 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Det kan ingen overleve, uansett hva de treffer. Vesna ble reddet av luftmotstanden F_D , som skyldes indre friksjon i de atmosfæriske gassene. Fordi F_D øker når farten v øker, så vil den før eller siden balansere F , og denne *terminalfarten* $v_T \approx 150 - 200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ er deretter konstant ($a = 0$) fordi $F_{tot} = ma = F - F_D(v_T) = 0$. De siste sekundene av fallet var kontaktfriksjonen («gnissingen») med et snedekt tre eller en bakke nok til å gi Vesna en negativ akselerasjon som hun kunne overleve.

I. TEORI

A. Drag

I denne øvelsen skal vi se på hvordan en gjenstand i bevegelse i en væske eller gass påvirkes av en friksjonskraft, som avhenger av størrelsen på gjenstanden, hastigheten og egenskapene til væsken/gassen. Mer generelt (for både gasser og væsker) kaller vi den "indre friksjonskraften" F_D

drag. Fordi F_D skyldes at en gjenstand med utstrekning kolliderer med molekylerne i den substansen (gassen eller væsken) den presser seg gjennom, så virker F_D mot bevegelsesretningen.

Mens kontaktfriksjonen er (nesten) uavhengig av farten v , og maksimal når legemet er i ro, så forventer vi at den indre friksjonen $F_D(v)$ avhenger av farten v til det faste legemet relativt til substansen den beveger seg gjennom, og at denne kraften forsvinner når objektet er i ro [$F_D(0) = 0$]. Rekkeutviklingen

$$F_D(v) = c_S v + c_R v^2 + \dots$$

av F_D til andre orden i v er derfor parametrisert av to størrelser som har dimensjonene $[c_S] = \text{kg/s}$ og $[c_R] = \text{kg/m}$. Det er nyttig å fremheve funksjonssammenhengene ved å bytte ut disse med dimensjonsløse størrelser C_S og C_R (se ligningene (1) og (2)). I det følgende symboliserer ikonet • en kule, mens o representerer medium som fortrenges av kulen

A. Stokes-koeffisienten C_S

Ved lave hastigheter (< 24 m/s for små legemer i luft) kan vi se bort fra det kvadratiske leddet, og F_D er i dette "Stokes-regimet" tilnærmet lineær i v [$F_D(v \rightarrow 0) \approx F_D^S = c_S v$]. Strøm-ningsmønsteret rundt legemet er *laminært*, dvs. at forskjellige lag glir langs hverandre uten å virvles opp og blandes, men ikke uten motstand. Molekylerne har god tid til "å snakke sammen". Drag skyldes disse intermolekylære kreftene, som vi makroskopisk opplever som at substansen er "seig" eller "viskøs".

En intuitiv og operasjonell definisjon av den *dynamiske viskositeten* μ får vi ved å måle hvor hardt

vi må presse på et objekt for at det skal flytte seg en gitt avstand på en gitt tid gjennom et seigt medium, eller tilsvarende, hvor lang tid t det tar å flytte et legeme en gitt avstand med et gitt trykk p . Den *dynamiske viskositeten* $\mu \propto p \times t$ som parametriserer seigheten har derfor dimensjonen $[\mu] = \text{Pa} \times \text{s} = (\text{N}/\text{m}^2) \times \text{s} = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$.

Drag-koeffisientene må opplagt avhenge av geometrien til legemet, men vi skal her kun studere kuler. Vi har derfor bare en lengde-variabel, radien r , som sammen med viskositeten gir dimensjonen til Stokes-koeffisienten, $c_S = C_S \mu r$, der

$$C_S = \frac{F_D^S}{\mu r v} = \text{const.} \quad (1)$$

er en *dimensjonsløs konstant*, fordi vi ikke har noen andre dimensjonsløse, hastighets-uavhengige variable den kan være en funksjon av.

For en kule (\bullet) er

$$C_S = C_S^\bullet = 6\pi,$$

hvilket kalles *Stokes' lov*.

B. Rayleigh-koeffisienten C_R

For store hastigheter (men mindre enn lydhastigheten) domineres F_D av det kvadratiske leddet [$F_D(v) \approx F_D^R = c_R v^2$], og strømningsmønsteret bak legemet er mer eller mindre kaotisk (*turbulent*) [se Fig. 2]. I dette regimet klarer ikke viskositeten å dempe fluktuasjoner i mediet, og spiller derfor liten rolle. Dimensjonen til den kvadratiske koeffisienten c_R kommer derfor fra størrelsen $\rho_o r^2$, hvor ρ_o er densiteten til mediet, og *Rayleigh-koeffisienten*

$$C_R = \frac{F_D^R}{\rho_o r^2 v^2}. \quad (2)$$

er dimensjonsløs i det kvadratiske regimet.

C. Fritt fall

Laminært fall

En kule med diameter $d = 2r$ og tetthet ρ_\bullet som synker/faller laminært i et medium med tetthet ρ_o utsettes for en netto kraft ($\delta m = m_\bullet - m_o$)

$$F_{tot} = ma = m_\bullet g - m_o g - F_D^S = \delta m g - C_S \mu r v. \quad (3)$$

Kulen når sin terminalfart når disse kreftene balanserer, $F_{tot} = 0$:

$$v_T^S(d) = \frac{\delta m g}{C_S \mu r} = \frac{\hat{g}}{v} d^2 \propto d^2, \quad (4)$$

hvor $\hat{g} = \left(\frac{\rho_\bullet}{\rho_o} - 1\right) \gamma g$, $v = \mu/\rho$ (den kinematiske viskositeten), og $\gamma = \pi/(3C_S) = 1/18$ for en kule (Stokes' lov).

Vi setter dette inn i (3) og løser difflikningen analytisk (Appendix I).

Kulens fart $v_S(t)$, akselerasjon $a_S(t) = dv_S(t)/dt$, og posisjon $z_S(t) = \int dt v_S(t)$ (vi nullstiller høyden i slipp-punktet) i et laminært fall er vist som heltrukne grafer i Fig. 2 (i dimensjonsløse enheter) i Appendix I.

Turbulent fall

En kule med diameter $d = 2r$ og tetthet ρ_\bullet som synker/faller laminært i et medium med tetthet ρ_o utsettes for en netto kraft

$$F_{tot} = ma = m_\bullet g - m_o g - F_D^R = \delta m g - C_R \rho_o r^2 v^2. \quad (5)$$

Kulen når sin terminalfart når $F_{tot} = 0$:

$$v_t^R(d) = \sqrt{\frac{\delta m g}{C_R \rho_o r^2}} = 2 \sqrt{\frac{3\pi \hat{g} d}{C_R}} \propto d^{1/2} \quad (6)$$

når disse kreftene balanserer,

Vi setter dette inn i (5) og løser difflikningen analytisk (Appendix I). Kulens fart $v_R(t)$, akselerasjon $a_R(t) = dv_R(t)/dt$, og posisjon $z_R(t) = \int dt v_R(t)$ (vi nullstiller høyden fra slipp-punktet) i et turbulent fall er vist som stiplede grafer i Fig. 2 (i dimensjonsløse enheter) i Appendix I.

Materialgenskaper

Vi har valgt å parametrisere terminalhastighetene og de analytiske løsningene vist i Fig. 1 med de «reduerte» verdiene $\hat{g} > 0$ [definert i (4)] og $\tilde{g} > 0$ [definert i (10)] av tyngdens akselerasjon $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$, fordi dette er materialkonstanter som kun avhenger av tetthetene til kulen og mediet den er nedsenket i (se Tabell 1).

Appendix II inneholder litt mer drag-teori.

Tabell 1: Tettheten ρ , den kinematiske viskositeten ν , og den dynamiske viskositeten $\mu = \rho\nu$ for noen materialer. Data er hentet fra Wikipedia 28.03.2019, databladet til oljen TELLUS-S2-M68 (@ 20 C), og direkte måling av tettheten til de «kinesiske» isoporkulene. Plastkulene er 3D-printet på FI 29.03.2019.

Ikonet • symboliserer en kule, mens o representerer medium som fortrenses av kulen.

	Luft (o)	Olje (o)	Vann (o)	Isopor (•)	Plast (•)	Stål (•)
ρ [kg/m ³]	1,225	889	998	21,1	1042	7905
ν [10 ⁻⁶ m ² /s]	15,2	214	1,0	∞	∞	∞
μ [kg/(m*s)]	1,862 x 10 ⁻⁵	0,190	0,998 x 10 ⁻³	∞	∞	∞

D. Karakterisering av regimene

$$b_S = \ln \frac{\hat{g}}{\nu} = \ln \frac{\delta \rho g}{18\mu} \approx \ln \frac{\delta \rho}{\mu} - 0,607 \quad (9)$$

Sammenligner vi ligning (4) og (6),

$$v_T^S(d) \propto d^2 \Rightarrow \ln v_T^S = 2 \ln d + b_S \quad (7)$$

$$v_T^R(d) \propto d^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln v_T^R = \left(\frac{1}{2}\right) \ln d + b_R \quad (8)$$

ser vi at *alle* dataene i et log-log plot av v_T mot d forventes å ligge nær en av de to linjene ($i = S$ eller R):

$$y = a_i x + b_i, \quad [x = \ln d, \quad y = \ln v_T]$$

Der $a_S = 2$, $a_R = \frac{1}{2}$, og b_i er konstanter. Stokes' lov gir

Og vi ser at skjæringstallet b_S er bestemt av forholdet mellom tetthetsforskjellen $\delta \rho = \rho_\bullet - \rho_o$ og den dynamiske viskositeten μ . Legg merke til at linjen for laminære data (S) er fire ganger så bratt som linjen for turbulente data (R). Med radius-avhengige data burde det derfor være lett å skille mellom rendyrket laminær og turbulent oppførsel, og verdien av b_S brukes til å sjekke Stokes' lov.

II. LABORATORIEØVING

I denne øvelsen skal dere filme kuler av forskjellige materialer som faller gjennom ulike medier for å bestemme terminalhastighetene. Skriv opp terminalhastighetene ved hver diameter dere finner på tavla slik at alle kan plote resultatene fra de fire eksperimentene. Husk usikkerheter!

A. Fellesøvelse - Store stålkuler i olje

Film noen av stålkulene med diameter fra 10 mm og oppover mens de synker ned gjennom den store glasstanken fylt med TELLUS-oljen. Bli enige om hvordan dere fordeler analysen av terminalhastighetene mellom dere. Se **C.Data-analyse** før dere begynner å analysere filmene slik at dere vet hvilken informasjon som behøves. For å få kulene opp igjen av tanken kreves litt fells innsats og samarbeid.

B. Gruppeøvelse

Dere vil bli delt inn i tre grupper hvor hver gruppe gjør ett eksperiment hver.

1. Isoporkuler i luft

Film slutten av fallet til de seks isoporkulene med diameter mellom 24 mm og 95 mm for å finne terminalhastighetene til kulene.

2. Stålkuler i olje

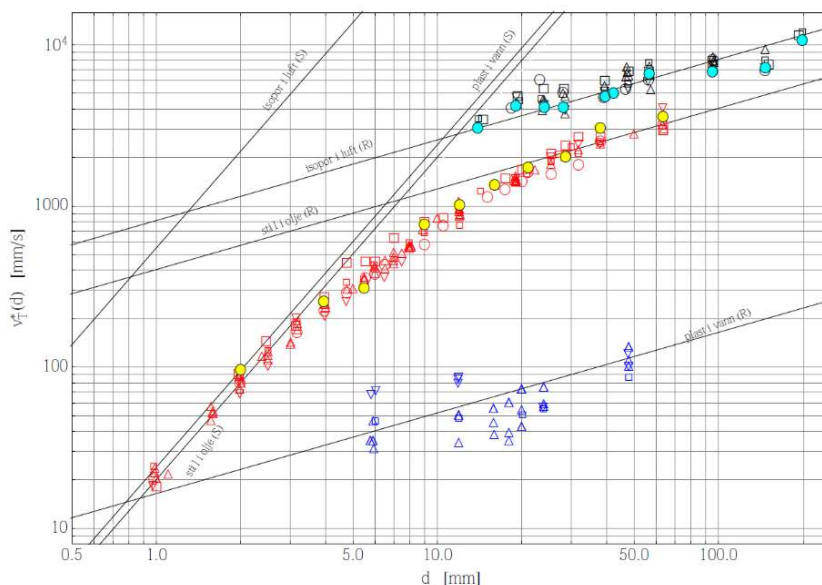
Film noen av stålkulene med diameter mellom 1 mm og 10 mm mens de synker ned gjennom et glassrør fylt med TELLUS-oljen, for å bestemme terminalhastighetene.

3. Plastkuler i vann

Film noen av plastkulene av forskjellige størrelser mens de synker ned gjennom vann for å bestemme terminalhastighetene.

C. Data-analyse

- Bruk den utleverte MATLAB koden til å finne terminalhastighetene til kulene. Verifiser at de faktisk når sin terminalhastighet.
- Vurder betydningen av temperaturen for resultatene.
- Vis dine (og de andre gruppenes) målte verdier av $v_T(d)$ i et log-log-plot, se Fig. 1.
- Sammenlign deres data med Stokes' lov [$v_T^S(d)$ fra ligning (4)], og med forventet oppførsel for turbulent strømning [$v_T^R(d)$ fra ligning (6)]. Hva blir b_5 ? Hint: se **D. Karakterisering av regimene**.



Figur 1. Terminalhastigheten som funksjon av diameter eksperimentelt bestemt av studenter i FYS2150 V18 og V19 for isoporkuler i luft, stålkuler i olje og plastkuler i vann sammenliknet med teori for laminær og turbulent strømning.

APPENDIX I

Analytiske løsninger

Laminært fall

Kombinerer vi (3) og (4) får vi diffiligningen

$$\frac{dv_S}{dt} = \left(1 - \frac{v_S}{v_T^S}\right) \tilde{g},$$

$$\tilde{g} = \delta m / m g = (1 - \rho_o / \rho_*) g \quad (10)$$

Vi har valgt å parametrisere (4) og (10) med de «reduerte» verdiene $\hat{g} > 0$ og $\tilde{g} > 0$ av tyngdens akselerasjon $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$, fordi dette er materialkonstanter.

$$a_S(t) = \tilde{g} e^{-\tilde{g}t/v_T^S} \quad (11)$$

$$v_S(t) = v_T^S \left(1 - e^{-\frac{\tilde{g}t}{v_T^S}}\right) \quad (12)$$

$$z_S(t) = v_T^S t - \frac{(v_T^S)^2}{\tilde{g}} \left(1 - e^{-\frac{\tilde{g}t}{v_T^S}}\right) \quad (13)$$

Ved å løse (10) finner vi kulens fart $v_S(t)$, akselerasjon $a_S(t) = dv_S(t)/dt$, og posisjon $z_S(t) = \int dt_S(t)$ (vi nullstiller høyden fra slipp-punktet) i et laminært fall:

De dimensjonsløse funksjonene $a_S(t)/\tilde{g}$, $v_S(t)/v_T^S$, og $z_S(t)\tilde{g}/(v_T^S)^2$ er plottet i Fig. 2.

Turbulent fall

Kombinerer vi (5) og (6) får vi diffiligningen

$$\frac{dv_R}{dt} = \left[1 - \left(\frac{v_R}{v_T^R}\right)^2\right] \tilde{g}, \quad \tilde{g} = \frac{\delta m}{m} g \quad (14)$$

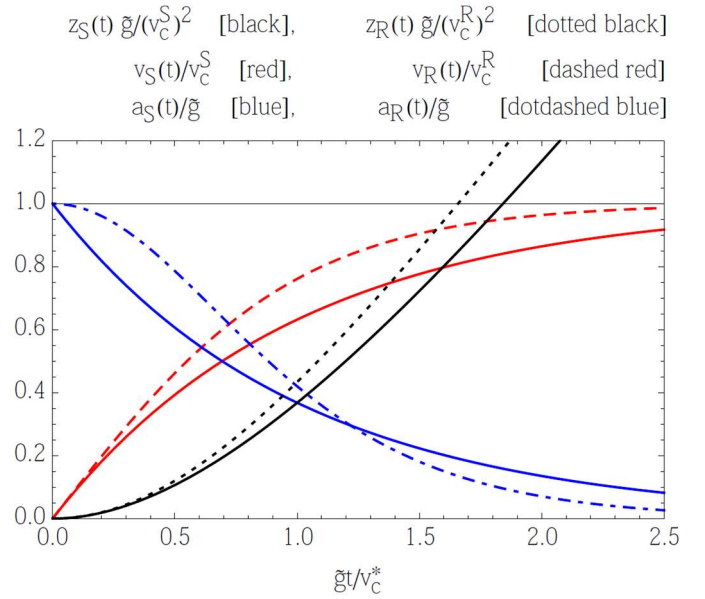
Ved å løse 14 finner vi kulens fart $v_R(t)$, $a_R(t) = dv_R(t)/dt$, og posisjon $z_R(t) = \int dt_R(t)$ (vi nullstiller høyden fra slipp-punktet) i et turbulent fall:

$$a_R(t) = \tilde{g} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\tilde{g}t}{v_T^R}\right) \quad (15)$$

$$v_R(t) = v_T^R \tanh\left(\frac{\tilde{g}t}{v_T^R}\right) \quad (16)$$

$$z_R(t) = \frac{(v_T^R)^2}{\tilde{g}} \ln \cosh\left(\frac{\tilde{g}t}{v_T^R}\right) \quad (17)$$

De dimensjonsløse funksjonene $a_R(t)/\tilde{g}$, $v_R(t)/v_T^R$, og $z_R(t)\tilde{g}/(v_T^R)^2$ er plottet i Fig. 2.



Figur 2. Dimensjonsløse analytiske løsninger av drag-ligningene i det lineære (laminære) regimet, jmf. (11)-(13) i Appendix I, og i det kvadratiske (turbulente) regimet, jmf. (15)-(17) i Appendix I. v_c er terminalhastigheten.

APPENDIX II

Drag-koeffisienten C_D

Ofte finner man i litteraturen en annen dimensjonsløs drag-koeffisient C_D , som vi nevner her for å unngå misforståelser. Drag-kraften kan oppfattes som resultatet av at mediet utøver et «dynamisk trykk» $p_{dyn} = \rho_o v^2/2$ på et areal A (valget av A er en del av definisjonen av C_D), slik at C_D er definert av drag-ligningen

$$F_D = C_D p_{dyn} A = C_D \frac{1}{2} \rho_o v^2 A \quad (18)$$

Dette kan være forvirrende, fordi C_D ikke kan være konstant i det lineære regimet. Sammenligner vi (1) og (18) ser vi at

$$C_D(v \rightarrow 0) = \frac{2r^2}{A} \frac{c_S}{Re(v)} \propto \frac{c_S}{v} \neq const. \quad (19)$$

er en funksjon av det dimensjonsløse, hastighetsavhengige *Reynoldstallet*

$$Re(v) = \frac{\rho_o r v}{\mu} = \frac{r v}{\nu} \quad (20)$$

der $\nu = \mu/\rho_o$ er den kinematiske viskositeten.

Sammenligner vi (2) og (18) ser vi at dragkoeffisienten er en dimensjonsløs konstant i det kvadratiske regimet:

$$C_D(v \rightarrow \infty) = \frac{2r^2}{A} C_R \propto \text{const.} \quad (21)$$

Reynoldstallet $Re(v)$

Reynoldstallet er nyttig fordi det skiller mellom det laminære og turbulente på en enkel måte, som fremgår av forholdet mellom drag-kreftene:

$$\frac{F_D^S}{F_D^R} = \frac{F_D(v \rightarrow 0)}{F_D(v \rightarrow \infty)} = \frac{1}{Re} \frac{C_S}{C_R} \quad (22)$$

For små hastigheter er $Re \propto v$ liten, og derfor dominerer F_D^S . For store hastigheter er Re stor, og derfor dominerer F_D^R .

Legg også merke til at mediet må være viskøst, selv om drag-kraften i det kvadratiske regimet ikke avhenger eksplisitt av denne viskositeten. I motsatt fall ville det ikke oppstå noen virvler, og det er disse som effektivt transporterer energien bort fra legemet og derfor gir mer drag enn ved lave hastigheter.

Overflatens ruhet spiller også en rolle, men for kuler er dette uvesentlig opp til $Re \sim 10^5$, så vi kan se bort fra dette her.

Det er i praksis meget viktig å vite når en strømning blir turbulent, fordi kaoset koster energi og stabilitet. Dette

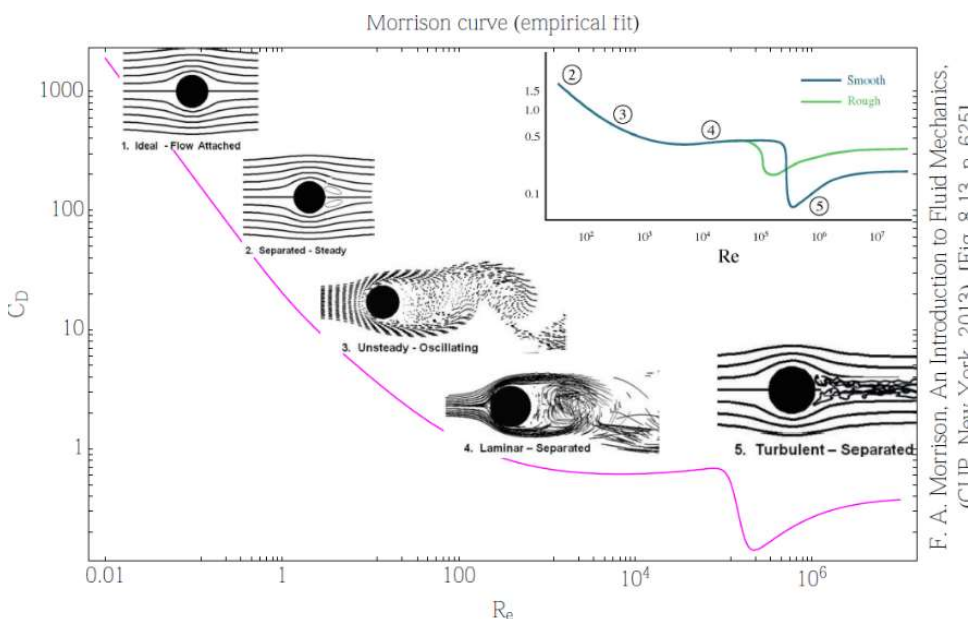
bestemmes av Reynoldstallet, som gir forholdet mellom treghetskrefter og viskøse krefter, men den kritiske verdien avhenger sterkt av omstendighetene.

Ofte ser vi at $Re \ll 1$ for å ha laminær strømning. For eksempel er Stokes' lov meget nyttig for å studere sedimentering av bakterier, som har $Re \sim 10^{-4}$. I et rør skjer overgangen til turbulent strømning ved $Re \approx 2300 - 50\,000$, mens man i aerodynamikk kanskje må opp i $Re \sim 10^6$ (jmf. Fig. 3).

Et annet eksempel er kroppsvæskene dine. De pumpes rundt i kroppen med en fart som er vesentlig mindre enn 1 m/s, og den dynamiske viskositeten til f.eks. blodplasma ved 37 C er ca. 0,0014 kg/sm. Siden $Re \propto r$, og størrelsen til typiske blodlegemer er veldig liten, så forventer vi at $Re \ll 1$, og at blod derfor strømmer laminært. Men dette stemmer ikke alltid; for eksempel kan en utposning på blodåren gi turbulens, og dette gir en lyd som legen kan høre.

Stokes' lov har mange anvendelser, bl.a. i biologi, fysiologi, sedimentering, meteorologi og metrologi.

Legg mere til at det er forholdet mellom μ og ρ , dvs. den spesifikke materialkonstanten $\nu = \mu/\rho$, som bestemmer overgangen fra laminær til turbulent oppførsel [se (20)]. For å få laminær oppførsel må vi ha lav hastighet, liten radius og stor ν .



Figur 3: Overgangen til turbulens for en kule. Denne empiriske kurven [Morrison, 2016] [F.A. Morrison, *An Introduction to Fluid Mechanics*, (CUP, New York, 2013), Fig. 8.13, p.625] passer over et meget stort område med Reynoldstall. Den innsatte grafen viser hva som skjer hvis kulen ikke er glatt [NASA].