

KOMPENDIUM FYS2150

(Nina Jeppesen Edin, Kathinka Elinor Pitman, Januar 2020)

(Bygger på materiale av Dag Kristian Dysthe og Alex Read)

Contents

1	Introduksjon.....	1
2	Mål med kurset.....	1
3	Labjournal	2
4	Usikkerheter	2
	A. Riktighet.....	3
	B. Presisjon	3
	C. Nøyaktighet	5
5	Sammensatte usikkerheter.....	5
6	Usikkerhetsbudsjett	5
7	Usikkerhet i multimeter.....	6
8	Antall gjeldende siffer	6
9	Følsomhet, oppløsning og dynamisk område.....	6
	A. Følsomhet.....	6
	B. Oppløsning	7
	C. Dynamisk område.....	7
	STATISTIKK.....	7
10	Fordelinger	7
	A. Fordelingen til en måling.....	7
	B. Fordelingen til en statistikk	8
11	Normalfordelingen og sentralgrenseteoremet	8
	A. Normalfordelingen	8
	B. Sentralgrenseteoremet	9
12	Evaluerings av normalitet (QQ-plott)	9
13	Konfidensintervaller	10
14	Introduksjon til lineær regresjon	11
	A. Lineære sammenhenger i fysikk.....	11
	B. Lineær sammenheng med målefeil.....	11
	C. Estimeringsteori: Minste kvadraters metode	12
	D. Konfidensintervall og usikkerhetsanslag for estimerte størrelser.....	13
	E. Forklaringsgrad, målt av R^2	14

15	Poissonfordelingen	16
	RAPPORTSKRIVING	17
	Vurderingsveiledning for FYS2150-rapporter	18

1 Introduksjon

Hvordan oppnår vi ny kunnskap innen fysikk og naturvitenskap? Svært ofte gjøres dette ved at vi først observerer og beskriver naturen. På bakgrunn av observasjonene og beskrivelsene, kan vi siden gjøre klassifiseringsarbeid, slik at teoretikeren får noe å jobbe med. Svært ofte har observasjonene våre blitt gjort uten at det er noen teoretisk forståelse for det man har observert. Eksperimentet stimulerer teoretikeren. Men ofte skjer også det motsatte. Teorien sier at det er ting eller forhold som skal kunne forekomme, men det er aldri observert. Da er det teorien som stimulerer og utfordrer eksperimentatoren. Teori og eksperiment er sammen om nye oppdagelser. Laboratorieundervisning har en lang tradisjon i naturvitenskapelige fag. Naturvitenskap dreier seg om å forstå naturen. Teori kan man studere ved å lese bøker og å gjøre regneoppgaver. Vitenskap om naturen dreier seg om korrespondanse mellom teori og fenomener som faktisk eksisterer i naturen. Det er to hovedtradisjoner for å undersøke naturen: systematisk observasjon og eksperimenter. Den første og eldste tradisjonen kan sies å ha to grener: feltarbeid, observasjon med direkte sanseinntrykk, som fortsatt er viktig for biologer og geologer og "instrumentell observasjon" der sansene forsterkes eller erstattes med instrumenter som kan kvantifisere observasjonene. Kvantifisering av observasjon av naturen, la oss kalle det å måle, har gjerne vært fysikernes domene: Astronomer studerer himmellegemene, geofysikere studerer atmosfæren, havet og jordas indre, biofysikere utvikler blant annet ultralyd, MR- og røntgenavbildings- instrumenter for å observere menneskekroppen. Den andre tradisjonen kan sies å ha startet med Galileo Gallilei og Francis Bacon som ikke bare observerte, men konstruerte situasjoner der de mente å isolere det fysiske fenomenet de var interessert i. Det er dette vi kaller å gjøre eksperimenter. Denne tradisjonen av både observasjon og eksperimenter lærer man allerede som barn i skolefag som naturfag og senere biologi, kjemi og fysikk. I universitetsutdanning av fysikere har alle land ett eller flere laboratoriekurs (labkurs) i tillegg til praktiske laboratorieøvelser knyttet til teoretiske enkeltfag og demonstrasjoner av eksperimenter utført av foreleser under forelesningene.

2 Mål med kurset

I dette kurset har vi to hovedmål med undervisningen

- Å lære å måle og å drive eksperimentelt arbeid.
- Å bidra til innlæringen av utvalgte emner i fysikken.

Første del av kurset, Modul 1, fokuserer mest på det første målet, i Modul 2 og 3 fokuseres mest på det siste.

I løpet av modul 1 skal dere få opplæring i

- Måling av grunnleggende fysiske størrelser som tid, lengde, masse, kraft, strøm og spenning.
- Bruk av noen måleinstrumenter som er mye brukt i fysikk
- Å finne kilder til feil i målinger og kvantifisere disse.
- Behandling av måledata. Statistisk behandling, tilpassing av modeller til måledata med støy (feil).

Pensum er:

- Squires: Practical Physics, 4th ed. Kapitlene 1-6 (til og med 6.6), 8-13.
- Dette compendium

3 Labjournal

Presisjon, nøyaktighet, ryddighet, ærlighet er grunnleggende holdninger og ferdigheter, som er viktig i alt eksperimentelt arbeid. Alle gjør vi feil inn imellom, så det er utrolig viktig å være ærlig og notere ned presis hva som har blitt gjort. Ellers kan vi ikke stole på data eller tolke dem riktig. Derfor må alle studenter ha en labjournal.

Kapittel 10 i Squires inneholder tips til hvordan man fører en labjournal. Dette er et viktig verktøy når man jobber med eksperimenter.

Labjournalen er et personlig redskap og kan være et rettslig dokument. En labjournal er den grunnleggende dokumentasjonen på arbeidet som utføres i laboratoriet. Her skriver man løpende ned alt som gjøres, og alle metoder og resultater settes inn på en måte så andre kan skjønne og reproducere data. Det er gjennom journalen man skal kunne spore publiserte/patenterte forskningsresultater tilbake til handlinger, analyser og tanker i laboratoriet. Sporbarheten som journalen representerer er en sikkerhet mot fusk og en signert og kontrassegnert labjournal er et rettsgyldig dokument som kan brukes i patentstrider om hvem som oppdaget noe først.

Vi har følgende krav til en labjournal i dette kurset:

- En leser som setter seg inn i øvingsoppgaven skal kunne forstå hva som er gjort og hvilke resultater som er fremkommet. Tekst som står i øvingsoppgaven trengs ikke å gjentas, men notater om nøyaktig hvordan forsøkene ble utført må tas med. Spesielt hvis noe går galt eller man finner bedre måter å gjøre eksperimentet på.
- Alle "avvik" fra forventede resultater, alle observasjoner og alt dere lurer på skal noteres.
- Det er viktig at alt skrives med blekk, så man ikke kan endre på data og at ingen sider fjernes. Hvis man må endre på noe, setter man en strek over og skriver hvorfor det er ugyldig.
- Labjournalen skal være innbundet med nummererte ark. Nummereringen av arkene må dere sannsynligvis gjøre selv. På Akademika, Ordning og Reda og i andre butikker finner dere skrivebøker med stive permer og ark som er sydd fast. Ruteark kan være en fordel, men det er en smakssak. Journalen bør være i A4-A5-format.
- Alle ark som skrives på skal dateres
- Data logget med PC fremstilles grafisk, printes ut og limes inn i labjournalen. Det noteres i journalen hvor datafilene er lagret.
- Alle notater, kladding, mellomregning skal skrives i journalen og ikke på løsark. Lag deres eget system for å skille kladd og ufullstendige notater fra endelige resultater.
- Etter hver labøving skal labjournalen leses gjennom, kommenteres og kontrassegnes av en veileder.

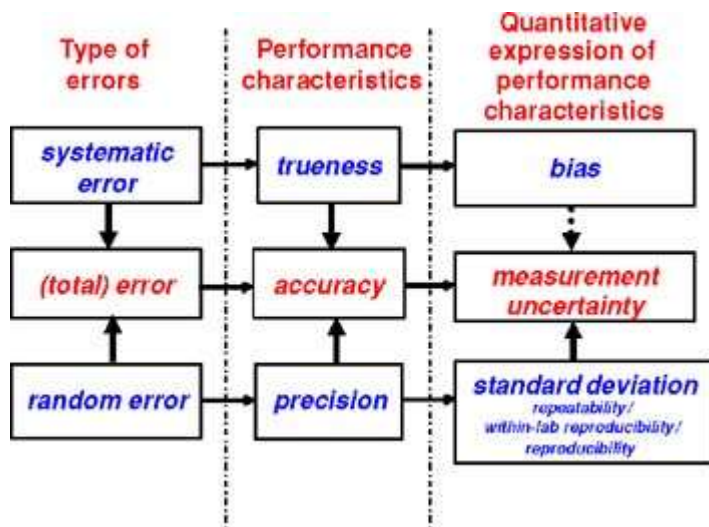
I løpet av kurset skal dere skrive 3 rapporter, hvorav den siste er en hjemmeeksamen. For å skrive en god rapport, er dere helt avhengig av å ha en god labjournal. Det er umulig å huske alle detaljer når det har gått et par uker eller mer, så noter alt!

4 Usikkerheter

Vi skal se på hva som ligger i begrepene "riktighet", "presisjon" og "nøyaktighet" og hvordan man som fysiker forholder seg til at alt man måler har en usikkerhet.

Kapittel 2 i Squires handler om tilfeldige og systematiske feil, forskjellen er vist i figur 2.1 i boken. Tilfeldig usikkerhet påvirker presisjonen. Hvis man utfører mange målinger, vil presisjonen bli bedre, dvs gjennomsnittsverdien blir bedre bestemt (se figur 2.1a i Squires).

Systematiske feil påvirker hvor riktig gjennomsnittsverdien er altså om den treffer den "sanne" verdien. Det er litt forskjellig praksis for bruk av ordet nøyaktighet. I Squires brukes høy nøyaktighet (eng. accuracy) når gjennomsnittsverdien treffer nær den "sanne" verdien (figur 2.1b i Squires). Dette er litt utdatert og ISO (International Organization for Standardization) anbefaler å bruke betegnelsen riktighet (eng. trueness) for hvor lite målingen er påvirket av systematiske feil, mens høy nøyaktighet (eng. accuracy) krever at målingen er fri for både tilfeldige og systematiske feil (figur 1).



Figur 1: Forskjellige typer feil (errors), hva de påvirker og deres kvantitative uttrykk.

(Menditto et al., Accred Qual Assur (2007))

A. Riktighet

Systematiske feil er feil som gjentas ved hver måling, og dermed "drar" resultatet mot en side (for eksempel en klokke, som går for sakte). Det fører til at gjennomsnittet ikke lenger er rundt den sanne verdien, men enten høyere eller lavere, avhengig av feilen. Det kan være vanskelig å ta hensyn til systematiske feil ved beregning av usikkerheter og ofte kjenner vi heller ikke den sanne verdien. I datablader for måleinstrumenter oppgis riktigheten (toleransen) for instrumentet, men det kan også være andre systematiske feil.

Riktighet (eng. trueness) defineres som grad av overensstemmelse mellom gjennomsnittsverdien oppnådd fra en stor serie måleresultater og en sann verdi. Det kvantitative målet for riktighet er bias. Når \bar{x} er gjennomsnittsverdien av måleresultatene kan relativ bias uttrykkes slik:

$$\frac{\bar{x} - \text{sann verdi}}{\text{sann verdi}}$$

B. Presisjon

Tilfeldige feil er feil som påvirker måleresultatets presisjon. Dette er feil som vi skal tenke på som tilfeldige forskyvninger om den sanne verdien X som vi prøver å måle. De faktiske målte verdiene varierer altså fra måling til måling. Har vi små tilfeldige feil sier vi at målingen er presis. Presisjon (eng. precision) defineres som overensstemmelse mellom uavhengige måleresultater oppnådd i en måleprosedyre under spesifiserte betingelser. Graden av presisjon blir vanligvis uttrykt på basis av statistisk mål for upresisjon (eng. imprecision), slik som standardavvik.

Når vi har gjort en serie målinger finner vi først gjennomsnittet. Gjennomsnittet av N målinger er

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

Her er x_i den i 'te målingen.

Som vi skal se på mer detaljert senere i kompendiet (Seksjon 10A), vil gjennomsnittet tilnærme den sanne verdien X på en god måte.

Også hver observasjon vil være en tilnærming til sann verdi X . Så hvorfor bruke gjennomsnittet? Nøkkelen er at variasjonen til \bar{x} har mindre variasjonen (målt i standardavvik) enn hver enkelt måling, og vil, under forutsetning om at man ikke har systematisk bias, derfor være en bedre tilnærming til X .

Før vi ser på dette argumentet i mer detalj, må vi ta et skritt tilbake og tenke på forskjellen mellom \bar{x} og X . Vi bruker \bar{x} som en tilnærming til X . Basert på målingene våre kjenner vi ikke X , kun tilnærmingen \bar{x} .

Standardavviket σ til hver enkel måling angir upresisjon, og jo større standardavvik, jo mer upresis er hver måling. Standardavviket til én måling kan vi umulig vite når vi bare har målingene å gå ut fra, på samme vis som vi ikke kjenner X . Men akkurat som at vi bruker \bar{x} som en tilnærming for X , kan vi tilnærme σ ved hjelp av målingene. Nøkkelantagelsen for å få dette til er at hver måling oppfører seg likt og er gjort slik at de ikke påvirker hverandre, noe som oftest er oppfylt. Da har hver måling likt standardavvik, og vi kan se på hvor mye *alle* målingene varierer som en tilnærming til hvor mye hver enkelt måling varierer. Vi skal gjøre dette noe mer matematisk presist i Seksjon 10A. Utrekninger finnes i Squires (kapittel 3.4).

Standardavviket σ til hver enkelt måling kan tilnærmes av s gitt under i likning (2), og kalles *empirisk* (fra målinger) *standardavvik*. Siden s er kjent fra målingene, er det denne som er av praktisk interesse her. s finnes utfra det gjennomsnittlige avviket for alle de enkelte måling fra gjennomsnittsverdien.

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

Kvadrert standardavvik, s^2 , kalles variansen, eller, når vi må være mer presis, empirisk varians (variens er strengt talt σ^2 , som defineres matematisk i Seksjon 10A).

La oss nå se at gjennomsnittet har lavere standardavvik enn hver observasjon. Utledning for følgende finnes i Squires (kapittel 3.4). Standardavviket til gjennomsnittet, kalt σ_m i Squires, er gitt ved formel

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Presisjonen for gjennomsnittet som tilnærming for sann verdi X er derfor høyere (altså har lavere standardavvik) enn for hver måling.

Tilnærminger av standardavviket til gjennomsnittet kalles standardfeilen til gjennomsnittet (eng. standard error of the mean), og skrives som $SE(\bar{x})$, gitt av ligning 3.

$$SE(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (3)$$

Motivasjonen for tilnærmingen er at $s \approx \sigma$, så dermed vil $SE(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sigma_m$.

C. Nøyaktighet

Nøyaktighet (eng. accuracy) kan defineres som grad av overensstemmelse mellom et enkelt måleresultat og sann verdi. Nøyaktighet avhenger av riktighet og presisjon.

5 Sammensatte usikkerheter

Oftest må vi regne ut usikkerheten i sammensatte størrelser. Da har gjerne hver variabel som inngår i regnestykket sin egen usikkerhet, og vi må beregne sluttstørrelsens usikkerhet utfra usikkerhetene til alle de inngående variablene. Dersom vi lar resultatet R være en funksjon av n uavhengige variable:

$$R = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

blir den anslåtte usikkerheten i R , som vi betegner ΔR som oppgitt i likning 4.

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2} \quad (4)$$

Et spesialtilfelle av denne har vi for $R = a \cdot x^n \cdot b \cdot y^m \cdot c \cdot z^k$. Da blir usikkerheten som i likning 5. Denne er blant annet nyttig i utregning av usikkerheter i forbindelse med Ohms lov.

$$\Delta R = R \sqrt{\left(n \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(m \frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(k \frac{\Delta z}{z}\right)^2} \quad (5)$$

Se seksjon 4.1 i Squires (Tabell 4.1) for andre standarduttrykk.

6 Usikkerhetsbudsjett

For å være sikker på at man behandler alle usikkerheter til en måling kan det være en god hjelp å sette opp et usikkerhetsbudsjett. Dersom man skal utføre godkjente (akkrediterte) målinger så kreves det at man fører et slikt budsjett. Her er et enkelt eksempel av slike budsjett som dere kan ha nytte av å bruke. Når dere skal måle lengden av pendelsnoen, bruker dere en tommestokk. Toleransene til tommestokken (mål på riktigheten) finner dere i databladet på canvas. Vi setter opp målefunksjonen for lengden av stangen:

$$l = l_a + dl_s + \sum_i^n dl_{l,i} + dl_m + \alpha l_a (T - 25^\circ\text{C}) \quad (2)$$

Symbolene i målefunksjonen betyr:

- l_a = avlest lengde
- dl_s = korreksjon for sikting fra enden av stangen til målestokk. Her må du gjøre din personlige vurdering av hvor presis du er.
- n = antall ledd
- $dl_{l,i}$ = korreksjon for slark i ledd i
- dl_m = korreksjon for toleranse til målestreker
- $\alpha = 4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, lineær temperaturutvidelseskoeffisient for glassfiber
- T = temperaturen målingen gjøres ved

Da kan vi sette opp følgende budsjett:

Tabell 1. Eksempel på usikkerhetsbudsjett

	x_i [mm]	δx_i [mm]
l_a	1181.0	0
dl_s	0	0.5
$\sqrt{n} \cdot dl_l$	0	$\sqrt{5} \cdot 0.5$
dl_m	0	1
$\alpha l_a(T - 25^\circ C)$	0.2	0.02
	$\sum_i x_i$	$\sqrt{\sum_i \delta x_i^2}$
	1181.2	1.58

I Tabell 1 er dl_s et mål på presisjonene, mens de andre verdiene er uttrykk for systematiske feil, altså hvor riktig den avleste verdien er. Til sammen gir de en nøyaktighet som oppgis i usikkerheten til måleverdien: Når vi runder av til gjeldende antall siffer så vil vi rapportere at lengden er $l = 1181 \pm 2$ mm.

7 Usikkerhet i multimeter

Det ulike utstyret man bruker på laben kan ha oppgitt en usikkerhet (toleranse) i databladet sitt. Usikkerheten kan for eksempel være oppgitt som $(0.05\% + 2) + 0.1\Omega$ for et ohmmeter. Dette betyr at usikkerheten blir 0.05% av målt verdi, addert med 2 i siste avlesbare siffer (også hvis siste siffer er null) i målt verdi, addert med 0.1Ω . Dersom man måler en verdi på 8.03Ω blir usikkerheten da $8.03\Omega \cdot 0.05\% + 0.02\Omega + 0.1\Omega$.

8 Antall gjeldende siffer

Hvor mange siffer man skal bruke avhenger av usikkerheten i målingen. Hvis man har en usikkerhet på 65 gir det ikke mening å oppgi en verdi som $1187,567 \pm 65$. Da runder man av til 1190 ± 70 . En tommelfingerregel er at første siffer i usikkerheten bestemmer. Hvis vi har målt $102,6734$ og usikkerheten er $0,534$ vil vi skrive $102,7 \pm 0,5$.

9 Følsomhet, oppløsning og dynamisk område

I flere øvelser kommer vi mye borti begrepene følsomhet, oppløsning og dynamisk område. Det er derfor viktig å ha klart for seg hva begrepene innebærer.

A. Følsomhet

Med følsomhet mener man den minste enheten man klart kan observere med et måleinstrument, hvilket vil si at større følsomhet gjør at den minste målbare enheten blir mindre. Dette henger sammen med usikkerheten i målingen. Endringer som er mindre enn målingens usikkerhet, kan man ikke med sikkerhet si at er faktiske endringer i den målte verdien. Legg merke til at følsomheten til et måleinstrument kan være forskjellig avhengig av hvor store verdier man måler.

B. Oppløsning

Oppløsning er et ord mange er mest vant til å bruke om bilder, jo flere bildepunkter man har, jo flere detaljer er man i stand til å se i bildet. I målinger er betydningen i stor grad den samme; de minste detaljene man er i stand til å se, blir avgjort av målingens følsomhet. Større følsomhet gjør dermed at oppløsningen i målingen blir større. Hvis vi tegner en kurve hvor den ene parameteren har dårlig oppløsning, vil vi få en kurve som går i hakk i stedet for å være glatt.

C. Dynamisk område

Det vanskeligste når man skal lage et måleinstrument er ofte å få et stort dynamisk område. Det vil si at instrumentet kan måle både store og små verdier samt små variasjoner rundt store verdier med liten usikkerhet. Dynamisk område oppgis som et antall størrelsesordener mellom den største verdien man er i stand til å måle med et instrument, og den minste endringen man samtidig kan observere, som altså er instrumentets følsomhet i det gitte måleområdet. For eksempel er det største man kan måle med en ordinær meterstokk 1-2 meter, mens det minste er omtrent en millimeter, avhengig av hvor god meterstokken er. Det gir et dynamisk område på tre størrelsesordener. I en del sammenhenger møter man også definisjoner av dynamisk område hvor det inngår krav til hvor riktig og presist man kan måle den minste endringen, for eksempel kan dette være oppgitt som dynamisk område med en usikkerhet på $X\%$. Når man oppgir et dynamisk område, er det derfor viktig å presisere hvilke krav man stiller til det dynamiske området. Dette er viktig i mange sammenhenger der man trenger stor riktighet og presisjon i måling både av en stor størrelse og av de små fluktuasjonene omkring middelveien. En 16 bits AD-omformer kan sies å ha et følsomhetsområde på $4\frac{1}{2}$ størrelsesordener, fra $2^0 = 1$ til $2^{16} = 65536$. Men fordi presisjonen til instrumentet gjerne er dårlig i siste siffer så tilsvarer ikke dette det dynamiske området. Dersom du ønsker en usikkerhet på bedre enn 1% på alle målinger vil en 16 bits AD-omformer bare ha et dynamisk område på 2-3 størrelsesordener.

STATISTIKK

10 Fordelinger

A. Fordelingen til en måling

Da vi diskuterte riktighet og relativ bias i Seksjon 4A sammenlignet vi \bar{x} , gjennomsnittsverdien av måleresultatene, og det vi kalte sann verdi, som vi kaller X . Som vi så i Seksjon 4B om presisjon, øker presisjonen, altså minkes usikkerheten, jo flere målinger vi gjør: Standardfeilen til gjennomsnittet går mot null med faktor $1/\sqrt{N}$ der N er antall målinger. Dette tyder på at \bar{x} blir en bedre og bedre tilnærming til den sanne verdien X , så lenge vi ikke har systematisk bias. For å systematisere dette må vi først kort diskutere fordelinger og fordelingsfunksjoner.

Som i Seksjon 3.3 i Squires, antar vi at tilfeldige feil i hver enkelt måling skjer uavhengig av hverandre, og under tilsvarende forhold, samt at måleinstrumentet er på en kontinuerlig skala (dette er kun tilnærmet oppfylt i praksis). Hvis man så tar veldig mange målinger, og lager et histogram av målingene, kan histogramstolpene gjøres smalere og smalere og histogrammet av målingene vil nærme seg den såkalte *fordelingen* til observasjonene (se side 11 i Squires). Fordelingen, altså funksjonen $f(t)$ som histogrammene går mot, kalles fordelingsfunksjonen eller *tettheten* (eng. density) til fordelingen.

Løst sagt vil fordelingen til en observasjon gi sannsynlighetstettheten for å få en måling i et visst område, og man kan gjøre sannsynlighetsberegninger ved hjelp av denne tettheten. Siden alle målingene her er antatt å gjøres under lignende forhold, har de alle den samme fordelingen. Ofte er fordelingen $f(t)$ symmetrisk om den sanne verdien X , eller i hvert fall har den *forventning* lik X , altså

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = X$$

Forventningen har fysisk tolkning som balansepunktet til fordelingen $f(t)$. Man kan matematisk vise at gjennomsnitt av målinger \bar{x} konvergerer mot forventningen til hver av målingene, altså $\langle x \rangle$, når antall målinger N øker, og dette kalles store talls lov. \bar{x} blir altså en bedre og bedre tilnærming av den sanne verdien X jo flere målinger vi gjør, siden \bar{x} vil tilnærme $\langle x \rangle$, som er antatt å være lik X .

Vi nevner her at standardavvik σ også defineres formelt ved hjelp av tettheten. Vi kan tolke formelen for $\langle x \rangle$ som et gjennomsnitt (en uendelig Riemann-sum, formalisert ved hjelp av integralet) vektet av tettheten f . På tilsvarende måte kan man motivere følgende formel for standardavviket σ , som man fra en utvidelse av store talls lov kan se at oppfyller $s \approx \sigma$.

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle x \rangle)^2 f(t) dt}$$

Ofte jobber man med σ^2 , kjent som varians, i stedet for standardavvik. For enkelhetsskyld holder vi oss til standardavvik her.

B. Fordelingen til en statistikk

Akkurat som at hver enkelt måling har en fordeling, har også funksjoner av målingene en fordeling. En funksjon evaluert i målingene kalles en *statistikk*. Siden gjennomsnittet \bar{x} er en funksjon av målingene, har også \bar{x} en fordeling. Denne fordelingen har samme tolkning som før, og gir sannsynlighetstettheten til hva gjennomsnittet av N målinger (under et visst oppsett) resulterer i.

Fordelingen til \bar{x} kan man forstå intuitivt hvis man tenker at man gjør en serie med identiske og uavhengige forsøk (hver med N målinger): Hvis man lager et histogram av de resulterende gjennomsnittene, vil dette være nært fordelingen til \bar{x} , på samme måte som illustrert over for fordelingen til selve målingene.

11 Normalfordelingen og sentralgrenseteoremet

A. Normalfordelingen

Kapittel 3 i Squires tar for seg databehandling med en enkelt variabel. Vi plotter data i et histogram som forklart i Seksjon 3.3 og forsøker å finne en fordelingsfunksjon som en tilpasning. Ofte er normalfordelingen (Gauss-fordelingen) en god tilnærming til fordelingen av måleresultater med tilfeldig spredning, se Seksjon 3.5 i Squires.

En måling x er normalfordelt med forventning X og standardavvik σ hvis den har fordelingsfunksjon $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}\right]$. Dette er en symmetrisk funksjon om X , med X som maksimumspunkt. Standardavviket σ gir skalaen på kurven, og målingene har mer variasjon jo høyere verdi av σ .

Tetthetsfunksjonen er nær null tre standardavvik vekk fra forventningen, dvs. $f(x)$ er nær null hvis $|x - X| > 3\sigma$.

En praktisk forståelse av normalfordelingskurven kan oppnås ved å studere sannsynligheten for at x er langt fra forventningen X . Dette er også beregninger som vil være av nytte når vi skal se på konfidensintervaller i Seksjon 13. Vi lar

$$\phi(z) = P(-z\sigma \leq x - X \leq z\sigma)$$

være sannsynligheten for at x er mindre enn z standardavvik vekk fra forventningen (ϕ er den samme funksjonen som i Seksjon 3.6 i Squires). Man kan vise at funksjonen ϕ er uavhengig av både σ og X , og kan derfor for enkelhetsskyld anta at $\sigma = 1, X = 0$ i beregningen av ϕ .

Man får da at $\phi(1) \approx 68\%$, $\phi(2) \approx 95\%$, $\phi(3) \approx 99.7\%$. Dette er den såkalte 68-95-99.7-reglen, og sier at sannsynligheten for å være innenfor ett standardavvik fra forventningen er 68%, for to standardavvik blir det 95% og for tre standardavvik blir det nesten 100%.

For senere bruk i seksjonen om konfidensintervall (Seksjon 13), nevner vi at vi mer nøyaktig har $\phi(1.96) \approx 95\%$. Senere skal vi, litt sleivete, skrive $\phi(1.96) = 95\%$.

Denne reglen gir en rask pekepinn på usikkerheten for normalfordelte målinger: Ved å erstatte forventning med gjennomsnitt, og σ (kalt populasjonsstandardavvik) med standardavvik beregnet fra data får man at rundt 95% av målingene havner i intervallet $\bar{x} \pm 1.96s$, der s er standardavvik beregnet fra data, se formel (2).

B. Sentralgrenseteoremet

Normalfordelingen er et helt spesifikt uttrykk for fordelingsfunksjonen til målingene. Det å anta at målingene er normalfordelte er derfor en sterk antagelse. Dersom dette ikke er oppfylt, vil for eksempel ikke 68,95,99.7-reglen holde.

Som kort diskutert i Seksjon 3.8 i Squires, er en antagelse om normalitet i mange sammenhenger overraskende lite kritisk. Grunnen til dette er at det ofte ikke er essensielt å kjenne fordelingen til hver måling, men heller fordelingen til en statistikk, slik som gjennomsnittet. Dette er tilfellet for eksempel for konfidensintervallene vi skal se på i Seksjon 13. Det matematiske resultatet kjent som sentralgrenseteoremet sier at fordelingen til \bar{x} blir bedre og bedre tilnærmet en normalfordeling med forventning X og med et standardavvik som er tilnærmet lik standardfeilen til \bar{x} , når antall målinger går mot uendelig.

Grunnen til at man ofte er interessert i fordelingen til \bar{x} , er at dette er en estimator av den sanne verdien X . Usikkerhetskvantifisering i form av et konfidensintervall for X , som blir beskrevet nedenfor i Seksjon 13, har en gyldighet som kun avhenger av fordelingen til estimatoren \bar{x} , og denne vil for stort nok antall målinger være tilnærmet normalfordelt. I slike sammenhenger trenger man derfor ikke at selve målingene er normalfordelt.

Hvis målingene i utgangspunktet er nær normalfordelt, noe som ofte er tilfellet, vil fordelingen til \bar{x} være svært godt tilnærmet normalfordelt også ved få målinger. Jo lenger vekk fra normalfordelingen selve målingene er (husk forskjellen mellom fordelingen til målingene og fordelingen til \bar{x} , se Seksjon 10), jo flere antall målinger N må til for at denne tilnærmingen er god. Avstand fra normalitet kan sees ved å sammenligne histogram av målingene med tetthetskurven til normalfordelingen. Når det er få observasjoner er dette ofte vanskelig, da utseendet til histogrammet påvirkes veldig av antallet og bredden av histogramstolpene. Et mer egnet verktøy er såkalte QQ-plott, se Seksjon 12.

12 Evaluering av normalitet (QQ-plott)

La x være normalfordelt med forventning X og standardavvik σ . Dens kumulative fordelingsfunksjon $F(z) = P(x \leq z) = \int_0^z f(t)dt$ vil da være strengt voksende, og dermed ha en invers funksjon F^{-1} .

Invers-funksjonen til en kumulativ fordelingsfunksjon kalles en kvantilfunksjon. La oss sette $Q(p) = F^{-1}(p)$. Kvantilfunksjonen er slik at hvis $F(a) = p$, så er $Q(p) = a$. Hvis man gir en sannsynlighet p inn til en kvantilfunksjon får man ut tallet a , der a er hvor langt ute man må være på tall-aksen før det er p i sannsynlighet for at x er mindre enn a .

Kvantilfunksjonen til hver av målingene kan estimeres, litt på samme måte som at \bar{x} estimerer sann verdi X , og σ kan estimeres av s , men med mer kompliserte argumenter. Vi går ikke inn i detaljer, men bruker Matlabs funksjoner, og lar den estimerte kvantilfunksjonen kalles \hat{Q} .

Hvis målingene er normalfordelte, vil $\hat{Q} \approx Q$. Dette kan man sjekke, og dette gjøres ved hjelp av et såkalt QQ-plott. Vi lar Q være kvantilfunksjonen til en normalfordelt variabel med forventning lik gjennomsnittet til målingene, altså \bar{x} , og standardavvik lik standardavviket til målingene s , se ligning (2). Man plotter deretter punktene $(Q(x_i), \hat{Q}(x_i))$ for hvert av datapunktene. Den rette linjen $y = x$ plottes for sammenligning. Avvik fra den rette linjen indikerer avvik fra normalitet.

13 Konfidensintervaller

Vi skal her kort introdusere en statistisk metode for å uttrykke usikkerheten vi har når vi estimerer den sanne verdien X ved hjelp av \bar{x} . Denne formulerer vi som et såkalt *konfidensintervall*, hvis grenser er funksjoner av målingene, og som er slik at X er inneholdt i intervallet med en forhåndsbestemt sannsynlighet α . For enkelhetsskyld skal vi fokusere på det mest vanlige valget, der $\alpha = 0.95$. Vi antar at det ikke er noe systematisk bias, slik at $\langle x \rangle = X$, og vi ønsker derfor å finne et konfidensintervall for forventningen (altså sann verdi X) til hver av målingene.

Fra sentralgrenseteoremet vet vi at fordelingen til \bar{x} blir bedre og bedre tilnærmet av en normalfordeling med forventning X og med et standardavvik som er tilnærmet lik standardfeilen til \bar{x} , som vi her skriver som $SE(\bar{x})$. Fra 68-95-99.7-reglen, vet vi derfor at \bar{x} er inneholdt i intervallet

$$X \pm 1.96 SE(\bar{x})$$

med tilnærmet 95% sannsynlighet. Ved å invertere dette utsagnet ser vi at den sanne verdien X er inneholdt i intervallet

$$\bar{x} \pm 1.96 SE(\bar{x})$$

med tilnærmet 95% sannsynlighet. Siden dette intervallet kan regnes ut fra kjente størrelser, gir dette et konfidensintervall vi kan bruke i praksis.

Konkret, ved ligningene (2) og (3), får vi følgende formel for et 95% konfidensintervall for den sanne verdien X

$$\bar{x} \pm 1.96 \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Hvis man ønsker en annen α , bruker man kvantilfunksjonen til normalfordelingen og erstatter 1.96 med $\alpha/2$ kvantilen til en normalfordeling med forventning 0 og standardavvik 1. Man kan uttrykke dette ved funksjonen ϕ som ble introdusert i Seksjon 101: Et konfidensintervall for X med dekningssannsynlighet α er

$$\bar{x} \pm z_\alpha SE(\bar{x})$$

der z_α er tallet slik at $\phi(z_\alpha) = \alpha$.

Merk at konfidensintervallene over alle er basert på at gjennomsnittet er tilnærmet normalfordelt, som kommer fra sentralgrenseteoremet. Dekningssannsynligheten vil da kun være tilnærmet lik α . Hvis man gjør den sterkere antagelsen om nøyaktig normalfordelte målinger, kan man utlede et nøyaktig konfidensintervall, slik at X er inneholdt i intervallet med sannsynlighet nøyaktig lik α . Disse intervallene er helt like som de over, men z_α erstattes av et tall som er litt *større*. Slike intervaller brukes ofte i praksis, ikke siden man nødvendigvis tror observasjonene er nøyaktig normalfordelte, men siden de resulterende intervallene må bli (litt) *bredere* blir slike usikkerhetsanslag derfor konservative: For nøyaktig normalfordelte målinger er konfidensintervallet eksakt, mens under ikke-normalitet underestimerer man i hvert fall ikke usikkerheten vi har i estimering av den sanne verdien X i forhold til konfidensintervallet vi får direkte fra sentralgrenseteoremet. Vi utleder ikke matematikken for dette her. Når vi har et stort antall målinger blir konfidensintervallene i praksis like.

14 Introduksjon til lineær regresjon

A. Lineære sammenhenger i fysikk

Vi vil her anta at det er en såkalt lineær sammenheng mellom to størrelser x og y som vi måler parvis flere ganger. Altså har vi ligningen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Merk at vi her bruker noe annen notasjon enn i Squires, og at notasjonen over er den notasjonen som nå er rådende.

Statistisk analyse av lineære sammenhenger er enkel i forhold til ikke-lineære. De fleste relasjoner i fysikk er ikke-lineære, men mange kan omformuleres slik at de uttrykker lineære sammenhenger mellom transformasjoner av variabler av interesse.

Et eksempel (side 33 Squires) er forholdet mellom resistansen R til en semikonduktor og dens temperatur T , der enkel teori foreslår relasjonen

$$R = R_0 \exp\left(\frac{T_0}{T}\right)$$

for konstanter T_0, R_0 . Som beskrevet i Squires, kan man måle resistans og temperatur, og man kan ved hjelp av disse målingene anslå hvor god ligningen over er.

Selv om denne relasjonen ikke er lineær, får man et lineært forhold hvis man jobber med transformasjoner av disse variablene. Ved å ta log på begge sider får man

$$\ln R = T_0 T^{-1} + \ln R_0$$

som for de målbare variablene $y = \ln R$, $x = T^{-1}$ gir en lineær sammenheng

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

for $\beta_1 = T_0, \beta_0 = \ln R_0$.

B. Lineær sammenheng med målefeil

Den lineære sammenhengen mellom x og y er bare eksakt hvis vi kan observere x og y uten usikkerhet. I de fleste sammenhenger har vi usikkerhet, ofte i begge målingene, noe som betyr at forholdet mellom de *målte størrelsene* ikke lenger er lineært, men er forskjøvet av systematisk og tilfeldig støy. Vi antar her at det ikke er noen systematisk feil (altså ingen bias), og at all støy er tilfeldig.

Hvis vi nå skifter betydningen av x og y fra å være størrelsene som har en nøyaktig lineær relasjon (altså i tilfellet der vi ikke har målefeil) til størrelsene vi faktisk måler, kan vi skrive relasjonen mellom x og y ved hjelp av et *feilledd* ϵ som gitt ved

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

Det er viktig her å legge merke til at uten videre antagelser på feilleddet ϵ , vil enhver relasjon mellom x og y kunne skrives på denne måten: La oss si at $y = f(x, r)$, der r er all resterende påvirkning på y som ikke forklares av x . Da kan vi, for valgte tall β_0, β_1 , skrive $y = \beta_0 + \beta_1 x - (\beta_0 + \beta_1 x - f(x, r))$. Lar vi dermed $\epsilon = -(\beta_0 + \beta_1 x - f(x, r))$, får vi $y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$.

Vi skal her gjøre to antagelser: 1) Vi antar at feilleddet har forventning 0, som vil si at vi ikke har systematisk bias, og at forholdet mellom x og y faktisk er lineært. 2) Vi antar også at feilleddet er *ukorrelert* med x . Denne antagelsen er mer komplisert. Merk at den impliserer at vi kun har målefeil i y . Har vi målefeil i både x og y , må vi bruke mer kompliserte metoder enn vi skal introdusere. I følge Squires (s. 30) vil slike mer omfattende metoder ofte gi lignende konklusjoner som metoden vi skal introdusere.

Under disse to grunnantagelsene, ønsker vi å estimere β_0 og β_1 i ligningen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

Det er viktig å innse at vi her kun observerer x og y , som er resultatet av målinger vi gjør. Det vil si at vi har *tre* ukjente, nemlig β_0, β_1 og ϵ . Men siden vi gjør mange målinger, og β_0 og β_1 er de samme tallene *for hver måling*, burde vi kunne estimere β_0 og β_1 godt selv om vi har målefeil. Merk at feilleddet ϵ varierer fra måling til måling.

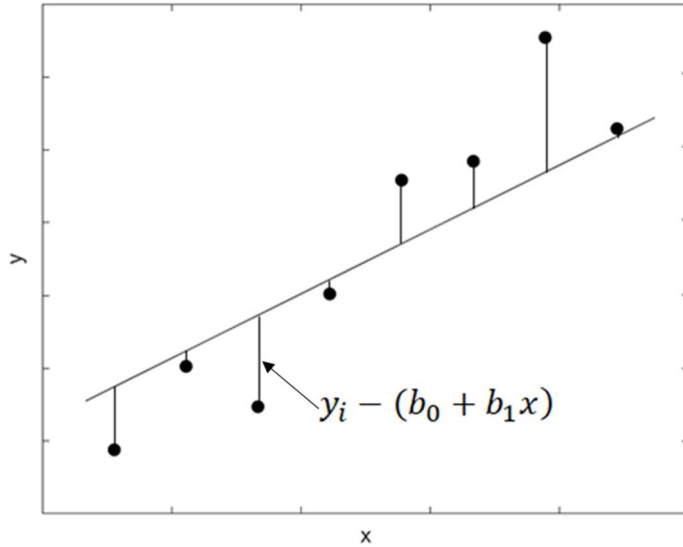
C. Estimeringsteori: Minste kvadraters metode

Vi har tilgjengelig N målingspar av x og y . Det første vi gjør hvis vi tror at en lineær regresjonsmodell er passende, er å plote data i et spredningsplott, og se om observasjonene ser ut til å ligge på en rett linje forskjøvet litt av støy. Hvis dette ikke er rimelig, eventuelt etter transformasjoner til linearitet motivert av fysisk teori, må man bruke andre metoder, som vi ikke dekker her.

Hvis en lineær modell ser rimelig ut, ønsker vi å estimere β_0 og β_1 så godt vi kan. Dette kan gjøres på mange måter, men den klart mest vanlige metoden er minste kvadraters metode. De resulterende estimatene vil konvergere mot β_0, β_1 når antall målinger øker, så lenge de to antagelsene over er opprettholdt.

Denne metoden kan motiveres på mange måter, og kanskje den sterkeste motivasjonen er at dette er en projeksjonsmetode basert på Euklidsk avstand. Dette vil ikke bli diskutert her, og interesserte studenter anbefales å finne en statistikkbok for mer motivasjon for metoden enn intuisjonen vi her skal presentere.

Se Figur 2 under for et spredningsplott av måledataene. Siden målingsparene ikke er på en rett linje, finnes det ingen linje som passerer gjennom alle punktene. Vi ønsker å finne en linje som i gjennomsnitt treffer greit på alle punktene. La oss formalisere det at avvikene en kandidatlinje begår skal være så liten som mulig i gjennomsnitt, og så velge linjen som opprettholder dette.



Figur 2

Minste kvadraters metode. Den beste linjen gjennom alle punktene er slik at summen av kvadrerte residualer $\sum_{i=1}^N (y_i - (b_0 + b_1 x))^2$ er minimert.

En kandidatlinje er $f(x) = b_0 + b_1 x$. I punktet (x_i, y_i) vil kandidatlinjen dermed ha *residual*

$$e_i = y_i - (b_0 + b_1 x)$$

Residualet angir altså hvor mye kandidatlinjen enten over- eller underestimerer den faktiske y_i -målingen. Minste kvadraters metode velger linjen som minimiserer summen av kvadrerte residualer, altså minimiserer

$$S(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (b_0 + b_1 x))^2$$

Dette er et deriverbart uttrykk, hvis minimum følger av rett-frem kalkulus, se Seksjon 4.2 i Squires. Minste kvadraters metode resulterer i estimatene

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

og

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{y} - \widehat{\beta}_1 \bar{x}$$

der \bar{x}, \bar{y} er gjennomsnittsmålingene av de to variablene.

D. Konfidensintervall og usikkerhetsanslag for estimerte størrelser

Hvis det er gjort mange målinger vil, for $j = 1, 2$, fordelingen til $\hat{\beta}_j$ være godt tilnærmet av normalfordelingen med forventning $\hat{\beta}_j$, og med et standardavvik som kan tilnærmes fra data via en standardfeil vi skal kalle $SE(\hat{\beta}_j)$. Dette gir oss med en gang konfidensintervall for $\hat{\beta}_j$, på nøyaktig samme måte som i Seksjon 13: Et konfidensintervall med tilnærmet 95% dekningsgrad er igjen

$$\hat{\beta}_j \pm z_\alpha SE(\hat{\beta}_j)$$

Noen flere tekniske antagelser for at dette stemmer kreves, og formlene for standardfeil er nå mer kompliserte (og er enklest å forstå via matrisesalgebra). Vi skal ikke utlede eller gi disse formlene her

(se Appendix C i Squires). Standardfeil kan fås av Matlab, og det er dette man gjør i praksis. Isteden oppsummerer vi her antagelsene som skal til for at disse (og resulterende konfidensintervaller) er gyldige. Merk at det finnes flere forskjellige formler for standardfeil, og at disse er gyldige under forskjellige antagelser. Vi ser her kun på den mest vanlige situasjonen, som også er det som Matlabs *fitlm*-kommando bruker.

Vi antar at standardavviket til feilleddene ϵ_i for $i = 1, 2, \dots, N$ er lik. Dette kalles homoscedastisitet. Hvis dette ikke er oppfylt må man bruke andre metoder (som støttes av Matlab ved hjelp av andre kommandoer). Videre antar man at x -verdiene er sett på som gitte (noe man som oftest kan gjøre under rammeverket vi jobber med her), og at hvert feilledd ϵ_i er normalfordelt (vi antar allerede at feilleddene har forventning null og konstant standardavvik). Under disse antagelsene får man konfidensintervall med nøyaktig dekningsgrad, og med samme formel som over, men der z_α erstattes av et litt annet tall, la oss si t_α . Igjen er t_α litt større enn z_α , så konfidensintervallet blir alltid litt større enn det basert på tilnærmet normalitet.

Hvis man har få målinger er man nødt til å gjøre sterke antagelser. Matlab antar altså blant annet at feilleddene er nøyaktig normale. Hvis man har få målinger må man derfor forsikre seg om at dette ikke er helt urimelig. Dette kan gjøres ved å se på residualene

$$e_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$$

Mange egenskaper ved residualene vil gjenspeile egenskaper ved feilleddene, og dette gjelder også normalitet. Man kan anslå om residualene er normale, og dette vil (i passende teknisk forstand som ikke gjøres rigorøst her) gi gyldige konklusjoner også for feilleddene. Dette kan blant annet gjøres ved å se på et QQ-plot for residualene.

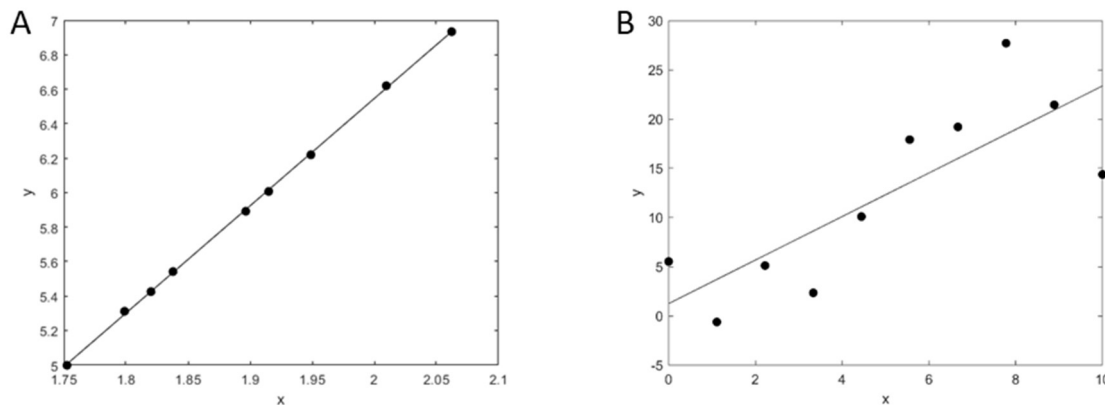
Residualer er også viktige for å anslå om antagelsen om homoscedastisitet (altså at feilleddene, tilnærmet ved hjelp av om residualene er normale), er rimelig. Se <https://se.mathworks.com/help/stats/residuals.html> for informasjon om praktisk bruk av residualer i Matlab (merk at homoscedastisitet ofte defineres som at residualene har konstant *varians*, og at varians er kvadrert standardavvik, som altså sammenfaller med vår definisjon). For å anslå homoscedastisitet bør man plote (x_i, e_i) , altså x -måling mot residual, og også (i, e_i) , altså målerekkefølgen mot residual. Man ønsker at disse plottene skal se helt tilfeldige ut, og at variasjonen skal være konstant. Hvis dette ikke er tilfellet, må andre metoder benyttes hvis man ønsker gyldige standardfeil og konfidensintervaller.

I mer kompliserte regresjonsmodeller er residualanalyse viktig også for å se om linearitetsantagelser som ligger til grunn for slike modeller ser ut til å være oppfylt. Her jobber vi med en regresjonsmodell der vi kun har én forklaringsvariabel, og linearitet sees som oftest enkelt fra spredningsplottet mellom x og y , som beskrevet i starten av denne seksjonen. Vi bemerker her kun at hvis man ser en systematisk trend i residualene, vil antagelsen om at forventningen til feilleddet er null for alle feilledd være urimelig, og man må undersøke antagelsen om linearitet nøyere.

E. Forklaringsgrad, målt av R^2

Det finnes svært mange verktøy som man kan benytte i praktisk anvendelse av lineær regresjon. Her skal vi kun raskt introdusere ett verktøy, nemlig et mål på forklaringsgrad, kalt R^2 .

Formelen for R^2 kan skrives på flere måter, og disse gir forskjellige tolkninger. Vi skal her kun fokusere på én tolkning av R^2 , som gir et mål på hvor tett målingene våre følger en rett linje.



Figur 3: Linjetilpasninger for to forskjellige datasett med ulike grader av støy. A. $R^2 = 1$ og B. $R^2 = 0.64$.

I fysikk jobber man for å få så lite målestøy som mulig, og fysisk teori kan brukes for å finne transformasjoner av målingene som resulterer i nært nøyaktig lineære sammenhenger. Dette resulterer i at måledata i fysikk ofte følger en rett linje ganske tett, og situasjoner så gode som i Figur 3A (fra eksempel (d) i Squires, Seksjon 4.3, s. 35) er ikke uvanlig. I Figur 3B ser vi et eksempel med mer støy hvor målingene følger den rette linjen i mye mindre grad.

I formelen til R^2 måler vi variasjonen til residualene ikke ved hjelp av standardavviket, men kvadrert standardavvik, altså *varians*. Vi kvantifiserer derfor residualvariasjonen ved

$$Var_{Residuals} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (e_i - \bar{e})^2$$

Man kan matematisk vise (vi hopper over utledningen) at $\bar{e} = 0$, og vi får

$$Var_{Residuals} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N e_i^2$$

Skalaen til residualvariansen avhenger av skalaene til variablene, og siden man kan vise at man alltid har $0 \leq Var_{residuals} \leq Var_y$, der

$$Var_y = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

Denne ulikheten gir den tilsvarende ulikheten

$$0 \leq \frac{Var_{residuals}}{Var_y} \leq 1$$

Hvis residualene alle er lik null, ligger punktene nøyaktig på en linje, og $Var_{residuals} = 0$. Siden

$$Var_{Residuals} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N e_i^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2$$

ser vi tilsvarende at man får $Var_{residuals} = Var_y$ når det estimerte lineære forholdet mellom x og y er konstant gitt ved gjennomsnittet til y .

Vi tolker derfor

$$\frac{Var_{residuals}}{Var_y}$$

som andel *uforklart* variasjon, og definerer

$$R^2 = 1 - \frac{Var_{residuals}}{Var_y}$$

som tolkes som andel *forklart* variasjon.

Når $R^2 = 1$ vil punktene være på en perfekt ikke-horisontal rett linje, og når $R^2 = 0$ estimeres det lineære forholdet til å være uavhengig av x , altså har x ingen evne til å forklare variasjonen i y .

Verdier mellom ytterpunktene kan analyseres på tilsvarende måte, og høye verdier, slik som f.eks. $R^2 = 0.975$ tilsvarer at punktene følger linjen svært godt. Oppførselen til R^2 mellom ytterpunktene kan gjøres presist, blant annet ved å relatere R^2 til den såkalte korrelasjonskoeffisienten, men dette skal vi ikke inn på her.

15 Poissonfordelingen

Vi har hittil kun sett på normalfordelingen. Normalfordelingen er for kontinuerlige observasjoner. Vi skal nå se på tilfellet der vi har heltallsobservasjoner, altså diskrete observasjoner.

Poissonfordelingen er en diskret sannsynlighetsfordeling som uttrykker sannsynligheten for at et gitt antall sjeldne hendelser forekommer i løpet av et gitt intervall i tid eller rom. Vi skal ikke gjøre dette matematisk presist her, men nevne at denne fordelingen beskriver mange fenomener i fysikk svært godt, og se på en klassisk anvendelse innen telling av radioaktive henfall.

Vi har en kilde med N radioaktive kjerner. Sannsynligheten for emisjon av k partikler (f.eks. γ -kvanter) fra kilden i løpet av tiden Δt er gitt ved

$$P(k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

der

$$q = e^{-\Delta t/\tau} \text{ og } p = 1 - q.$$

Tiden τ er karakteristisk for den radioaktive kjernen, og halveringstiden $t_{1/2}$ er gitt ved $\tau \ln 2$. Vi regner med at $t \ll \tau$, slik at vi kan sette

$$1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \approx \frac{\Delta t}{\tau}$$

Vi antar videre at $k \ll N$, slik at

$$\binom{N}{k} \approx \frac{N^k}{k!}$$

Med disse tilnærmelsene får vi

$$P(k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m} = \frac{m}{1} \frac{m}{2} \dots \frac{m}{k} e^{-m}$$

Her er $P(k)$ sannsynligheten for å observere antallet k pulser i et tidsintervall Δt , og m er det gjennomsnittlige antall pulser i tiden Δt , definert ved

$$m \equiv \frac{N\Delta t}{\tau}$$

Gjennomsnittet kan regnes ut fra:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N'} f_j k_j.$$

Hvor N' er antall forskjellige k -verdier (inkludert 0), og f_j er antall ganger verdien k_j er observert (frekvensen). Totalt antall observasjoner er $N = \sum f_j$.

For lave verdier av m blir Poissonfordelingen skjev, for store verdier av m nærmer den seg normalfordelingen. Som mål for spredningen brukes standardavviket s . Det er definert ved

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (k_i - m)^2}.$$

For Poissonfordelingen kan standardavviket s skrives

$$s = \sqrt{m}.$$

Dersom vi gjør kun én observasjon er den observerte verdi k det beste (eneste) estimat vi har for middelveien m . Estimaten for standardavviket er da

$$s = \sqrt{k}.$$

Standardavviket s_n på telleraten $n = k/\Delta t$ blir, når vi ser bort fra usikkerheten i Δt ,

$$s_n = \frac{\sqrt{k}}{\Delta t} \quad (3)$$

Den relative usikkerheten er den samme for k og n . For å minimere usikkerheten må vi måle over så lang tid at k blir minst 100 pulser. Måler vi over så lang tid at telleren viser ca. 1000 pulser, får vi en relativ usikkerhet på $\frac{1}{\sqrt{1000}}$, eller ca. 3%. Den relative usikkerheten i telleraten blir den samme om vi måler i mange (M) korte tidsintervaller Δt som om vi foretar én måling i et tilsvarende langt tidsintervall $T = M \Delta t$. Det tjener altså ingen hensikt å dele måleserien opp i mange korte intervaller når man har en Poissonfordeling. Derimot kan det være en kontroll på at måleapparatene fungerer riktig å undersøke om tellingene i kortere intervaller fordeler seg etter en Poissonfordeling.

RAPPORTSKRIVNING

Rapporter, avhandlinger eller artikler er tekster for å kommunisere til andre hva du har funnet. Kapittel 13 i Squires gir en relativt kort og god beskrivelse av hvordan man bør skrive en artikkel og mye av dette gjelder også for en rapport.

På canvas finnes maler i Word og LaTeX for hvordan vi tenker at 2150-rapporter burde se ut. Oppsettet ligner på en typisk publisert vitenskapelig artikkel. Malen inneholder tips om innholdet og struktur/form samt en huskeliste. Målet med rapporten er å underbygge konklusjonen(e) med tydelig informasjon, observasjoner, og diskusjon. For ethvert skriftlig arbeid er det viktig å treffe sitt publikum (dere skal sikte på studenter på samme nivå i studiene, men som ikke har tatt 2150 ennå).

Rapportene skal ikke være for lange! Skriv kort og presist, ikke over 10 sider.

Til sist følger en vurderingsveiledning for retting av rapporter. Det er denne dere skal bruke når dere skal "peer-reviewe" hverandres rapporter. Den vil også bli brukt til eksamen. Det er derfor lurt å lese den godt igjennom før dere skriver rapport og bruke den som en sjekkliste underveis!

Vurderingsveiledning for FYS2150-rapporter

Kriterier	Poeng
Abstract Det første avsnittet, som kalles abstract eller sammendrag, skal inneholde noen få linjer om hensikt, gjennomføring og de viktigste konklusjonene i oppgaven.	5,0 poeng
Introduksjon I introduksjonen skal dere fortelle om bakgrunnen for og hensikten med det dere har gjort. Prøv å forklare for en utenforstående hvorfor det vi har gjort er viktig. Ved slutten av Introduksjon skal leseren ha god peiling om hva som kommer i resten av rapporten.	5,0 poeng
Teori Teoridelen skal gi den nødvendige bakgrunnskunnskapen for å forstå det dere beskriver i resten av rapporten. For å unngå å gjengi mye teori kan dere hen vise til lett tilgjengelige kilder. Alle formuler som skal brukes i rapporten bør være presentert i teoridelen og skal ha likningsnummer.	5,0 poeng
Eksperimentelt Beskriv hvordan dere faktisk utførte målingene, hvilket måleutstyr dere brukte og hvilke nøyaktigheter eller toleranser som er oppgitt fra produsenten der det er relevant. Tegn enkle skisser som beskriver målesituasjonen. Dere kan referere til oppgaveteksten, men dere må ha med såpass mye informasjon at en som ikke har oppgaveteksten foran seg, kan følge hovedtrekkene i det dere har gjort. Generelle usikkerhetsberegninger og toleranser til instrumentene presenteres i denne delen. Dersom laboppgaven har flere adskilte deler, kan dere beskrive hver del for seg med underoverskrifter. Dette gjelder også for resultat- og diskusjonsavsnittene.	10,0 poeng
Resultater Dette avsnittet inneholder observasjoner og data, med forklaringer men uten tolkninger. Beregninger av størrelser avledet av rådataene presenteres også i dette avsnittet. Henvis klart til hvilke formuler som er brukt i beregninger. Observasjoner av ting som hendte under eksperimentet som ikke var planlagt, men som kan ha påvirket målingene, må også nevnes her.	10,0 poeng
Diskusjon Her presenterer dere diskusjoner av resultatene. Tallresultater med usikkerheter danner grunnlaget for diskusjonen og skal nevnes eksplisitt. Sammenlign resultatene med teori der det er aktuelt. Stemmer resultatene med forventningene? Stemmer deres resultater overens (dvs. innenfor usikkerheter) med det andre har målt eller det dere kommer frem til i teorien? Hvorfor er det evt. ikke overensstemmelse? Har dere grunn til å forkaste noen måledata?	10,0 poeng

<p>Konklusjon</p> <p>En kort oppsummering av hovedresultatene og konklusjonen av diskusjonen. Det er du og ikke leseren som skal trekke konklusjoner fra målingene. Dette avsnittet ligner ofte på det som står i sammendraget (abstract) helt foran i rapporten.</p>	5,0 poeng
<p>Forståelse</p> <p>Viser rapporten: at du forstår teorien som du beskriver (5p), begrensninger og utfordringer i eksperimentelt oppsett (5p), hvordan usikkerhetene skulle estimeres og/eller forplantes (5p), hvordan dataene kunne tolkes (5p)?</p>	20,0 poeng
<p><i>Mulighet for trekk:</i> Følger ikke riktig oppsett</p> <p>Rapporten inneholder ikke Abstract, Introduksjon, Teori, Eksperimentelt, Resultater, Diskusjon, Konklusjon, som anbefalt i Mal for rapportskriving i FYS2150.</p>	- 10,0 poeng
<p><i>Mulighet for trekk:</i> Alle oppgaver er ikke besvart</p> <p>Sjekk om alle spørsmål som stilles i øvelsesteksten er besvart</p>	- 15,0 poeng
<p>Alle symboler er definert i teksten</p>	1,0 poeng
<p>Alle likninger, figurer og tabeller er beskrevet i teksten</p>	3,0 poeng
<p>Figur og tabelltekster</p> <p>Figurene og tabellene beskrives konsist med under- eller over-tekster med nok informasjon til at leseren slipper å bla for mye i hovedteksten for å forstå figurene/tabellene</p>	2,0 poeng
<p>Leselige figurer, oversiktlige tabeller</p> <p>Alle figurer og tabeller må være pene, oversiktlige og entydige. Figurakser må ha betegnelse (som er stor nok til å leses).</p>	7,0 poeng
<p>Riktig antall gjeldende sifre</p> <p>Målte og beregnede tall oppgis med det antall gjeldende sifre som datagrunnlaget gir dekning for, dvs det er gitt av størrelsen på presisjonen (eller nøyaktigheten).</p>	1,0 poeng
<p>Benevninger</p> <p>Alle tall som oppgis må ha benevning.</p>	1,0 poeng

<p>Helhetsinntrykk</p> <p>Er rapporten ryddig og lettlest? Er det enkelt å se sammenhengen mellom de forskjellige delene og en progresjon fra introduksjonen til konklusjonen? Passer detaljnivået med forsøkets kompleksitet?</p>	15,0 poeng
--	------------