Elastisitet
FYS 2150

Fysisk institutt, Universitetet i Oslo

(Revidert 2020, Nina Edin)

I denne øvelsen vil dere bestemme elastisitetsmodulen til messing på to forskjellige måter. Resultater fra statisk nedbøying av en sylindrisk messingstav skal sammenlignes med en dynamisk bestemmelse ved måling av lydhastigheten i staven.

I. INTRODUKSJON

Et kjennetegn på en god teori, eller modell for et fysisk system, er at flere fenomener kan beskrives med et mindre antall parametre. Dere skal her undersøke om både statisk nedbøying av en messingstav og hastigheten av lyd i samme stav kan beskrives med en felles elastisitetsmodul E (Young's Modulus). E sier noe om hvor stivt et materiale er og beskriver forholdet mellom trykk og deformasjon.

Dere vil ha bruk for måleteknikk og dataanalyse som har brukt tidligere i kurset.

II. BAKGRUNN

1. En bjelkes nedbøying

I følge wikipedia [1] er defleksjon $h(m)$ midt i en bjelke støttet på to punkter med avstand l og last (kraft) mg på sentrum i bjelken gitt ved

$$h(m) = \frac{mgl^3}{48EI}, \qquad (1)$$

der E er elastisitetsmodulen ("Young's Modulus") og I er andre arealmomentet ("second moment of area") på tvers av bjelken:

$$I = \int\int z^2\, dy\, dz, \qquad (2)$$

der lasten er i z-retning og bjelken strekker seg i x-retning. For en sylinder av diameter $d = 2r$ blir arealmomentet

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} (r\sin\theta)^2 r\, dr\, d\theta = \frac{\pi d^4}{4\cdot 2^4}\ . \qquad (3)$$

Dere skal måle stigningsforholdet A i en lineær tilpasning til plottet mellom defleksjonen $h(m)$ og en variert masse m:

$$h(m) = A\,m + B\ , \qquad (4)$$

der verdien av B skal være konsistent med 0, gitt usikkerheten i målingene. Løser vi ligning (1) for E, setter inn I for sylinder-staven vi skal bruke, og erstatter $h(m)/m$ med A, får vi et utrykk for elasitisitetsmodulen vi kan teste:

$$E = \frac{4l^3 g}{3\pi|A|d^4}\ . \qquad (5)$$

2. Dynamisk bestemmelse av E ved måling av lydhastighet

Denne metoden for bestemmelse av E beror på at utbredelses-hastigheten v for longitudinalbølger i en stav er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

der ρ er mediets tetthet. Utbredelseshastigheten v kan bestemmes ved å måle sammenhørende verdier av frekvens f og bølgelengde λ idet vi har sammenhengen

$$v = \lambda f.$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Deflection_(engineering)

Bølgelengde og frekvens kan bestemmes ved måling på en stående bølge i staven. Det kan vises (se Appendiks A) at ved frie longitudinelle svingninger i en homogen stav med lengde L opphengt i midtpunktet og med frie ender, får vi stående bølger slik at

$$L = n\frac{\lambda}{2} \text{ der } n = 1, 3, 5, \ldots$$

Ved å gi staven et slag i aksial retning, eksiteres flere av disse stående bølgene (egensvingninger), men den med lengst bølgelengde, $\lambda = 2L$, blir den sterkeste og dempes minst. Etter en kort tid er derfor dette den dominerende bølgen i staven. Ved passende valg av L gir disse svingningene hørbar lyd i luften omkring staven.

Frekvensen f kan bestemmes ved å sammenligne lyden fra staven med lyden fra en høyttaler som er koplet til en tonegenerator. Sammenlikningen foregår ved å observere svevninger mellom lyden fra staven og lyden fra høyttaleren (se **Squires kapittel 6.6**). Målingen går ut på å innstille høyttaleren slik at svevefrekvensen blir så liten som mulig (i grensetilfellet 0), og så måle høyttalerfrekvensen som da er lik frekvensen f for bølgen i staven (grunntonen). Svevningene blir mest utpreget og lettest å høre når de to lydene er omtrent like sterke.

Frekvensen kan også måles ved opptak av lydsignalet med en mikrofon koblet til PC-en og en analyse av signalets frekvensspektrum. Koden dere brukte i øvelsen "Lengde, hastighet og akselerasjon" kan gjenbrukes her med små modifikasjoner. Hva begrenser presisjonen for denne metoden?

For hastigheten v har vi da

$$v = 2Lf\ .$$

Tettheten ρ til materialet i staven kan bestemmes ved å måle stavens lengde L, diameter d og masse M. Da er

$$\rho = \frac{4M}{\pi d^2 L}.$$

For E får vi uttrykket

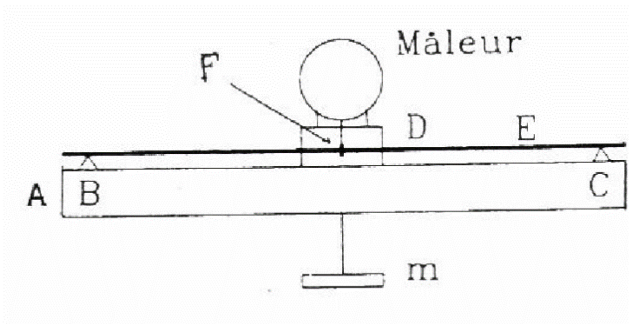
$$E = \frac{16MLf^2}{\pi d^2}, \qquad (6)$$

slik at vi kan bestemme E ved å måle grunntonefrekvensen f og stavens lengde, diameter og masse.

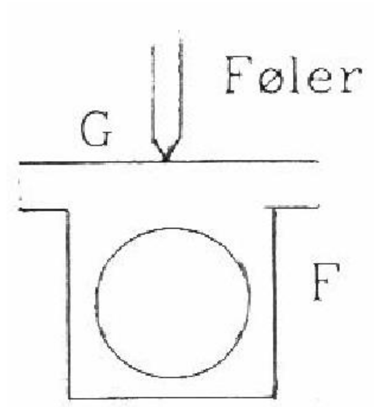
III. LABORATORIEØVING

1. Apparatur for måling av en bjelkes nedbøying

Apparaturen er vist skjematisk i fig. 1. En bjelke A med u-profil er utstyrt med to kniver B og C og et stativ D med måleur. Knivene og stativet kan forskyves langs A. Prøven E (messingstaven) som skal undersøkes, hviler på knivene. På prøven er montert en holder F, se fig. 1.



Figur 2: Apparatur for måling av en bjelkes nedbøying



Figur 1: Detalj fra fig. 1. Tverrsnitt gjennom prøven ved holderen.

Måleurets føler registrerer den vertikale posisjonen til holderens anleggsflate G, se fig. 2. En vekt, grove lodd, presisjonslodd, et målebånd og et måleur inngår i apparaturen.

Oppgave 1. Bøying av en messingstav med sirkulært tverrsnitt

Legg staven slik at avstandene mellom holderen F og knivene B og C blir like store. Drei staven til anleggsflaten G blir horisontal.

- Bestem anleggsflatens vertikale posisjon $h(m)$ som funksjon av belastningen m, for $m = \{0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5\}$ kg. Fremstill måleresultatene grafisk. Loddene må kalibreres på balansevekten før målingen.

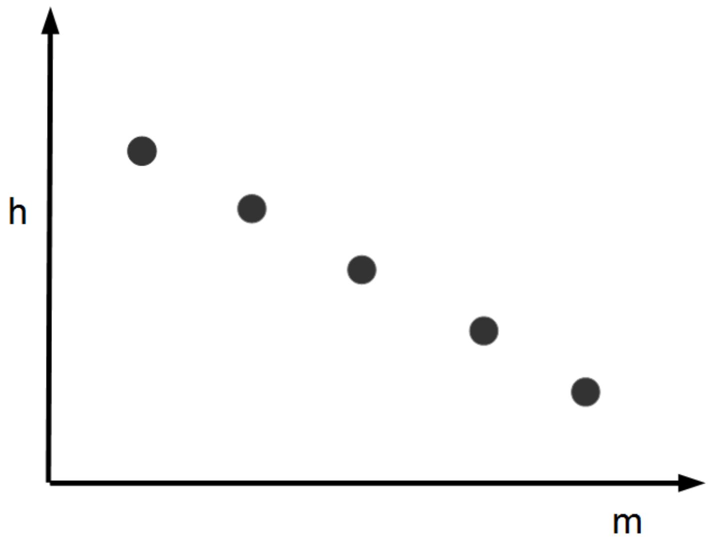
- Sammenhengen mellom m og h er forventet å være lineær, som antydet i fig. 3. Vi ønsker å legge en rett linje $h = Am + B$ på beste måte gjennom målepunktene, og bestemme linjens stigningsforhold A med usikkerhet s_A. Dette gjøres ved hjelp av minste kvadraters metode (se prelab-oppgavene 3 og 4).

- Bestem stigningsforholdet A med usikkerhet s_A. Er avvikene mellom tilpasset linje og datapunktene i overenstemmelse med måleusikkerheten?

- Mål stavens diameter d og avstanden l mellom knivene. Anslå usikkerhetene i d og l.

- Beregn E og den totale usikkerheten s_E ved hjelp av hhv. ligning 5 og uttrykket

$$s_E = E\sqrt{\left(\frac{s_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{4s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{3s_l}{l}\right)^2}.$$



Figur 3: Målte verdier av h ved ulik belastning m.

Oppgave 2. Dynamisk bestemmelse av elastisitetsmodulen

- Mål stavens lengde L, diameter d og masse M. Anslå usikkerhetene i L, d og M.

- Bruk verdiene for L, d og M sammen med verdien for E funnet ved bøyingsforsøk til å beregne en tilnærmet verdi for grunnfrekensen f fra likning 6. Innstill denne frekvensen på tonegeneratoren. Se Appendiks D for en innføring i hvordan du bruker tonegeneratoren.

- La staven ligge på bordet og gi den et aksialt slag med en plasthammer. Etter kort tid er det grunnfrekvensen man hører fra staven.

  Reguler styrken på høyttaleren slik at man tydelig kan høre svevninger mellom lydene fra høyttaleren og staven. Reguler så høyttalerfrekvensen til svevningsfrekvensen er tilnærmet lik null. Den frekvensen man da måler tas som den beste verdi for grunnfrekvensen f. Anslå usikkerheten i f. Beregn verdien av E fra likning 6, og usikkerheten i E som er gitt ved

$$s_E = E\sqrt{\left(\frac{2s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{2s_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{s_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{s_M}{M}\right)^2}.$$

- Mål frekvensen med lydopptak og FFT-analyse. Sammenlign resultatene med sveve-metoden.

“Full overensstemmelse” mellom to måleresultater skulle tilsi at differansen D mellom dem er null. På grunn av måleusikkerhet aksepterer vi “overensstemmelse” selv om D er noe forskjellig fra null. Usikkerheten i $D = E_1 - E_2$ er gitt ved

$$s_D = \sqrt{s_{E_1}^2 + s_{E_2}^2}.$$

Hvis $|D| < s_D$ er det derfor stor sannsynlighet for at forskjellen bare skyldes tilfeldige avvik på grunn av måleusikkerhet. I slike tilfeller må vi akseptere at det er “overensstemmelse innenfor måleusikkerheten”. Er $|D| > 2s_D$, er det på den annen side liten sannsynlighet for at forskjellen beror på måleusikkerhet.

- Undersøk om dine to verdier for elastisitetsmodulen kan anses som like innenfor måleusikkerhetene.

IV. Utstyrsliste

Messingbjelke montert på to kniver med vekt og måleur

Grove lodd

Presisjonslodd

Balansevekt

Meterstokk

Skyvelær

Plasthammer

Mikrofon

Tonegenerator

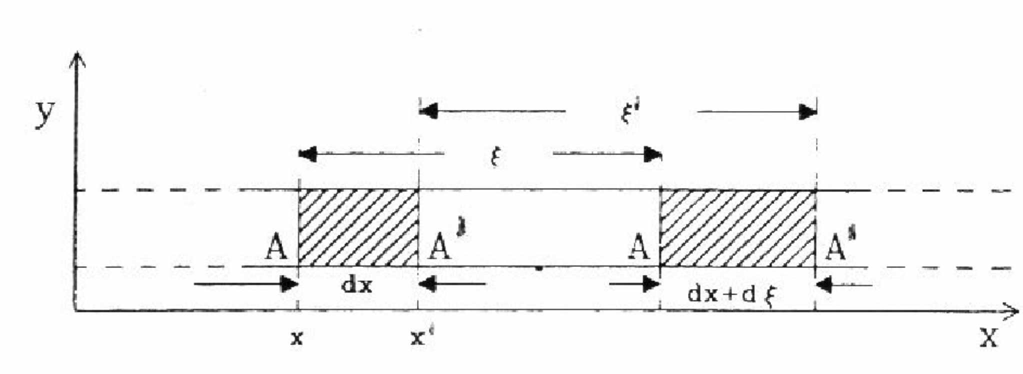
Høyttaler

Koaks-banan-kabel

initDaqSession.m

FFTlyd.m

V. Appendiks



Figur 4: Parametre for beskrivelse av elastiske bølger i en stav.

A. Elastiske bølger i en stav

Fig. 4 viser et utsnitt av en rett, jevntykk og homogen stav. Staven befinner seg opprinnelig i en likevektstilstand. Et aksialt støt bringer staven ut av likevektstilstanden ved at hvert tverrsnitt forskyves en strekning ξ i stavens lengderetning. Forskyvningen er en funksjon av tverrsnittets likevektsposisjon x. Den nye tilstanden er vanligvis ikke en likevektstilstand. Staven vil derfor være i bevegelse. Bevegelsen vil være fullstendig beskrevet når vi kjenner ξ som funksjon av posisjonen x og tiden t, dvs. $\xi = \xi(x,t)$. For å bestemme denne funksjonen, tar vi for oss et utsnitt (skravert) av staven mellom tverrsnittene A og A', som i likevektstilstanden har posisjonene x og $x + dx$, se fig. 4. Ved tiden t er forskyvningene av de to tverrsnittene gitt ved $\xi = \xi(x)$ og $\xi' = \xi(x + dx) = \xi + d\xi$. Massen til det skraverte utsnittet er $\mathrm{d}m = \rho_0 A \mathrm{d}x$, der ρ_0 er stavens opprinnelige tetthet. Utsnittets akselerasjon i x-retningen er

$$a = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} .$$

Resultantkraften $\mathrm{d}F$ på utsnittet i x-retningen skyldes normalspenningen R (kraft per arealenhet i lengderetningen) som virker over A og A'. Normalspenningen er en funksjon av tverrsnittets likevektsposisjon x og t, $R = R(x,t)$. På tverrsnittene A og A' virker følgelig kreftene $AR(x,t)$ og $AR(x + \mathrm{d}x, t)$, som gir

$$\mathrm{d}F = AR(x + \mathrm{d}x, t) - AR(x,t)$$
$$= A\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x$$

Avstanden mellom A og A' er etter forskyvningen

$$(x' + \xi') - (x + \xi) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}\xi.$$

Den skraverte delen av staven har derfor en relativ forlengelse

$$e = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}.$$

Ifølge definisjonslikningen for elastisitets-modulen har vi

$$R = Ee = E\frac{\partial \xi}{\partial x},$$

slik at $\mathrm{d}F = AE\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\mathrm{d}x$. Vi benytter til slutt Newtons 2. lov $\mathrm{d}F = a\mathrm{d}m$ og finner bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{der } v^2 = \frac{E}{\rho_0}$$

Bølgelikningen har løsninger av formen $\xi(x,t) = f(x \pm vt)$, det vil si longitudinelle bølger med forplantningshastighet v.

B. Stående bølger i en stav festet i midtpunktet.

Vi legger x-aksens origo i stavens midtpunkt som skal ligge fast, slik at $\xi(0,t) = 0$. Kreftene som virker i stavens endepunkter $x = \pm\frac{L}{2}$ er lik null, hvilket medfører at

$$\left(\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}\right)_{x=\pm\frac{L}{2}} = 0.$$

Funksjonen $\xi = \frac{\xi_0}{2}[\sin(kx+\omega t) + \sin(kx - \omega t)] = \xi_0 \sin kx \cos\omega t$ tilfredsstiller bølgeliknigen og den første grensebetingelsen såfremt $\frac{\omega}{k} = v$. For å tilfredsstille de andre grensebetingelsene må vi kreve at

$$k\frac{L}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

det vil si $k = (2n+1)\frac{\pi}{L}$. Bølgelengdene $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ svarende til de forskjellige egensvingningene (“normal modes”) blir

$$\lambda = 2L, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{5}, \dots$$

Fra $v^2 = \frac{E}{\rho_0}$ og $\rho_0 = \frac{M}{L\cdot\pi\cdot r^2}$ får vi at grunntonens frekvens er

$$f = \frac{d}{4}\sqrt{\frac{\pi E}{ML}}.$$

C. Svevninger

se også Squires kap. 6.6.

En harmonisk løsning av bølgelikningen har formen

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

der $\frac{\omega}{k} = v$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ og $\omega = 2\pi f$. For en bølge som er sammensatt av to harmoniske bølger, blir

$$\begin{aligned}\xi = {} & \xi_0[\sin(kx - \omega t) + \sin(k'x - \omega' t)] \\ = {} & 2\xi_0 \cos\frac{(k'-k)x - (\omega'-\omega)t}{2} \\ & \times 2\sin\frac{(k'+k)x - (\omega'+\omega)t}{2}\end{aligned}$$

Hvis $k' \approx k$ og $\omega' \approx \omega$, får vi tilnærmet

$$\xi \approx 2\xi_0 \cos\frac{(\Delta kx - \Delta\omega t)}{2}\sin(kx - \omega t),$$

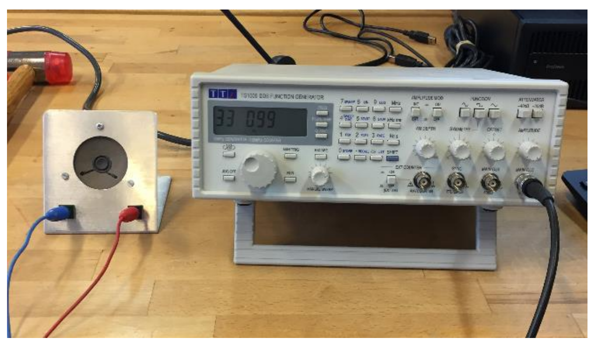
der $\Delta k = k' - k$ og $\Delta\omega = \omega' - \omega$. Vi ser at bølgen kan oppfattes som et produkt av en raskt svingende del, $2\xi_0\sin(kx - \omega t)$, og en langsomt svingende del,

$$\cos\frac{(\Delta kx - \Delta\omega t)}{2},$$

med forplantningshastighet $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Variasjonene i amplituden til den raskt svingende delen kalles svevninger (eng. beats). Svevningenes frekvens f_S er

$$f_S = \frac{|\omega - \omega'|}{2}\frac{1}{2\pi}.$$

D. Tonegeneratoren



Figur 5: Tonegenerator med riktige innstillinger og riktig kobling til høyttaleren.

Figur 5: Tonegenerator med riktige innstillinger og riktig kobling til høyttaleren. viser tonegeneratoren med riktige innstillinger og riktig kobling til høyttaleren. Vi skal bruke følgende innstillinger: AMPLITUDE MOD: EXT + OFF (begge ut). FUNCTION: Sinus. ATTENUATOR: -20 dB

Vi skal koble en koaks-kabel fra utgangen merket MAIN OUT på tonegeneratoren til de to inngangene på høyttaleren.

For å stille inn en frekvens: velg FREQ, tast så inn ønsket frekvens og velg størrelsesorden (MHz, kHz eller Hz). Du kan også endre frekvensen med vrideren under displayet. For å endre oppløsning på vrideren, trygg JOG (flere ganger om nødvendig)

Vrideren helt til høyre på tonegeneratoren merket AMPLITUDE endrer volumet på signalet.