

# Mecánica de fluidos

Bogurad Barański Barańska      Adrián Teixeira de Uña

29 de mayo de 2024



# Índice general

Índice general	II
<b>1. Fundamentos y propiedades de los fluidos.</b>	<b>1</b>
1.1. Hipótesis de medio continuo. . . . .	1
1.2. Ecuaciones equilibrio termodinámico local. . . . .	3
1.3. Fuerzas y respuestas en sólidos y fluidos . . . . .	3
1.4. Mojabilidad. . . . .	7
<b>2. Cinemática de la partícula fluida.</b>	<b>9</b>
2.1. Repaso del operador nabla. . . . .	9
2.2. Conceptos fundamentales. . . . .	10
2.3. Clasificación de los flujos. . . . .	11
2.4. Derivada sustancial, local y convectiva. . . . .	12
2.5. Movimiento diferencial en torno a un punto. . . . .	14
2.6. Movimiento de la partícula fluida en una dirección. . . . .	15
<b>3. Conservación de la masa.</b>	<b>17</b>
3.1. Teorema del transporte de Reynolds. . . . .	17
3.2. Flujo sobre una superficie. . . . .	19
3.3. Propiedades en forma diferencial. . . . .	19
<b>4. Conservación de la cantidad de movimiento.</b>	<b>21</b>
4.1. Teorema del transporte de Reynolds para la cantidad de movimiento. . . . .	21
4.2. Ecuaciones de Navier-Stokes. . . . .	22
4.3. Número de Reynolds. . . . .	23
4.4. Teorema de Bernoulli. . . . .	23
<b>5. Flujos de viscosidad dominante.</b>	<b>25</b>
5.1. Introducción. . . . .	25
5.2. Flujos unidireccionales. . . . .	25
5.3. Flujo de Couette. . . . .	27
5.4. Flujo de Poiseuille. . . . .	27
5.5. Flujo de Hagen-Poiseuille. . . . .	28
5.6. Espesor de capa límite. . . . .	29
<b>6. Conservación de la energía.</b>	<b>31</b>
6.1. Definiciones. . . . .	31
6.2. Conservación de la energía en forma integral. . . . .	31
6.3. Bombas/compresores y turbinas. . . . .	32
6.4. Pérdidas de carga. . . . .	33
6.5. Factor de fricción ( $f$ ). . . . .	33

6.5.1. Ecuación de Euler-Bernoulli . . . . .	34
6.6. Ábaco de Moody. . . . .	35
<b>7. Fluidoestática.</b>	<b>37</b>
<b>8. Semejanza hidrodinámica.</b>	<b>43</b>
<b>9. Ejercicios resueltos.</b>	<b>45</b>
9.1. Fundamentos y propiedades de los fluidos. . . . .	45
9.2. Cinemática de la partícula fluida. . . . .	48
9.3. Conservación de la masa. . . . .	52
9.4. Conservación de la cantidad de movimiento. . . . .	59
9.5. Flujos de viscosidad dominante. . . . .	74
9.6. Conservación de la energía. . . . .	77
9.7. Fluidoestática. . . . .	82
9.8. Semejanza hidrodinámica. . . . .	82

# Capítulo 1

## Fundamentos y propiedades de los fluidos.

### 1.1. Hipótesis de medio continuo.

Un fluido se caracteriza por un volumen ( $V$ ) y una longitud característica ( $L$ ) donde:

$$L \approx V^{\frac{1}{3}}$$



Figura 1.1: Magnitudes fundamentales de un fluido.

Como el tamaño de una molécula es de  $d_0 \approx 10^{-11}$  a  $10^{-10}$  m, la longitud característica debe ser mucho mayor que  $d_0$  ( $L \gg d_0$ ) para así comprender el número suficiente de moléculas y poder estudiar la mecánica de fluidos de manera macroscópica.

Además, la longitud debe ser suficiente para que exista equilibrio termodinámico local y así poder aplicar las ecuaciones de estado:

- Camino libre medio ( $\lambda$ ) de interacción por choque entre moléculas.
  - En líquidos:  $\lambda \approx d_o$
  - En gases:  $\lambda \gg d_o$

$$L \gg \lambda$$

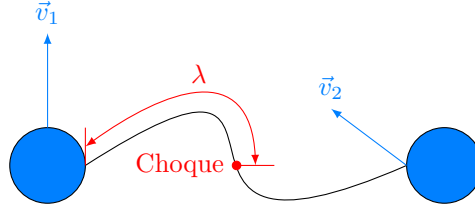


Figura 1.2: Camino libre medio.

En este fluido es necesario poder medir:

1. **Densidad:** el diferencial de volumen debe ser una muestra significativa a nivel estadístico.

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

- El fluido es un gas si:  $\rho \neq cte \Rightarrow \rho = f(\vec{r}, t)$
- El fluido es un líquido si:  $\rho = cte \Rightarrow \rho = f(t)$

Si la función depende del tiempo, se dice que está en forma paramétrica.

- Peso específico

$$\gamma = \rho g \Rightarrow g : \text{campo gravitatorio} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

- Densidad relativa

$$\rho_{rel} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

- Líquidos:  $\rho_{ref} = \rho_{agua} \approx 10^3 \frac{kg}{m^3}$
- Gases:  $\rho_{ref} = \rho_{aire_{CN}} \approx 1 \frac{kg}{m^3}$

2. **Velocidad:**

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

3. **Presión:** Es una magnitud absoluta (siempre mayor que 0):

$$P = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{n})}{dS} = \frac{dF_n}{dS} [Pa]$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mmHg} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h = 132,32 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mca (metros de columna de agua)} = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h = 9,8 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

- Presión manométrica ( $P_{man}$ ): Se mide normalmente con un manómetro diferencial:

$$P_{man} = P - P_{atm} \Rightarrow P > P_{atm}$$

- Presión vacuométrica ( $P_{vac}$ ): Se mide normalmente con un vacuómetro.

$$P_{vac} = P_{atm} - P \Rightarrow P < P_{atm}$$

- Presión de vapor ( $P_v$ ): Se refiere al equilibrio de fase líquido-gas. Si la presión es menor que la presión de vapor **cavita**.
- Cavitación: Generación de burbujas en el líquido por estar por debajo de la presión de vapor que posteriormente al subir la presión explotan con violencia.

## 1.2. Ecuaciones equilibrio termodinámico local.

En un gas ideal, si las condiciones son subsónicas se cumple que:

$$\frac{P}{\rho} = R_g T \Rightarrow R_g \cdot \frac{R}{mmr} \Rightarrow R = 8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$$

El fluido está en condiciones subsónicas si:

$$|\vec{v}(\vec{r}, t)| < a = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{S=cte}}$$

- Ecuación isoentrópica: Procesos rápidos.

$$PV^\alpha = cte$$

- Ecuación isoterma: Procesos lentos.

$$PV = cte$$

## 1.3. Fuerzas y respuestas en sólidos y fluidos

### 1. Fuerzas en un fluido:

$$F = f(\Delta \dot{x}) = C \dot{x} \Rightarrow C : \text{constante de amortiguamiento}$$

### 2. Tensión tangencial o de cizalladura( $\tau$ ):

$$\tau = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta S} = \frac{dF_t}{dS}$$

3. **Viscosidad**( $\mu$ ): En fluidos newtonianos la viscosidad es relativamente constante:

$$\mu = f(t)[Pa \cdot s]$$

$$\tau = \mu \dot{\epsilon} = \mu \frac{\Delta v_n}{\Delta l_n} \Rightarrow \dot{\epsilon} \text{ es la velocidad de deformación}[s^{-1}]$$

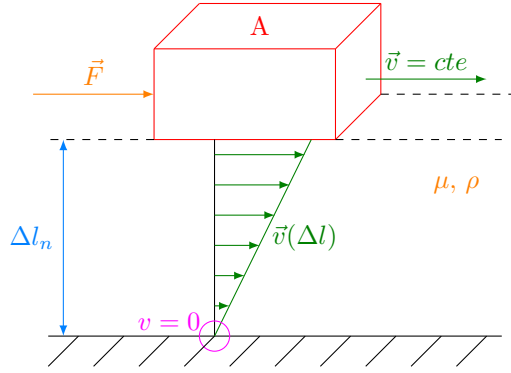
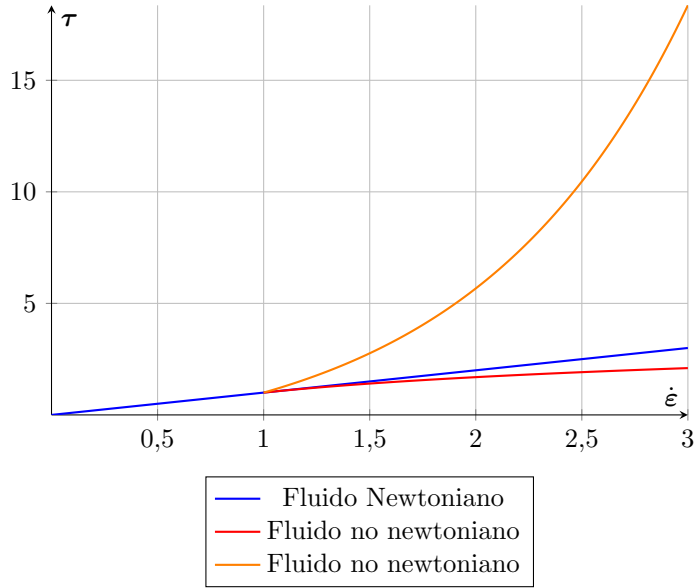


Figura 1.3: Cálculo de viscosidad.

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{\Delta v_n}{\Delta l_n} = \mu \frac{v - 0}{l_n} = \mu \frac{v}{l_n}$$

En fluidos no newtonianos la viscosidad no es constante:



Viscosidades típicas:

$$\mu_{H_2O} = 10^{-3} Pa \cdot s = 1 cP \Leftarrow \text{centipoise}$$

4. **Viscosidad cinemática**:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \Rightarrow 1 csk = 10^{-6} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \Leftarrow \text{centistoke}$$



5. Interfases:

- Vaso grande: Existe intercambio de moléculas en la interfase pero las presiones se equilibran.

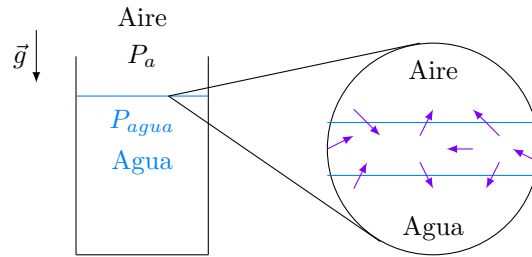


Figura 1.4: Interfase Vaso grande.

- Vaso pequeño: Existe efecto de la tensión superficial  $\left(\sigma \left[\frac{N}{m}\right]\right)$  descrita mediante la ecuación de Laplace-Young. Solo aplica a fluidos inmiscibles.



$$P_a - P_{liquido} = \sigma K$$

$K$  expresión de la curvatura

$$K = \nabla_s \vec{n} = \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \right)$$

$R_i$  y  $R_j$  son radios característicos

Figura 1.5: Efecto de la tensión superficial en un vaso pequeño

- Zona de efecto: La tensión superficial siempre presenta efectos, no obstante solo se aprecia en una región concreta.

$$\rho g l_c \approx \sigma \Rightarrow l_c \approx \left( \frac{\sigma}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

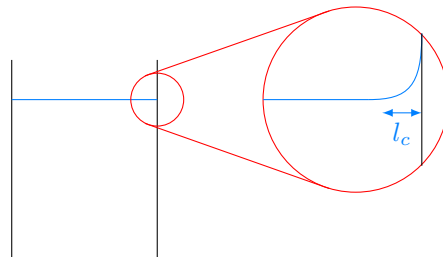
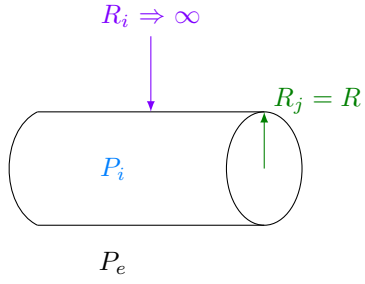


Figura 1.6: Zona de efecto.

■ Casos particulares

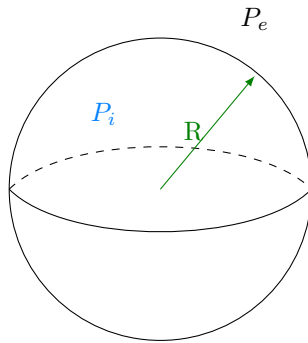
a) Chorro



$$P_i - P_e = \sigma \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \right) = \frac{\sigma}{R}$$

Figura 1.7: Chorro.

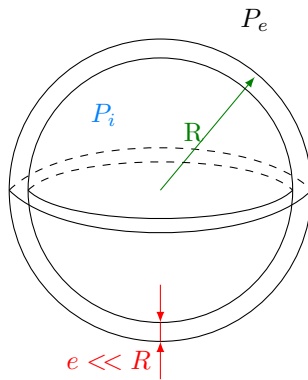
b) Gota



$$P_i - P_e = \sigma \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \right) = \frac{2\sigma}{R}$$

Figura 1.8: Gota.

c) Pompa



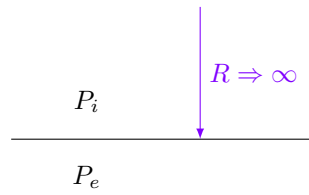
$$P_i - P_m = \frac{2\sigma}{R}$$

$$P_m - P_e = \frac{2\sigma}{R}$$

$$P_i - P_e = \frac{4\sigma}{R}$$

Figura 1.9: Pompa.

d) Plano



$$P_i - P_e = \sigma \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \right) = 0 \Rightarrow P_i = P_e$$

Figura 1.10: Plano.

## 1.4. Mojabilidad.

- Un líquido no moja a un sólido si  $\theta_c \gtrsim 150^\circ$ . Sólido hidrofóbico.
- Un líquido moja a un sólido si  $\theta_c \lesssim 45^\circ$ . Sólido hidrofílico totalmente.

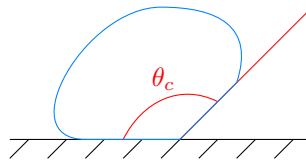


Figura 1.11: Mojabilidad.



## Capítulo 2

# Cinemática de la partícula fluida.

### 2.1. Repaso del operador nabla.

En cartesianas nabla se define como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

- Aplicado a un campo escalar  $\Phi = f(x, y, z)$

- Operador gradiente

$$\vec{\nabla} \Phi = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \Phi \text{ (No conmutativo)}$$

- Laplaciano:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

- Aplicado a un campo vectorial  $\vec{\Phi} = \phi_x(x, y, z) \vec{i} + \phi_y(x, y, z) \vec{j} + \phi_z(x, y, z) \vec{z}$

- Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z}$$

- Rotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Phi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{vmatrix}$$

- Gradiente

$$\vec{\nabla} \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \frac{\partial \phi_x}{\partial y} & \frac{\partial \phi_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial x} & \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_z}{\partial x} & \frac{\partial \phi_z}{\partial y} & \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Laplaciano

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\Phi} = \vec{\nabla}^2 \phi_x \vec{i} + \vec{\nabla}^2 \phi_y \vec{j} + \vec{\nabla}^2 \phi_z \vec{k}$$

- Relaciones algebraicas

1.  $\vec{\nabla}(\varphi\phi) = \varphi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\varphi$
2.  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$
3.  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\Phi}) = 0$
4.  $(\vec{\Phi} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Phi} = \vec{\nabla} \frac{|\vec{\Phi}|^2}{2} - \vec{\Phi} \times (\vec{\Phi} \times \vec{\nabla})$

## 2.2. Conceptos fundamentales.

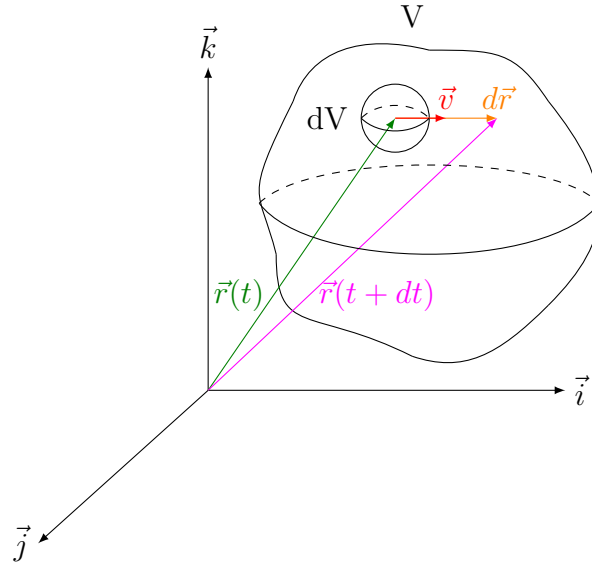


Figura 2.1: Magnitudes fundamentales.

1. **Trayectoria:** Se determina el vector posición a partir de la velocidad. Esta ligada al enfoque lagrangiano. Tiene realidad física.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$$

2. **Senda:** Camino que se recorre. Es independiente del tiempo y se obtiene eliminando el tiempo \$t\$ de la trayectoria. Tiene realidad física.
3. **Línea de corriente:** No tiene realidad física. Se basa en el enfoque euleriano.

$$d\vec{r}/\vec{v}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \rightarrow d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\text{Si } d\vec{r}/\vec{v} \rightarrow \vec{v} \times d\vec{r} = 0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (v_y dz - v_z dy) \vec{i} + (v_z dx - v_x dz) \vec{j} + (v_x dy - v_y dx)$$

$$\therefore \frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y} \Leftrightarrow \frac{dz}{v_z} = \frac{dx}{v_x} \Leftrightarrow \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

## 2.3. Clasificación de los flujos.

### 1. Enfoque en la elección de coordenadas:

- a) Lagrangiano: Enfoque de seguir a la partícula.

$$\vec{v} = \vec{v}(t(\vec{r})) = \vec{v}(t)$$

- b) Euclídeo: Enfoque de centrarse en el espacio.

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = v_x(x, y, z, t)\vec{i} + v_y(x, y, z, t)\vec{j} + v_z(x, y, z, t)\vec{k}$$

### 2. Dirección:

- a) 3 direcciones  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ :
- Campo vectorial tridireccional.
- b) 2 direcciones  $(\vec{i}, \vec{k})$ :
- Campo vectorial bidireccional.
- c) 1 dirección  $(\vec{j})$ :
- Campo vectorial unidireccional.

### 3. Espacio:

- a) Si alguna componente depende de x, y, z:
- Campo vectorial tridimensional.
- b) Si ninguna componente depende de x, y o z:
- Campo vectorial bidimensional.
- c) Si todas las componentes dependen de x, y o z:
- Campo vectorial unidimensional o monodimensional.
- d) Si ninguna componente depende de x, y, z:
- Campo vectorial uniforme o homogéneo.

### 4. Tiempo:

- a) Si alguna componente depende del tiempo:
- Campo vectorial no estacionario o transitorio.
- b) Si ninguna componente depende del tiempo:
- Campo vectorial estacionario.

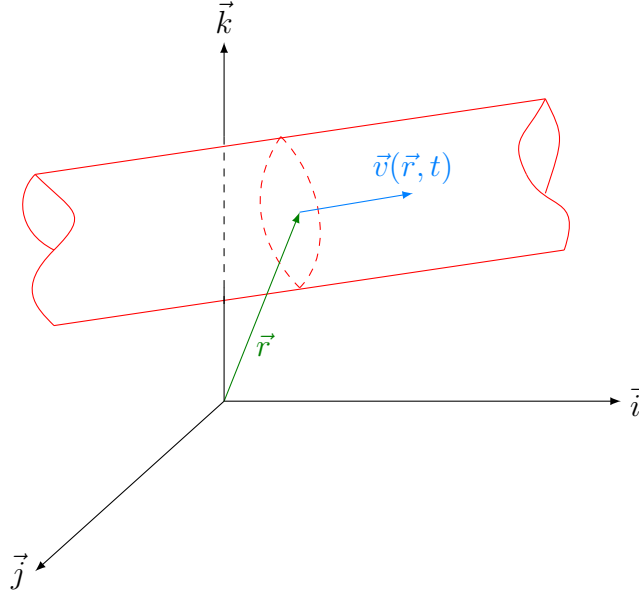


Figura 2.2: Derivada sustancial.

## 2.4. Derivada sustancial, local y convectiva.

Al operador diferencial de variación temporal se le denomina derivada sustancial, total o material:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

Sea  $\phi = f(\vec{r}, t)$  y  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$d\phi = \phi(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \phi(\vec{r}, t) = dx \frac{\partial \phi}{\partial x} + dy \frac{\partial \phi}{\partial y} + dz \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

$$\frac{d\phi}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

■ Derivada convectiva:  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi$

■ Derivada local o temporal:  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$

■ Si  $\phi = \vec{v}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

• Aceleración convectiva:  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

○ Aceleración modular o debida a cambios del módulo de la velocidad:  $\vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2}$

○ Aceleración direccional:  $-\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$



◇ Vorticidad:  $\vec{\omega} = (\vec{\nabla} \times \vec{v})$

◇ Si la vorticidad es nula, el fluido es irrotacional y existe una función de corriente tal que:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi \rightarrow \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\phi) = 0$$

◇ En la literatura, a veces en lugar de hablar de vorticidad, se define velocidad de rotación como:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\omega}}{2}$$

- Aceleración local:  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

## 2.5. Movimiento diferencial en torno a un punto.

A partir de la figura siguiente, se puede deducir que el movimiento diferencial es:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} d\vec{v}dt = \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t)dt - \vec{v}(\vec{r}, t)dt$$

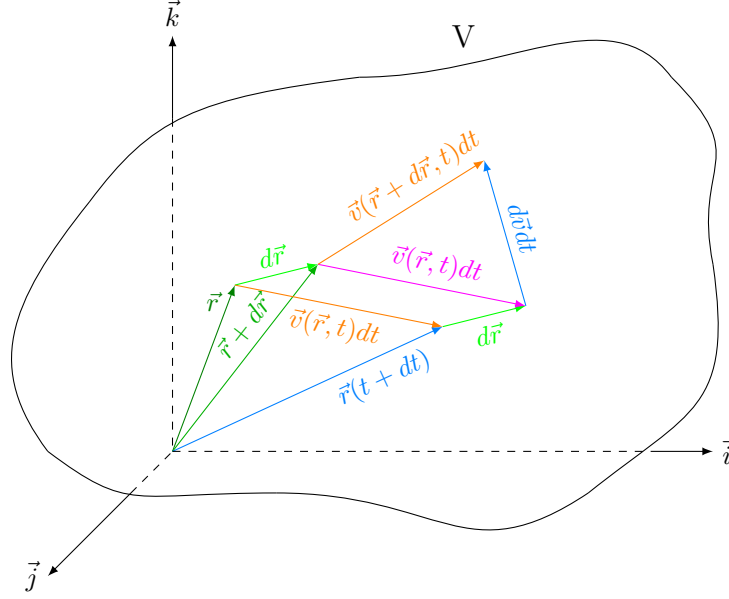


Figura 2.3: Magnitudes fundamentales del movimiento diferencial.

Operando y despreciando el diferencial de tiempo:

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}, t) = d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v})$$

Donde  $\vec{\nabla} \vec{v}$  es el tensor gradiente de la velocidad:

$$\vec{\nabla} \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t \right] + \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \vec{v} - (\vec{\nabla} \vec{v})^t \right] = \bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}$$

Las variables que aparecen, son  $\bar{\bar{\xi}}$  el tensor de velocidad de deformación (simétrico) y  $\bar{\bar{\gamma}}$  el tensor de velocidad de rotación.

$$\bar{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\gamma}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, aplicado al movimiento:

$$d\vec{v} = d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v}) = d\vec{r} \cdot \bar{\bar{\xi}} + d\vec{r} \cdot \bar{\bar{\gamma}}$$

Donde:

- Movimiento velocidad de deformación:  $d\vec{r} \cdot \bar{\bar{\xi}}$  que representa las deformaciones lineales (diagonal) y angulares (fuera de la diagonal).
- Si la traza de  $\bar{\bar{\xi}}$  es nula, el fluido es incompresible y, por tanto de densidad constante.
- Movimiento velocidad de rotación:  $\bar{\bar{\gamma}}$  que representa el movimiento del fluido como si fuera un sólido rígido.
- Se puede relacionar este tensor con la vorticidad y se demuestra que:

$$\bar{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times d\vec{r} = \left( \vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \times d\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \omega_z & \frac{1}{2} \omega_y \\ \frac{1}{2} \omega_z & 0 & -\frac{1}{2} \omega_x \\ -\frac{1}{2} \omega_y & \frac{1}{2} \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.6. Movimiento de la partícula fluida en una dirección.

Se parte de la expresión deducida anteriormente pero expresando el  $d\vec{r}$  mediante módulo dirección, esta expresión, también se suele denominar movimiento vectorial:

$$d\vec{v} = d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v}) = d\vec{r} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}) = |d\vec{r}| \vec{n} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}})$$

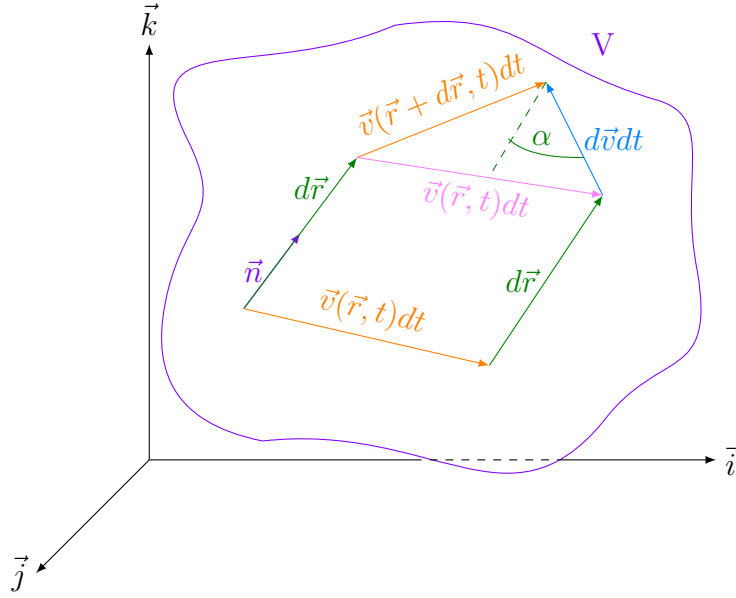


Figura 2.4: Magnitudes fundamentales del movimiento de la partícula fluida.

Si se aplica a una dirección concreta, también suele denominarse como movimiento escalar:

$$d\vec{v} \cdot \vec{n} = d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v}) = d\vec{r} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}) = |d\vec{r}| \vec{n} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}) \cdot \vec{n}$$

Como la dirección no es más que una composición de las distintas direcciones, se puede dividir por coordenadas:

- Los términos de deformación:
  - Si  $\vec{n} = \vec{i} \rightarrow \vec{i} \cdot \bar{\bar{\xi}} \cdot \vec{i} = \xi_{11}$
  - Si  $\vec{n} = \vec{j} \rightarrow \vec{j} \cdot \bar{\bar{\xi}} \cdot \vec{j} = \xi_{22}$
  - Si  $\vec{n} = \vec{k} \rightarrow \vec{k} \cdot \bar{\bar{\xi}} \cdot \vec{k} = \xi_{33}$
- Los términos de velocidad de rotación:
  - Para todo vector  $\vec{n} \cdot \bar{\bar{\gamma}} \cdot \vec{n} = 0$

## Capítulo 3

# Conservación de la masa.

### 3.1. Teorema del transporte de Reynolds.

Se parte de una función genérica  $\Phi = f(\vec{r}, t)$

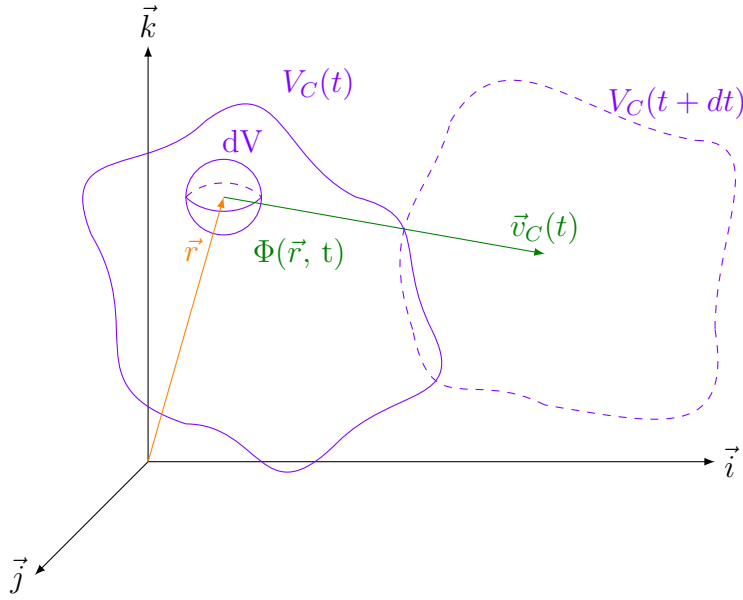


Figura 3.1: Evolución de una magnitud en un volumen fluido.

Por definición de derivada:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_C(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \iiint_{V_C(t+\Delta t)} \Phi(\vec{r}, t+\Delta t) dV - \iiint_{V_C(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV \right]$$

Se hace el desarrollo de Taylor en  $t$  del primer término:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_C(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V_C(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \iiint_{V_C(t+\Delta t)} \Phi(\vec{r}, t) dV - \iiint_{V_C(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV \right]$$

Como solo se estudia la velocidad de compresión o expansión del fluido en la dirección de la superficie de control:

$$dV = \vec{v}_c \cdot \vec{n} dS \Delta t$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V_c(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) dV + \oint_{S_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) \vec{v}_c \cdot \vec{n} dS \quad (3.1)$$

De manera similar se puede aplicar esta deducción a un volumen fluido:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_f(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \underbrace{\iiint_{V_f(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) dV}_{\text{Variación local}} + \underbrace{\oint_{S_f(t)} \Phi(\vec{r}, t) \vec{v} \cdot \vec{n} dS}_{\text{Variación convectiva}} \quad (3.2)$$

En un tiempo  $t^*$  paramétrico tal que  $V_c(t^*) = V_f(t^*)$  se cumple que

$$\iiint_{V_c(t^*)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV \approx \iiint_{V_f(t^*)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV$$

Por tanto, si se hace la siguiente resta (3.2) - (3.1). Se obtiene el Teorema de Reynolds aplicado a los problemas:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_f(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV + \oint_{S_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

Si la magnitud  $\Phi = \rho$  Se obtiene la ecuación de conservación de la masa en forma integral, que como en todo el volumen fluido no varía es igual a 0:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_f(t)} \rho dV = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV + \oint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Para todo el volumen fluido:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_f(t)} \rho dV = \iiint_{V_f(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{S_f(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Si  $V_f(t) \approx dV_f(t)$  entonces aplicando el teorema de Gauss se llega a la ecuación diferencial de la masa o forma conservativa:

Teorema de Gauss:

$$\oint_S \varphi \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \varphi dV$$

$$\lim_{dV \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV \right] = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Término local de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Término convectivo de masa:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$$

### 3.2. Flujo sobre una superficie.

- Flujo másico

$$G_e = \iint_{S_e} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS$$

- Flujo volumétrico

$$Q_e = \iint_{S_e} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS$$

### 3.3. Propiedades en forma diferencial.

Partiendo de la expresión de la derivada sustancial y de la conservación de la masa en forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \rho = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho \quad (3.4)$$

Restando (3.3) a (3.4):

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \rho$$

- Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  Incompresible localmente.
- Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$  Se expande localmente el diferencial de Volumen.
- Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$  Se comprime localmente el diferencial de Volumen.





## Capítulo 4

# Conservación de la cantidad de movimiento.

### 4.1. Teorema del transporte de Reynolds para la cantidad de movimiento.

Sea un volumen sometido a un conjunto de fuerzas:

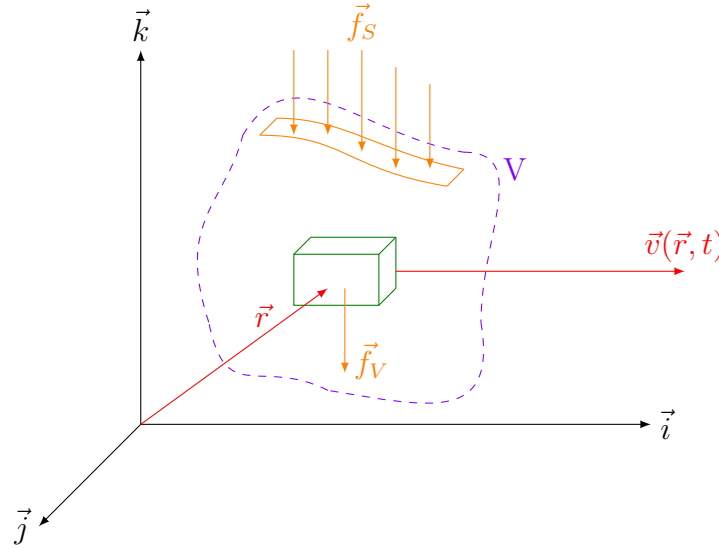


Figura 4.1: Magnitudes principales que influyen la cantidad de movimiento.

Aplicando al teorema del transporte de Reynolds la función  $\Phi = \rho \vec{v}$  y una similitud con la segunda ley de Newton se obtiene para volúmenes fluidos:

$$\iiint_{V_f} \vec{f}_V dV + \oint_{S_f} \vec{f}_s dS = \frac{d}{dt} \iiint_{V_f} \rho \vec{v} dV = \iiint_{V_f} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint_{S_f} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Para un volumen de control:

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V dV + \oint_{S_c} \vec{f}_s dS = \frac{d}{dt} \iiint_{V_f} \rho \vec{v} dV = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

En estas expresiones aparecen dos tipos de fuerzas:

1. Fuerzas volumétricas  $\vec{f}_v$

a) Típicamente son fuerzas relacionadas con campos:

$$\vec{f}_v = \rho \vec{g}$$

b) Pueden ser también fuerzas de inercia en sistemas de referencia móviles.

c) En un gas suelen ser despreciables estas fuerzas.

2. Fuerzas superficiales  $\vec{f}_s$

a) La expresión general de estas fuerzas es:

$$\vec{f}_s = \underbrace{-P\vec{n}}_{\text{Presión hidroestática}} + \underbrace{\bar{\bar{\tau}}_v \cdot \vec{n}}_{\text{Esfuerzos viscosos}}$$

b) Siendo el tensor de esfuerzos viscosos (es una ecuación constitutiva, depende del material):

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = 2\mu\bar{\bar{\xi}} + \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\bar{\bar{I}}$$

Donde

- $\mu$  es la viscosidad.
- $\lambda$  es la viscosidad volumétrica.
- $\bar{\bar{I}}$  es la matriz identidad.

## 4.2. Ecuaciones de Navier-Stokes.

Se parte del teorema del transporte de Reynolds:

$$\iiint_{V_f} \vec{f}_V dV + \oint_{S_f} \vec{f}_s dS = \iiint_{V_f} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint_{S_f} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (4.1)$$

Desarrollando mediante el teorema de la divergencia de Gauss:

$$\oint_{S_f} \vec{f}_s dS = \oint_{S_f} -P\vec{n}_s dS + \oint_{S_f} \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{n}_s dS = \iiint_{V_f} -\vec{\nabla} P dV + \iiint_{V_f} \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}} dV \quad (4.2)$$

$$\oint_{S_f} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{V_f} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) dV \quad (4.3)$$

Juntando las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3):

$$\iiint_{V_f} \vec{f}_V dV + \iiint_{V_f} -\vec{\nabla} P dV + \iiint_{V_f} \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}} dV = \iiint_{V_f} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \iiint_{V_f} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) dV$$

Para un valor  $V_f \approx dV$  arbitrariamente pequeño pero no nulo. Se obtiene la ecuación Navier-Stokes en forma conservativa:

$$\vec{f}_V - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}} = \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v})$$

Desarrollando:

$$\vec{f}_V - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} = \underbrace{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\frac{\rho D \vec{v}}{Dt}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} = \vec{\nabla} \cdot (2\mu \vec{\xi}) + \vec{\nabla} \cdot [\lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{I}] = \vec{\nabla} \cdot \left( 2\mu \frac{\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T}{2} \right) + \lambda \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{I}]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \stackrel{\mu, \lambda = cte}{=} \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

En fluidos newtonianos se cumple que  $\rho, \mu = cte$  con lo cual:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \vec{\nabla} \rho = 0; \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Por tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes junto a la conservación de la masa en forma diferencial:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

### 4.3. Número de Reynolds.

El número de Reynolds es un número adimensional que se emplea para caracterizar el movimiento de un fluido y se define como:

$$Re = \frac{\text{Orden de magnitud de la inercia convectiva}}{\text{Orden de magnitud de fuerzas viscosas}}$$

$$Re = \frac{|\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}|}{|\mu \vec{\nabla}^2 \vec{v}|} \stackrel{|\vec{\nabla}| = \frac{1}{L_c}}{=} \frac{\rho_c v_c^2 / L_c}{\mu_c v_c / L_c^2} = \frac{\rho_c v_c L_c}{\mu_c}$$

- Si Re es elevado, el flujo es de inercia dominante, flujo turbulento.
- Si Re es bajo, el flujo es de viscosidad dominante, flujo laminar.

### 4.4. Teorema de Bernoulli.

Se parte de la ecuación de Navier-Stokes en forma diferencial:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \vec{f}_v$$

Desarrollando:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2} - \rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \vec{f}_v$$

Se supone un líquido incompresible, estacionario, fuerzas de viscosidad despreciables y que las fuerzas volumétricas tienen la siguiente función potencial:

$$\vec{f}_V = -g\vec{\nabla}U_g$$

$$\rho\vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|^2}{2} - \rho\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\vec{\nabla}(P + \rho U_g)$$

Multiplicando por  $\vec{v}$

$$\vec{v} \cdot \left[ \rho\vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|^2}{2} - \rho\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\vec{\nabla}(P + \rho U_g) \right] \rightarrow \vec{\nabla} \left( P + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + \rho U_g \right) = 0$$

De esta expresión se deduce que:

$$P + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + \rho U_g = cte$$

En el caso de que el campo potencial gravitatorio sea paralelo al eje z, se obtiene el teorema de Bernoulli:

$$P + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + \rho gz = cte$$

## Capítulo 5

# Flujos de viscosidad dominante.

### 5.1. Introducción.

Se trabaja con líquidos newtonianos donde se cumple que:

$$\rho, \mu = cte$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{Inercia convectiva}} = -\vec{\nabla} P + \underbrace{\mu \vec{\nabla}^2 \vec{v}}_{\text{Esfuerzos viscosos}} + \vec{f}_v$$

Para conocer si el flujo es de viscosidad dominante se emplea el número de Reynolds, que como se definió en temas anteriores:

$$Re = \frac{\text{Orden de magnitud de la inercia convectiva}}{\text{Orden de magnitud de fuerzas viscosas}} = \frac{\rho v_c L_c}{\mu}$$

- Si  $Re \uparrow\uparrow$  efectos viscosos despreciables.
- Si  $Re \downarrow\downarrow$  efectos viscosos dominantes.

### 5.2. Flujos unidireccionales.

Se habla de flujo unidireccional cuando un flujo cuya expresión de la velocidad es de la forma:

$$\vec{v} = v_x(x, y, z, t)\vec{i} + v_y(x, y, z, t)\vec{j} + v_z(x, y, z, t)\vec{k} \leftrightarrow v_y = v_z = 0$$

Como además, ha de cumplirse la conservación de la masa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 = \frac{\partial v_x(x, y, z, t)}{\partial x} \rightarrow v_x \neq f(x)$$

Por tanto, la expresión de la velocidad:

$$\vec{v} = v_x(y, z, t)\vec{i}$$

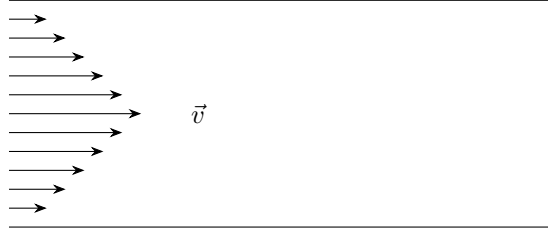


Figura 5.1: Representación de un posible campo de velocidades.

Una vez visto la expresión de la velocidad, desarrollando los términos de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \vec{f}_v$$

- Como solo se estudiarán movimientos cuasiestacionarios, el término local es nulo:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

- Desarrollando el término de inercia local:

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \left[ v_x \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \right] v_x \vec{i} = \rho v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x \vec{i} = 0$$

- El término de presiones no cambia.
- Desarrollando el término de viscosidad (v solo tiene componente en  $\vec{i}$ ):

$$\mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \vec{i}$$

- El término de fuerzas volumétricas se relaciona con una función potencial:

$$\vec{f}_v = -\rho \vec{\nabla} U$$

Por tanto, la ecuación queda como:

$$0 = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \vec{i} - \vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} U = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \vec{i} - \vec{\nabla} (P + \rho U)$$

Particularizando por cada eje:

$$0 = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho U) \rightarrow \text{Como } v_x \text{ no depende de } x, v_x \neq f(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho U) \neq f(x)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y} (P + \rho U) \rightarrow P + \rho U \neq f(y)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z} (P + \rho U) \rightarrow P + \rho U \neq f(z)$$

Por tanto, teniendo en cuenta los desarrollos anteriores:

$$P + \rho U = Ax + B$$

Se define como gradiente de presión reducida a la siguiente variable:

$$P_t = -\frac{\partial}{\partial x} (P + \rho U)$$

### 5.3. Flujo de Covette.

Teniendo en cuenta el esquema de la figura 5.2 y desarrollando las ecuaciones anteriores en x e y:

$$P_l = -\frac{\partial}{\partial x}(P + \rho U) = 0 \leftarrow \text{En el eje x no se producen gradientes de presión ni de fuerzas volumétricas.}$$

Por tanto:

$$0 = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x}(P + \rho U) = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \rightarrow v_x = Ay + B$$

Como la velocidad del líquido es solidaria a la de los sólidos con los que está en contacto:

$$v_x(y = 0) = 0$$

$$v_x(y = h_0) = v_p$$

Sustituyendo:

$$v_x = \frac{v_p}{h_0} y$$

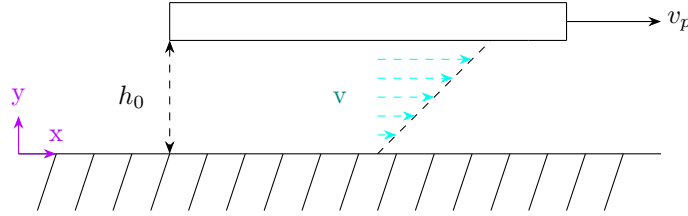


Figura 5.2: Representación del flujo de Covette.

### 5.4. Flujo de Poiseulle.

Teniendo en cuenta el esquema de la figura 5.3 y desarrollando las ecuaciones anteriores en x e y:

$$0 = P_l + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \leftrightarrow P_l \neq f(y) \rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{P_l}{\mu} \rightarrow v_x = -\frac{P_l}{2\mu} y^2 + Ay + B$$

Sean las condiciones de contorno:

$$v_x(y = 0) = 0 \rightarrow B = 0 \leftrightarrow v_x(y = h_0) = 0 \rightarrow A = \frac{P_l h_0}{2\mu} \rightarrow v_x = -\frac{P_l y}{2\mu} (y - h_0)$$

Para casos cuasiunidireccionales se asume:

$$P_l = -\frac{\Delta(P + \rho U)}{L} = \frac{(P + \rho U)_e - (P + \rho U)_s}{L}$$

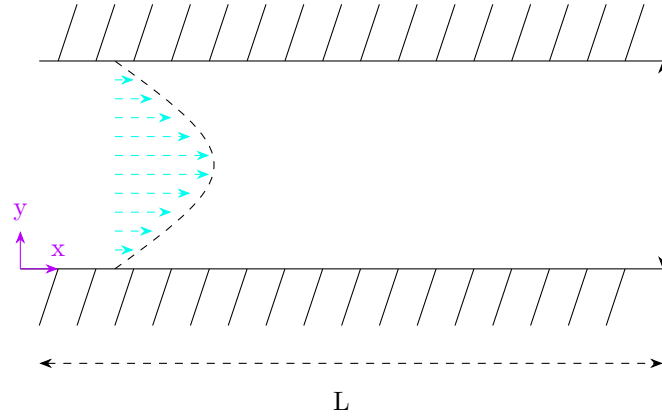


Figura 5.3: Representación del flujo de Poiseuille.

### 5.5. Flujo de Hagen-Poiseuille.

Teniendo en cuenta el esquema de la figura 5.4 que, a diferencia del flujo de Poiseuille que era bidimensional, en este caso se analiza el flujo a través de una tubería cilíndrica. Se trabaja en coordenadas cilíndricas  $(r, z, \theta)$  debido a que hay simetría de revolución. En este caso, desarrollando quedaría:

$$\begin{cases} v_z \neq f(z) \\ P_l = -\frac{\partial}{\partial z}(P + \rho U) \\ 0 = P_l + \frac{\mu}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \end{cases}$$

Integrando en estas coordenadas y teniendo en cuenta las condiciones de contorno de la tubería cilíndrica, la expresión del caudal de Hagen-Poiseuille queda:

$$Q_{H-P} = -\frac{\pi D^4(z)}{128\mu} \frac{\partial}{\partial z}(P + \rho U)$$

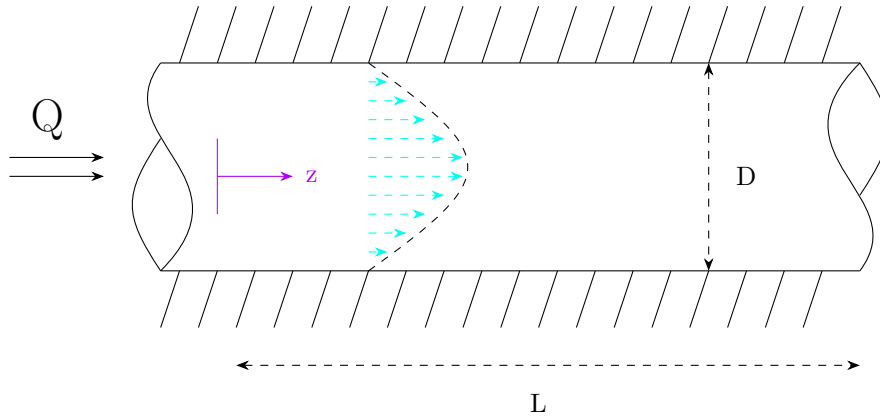


Figura 5.4: Representación del flujo de Hagen-Poiseuille.



## 5.6. Espesor de capa límite.

Cuando se transiciona entre distintos regímenes hay un espesor  $\delta_g$  (Ver figura 5.5) en el cual el fluido sigue comportándose como un fluido ideal que se puede cuantificar a través del número de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho_c v_c^2 / L_e}{\mu_c v_c / D_c^2} = 1 \text{ (Criterio región de transición.)} \rightarrow \frac{\rho_c v_c^2}{L_e} \approx \frac{\mu_c v_c}{D_c^2}$$

$$Re = \frac{\rho_c v_c D}{\mu} \cdot \frac{D}{L_e} \approx 1 \rightarrow L_e \approx D \cdot Re_D$$

Por otro lado, para que se pueda asumir viscosidad dominante en la mayoría del conducto debe cumplirse que:

$$\frac{L_e}{L} \approx \frac{D}{L} Re_D \ll 1$$

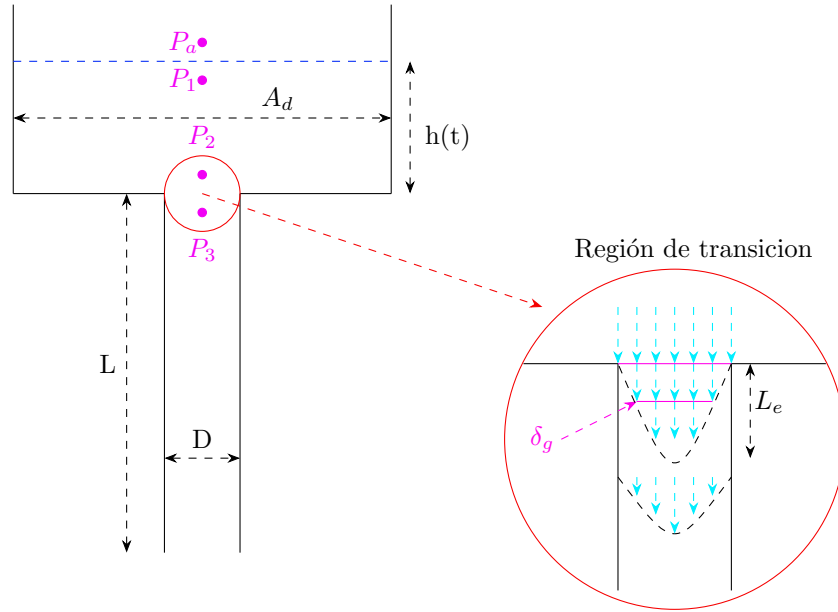


Figura 5.5: Representación del espesor de capa límite.



# Capítulo 6

## Conservación de la energía.

### 6.1. Definiciones.

- Presión de remanso:

$$P_0 = P + \rho \frac{v^2}{2}$$

- Entalpía de remanso:

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} \rightarrow h = e + \frac{P}{\rho}$$

- Bernoulli:

$$P_0 + U = cte$$

Donde  $e$  es la energía interna.

### 6.2. Conservación de la energía en forma integral.

La expresión genérica de la conservación de la energía para un volumen fluido:

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \iiint_{V_f} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV}_{\text{Variación de energía interna, } e} = \underbrace{\iint_{S_f} -P (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \iint_{S_f} \vec{v} \cdot \vec{\bar{\tau}} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{V_f} \vec{f}_v \cdot \vec{v} dV}_{\text{Trabajo}} + \underbrace{\iint_{S_f} -\vec{q} \cdot \vec{n} dS}_{\text{Calor por conducción}} + \text{Otras energías}$$

El calor transferido por conducción para un líquido perfecto newtoniano se puede expresar mediante la siguiente ecuación ( $e = C_P \cdot T$  y  $K = cte$ ):

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_P (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T) = K \vec{\nabla}^2 T + \underbrace{\left\langle 2\vec{\bar{\tau}}, \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t \right] \right\rangle}_{\text{Función de disipación de Raleigh. } \langle, \rangle \text{ denota el operador producto interno.}}$$

No obstante, antes de resolver esta ecuación, para obtener el campo de velocidades,  $\vec{v}$ , han de resolverse las ecuaciones de conservación de la masa y de cantidad de movimiento.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \vec{f}_v \end{cases}$$

Para simplificar los problemas, en la asignatura se trabaja con casos aislados térmicamente, es decir, debe cumplirse que:

$$\oint_{S_f} -\vec{q} \cdot \vec{n} dS + \text{Otras energías} \approx 0$$

Particularizando al volumen de control que queda encerrado por la entrada, la salida, la pared del conducto y las posibles máquinas rotativas que pudiese haber:

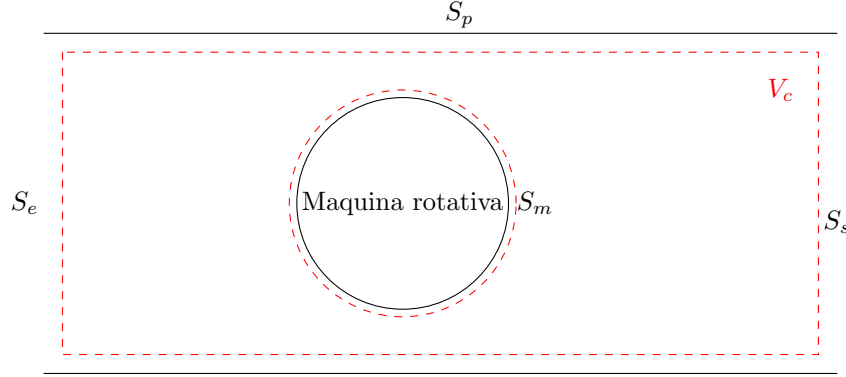


Figura 6.1: Diagrama genérico de un posible conducto.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \oint_{S_c} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = \underbrace{\oint_{S_c} -P (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Trabajo máquinas rotativas}} + \oint_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{V_c} \vec{f}_v \cdot \vec{v} dV$$

### 6.3. Bombas/compresores y turbinas.

- Cuando se trabaja con gases el trabajo ideal desarrollado por un compresor es:

$$\dot{W}_C = G(h_{0_s} - h_{0_e})$$

Donde  $G$  es el gasto y por conservación de la masa se puede expresar en magnitud de entrada o de salida.

$$G = \rho_e A_e v_e = \rho_s A_s v_s$$

- Cuando se trabaja con líquidos el trabajo ideal desarrollado por una bomba es:

$$\dot{W} = Q(P_{0_s} - P_{0_e})$$

El criterio de signos del trabajo es:

- $\dot{W} > 0$  para bombas y compresores.
- $\dot{W} < 0$  para turbinas.

Si se trabaja con máquinas reales, cuando se habla del trabajo real, se refiere al trabajo que sería necesario aportar o que se recibiría de la máquina teniendo en cuenta su rendimiento. Por ello:

- $\dot{W}_{B_{Real}} = \frac{\dot{W}_{B_{ideal}}}{\eta_B}$ , se debe aportar más energía para realizar el trabajo útil.
- $\dot{W}_{C_{Real}} = \frac{\dot{W}_{C_{ideal}}}{\eta_C}$ , se debe aportar más energía para realizar el trabajo útil.
- $\dot{W}_{T_{Real}} = \dot{W}_{T_{ideal}} \cdot \eta_T$ , el trabajo obtenido a través de la turbina es menor debido a las pérdidas.

## 6.4. Pérdidas de carga.

Cuando el fluido pasa por codos, descarga a conducto o ensancha de forma brusca se producen pérdidas en la presión de remanso. Para modelarlo, se emplea un factor  $K_P$  de pérdidas. La velocidad máxima se elige la mayor entre la entrada y la salida.

$$P_{0_e} + \rho U_e = P_{0_s} + \rho U_s + K_P \frac{\rho v_{max}^2}{2}$$

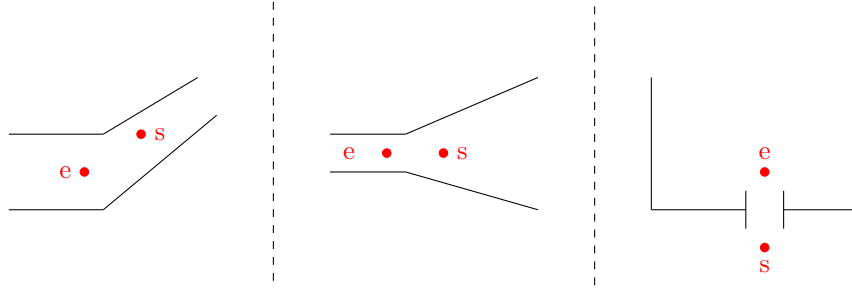


Figura 6.2: Ejemplos de regiones con pérdidas de carga.

## 6.5. Factor de fricción (f).

Cuando se trata de tubos en lugar de haber un factor de pérdidas en carga, para caracterizar las pérdidas suele existir una función  $f$ . La función  $f$  indica la rugosidad relativa.

- Si se trabaja en flujo laminar en tubo circular  $f = \frac{64}{Re_D}$ .
- Si se trabaja con flujo turbulento completamente desarrollado, para obtener su valor se consulta el ábaco de Moody 6.4 donde se obtiene el valor a partir del número de Reynolds.

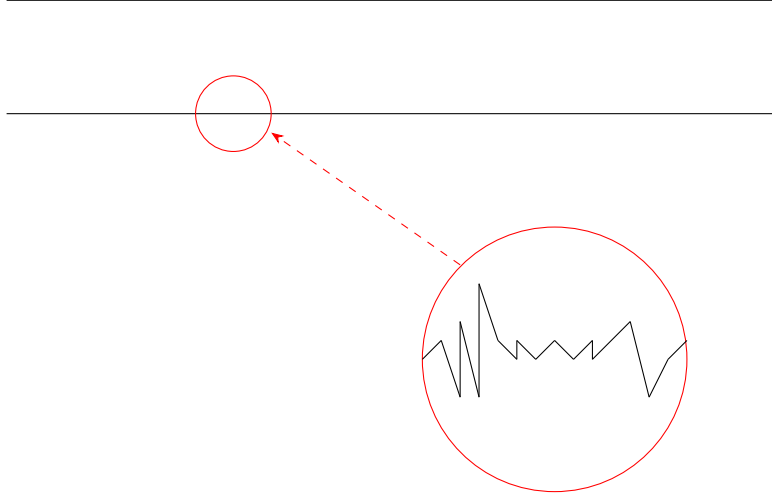


Figura 6.3: Representación de la rugosidad en un tubo.

Cuando se dedujo la expresión de Bernoulli, se igualó a cero al no existir pérdidas. No obstante, la expresión si se introducen las pérdidas es:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) = -\rho f \frac{v|v|}{8r.h.}$$

Donde  $r.h.$  es el radio hidráulico ( $r_h$ ):

$$r.h. = r_h = \frac{\text{Área de paso}}{\text{Perímetro mojado}} \xrightarrow{\text{Sección circular}} r.h. = r_h = \frac{\pi D^2/4}{\pi D} = \frac{D}{4}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) = -\rho f \frac{v|v|}{2D}$$

Integrando en  $z = 0 \rightarrow L$  e ignorando la dirección del flujo (el criterio de signos se elige cuando se hace el problema):

$$\left[ P_e + \rho \frac{v_e^2}{2} + \rho U_e \right] - \left[ P_s + \rho \frac{v_s^2}{2} + \rho U_s \right] = \rho f \frac{v^2 L}{2D}$$

Por tanto:

$$K_{P_{long}} = f \frac{L}{D}$$

### 6.5.1. Ecuación de Euler-Bernoulli

Si se tiene en cuenta el término local:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) = -\rho f \frac{v|v|}{8r.h.}$$

6.6. Ábaco de Moody.

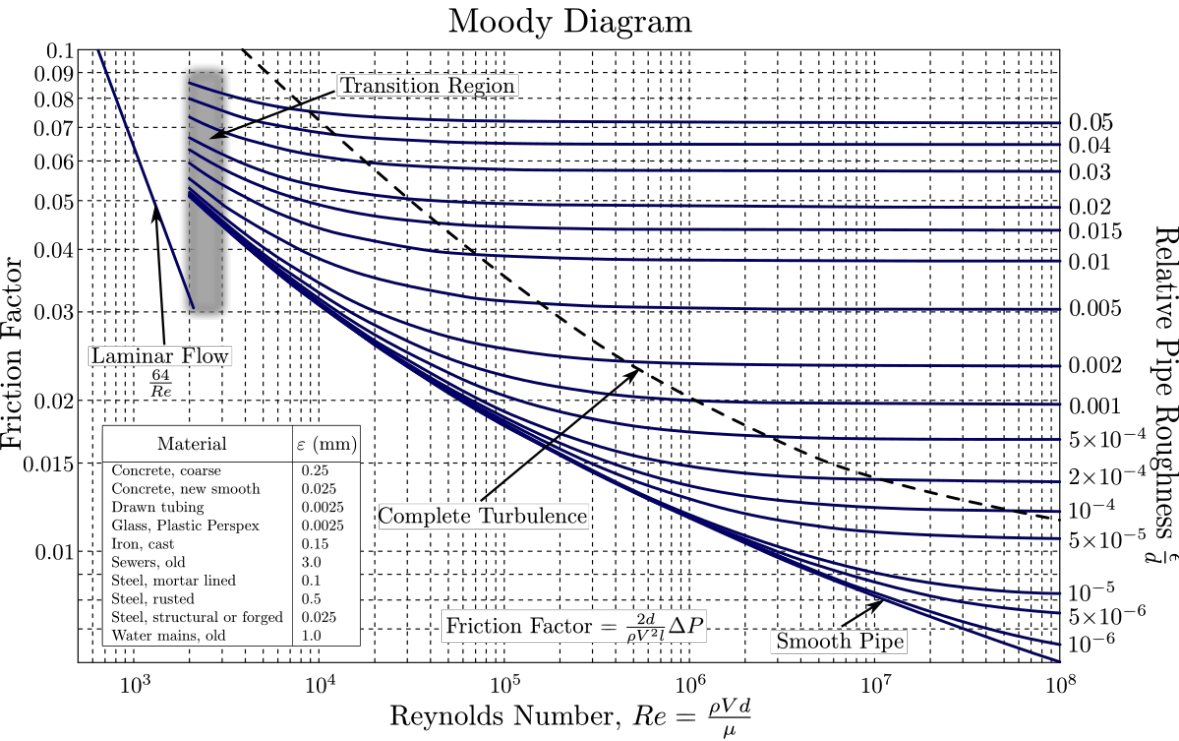


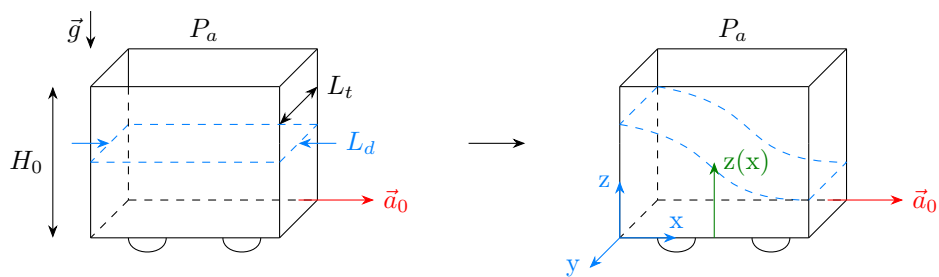
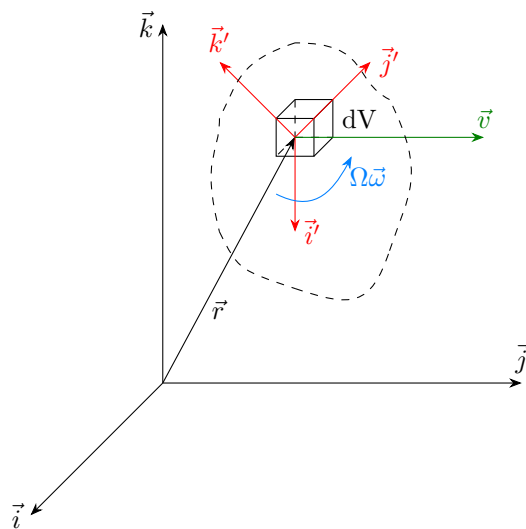
Figura 6.4: Diagrama de Moody.

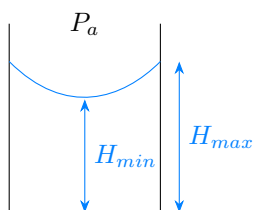
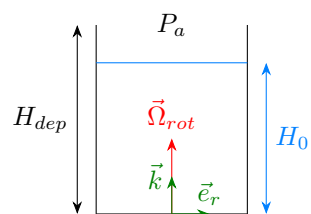
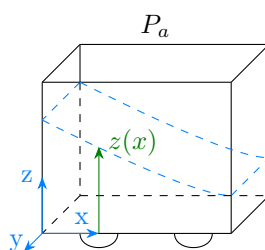
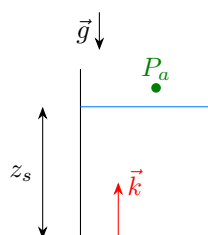
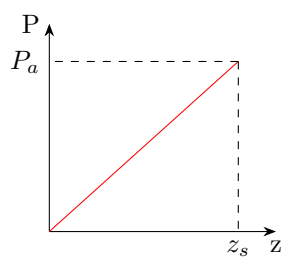


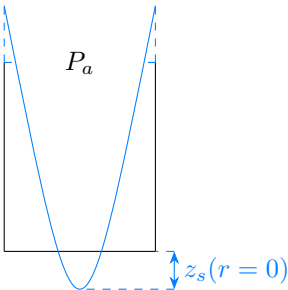
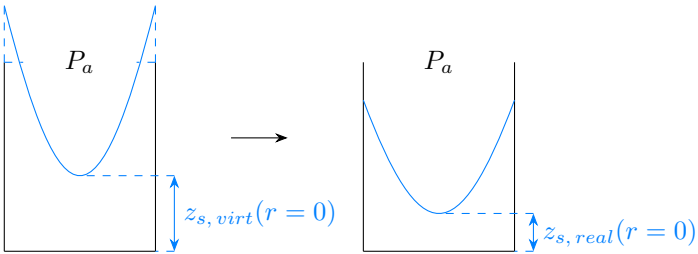
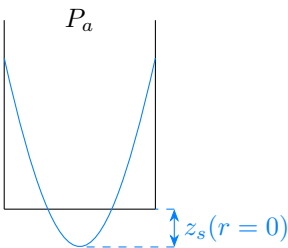
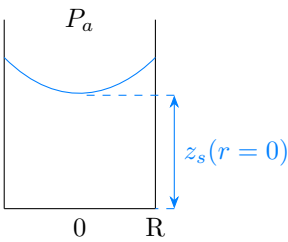


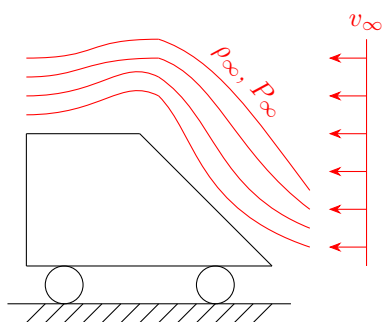
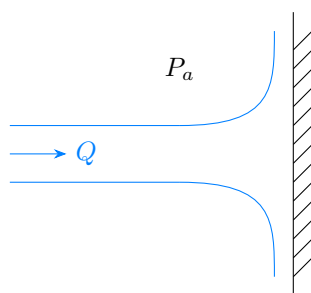
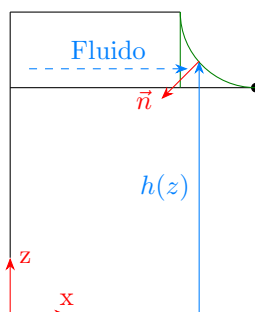
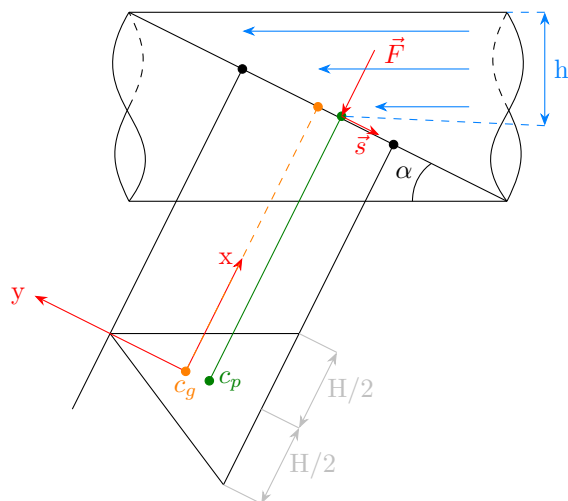
## Capítulo 7

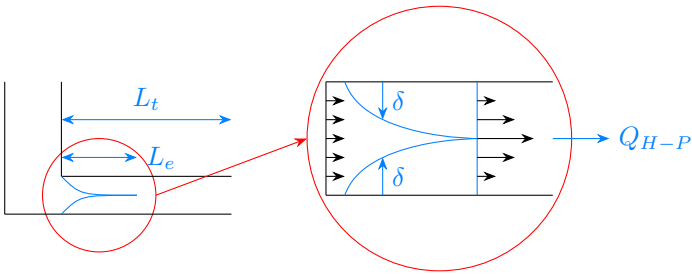
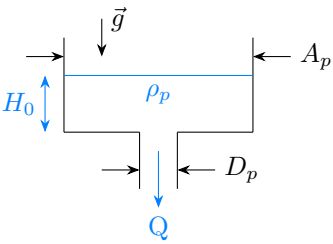
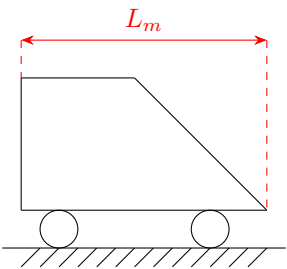
## Fluidostática.













## Capítulo 8

# Semejanza hidrodinámica.





## Capítulo 9

# Ejercicios resueltos.

### 9.1. Fundamentos y propiedades de los fluidos.

1. Obtener el ángulo de mojabilidad  $\theta_c$ .

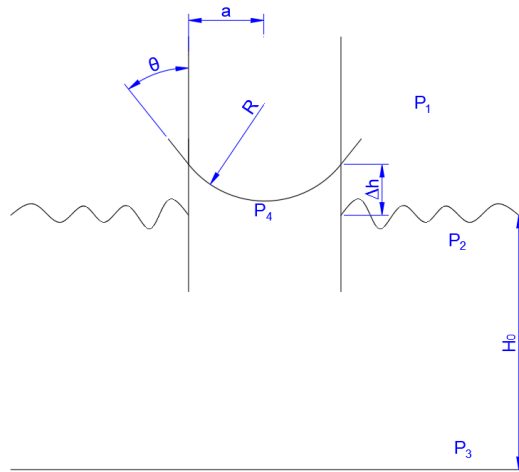
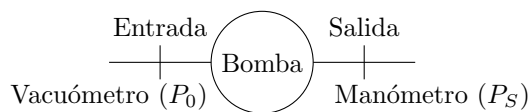


Figura 9.1: Esquema del problema.

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P_1 = P_a \\
 P_2 &= \rho g H_0 = P_3 \\
 P_3 &= P_4 + \rho g (H_0 + \Delta h) \\
 P_1 - P_4 &= \frac{2\sigma}{R} \\
 \frac{2\sigma}{R} &= \rho g \Delta h \\
 R \cos(\theta_c) &= a \\
 \theta_c &= \arccos\left(\frac{a \rho g \Delta h}{2\sigma}\right)
 \end{aligned}$$

2. Se ha instalado un nuevo sistema de presión para el abastecimiento de agua de un municipio. El agua procedente de un manantial es impulsado por una bomba y se almacena en un depósito sobrepresor. Para controlar la presión del agua a la entrada y salida de la bomba se han montado un vacuómetro y un manómetro en los puntos de interés. Cuando el vacuómetro marca 0.75 bares y el manómetro marca 4.2 bares. ¿Cuál será el valor de la presión absoluta? ¿Existe riesgo de cavitación en algún punto de la conducción? Datos:  $p_{atm} = 816,91$  hPa;  $p_v = 159856$  Pa.



$$\begin{aligned}
 P_v &= P_{atm} - P_e \\
 P_m &= P_s - P_{atm} \\
 P_e &= 81691 - 75000 = 6691 \text{ Pa} \\
 P_s &= 81691 + 420000 = 501691 \text{ Pa} \\
 &\text{Existe cavitación a la entrada.}
 \end{aligned}$$

3. La presión en un punto de un fluido ( $\rho = 1234 \frac{kg}{m^3}$ ) alcanza el valor de 3 bares. Expresar el valor de la presión en milímetros de mercurio (cm Hg) y en columna de metros de agua (m.c.a.). Datos:  $\rho_{Hg,rel} = 13,6$

$$\rho = 1234 \frac{kg}{m^3}$$

$$P = 3 \cdot 10^5 Pa$$

$$1mmHg = \rho_{Hg}gh = 13,6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 10^{-3}m = 133,416Pa$$

$$1mca = \rho_{H_2O}gh = 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 1m = 9810Pa$$

4. Sobre una superficie de  $4000 cm^2$ , orientada en el espacio por su vector normal  $\vec{n} = \vec{k}$ , está actuando una fuerza  $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$  (N). Calcular la componente normal de la fuerza y la presión que está soportando la superficie

$$S = 4000cm^2 = 0,4m^2$$

$$\vec{n} = \vec{k}$$

$$\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \rightarrow F_n = 3N$$

$$P = \frac{F_n}{S} = \frac{3N}{0,4m^2} = 7,5Pa$$

5. Sabiendo que un fluido tiene una densidad de  $0,627 \frac{kg}{l}$  y que su coeficiente de viscosidad absoluta es 1,2 cP, calcular su viscosidad cinemática. ¿Cuál es su densidad relativa si consideramos el agua como fluido de referencia?. Datos  $\rho_{agua} = 999,8 \frac{kg}{m^3}$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1,2cP \cdot \frac{10^{-3}Pa \cdot s}{1cP}}{0,627 \frac{kg}{l} \cdot \frac{10^3l}{m^3}} = 1,91 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$\rho_{rel} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{0,627 \frac{kg}{l} \cdot \frac{10^3l}{m^3}}{999,8 \frac{kg}{m^3}} = 6,27 \cdot 10^{-1}$$

6. En la Figura se muestra un bloque, de bases paralelas con dimensiones  $0,3 m \times 0,6 m$  y altura  $0,1 m$ , de densidad  $1800 \frac{kg}{m^3}$ , que desliza con una velocidad constante de  $1 \frac{m}{s}$  a la largo de un plano inclinado debido a la acción de las fuerzas gravitacionales tangenciales al mismo. Entre dicho plano y el bloque hay una película de aceite de espesor  $1 mm$ . Aplicando equilibrio de fuerzas, calcular la viscosidad del aceite en Po.

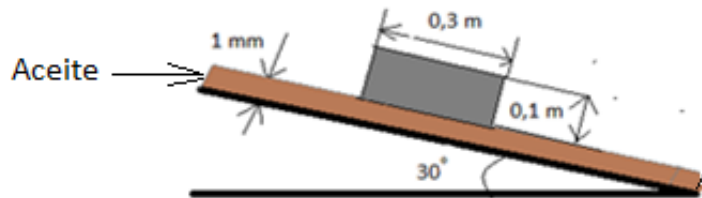


Figura 9.2: Esquema del bloque deslizando por el plano inclinado.

$$F_n = mgsen\alpha$$

$$F_n = \rho Vgsen\alpha$$

$$\tau = \mu \frac{v}{e} = \frac{F_n}{S} = \rho hgsen\alpha$$

$$\mu = \frac{e\rho hgsen\alpha}{v} = \frac{10^{-3}m \cdot 1800 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,1m \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot sen(30^\circ)}{1m/s} = 0,8829 Pa \cdot s \cdot \frac{1P}{0,1 Pa \cdot s} = 8,83 P$$

## 9.2. Cinemática de la partícula fluida.

1. Dado el campo de velocidades de un flujo

$$\vec{v} = 4\cos(\omega t)x\vec{i} - 2\cos(\omega t)y\vec{j} - 2\cos(\omega t)z\vec{k}$$

- a) Indicar el tipo de flujo

Flujo tridireccional, tridimensional y transitorio.

- b) La ecuación de la trayectoria si en  $t = 0$ s se encuentra en  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$v_x = 4\cos(\omega t)x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = -2\cos(\omega t)y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = -2\cos(\omega t)z = \frac{dz}{dt}$$

$$\ln x|_0^t = \frac{4\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} \Big|_0^t \rightarrow x = x_0 e^{\frac{4\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}}$$

$$y = y_0 e^{\frac{-2\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}}$$

$$z = z_0 e^{\frac{-2\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}}$$

- c) La ecuación de las sendas

$$\ln \frac{x}{x_0} = \frac{4\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = \frac{-2\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}$$

$$\ln \frac{z}{z_0} = \frac{-2\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{x}{x_0} = -\ln \frac{y}{y_0} \rightarrow xy^2 = x_0 y_0^2$$

$$\ln \frac{z}{z_0} = \ln \frac{y}{y_0} \rightarrow yz_0 = zy_0$$

- d) Las líneas de corriente en un instante  $t$

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x}$$

$$\frac{dy}{-2\cos(\omega t)y} = \frac{dz}{-2\cos(\omega t)z} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \rightarrow \ln z = \ln y + C_0 \rightarrow z = C_{00}y$$

$$\frac{dy}{-2\cos(\omega t)y} = \frac{dx}{4\cos(\omega t)x} \rightarrow -\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \rightarrow -\ln y = \frac{1}{2} \ln x + C_1 \rightarrow C_{11} = xy^2$$

2. La velocidad de un fluido se encuentra definida por  $\vec{v} = y\vec{j} + (ye^{-t} - z)\vec{k}$  Se pide:

a) Las componentes de la velocidad

$$\begin{aligned}v_x &= 0 \\v_y &= y \\v_z &= ye^{-t} - z\end{aligned}$$

b) Caracterización del flujo

Flujo bidireccional, bidimensional y transitorio.

c) La aceleración de la partícula fluida cuando en  $t=0s$  pasa por el punto  $(0,1,0)$

$$\begin{aligned}a_L &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -ye^{-t}\vec{k} \\a_c &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \\a_c &= \left( v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \left( v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = y\vec{j} + z\vec{k} \\a_T &= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = a_L + a_c = y\vec{j} + (-ye^{-t} + z)\vec{k} \\a_T|_{\vec{r}=(0,1,0), t=0s} &= \vec{j} - \vec{k} \frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

d) Movimiento de la partícula fluida

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\xi}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & \frac{e^{-t}}{2} & -1 \end{bmatrix} \\ \bar{\bar{\gamma}} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & \frac{e^{-t}}{2} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e) ¿Podría tratarse de un líquido?

$$traza(\bar{\bar{\xi}}) = 1 - 1 = 0 \rightarrow \text{Es un líquido.}$$

f) La velocidad de deformación lineal específica en la dirección del vector unitario  $\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

$$\bar{\bar{\xi}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & \frac{e^{-t}}{2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 + \frac{e^{-t}}{2} \\ -1 - \frac{e^{-t}}{2} \end{bmatrix}$$

3. Considere el flujo definido por  $v_y = z(t + 2t^2)$  y  $v_z = 2y$ . Determine:

a) Tipo de flujo

Flujo bidireccional, bidimensional y transitorio.

b) La aceleración de la partícula fluida: total, local, convectiva y las contribuciones de la aceleración convectiva

$$\begin{aligned}
 a_L &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = z(1 + 4t)\vec{j} \\
 a_c &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \\
 a_c &= \left( v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \vec{k} = 2y(t + 2t^2)\vec{j} + 2z(t + 2t^2)\vec{k} \\
 a_T &= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = a_L + a_c = [z(1 + 4t) + 2y(t + 2t^2)]\vec{j} + 2z(t + 2t^2)\vec{k} \\
 a_{c_v} &= \vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \vec{k} \right] \\
 a_{c_v} &= 4y\vec{j} + z(t^2 + 4t^3 + 4t^4)\vec{k} \\
 a_{c_d} &= -\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2} \\
 a_{c_v} &= [z(1 + 4t) + 2y(t + 2t^2) - 4y]\vec{j} + z(2t + 3t^2 - 4t^3 - 4t^4)\vec{k}
 \end{aligned}$$

c) El vector velocidad angular

$$\vec{\omega} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{i} = (2 - t - 2t^2) \vec{i}$$

d) El movimiento de la partícula fluida

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t + 2t^2 + 2}{2} \\ 0 & \frac{t + 2t^2 + 2}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{\gamma} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t + 2t^2 + 2}{2} \\ 0 & \frac{-t - 2t^2 + 2}{2} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e) ¿Podría representar este campo de velocidades a un fluido que fuera un líquido?

$$\text{traza}(\bar{\xi}) = 0 \rightarrow \text{Es un líquido.}$$

4. Un campo de velocidades viene dado por  $v_x = x^2 - 2y^2$ ;  $v_y = -2xy \Rightarrow \vec{v} = (x^2 - 2y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$

a) Clasificación del flujo.

Flujo bidireccional, bidimensional y estacionario.

b) La expresión de la aceleración total de la partícula fluida.

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \\ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= v_x \frac{\partial}{\partial x} [v_x \vec{i} + v_y \vec{j}] + v_y \frac{\partial}{\partial y} [v_x \vec{i} + v_y \vec{j}] \\ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= \left[ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{i} + \left[ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] \vec{j} \\ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= [(x^2 - 2y^2)2x + 4xy^2] \vec{i} + [(x^2 - 2y^2)(-2y) + 4x^2y] \vec{j} \\ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= 2(x^2 + 2y^2)(x\vec{i} + y\vec{j})\end{aligned}$$

c) Aceleración local.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

d) Aceleración convectiva debida al cambio del módulo de la velocidad.

$$\vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \vec{\nabla} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} \right) = \vec{\nabla} \left( \frac{x^4 + 4y^4}{2} \right) = 2x^3\vec{i} + 8y^3\vec{j}$$

e) Aceleración convectiva debido al cambio de dirección de la velocidad.

$$\begin{aligned}-\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2} = 2(x^2 + 2y^2)(x\vec{i} + y\vec{j}) - (2x^3\vec{i} + 8y^3\vec{j}) \\ -\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= 4y^2x\vec{i} + (2x^2y - 4y^3)\vec{j}\end{aligned}$$

f) Demostrar que la variación de la densidad a lo largo de una línea de corriente es nula.

La variación de la densidad a lo largo de una línea de corriente nula  $\Leftrightarrow$  fluido incompresible:

$$\text{traza}(\bar{\bar{\xi}}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2x - 2x = 0 \rightarrow \text{Fluido incompresible}$$

g) Movimiento de la partícula fluida.

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\xi}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -3y \\ -3y & -2x \end{bmatrix} \\ \bar{\bar{\gamma}} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix} \\ d\vec{v} &= d\vec{r} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}) = d\vec{r} \cdot \left( \begin{bmatrix} 2x & -3y \\ -3y & -2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix} \right) = d\vec{r} \cdot \begin{bmatrix} 2x & -4y \\ -2y & -2x \end{bmatrix}\end{aligned}$$

### 9.3. Conservación de la masa.

1. Calcular la relación de velocidades entre el caudal de entrada y de salida en una tubería divergente

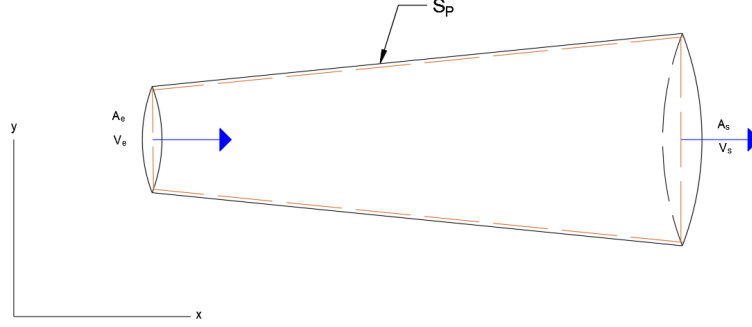


Figura 9.3: Esquema de la tubería.

Se parte de la ecuación de conservación de la masa.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV + \oint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV = 0 \rightarrow \text{El volumen no varía con el tiempo.}$$

$$\oint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_e(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_p(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_s(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

$$\iint_{S_e(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = -\rho v_e \iint_{S_e(t)} dS = -\rho v_e A_e$$

$$\iint_{S_s(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \rho v_s \iint_{S_s(t)} dS = \rho v_s A_s$$

$$\iint_{S_p(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

El volumen de control no se desplaza y el fluido en contacto con las paredes tiene la misma velocidad que estas que al no moverse es 0.

Por tanto:

$$-\rho v_e A_e + \rho v_s A_s = 0 \rightarrow v_e A_e = v_s A_s$$



2. Calcular la relación entre la velocidad de salida y la altura en un depósito con un agujero en su fondo

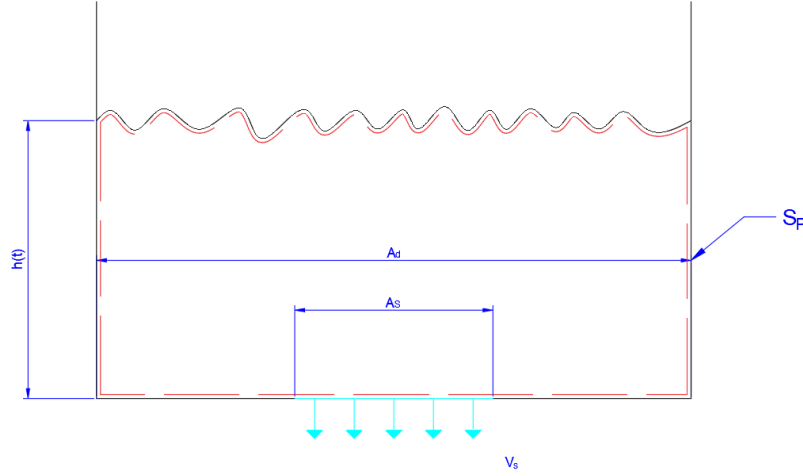


Figura 9.4: Esquema del depósito con el agujero en su fondo.

Se parte de la ecuación de conservación de la masa.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV + \oint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV &= \rho \frac{d}{dt} V(t) = \rho A_d \dot{h}(t) \\ \oint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS &= \iint_{S_s(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_p(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_n(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS \\ \iint_{S_s(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS &= \rho v_s \iint_{S_s(t)} dS = \rho v_s A_s \\ \iint_{S_n(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS &= 0 \rightarrow v_c = v \text{ Y por tanto, se cancelan.} \end{aligned}$$

$$\iint_{S_p(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Por tanto:

$$\rho A_d \dot{h}(t) + \rho v_s(t) A_s = 0 \rightarrow A_d \dot{h}(t) + v_s(t) A_s = 0$$

3. Un envase que contiene aire comprimido se abre y el aire sale por el orificio con un gasto másico  $\dot{m} = C\rho$ , donde  $\rho$  es la densidad del aire del depósito y  $C$  es una constante. Se pide una expresión de la densidad en función del tiempo sabiendo que  $\rho_0$  es la densidad inicial en el depósito y  $V$  su volumen, así como el tiempo necesario para que la densidad haya disminuido un 40 %.

Se parte de la ecuación de conservación de la masa.

El volumen es constante y  $\rho = \rho(t)$  con  $\dot{m} = C\rho$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV + \oiint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV = V \frac{d}{dt} \rho(t) = V \dot{\rho}(t)$$

Como ya se ha hecho en los ejercicios anteriores, se descompone la superficie y como solo existe velocidad en el orificio:

$$\oiint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \rho v_s A_s = \dot{m} = C\rho$$

Por tanto:

$$V \dot{\rho}(t) + C\rho(t) = 0$$

Que no es más que una EDO con variables separables cuya solución es:

$$\ln \left( \frac{\rho(t)}{\rho_0} \right) = -\frac{C}{V} t \rightarrow \text{Para una reducción de rho de un 40 \%} \rightarrow t = \frac{V}{C} \ln \left( \frac{1}{0,6} \right)$$

4. Un tanque cilíndrico de diámetro (D) igual a 80 cm se comunica por el fondo con una tubería horizontal de diámetro (d) 15 cm por la que fluye agua. La velocidad del agua aguas arriba y aguas abajo del depósito es de 2,4 m/s y 1,8 m/s, respectivamente. En un instante de tiempo, la altura de agua (h) en el depósito es de 35 cm. Calcular el tiempo que se necesita para rellenar el depósito que tiene una altura de 1.2 m.

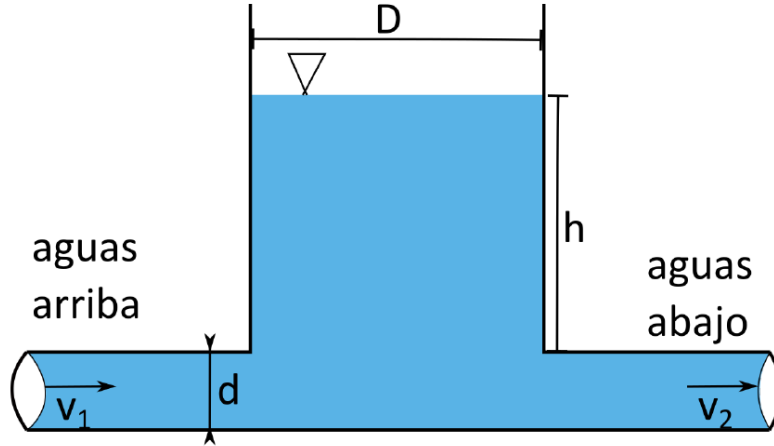


Figura 9.5: Esquema de la tubería con el depósito.

Se escoge como volumen de control el contorno del líquido, diferenciando entre 4 regiones:

- Entrada
- Salida
- Superficie depósito
- Pared

Partiendo de la ecuación de la masa y basandose en desarrollos anteriores:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV + \iint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Como  $\rho = cte$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} dV + \iint_{S_c(t)} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \pi \frac{D^2}{4} h(t) + l_H \pi \frac{d^2}{4} \right] - v_e \pi \frac{d^2}{4} + v_s \pi \frac{d^2}{4} &= 0 \\ D^2 \dot{h}(t) - v_e d^2 + v_s d^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la EDO

$$h(t) = h_0 + \frac{d^2}{D^2} (v_e - v_s) t \rightarrow \text{Sustituyendo los datos del enunciado se obtiene } \rightarrow t = 40,3s$$

5. Se dispone de un émbolo de diámetro ( $D_c$ ) con su superficie perforada con  $N$  agujeros de diámetro  $d$  que se disponen equidistantes al centro. Inicialmente el cilindro se encuentra lleno de un fluido incompresible de densidad  $\rho$ . El émbolo se desplaza con una velocidad  $w_0$ , produciéndose la salida del fluido con velocidad  $v_s$  por un orificio de diámetro  $D_s$ . Se pide calcular la velocidad  $v_s$  en función de los datos del ejercicio.

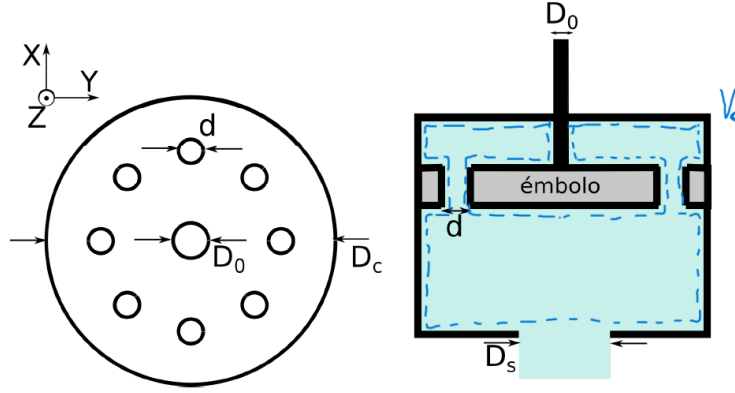


Figura 9.6: Esquema del émbolo Perforado.

Se escoge el volumen de control marcado sobre la figura y se plantea la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV + \oint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Como  $\rho = cte$ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} dV + \oint_{S_c(t)} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

El término local, como la única variación del volumen ocurre por la introducción de la varilla:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} dV = -\omega_0 \pi \frac{D_0^2}{4}$$

El término convectivo, teniendo en cuenta que las superficies son la pared o la de salida:

$$\oint_{S_c(t)} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = v_s \pi \frac{D_s^2}{4}$$

Por tanto:

$$-\omega_0 \pi \frac{D_0^2}{4} + v_s \pi \frac{D_s^2}{4} = 0 \rightarrow v_s = \omega_0 \left( \frac{D_0}{D_s} \right)^2$$

6. Calcular en función de la altura la relación con la velocidad de un depósito con varios agujeros

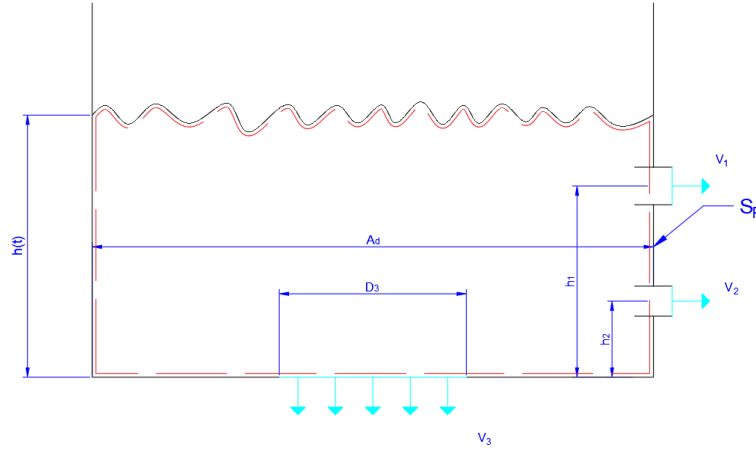


Figura 9.7: Esquema del depósito con varios agujeros.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente para un depósito, se pueden plantear directamente las ecuaciones teniendo en cuenta las distintas regiones:

- $h(t) > h_1$

$$-A_d \dot{h}(t) = v_3 \frac{\pi D_3^2}{4} + v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} + v_1 \frac{\pi D_1^2}{4}$$

- $h_1 > h(t) > h_2$

$$-A_d \dot{h}(t) = v_3 \frac{\pi D_3^2}{4} + v_2 \frac{\pi D_2^2}{4}$$

- $h(t) < h_2$

$$-A_d \dot{h}(t) = v_3 \frac{\pi D_3^2}{4}$$

7. El flujo de un fluido está representado por el siguiente campo de velocidades:  $u = u(x, t)$ ;  $v = 0$ ;  $w = 0$ , y densidad  $\rho = \rho_0 [a - \cos(\omega t)]$  con  $a > 1$ . Determinar la función  $v(x, t)$  sabiendo que  $v(0, t) = v_0$ .

$$\rho = \rho_0[a - \cos(\omega t)] \text{ y } v = f(x, t)$$

Se plantea la ecuación de conservación de la masa en forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0[a - \cos(\omega t)]) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] \cdot [\rho_0[a - \cos(\omega t)]] v(x, t) = 0$$

$$\omega \rho_0 \sin(\omega t) + [\rho_0[a - \cos(\omega t)]] \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = -\frac{\omega \sin(\omega t)}{a - \cos(\omega t)}$$

Resolviendo la EDO con la condición de que  $v(0, t) = v_0$ .

$$v(x, t) = -\frac{\omega \sin(\omega t)}{a - \cos(\omega t)} x + v_0$$

### 9.4. Conservación de la cantidad de movimiento.

1. Considérese una tubería de sección decreciente con un codo con un ángulo  $\alpha$ . Calcule la fuerza que se ejerce sobre las paredes.

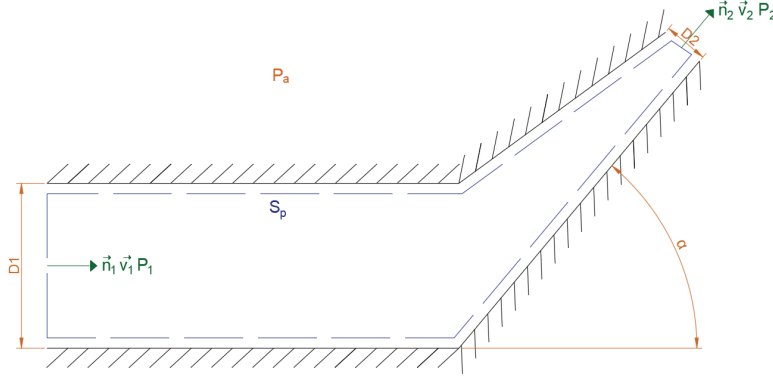


Figura 9.8: Esquema de la tubería.

Se plantea la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Como el fluido es globalmente estacionario y no varía el volumen:

$$\rho \oint_{S_c} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

$$\oint_{S_c} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_1} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_2} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_p} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

$$\iint_{S_1} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = -v_1 \pi \frac{D_1^2}{4}$$

$$\iint_{S_2} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = v_2 \pi \frac{D_2^2}{4}$$

$$\iint_{S_p} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Por tanto de la conservación de la masa se obtiene:

$$v_1 D_1^2 = v_2 D_2^2$$

Planteando la conservación de la cantidad de movimiento

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V dV + \oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

El término de fuerzas volumétricas:

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V dV = \iiint_{V_f} \rho \vec{g} dV = \rho \vec{g} V_c$$

El término de fuerzas superficiales:

$$\oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_p} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS$$

- Como se cumple que la fuerza ejercida por la atmósfera sobre toda la superficie de control es nula:

$$\oint_{S_c} P_a \vec{n} dS = 0$$

- Por tanto, para tener en cuenta las aportaciones de fuerza tanto del fluido como de la presión atmosférica:

$$\oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{S_c} [-(P - P_a)\vec{I} + \vec{\tau}] \cdot \vec{n} dS$$

- Además, el término de fuerza superficial sobre las paredes es la fuerza a calcular:

$$\iint_{S_p} [-(P - P_a)\vec{I} + \vec{\tau}] \cdot \vec{n} dS = -F_{fluido+atm \rightarrow pared}$$

- En un perfil uniforme se cumple que  $\tau_v$  es despreciable frente al término de presión. Por tanto:

$$\oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} -(P - P_a)\vec{n} dS + \iint_{S_2} -(P - P_a)\vec{n} dS - F_{fluido \rightarrow pared}$$

$$\oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = -(P_1 - P_a)\frac{\pi D_1^2}{4}(-\vec{i}) - (P_2 - P_a)\frac{\pi D_2^2}{4}(\vec{n}) - F_{fluido+atm \rightarrow pared}$$

$$\oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \frac{\pi}{4} [(P_1 - P_a)D_1^2\vec{i} - (P_2 - P_a)D_2^2(\cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j})] - F_{fluido+atm \rightarrow pared}$$

El término local:

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV = 0$$

El término convectivo:

$$\oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_1} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_2} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_p} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

$$\iint_{S_1} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \rho v_1 \vec{i} \cdot v_1 \vec{i} \cdot -\vec{i} \frac{D_1^2}{\pi} = -\rho v_1^2 \frac{D_1^2}{\pi} \vec{i}$$

$$\iint_{S_2} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \rho v_2 \vec{n} \cdot v_2 \vec{n} \cdot \vec{n} \frac{D_2^2}{\pi} = \rho v_2^2 \frac{D_2^2}{\pi} \vec{n} = \rho v_2^2 \frac{D_2^2}{\pi} [\cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}]$$

$$\iint_{S_p} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Por tanto, sustituyendo los términos se obtiene:

$$F_{fluido+atm \rightarrow pared} = \frac{\pi}{4} [(P_1 - P_a)D_1^2\vec{i} - (P_2 - P_a)D_2^2\vec{n}] + \rho g V_c \vec{j} + \rho \frac{\pi}{4} [v_1^2 D_1^2 \vec{i} - v_2^2 D_2^2 \vec{n}]$$

$$\vec{n} = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}$$



2. Se tiene un elemento de área de  $2 \text{ mm}^2$  cuya normal es paralela al vector de componentes  $(1, 2, 3)$ . Si el tensor de esfuerzos es de la forma  $\tau_{xx} = -2 \times 10^5$ ;  $\tau_{yy} = -110 \times 10^3$ ;  $\tau_{zz} = -115 \times 10^3$ ;  $\tau_{xy} = 1 \times 10^3$ ;  $\tau_{xz} = -5 \times 10^4$ ;  $\tau_{zy} = 1 \times 10^5$ , todos ellos en pascales. Se pide:

- El tensor de esfuerzos

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & 1 \times 10^3 & -5 \times 10^4 \\ 1 \times 10^3 & -110 \times 10^3 & 1 \times 10^5 \\ -5 \times 10^4 & 1 \times 10^5 & -115 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

- El valor de la fuerza superficial sobre dicha área si la presión es de 1.5 bares.

$$F = \oiint_{S_c} \left( -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \right) \cdot \vec{n} dS = \left( -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \right) \cdot \vec{n} S$$

$$F = -1,5 \times 10^5 \frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & 1 \times 10^3 & -5 \times 10^4 \\ 1 \times 10^3 & -110 \times 10^3 & 1 \times 10^5 \\ -5 \times 10^4 & 1 \times 10^5 & -115 \times 10^3 \end{bmatrix} \cdot \frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -0,996 \\ -0,438 \\ -1,29 \end{bmatrix}$$

3. Considérese un depósito cilíndrico de sección  $A$  que se encuentra fijo sobre una plataforma. El depósito tiene una altura  $h$  de agua y en el instante inicial se practica un orificio de área  $A_s$  en la parte inferior de la pared. ¿Hacia dónde tendería a desplazarse si no estuviera fijado a la plataforma? Calcular la fuerza de reacción de la plataforma sobre el depósito.

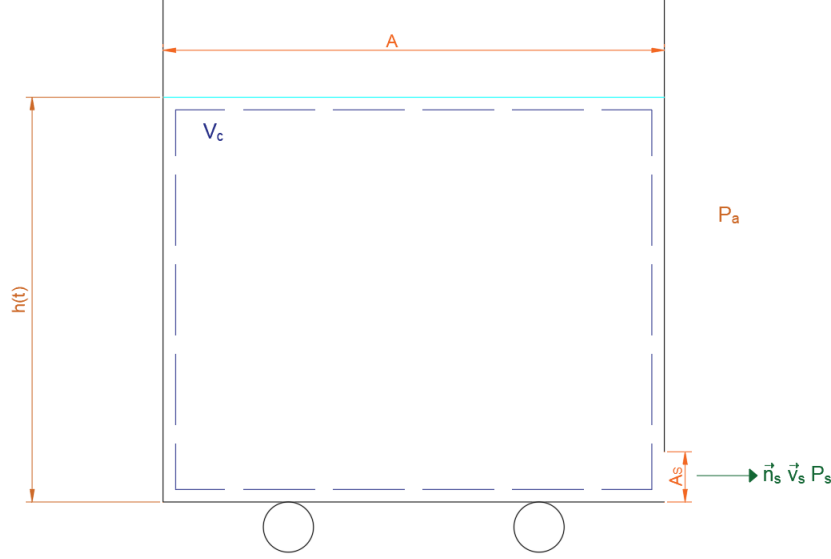


Figura 9.9: Esquema del depósito.

Se plantea la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Teniendo en cuenta desarrollos de ejercicios anteriores:

$$A\dot{h}(t) = v_s(t)A_s$$

Planteando la conservación de la cantidad de movimiento, donde solo se buscan los términos en dirección  $\vec{i}$  ya que el depósito si no estuviese fijo se movería hacia la izquierda y los términos de fuerza en dirección al suelo solo soportan el peso del depósito y no intervendrían en este "movimiento"

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V dV + \oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

El término de fuerzas volumétricas es nulo en la dirección de la fuerza a reacción a calcular:

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V dV = 0$$

El término de fuerzas superficiales:

$$\oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_s} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_n} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_p} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS$$

- En un perfil uniforme se cumple que  $\tau_v$  es despreciable frente al término de presión. Por tanto la resultante en la dirección  $\vec{i}$ :

$$\oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS \cdot \vec{i} = \left[ \iint_{S_s} -(P - P_a) \vec{n} dS + \iint_{S_n} -(P - P_a) \vec{n} dS + \iint_{S_p} -(P - P_a) \vec{n} dS \right] \cdot \vec{i}$$

$$\oint_{S_c} \left( -P\vec{I} + \vec{\tau} \right) \cdot \vec{n} dS \cdot \vec{i} = (P_s - P_a)A_s + 0 - F_{fl+atm \rightarrow dep} = (P_s - P_a)A_s - F_{fl+atm \rightarrow dep}$$

El término local es nulo debido a que la variación de la derivada de la altura tiene un orden de magnitud mucho menor al resto de términos y, por tanto es despreciable :

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV = 0$$

El término convectivo en la dirección de  $\vec{i}$ :

$$\oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_n} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_s} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_p} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

$$\oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS \cdot \vec{i} = 0 + \rho v_s^2 A_s \vec{i} \cdot \vec{i} + 0 = \rho v_s^2 A_s$$

Por tanto, sustituyendo los término se obtiene:

$$(P_s - P_a)A_s - F_{fl+atm \rightarrow dep} = \rho v_s^2 A_s \rightarrow P_s = P_a$$

$$|F_{fl+atm \rightarrow dep}| = |\rho v_s^2 A_s| \rightarrow \text{Como se mueve a la izquierda: } \vec{F}_{fl+atm \rightarrow dep} = -\rho v_s^2 A_s \vec{i}$$

Para obtener la relación entre altura y velocidad de salida se aplica el teorema de Bernoulli entre la parte superior del depósito y la salida:

$$P_1 + \rho gh(t) = P_s + \frac{v_s^2(t)}{2} \rho \rightarrow P_1 = P_s = P_a \rightarrow h(t) = \frac{v_s^2(t)}{2g} \rightarrow v_s(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

Aplicando esta expresión junto a la obtenida con la conservación de la masa:

$$v_s(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

$$A\dot{h}(t) = v_s(t)A_s$$

Resolviendo la EDO se obtiene:

$$\sqrt{h(t)} = \frac{-A_s}{A} \sqrt{\frac{g}{2}} t + \sqrt{h_0}$$

4. Calcule la fuerza aplicada por un chorro sobre una placa móvil:

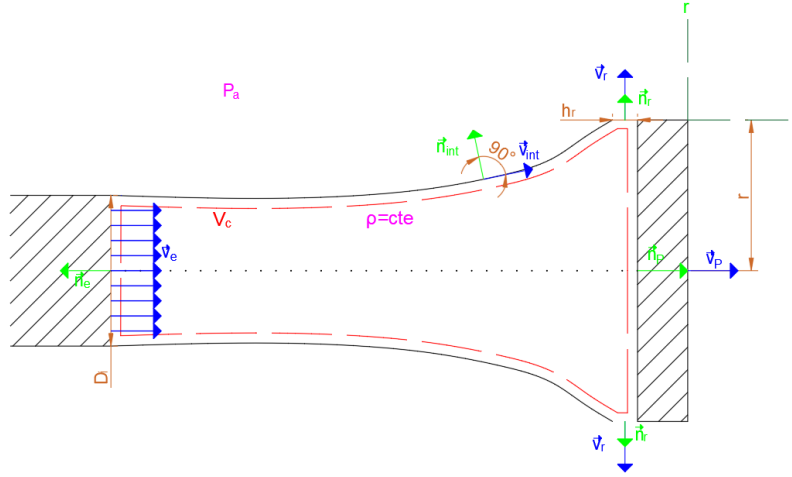


Figura 9.10: Esquema del problema.

Se coloca el sistema de referencia en la placa y con velocidad  $\vec{v}_p$  que como es constante no provoca fuerzas de inercia. De esta manera el chorro sale a la velocidad:  $\vec{v}_e - \vec{v}_p$   
Se plantea la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Como el volumen de control no cambia:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho dV = 0$$

Desarrollando el término de superficie:

$$\begin{aligned} & \oint_{S_c} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \\ & \iint_{S_e} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_{int}} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_r} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_P} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS \end{aligned}$$

La velocidad del volumen de control  $\vec{v}_c = 0$

- En la salida del chorro, por ser un perfil uniforme:

$$\iint_{S_e} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_e} \rho (v_e - v_P) \vec{i} \cdot -\vec{i} dS = -(v_e - v_P) \frac{\pi D_i^2}{4}$$

- En la interfase como la velocidad es siempre perpendicular a la superficie:

$$\iint_{S_{int}} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

- En la dirección radial de la placa:

$$\iint_{S_r} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_r} \rho v_r \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS = v_r 2\pi r h(r) [\text{Área de un cilindro}]$$

- En la placa, como la velocidad del fluido es 0:

$$\iint_{S_p} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Por tanto:

$$(v_e - v_p) \frac{\pi D_i^2}{4} = v_r 2\pi r h(r)$$

Planteando la conservación de la cantidad de movimiento:

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V dV + \oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

Se desprecia el término de fuerzas volumétricas (número de Froude elevado):

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V dV = 0$$

El término de fuerzas superficiales:

$$\begin{aligned} & \oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \\ & \iint_{S_e} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_{int}} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_r} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_p} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

Aplicando el mismo razonamiento que en anteriores ejercicios se introduce la presión atmosférica  $P_a$ . Como el número de Reynolds y Froude son elevados porque es un líquido está dentro de un gas,  $\vec{\tau}$  es despreciable.

- En la salida del chorro, por ser un perfil uniforme y la presión es la atmosférica:

$$\iint_{S_e} [-(P - P_a)\vec{I} + \vec{\tau}] \cdot \vec{n} dS = 0$$

- En la interfase como la presión es la atmosférica:

$$\iint_{S_{int}} [-(P - P_a)\vec{I} + \vec{\tau}] \cdot \vec{n} dS = 0$$

- En la dirección radial de la placa como la presión es la atmosférica:

$$\iint_{S_r} [-(P - P_a)\vec{I} + \vec{\tau}] \cdot \vec{n} dS = 0$$

- En la placa:

$$\iint_{S_p} [-(P - P_a)\vec{I} + \vec{\tau}] \cdot \vec{n} dS = -F_{jet+atm \rightarrow placa}$$

El término local es despreciable ya que el fluido es globalmente estacionario:

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV = 0$$

El término superficial, teniendo en cuenta como en los desarrollos anteriores solo eran no nulos los términos a la salida del chorro y en la dirección radial de la placa:

$$\oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_e} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_r} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

- En la salida del chorro:

$$\iint_{S_e} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_e} \rho (v_e - v_p) \vec{k} [(v_e - v_p) \vec{k} \cdot -\vec{k}] dS = -\rho (v_e - v_p)^2 \frac{\pi D_i^2}{4} \vec{k}$$

- En la dirección radial de la placa:

$$\iint_{S_r} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_r} \rho v_r \vec{e}_r [v_r \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r] dS = \rho v_r^2 \iint_{S_r} \vec{e}_r dS = 0 \text{ Ver figura inferior}$$

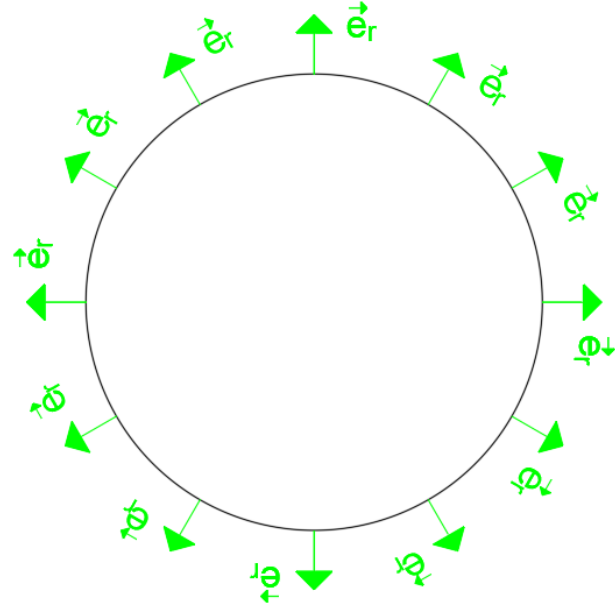


Figura 9.11: Representación de  $\vec{e}_r$  a lo largo de la superficie.

Por tanto:

$$F_{jet+atm \rightarrow placa} = \rho (v_e - v_p)^2 \frac{\pi D_i^2}{4} \vec{k}$$

5. Dado el depósito de la Figura 9.12, determinar la expresión de la longitud que recorre el chorro que sale del depósito, en función del tiempo.

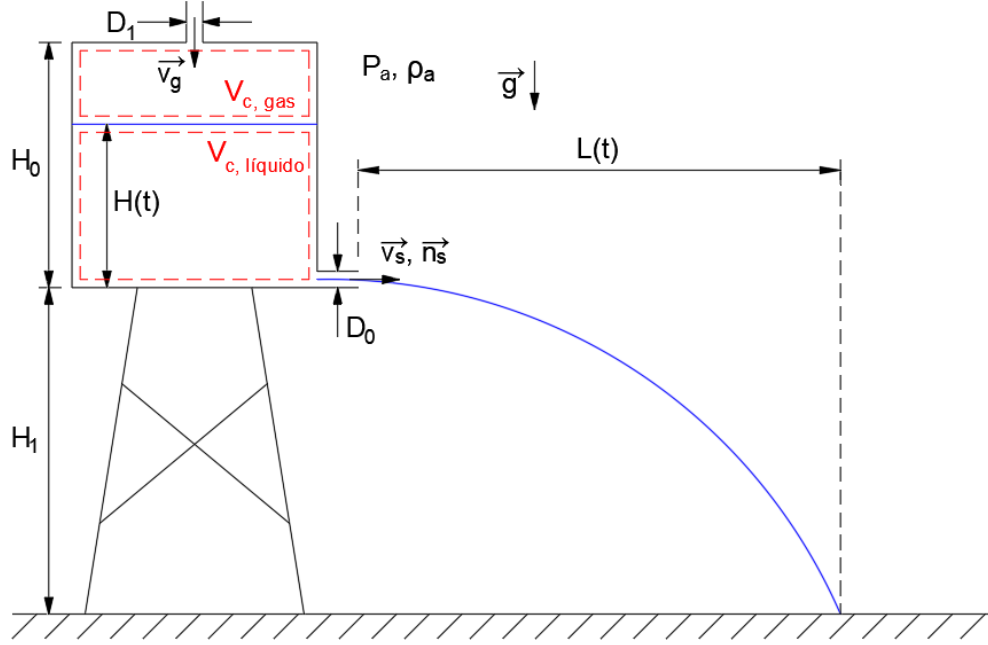


Figura 9.12: Esquema del depósito en altura.

**Forma macroscópica.**

$$V_C = V_{\text{depósito}} = V_{C, \text{líquido}} + V_{C, \text{gas}}$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_{C_l}} \rho dV + \oint_{S_{C_l} = S_p \cup S_{\text{nivel}} \cup S_{\text{salida}}} \rho (\vec{v} - \vec{v}_C) \cdot \vec{n} dS = 0$$

- El término local:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_{C_l}} \rho dV = \rho A \frac{dH}{dt}$$

- El término convectivo:

$$\oint_{S_{C_l} = S_p \cup S_{\text{nivel}} \cup S_{\text{salida}}} \rho (\vec{v} - \vec{v}_C) \cdot \vec{n} dS = \rho v_s \frac{\pi D_0^2}{4}$$

$$-A \frac{dH}{dt} = v_s \frac{\pi D_0^2}{4}$$

$$Q_{\text{líquido}} = Q_{\text{gas}} \Rightarrow v_s \frac{\pi D_0^2}{4} = v_g \frac{\pi D_1^2}{4}$$

$$\frac{dV_C}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dV_{C, \text{líquido}}}{dt} = -\frac{dV_{C, \text{gas}}}{dt}$$

Analizando el lazo de presiones:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_a \\
P_2 + \frac{1}{2}\rho_a v_g^2 &= P_1 + \frac{1}{2}\rho_a v_{g,atm}^2 \\
P_3 &= P_2 (\rho_a \text{ es muy pequeña}) \\
P_4 &= P_3 (\text{interfase plana}) \\
P_5 &= P_4 + \rho_l g H(t) \\
P_6 &= P_7 + \frac{1}{2}\rho_l v_s^2 = P_5 \\
P_7 &= P_a
\end{aligned}$$

Donde  $P_1$  es la presión antes del orificio 1 (por donde entra el gas),  $P_2$  la presión después del orificio,  $P_3$  antes de la interfase,  $P_4$  después de la interfase,  $P_5$  en el fondo del depósito,  $P_6$  algo antes del orificio de salida y  $P_7$  la presión tras salir del edificio.

Sabiendo que el término  $\frac{1}{2}\rho_a v_{g,atm}^2$  es despreciable frente a  $\frac{1}{2}\rho_a v_g^2$ , tras sumar todas las presiones resulta:

$$\frac{1}{2}\rho_a v_g^2 = \frac{1}{2}\rho_l v_s^2 + \rho_l g H(t)$$

Conocemos las expresiones de las velocidades de entrada y salida:

$$v_g = \frac{Q}{\frac{\pi D_1^2}{4}}; v_s = \frac{Q}{\frac{\pi D_0^2}{4}}; Q = Q_g = Q_s$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
\rho_l g H(t) &= \frac{1}{2}\rho_a \frac{Q^2}{\frac{\pi^2 D_1^4}{16}} + \frac{1}{2}\rho_l \frac{Q^2}{\frac{\pi^2 D_0^4}{16}} = \frac{\rho_l 8Q^2}{\pi^2 D_0^4} \left( \frac{\rho_a D_0^4}{\rho_l D_1^4} + 1 \right) \Rightarrow \\
\rho_l g H(t) &= \frac{\rho_l 8Q^2}{\pi^2 D_0^4} \left( \frac{\rho_a D_0^4}{\rho_l D_1^4} + 1 \right), \text{ donde } \frac{\rho_a D_0^4}{\rho_l D_1^4} \text{ puede llegar a ser de orden 1.} \left. \vphantom{\frac{\rho_l 8Q^2}{\pi^2 D_0^4}} \right\} \Rightarrow \\
Q &= -A \frac{dH}{dt} \\
\Rightarrow Q &= \sqrt{\frac{\pi^2 D_0^4 g}{\left( \frac{\rho_a D_0^4}{\rho_l D_1^4} + 1 \right)}} H(t) = -A \frac{dH}{dt}
\end{aligned}$$

Conociendo la expresión de la caída libre:

$$\Gamma(t) = L(t) \cdot \vec{i} + Y(t) \cdot \vec{j} = t \cdot v_s(t) \cdot \vec{i} + \left( H_1 - \frac{1}{2}gt^2 \right) \cdot \vec{j}$$

Y despreciando la componente  $\vec{j}$ , despejamos la expresión pedida:

$$L(t) = 4t \sqrt{\frac{gH(t)}{\left( \frac{\rho_a D_0^4}{\rho_l D_1^4} + 1 \right)}}$$



**Forma microscópica.** Se trata de centrarse en la interfase. No se estudiará en profundidad.

$$\left. \begin{array}{l} v_l(\text{interfase}) = v_g(\text{interfase}) \\ A_l = A_g \end{array} \right\} \Rightarrow Q_g = Q_l$$

6. El movimiento de un flujo incompresible e isótropo viene dado por el campo de velocidades  $\vec{v} = (z^2 - x^2)\vec{i} + 2xz\vec{k}$ . Dicho flujo se encuentra sometido a la acción de la gravedad, que actúa en la dirección negativa del eje Y. Se pide:

a) Clasificar el flujo.

Estacionario, tridimensional, bidireccional.

b) Comprobar que se verifica la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\text{Incompresible} \Rightarrow \rho = cte \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 0 + 2x = 0 \Rightarrow \text{Se verifica}$$

- c) Calcular el campo de presiones que actúa sobre el fluido, sabiendo que la presión en el plano XZ con  $y = 0$  es la presión atmosférica.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

Desarrollando cada término:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \text{ al ser un flujo estacionario.}$$

$$(\vec{i}) \quad 2x^3 + 2xz^2 = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$(\vec{j}) \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g$$

$$(\vec{k}) \quad (z^2 - x^2)(2z) + 2xz(2x) = 2z^3 + 2x^2z = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -2x^3 - 2xz^2 \Rightarrow \int_x \Rightarrow P(x, y, z) = -\frac{1}{2}x^4 - x^2z^2 + f(y, z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \Rightarrow \int_y \Rightarrow P(x, y, z) = -\rho g y + m(x, z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -2z^3 - 2xz^2 \Rightarrow \int_z \Rightarrow P(x, y, z) = -\frac{1}{2}z^4 - z^2x^2 + h(x, y)$$

$$P_a = P(x, y = 0, z) = -\frac{1}{2}x^4 - x^2z^2 + f(y = 0, z)$$

$$P_a = m(x, z)$$

$$P_a = P(x, y = 0, z) = -\frac{1}{2}z^4 - z^2x^2 + h(x, y = 0)$$

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} = \rho((z^2 - x^2)(2z - 2x) + (2xz)(2z + 2x))$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = (z^2 - x^2)(-2x) + (2xz)(2z)$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_y = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_z = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = (z^2 - x^2)(2z) + (2xz)(2x)$$

$$-\vec{\nabla}P = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{v} = \mu\vec{\nabla}^2v_x\vec{i} + \mu\vec{\nabla}^2v_y\vec{j} + \mu\vec{\nabla}^2v_z\vec{k} = \vec{0} \text{ (ver debajo)}$$

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}^2v_x = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$\vec{\nabla}^2v_y = 0$$

$$\vec{\nabla}^2v_z = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\rho\vec{g} = \vec{f}_v = -\rho g\vec{j}$$

7. Para el depósito de la Figura 9.13 hallar la expresión del tiempo que tardaría en vaciarse sabiendo que  $h(t = 0) = H_0$

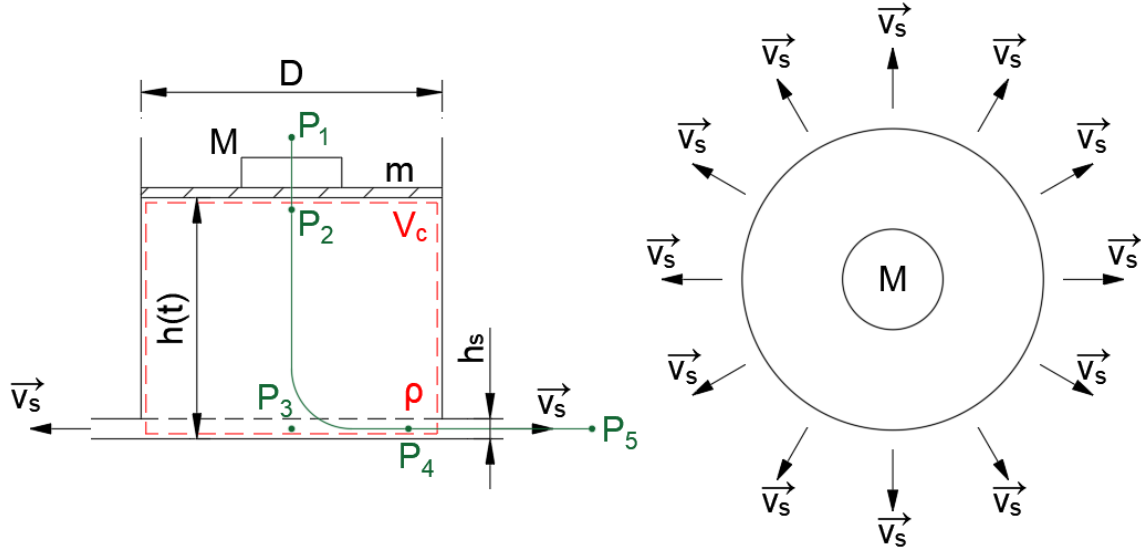


Figura 9.13: Esquema del depósito con salida de tipo anillo.

*Conservación de la masa:*

$$-A_d \frac{dh(t)}{dt} = v_s h_s \sqrt{4\pi A_d}$$

$$A_d = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow D = \sqrt{4\pi A_d}$$

$$P_1 = P_a$$

$$P_2 = P_1 + (M + m)g \cdot \frac{1}{A_d}$$

$$P_3 = P_2 + \rho g h(t)$$

$$P_4 = P_3$$

$$P_5 + \frac{1}{2}\rho v_s^2 = P_4$$

$$P_5 = P_a$$

$$\frac{1}{2}\rho v_s^2 = (M + m) \frac{g}{A_d} + \rho g h(t)$$

$$t_{\text{vaciado}} \Rightarrow h(t = t_{\text{vaciado}}) = 0$$

Se observa que no depende de la geometría del orificio de salida, sino de la velocidad de salida del fluido.

8. Calcular la altura,  $h$ , si la fuerza del fluido sobre el depósito con  $N$  agujeros es nula. La densidad  $\rho$  es constante.

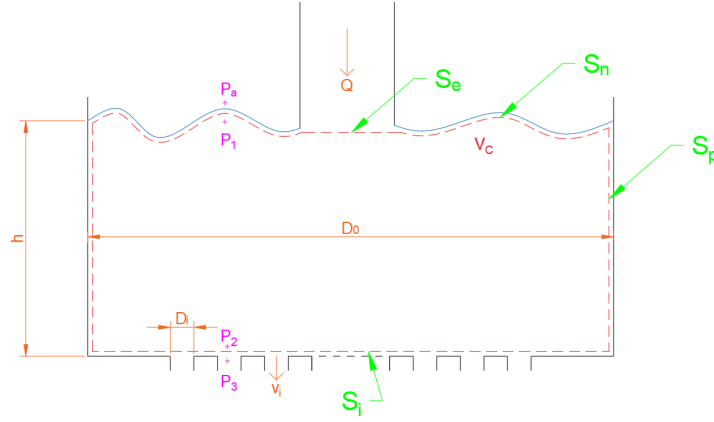


Figura 9.14: Esquema del depósito con  $N$  agujeros en su base.

Planteando la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_C) \cdot \vec{n} dS = 0$$

Como el volumen de control no varia ( $h$  constante), teniendo en cuenta desarrollos anteriores:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho dV = 0 \rightarrow \oint_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_C) \cdot \vec{n} dS = 0 \rightarrow \rho v_e S_e = \rho v_i S_i \rightarrow Q = v_i N \pi \frac{D_i^2}{4} \rightarrow v_i = \frac{4Q}{\pi N D_i^2}$$

Planteando la conservación del momento en la dirección del eje  $\vec{j}$  (en el eje  $\vec{i}$  por simetría se anula):

$$\left[ \iiint_{V_c} \vec{f}_V dV + \oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_C) \cdot \vec{n}] dS \right] \cdot \vec{j}$$

El término de fuerzas volumétricas:

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V dV \cdot \vec{j} = -\rho g h A_d$$

El término de fuerzas superficiales:

$$\oint_{S_c} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_e} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_i} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_n} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_p} (-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} dS$$

Aplicando el mismo razonamiento que en anteriores ejercicios se introduce la presión atmosférica  $P_a$ . Como el número de Reynolds es elevado,  $\vec{\tau}$  es despreciable.

- En la entrada del chorro, por ser un perfil uniforme y la presión es la atmosférica:

$$\left\{ \iint_{S_e} [-(P - P_a)\vec{I} + \vec{\tau}] \cdot \vec{n} dS \right\} \cdot \vec{j} = 0$$

- En la salida del chorro, por ser un perfil uniforme y la presión es la atmosférica:

$$\left\{ \iint_{S_i} \left[ -(P - P_a)\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \right] \cdot \vec{n} dS \right\} \cdot \vec{j} = 0$$

- En interfase líquido-gas como la presión es la atmosférica:

$$\left\{ \iint_{S_n} \left[ -(P - P_a)\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \right] \cdot \vec{n} dS \right\} \cdot \vec{j} = 0$$

- En la pared:

$$\left\{ \iint_{S_p} \left[ -(P - P_a)\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \right] \cdot \vec{n} dS \right\} \cdot \vec{j} = -F_{liq+atm \rightarrow placa}$$

El término local es nulo, pues  $h$  es constante:

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV = 0$$

El término superficial, teniendo en cuenta que salvo en la salida y en la entrada los términos son nulos:

$$\left[ \oint \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = \iint_{S_e} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS + \iint_{S_i} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS \right] \cdot \vec{j}$$

- En la entrada del chorro:

$$\left[ \iint_{S_e} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS \right] \cdot \vec{j} = \left[ \iint_{S_e} \rho v_e \vec{j} [v_e \vec{j} \cdot -\vec{j}] dS \right] \vec{j} = -\rho \frac{4Q^2}{\pi D_0^2}$$

- En la salida del chorro:

$$\left[ \iint_{S_i} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS \right] \cdot \vec{j} = \left[ \iint_{S_i} -\rho v_i \vec{j} [-v_i \vec{j} \cdot -\vec{j}] dS \right] \vec{j} = -\rho N v_i^2 \frac{D_i^2 \pi}{4}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} -\rho g h A_d - F_{jet+atm \rightarrow placa} &= -\rho \frac{4Q^2}{\pi D_0^2} - \rho N v_i^2 \frac{D_i^2 \pi}{4} \\ F_{jet+atm \rightarrow placa} &= \rho \left( \frac{4Q^2}{\pi D_0^2} + N v_i^2 \frac{D_i^2 \pi}{4} - g h A_d \right) = 0 \\ \frac{4Q^2}{\pi D_0^2} + N v_i^2 \frac{D_i^2 \pi}{4} - g h A_d &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión obtenida mediante conservación de la masa:

$$N^2 v_i^2 \frac{\pi D_i^4}{4 D_0^2} + N v_i^2 \frac{\pi D_i^2}{4} - g h \frac{\pi D_0^2}{4} = 0 \rightarrow g h = v_i^2 \left[ \left( \frac{\sqrt{N} D_i}{D_0} \right)^4 + \left( \frac{\sqrt{N} D_i}{D_0} \right)^2 \right]$$

Mediante el lazo de presiones se puede obtener otra relación entre altura y velocidad:

$$P_a = P_1$$

$$P_1 + \rho g h = P_2$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= P_3 + \frac{\rho v_i^2}{2} \\
P_3 &= P_a \\
gh &= \frac{v_i^2}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto, para que la altura sea constante debe cumplirse que (tanto la ecuación por lazo de presiones como mediante conservación de la masa deben ser iguales):

$$\frac{1}{2} = \left( \frac{\sqrt{N} D_i}{D_0} \right)^4 + \left( \frac{\sqrt{N} D_i}{D_0} \right)^2$$

Cuya única solución real positiva es:

$$\frac{\sqrt{N} D_i}{D_0} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} \approx 0,605 \rightarrow \sqrt{N} D_i \approx 0,605 D_0$$

## 9.5. Flujos de viscosidad dominante.

1. Hallar la velocidad mínima para arrastrar toda la película líquida hacia arriba.  $\mu$  y  $\rho$  constantes.

Planteando las ecuaciones vistas en el tema para un flujo con fuerzas de viscosidad dominante unidireccional:

$$0 = P_l + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad ; \quad P_l = -\frac{\partial}{\partial x} (P + \rho U)$$

Las condiciones de contorno del problema son:

$$v_x(y=0) = -v_p \quad ; \quad P(y=h_0) = P_a$$

$$\tau_{P_l} = \mu_{liq} \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{liq} = \mu_{gas} \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{gas} \approx 0$$

$$U = U_g = -\vec{g} \cdot \vec{r} = g\vec{j} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$U = g(-x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha))$$

$$P + \rho U = P + \rho g(-x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha))$$

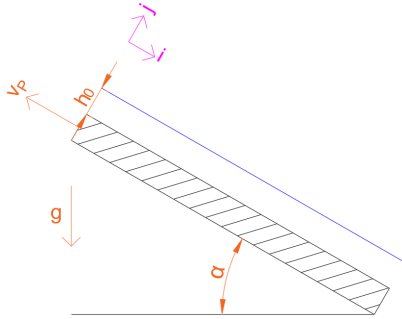


Figura 9.15: Esquema de la placa arrastrando el fluido.

$$P_l = -\frac{\partial}{\partial x} (P + \rho U) = -\frac{\partial}{\partial x} [P + \rho g(-x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha))] = \rho g\sin(\alpha)$$

$$0 = P_l + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{P_l}{\mu} \rightarrow v_x = -\frac{P_l}{2\mu} y^2 + Ay + B$$

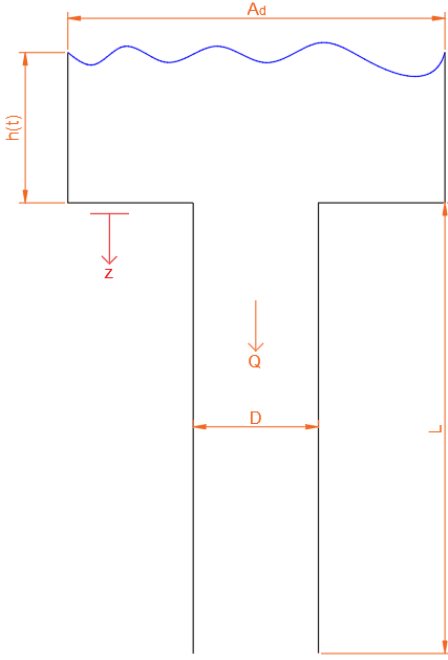
$$v_x(y=0) = -v_p \rightarrow B = -v_p \quad ; \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{h_0} = 0 \rightarrow A = \frac{P_l}{\mu} h_0$$

$$v_x = \frac{P_l y}{2\mu} (h_0 - y) - v_p$$

Para que arrastre toda la película de líquido:

$$v_x = \frac{P_1 y}{2\mu} (h_0 - y) - v_p < 0 \quad \forall y$$

2. Hallar la dinámica del vaciado si el flujo es de viscosidad dominante. El fluido tiene  $\mu$  y  $\rho$  constantes.



Se parte de la expresión del flujo de Hagen-Poiseuille

$$Q = -A_d \dot{h}(t) \quad ; \quad Q_{H-P} = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial}{\partial z} (P + \rho U)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} (P + \rho U) = \frac{128\mu Q}{\pi D^4} \rightarrow Q \text{ y } D \neq f(z)$$

$$\frac{(P + \rho U)_{z=0} - (P + \rho U)_{z=L}}{L} = \frac{128\mu Q}{\pi D^4}$$

$$(P + \rho U)_{z=0} = (P + \rho U)_e = P_e$$

$$(P + \rho U)_{z=L} = (P + \rho U)_s = P_s - \rho g L$$

Sustituyendo:

$$P_e - (P_s - \rho g L) = \frac{128\mu Q L}{\pi D^4} \rightarrow P_e + \rho g L = P_s + \frac{128\mu Q L}{\pi D^4}$$

$$P_e = P_a + \rho g h(t)$$

$$P_s = P_a$$

$$\rho g [L + h(t)] = \frac{128\mu L}{\pi D^4} Q = -\frac{128\mu L}{\pi D^4} A_d \dot{h}(t)$$

Figura 9.16: Esquema del depósito vaciándose.

Resolviendo la EDO:

$$\frac{dh}{L + h(t)} = -\frac{\rho g \pi D^4}{128\mu L A_d} dt \rightarrow \ln [L + h(t)] = -\frac{\rho g \pi D^4}{128\mu L A_d} t + C$$

$$h(t = 0) = h_0 \rightarrow \ln [L + h_0] = C$$

Por tanto:

$$\ln \left[ \frac{L + h(t)}{L + h_0} \right] = -\frac{\rho g \pi D^4}{128\mu L A_d} t \rightarrow K = \frac{\rho g \pi D^4}{128\mu L A_d} \rightarrow h(t) = L (e^{-Kt} - 1) + h_0 e^{-Kt}$$

3. Hallar la dinámica del sistema si el flujo de viscosidad dominante está inmerso en una tubería de diámetro descendente.  $D = D_0 \left(1 - \alpha \frac{z}{L}\right)$

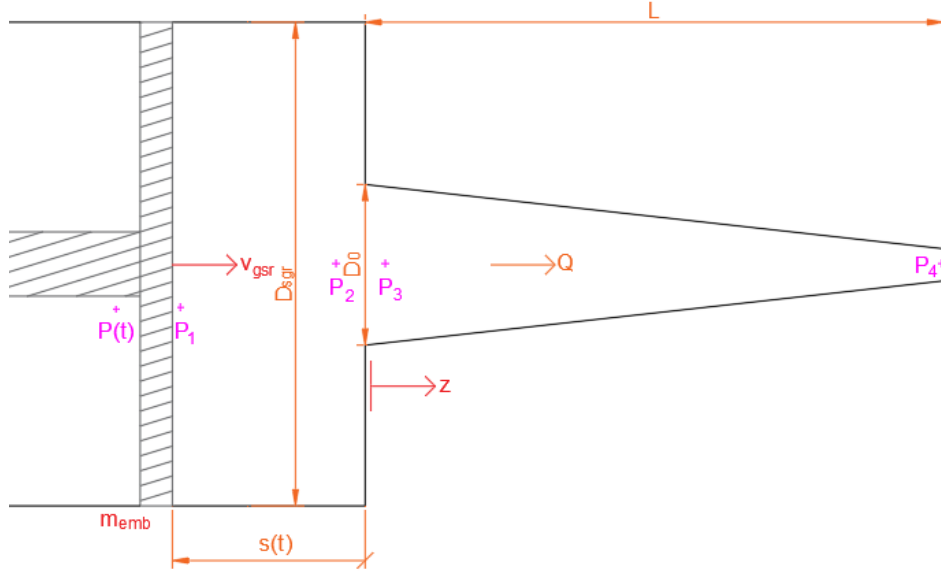


Figura 9.17: Esquema del problema.

Sea  $P(t) = At + B$ . Planteando el lazo de presiones:

$$m_{emb} \ddot{s} = [P(t) - P_1] \frac{\pi D_{sgr}^2}{4} \rightarrow P(t) = P_1 - \frac{4m_{emb}}{\pi D_{sgr}^2} \ddot{s}$$

$$P_1 = P_2 = P_3$$

$$Q_{H-P} = -\frac{\pi D^4(z)}{128} \frac{\partial}{\partial z} (P + \rho U) \rightarrow P_3 - P_4 = \frac{128\mu Q}{\pi} \int_0^L \frac{1}{D^4(z)} dz$$

$$P_3 - P_4 = \frac{128\mu Q}{\pi} \int_0^L \frac{1}{\left(1 - \alpha \frac{z}{L}\right)^4} dz = \frac{128\mu Q}{\pi} \frac{3\alpha}{\left(1 - \alpha \frac{z}{L}\right)^3} \Bigg|_0^L = \frac{384\mu Q \alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{(1 - \alpha)^3} - 1 \right]$$

Planteando las ecuaciones de conservación de la masa se obtiene:

$$Q = -\dot{s} \frac{\pi D_{sgr}^2}{4}$$



## 9.6. Conservación de la energía.

1. Calcular la potencia que debería tener la bomba para levantar el pistón a velocidad constante.

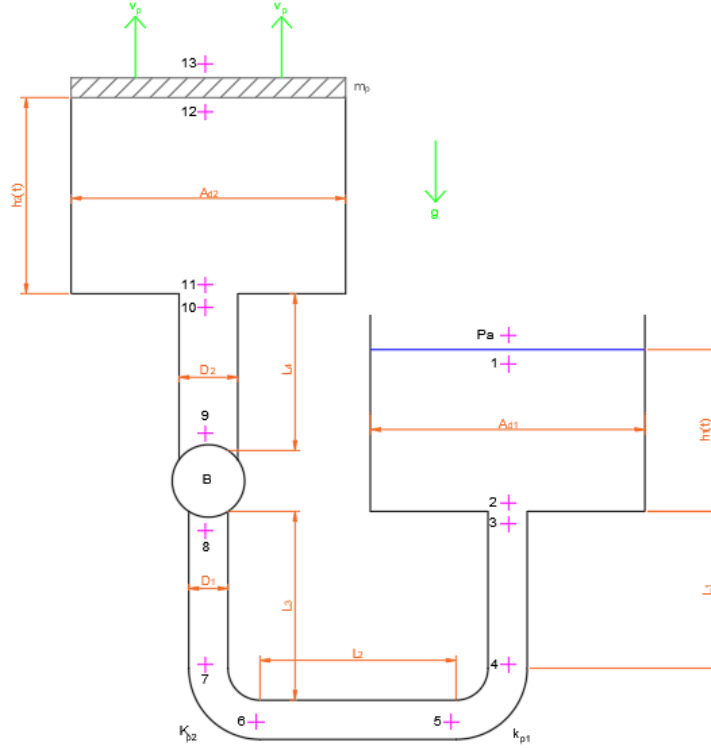


Figura 9.18: Representación del sistema.

Se consideran orificios ideales y fricción por los tubos despreciable. Por conservación de la masa el caudal es el mismo en todo el recorrido. Planteando el equilibrio de presiones:

$$P_1 = P_a$$

$$P_2 = P_1 + \rho g h_1(t)$$

$$P_3 + \rho \frac{v_3^2}{2} = P_2$$

$$P_4 = P_3 + \rho g L_1$$

$$K_{p1} \rho \frac{v_4^2}{2} + P_5 + \rho \frac{v_5^2}{2} = P_4 + \rho \frac{v_4^2}{2} \rightarrow K_{p1} \rho \frac{v_4^2}{2} + P_5 = P_4$$

$$P_6 = P_5$$

$$P_7 + K_{p2} \rho \frac{v_6^2}{2} = P_6$$

$$P_8 + \rho g L_3 = P_7$$

$$Q \left[ \left( P_9 + \rho \frac{v_9^2}{2} \right) - \left( P_8 + \rho \frac{v_8^2}{2} \right) \right] = \dot{W}_B$$

$$P_9 = P_{10} + \rho g L_4$$



El problema está dividido en dos lazos de presión. En los puntos 1-7 se estudia el sistema de bombeo y en los puntos 8-15 el sistema de abastecimiento.

$$P_1 = P_a$$

$$P_2 = P_1 + \rho g H_0$$

$$P_3 + \rho \frac{v_3^2}{2} = P_2$$

$$K_{p1} \rho \frac{v_3^2}{2} + P_4 = P_3 + \rho g H_{BD}$$

$$Q(P_5 - P_4) = \dot{W}_B$$

$$K_{P2} \rho \frac{v_5^2}{2} + P_6 + \rho g (H_{Bd} + H_{bd}) = P_5$$

$$P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = P_a$$

$$P_{10} = P_9 + \rho g h(t)$$

$$P_{11} + \rho \frac{v_{11}^2}{2} = P_{10}$$

$$\left( P_{11} + \rho \frac{v_{11}^2}{2} + \rho g z_{11} \right) - \left( P_{12} + \rho \frac{v_{12}^2}{2} + \rho g z_{12} \right) = f \frac{\rho v_{11}^2 L_1}{2D_2} \rightarrow v_{11} = v_{12} \rightarrow P_{11} + \rho g L_1 = P_{12} + f \frac{\rho v_{11}^2 L_1}{2D_2}$$

$$P_{13} = P_{12} \rightarrow (\text{Disipación turbulenta en viscosidad})$$

$$\frac{128 \mu L_2 Q_2}{\pi D^4} = P_{13} + \rho g L_2 - P_{14}$$

$$P_{14} = P_{15} = P_a$$

3. Un petrolero ha llegado a puerto con una carga de petróleo crudo de densidad relativa 0,86 y viscosidad cinemática de  $5 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Esta carga se debe descargar en el depósito indicado para su almacenamiento. A tal fin, la instalación de descarga dispone de):

- a) Una bomba de 20 kW cuyo rendimiento global es de 0,7
- b) Una conducción, de fundición, que tiene 25 cm de diámetro y una longitud de 200 m en la que existen 4 codos y una válvula reguladora de caudal cuyas longitudes equivalentes son respectivamente, 4 m por cada codo y 24 m por la válvula.

Teniendo en cuenta que  $h_1 = 1 \text{ m}$ ,  $h_2 = 30 \text{ m}$ , que la rugosidad absoluta es 0,26 mm y considerando que la pérdida de carga unitaria viene dada por la expresión de Darcy-Weissbach, determínese el caudal de descarga.

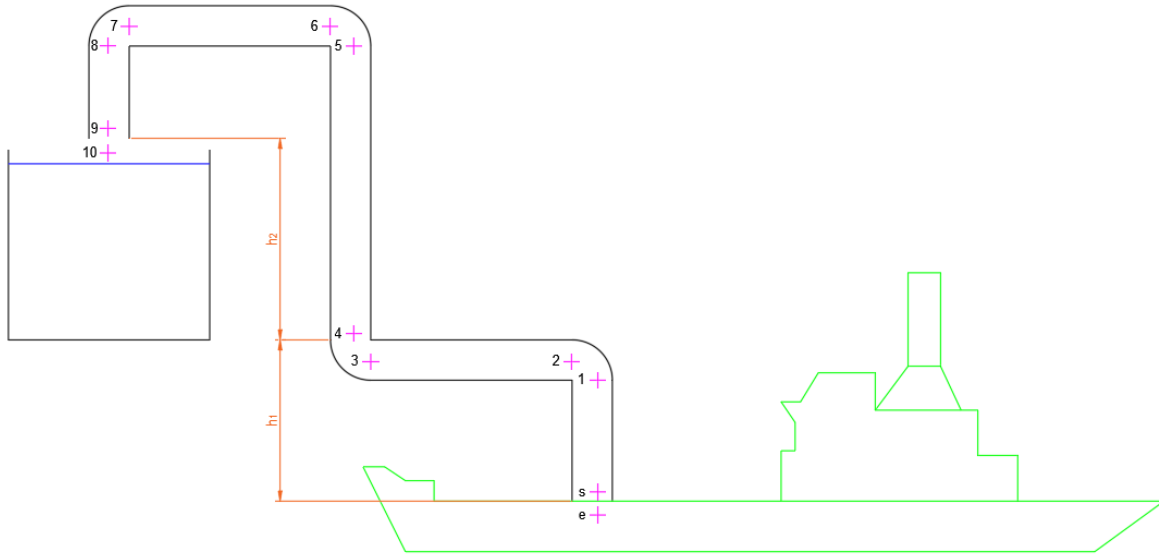


Figura 9.20: Esquema del problema.

En este ejercicio, en lugar de darse el factor  $K$  de pérdidas se da una longitud equivalente de pérdidas. De esta manera, las pérdidas serán equivalentes a las que ocurrirían en un conducto de dicha longitud. Por tanto, aunque se podrían hacer las presiones en los distintos puntos intermedios, basta con obtener las presiones en  $s$  y  $9$ .

$$P_e = P_a$$

$$Q \left[ \left( P_s + \frac{\rho v_s^2}{2} + \rho g z_s \right) - \left( P_e + \frac{\rho v_e^2}{2} + \rho g z_e \right) \right] = \eta \dot{W}_B \rightarrow Q [P_s - P_e] = \eta \dot{W}_B$$

$$\left( P_s + \frac{\rho v_s^2}{2} + \rho g z_s \right) - \left( P_9 + \frac{\rho v_9^2}{2} + \rho g z_9 \right) = \frac{\rho f v^2 L_v}{2D} \rightarrow v_s = v_9 \rightarrow P_s = P_9 + \rho g(h_1 + h_2) + \frac{\rho f v^2 L_v}{2D}$$

En función del caudal,  $Q$  quedaría:

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} \rightarrow P_s = P_9 + \rho g(h_1 + h_2) + \frac{8\rho f Q^2 L_v}{\pi^2 D^5}$$

$$P_9 = P_{10} = P_a$$

Despejando  $Q$  a partir de las ecuaciones:

$$Q \left[ P_a + \rho g(h_1 + h_2) + \frac{8\rho f Q^2 L_v}{\pi^2 D^5} - P_a \right] = \eta \dot{W}_B$$

$$Q^3 \cdot \frac{8\rho f L_v}{\pi^2 D^5} + Q \cdot \rho g(h_1 + h_2) = \eta \dot{W}_B$$

A continuación, se obtienen los valores numéricos:

$$\eta = 0,7$$

$$\dot{W}_B = 20 \text{ kW}$$

$$\rho = 0,86\rho_{H_2O} = 0,86 \times 1000 \frac{kg}{m^3} = 860 \frac{kg}{m^3}$$

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

$$h_1 = 1m$$

$$h_2 = 30m$$

$$D = 0,25m$$

$$L_v = 200 + 4 \cdot 4 + 24 = 240m$$

$$\epsilon = 5 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

Para obtener el valor de  $f$ , se emplea el ábaco de Moody. Para ello, se calcula la rugosidad relativa y se asume un Reynolds elevado (luego se comprueba).

$$\epsilon_R = \frac{\epsilon}{D} = \frac{0,26 \times 10^{-3}}{0,25} = 0,00104 \rightarrow \text{Se corresponde con una } f \text{ de } 0,02$$

Sustituyendo:

$$Q^3 \times 110504 + Q \times 261268 = 14000 \rightarrow Q = 0,054 \frac{m^3}{s}$$

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0,054}{\pi \times 0,25^2} = 1,1 \frac{m}{s}$$

El número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho v_c L_c}{\mu} \rightarrow L_c = D \text{ y } \mu = \rho \nu$$

$$L_c = 0,25m$$

$$\mu = 860 \times (5 \times 10^{-6}) = 0,0043 Pa \cdot s$$

$$Re = \frac{860 \times 1,1 \times 0,25}{0,0043} = 55000$$

Comprobando con el diagrama de Moody, la aproximación inicial de suponer un Reynolds elevado es válida y, por tanto, no es necesario iterar.

**9.7. Fluidoestática.**

**9.8. Semejanza hidrodinámica.**