

# Mecánica de fluidos

Bogurad Barański Barańska      Adrián Teixeira de Uña

10 de marzo de 2024

## Índice

<b>1. Tema 1: Fundamentos y propiedades de los fluidos</b>	<b>2</b>
1.1. Hipótesis de medio continuo . . . . .	2
1.2. Ecuaciones equilibrio termodinámico local . . . . .	4
1.3. Fuerzas y respuestas en sólidos y fluidos . . . . .	4
1.4. Mojabilidad . . . . .	8
<b>2. Tema 2: Cinemática de la partícula fluida</b>	<b>9</b>
2.1. Repaso operador nabla . . . . .	9
2.2. Conceptos fundamentales . . . . .	10
2.3. Clasificación flujos . . . . .	10
2.4. Derivada sustancial, local y convectiva . . . . .	11
2.5. Movimiento diferencial en torno a un punto . . . . .	13
2.6. Movimiento de la partícula fluida en una dirección . . . . .	14
<b>3. Tema 3: Conservación de la masa</b>	<b>16</b>
3.1. Teorema del transporte de Reynolds . . . . .	16
3.2. Flujo sobre una superficie . . . . .	17
3.3. Propiedades en forma diferencial . . . . .	18
<b>4. Tema 4: Conservación de la cantidad de movimiento</b>	<b>19</b>
4.1. Teorema del transporte de Reynolds para la cantidad de movimiento . . . . .	19
4.2. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	19
4.3. Número de Reynolds . . . . .	19
4.4. Teorema de Bernoulli . . . . .	19
<b>5. Ejercicios resueltos</b>	<b>20</b>
5.1. Tema 1: Fundamentos y propiedades de los fluidos . . . . .	20
5.2. Tema 2: Cinemática de la partícula fluida . . . . .	23
5.3. Tema 3: Conservación de la masa . . . . .	26
5.4. Tema 4: Conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	26

# 1. Tema 1: Fundamentos y propiedades de los fluidos

## 1.1. Hipótesis de medio continuo

Un fluido se caracteriza por un volumen ( $V$ ) y una longitud característica ( $L$ ) donde:

$$L \approx V^{\frac{1}{3}}$$

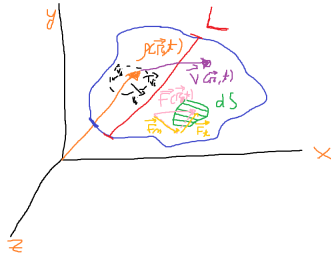


Figura 1: Magnitudes fundamentales de un fluido.

Como el tamaño de una molécula es de  $d_0 \approx 10^{-11}$  a  $10^{-10}m$ . Por ello, la longitud característica debe ser mucho mayor que  $d_0$  ( $L \gg d_0$ ) para así comprender el número suficiente de moléculas y poder estudiar la mecánica de fluidos de manera macroscópica.

Además, la longitud debe ser suficiente para que exista equilibrio termodinámico local y así poder aplicar las ecuaciones de estado:

- Camino libre medio ( $\lambda$ ) de interacción por choque entre moléculas.
  - En líquidos:  $\lambda \approx d_o$
  - En gases:  $\lambda \gg d_o$

$$L \gg \lambda$$

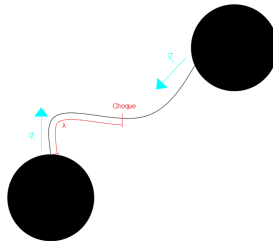


Figura 2: Camino libre medio.

En este fluido, es necesario poder medir:

1. **Densidad:** el diferencial de volumen debe ser una muestra significativa a nivel estadístico.

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

- El fluido es un gas si:  $\rho \neq cte \rightarrow \rho = f(\vec{r}, t)$
- El fluido es un líquido si:  $\rho = cte \rightarrow \rho = f(t)$

Si la función depende del tiempo, se dice que está en forma paramétrica.

- Peso específico

$$\gamma = \rho g \rightarrow g : \text{campo gravitatorio} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

- Densidad relativa

$$\rho_{rel} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

- Líquidos:  $\rho_{ref} = \rho_{agua} \approx 10^3 \frac{kg}{m^3}$
- Gases:  $\rho_{ref} = \rho_{aire_{CN}} \approx 1 \frac{kg}{m^3}$

2. **Velocidad:**

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

3. **Presión:** Es una magnitud absoluta (siempre mayor que 0):

$$P = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{n})}{dS} = \frac{dF_n}{dS} [Pa]$$

$$1bar = 10^5 Pa$$

$$1atm = 101325 Pa$$

$$1mmHg = \rho_{Hg} gh = 132,32 Pa$$

$$1mca(\text{metros columna agua}) = \rho_{H_2O} gh = 9,8 \cdot 10^3 Pa$$

- Presión manométrica ( $P_{man}$ ): Se mide normalmente con un manómetro diferencial:

$$P_{man} = P - P_{atm} \rightarrow P > P_{atm}$$

- Presión vacuométrica ( $P_{vac}$ ): Se mide normalmente con un vacuómetro.

$$P_{vac} = P_{atm} - P \rightarrow P < P_{atm}$$

- Presión de vapor ( $P_v$ ): Se refiere al equilibrio de fase líquido - gas. Si la presión es menor que la presión de vapor **cavita**.
- Cavitación: Generación de burbujas en el líquido por estar por debajo de la presión de vapor que posteriormente al subir la presión explotan con violencia.

## 1.2. Ecuaciones equilibrio termodinámico local

En un gas ideal, si las condiciones son subsónicas se cumple que:

$$\frac{P}{\rho} = R_g T \rightarrow R_g \frac{R}{mmr} \rightarrow R = 8,314 \frac{J}{molK}$$

El fluido está en condiciones subsónicas si:

$$|\vec{v}(\vec{r}, t)| < a = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{S=cte}}$$

- Ecuación isoentrópica: Procesos rápidos.

$$PV^\alpha = cte$$

- Ecuación isoterma: Procesos lentos.

$$PV = cte$$

## 1.3. Fuerzas y respuestas en sólidos y fluidos

### 1. Fuerzas en un fluido:

$$F = f(\Delta \dot{x}) = C \dot{x} \rightarrow C : \text{constante de amortiguamiento}$$

### 2. Tensión tangencial o de cizalladura( $\tau$ ):

$$\tau = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta S} = \frac{dF_t}{dS}$$

3. Viscosidad( $\mu$ ): En fluidos newtonianos la viscosidad es relativamente constante:

$$\mu = f(T)[Pa \cdot s]$$

$$\tau = \mu \dot{\epsilon} = \mu \frac{\Delta v_n}{\Delta l_n} \rightarrow \dot{\epsilon} \text{ es la velocidad de deformación}[s^{-1}]$$

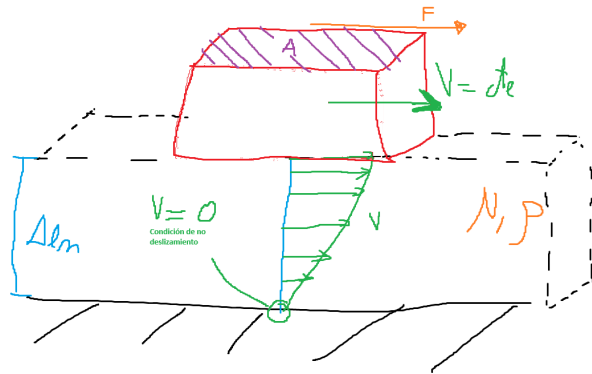
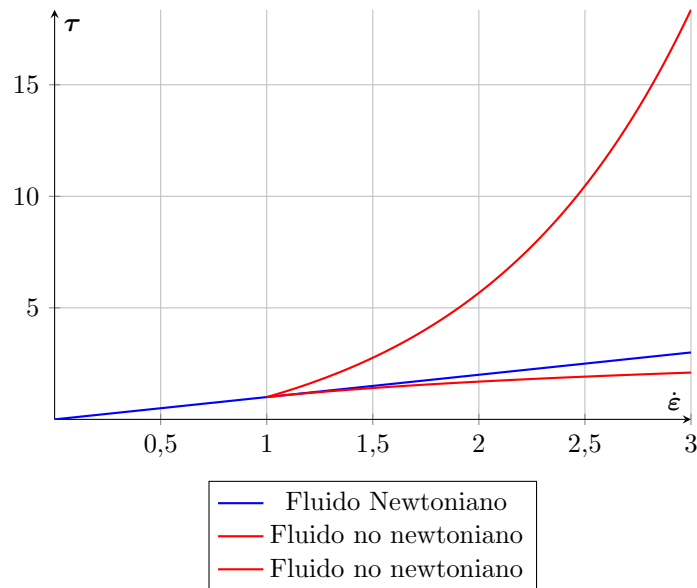


Figura 3: Cálculo de viscosidad.

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{\Delta v_n}{\Delta l_n} = \mu \frac{v - 0}{l_n} = \mu \frac{v}{l_n}$$

En fluidos no newtonianos la viscosidad no es constante:



Viscosidades típicas:

$$\mu_{H_2O} = 10^{-3} Pa \cdot s = 1cP \rightarrow P \text{ Poise}$$

#### 4. Viscosidad cinemática:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \rightarrow 1csk = 10^{-6} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \rightarrow csk \text{ centi-stoke}$$

## 5. Interfases:

- Vaso grande: Existe intercambio de moléculas en la interfase pero las presiones se equilibran.

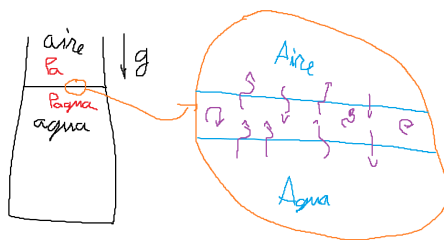


Figura 4: Interfase Vaso grande.

- Vaso pequeño: Existe efecto de la tensión superficial ( $\sigma \left[ \frac{N}{m} \right]$ ) descrita mediante la ecuación de Laplace-Young. Solo aplica a fluidos inmiscibles.



$$P_a - P_{liquido} = \sigma K$$

$K$  expresión de la curvatura

$$K = \nabla_s \vec{n} = \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \right)$$

Figura 5: Efecto tensión superficial Vaso pequeño

$R_i$  y  $R_j$  son radios característicos

- Zona de efecto: La tensión superficial siempre presenta efectos, no obstante solo se aprecia en una región concreta.

$$\rho g l_c \approx \sigma \rightarrow l_c \approx \left( \frac{\sigma}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

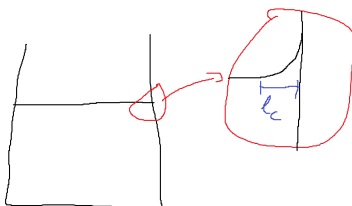
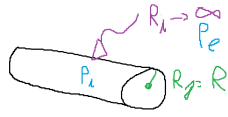


Figura 6: Zona de efecto.

■ Casos particulares

a) Chorro



$$P_i - P_e = \sigma \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \right) = \frac{\sigma}{R}$$

Figura 7: Chorro.

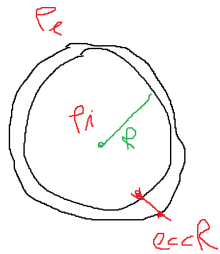
b) Gota



$$P_i - P_e = \sigma \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \right) = \frac{2\sigma}{R}$$

Figura 8: Gota.

c) Pompa



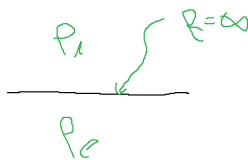
$$P_i - P_m = \frac{2\sigma}{R}$$

$$P_m - P_e = \frac{2\sigma}{R}$$

$$P_i - P_e = \frac{4\sigma}{R}$$

Figura 9: Pompa.

d) Plano



$$P_i - P_e = \sigma \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \right) = 0 \rightarrow P_i = P_e$$

Figura 10: Plano.

#### 1.4. Mojabilidad

- Un líquido no moja a un sólido si  $\theta_c \gtrsim 150^\circ$ . Sólido hidrofóbico.
- Un líquido moja a un sólido si  $\theta_c \lesssim 45^\circ$ . Sólido hidrofílico totalmente.



Figura 11: Mojabilidad.



## 2. Tema 2: Cinemática de la partícula fluida

### 2.1. Repaso operador nabla

En cartesianas nabla se define como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

- Aplicado a un campo escalar  $\Phi = f(x, y, z)$

- Operador gradiente

$$\vec{\nabla} \Phi = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \Phi$$

No es un operador conmutativo.

- Laplaciano:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

- Aplicado a un campo vectorial  $\vec{\Phi} = \phi_x(x, y, z) \vec{i} + \phi_y(x, y, z) \vec{j} + \phi_z(x, y, z) \vec{z}$

- Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z}$$

- Rotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Phi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{vmatrix}$$

- Gradiente

$$\vec{\nabla} \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \frac{\partial \phi_x}{\partial y} & \frac{\partial \phi_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial x} & \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_z}{\partial x} & \frac{\partial \phi_z}{\partial y} & \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Relaciones algebraicas

1.  $\vec{\nabla}(\varphi\phi) = \varphi \vec{\nabla}\phi + \phi \vec{\nabla}\varphi$
2.  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$
3.  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\Phi}) = 0$
4.  $(\vec{\Phi} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Phi} = \vec{\nabla} \frac{|\vec{\Phi}|^2}{2} - \vec{\Phi} \times (\vec{\Phi} \cdot \vec{\nabla})$

## 2.2. Conceptos fundamentales

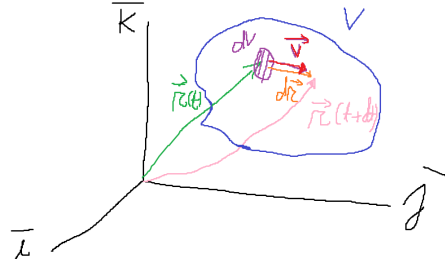


Figura 12: Magnitudes fundamentales.

1. **Trayectoria**: Se determina el vector posición a partir de la velocidad. Esta ligada al enfoque lagrangiano. Tiene realidad física.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$$

2. **Senda**: Camino que se recorre. Es independiente del tiempo y se obtiene eliminando el tiempo  $t$  de la trayectoria. Tiene realidad física.
3. **Línea de corriente**: No tiene realidad física. Se basa en el enfoque euleriano.

$$d\vec{r}/\vec{v}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \rightarrow d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\text{Si } d\vec{r}/\vec{v} \rightarrow \vec{v} \times d\vec{r} = 0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (v_y dz - v_z dy)\vec{i} + (v_z dx - v_x dz)\vec{j} + (v_x dy - v_y dx)\vec{k}$$

$$\therefore \frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y} \Leftrightarrow \frac{dz}{v_z} = \frac{dx}{v_x} \Leftrightarrow \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

## 2.3. Clasificación flujos

1. **Enfoque elección de coordenadas**

- a) Lagrangiano: Enfoque de seguir a la partícula.

$$\vec{v} = \vec{v}(t(\vec{r})) = \vec{v}(t)$$

- b) Euclídeo: Enfoque de centrarse en el espacio.

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = v_x(x, y, z, t)\vec{i} + v_y(x, y, z, t)\vec{j} + v_z(x, y, z, t)\vec{k}$$

## 2. Dirección

- a) 3 direcciones  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ :
  - Campo vectorial tridireccional.
- b) 2 direcciones  $(\vec{i}, \vec{k})$ :
  - Campo vectorial bidireccional.
- c) 1 dirección  $(\vec{j})$ :
  - Campo vectorial unidireccional.

## 3. Espacio

- a) Si alguna componente depende de x, y, z:
  - Campo vectorial tridimensional.
- b) Si ninguna componente depende de x, y o z:
  - Campo vectorial bidimensional.
- c) Si todas las componentes dependen de x, y o z:
  - Campo vectorial unidimensional o monodimensional.
- d) Si ninguna componente depende de x, y, z:
  - Campo vectorial uniforme o homogéneo.

## 4. Tiempo

- a) Si alguna componente depende del tiempo:
  - Campo vectorial no estacionario o transitorio.
- b) Si ninguna componente depende del tiempo:
  - Campo vectorial estacionario.

### 2.4. Derivada sustancial, local y convectiva

Al operador diferencial de variación temporal se le denomina derivada sustancial, total o material:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

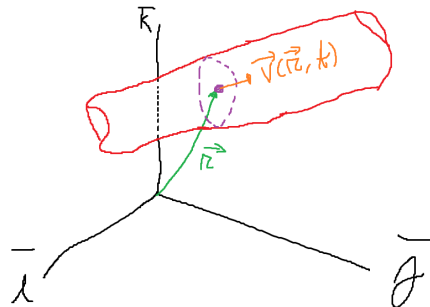


Figura 13: Derivada sustancial.

Sea  $\phi = f(\vec{r}, t)$  y  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$d\phi = \phi(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \phi(\vec{r}, t) = dx \frac{\partial \phi}{\partial x} + dy \frac{\partial \phi}{\partial y} + dz \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

■ Derivada convectiva:  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi$

■ Derivada local o temporal:  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$

■ Si  $\phi = \vec{v}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

• Aceleración convectiva:  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

◦ Aceleración modular o debida a cambios del módulo de la velocidad:  $\vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2}$

◦ Aceleración direccional:  $-\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$

◊ Vorticidad:  $\vec{\omega} = (\vec{\nabla} \times \vec{v})$

◊ Si la vorticidad es nula, el fluido es irrotacional y existe una función de corriente tal que:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi \rightarrow \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \phi) = 0$$

◊ En la literatura, a veces en lugar de hablar de vorticidad, se define velocidad de rotación como:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\omega}}{2}$$

• Aceleración local:  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

## 2.5. Movimiento diferencial en torno a un punto

A partir de la figura siguiente, se puede deducir que el movimiento diferencial es:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} d\vec{v}dt = \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t)dt - \vec{v}(\vec{r}, t)dt$$

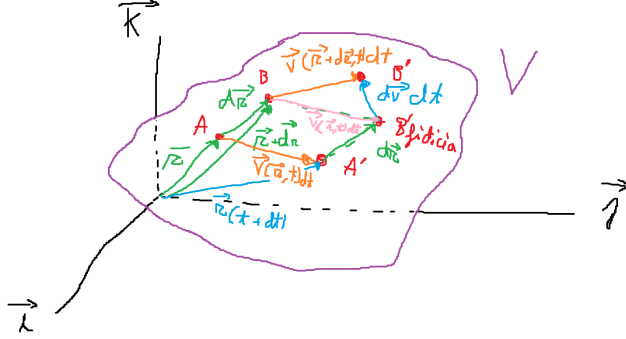


Figura 14: Magnitudes fundamentales del movimiento diferencial.

Operando y despreciando el diferencial de tiempo:

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}, t) = d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v})$$

Donde  $\vec{\nabla} \vec{v}$  es el tensor gradiente de la velocidad:

$$\vec{\nabla} \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t \right] + \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \vec{v} - (\vec{\nabla} \vec{v})^t \right] = \bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}$$

Las variables que aparecen, son  $\bar{\bar{\xi}}$  el tensor de velocidad de deformación (simétrico) y  $\bar{\bar{\gamma}}$  el tensor de velocidad de rotación.

$$\bar{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\gamma}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, aplicado al movimiento:

$$d\vec{v} = d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v}) = d\vec{r} \cdot \bar{\bar{\xi}} + d\vec{r} \cdot \bar{\bar{\gamma}}$$

Donde:

- Movimiento velocidad de deformación:  $d\vec{r} \cdot \bar{\bar{\xi}}$  que representa las deformaciones lineales (diagonal) y angulares (fuera de la diagonal).
  - Si la traza de  $\bar{\bar{\xi}}$  es nula, el fluido es incompresible y, por tanto de densidad constante.
- Movimiento velocidad de rotación:  $\bar{\bar{\gamma}}$  que representa el movimiento del fluido como si fuera un sólido rígido.
  - Se puede relacionar este tensor con la vorticidad y se demuestra que:

$$\bar{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times d\vec{r} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times d\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_z & \frac{1}{2}\omega_y \\ \frac{1}{2}\omega_z & 0 & -\frac{1}{2}\omega_x \\ -\frac{1}{2}\omega_y & \frac{1}{2}\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.6. Movimiento de la partícula fluida en una dirección

Se parte de la expresión deducida anteriormente pero expresando el  $d\vec{r}$  mediante módulo dirección, esta expresión, también se suele denominar movimiento vectorial:

$$d\vec{v} = d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v}) = d\vec{r} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}) = |d\vec{r}| \vec{n} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}})$$

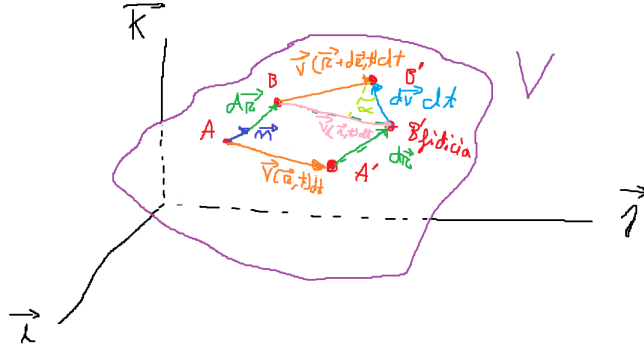


Figura 15: Magnitudes fundamentales del movimiento de la partícula fluida.

Si se aplica a una dirección concreta, también suele denominarse como movimiento escalar:

$$d\vec{v} \cdot \vec{n} = d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v}) = d\vec{r} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}) = |d\vec{r}| \vec{n} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}}) \cdot \vec{n}$$

Como la dirección no es más que una composición de las distintas direcciones, se puede dividir por coordenadas:

- Los términos de deformación:
  - Si  $\vec{n} = \vec{i} \rightarrow \vec{i} \cdot \vec{\xi} \cdot \vec{i} = \xi_{11}$
  - Si  $\vec{n} = \vec{j} \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{\xi} \cdot \vec{j} = \xi_{22}$
  - Si  $\vec{n} = \vec{k} \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{\xi} \cdot \vec{k} = \xi_{33}$
- Los términos de velocidad de rotación:
  - Para todo vector  $\vec{n} \cdot \vec{\gamma} \cdot \vec{n} = 0$

### 3. Tema 3: Conservación de la masa

#### 3.1. Teorema del transporte de Reynolds

Se parte de una función genérica  $\Phi = f(\vec{r}, t)$



Figura 16: Evolución de una magnitud en un volumen fluido.

Por definición de derivada:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \iiint_{V_c(t+\Delta t)} \Phi(\vec{r}, t + \Delta t) dV - \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV \right]$$

Se hace el desarrollo de Taylor en  $t$  del primer término:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V_c(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \iiint_{V_c(t+\Delta t)} \Phi(\vec{r}, t) dV - \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV \right]$$

Como solo se estudia la velocidad de compresión o expansión del fluido en la dirección de la superficie de control:

$$dV = \vec{v}_c \cdot \vec{n} dS \Delta t$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V_c(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) dV + \iint_{S_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) \vec{v}_c \cdot \vec{n} dS \quad (1)$$

De manera similar se puede aplicar esta deducción a un volumen fluido:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_f(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \underbrace{\iiint_{V_f(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) dV}_{\text{Variación local}} + \underbrace{\iint_{S_f(t)} \Phi(\vec{r}, t) \vec{v} \cdot \vec{n} dS}_{\text{Variación convectiva}} \quad (2)$$

En un tiempo  $t^*$  paramétrico tal que  $V_c(t^*) = V_f(t^*)$  se cumple que

$$\iiint_{V_c(t^*)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV \approx \iiint_{V_f(t^*)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV$$



Por tanto, si se hace la siguiente resta (2) – (1). Se obtiene el Teorema de Reynolds aplicado a los problemas:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_f(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV + \oint_{S_c(t)} \Phi(\vec{r}, t) [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

Si la magnitud  $\Phi = \rho$  Se obtiene la ecuación de conservación de la masa en forma integral, que como en todo el volumen fluido no varia es igual a 0:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_f(t)} \rho dV = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c(t)} \rho dV + \oint_{S_c(t)} \rho [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS = 0$$

Para todo el volumen fluido:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_f(t)} \rho dV = \iiint_{V_f(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{S_f(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Si  $V_f(t) \approx dV_f(t)$  entonces aplicando el teorema de gauss se llega a la ecuación diferencial de la masa o forma conservativa:

Teorema de Gauss:

$$\oint_S \varphi \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \varphi dV$$

$$\lim_{dV \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV \right] = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Término local de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Término convectivo de masa:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$$

### 3.2. Flujo sobre una superficie

- Flujo másico

$$G_e = \iint_{S_e} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS$$

- Flujo volumétrico

$$Q_e = \iint_{S_e} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS$$

### 3.3. Propiedades en forma diferencial

Partiendo de la expresión de la derivada sustancial y de la conservación de la masa en forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \rho = 0 \quad (3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho \quad (4)$$

Restando (3) a (4):

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \rho$$

- Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  Incompresible localmente.
- Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$  Se expande localmente el diferencial de Volumen.
- Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$  Se comprime localmente el diferencial de Volumen.

## 4. Tema 4: Conservación de la cantidad de movimiento

### 4.1. Teorema del transporte de Reynolds para la cantidad de movimiento

Sea un volumen sometido a un conjunto de fuerzas:

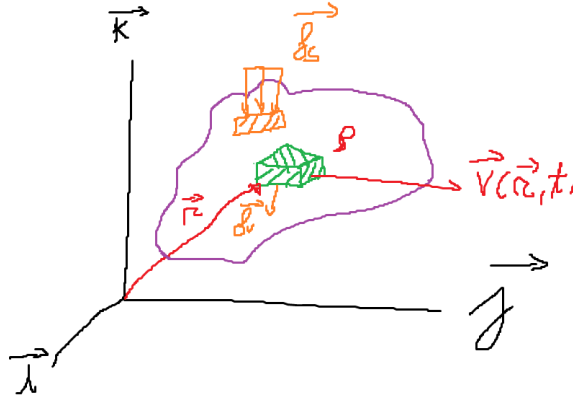


Figura 17: Magnitudes principales que influyen la cantidad de movimiento.

Aplicando al teorema del transporte de Reynolds la función  $\Phi = \rho \vec{v}$  y una similitud con la segunda ley de Newton se obtiene para volúmenes fluidos:

$$\iiint_{V_f} \vec{f}_V dV + \oint_{S_f} \vec{f}_s dS = \frac{d}{dt} \iiint_{V_f} \rho \vec{v} dV = \iiint_{V_f} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint_{S_f} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Para un volumen de control:

$$\iiint_{V_f} \vec{f}_V dV + \oint_{S_f} \vec{f}_s dS = \frac{d}{dt} \iiint_{V_f} \rho \vec{v} dV = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint_{S_c} \rho \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}] dS$$

En estas expresiones aparecen dos tipos de fuerzas:

1. Fuerzas volumétricas  $\vec{f}_v$
2. Fuerzas superficiales  $\vec{f}_s$

### 4.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

### 4.3. Número de Reynolds

### 4.4. Teorema de Bernoulli

## 5. Ejercicios resueltos

### 5.1. Tema 1: Fundamentos y propiedades de los fluidos

1. Obtener el ángulo de mojabilidad  $\theta_c$

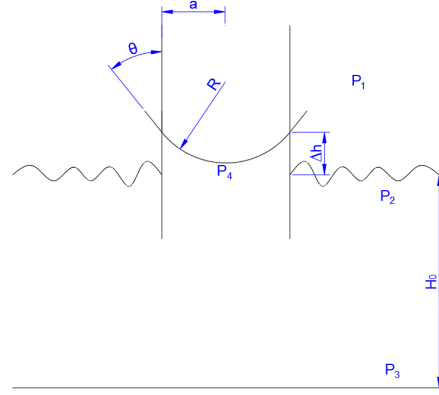


Figura 18: Esquema del problema.

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P_1 = P_a \\
 P_2 &= \rho g H_0 = P_3 \\
 P_3 &= P_4 + \rho g (H_0 + \Delta h) \\
 P_1 - P_4 &= \frac{2\sigma}{R} \\
 \frac{2\sigma}{R} &= \rho g \Delta h \\
 R \cos(\theta_c) &= a \\
 \theta_c &= \arccos\left(\frac{a \rho g \Delta h}{2\sigma}\right)
 \end{aligned}$$

2. En el pueblo de Aisa se ha instalado un nuevo sistema de presión para el abastecimiento de agua del municipio. El agua procedente de un manantial es impulsado por una bomba y se almacena en un depósito sobrepresor. Para controlar la presión del agua a la entrada y salida de la bomba se han montado un vacuómetro y un manómetro en los puntos de interés. Cuando el vacuómetro marca 0.75 bares y el manómetro marca 4.2 bares, ¿cuál será el valor de la presión absoluta?. ¿Existe riesgo de cavitación en algún punto de la conducción?. Datos:  $p_{atm} = 816,91$  hPa;  $p_v = 159856$  Pa.

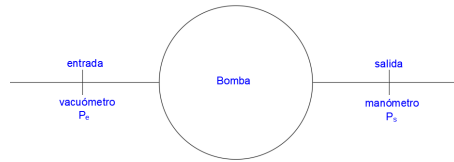


Figura 19: Esquema bomba de agua.

$$\begin{aligned}
 P_v &= P_{atm} - P_e \\
 P_m &= P_s - P_{atm} \\
 P_e &= 81691 - 75000 = 6691 Pa \\
 P_s &= 81691 + 420000 = 501691 Pa \\
 &\text{Existe cavitación a la} \\
 &\text{entrada.}
 \end{aligned}$$

3. La presión en un punto de un fluido ( $\rho = 1234 \frac{kg}{m^3}$ ) alcanza el valor de 3 bares. Expresar el valor de la presión en milímetros de mercurio (cm Hg) y en columna de metros de agua (m.c.a.). Datos:  $\rho_{Hg,rel} = 13,6$

$$\rho = 1234 \frac{kg}{m^3}$$

$$P = 3 \cdot 10^5 Pa$$

$$1mmHg = \rho_{Hg}gh = 13,6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 10^{-3}m = 133,416Pa$$

$$1mca = \rho_{H_2O}gh = 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 1m = 9810Pa$$

4. Sobre una superficie de  $4000 cm^2$ , orientada en el espacio por su vector normal  $\vec{n} = \vec{k}$ , está actuando una fuerza  $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$  (N). Calcular la componente normal de la fuerza y la presión que está soportando la superficie

$$S = 4000cm^2 = 0,4m^2$$

$$\vec{n} = \vec{k}$$

$$\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \rightarrow F_n = 3N$$

$$P = \frac{F_n}{S} = \frac{3N}{0,4m^2} = 7,5Pa$$

5. Sabiendo que un fluido tiene una densidad de  $0,627 \frac{kg}{l}$  y que su coeficiente de viscosidad absoluta es 1.2 cP, calcular su viscosidad cinemática. ¿Cuál es su densidad relativa si consideramos el agua como fluido de referencia?. Datos  $\rho_{agua} = 999,8 \frac{kg}{m^3}$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1,2cP \cdot \frac{10^{-3}Pa \cdot s}{1cP}}{0,627 \frac{kg}{l} \cdot \frac{10^3l}{m^3}} = 1,91 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$\rho_{rel} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{0,627 \frac{kg}{l} \cdot \frac{10^3l}{m^3}}{999,8 \frac{kg}{m^3}} = 6,27 \cdot 10^{-1}$$

6. En la Figura se muestra un bloque, de bases paralelas con dimensiones 0,3 m x 0,6 m y altura 0,1 m, de densidad  $1800 \frac{kg}{m^3}$ , que desliza con una velocidad constante de  $1 \frac{m}{s}$  a la largo de un plano inclinado debido a la acción de las fuerzas gravitacionales tangenciales al mismo. Entre dicho plano y el bloque hay una película de aceite de espesor 1 mm. Aplicando equilibrio de fuerzas, calcular la viscosidad del aceite en Po.

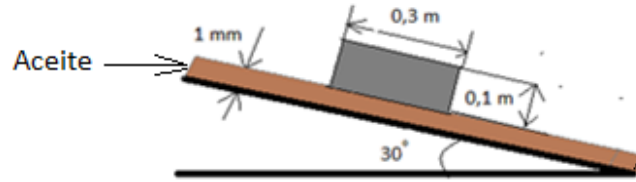


Figura 20: Esquema del bloque deslizando por el plano inclinado.

$$F_n = mgsen\alpha$$

$$F_n = \rho Vgsen\alpha$$

$$\tau = \mu \frac{v}{e} = \frac{F_n}{S} = \rho hgsen\alpha$$

$$\mu = \frac{e\rho hgsen\alpha}{v} = \frac{10^{-3}m \cdot 1800 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,1m \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot sen(30^\circ)}{1 \frac{m}{s}} = 0,8829Pa \cdot s \frac{1P}{0,1Pa \cdot s} = 8,83P$$

## 5.2. Tema 2: Cinemática de la partícula fluida

1. Dado el campo de velocidades de un flujo

$$\vec{v} = 4\cos(\omega t)x\vec{i} - 2\cos(\omega t)y\vec{j} - 2\cos(\omega t)z\vec{k}$$

- a) Indicar el tipo de flujo

**Flujo tridireccional, tridimensional y transitorio.**

- b) La ecuación de la trayectoria si en  $t = 0s$  se encuentra en  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$v_x = 4\cos(\omega t)x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = -2\cos(\omega t)y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = -2\cos(\omega t)z = \frac{dz}{dt}$$

$$\ln x|_0^t = \frac{4\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} \Big|_0^t \rightarrow x = x_0 e^{\frac{4\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}}$$

$$y = y_0 e^{\frac{-2\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}}$$

$$z = z_0 e^{\frac{-2\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}}$$

- c) La ecuación de las sendas

$$\ln \frac{x}{x_0} = \frac{4\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = \frac{-2\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}$$

$$\ln \frac{z}{z_0} = \frac{-2\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{x}{x_0} = -\ln \frac{y}{y_0} \rightarrow xy^2 = x_0 y_0^2$$

$$\ln \frac{y}{z_0} = \ln \frac{y}{y_0} \rightarrow yz_0 = zy_0$$

- d) Las líneas de corriente en un instante  $t$

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x}$$

$$\frac{dy}{-2\cos(\omega t)y} = \frac{dz}{-2\cos(\omega t)z} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \rightarrow \ln z = \ln y + C_0 \rightarrow z = C_{00}y$$

$$\frac{dy}{-2\cos(\omega t)y} = \frac{dx}{4\cos(\omega t)x} \rightarrow -\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \rightarrow -\ln y = \frac{1}{2} \ln x + C_1 \rightarrow C_{11} = xy^2$$

2. La velocidad de un fluido se encuentra definida por  $\vec{v} = y\vec{j} + (ye^{-t} - z)\vec{k}$   
Se pide:

- a) Las componentes de la velocidad

$$v_x = 0$$

$$v_y = y$$

$$v_z = ye^{-t} - z$$

- b) Caracterización del flujo

**Flujo bidireccional, bidimensional y transitorio.**

- c) La aceleración de la partícula fluida cuando en  $t=0$ s pasa por el punto  $(0,1,0)$

- d) Movimiento de la partícula fluida

- e) ¿Podría tratarse de un líquido?

- f) La velocidad de deformación lineal específica en la dirección del vector unitario  $\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

3. Considere el flujo definido por  $v_y = z(t + 2t^2)$  y  $v_z = 2y$ . Determine:

- a) Tipo de flujo

**Flujo bidireccional, bidimensional y transitorio.**

- b) La aceleración de la partícula fluida: total, local, convectiva y las contribuciones de la aceleración convectiva

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} =$$

- c) El vector velocidad angular

- d) El movimiento de la partícula fluida

- e) ¿Podría representar este campo de velocidades a un fluido que fuera un líquido?

4. Un campo de velocidades viene dado por  $v_x = x^2 - 2y^2$ ;  $v_y = -2xy$

$$\vec{v} = (x^2 - 2y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$$

- a) Clasificación del flujo

**Flujo bidireccional, bidimensional y estacionario.**

- b) La expresión de la aceleración total de la partícula fluida

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} [v_x \vec{i} + v_y \vec{j}] + v_y \frac{\partial}{\partial y} [v_x \vec{i} + v_y \vec{j}]$$



$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left[ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{i} + \left[ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] \vec{j}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = [(x^2 - 2y^2)2x + 4xy^2] \vec{i} + [(x^2 - 2y^2)(-2y) + 4x^2y] \vec{j}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 2(x^2 + 2y^2) (x\vec{i} + y\vec{j})$$

c) Aceleración local

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

d) Aceleración convectiva debida al cambio del módulo de la velocidad

$$\vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \vec{\nabla} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} \right) = \vec{\nabla} \left( \frac{x^4 + 4y^4}{2} \right) = 2x^3 \vec{i} + 8y^3 \vec{j}$$

e) Aceleración convectiva debido al cambio de dirección de la velocidad

$$\begin{aligned} -\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{\nabla} \frac{|\vec{v}|^2}{2} = 2(x^2 + 2y^2) (x\vec{i} + y\vec{j}) - (2x^3 \vec{i} + 8y^3 \vec{j}) \\ -\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= 4y^2 x \vec{i} + (2x^2 y - 4y^3) \vec{j} \end{aligned}$$

f) Demostrar que la variación de la densidad a lo largo de una línea de corriente es nula

La variación de la densidad a lo largo de una línea de corriente es nula si el fluido es incompresible:

$$traza(\bar{\bar{\xi}}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2x - 2x = 0 \rightarrow \text{Fluido incompresible}$$

g) Movimiento de la partícula fluida

$$d\vec{v} = d\vec{r} \cdot (\bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\gamma}})$$

$$\bar{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -3y \\ -3y & -2x \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\gamma}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix}$$

$$d\vec{v} = d\vec{r} \cdot \left( \begin{bmatrix} 2x & -3y \\ -3y & -2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix} \right) = d\vec{r} \cdot \begin{bmatrix} 2x & -4y \\ -2y & -2x \end{bmatrix}$$

- 5.3. Tema 3: Conservación de la masa
- 5.4. Tema 4: Conservación de la cantidad de movimiento