Mecánica de fluidos

Bogurad Barañski Barañska   Adrián Teixeira de Uña

27 de marzo de 2024

Índice

1. Tema 1: Fundamentos y propiedades de los fluidos

1.1. Hipótesis de medio continuo

Un fluido se caracteriza por un volumen (V) y una longitud característica (L) donde:

$$L \approx V^{\frac{1}{3}}$$

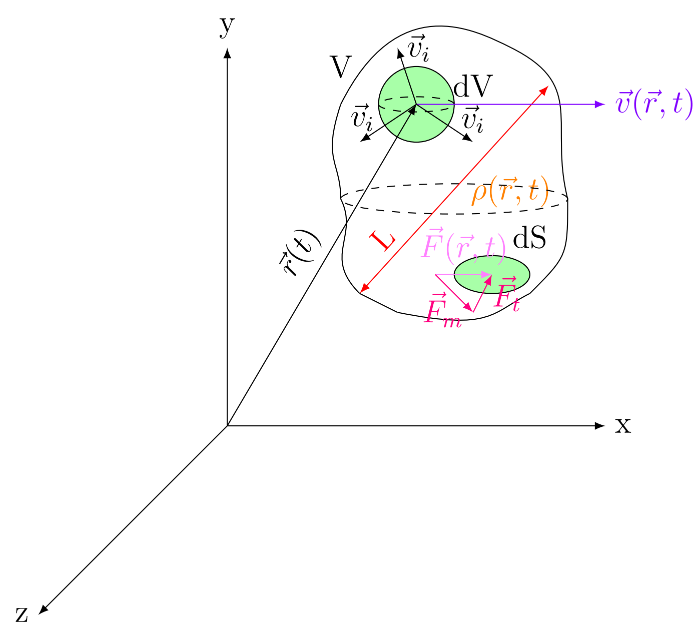


Figura 1: Magnitudes fundamentales de un fluido.

Como el tamaño de una molécula es de $d_0 \approx 10^{-11}\ a\ 10^{-10} m$. Por ello, la longitud característica debe ser mucho mayor que d_0 ($L \gg d_0$) para así comprender el número suficiente de moléculas y poder estudiar la mecánica de fluidos de manera macroscópica.

Además, la longitud debe ser suficiente para que exista equilibrio termodinámico local y así poder aplicar las ecuaciones de estado:

- Camino libre medio (λ) de interacción por choque entre moléculas.
  - En líquidos: $\lambda \approx d_o$
  - En gases: $\lambda \gg d_o$

$$L \gg \lambda$$

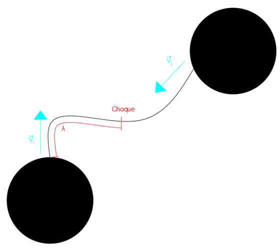


Figura 2: Camino libre medio.

En este fluido, es necesario poder medir:

1. **Densidad**: el diferencial de volumen debe ser una muestra significativa a nivel estadístico.

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

   - El fluido es un gas si: $\rho \neq cte \rightarrow \rho = f(\vec{r}, t)$
   - El fluido es un líquido si: $\rho = cte \rightarrow \rho = f(t)$

   Si la función depende del tiempo, se dice que está en forma paramétrica.

   - Peso específico

$$\gamma = \rho g \rightarrow g : \text{campo gravitatorio} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

   - Densidad relativa

$$\rho_{rel} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

     - Líquidos: $\rho_{ref} = \rho_{agua} \approx 10^3 \frac{kg}{m^3}$
     - Gases: $\rho_{ref} = \rho_{aire_{CN}} \approx 1 \frac{kg}{m^3}$

2. **Velocidad**:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum m_i \vec{v_i}}{\sum m_i} \left[\frac{m}{s}\right]$$

3. **Presión**: Es una magnitud absoluta (siempre mayor que 0):

$$P = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{n})}{dS} = \frac{dF_n}{dS} [Pa]$$

$$1bar = 10^5 Pa$$

$$1atm = 101325Pa$$

$$1mmHg = \rho_{Hg}gh = 132{,}32Pa$$

$$1mca(\text{metros columna agua}) = \rho_{H_2O}gh = 9{,}8 \cdot 10^3 Pa$$

- Presión manométrica (P_{man}): Se mide normalmente con un manómetro diferencial:

$$P_{man} = P - P_{atm} \rightarrow P > P_{atm}$$

- Presión vacuométrica (P_{vac}): Se mide normalmente con un vacuómetro.

$$P_{vac} = P_{atm} - P \rightarrow P < P_{atm}$$

- Presión de vapor (P_v): Se refiere al equilibrio de fase líquido - gas. Si la presión es menor que la presión de vapor **cavita**.
- Cavitación: Generación de burbujas en el líquido por estar por debajo de la presión de vapor que posteriormente al subir la presión explotan con violencia.

1.2. Ecuaciones equilibrio termodinámico local

En un gas ideal, si las condiciones son subsónicas se cumple que:

$$\frac{P}{\rho} = R_g T \rightarrow R_g \frac{R}{mmr} \rightarrow R = 8{,}314 \frac{J}{molK}$$

El fluido está en condiciones subsónicas si:

$$|\vec{v}(\vec{r},t)| < a = \sqrt{\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_{S=cte}}$$

- Ecuación isoentrópica: Procesos rápidos.

$$PV^{\alpha} = cte$$

- Ecuación isoterma: Procesos lentos.

$$PV = cte$$

1.3. Fuerzas y respuestas en sólidos y fluidos

1. **<u>Fuerzas en un fluido</u>**:

$$F = f(\Delta \dot{x}) = C\dot{x} \rightarrow C : \text{constante de amortiguamiento}$$

2. **Tensión tangencial o de cizalladura**(τ):

$$\tau = \lim_{S \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta S} = \frac{dF_t}{dS}$$

3. **Viscosidad**(μ): En fluidos newtonianos la viscosidad es relativamente constante:

$$\mu = f(T)[Pa \cdot s]$$

$$\tau = \mu\dot{\varepsilon} = \mu\frac{\Delta v_n}{\Delta l_n} \rightarrow \dot{\varepsilon} \text{ es la velocidad de deformación}[s^-1]$$

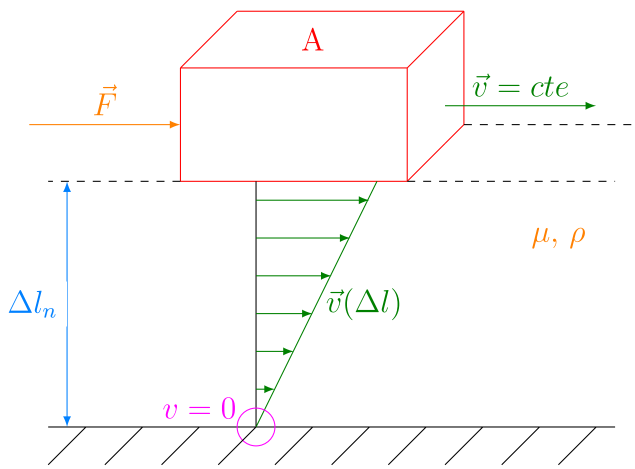
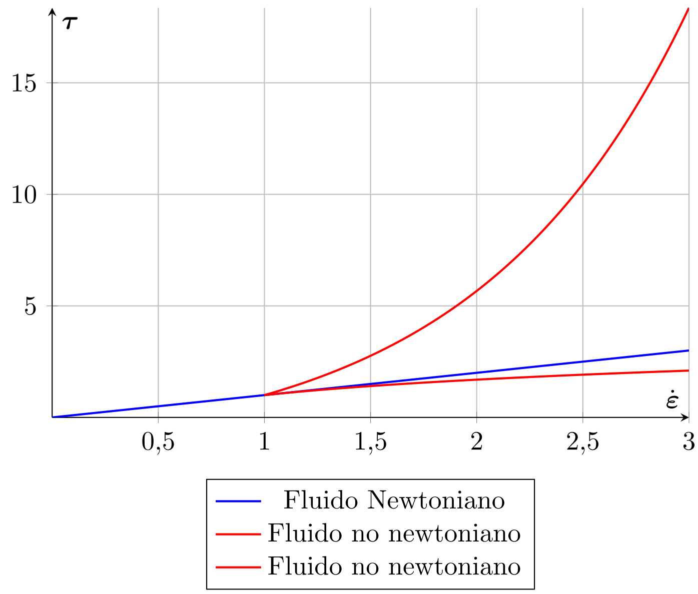


Figura 3: Cálculo de viscosidad.

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu\frac{\Delta v_n}{\Delta l_n} = \mu\frac{v-0}{l_n} = \mu\frac{v}{l_n}$$

En fluidos no newtonianos la viscosidad no es constante:



Viscosidades típicas:

$$\mu_{H_2O} = 10^{-3} Pa \cdot s = 1cP \rightarrow P \text{ Poise}$$

4. **<u>Viscosidad cinemática</u>**:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{m^2}{s}\right] \rightarrow 1csk = 10^{-6}\left[\frac{m^2}{s}\right] \rightarrow csk \text{ centi-stoke}$$

5. **<u>Interfases</u>**:

- Vaso grande: Existe intercambio de moléculas en la interfase pero las presiones se equilibran.

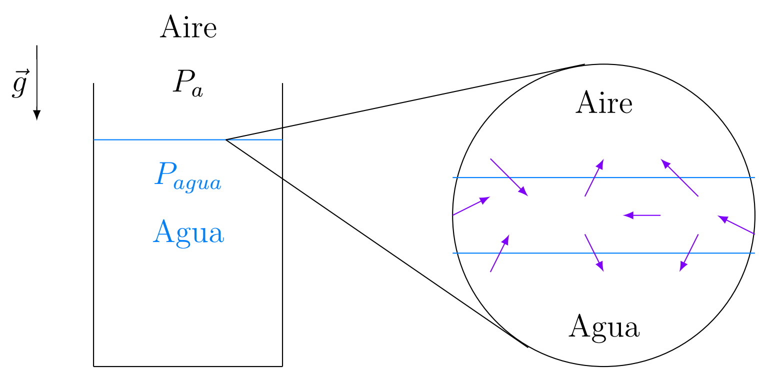
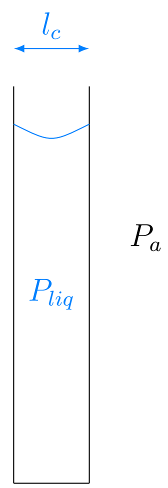


Figura 4: Interfase Vaso grande.

- Vaso pequeño: Existe efecto de la tensión superficial ($\sigma \left[\frac{N}{m}\right]$) descrita mediante la ecuación de Laplace-Young. Solo aplica a fluidos inmiscibles.



$$P_a - P_{liquido} = \sigma K$$
$$K \text{ expresión de la curvatura}$$
$$K = \nabla_s \vec{n} = \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}\right)$$
$$R_i \ y \ R_j \text{ son radios característicos}$$

Figura 5: Efecto de la tensión superficial en un vaso pequeño

- Zona de efecto: La tensión superficial siempre presenta efectos, no obstante solo se aprecia en una región concreta.

$$\rho g l_c \approx \sigma \rightarrow l_c \approx \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

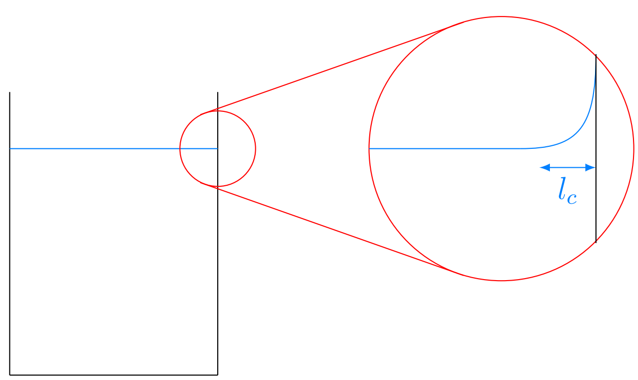
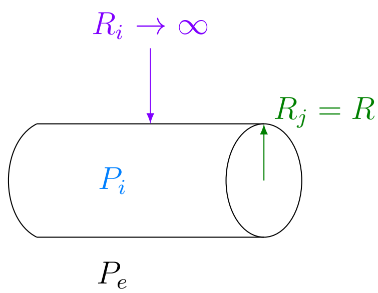


Figura 6: Zona de efecto.

- Casos particulares

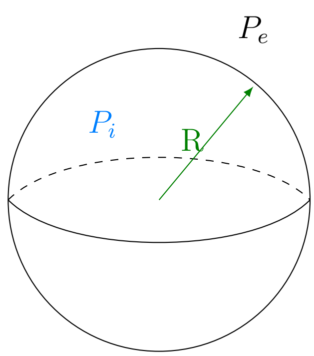
  a) Chorro



$$P_i - P_e = \sigma\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}\right) = \frac{\sigma}{R}$$

Figura 7: Chorro.

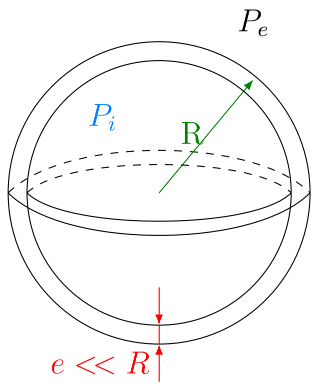
  b) Gota



$$P_i - P_e = \sigma\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}\right) = \frac{2\sigma}{R}$$

Figura 8: Gota.

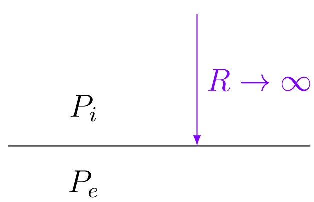
  c) Pompa



$$P_i - P_m = \frac{2\sigma}{R}$$
$$P_m - P_e = \frac{2\sigma}{R}$$
$$P_i - P_e = \frac{4\sigma}{R}$$

Figura 9: Pompa.

d) Plano



$$P_i - P_e = \sigma\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}\right) = 0 \to P_i = P_e$$

Figura 10: Plano.

1.4. Mojabilidad

- Un líquido no moja a un sólido si $\theta_c \gtrsim 150°$. Sólido hidrofóbico.
- Un líquido moja a un sólido si $\theta_c \lesssim 45°$. Sólido hidrofílico totalmente.

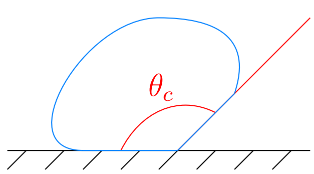


Figura 11: Mojabilidad.

2. Tema 2: Cinemática de la partícula fluida

2.1. Repaso operador nabla

En cartesianas nabla se define como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- Aplicado a un campo escalar $\Phi = f(x, y, z)$
  - Operador gradiente

    $$\vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\Phi$$

    No es un operador conmutativo.
  - Laplaciano:

    $$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

    $$\vec{\nabla}^2\Phi = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

- Aplicado a un campo vectorial $\vec{\Phi} = \phi_x(x, y, z)\vec{i} + \phi_y(x, y, z)\vec{j} + \phi_z(x, y, z)\vec{z}$
  - Divergencia

    $$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z}$$

  - Rotacional

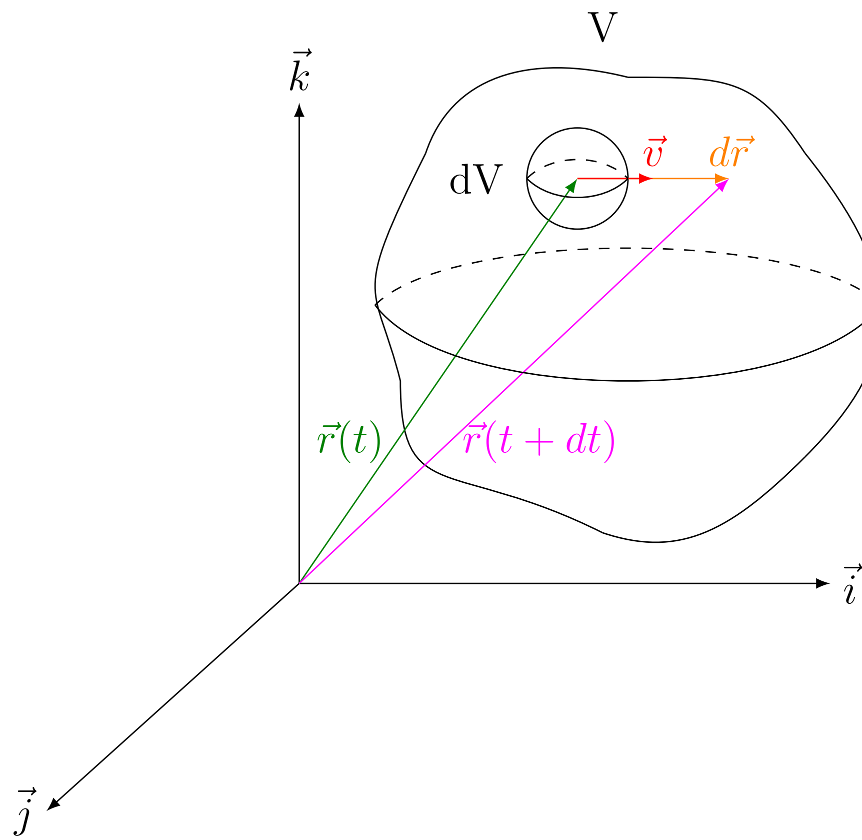
    $$\vec{\nabla} \times \vec{\Phi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{vmatrix}$$

  - Gradiente

    $$\vec{\nabla}\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} & \frac{\partial \phi_x}{\partial y} & \frac{\partial \phi_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial x} & \frac{\partial \phi_y}{\partial y} & \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_z}{\partial x} & \frac{\partial \phi_z}{\partial y} & \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Relaciones algebraicas
  1. $\vec{\nabla}(\varphi\phi) = \varphi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\varphi$
  2. $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right) = 0$
  3. $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{\Phi}\right) = 0$
  4. $\left(\vec{\Phi} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{\Phi} = \vec{\nabla}\frac{|\vec{\Phi}|}{2}^2 - \vec{\Phi} \times \left(\vec{\Phi} \cdot \vec{\nabla}\right)$

2.2. Conceptos fundamentales



1. **Trayectoria**: Se determina el vector posición a partir de la velocidad. Esta ligada al enfoque lagrangiano. Tiene realidad física.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{r}(t=0) = \vec{r_0}$$

2. **Senda**: Camino que se recorre. Es independiente del tiempo y se obtiene eliminando el tiempo t de la trayectoria. Tiene realidad física.

3. **Línea de corriente**: No tiene realidad física. Se basa den el enfoque euleriano.

$$d\vec{r}//\vec{v}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \rightarrow d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$Si\; d\vec{r}//\vec{v} \rightarrow \vec{v}\times d\vec{r} = 0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (v_y dz - v_z dy)\,\vec{i} + (v_z dx - v_x dz)\,\vec{j} + (v_x dy - v_y dx)$$

$$\therefore \frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y} \rightleftharpoons \frac{dz}{v_z} = \frac{dx}{v_x} \rightleftharpoons \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

2.3. Clasificación flujos

1. **Enfoque elección de coordenadas**

   a) Lagrangiano: Enfoque de seguir a la partícula.

   $$\vec{v} = \vec{v}(t(\vec{r})) = \vec{v}(t)$$

   b) Euclídeo: Enfoque de centrarse en el espacio.

   $$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = v_x(x, y, z, t)\vec{i} + v_y(x, y, z, t)\vec{j} + v_z(x, y, z, t)\vec{k}$$

2. **Dirección**

   a) 3 direcciones $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
      - Campo vectorial tridireccional.

   b) 2 direcciones $(\vec{i}, \vec{k})$:
      - Campo vectorial bidireccional.

   c) 1 dirección $(\vec{j})$:
      - Campo vectorial unidireccional.

3. **Espacio**

   a) Si alguna componente depende de x, y, z:
      - Campo vectorial tridimensional.

   b) Si ninguna componente depende de x, y o z:
      - Campo vectorial bidimensional.

   c) Si todas las componentes dependen de x, y o z:
      - Campo vectorial unidimensional o monodimensional.

   d) Si ninguna componente depende de x, y, z:
      - Campo vectorial uniforme o homogéneo.

4. **Tiempo**

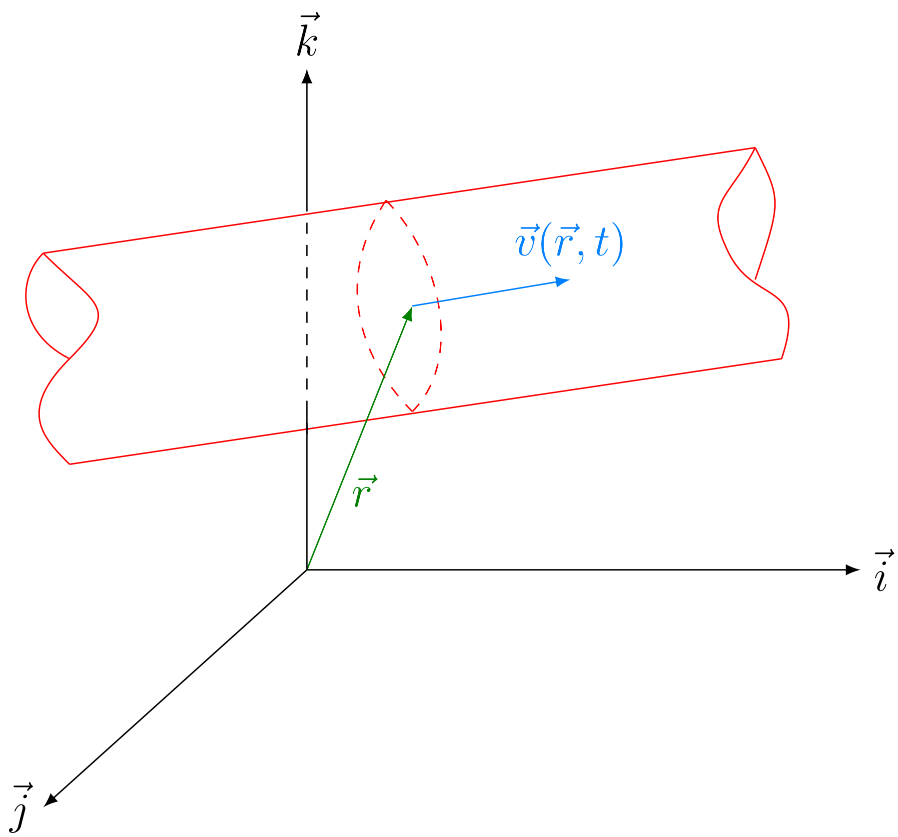
   a) Si alguna componente depende del tiempo:
      - Campo vectorial no estacionario o transitorio.

   b) Si ninguna componente depende del tiempo:
      - Campo vectorial estacionario.

2.4. Derivada sustancial, local y convectiva

Al operador diferencial de variación temporal se le denomina derivada sustancial, total o material:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)$$



Sea $\phi = f(\vec{r}, t)$ y $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$d\phi = \phi(\vec{r}+d\vec{r}, t+dt) - \phi(\vec{r}, t) = dx\frac{\partial \phi}{\partial x} + dy\frac{\partial \phi}{\partial y} + dz\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial t}dt = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}dt$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Derivada convectiva: $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\phi$
- Derivada local o temporal: $\frac{\partial \phi}{\partial t}$

- Si $\phi = \vec{v}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

  - Aceleración convectiva: $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|}{2}^2 - \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)$$

    - Aceleración modular o debida a cambios del módulo de la velocidad: $\vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|}{2}^2$
    - Aceleración direccional: $-\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)$
      - Vorticidad: $\vec{\omega} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)$
      - Si la vorticidad es nula, el fluido es irrotacional y existe una función de corriente tal que:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi \rightarrow \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla}\phi\right) = 0$$

      - En la literatura, a veces en lugar de hablar de vorticidad, se define velocidad de rotación como:

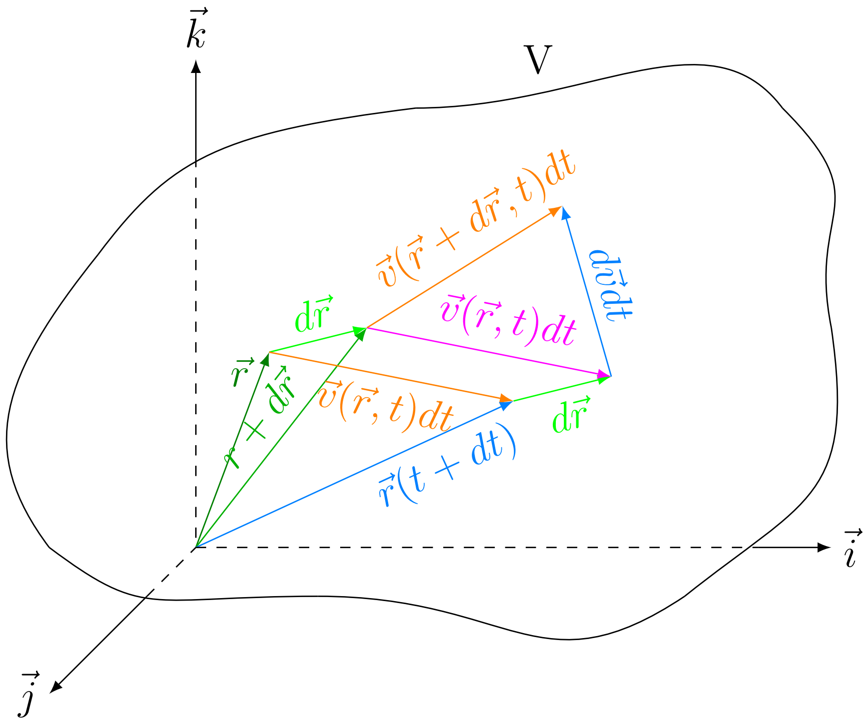
$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\omega}}{2}$$

  - Aceleración local: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

2.5. Movimiento diferencial en torno a un punto

A partir de la figura siguiente, se puede deducir que el movimiento diferencial es:

$$\lim_{dt\to 0} d\vec{v}dt = \vec{v}(\vec{r}+d\vec{r},t)dt - \vec{v}(\vec{r},t)dt$$



Operando y despreciando el diferencial de tiempo:

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}+d\vec{r},t) - \vec{v}(\vec{r},t) = d\vec{r}\cdot(\vec{\nabla}\vec{v})$$

Donde $\vec{\nabla}\vec{v}$ es el tensor gradiente de la velocidad:

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\vec{v} + \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right)^t\right] + \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\vec{v} - \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right)^t\right] = \overline{\overline{\xi}} + \overline{\overline{\gamma}}$$

Las variables que aparecen, son $\overline{\overline{\xi}}$ el tensor de velocidad de deformación (simétrico) y $\overline{\overline{\gamma}}$ el tensor de velocidad de rotación.

$$\overline{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\gamma}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, aplicado al movimiento:

$$d\vec{v} = d\vec{r} \cdot (\vec{\nabla}\vec{v}) = d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\xi}} + d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\gamma}}$$

Donde:

- Movimiento velocidad de deformación: $d\vec{r} \cdot \overline{\overline{\xi}}$ que representa las deformaciones lineales (diagonal) y angulares (fuera de la diagonal).
  - Si la traza de $\overline{\overline{\xi}}$ es nula, el fluido es incompresible y, por tanto de densidad constante.
- Movimiento velocidad de rotación: $\overline{\overline{\gamma}}$ que representa el movimiento del fluido como si fuera un sólido rígido.
  - Se puede relacionar este tensor con la vorticidad y se demuestra que:

$$\overline{\overline{\gamma}} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times d\vec{r} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \times d\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_z & \frac{1}{2}\omega_y \\ \frac{1}{2}\omega_z & 0 & -\frac{1}{2}\omega_x \\ -\frac{1}{2}\omega_y & \frac{1}{2}\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

2.6. Movimiento de la partícula fluida en una dirección

Se parte de la expresión deducida anteriormente pero expresando el $d\vec{r}$ mediante módulo dirección, esta expresión, también se suele denominar movimiento vectorial:

$$d\vec{v} = d\vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right) = d\vec{r} \cdot \left(\overline{\overline{\xi}} + \overline{\overline{\gamma}}\right) = |d\vec{r}|\vec{n} \cdot \left(\overline{\overline{\xi}} + \overline{\overline{\gamma}}\right)$$

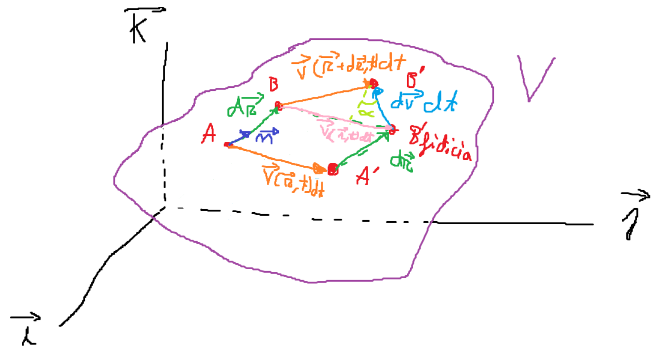


Figura 12: Magnitudes fundamentales del movimiento de la partícula fluida.

Si se aplica a una dirección concreta, también suele denominarse como movimiento escalar:

$$d\vec{v} \cdot \vec{n} = d\vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right) = d\vec{r} \cdot \left(\overline{\overline{\xi}} + \overline{\overline{\gamma}}\right) = |d\vec{r}|\vec{n} \cdot \left(\overline{\overline{\xi}} + \overline{\overline{\gamma}}\right) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \left(\overline{\overline{\xi}} + \overline{\overline{\gamma}}\right) \cdot \vec{n}$$

Como la dirección no es más que una composición de las distintas direcciones, se puede dividir por coordenadas:

- Los términos de deformación:
  - Si $\vec{n} = \vec{i} \rightarrow \vec{i} \cdot \overline{\overline{\xi}} \cdot \vec{i} = \xi_{11}$
  - Si $\vec{n} = \vec{j} \rightarrow \vec{j} \cdot \overline{\overline{\xi}} \cdot \vec{j} = \xi_{22}$
  - Si $\vec{n} = \vec{k} \rightarrow \vec{k} \cdot \overline{\overline{\xi}} \cdot \vec{k} = \xi_{33}$
- Los términos de velocidad de rotación:
  - Para todo vector $\vec{n} \cdot \overline{\overline{\gamma}} \cdot \vec{n} = 0$

3. Tema 3: Conservación de la masa

3.1. Teorema del transporte de Reynolds

Se parte de una función genérica $\Phi = f(\vec{r}, t)$

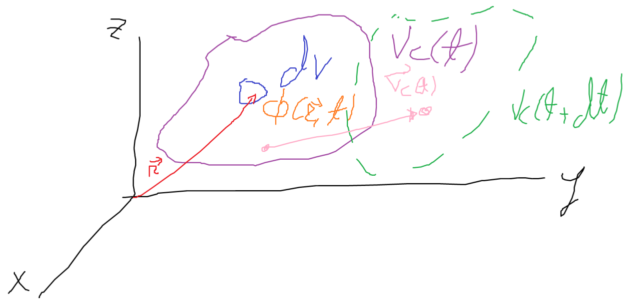


Figura 13: Evolución de una magnitud en un volumen fluido.

Por definición de derivada:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t)\, dV = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\iiint_{V_c(t+dt)} \Phi(\vec{r}, t+dt)\, dV - \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t)\, dV\right]$$

Se hace el desarrollo de Taylor en t del primer término:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t)\, dV = \iiint_{V_c(t)} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{r}, t)\, dV + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\iiint_{V_c(t+dt)} \Phi(\vec{r}, t)\, dV - \iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t)\, dV\right]$$

Como solo se estudia la velocidad de compresión o expansión del fluido en la dirección de la superficie de control:

$$dV = \vec{v}_c \cdot \vec{n} dS \Delta t$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r}, t)\, dV = \iiint_{V_c(t)} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{r}, t)\, dV + \oiint_{S_c(t)} \Phi(\vec{r}, t)\vec{v}_c \cdot \vec{n}\, dS \qquad (1)$$

De manera similar se puede aplicar esta deducción a un volumen fluido:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_f(t)} \Phi(\vec{r}, t)\, dV = \underbrace{\iiint_{V_f(t)} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{r}, t)\, dV}_{\text{Variación local}} + \underbrace{\oiint_{S_f(t)} \Phi(\vec{r}, t)\vec{v} \cdot \vec{n}\, dS}_{\text{Variación convectiva}} \qquad (2)$$

En un tiempo t* paramétrico tal que $V_c(t*) = V_f(t*)$ se cumple que

$$\iiint_{V_c(t*)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dV \approx \iiint_{V_f(t*)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dV$$

Por tanto, si se hace la siguiente resta $(2)-(1)$. Se obtiene el Teorema de Reynolds aplicado a los problemas:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_f(t)} \Phi(\vec{r},t)\, dV = \frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \Phi(\vec{r},t)\, dV + \oiint_{S_c(t)} \Phi(\vec{r},t)\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS$$

Si la magnitud $\Phi=\rho$ Se obtiene la ecuación de conservación de la masa en forma integral, que como en todo el volumen fluido no varia es igual a 0:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_f(t)} \rho\, dV = \frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \rho\, dV + \oiint_{S_c(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = 0$$

Para todo el volumen fluido:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_f(t)} \rho\, dV = \iiint_{V_f(t)} \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV + \oiint_{S_f(t)} \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = 0$$

Si $V_f(t)\approx dV_f(t)$ entonces aplicando el teorema de gauss se llega a la ecuación diferencial de la masa o forma conservativa:

Teorema de Gauss:
$\oiint_S \varphi\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\varphi\, dV$

$$\lim_{dV\to 0}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\, dV\right] = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

Término local de masa:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Término convectivo de masa:

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})$$

3.2. Flujo sobre una superficie

- Flujo másico

$$G_e = \iint_{S_e} \rho\,(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\, dS$$

- Flujo volumétrico

$$Q_e = \iint_{S_e} (\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\, dS$$

3.3. Propiedades en forma diferencial

Partiendo de la expresión de la derivada sustancial y de la conservación de la masa en forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \rho + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \rho = 0 \tag{3}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \rho \tag{4}$$

Restando (3) a (4):

$$\frac{D\rho}{Dt} = - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \rho$$

- Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ Incopresible localmente.
- Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$ Se expande localmente el diferencial de Volumen.
- Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$ Se comprime localmente el diferencial de Volumen.

4. Tema 4: Conservación de la cantidad de movimiento

4.1. Teorema del transporte de Reynolds para la cantidad de movimiento

Sea un volumen sometido a un conjunto de fuerzas:

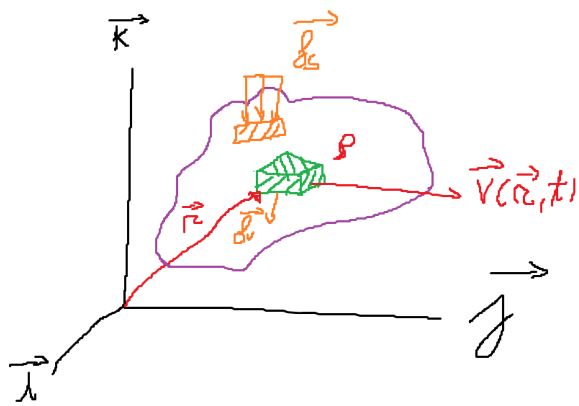


Figura 14: Magnitudes principales que influencian la cantidad de movimiento.

Aplicando al teorema del transporte de Reynolds la función $\Phi = \rho\vec{v}$ y una similitud con la segunda ley de Newton se obtiene para volúmenes fluidos:

$$\iiint_{V_f} \vec{f}_V \, dV + \oiint_{S_f} \vec{f}_s \, dS = \frac{d}{dt} \iiint_{V_f} \rho\vec{v} \, dV = \iiint_{V_f} \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} \, dV + \oiint_{S_f} \rho\vec{v} \left(\vec{v} \cdot \vec{n}\right) \, dS$$

Para un volumen de control:

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V \, dV + \oiint_{S_c} \vec{f}_s \, dS = \frac{d}{dt} \iiint_{V_f} \rho\vec{v} \, dV = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} \, dV + \oiint_{S_c} \rho\vec{v} \left[\left(\vec{v} - \vec{v}_c\right) \cdot \vec{n}\right] \, dS$$

En estas expresiones aparecen dos tipos de fuerzas:

1. Fuerzas volumétricas $\vec{f}_v$

   a) Típicamente son fuerzas relacionadas con campos:

   $$\vec{f}_v = \rho\vec{g}$$

   b) Pueden ser también fuerzas de inercia en sistemas de referencia móviles.

   c) En un gas suelen ser despreciables estas fuerzas.

2. Fuerzas superficiales $\vec{f_s}$

   a) La expresión general de estas fuerzas es:

$$\vec{f_s} = \underbrace{-P\vec{n}}_{\text{Presión hidroestática}} + \underbrace{\overline{\overline{\tau}}_v \cdot \vec{n}}_{\text{Esfuerzos viscosos}}$$

   b) Siendo el tensor de esfuerzas viscosos (es una ecuación constitutiva, depende del material):

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = 2\mu\overline{\overline{\xi}} + \lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\overline{\overline{I}}$$

   Donde

   - μ es la viscosidad.
   - λ es la viscosidad volumétrica.
   - $\overline{\overline{I}}$ es la matriz identidad.

4.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

Se parte del teorema del transporte de Reynolds:

$$\iiint_{V_f} \vec{f_V}\, dV + \oiint_{S_f} \vec{f_s}\, dS = \iiint_{V_f} \frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t}\, dV + \oiint_{S_f} \rho\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\; dS \tag{5}$$

Desarrollando mediante el teorema de la divergencia de Gauss:

$$\oiint_{S_f} \vec{f_s}\, dS = \oiint_{S_f} -P\vec{n}_s\, dS + \oiint_{S_f} \overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{n}_s\, dS = \iiint_{V_f} -\vec{\nabla}p\, dV + \iiint_{V_f} \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\tau}}\, dV \tag{6}$$

$$\oiint_{S_f} \rho\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\; dS = \iiint_{V_f} \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v})\; dV \tag{7}$$

Juntando las ecuaciones (5), (6) y (7):

$$\iiint_{V_f} \vec{f_V}\, dV + \iiint_{V_f} -\vec{\nabla}P\, dV + \iiint_{V_f} \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\tau}}\, dV = \iiint_{V_f} \frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t}\, dV + \iiint_{V_f} \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v})\; dV$$

Para un valor $V_f \approx dV$ arbitrariamente pequeño pero no nulo. Se obtiene la ecuación Navier-Stokes en forma conservativa:

$$\vec{f_V} - \vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\tau}} = \frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v})$$

Desarrollando:

$$\vec{f}_V - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}} = \underbrace{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}}_{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}} = \vec{\nabla} \cdot \left(2\mu \overline{\overline{\xi}} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \overline{\overline{I}} \right] = \vec{\nabla} \cdot \left(2\mu \frac{\vec{\nabla}\vec{v} + \left(\vec{\nabla}\vec{v} \right)^T}{2} \right) + \lambda \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \overline{\overline{I}} \right]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}} \overset{\mu,\lambda = cte}{=} \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right)$$

En fluidos newtonianos se cumple que $\rho, \mu = cte$ con lo cual:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \vec{\nabla}\rho = 0; \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Por tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes junto a la conservación de la masa en forma diferencial:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

4.3. Número de Reynolds

El número de Reynolds es un número adimensional que se emplea para caracterizar el movimiento de un fluido y se define como:

$$Re = \frac{\text{Orden de magnitud de la inercia convectiva}}{\text{Orden de magnitud de fuerzas viscosas}}$$

$$Re = \frac{|\rho \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}|}{|\mu \vec{\nabla}^2 \vec{v}|} \overset{|\vec{\nabla}| = \frac{1}{L_c}}{=} \frac{\rho_c v_c^2 / L_c}{\mu_c v_c / L_c^2} = \frac{\rho_c v_c L_c}{\mu_c}$$

- Si Re es elevado, el flujo es de inercia dominante, flujo turbulento.
- Si Re es bajo, el flujo es de viscosidad dominante, flujo laminar.

4.4. Teorema de Bernouilli

Se parte de la ecuación de Navier-Stokes en forma diferencial:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \vec{f}_v$$

Desarrollando:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|}{2}^{2}-\rho\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}P+\mu\vec{\nabla}^{2}\vec{v}+\vec{f}_{v}$$

Se supone un líquido incompresible, estacionario, fuerzas de viscosidad despreciables y que las fuerzas volumétricas tienen la siguiente función potencial:

$$\vec{f}_{V}=-g\vec{\nabla}U_{g}$$

$$\rho\vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|}{2}^{2}-\rho\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}\left(P+\rho U_{g}\right)$$

Multiplicando por $\vec{v}$

$$\vec{v}\cdot\left[\rho\vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|}{2}^{2}-\rho\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}\left(P+\rho U_{g}\right)\right]\rightarrow\vec{\nabla}\left(P+\frac{1}{2}\rho|v|^{2}+\rho U_{g}\right)=0$$

De esta expresión se deduce que:

$$P+\frac{1}{2}\rho|v|^{2}+\rho U_{g}=cte$$

En el caso de que el campo potencial gravitatorio sea paralelo al eje z, se obtiene el teorema de Bernouilli:

$$P+\frac{1}{2}\rho|v|^{2}+\rho gz=cte$$

5. Ejercicios resueltos

5.1. Tema 1: Fundamentos y propiedades de los fluidos

1. Obtener el ángulo de mojabilidad θ_c

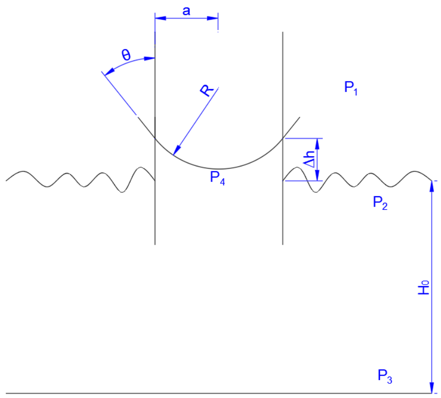


Figura 15: Esquema del problema.

$$P_2 = P_1 = P_a$$

$$P_2 = \rho g H_0 = P_3$$

$$P_3 = P_4 + \rho g(H_0 + \Delta h)$$

$$P_1 - P_4 = \frac{2\sigma}{R}$$

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g \Delta h$$

$$Rcos(\theta_c) = a$$

$$\theta_c = arccos\left(\frac{a\rho g\Delta h}{2\sigma}\right)$$

2. En el pueblo de Aisa se ha instalado un nuevo sistema de presión para el abastecimiento de agua del municipio. El agua procedente de un manantial es impulsado por una bomba y se almacena en un depósito sobrepresor. Para controlar la presión del agua a la entrada y salida de la bomba se han montado un vacuómetro y un manómetro en los puntos de interés. Cuando el vacuómetro marca 0.75 bares y el manómetro marca 4.2 bares, ¿cuál será el valor de la presión absoluta?. ¿Existe riesgo de cavitación en algún punto de la conducción?. Datos: p_{atm} = 816,91 hPa; p_v=159856 Pa.

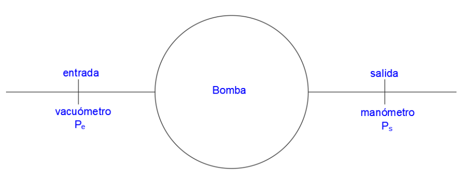


Figura 16: Esquema bomba de agua.

$$P_v = P_{atm} - P_e$$

$$P_m = P_s - P_{atm}$$

$$P_e = 81691 - 75000 = 6691 Pa$$

$$P_s = 81691 + 420000 = 501691 Pa$$

Existe cavitación a la entrada.

3. La presión en un punto de un fluido ($\rho = 1234\frac{kg}{m^3}$) alcanza el valor de 3 bares. Expresar el valor de la presión en milímetros de mercurio (cm Hg) y en columna de metros de agua (m.c.a.). Datos: $\rho_{Hg,rel} = 13,6$

$$\rho = 1234\frac{kg}{m^3}$$

$$P = 3 \cdot 10^5 Pa$$

$$1mmHg = \rho_{Hg}gh = 13{,}6 \cdot 10^3\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 10^{-3}m = 133{,}416Pa$$

$$1mca = \rho_{H_2O}gh = 10^3\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 1m = 9810Pa$$

4. Sobre una superficie de 4000 cm^2, orientada en el espacio por su vector normal $\vec{n} = \vec{k}$, está actuando una fuerza$\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ (N). Calcular la componente normal de la fuerza y la presión que está soportando la superficie

$$S = 4000cm^2 = 0{,}4m^2$$

$$\vec{n} = \vec{k}$$

$$\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \rightarrow F_n = 3N$$

$$P = \frac{F_n}{S} = \frac{3N}{0{,}4m^2} = 7{,}5Pa$$

5. Sabiendo que un fluido tiene una densidad de 0.627 $\frac{kg}{l}$ y que su coeficiente de viscosidad absoluta es 1.2 cP, calcular su viscosidad cinemática. ¿Cuál es su densidad relativa si consideramos el agua como fluido de referencia?. Datos $\rho_{agua} = 999,8\frac{kg}{m^3}$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1{,}2cP \cdot \frac{10^{-3}Pa \cdot s}{1cP}}{0{,}627\frac{kg}{l} \cdot \frac{10^3 l}{m^3}} = 1{,}91 \cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s}$$

$$\rho_{rel} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} = \frac{0{,}627\frac{kg}{l} \cdot \frac{10^3 l}{m^3}}{999{,}8\frac{kg}{m^3}} = 6{,}27 \cdot 10^{-1}$$

6. En la Figura se muestra un bloque, de bases paralelas con dimensiones 0,3 m x 0,6 m y altura 0,1 m, de densidad 1800 $\frac{kg}{m^3}$, que desliza con una velocidad constante de 1 $\frac{m}{s}$ a la largo de un plano inclinado debido a la acción de las fuerzas gravitacionales tangenciales al mismo. Entre dicho plano y el bloque hay una película de aceite de espesor 1 mm. Aplicando equilibrio de fuerzas, calcular la viscosidad del aceite en Po.

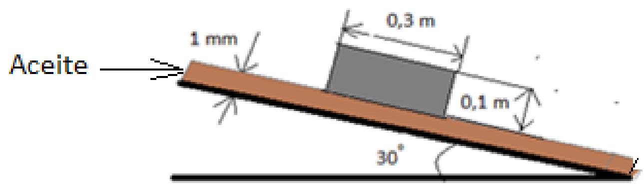


Figura 17: Esquema del bloque deslizando por el plano inclinado.

$$F_n = mgsen\alpha$$

$$F_n = \rho V gsen\alpha$$

$$\tau = \mu \frac{v}{e} = \frac{F_n}{S} = \rho hgsen\alpha$$

$$\mu = \frac{e\rho hgsen\alpha}{v} = \frac{10^-3m \cdot 1800\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}1m \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot sen(30°)}{1\frac{m}{s}} = 0{,}8829 Pa \cdot s \frac{1P}{0{,}1Pa \cdot s} = 8{,}83P$$

5.2. Tema 2: Cinemática de la partícula fluida

1. Dado el campo de velocidades de un flujo

$$\vec{v} = 4cos(\omega t)x\vec{i} - 2cos(\omega t)y\vec{j} - 2cos(\omega t)z\vec{k}$$

   a) Indicar el tipo de flujo
   Flujo tridireccional, tridimensional y transitorio.

   b) La ecuación de la trayectoria si en $t = 0s$ se encuentra en (x_0, y_0, z_0)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$v_x = 4cos(\omega t)x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = -2cos(\omega t)y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = -2cos(\omega t)z = \frac{dz}{dt}$$

$$\ln x|_0^t = \left.\frac{4sen(\omega t)}{\omega}\right|_0^t \rightarrow x = x_0 e^{\frac{4sen(\omega t)}{\omega}}$$

$$y = y_0 e^{\frac{-2sen(\omega t)}{\omega}}$$

$$z = z_0 e^{\frac{-2sen(\omega t)}{\omega}}$$

   c) La ecuación de las sendas

$$\ln\frac{x}{x_0} = \frac{4sen(\omega t)}{\omega}$$

$$\ln\frac{y}{y_0} = \frac{-2sen(\omega t)}{\omega}$$

$$\ln\frac{z}{z_0} = \frac{-2sen(\omega t)}{\omega}$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x_0} = -\ln\frac{y}{y_0} \rightarrow xy^2 = x_0 y_0^2$$

$$\ln\frac{y}{z_0} = \ln\frac{y}{y_0} \rightarrow yz_0 = zy_0$$

   d) Las líneas de corriente en un instante t

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x}$$

$$\frac{dy}{-2cos(\omega t)y} = \frac{dz}{-2cos(\omega t)z} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \rightarrow \ln z = \ln y + C_0 \rightarrow z = C_{00}y$$

$$\frac{dy}{-2cos(\omega t)y} = \frac{dx}{4cos(\omega t)x} \rightarrow -\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \rightarrow -\ln y = \frac{1}{2}\ln x + C_1 \rightarrow C_{11} = xy^2$$

2. La velocidad de un fluido se encuentra definida por $\vec{v} = y\vec{j} + (ye^{-t} - z)\,\vec{k}$
Se pide:

   a) Las componentes de la velocidad

$$v_x = 0$$

$$v_y = y$$

$$v_z = ye^{-t} - z$$

   b) Caracterización del flujo
   Flujo bidireccional, bidimensional y transitorio.

   c) La aceleración de la partícula fluida cuando en t=0s pasa por el punto (0,1,0)

$$a_L = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -ye^{-t}\vec{k}$$

$$a_c = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_y\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right)$$

$$a_c = \left(v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \left(v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$a_T = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = a_L + a_c = y\vec{j} + \left(-ye^{-t} + z\right)\vec{k}$$

$$a_T|_{\vec{r}=(0,1,0)m,t=0s} = \vec{j} - \vec{k}\ \frac{m}{s^2}$$

   d) Movimiento de la partícula fluida

$$\overline{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & \frac{e^{-t}}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\gamma}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & \frac{e^{-t}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

   e) ¿Podría tratarse de un líquido?

$$traza(\overline{\overline{\xi}}) = 1 - 1 = 0 \rightarrow \text{Es un líquido.}$$

f) La velocidad de deformación lineal específica en la dirección del vector unitario $\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

$$\bar{\bar{\xi}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & \frac{e^{-t}}{2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 + \frac{e^{-t}}{2} \\ -1 - \frac{e^{-t}}{2} \end{bmatrix}$$

3. Considere el flujo definido por $v_y = z\left(t + 2t^2\right)$ y $v_z = 2y$. Determine:

a) Tipo de flujo
Flujo bidireccional, bidimensional y transitorio.

b) La aceleración de la partícula fluida: total, local, convectiva y las contribuciones de la aceleración convectiva

$$a_L = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = z(1+4t)\vec{j}$$

$$a_c = \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_y \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}\right)$$

$$a_c = \left(v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \left(v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 2y(t+2t^2)\vec{j} + 2z(t+2t^2)\vec{k}$$

$$a_T = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = a_L + a_c = \left[z(1+4t) + 2y(t+2t^2)\right]\vec{j} + 2z(t+2t^2)\vec{k}$$

$$a_{c_v} = \vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\vec{k}\right]$$

$$a_{c_v} = 4y\vec{j} + z\left(t^2 + 4t^3 + 4t^4\right)\vec{k}$$

$$a_{c_d} = -\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|^2}{2}$$

$$a_{c_v} = \left[z(1+4t) + 2y(t+2t^2) - 4y\right]\vec{j} + z(2t + 3t^2 - 4t^3 - 4t^4)\vec{k}$$

c) El vector velocidad angular

$$\vec{\omega} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\vec{i} = \left(2 - t - 2t^2\right)\vec{i}$$

d) El movimiento de la partícula fluida

$$\overline{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t+2t^2+2}{2} \\ 0 & \frac{t+2t^2+2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\gamma}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t+2t^2+2}{2} \\ 0 & \frac{-t-2t^2+2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

e) ¿Podría representar este campo de velocidades a un fluido que fuera un líquido?

$$traza(\overline{\overline{\xi}}) = 0 \rightarrow \text{Es un líquido.}$$

4. Un campo de velocidades viene dado por $v_x = x^2 - 2y^2; v_y = -2xy$

$$\vec{v} = (x^2 - 2y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$$

a) Clasificación del flujo
Flujo bidireccional, bidimensional y estacionario.

b) La expresión de la aceleración total de la partícula fluida

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = v_x\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\right] + v_y\frac{\partial}{\partial y}\left[v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\right]$$

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \left[v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\vec{i} + \left[v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right]\vec{j}$$

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \left[(x^2-2y^2)2x + 4xy^2\right]\vec{i} + \left[(x^2-2y^2)(-2y) + 4x^2y\right]\vec{j}$$

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = 2\left(x^2+2y^2\right)\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$$

c) Aceleración local

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

d) Aceleración convectiva debida al cambio del módulo de la velocidad

$$\vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|^2}{2} = \vec{\nabla}\left(\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{x^4 + 4y^4}{2}\right) = 2x^3\vec{i} + 8y^3\vec{j}$$

e) Aceleración convectiva debido al cambio de dirección de la velocidad

$$-\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)=(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}-\vec{\nabla}\frac{|\vec{v}|^2}{2}=2\left(x^2+2y^2\right)\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)-\left(2x^3\vec{i}+8y^3\vec{j}\right)$$

$$-\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)=4y^2x\vec{i}+\left(2x^2y-4y^3\right)\vec{j}$$

f) Demostrar que la variación de la densidad a lo largo de una línea de corriente es nula
La variación de la densidad a lo largo de una línea de corriente es nula si el fluido es incompresible:

$$traza(\overline{\overline{\xi}})=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=2x-2x=0\rightarrow\text{Fluido incompresible}$$

g) Movimiento de la partícula fluida

$$d\vec{v}=d\vec{r}\cdot\left(\overline{\overline{\xi}}+\overline{\overline{\gamma}}\right)$$

$$\overline{\overline{\xi}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & -3y\\ -3y & -2x\end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\gamma}}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -y\\ y & 0\end{bmatrix}$$

$$d\vec{v}=d\vec{r}\cdot\left(\begin{bmatrix}2x & -3y\\ -3y & -2x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -y\\ y & 0\end{bmatrix}\right)=d\vec{r}\cdot\begin{bmatrix}2x & -4y\\ -2y & -2x\end{bmatrix}$$

5.3. Tema 3: Conservación de la masa

1. Calcular la relación de velocidades entre el caudal de entrada y de salida en una tubería divergente

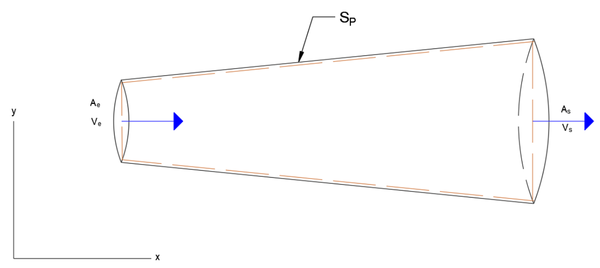


Figura 18: Esquema de la tubería.

Se parte de la ecuación de conservación de la masa.

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \rho \, dV + \oiint_{S_c(t)} \rho \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] \, dS = 0$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \rho \, dV = 0 \rightarrow \text{El volumen no varia con el tiempo.}$$

$$\oiint_{S_c(t)} \rho \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] \, dS = \iint_{S_e(t)} \rho \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] \, dS + \iint_{S_p(t)} \rho \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] \, dS + \iint_{S_p(t)} \rho \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] \, dS$$

$$\iint_{S_e(t)} \rho \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] \, dS = -\rho v_e \iint_{S_e(t)} dS = -\rho v_e A_e$$

$$\iint_{S_s(t)} \rho \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] \, dS = \rho v_s \iint_{S_s(t)} dS = \rho v_s A_s$$

$$\iint_{S_p(t)} \rho \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] \, dS = 0$$

El volumen de control no se desplaza y el fluido en contacto con las paredes tiene la misma velocidad que estas que al no moverse es 0.
Por tanto:

$$-\rho v_e A_e + \rho v_s A_s = 0 \rightarrow v_e A_e = v_s A_s$$

2. Calcular la relación entre la velocidad de salida y la altura en un depósito con un agujero en su fondo

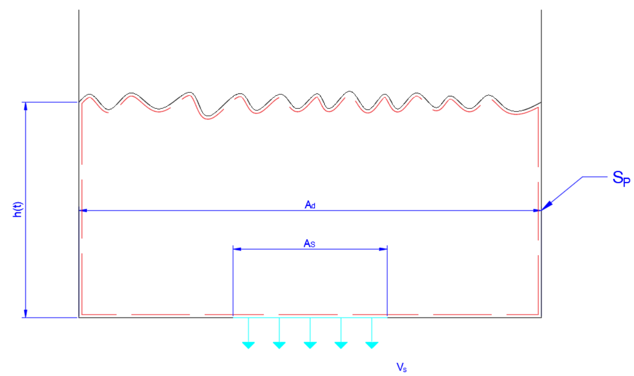


Figura 19: Esquema del depósito con el agujero en su fondo.

Se parte de la ecuación de conservación de la masa.

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \rho\, dV + \oiint_{S_c(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = 0$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \rho\, dV = \rho\frac{d}{dt}V(t) = \rho A_d \dot{h}(t)$$

$$\oiint_{S_c(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = \iint_{S_s(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS + \iint_{S_p(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS + \iint_{S_n(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS$$

$$\iint_{S_s(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = \rho v_s \iint_{S_s(t)} dS = \rho v_s A_s$$

$$\iint_{S_n(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = 0 \rightarrow v_c = v \text{ Y por tanto, se cancelan.}$$

$$\iint_{S_p(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = 0$$

Por tanto:

$$\rho A_d \dot{h}(t) + \rho v_s(t) A_s = 0 \rightarrow A_d \dot{h}(t) + v_s(t) A_s = 0$$

3. Un envase que contiene aire comprimido se abre y el aire sale por el orificio con un gasto másico $\dot{m} = C\rho$, donde ρ es la densidad del aire del depósito y C es una constante. Se pide una expresión de la densidad en función del tiempo sabiendo queρ_0 es la densidad inicial en el depósito y V su volumen, así como el tiempo necesario para que la densidad haya disminuido un 40 %.

Se parte de la ecuación de conservación de la masa.

El volumen es constante y $\rho = f(t)$ con $\dot{m} = C\rho$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \rho \, dV + \oiint_{S_c(t)} \rho \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}\right] dS = 0$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \rho \, dV = V\frac{d}{dt}\rho(t) = V\dot{\rho}(t)$$

Como ya se ha hecho en los ejercicios anteriores, se descompone la superficie y como solo existe velocidad en el orificio:

$$\oiint_{S_c(t)} \rho \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}\right] dS = \rho v_s A_s = \dot{m} = C\rho$$

Por tanto:

$$V\dot{\rho}(t) + C\rho(t) = 0$$

Que no es más que una EDO con variables separables cuya solución es:

$$ln\left(\frac{\rho(t)}{\rho_0}\right) = -\frac{C}{V}t \rightarrow \text{Para una reducción de rho de un } 40\,\% \rightarrow t = \frac{V}{C}ln\left(\frac{1}{0{,}6}\right)$$

4. Un tanque cilíndrico de diámetro (D) igual a 80 cm se comunica por el fondo con una tubería horizontal de diámetro (d) 15 cm por la que fluye agua. La velocidad del agua aguas arriba y aguas abajo del depósito es de 2,4 m/s y 1,8 m/s, respectivamente. En un instante de tiempo, la altura de agua (h) en el depósito es de 35 cm. Calcular el tiempo que se necesita para rellenar el depósito que tiene una altura de 1.2 m.

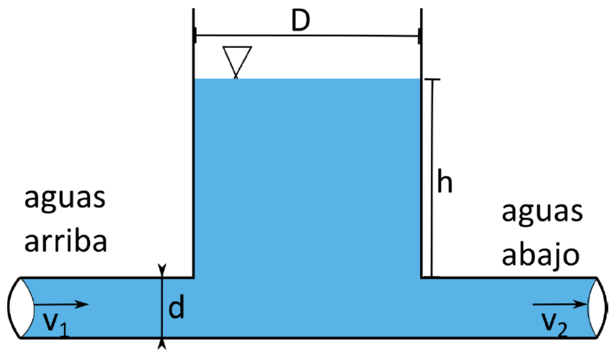


Figura 20: Esquema de la tubería con el depósito.

Se escoge como volumen de control el contorno del líquido, diferenciando entre 4 regiones:

- Entrada
- Salida
- Superficie depósito
- Pared

Partiendo de la ecuación de la masa y basandose en desarrollos anteriores:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \rho\, dV + \oint\!\!\oint_{S_c(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = 0$$

Como $\rho = cte$:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} dV + \oint\!\!\oint_{S_c(t)} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\pi\frac{D^2}{4}h(t) + l_H\pi\frac{d^2}{4}\right] - v_e\pi\frac{d^2}{4} + v_s\pi\frac{d^2}{4} = 0$$

$$D^2\dot{h}(t) - v_e d^2 + v_s d^2 = 0$$

Resolviendo la EDO

$h(t) = h_0 + \dfrac{d^2}{D^2}(v_e - v_s)\, t \rightarrow$ Sustituyendo los datos del enunciado se obtiene $\rightarrow t = 40{,}3s$

5. Se dispone de un émbolo de diámetro (D_c) con su superficie perforada con N agujeros de diámetro d que se disponen equidistantes al centro. Inicialmente el cilindro se encuentra lleno de un fluido incompresible de densidad ρ. El émbolo se desplaza con una velocidad w_0, produciéndose la salida del fluido con velocidad v_s por un orificio de diámetro D_s. Se pide calcular la velocidad v_s en función de los datos del ejercicio.

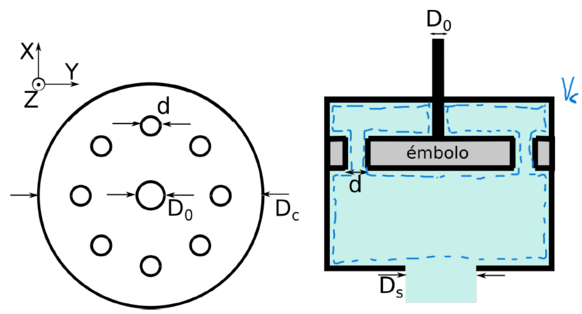


Figura 21: Esquema del émbolo Perforado.

Se escoge el volumen de control marcado sobre la figura y se plantea la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} \rho\, dV + \oiint_{S_c(t)} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = 0$$

Como $\rho = cte$:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} dV + \oiint_{S_c(t)} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = 0$$

El término local, como la única variación del volumen ocurre por la introducción de la varilla:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c(t)} dV = -\omega_0 \pi \frac{D_0^2}{4}$$

El término convectivo, teniendo en cuenta que las superficies son la pared o la de salida:

$$\oiint_{S_c(t)} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = v_s \pi \frac{D_s^2}{4}$$

Por tanto:

$$-\omega_0 \pi \frac{D_0^2}{4} + v_s \pi \frac{D_s^2}{4} = 0 \rightarrow v_s = \omega_0 \left(\frac{D_0}{D_s}\right)^2$$

6. Calcular en función de la altura la relación con la velocidad de un depósito con varios agujeros

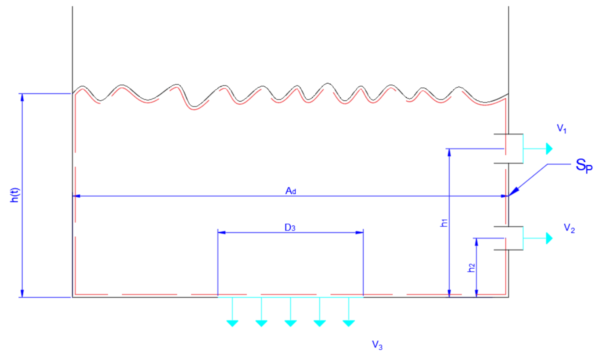


Figura 22: Esquema del depósito con varios agujeros.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente para un depósito, se pueden plantear directamente las ecuaciones teniendo en cuenta las distintas regiones:

- $h(t) > h_1$
$$-A_d\dot{h}(t) = v_3\frac{\pi D_3^2}{4} + v_2\frac{\pi D_2^2}{4} + v_1\frac{\pi D_1^2}{4}$$
- $h_1 > h(t) > h_2$
$$-A_d\dot{h}(t) = v_3\frac{\pi D_3^2}{4} + v_2\frac{\pi D_2^2}{4}$$
- $h(t) < h_2$
$$-A_d\dot{h}(t) = v_3\frac{\pi D_3^2}{4}$$

7. El flujo de un fluido está representado por el siguiente campo de velocidades: u = u (x, t); v = 0; w = 0, y densidad $\rho = \rho_0$ [a - cos (ωt)] con a>1. Determinar la función v (x, t) sabiendo que v (0, t) = v_0.

$$\rho = \rho_0[a - cos(\omega t)] \ y \ v = f(x,t)$$

Se plantea la ecuación de conservación de la masa en forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0[a - cos(\omega t)]\right) + \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right] \cdot [\rho_0[a - cos(\omega t)]]\, v(x,t) = 0$$

$$\omega \rho_0 sen(\omega t) + [\rho_0[a - cos(\omega t)]]\, \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x,t) = -\frac{\omega sen(\omega t)}{a - cos(\omega t)}$$

Resolviendo la EDO con la condición de que v (0, t) = v_0.

$$v(x,t) = -\frac{\omega sen(\omega t)}{a - cos(\omega t)} x + v_0$$

5.4. Tema 4: Conservación de la cantidad de movimiento

1. Considérese una tubería de sección decreciente con un codo con un ángulo α. Calcule la fuerza que se ejerce sobre las paredes.

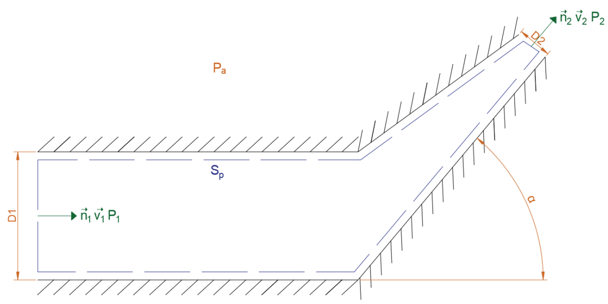


Figura 23: Esquema de la tubería.

Se plantea la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c} \rho\, dV + \oiint_{S_c} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = 0$$

Como el fluido es globalmente estacionario y no varia el volumen:

$$\rho\oiint_{S_c} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = 0$$

$$\oiint_{S_c} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = \iint_{S_1} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS + \iint_{S_2} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS + \iint_{S_p} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS$$

$$\iint_{S_1} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = -v_1\pi\frac{D_1^2}{4}$$

$$\iint_{S_2} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = v_2\pi\frac{D_2^2}{4}$$

$$\iint_{S_p} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = 0$$

Por tanto de la conservación de la masa se obtiene:

$$v_1 D_1^2 = v_2 D_2^2$$

Planteando la conservación de la cantidad de movimiento

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V\, dV + \oiint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_{V_c} \frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t}\, dV + \oiint_{S_c} \rho\vec{v}\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS$$

El término de fuerzas volumétricas:

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V \, dV = \iiint_{V_f} \rho \vec{g} \, dV = \rho \vec{g} V_c$$

El término de fuerzas superficiales:

$$\oiint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_2} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_p} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right) \cdot \vec{n} \, dS$$

- Como se cumple que la fuerza ejercida por la atmósfera sobre toda la superficie de control es nula:

$$\oiint_{S_c} P_a \vec{n} \, dS = 0$$

- Por tanto, para tener en cuenta las aportaciones de fuerza tanto del fluido como de la presión atmosférica:

$$\oiint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right) \cdot \vec{n} \, dS = \oiint_{S_c} \left[-(P - P_a)\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right] \cdot \vec{n} \, dS$$

- Además, el término de fuerza superficial sobre las paredes es la fuerza a calcular:

$$\iint_{S_p} \left[-(P - P_a)\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right] \cdot \vec{n} \, dS = -F_{fluido+atm \to pared}$$

- En un perfil uniforme se cumple que τ_v es despreciable frente al término de presión. Por tanto:

$$\oiint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} -(P - P_a)\vec{n} \, dS + \iint_{S_2} -(P - P_a)\vec{n} \, dS - F_{fluido \to pared}$$

$$\oiint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right) \cdot \vec{n} \, dS = -(P_1 - P_a)\frac{\pi D_1^2}{4}(-\vec{i}) - (P_2 - P_a)\frac{\pi D_2^2}{4}(\vec{n}) - F_{fluido+atm \to pared}$$

$$\oiint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right) \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\pi}{4}\left[(P_1 - P_a)D_1^2\vec{i} - (P_2 - P_a)D_2^2\left(cos(\alpha)\vec{i} + sen(\alpha)\vec{j}\right)\right] - F_{fluido+atm \to pared}$$

El término local:

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} \, dV = 0$$

El término convectivo:

$$\oiint_{S_c} \rho \vec{v} \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}\right] \, dS = \iint_{S_1} \rho \vec{v} \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}\right] \, dS + \iint_{S_2} \rho \vec{v} \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}\right] \, dS + \iint_{S_p} \rho \vec{v} \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}\right] \, dS$$

$$\iint_{S_1} \rho \vec{v} \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}\right] \, dS = \rho v_1 \vec{i} \cdot v_1 \vec{i} \cdot -\vec{i} \frac{D_1^2}{\pi} = -\rho v_1^2 \frac{D_1^2}{\pi} \vec{i}$$

$$\iint_{S_2} \rho\vec{v}\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = \rho v_2 \vec{n}\cdot v_2 \vec{n}\cdot\vec{n}\frac{D_2^2}{\pi} = \rho v_2^2 \frac{D_2^2}{\pi}\vec{n} = \rho v_2^2 \frac{D_2^2}{\pi}\left[cos(\alpha)\vec{i} + sen(\alpha)\vec{j}\right]$$

$$\iint_{S_p} \rho\vec{v}\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = 0$$

Por tanto, sustituyendo los término se obtiene:

$$F_{fluido+atm\rightarrow pared} = \frac{\pi}{4}\left[(P_1-P_a)D_1^2\vec{i} - (P_2-P_a)D_2^2\vec{n}\right] + \rho g V_c \vec{j} + \rho\frac{\pi}{4}\left[v_1^2 D_1^2\vec{i} - v_2^2 D_2^2\vec{n}\right]$$

$$\vec{n} = cos(\alpha)\vec{i} + sen(\alpha)\vec{j}$$

2. Se tiene un elemento de área de 2 mm^2 cuya normal es paralela al vector de componentes (1, 2, 3). Si el tensor de esfuerzos es de la forma $\tau_{xx} = -2\times10^5; \tau_{yy} = -110\times10^3; \tau_{zz} = -115\times10^3; \tau_{xy} = 1\times10^3; \tau_{xz} = -5\times10^4; \tau_{zy} = 1\times10^5$, todos ellos en pascales. Se pide:

   - El tensor de esfuerzos

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\times10^5 & 1\times10^3 & -5\times10^4 \\ 1\times10^3 & -110\times10^3 & 1\times10^5 \\ -5\times10^4 & 1\times10^5 & -115\times10^3 \end{bmatrix}$$

   - El valor de la fuerza superficial sobre dicha área si la presión es de 1.5 bares.

$$F = \oiint_{S_c}\left(-p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}\, dS = \left(-p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}S$$

$$F = -1{,}5\times10^5\frac{2\times10^{-6}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\times10^5 & 1\times10^3 & -5\times10^4 \\ 1\times10^3 & -110\times10^3 & 1\times10^5 \\ -5\times10^4 & 1\times10^5 & -115\times10^3 \end{bmatrix}\cdot\frac{2\times10^{-6}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}-0{,}996\\-0{,}438\\-1{,}29\end{bmatrix}$$

3. Considérese un depósito cilíndrico de sección A que se encuentra fijo sobre una plataforma. El depósito tiene una altura h de agua y en el instante inicial se practica un orificio de área A_s en la parte inferior de la pared. ¿Hacia dónde tendería a desplazarse si no estuviera fijado a la plataforma? Calcular la fuerza de reacción de la plataforma sobre el depósito.

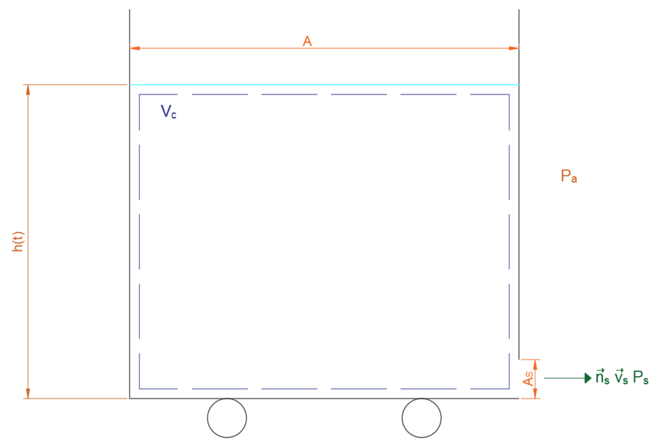


Figura 24: Esquema del depósito.

Se plantea la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c} \rho\, dV + \oiint_{S_c} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = 0$$

Teniendo en cuenta desarrollos de ejercicios anteriores:

$$A\dot{h}(t) = v_s(t)A_s$$

Planteando la conservación de la cantidad de movimiento, donde solo se buscan los términos en dirección $\vec{i}$ ya que el depósito si no estuviese fijo se movería hacia la izquierda y los términos de fuerza en dirección al suelo solo soportan el peso del depósito y no intervendrían en este "movimiento"

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V\, dV + \oiint_{S_c}\left(-P\overline{\overline{I}}+\overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_{V_c}\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t}\, dV + \oiint_{S_c}\rho\vec{v}\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS$$

El término de fuerzas volumétricas es nulo en la dirección de la fuerza a reacción a calcular:

$$\iiint_{V_c}\vec{f}_V\, dV = 0$$

El término de fuerzas superficiales:

$$\oiint_{S_c}\left(-P\overline{\overline{I}}+\overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}\, dS = \iint_{S_s}\left(-P\overline{\overline{I}}+\overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{S_n}\left(-P\overline{\overline{I}}+\overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{S_p}\left(-P\overline{\overline{I}}+\overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}\, dS$$

- En un perfil uniforme se cumple que τ_v es despreciable frente al término de presión. Por tanto la resultante en la dirección $\vec{i}$:

$$\oiint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}\, dS\cdot\vec{i} = \left[\iint_{S_s} -(P - P_a)\vec{n}\, dS + \iint_{S_n} -(P - P_a)\vec{n}\, dS + \iint_{S_p} -(P - P_a)\vec{n}\, dS\right]\cdot\vec{i}$$

$$\oiint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right)\cdot\vec{n}\, dS\cdot\vec{i} = (P_s - P_a)A_s + 0 - F_{fl+atm\to dep} = (P_s - P_a)A_s - F_{fl+atm\to dep}$$

El término local es nulo debido a que la variación de la derivada de la altura tiene un orden de magnitud mucho menor al resto de términos y, por tanto es despreciable :

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t}\, dV = 0$$

El término convectivo en la dirección de $\vec{i}$:

$$\oiint_{S_c} \rho\vec{v}\left[(\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS = \iint_{S_n} \rho\vec{v}\left[(\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS + \iint_{S_s} \rho\vec{v}\left[(\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS + \iint_{S_p} \rho\vec{v}\left[(\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS$$

$$\oiint_{S_c} \rho\vec{v}\left[(\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right] dS\cdot\vec{i} = 0 + \rho v_s^2 A_s \vec{i}\cdot\vec{i} + 0 = \rho v_s^2 A_s$$

Por tanto, sustituyendo los término se obtiene:

$$(P_s - P_a)A_s - F_{fl+atm\to dep} = \rho v_s^2 A_s \to P_s = P_a$$

$|F_{fl+atm\to dep}| = |\rho v_s^2 A_s| \to$ Como se mueve a la izquierda: $\vec{F}_{fl+atm\to dep} = -\rho v_s^2 A_s \vec{i}$

Para obtener la relación entre altura y velocidad de salida se aplica el teorema de Bernouilli entre la parte superior del depósito y la salida:

$$P_1 + \rho g h(t) = P_s + \frac{v_s^2(t)}{2}\rho \to P_1 = P_s = P_a \to h(t) = \frac{v_s^2(t)}{2g} \to v_s(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

Aplicando esta expresión junto a la obtenida con la conservación de la masa:

$$v_s(t) = \sqrt{2gh(t)}$$
$$A\dot{h}(t) = v_s(t)A_s$$

Resolviendo la EDO se obtiene:

$$\sqrt{h(t)} = \frac{-A_s}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}t + \sqrt{h_0}$$

4. Cálcule la fuerza aplicada por un chorro sobre una placa móvil:

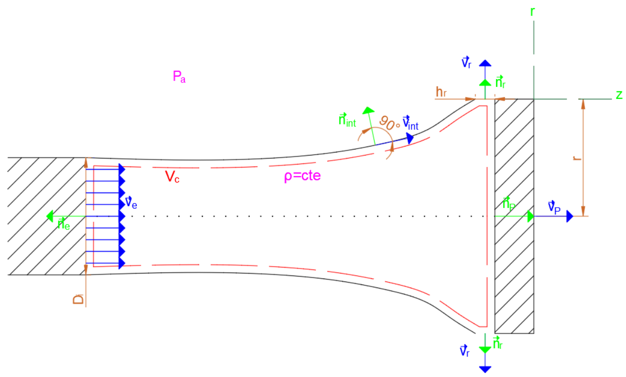


Figura 25: Esquema del problema.

Se coloca el sistema de referencia en la placa y con velocidad $\vec{v}_p$ que como es constante no provoca fuerzas de inercia. De esta manera el chorro sale a la velocidad: $\vec{v}_e - \vec{v}_p$

Se plantea la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c} \rho\, dV + \oint\!\!\!\oint_{S_c} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = 0$$

Como el volumen de control no cambia:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_c} \rho\, dV = 0$$

Desarrollando el término de superficie:

$$\oint\!\!\!\oint_{S_c} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS =$$

$$\iint_{S_e} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS + \iint_{S_{int}} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS + \iint_{S_r} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS + \iint_{S_P} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS$$

La velocidad del volumen de control $\vec{v}_c = 0$

- En la salida del chorro, por ser un perfil uniforme:

$$\iint_{S_e} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = \iint_{S_e} \rho left(v_e - v_P\vec{i} \cdot -\vec{i}\, dS = -\left(v_e - v_P\right)\frac{\pi D_i^2}{4}$$

- En la interfase como la velocidad es siempre perpendicular a la superficie:

$$\iint_{S_{int}} \rho\left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\right]\, dS = 0$$

- En la dirección radial de la placa:

$$\iint_{S_r} \rho \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} \right] dS = \iint_{S_r} \rho v_r \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \, dS = v_r 2\pi r h(r) \text{ [Área de un cilindro]}$$

- En la placa, como la velocidad del fluido es 0:

$$\iint_{S_P} \rho \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} \right] dS = 0$$

Por tanto:

$$(v_e - v_P) \frac{\pi D_i^2}{4} = v_r 2\pi r h(r)$$

Planteando la conservación de la cantidad de movimiento:

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V \, dV + \oint\!\!\!\oint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right) \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \oint\!\!\!\oint_{S_c} \rho \vec{v} \left[(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} \right] dS$$

Se desprecia el término de fuerzas volumétricas (número de Froude elevado):

$$\iiint_{V_c} \vec{f}_V \, dV = 0$$

El término de fuerzas superficiales:

$$\oint\!\!\!\oint_{S_c} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right) \cdot \vec{n} \, dS =$$

$$\iint_{S_e} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_{int}} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_r} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_P} \left(-P\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right) \cdot \vec{n} \, dS$$

Aplicando el mismo razonamiento que en anteriores ejercicios se introduce la presión atmosférica P_a. Como el número de Reynolds y Froude son elevados porque es un líquido está dentro de un gas, $\overline{\overline{\tau}}$ es despreciable.

- En la salida del chorro, por ser un perfil uniforme y la presión es la atmosférica:

$$\iint_{S_e} \left[-(P - P_a)\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right] \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

- En la interfase como la presión es la atmosférica:

$$\iint_{S_{int}} \left[-(P - P_a)\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right] \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

- En la dirección radial de la placa como la presión es la atmosférica:

$$\iint_{S_r} \left[-(P - P_a)\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right] \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

- En la placa:

$$\iint_{S_p} \left[-(P-P_a)\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right] \cdot \vec{n}\, dS = -F_{jet+atm \rightarrow placa}$$

El término local es despreciable ya que el fluido es globalmente estacionario:

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t}\, dV = 0$$

El término superficial, teniendo en cuenta como en los desarrollos anteriores solo eran no nulos los términos a la salida del chorro y en la dirección radial de la placa:

$$\oiint_{S_c} \rho \vec{v} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot \vec{n} \right]\, dS = \iint_{S_e} \rho \vec{v} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot \vec{n} \right]\, dS + \iint_{S_r} \rho \vec{v} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot \vec{n} \right]\, dS$$

- En la salida del chorro:

$$\iint_{S_e} \rho \vec{v} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot \vec{n} \right]\, dS = \iint_{S_e} \rho \left(v_e - v_p\right) \vec{k} \left[\left(v_e - v_p\right) \vec{k} \cdot -\vec{k} \right]\, dS = -\rho \left(v_e - v_p\right)^2 \frac{\pi D_i^2}{4} \vec{k}$$

- En la dirección radial de la placa:

$$\iint_{S_r} \rho \vec{v} \left[(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot \vec{n} \right]\, dS = \iint_{S_r} \rho v_r \vec{e}_r \left[v_r \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \right]\, dS = \rho v_r^2 \iint_{S_r} \vec{e}_r\, dS = 0 \text{ Ver figura inferior}$$

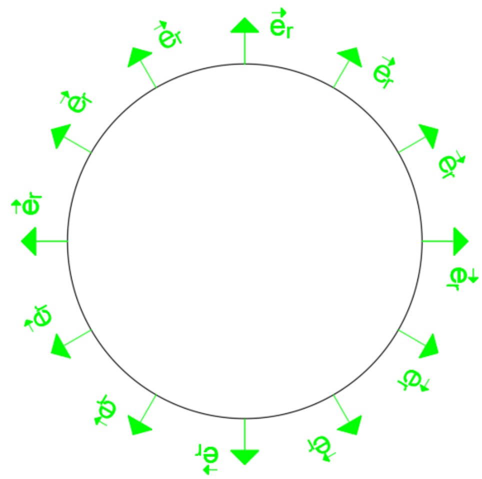


Figura 26: Representación de $\vec{e}_r$ a lo largo de la superficie.

Por tanto:

$$F_{jet+atm \rightarrow placa} = \rho \left(v_e - v_p\right)^2 \frac{\pi D_i^2}{4} \vec{k}$$