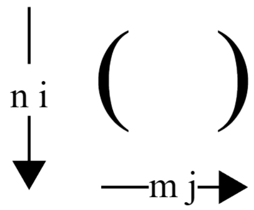
Apuntes de Álgebra Lineal

1. Tema 1: Sistemas de ecuacions lineales y cálculo

Matrices pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$ con estructura algebraica.

- Se lee de izquierda a derecha.
- Notación: orden $n \times m$
  - n filas
  - m Colunas



$$A : I \times J \to \mathbb{K}$$
$$(i, j) \to a_{ij}$$

$$A = (a_{ij})_{n,m}$$

$$A(n, m) = A_{n\times m}$$

- Diagonal principal elementos $i = j \to a_{pp} \quad p = \text{mín}(n, m)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- Traza: suma de la diagonal principal

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$$

- Submatriz quitar filas o columnas a una matriz de mayor tamaño
    - Caja o bloque si son consecutivas
    - Fila
    - Columna

Suma

Es un operador binario que requiere dos matrices de la misma dimensión. Tiene las propiedades:

- Conmutativa y asociativa
- Elemento Nulo
- Elemento opuesto

Multiplicación

- Escalar: multiplicar cada elemento de A por una constante λ

$$B = \lambda A \rightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

- Matricial: multiplicar cada fila de A por una columna de B y sumarlas.

$$C_{n \times p} = A_{n \times m} \cdot B_{m \times p} \rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Traspuesta

$$A \rightarrow A^t \Rightarrow a_{ij} \rightarrow a_{ji}$$
$$(A + B)^t = A^t + B^t$$
$$(\lambda A)^t = \lambda A^t$$
$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Matrices cuadradas

Son aquellas que tienen el mismo número de filas que de columnas. Las más relevantes son:

- **Diagonal:** todos los elementos que no están en la diagonal principal son nulos.

$$a_{ij} = 0 \forall i \neq j, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Escalar:** es una matriz diagonal con todos los elementos de esta iguales.

$$a_{ij} = 0 \forall i \neq j, \quad a_{ii} = a \forall i, \quad A = \begin{pmatrix} a & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & a \end{pmatrix}$$

- **Identidad:** matriz escalar cuyos elementos no nulos son iguales a la unidad.

$$a_{ij} = 0 \forall i \neq j, \quad a_{ii} = 1 \forall i, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = I$$

- **Triangular:** los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.
  - Triangular superior: los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$a_{ij} = 0 \forall i > j, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  - Triangular inferior: los elementos por encima de la diagonal principal son nulos.

$$a_{ij} = 0 \forall i < j, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Regular:** cuando existe una matriz B del mismo orden tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$. La matriz B es el elemento simétrico de A para producto de matrices, se denomina inversa de A y se denota por A^{-1}.
- **Singular:** matriz cuadrada que no es regular, es decir, no tiene inversa.
- **Simétrica:** la traspuesta coincide con la propia matriz, $A^t = A$
- **Antisimétrica:** la traspuesta coincide con la opuesta de la matriz (simétrica de la suma de matrices), $A^t = -A$. Puesto que las diagonales de A y A^t coinciden, para que una matriz sea antisimétrica los elementos de su diagonal deben ser nulos ($a_{ii} = 0$).
- **Ortogonal:** la traspuesta coincide con la inversa, $A^t = A^{-1}$.
- **Nilpotente** $A^p = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$
- **Involutiva** $A^2 = I$
- **Idempotente** $A^2 = A$

Propiedades inversa

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
- Si A^{-1} es regular $\rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$
- Si es A^t regular si A es regular $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- Si A y B son regulares $\rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Sistemas de ecuacions

$$A\bar{x} = b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A \in M_{n \times m}, & \text{matriz de ecuaciones} \\ \bar{x} \in \mathbb{R}^m, & \text{vector de incógnitas} \\ b \in \mathbb{R}^n, & \text{termino independiente} \end{cases}$$

$$A^* : (A|B) \in M_{n \times m+1} \text{ (Matriz ampliada)}$$

Teorema de Rouche: Sirve para determinar la relación entre la representación matricial y los sistemas de ecuaciones mediante el operador rango (Rg).

- El sistema de ecuaciones es compatible $\leftrightarrow Rg(A) = Rg(A|B)$
    - Determinado (solución única): $Rg(A) = Rg(A|B) = n$
    - Indeterminado (infinitas soluciones): $Rg(A) = Rg(A|B) < n$
- Incompatible (no existe solución) $Rg(A) \neq Rg(A|B)$: el vector b no es combinación lineal del resto.

Nº incógnitas - Rg = grado libertad

- Homogéneo si $b_i = 0$.
    - El sistema es libre si la solución trivial $x_i = 0 \forall i$ es la única solución
    - El sistema es ligado en caso contrario

Forma escalonada reducida

- Se llega de la matriz A^* a la matriz B^* mediante reducciones
- Los sistemas de ecuaciones $C\bar{x} = d \sim A\bar{x} = b$ son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Matriz escalonada

Entrada principal (Pivotes: debajo hay ceros)

Cualquier valor

$$\begin{pmatrix} \otimes & \dots & \dots & \odot \\ 0 & \times & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Filas de ceros

Matriz escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Entrada principal $= 1$

- El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

Transformaciones elementales:

1. Intercambio de líneas o permutaciones $F_{ij}, C_{ij} \to (i,j)$ Elementos que cambian
2. Multiplicar por escalar $\lambda \neq 0 \quad F_i(\lambda) \quad C_i(\lambda)$
3. Suma de dos líneas del mismo tipo y multiplicadas por escalar

$$F_{ij}(\lambda), C_{ij}(\lambda)$$

$$F_i + F_j(\lambda), C_i + C_j(\lambda)$$

Si se realizan trasformaciones elementales en fila equivale a multiplicar por esa matriz $B \sim F \cdot A$ T. Filas (pre-multiplicación) T. Columnas (post-multiplicación)

$$A \xrightarrow{F,C} B \quad B = P \cdot A \cdot Q \quad P, Q \text{ regulares}$$

Dos matrices son equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra con trasformaciones elementales.

Propiedades: B, A mismo tamaño y rango

1. Reflexiva: toda matriz es equivalente a si misma
2. Simétrica: Si $A \sim B \to B \sim A$
3. Transitiva: Si $A \sim B$ y $B \sim C \to A \sim C$

- A y B Semejante P regular

$$B = P^{-1}AP$$

- A y B Congruente P regular

$$B = P^tAP$$

Cálculo matrices de paso

$$P = F_m \cdot F_{m-1} \cdots F_1$$

$$Q = C_1 \cdot C_2 \cdots C_s$$

$$B = P \cdot A \cdot Q \to A \in M_{n\times m}$$

$$(A|I_n)$$

$$\frac{I_m}{P}|\frac{C}{Q}$$

Transformaciones en A se replican en I Si es fila en I_n Si es colma en I_m

Forma normal $\forall A \in M_{n\times m}$ se puede llegar a una expresión mediante transformaciones elementales del tipo $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r = rgA$

Algoritmo de reducción Pivote = entrada principal Columna pivote = tiene pivote

1. Buscando columa lo más a la izquierda y pivote lo más alto posible
2. Debajo del pivote se hacen ceros
3. Se pasa a la siguiente cadena ignorando la primera fila y se repite

(Si quedan ceros debajo se repite al reves para hacer 0 sobre los pivotes)

Cálculo inversas

Filas $(A|I_n) \rightarrow (I_n|A^{-1})$ Columnas $\left(\frac{A}{I_m}\right) \rightarrow \left(\frac{I_m}{A^{-1}}\right)$

Determinantes

Propiedades:

1. $det(A) = det(A^t)$
2. $det(kA) = k^n det(A)$
3. $det(A \cdot B) = det(A)det(B)$
4. $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$
5. Al intercambiar lineas cambia el signo
6. Si se multiplica una fila/columa por λ: $|A'| = \lambda|A|$
7. Si se suma una linea a otra paralela multiplicada por escalar no varia
8. Si los elementos entre línea son proporcionales $|A| = 0$

Adjunto: $\beta_{ij} = Adj(A) = ((-1)^{i+j}\alpha_{ij})$ (cofactores)

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj(A)^t}{|A|}$$

Adjunta $Adj(A) = (\alpha_{ij})$ donde $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
Cálculo de determinantes (1) Sarrus en 2x2

$$|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Sarrus en 3x3 (regla de diagonales)
(2) Adjuntos

$$|A| = a_{i1}Adj_{i1} + \cdots + a_{in}Adj_{in}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}Adj_{ij} \text{ (desarrollo por fila i)}$$

(3) Hacer ceros por adjuntos pero una fila o columa hecha ceros
(4) Triangulación Transformaciones que cambian det a triangular

$$|A| = \prod a_{ii} \text{ (diag principal)}$$

2. Tema 2: Espacios vectoriales

Estructura Conjunto con operaciones y propiedades Conjunto: colección de objetos $\mathbb{N}, \mathbb{R}$
Espacio vectorial si se cumplen operaciones:
1) Interna $E \times E \to E$ $(x, y) \to x + y$

1. $x + y = y + x$ (conmutativa)
2. $(m + n) + q = m + (n + q)$ (asociativa)
3. $\exists 0 \in E$ neutro $\to x + 0 = x$
4. opuesto $\forall x \exists -x$ tal que $x + (-x) = 0$

2) Externa $\mathbb{R} \times E \to E$ $(\lambda, x) \to \lambda \cdot x$

1. Distrivativa suma escalar $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
2. Distrivativa suma de vect $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
3. Asociativa respecto a escalar $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
4. $1 \cdot x = x$

Ejemplos: Vector $\mathbb{R}$ Matrices $M_{n\times m}$ Polimonio $R_n[x]$
Propiedades

- $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- $(-\lambda)x = -(\lambda x) = \lambda(-x)$

Sistema de vectores $S = \{x_1, ..., x_i, ..., x_n\}$ $S = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\}$ cardinal 3 (tres)

Conbinación lineal Sistema cuando escalares $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbb{R}$ $C.L. = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$ Los escalares son coeficientes de la C.L

Sistema libre o ligado Un sistema es libre o linealmente independiente si $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ En caso contrario los k son linealmente dependientes Se halla triangulando. Si solución única es libre.

Propiedades: 1) Si S es libre $\rightarrow$ todo subconjunto de S es libre. 3) Si todo sistema con el vector 0 es ligado. 4) Si S es ligado, todo sistema que lo contiene también (SCS). 5) Si un sistema es ligado, un vector es C.L de los demas. 6) Si S es libre y $S \cup \{x\}$ es ligado $\rightarrow$ x es C.L de S.

$L(S)$ **Conjunto generado por un sistema de vectores** Es el conjunto de vectores que son C.L de S. Ejemplo: $S = \{\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\}$ $L(S) = \{\alpha\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Equivalencia: Dos sistemas son equivalentes $L(S_1) \equiv L(S_2)$ y se pueden obtener mediante transformaciones elementales de fila. Dim (S) = nº parámetros Dim (E) = nº parámetros + nº ecs independientes

Base: Una base es un sistema generador cuyos vectores son libres.

Subespacio vectorial: Sea E un espacio vectorial. Todo subespacio $V \subset E$ es un espacio y tiene las mismas leyes. $\forall x, y \in V, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in V$ $\vec{0} \in V$ Generalmente, si se trabaja en implícitas es subespacio con ecuaciones lineales homogéneas.

Intersección de subespacios $V_1 \cap V_2 := \{x \in E/x \in V_1$ y $x \in V_2\}$ subespacio vec. Para hallar intersección se juntan ecuaciones implícitas de ambos. Si la intersección es solo el $\vec{0}$ los espacios son disjuntos $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Suma de subespacios $V_1 + V_2 = \{x \in E/x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2\}$

Fórmula de las dimensiones (Grassmann) $dim(V + W) = dim(V) + dim(W) - dim(V \cap W)$

Suma directa: Dos subespacios son suma directa si son disjuntos $V_1 + V_2 \Rightarrow V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$ Dos subespacios son suplementarios si son todo el conjunto $V_1 \oplus V_2 = E$.

En implícitas: nº ecuaciones linealmente independientes = Dim(espacio) - Dim(subespacio). Nº parámetros = dimensión(subespacio) = nº vectores base.

Coordenadas de un vector en una base: Dada una base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. De $\forall x \in E$ $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$ (coordenadas únicas)

Cambio de base: Dadas dos Bases $B = \{u_1, ..., u_n\}$ y $B' = \{v_1, ..., v_n\}$ Conocida la expresión de los vectores de una base en función de los de la otra: $v_i = a_{1i}u_1 + ... + a_{ni}u_n$ La expresión de cambio de base queda: $\bar{x}_B = M_B^{B'} \bar{x}_{B'}$ ($M_B^{B'}$ matriz de cambio de base de B' a B) En resumen: $(M_B^{B'})^{-1} = M_{B'}^B$ El cambio de base es una aplicación lineal identidad

Si las matrices no están en base canónica: $M_{B_2}^{B_1} = (M_C^{B_2})^{-1} M_C^{B_1}$

Espacio Nulo, de Filas y Columnas

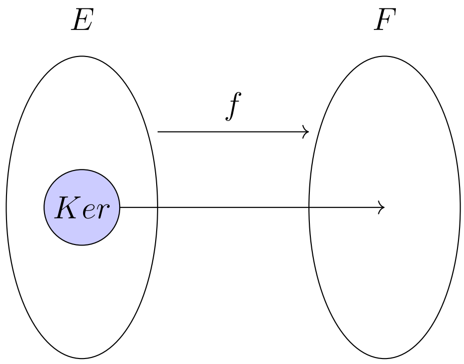
- $Nul(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m / A\bar{x} = \bar{0}\} \subset \mathbb{R}^m$ (Kernel) dim Nul(A) = m - rg(A)
- Espacio de filas, $Fil(A)$ $Fil(A) = L\{\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n\}$ dim $Fil(A) = rg(A)$
- Espacio de columnas, $Col(A)$ Columnas pivote (son linealmente independientes) Base de Col(A) $dim(col(A)) = rg(A)$

$dim[Nul(A)] + dim[Col(A)] = m$ (Teorema rango-nulidad)

Aplicaciones lineales Dado un conjunto E, definición: 1) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in E$ 2) $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ 3) $f(0) = \bar{0}$

Tipos de aplicaciones:

- Inyectiva: $f(x) = f(y) \implies x = y$ (Elementos distintos se relacionan con elementos distintos).
- Sobreyectiva: $\forall y \in F \exists x \in E / f(x) = y$ (Todos los de F tienen preimagen).
- Endomorfismo: $E \to E$ (no cambia el subespacio).
- Biyectiva: Inyectiva y Sobreyectiva (Isomorfismo).



Núcleo $Ker(f) = \{\bar{x} \in E / f(\bar{x}) = \bar{0} \in F\}$ subespacio vectorial. **Imágen** $Im(f) = f(E)$. Imagen directa del espacio de entrada.

$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E)$ Si $Ker(f) = 0 \to f$ es inyectiva.

Matriz de una aplicación lineal $f : E \to F$, $A\bar{x} = \bar{y}$ A contiene en columnas las transformadas de los vectores de la base en función de la nueva base.

Operadores con aplicaciones lineales

- Suma: $f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = (f + g)(\bar{x})$
- Multiplicación por escalar: $\lambda f(x) = (\lambda f)(x)$
- Composición: $(g \circ f)(\bar{x}) = \bar{y} \to B \cdot A \cdot \bar{x} = \bar{y}$ Orden depende de cual apliques primero (derecha).

Invariantes: Subespacio de vectores invariantes $f(\bar{x}) = \bar{x}$. $(A - I)\bar{x} = \bar{0} \to Nul(A - I)$.

3. Tema 3: Semejanza y diagonalización de matrices

Semejanza i) A y B son semejantes si $B = P^{-1}AP$ ii) Propiedades: Si A y B son semejantes: 1) $|A| = |B|$ 3) $tr(A) = tr(B)$ 5) Mismo polimonio característico.

Autovalores y autovectores $f : E \to E$ Autovalor λ Autovector $v \neq 0$ Cálculo de autovalores: $|F - \lambda I| = 0$ (Polinomio característico). Cálculo de autovectores: $N_\lambda = Ker(F - \lambda I)$.

Diagonalización Obtención matriz de Jordan. Matriz F es diagonalizable si mult algebraica = mult geométrica. [cite: 552] Mult geométrica: $Dim[Ker(F - \lambda I)]$. Fórmula polinomio característico 3x3: $P(\lambda) = -\lambda^3 + Tr(A)\lambda^2 - (Adj(11) + Adj(22) + Adj(33))\lambda + |A|$

4. Tema 4: Espacio Vectorial Euclídeo

Producto escalar: es una forma $f : E \times E \to \mathbb{R}$ $(\bar{x}, \bar{y}) \to f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$ 1) Bilineal 2) Simétrica 3) Definida positiva $f(\bar{x}, \bar{x}) > 0 \forall x \neq 0$.

Matriz de Gram $G = (g_{ij})$ donde $g_{ij} = u_i \cdot u_j$. $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^t \cdot G \cdot \bar{y}$ Si el producto escalar es el usual $G = I$.

Norma: $||\bar{u}|| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$ **Ángulo:** $\cos\alpha = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{||\bar{u}||||\bar{v}||}$. Si $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ son perpendiculares (ortogonales).

Base ortonormal (Gram-Schmidt) Hallar vectores que sean perpendiculares entre si y tengan norma 1.

Proyección ortogonal: $\bar{v} = P_V(\bar{u}) + P_{V^\perp}(\bar{u})$ Fórmula: $P_V(\bar{u}) = \sum \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}_i}{||\bar{v}_i||^2} \bar{v}_i$ (en base ortogonal).

Matrices ortogonales: A es ortogonal si $A^t = A^{-1}$; $A \cdot A^t = I$. $|A| = \pm 1$. Sus columnas forman base ortonormal.

Isometrias en $\mathbb{R}^3$ 1) Directas ($|A| = 1$) (Giros). 2) Inversas ($|A| = -1$) (Simetrías).