Apuntes de Álgebra Lineal

Curso 2020/21

Índice general

Capítulo 1

Tema 1: Sistemas de ecuacions lineales y cálculo

1.1. Matrices: Conceptos Preliminares

Las matrices son elementos que pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$ con estructura algebraica.

Lectura y Notación:

- Se lee de izquierda a derecha y de arriba a abajo.
- Notación: orden $n \times m$
  - n Filas (índice i)
  - m Columnas (índice j)

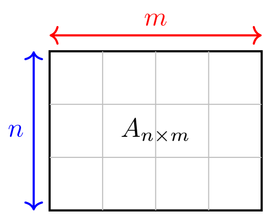

Figura 1.1: Esquema de dimensión

Definición formal: Una matriz es una aplicación que asigna a cada par de índices un elemento del cuerpo:

$$\begin{aligned} A : I \times J &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) &\longmapsto a_{ij} \end{aligned}$$

Donde $I = \{1, \dots, n\}$ y $J = \{1, \dots, m\}$.

$$A = (a_{ij})_{n,m} \quad \text{ó} \quad A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$$

Forma general:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

1.1.1. Elementos destacados

- **Diagonal principal:** Elementos donde el índice de fila y columna coinciden $(i = j)$.

$$\{a_{pp}\} \quad \text{donde } p = 1, \dots, \text{mín}(n, m)$$

- **Traza:** Es la suma de los elementos de la diagonal principal (generalmente usada en matrices cuadradas).

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^{\text{mín}(n,m)} a_{kk}$$

- **Submatriz:** Matriz obtenida al eliminar filas o columnas de una matriz original.
  - **Bloque (o caja):** Si las filas/columnas seleccionadas son consecutivas.
  - **Fila/Columna:** Casos particulares donde $n = 1$ o $m = 1$.

1.2. Suma de Matrices

Es una operación interna que requiere dos matrices de la misma dimensión ($A, B \in M_{n\times m}$). Se define como:

$$C = A + B \implies c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propiedades:

- **Conmutativa:** $A + B = B + A$
- **Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Elemento Neutro:** Existe la matriz nula 0 tal que $A + 0 = A$.
- **Elemento Opuesto:** Para toda matriz A existe $-A$ tal que $A + (-A) = 0$.

1.3. Multiplicación

1.3.1. Producto por un escalar

Dada una matriz A y un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$B = \lambda A \implies b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

1.3.2. Producto Matricial

Dadas $A \in M_{n\times m}$ y $B \in M_{m\times p}$, el producto $C = A \cdot B$ resulta en una matriz $n \times p$ donde cada elemento es el producto escalar de la fila de A por la columna de B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\overset{A_{n\times m}}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}} \overset{B_{m\times p}}{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}} = \overset{C_{n\times p}}{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}}$$

Figura 1.2: Visualización del producto fila por columna

1.4. Traspuesta

La traspuesta de una matriz A se obtiene intercambiando sus filas por columnas.

$$A = (a_{ij}) \implies A^t = (a_{ji})$$

Propiedades:

$$(A^t)^t = A \qquad \text{(Involutiva)}$$
$$(A + B)^t = A^t + B^t \qquad \text{(Linealidad en la suma)}$$
$$(\lambda A)^t = \lambda A^t \qquad \text{(Homogeneidad)}$$
$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \qquad \text{(Inversión del orden en producto)}$$

1.5. Matrices cuadradas

Son aquellas que tienen el mismo número de filas que de columnas. Las más relevantes son:

- **Diagonal:** todos los elementos que no están en la diagonal principal son nulos.

$$a_{ij} = 0 \forall i \neq j, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Escalar:** es una matriz diagonal con todos los elementos de esta iguales.

$$a_{ij} = 0 \forall i \neq j, \quad a_{ii} = a \forall i, \quad A = \begin{pmatrix} a & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & a \end{pmatrix}$$

- **Identidad:** matriz escalar cuyos elementos no nulos son iguales a la unidad.

$$a_{ij} = 0 \forall i \neq j, \quad a_{ii} = 1 \forall i, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = I$$

- **Triangular:** los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.
  - Triangular superior: los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$a_{ij} = 0 \forall i > j, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  - Triangular inferior: los elementos por encima de la diagonal principal son nulos.

$$a_{ij} = 0 \forall i < j, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Regular:** cuando existe una matriz B del mismo orden tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$. La matriz B es el elemento simétrico de A para producto de matrices, se denomina inversa de A y se denota por A^{-1}.

- **Singular:** matriz cuadrada que no es regular, es decir, no tiene inversa.

- **Simétrica:** la traspuesta coincide con la propia matriz, $A^t = A$

- **Antisimétrica:** la traspuesta coincide con la opuesta de la matriz (simétrica de la suma de matrices), $A^t = -A$. Puesto que las diagonales de A y A^t coinciden, para que una matriz sea antisimétrica los elementos de su diagonal deben ser nulos $(a_{ii} = 0)$.

- **Ortogonal:** la traspuesta coincide con la inversa, $A^t = A^{-1}$.

- **Nilpotente** $A^p = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$

- **Involutiva** $A^2 = I$

- **Idempotente** $A^2 = A$

1.6. Propiedades de la Matriz Inversa

Sea A una matriz cuadrada regular ($|A| \neq 0$). Se cumplen las siguientes propiedades fundamentales:

- **Definición:** El producto de una matriz por su inversa es conmutativo e igual a la identidad.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

- **Involutiva (Inversa de la inversa):** La inversa de la inversa es la matriz original.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- **Inversa de la Traspuesta:** Las operaciones de trasponer e invertir conmutan.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

- **Inversa del Producto:** La inversa de un producto es el producto de las inversas en **orden inverso** (conocida como la propiedad del çalcetín-zapato"). Sean A y B regulares:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- **Inversa de un escalar:** Si $\lambda \neq 0$ es un escalar:

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

1.7. Sistemas de ecuacions

$$A\bar{x} = b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A \in M_{n\times m}, & \text{matriz de ecuaciones} \\ \bar{x} \in \mathbb{R}^m, & \text{vector de incógnitas} \\ b \in \mathbb{R}^n, & \text{termino independiente} \end{cases}$$

$$A^* : (A|B) \in M_{n\times m+1} \text{ (Matriz ampliada)}$$

1.7.1. Teorema de Rouche

Sirve para determinar la relación entre la representación matricial y los sistemas de ecuaciones mediante el operador rango (Rg).

- El sistema de ecuaciones es compatible $\leftrightarrow Rg(A) = Rg(A|B)$
  - Determinado (solución única): $Rg(A) = Rg(A|B) = n$
  - Indeterminado (infinitas soluciones): $Rg(A) = Rg(A|B) < n$
- Incompatible (no existe solución) $Rg(A) \neq Rg(A|B)$: el vector b no es combinación lineal del resto.

Nº incógnitas - Rg = grado libertad

- Homogéneo si $b_i = 0$.
  - El sistema es libre si la solución trivial $x_i = 0 \forall i$ es la única solución
  - El sistema es ligado en caso contrario

1.8. Forma escalonada reducida

- Se llega de la matriz A^* a la matriz B^* mediante reducciones
- Los sistemas de ecuaciones $C\bar{x} = d \sim A\bar{x} = b$ son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Matriz escalonada

Entrada principal (Pivotes: debajo hay ceros)

$$\begin{pmatrix} \otimes & \dots & \dots & \odot \\ 0 & \times & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Cualquier valor

Filas de ceros

Matriz escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Entrada principal $= 1$

- El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

1.9. Transformaciones Elementales

Son operaciones que modifican la matriz sin alterar su rango. Existen tres tipos, válidos tanto para filas (F) como para columnas (C):

1. **Permutación (Intercambio):** Intercambiar la posición de dos líneas i y j.

$$F_i \leftrightarrow F_j \quad \text{ó} \quad C_i \leftrightarrow C_j$$

2. **Escalado:** Multiplicar una línea i por un escalar no nulo $\lambda \neq 0$.

$$F_i \to \lambda F_i \quad \text{ó} \quad C_i \to \lambda C_i$$

3. **Reemplazo (Suma):** Sumar a la línea i la línea j multiplicada por un escalar λ.

$$F_i \to F_i + \lambda F_j \quad \text{ó} \quad C_i \to C_i + \lambda C_j$$

1.9.1. Equivalencia Matricial

Si una matriz B se obtiene de A mediante transformaciones elementales, se dice que son equivalentes $(A \sim B)$. Esto equivale a multiplicar por matrices elementales:

- Transformaciones por **Fila** $\Rightarrow$ Pre-multiplicación (Izquierda).
- Transformaciones por **Columna** $\Rightarrow$ Post-multiplicación (Derecha).

$$B = \underbrace{P}_{\text{Filas}} \cdot A \cdot \underbrace{Q}_{\text{Columnas}}$$

Donde P y Q son matrices regulares (invertibles).

1.10. Relaciones de Equivalencia

Sean $A, B \in M_{n\times m}$ matrices del mismo tamaño.

1. **Equivalencia General:** Mismo rango.
$$B = P \cdot A \cdot Q \quad (P, Q \text{ regulares})$$
2. **Semejanza (Matrices Cuadradas):** Representan el mismo endomorfismo en distintas bases.
$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad (\text{Mismo determinante y traza})$$
3. **Congruencia (Matrices Cuadradas/Simétricas):** Relacionadas con formas bilineales.
$$B = P^t \cdot A \cdot P$$

1.11. Cálculo de Matrices de Paso (Método de Gauss)

Para obtener las matrices P (filas) y Q (columnas) que satisfacen $B = P \cdot A \cdot Q$, utilizamos el método de la matriz ampliada o de bloques.

Esquema General:
$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_n & A & I_m \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Reducción}]{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{c|c|c} P & B & Q \end{array}\right)$$

Reglas de operación:

- Las operaciones fila realizadas para reducir A se aplican simultáneamente a I_n (izquierda).
- Las operaciones columna realizadas para reducir A se aplican simultáneamente a I_m (derecha).
- Al final, la matriz central B será la forma normal o escalonada de A.

1.12. Forma normal

$\forall A \in M_{n\times m}$ se puede llegar a una expresión mediante transformaciones elementales del tipo:
$$A \sim (I_r); \quad \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (I_r \mid 0)\,; \quad \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
Donde $rg(A) = r \to I_r = I$ de orden r (El tamaño es el rango de A).

Algoritmo de reducción

Conceptos previos:

- **Pivote:** entrada principal.
- **Columna pivote:** la que tiene pivote ($\exists$ pivote).

Pasos:

1. Buscando columna $\neq 0$ más a la izquierda y pivote lo más alto posible.
2. Debajo del pivote se hacen ceros.
3. Se pasa a la siguiente columna ignorando la primera fila y se repite el proceso.
4. (Gauss-Jordan) Tras hacer todo ceros abajo, se repite al revés para hacer ceros sobre los pivotes.

1.13. Cálculo de la Matriz Inversa

El método más común es el de Gauss-Jordan, utilizando la matriz ampliada. El objetivo es transformar la matriz original en la identidad mediante operaciones elementales.

1.13.1. Método por Filas (Gauss)

Se coloca la matriz identidad a la derecha. Tras aplicar Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Reducción}} \left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right)$$

1.13.2. Método por Columnas

Se coloca la matriz identidad abajo.

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hline I_m \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Reducción}} \left(\begin{array}{c} I_m \\ \hline A^{-1} \end{array}\right)$$

1.14. Determinantes

El determinante es una función que asigna un escalar a una matriz cuadrada.

1.14.1. Propiedades Fundamentales

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. **Traspuesta:** El determinante no varía al trasponer.

$$\det(A) = \det(A^t)$$

2. **Homogeneidad (Escalar en matriz):** Si se multiplica toda la matriz por λ:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

(*El escalar sale elevado al orden de la matriz*).

3. **Producto:** El determinante del producto es el producto de determinantes.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

4. **Inversa:** Si A es regular $(\det(A) \neq 0)$:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{-1}$$

5. **Permutación de líneas:** Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

$$F_i \leftrightarrow F_j \implies \det(A') = -\det(A)$$

6. **Multilinealidad (Escalar en línea):** Si se multiplica **solo una** fila (o columna) por λ, el determinante queda multiplicado por λ.

$$F_i \to \lambda F_i \implies \det(A') = \lambda \det(A)$$

7. **Invariancia (Combinación lineal):** Si a una fila (o columna) se le suma una combinación lineal de las otras paralelas, el determinante **no varía**.

$$F_i \to F_i + \lambda F_j \implies \det(A') = \det(A)$$

8. **Determinante Nulo:** El determinante es 0 si:
   - Una línea es nula (0).
   - Dos líneas paralelas son iguales o proporcionales.
   - Una línea es combinación lineal de las otras (Sistema Ligado).

1.14.2. Matriz Adjunta

Dada una matriz cuadrada A, definimos sus elementos adjuntos a partir de los menores complementarios.

- **Menor complementario** (M_{ij})**:** Es el determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A.
- **Cofactor o Adjunto** (α_{ij})**:** Es el valor del menor complementario acompañado de un signo que depende de su posición (suma de fila y columna).

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- **Matriz Adjunta** $(Adj(A))$**:** Es la matriz formada por estos cofactores.

$$Adj(A) = (\alpha_{ij})$$

Signos de los cofactores: Siguen un patrón alternado similar a un tablero de ajedrez:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Cálculo de la Matriz Inversa: La matriz inversa se puede obtener trasponiendo la matriz adjunta y dividiendo por el determinante:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{|A|} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

1.14.3. Cálculo de determinantes

Existen varios métodos para calcular el valor del determinante dependiendo del orden de la matriz.

1. Regla de Sarrus (Orden 2 y 3)

Para matrices 2×2**:** Se multiplican los elementos de la diagonal principal y se restan los de la secundaria.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Para matrices 3×3**:** Se utiliza el esquema de diagonales (productos sumados menos productos restados).

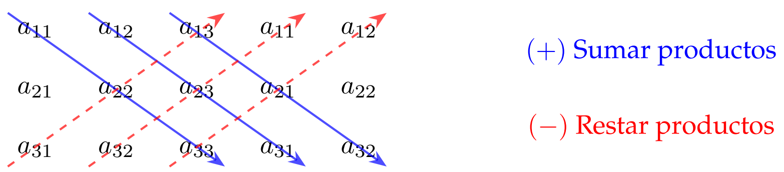

Figura 1.3: Regla de Sarrus extendida

2. Desarrollo por Adjuntos (Laplace)

Es útil para matrices de orden $n > 3$. Consiste en reducir el cálculo a determinantes de orden menor.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \text{Adj}_{ij} \quad \text{(Desarrollo por la fila } i\text{)}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \text{Adj}_{ij} \quad \text{(Desarrollo por la columna } j\text{)}$$

Donde $\text{Adj}_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ (Cofactor).

3. Método de Chio (Hacer ceros)

Consiste en utilizar las propiedades de los determinantes para simplificar la matriz antes de aplicar adjuntos.

- Se escoge una línea (fila o columna).
- Se hacen combinaciones lineales para convertir todos los elementos de esa línea en ceros, excepto uno (el pivote).
- Se desarrolla por adjuntos esa línea, quedando un único término:

$$|A| = a_{pik} \cdot (-1)^{p+k} \cdot |M_{pk}|$$

4. Triangulación (Gauss)

Consiste en aplicar transformaciones elementales hasta convertir A en una matriz triangular (superior o inferior).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Figura 1.4: Determinante de matriz triangular

Nota sobre transformaciones: Al triangular, hay que ajustar el determinante final según las operaciones usadas:

- $F_i \leftrightarrow F_j$: Multiplicar por (-1).
- $F_i \to kF_i$: Dividir el resultado por k.
- $F_i \to F_i + kF_j$: El determinante no cambia.

Capítulo 2

Tema 2: Espacios Vectoriales

2.1. Estructura de Espacio Vectorial

Un conjunto E es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (generalmente $\mathbb{R}$) si dispone de dos operaciones que cumplen ciertas propiedades:

1. **Interna (Suma):**
   $E \times E \to E$
   $(x, y) \to x + y$
   - Asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$.
   - Conmutativa: $u + v = v + u$.
   - Elemento neutro: Existe 0_E tal que $u + 0 = u$.
   - Elemento opuesto: Para todo u existe $-u$ tal que $u + (-u) = 0$.
2. **Externa (Producto por escalar):**
   $\mathbb{K} \times E \to E$
   $(\lambda, x) \to \lambda \cdot x$
   - Distributiva respecto a la suma de vectores: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
   - Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.
   - Asociativa mixta: $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
   - Elemento unidad: $1 \cdot u = u$.

2.1.1. Propiedades básicas

Se verifican para todo vector $\vec{x} \in E$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. **Producto por el escalar cero:** El escalar 0 anula cualquier vector.
$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$
2. **Producto por el vector nulo:** Cualquier escalar por el vector nulo da el vector nulo.
$$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$
3. **Propiedad de anulación:** Si un producto es nulo, alguno de los factores es cero.
$$\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \implies \lambda = 0 \quad \text{ó} \quad \vec{x} = \vec{0}$$
4. **Relación con el opuesto:** El signo menos se puede mover libremente.
$$(-\lambda) \cdot \vec{x} = -(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot (-\vec{x})$$

2.1.2. Sistema de vectores

Se define un sistema de vectores como un conjunto finito de vectores pertenecientes al espacio vectorial:

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Ejemplo: Sea el siguiente sistema de matrices 2×2:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

El **cardinal** de este sistema es 3 (contiene tres elementos o vectores).

2.1.3. Conceptos Clave

- **Combinación Lineal (C.L.):** Un vector v es C.L. de S si existen escalares λ_i tales que:

$$v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

- **Sistema Generador ($L(S)$):** Es el conjunto de todas las combinaciones lineales de S. También llamado **Envolvente**.

$$L(S) = \{\alpha x_1 + \cdots + \lambda x_n \mid \alpha, \dots, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- **Dependencia Lineal:**
  - **Libre (Linealmente Independiente - L.I.):** La única forma de obtener el vector $\vec{0}$ es que todos los escalares sean cero.

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \vec{0} \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

  - **Ligado (Linealmente Dependiente - L.D.):** Existe alguna combinación no trivial que da $\vec{0}$.

Propiedades de la Dependencia Lineal:

1. Si $x \neq \vec{0}$, el sistema $S = \{x\}$ es libre.
2. Si S es libre, todo subconjunto de S ($S'' \subset S$) es también libre.
3. Todo sistema que contenga el vector nulo ($\vec{0}$) es ligado.
4. Si S es ligado, cualquier sistema que lo contenga ($S \subset S'$) es también ligado.
5. Si un sistema es ligado, al menos un vector es C.L. de los demás.
6. Si S es libre y $S \cup \{x\}$ es ligado $\implies$ x es C.L. de S.

2.1.4. Equivalencia de Sistemas

Dos sistemas de vectores S_1 y S_2 son equivalentes si generan el mismo subespacio vectoral:

$$S_1 \sim S_2 \iff L(S_1) = L(S_2)$$

Se pueden obtener uno a partir del otro mediante transformaciones elementales de fila.

2.1.5. Obtención de ecuaciones

Para caracterizar un subespacio generado por un sistema de vectores S, el procedimiento estándar consiste en pasar de los generadores a las ecuaciones implícitas siguiendo este esquema:

$$\text{Generadores} \xrightarrow{\text{Gauss}} \text{Paramétricas} \xrightarrow{\text{Eliminar Parámetros}} \text{Implícitas}$$

Ejemplo práctico: Sea el sistema $S = \{(1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$.

1. **Reducción por Gauss:** Colocamos los vectores en una matriz y la escalonamos para encontrar una base simplificada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Los vectores base obtenidos son $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

2. **Ecuaciones Paramétricas:** Expresamos el subespacio $L(S)$ como combinación lineal de la base.

$$L(S) = \{\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

   Igualando componentes a un vector genérico (x, y, z):

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha + \beta \end{cases}$$

3. **Ecuaciones Implícitas:** Eliminamos los parámetros α y β. Sustituyendo x e y en la tercera ecuación:

$$z = -x + y \implies \boxed{x - y + z = 0}$$

Relación de dimensiones:

- $\text{Dim}(S) =$ nº parámetros libres.
- Nº ec. implícitas $= \text{Dim}(E) - \text{Dim}(S)$.

2.1.6. Base y Dimensión

- **Base:** Un sistema que es a la vez Generador y Libre. Para obtenerla dados varios vectores simplemente se busca la matriz reducida.
- **Dimensión:** El número de vectores que forman una base (cardinal de la base).

$$\dim(E) = \text{nº parámetros libres} + \text{nº ec. independientes}$$

2.2. Subespacios Vectoriales

Sea E un espacio vectorial. Un subconjunto $V \subset E$ es un subespacio vectorial si no es vacío y mantiene las mismas leyes de composición que E.
Condiciones:

1. Cerrado para la suma y producto por escalar:

$$\forall x, y \in V; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \implies \lambda x + \mu y \in V$$

2. Contiene al elemento neutro:

$$\vec{0} \in V$$

Nota: Generalmente, si se trabaja en implícitas, un subespacio viene definido por ecuaciones lineales homogéneas. También es subespacio si se puede escribir como $L(S)$ (envolvente lineal).

2.2.1. Intersección de Subespacios

Dados $V_1, V_2 \in E$, la intersección se define como:

$$V_1 \cap V_2 = \{x \in E \mid x \in V_1 \text{ y } x \in V_2\}$$

La intersección es siempre un **Subespacio Vectorial**.

Cálculo (Implícitas): Si tenemos las ecuaciones implícitas de V_1 y V_2, la intersección se calcula juntando todas las ecuaciones (se añaden las de ambos).

$$V_1 \cap V_2 \equiv \text{Se añaden ecuaciones implícitas de ambos} \rightarrow \text{Paramétricas}$$

Ejemplo:

$$V_1 = \left\{ (x, y, z) \;/\; \begin{matrix} x + y = 0 \\ z - y = 0 \end{matrix} \right\} \qquad V_2 = \{(x, y, z) \;/\; y + z = 0\}$$

La intersección es el sistema formado por la unión de las ecuaciones:

$$V_1 \cap V_2 = \left\{ (x, y, z) \;/\; \begin{matrix} x + y = 0 \\ z - y = 0 \\ y + z = 0 \end{matrix} \right\}$$

- Si la intersección es solo el $\vec{0}$ ($V_1 \cap V_2 = \{0\}$), los espacios son **disjuntos**.

2.2.2. Suma de Subespacios

Se define como el conjunto formado por la suma de vectores de cada subespacio:

$$V_1 + V_2 = \{x \in E \mid x = x_1 + x_2 \text{ con } x_1 \in V_1 \text{ y } x_2 \in V_2\}$$

Procedimiento de cálculo: Para hallar la suma, se unen los sistemas generadores de ambos subespacios.

$$\left. \begin{matrix} x_1 \to \text{paramétricas} \to L\{u_{v1}\} \\ x_2 \to \text{paramétricas} \to L\{u_{v2}\} \end{matrix} \right\} \to L\{u_{v1} \cup u_{v2}\} \to \text{Reducir (Gauss)} \to \text{Implícitas}$$

2.2.3. Dimensiones y Tipos de Suma

Cardinal: El número de elementos de cualquier base se llama dimensión del subespacio.
Fórmula de Grassmann (Fórmula de las dimensiones):

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$$

Suma Directa ($\oplus$): Dos subespacios son suma directa si son disjuntos.

$$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 \iff V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

Suplementarios: Dos subespacios son suplementarios si su suma directa es todo el conjunto total E.

$$V_1 \oplus V_2 = E \iff \begin{cases} V_1 \cap V_2 = \{0\} \\ V_1 + V_2 = E \end{cases}$$

2.2.4. Relación Ecuaciones - Dimensión

- **Si el sistema está en implícitas:**

$$\text{nº ecuaciones L.I.} = \dim(\text{Espacio}) - \dim(\text{Subespacio})$$

- **Si el sistema está en paramétricas:**

$$\text{nº parámetros} = \dim(\text{Subespacio}) = \text{nº vectores base}$$

2.3. Coordenadas y Cambio de Base

2.3.1. Coordenadas

Dada una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, cualquier vector x tiene una representación única:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Los escalares $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de x en base B.

2.3.2. Cambio de base

Dadas dos bases $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ de un espacio E con dimensión n. Sea $\bar{x} \in E$. Sus coordenadas se expresan como:

- En la base B: $\bar{x}_B = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$.
- En la base B': $\bar{x}_{B'} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$.

Construcción de la matriz: Conocida la expresión de los vectores de la nueva base (B') en función de los de la antigua (B):

$$\overline{v}_i = a_{1i}\overline{u}_1 + \dots + a_{ni}\overline{u}_n \quad (i = 1, \dots, n)$$

La matriz se forma colocando estos coeficientes (a_{ji}) por columnas. Es decir, la columna i-ésima contiene las coordenadas del vector $\overline{v}_i$ (de la base B') expresadas en la base B:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(Coordenadas vectores } B' \text{ en la base } B\text{)}$$

Expresión del cambio de base: La relación entre las coordenadas de un mismo vector en ambas bases queda definida por:

$$\overline{x}_B = M_B^{B'} \cdot \overline{x}_{B'}$$

Donde $M_B^{B'}$ es la matriz de cambio de base de B' a B.

Propiedades:

- La matriz es **regular** (invertible).
- La matriz inversa realiza el cambio contrario:
$$(M_B^{B'})^{-1} = M_{B'}^{B}$$
- El cambio de base es una aplicación lineal identidad.

2.3.3. Cambio de base general (Matrices no canónicas)

Si queremos hallar la matriz de paso de una base B_1 a otra base B_2 $(M_{B_2}^{B_1})$, y conocemos sus expresiones respecto a una base común (generalmente la canónica B o C):

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[dr, "M_B^{B_1}"] \arrow[dd, dashed, "M_{B_2}^{B_1}"'] & \\
& \text{Base } B \text{ (Canónica)} \\
B_2 \arrow[ur, "M_B^{B_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Relación entre bases no canónicas

Fórmula (Opción 1): Se obtiene componiendo el camino: primero vamos de B_1 a B, y luego de B a B_2 (inversa).

$$M_{B_2}^{B_1} = (M_B^{B_2})^{-1} \cdot M_B^{B_1}$$

Cálculo por reducción (Opción 2): En lugar de calcular la inversa explícitamente y multiplicar, es más eficiente resolverlo mediante transformaciones elementales por filas (Gauss-Jordan). Se coloca la matriz destino a la izquierda y la origen a la derecha:

$$\left(M_B^{B_2} \;\middle|\; M_B^{B_1} \right) \xrightarrow{\text{Filas}} \left(I \;\middle|\; M_{B_2}^{B_1} \right)$$

2.4. Espacio Nulo, de Filas y Columnas

2.4.1. Espacio Nulo ($Nul(A)$ o $N(A)$ o $Ker(A)$)

Se define como el conjunto de vectores que hacen cero al sistema homogéneo:

$$Nul(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\bar{x} = \bar{0}\} \subset \mathbb{R}^m$$

Cálculo y Dimensión:

- Las ecuaciones de $Nul(A)$ provienen de resolver $A\bar{x} = 0 \to B\bar{x} = 0$ (donde B es la matriz reducida). Las ecuaciones libres en implícitas definen el espacio.
- El número de ecuaciones independientes es el rango, por tanto:

$$\text{nº ecs } Nul(A) = \text{rg}(A) \implies \dim(Nul(A)) = m - \text{rg}(A)$$

2.4.2. Espacio de Filas ($Fil(A)$ o $F(A)$)

Es el subespacio generado por las filas de la matriz:

$$Fil(A) = L\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \rangle \subset \mathbb{R}^m$$

Cálculo de la Base: Se realiza mediante reducción por filas:

$$A \xrightarrow{F} B \quad \text{donde } B = \begin{pmatrix} \Xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La **Base de Fil(A)** son las filas no nulas de la matriz reducida B.
- $\dim(Fil(A)) = \text{rg}(A)$.

2.4.3. Espacio de Columnas ($Col(A)$ o $C(A)$)

Es el subespacio generado por las columnas de la matriz:

$$Col(A) = L\langle \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \rangle$$

Cálculo de la Base (2 métodos):

1. **Por trasposición:** Se reduce la traspuesta por filas.

$$A^t \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \Xi \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{Base de } Col(A) \text{ (filas no nulas resultantes).}$$

2. **Por columnas pivote:** Se identifican las columnas pivote en la matriz escalonada (son linealmente independientes).

$$\text{Base de } Col(A) \to \text{Columnas originales de } A \text{ correspondientes a los pivotes.}$$

Propiedades:

- $\dim(Col(A)) = \text{rg}(A)$.
- Relación con filas: $Col(A) = Fil(A^t)$ y $Col(A^t) = Fil(A)$.
- **Teorema Rango-Nulidad:**

$$\dim(Nul(A)) + \dim(Col(A)) = m \quad \text{(nº columnas)}$$

2.5. Aplicaciones Lineales

Una función $f : E \to F$ es lineal si respeta la estructura de espacio vectorial:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

2.5.1. Clasificación

- **Inyectiva:** Elementos distintos tienen imágenes distintas ($\text{Ker}(f) = \{0\}$).
- **Sobreyectiva:** La imagen coincide con el espacio final ($\text{Im}(f) = F$).
- **Biyectiva (Isomorfismo):** Inyectiva y sobreyectiva.
- **Endomorfismo:** Aplicación de un espacio en sí mismo ($E \to E$).

2.5.2. Núcleo e Imagen

- **Núcleo (Ker):** $\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.
- **Imagen (Im):** $\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.

Teorema de la Dimensión:

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

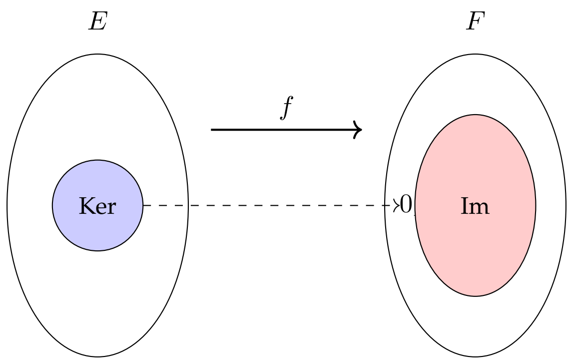

Figura 2.2: Relación Kernel - Imagen

2.6. Matriz de una Aplicación Lineal

Una aplicación lineal queda determinada por las imágenes de una base. Si $B_E = \{e_i\}$ y B_F son bases, la matriz asociada A contiene en sus columnas las coordenadas de $f(e_i)$ en la base B_F.

$$Y = A \cdot X$$

2.6.1. Cambio de Base en Aplicaciones

Si cambiamos las bases en E (matriz P) y en F (matriz Q), la nueva matriz de la aplicación M es:

$$M = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

Si es un endomorfismo ($E = F$) y usamos la misma base:

$$M = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad \text{(Matrices semejantes)}$$

$$\begin{tikzcd}
E_B \arrow[r, "A"] & F_C \\
E_{B'} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "M"'] & F_{C'} \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

Figura 2.3: Diagrama de cambio de base

2.7. Operaciones y Endomorfismos

- **Suma y Producto por escalar:** Se traducen en suma y producto de sus matrices asociadas.
- **Composición:** $(g \circ f)(x) \to$ Producto de matrices $B \cdot A$ (ojo al orden: primero aplica f, luego g).

2.7.1. Invariantes

En un endomorfismo $f : E \to E$:

- **Subespacio Invariante:** $f(V) \subseteq V$.
- **Vector Invariante:** $f(v) = v \iff (A - I)v = 0$.
- **Autovector:** $f(v) = \lambda v$. El subespacio generado por estos vectores se llama subespacio propio.

Capítulo 3

Semejanza y Diagonalización

3.1. Semejanza

Dos matrices A y B son semejantes si existe P regular tal que $B = P^{-1}AP$. Propiedades conservadas: Determinante, Traza, Polinomio Característico.

3.2. Diagonalización

Una matriz A es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D.

1. **Autovalores (λ):** Raíces de $|A - \lambda I| = 0$ (Polinomio característico).
2. **Autovectores:** Soluciones de $(A - \lambda I)x = 0$. Forman el subespacio propio N_λ.

Condición de diagonalización: Para todo λ, la multiplicidad algebraica (veces que aparece como raíz) debe ser igual a la multiplicidad geométrica ($\dim(N_\lambda)$).

Fórmula Polinomio Característico (3x3):

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \text{Tr}(A)\lambda^2 - (\text{Suma Menores Principales})\lambda + |A|$$

Capítulo 4

Espacio Vectorial Euclídeo

4.1. Producto Escalar

Aplicación $f : E \times E \to \mathbb{R}$, denotada $\langle u, v\rangle$ o $u \cdot v$, que es bilineal, simétrica y definida positiva.

4.1.1. Matriz de Gram (G)

Dada una base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $G_{ij} = u_i \cdot u_j$.

$$u \cdot v = X^t G Y$$

En base ortonormal, $G = I$.

4.1.2. Norma y Ángulo

- Norma: $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$.
- Ángulo: $\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}$.
- Ortogonalidad: $u \perp v \iff u \cdot v = 0$.

4.2. Ortogonalización de Gram-Schmidt

Permite obtener una base ortogonal a partir de una base cualquiera, restando las proyecciones sobre los vectores anteriores.

4.3. Proyección Ortogonal

Dado un subespacio V, todo vector u se descompone como $u = P_V(u) + P_{V^\perp}(u)$.

$$P_V(u) = \sum \frac{u \cdot v_i}{||v_i||^2} v_i \quad \text{(si } \{v_i\} \text{ es base ortogonal de } V\text{)}$$

4.4. Producto Vectorial (en $\mathbb{R}^3$)

Operación exclusiva de $\mathbb{R}^3$ que devuelve un vector perpendicular a los dos dados.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

4.5. Matrices Simétricas y Ortogonales

- **Matriz Ortogonal (Q):** $Q^t = Q^{-1}$. Sus columnas son base ortonormal. Conserva el producto escalar.
- **Matriz Simétrica (S):** $S^t = S$.
  - Teorema Espectral: Toda matriz simétrica real es diagonalizable y sus autovectores de autovalores distintos son ortogonales.
  - Existe Q ortogonal tal que $Q^t S Q = D$.

4.6. Isometrías

Transformaciones que conservan distancias (su matriz asociada en base ortonormal es ortogonal). Se clasifican por su determinante.

4.6.1. Isometrías en $\mathbb{R}^3$

Directas ($|A| = 1$): Giros

Conservan la orientación.

- **Identidad:** $Tr(A) = 3$.
- **Giro (Rotación):** Alrededor de un eje $N(1)$.

$$Tr(A) = 1 + 2\cos\alpha$$

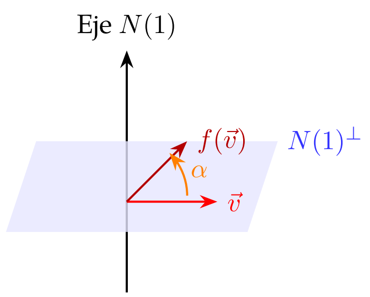

Figura 4.1: Giro en $\mathbb{R}^3$

Inversas ($|A| = -1$): Simetrías

Invierten la orientación.

- **Simetría Central:** $A = -I$, $Tr(A) = -3$.
- **Simetría Especular (Plano):** Respecto a plano $N(1)$. $Tr(A) = 1$.
- **Giro-Simetría:** Giro + Reflexión. $Tr(A) = 2\cos\alpha - 1$.

4.6.2. Isometrías en $\mathbb{R}^2$

1. **Giro (Origen):** $|A| = 1$, $Tr(A) = 2\cos\alpha$. Matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
2. **Simetría Axial (Recta):** $|A| = -1$, $Tr(A) = 0$. Matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

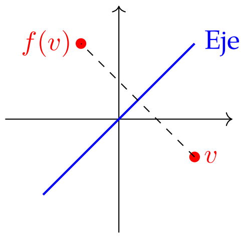

Figura 4.2: Simetría Axial ($\mathbb{R}^2$)

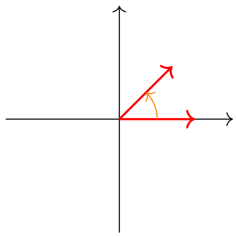

Figura 4.3: Giro ($\mathbb{R}^2$)