

# Apuntes Medidas eléctricas

Bogurad Barański Barańska      Adrián Teixeira de Uña

16 de febrero de 2024

# 1. Tema 1: Introducción y generalidades sobre metrología

## 1.1. Definiciones

1. **Magnitud:** Atributo de un cuerpo que se puede distinguir cualitativamente y determinado cuantitativamente.
2. **Magnitud básica:** Magnitud que se acepta como independiente.
3. **Magnitud derivada:** Se define en a través de las magnitudes básicas.
4. **Unidad de medida:** Magnitud adoptada por convenio con la que se comparan magnitudes de la misma naturaleza.
5. **Unidad coherente:** Unidad derivada expresada como producto de potencias de unidades básicas.
6. **Sistema de unidades:** Conjunto de unidades básicas y derivadas. Cabe destacar el Sistema Internacional de Unidades que es un sistema coherente de unidades adaptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas.
7. **Valor de una magnitud:** Expresión cuantitativa de una magnitud. Se expresa como una unidad de medida multiplicada por un número.
8. **Valor verdadero:** Valor que se obtendría a través de una medición perfecta de una magnitud. Este valor nunca se puede determinar, todas las medidas introducen incertidumbre.
9. **Valor convencionalmente verdadero:** Valor más probable que toma una magnitud. Se debe acompañar con su incertidumbre. Normalmente se corresponde con la media.
10. **Medida:** Conjunto de operaciones para determinar el valor de una magnitud.
11. **Medición general:** Se determina el valor de una magnitud sobre la que se realiza alguna acción de control. Se realiza mediante aparatos convencionales.
12. **Medición metrológica:** Procedimiento plenamente especificado con el fin de calibrar o verificar un aparato. Se requieren aparatos patrones.
13. **Mensurando:** Magnitud sometida a medición.
14. **Magnitud de influencia:** Magnitudes que no son el objetivo de la medida pero alteran la medición.
15. **Señal de medida:** Magnitud que mantiene una relación funcional con el mensurando y lo representa.

16. **Cadena de medida**: Conjunto de instrumentos y personas que intervienen en una medición.
17. **Valor nominal**: Valor aproximado de una característica de un instrumento.
18. **Campo de medida (CM)**: Valor máximo que puede indicar un aparato.
19. **Rango de medida**: Intervalo en el que el error debido al instrumento de medida se mantiene en unos límites especificados.
20. **Constante de medida**: Número por el que debe multiplicarse la medida de un instrumento para obtener el valor del mensurando.

Normalmente en un aparato analógico:

$$k_m = \frac{CM}{Divisiones}$$

21. **Estabilidad**: Aptitud de un instrumento para mantener constantes sus características a lo largo del tiempo.
22. **Transparencia**: Aptitud de un instrumento para no alterar el mensurando.
23. **Deriva**: Variación lenta de una característica del instrumento por el paso del tiempo, mal uso o desgaste.
24. **Zona muerta**: Máxima variación de la señal de entrada sin que se perciba respuesta en la salida.
25. **Sensibilidad**: Variación de la salida ante un incremento de la entrada. No tienen porque ser siempre iguales.

$$S(x) = \frac{dx}{dy} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

26. **Resolución**: Menor diferencia que puede apreciarse en un aparato de manera significativa.
  - En un aparato analógico suele tomarse como  $E/2$  y como máximo  $E/4$  donde  $E$  es una división de escala.
  - En un aparato digital se suele tomar su dígito menos significativo.



Figura 1: Comparativa de resoluciones

27. **Veracidad**: Concordancia entre la media de un conjunto de medidas y un valor de referencia. Normalmente se comprueba si un valor nominal es correcto.
28. **Precisión**: Capacidad de un instrumento para dar valores agrupados al repetir medidas.
29. **Exactitud**: Grado de concordancia entre un valor medido y el verdadero. Requiere veracidad y precisión.
30. **Sesgo**: Diferencia entre la media de las medidas y el valor de referencia.
31. **Linealidad**: Indica la evolución del sesgo a lo largo del campo de medida del aparato.

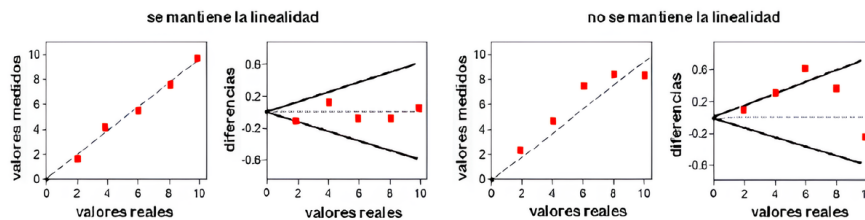


Figura 2: Comparativa de resoluciones

32. **Índice de clase**: Número que informa sobre la exactitud de un aparato según su calidad metrológica. El índice se define como:

$$C_A = \frac{100\alpha}{CM} \rightarrow \alpha = \text{Error absoluto máximo}$$

Como el índice solo da información del error absoluto, el punto donde se calcula es aquel en el que el error relativo es mínimo. Viéndolo gráficamente:

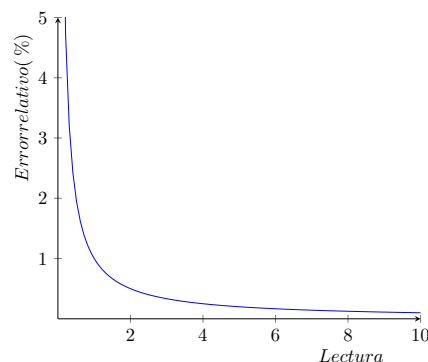


Figura 3: Gráfica del error del aparato a lo largo del campo de medida

Este índice sirve para evaluar la incertidumbre intrínseca de un instrumento de medida.

	Laboratorio	Uso industrial	Indicadores
$C_A$	0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.5	1 - 1.5 - 2.5	5

Cuadro 1: Tabla de clases de aparatos

En aparatos digitales la clase también suele incluir un termino proporcional a la lectura del aparato:

$$C_D = X \%CM + Y \%L$$

33. **Incetidumbre de medida**: Parámetro asociado al resultado de una medición. Caracteriza la dispersión de los valores. Se expresa acompañando a la medida mediante la incertidumbre expandida (normalmente  $k=2$ ).

$$U(x) = ku(X)$$

- $U(x) \rightarrow$  Incertidumbre expandida
- $k \rightarrow$  Factor de cobertura. Mide el nivel de confianza sobre el mensurando.

k	1	2	3	4	5
Porcentaje datos	68.27 %	95.45 %	99.73 %	99.994 %	99.99994 %

Cuadro 2: Tabla de intervalos cobretura

- $u(X) \rightarrow$  Incertidumbre sin expandir.

Normalmente la incertidumbre es el resultado de combinar diferentes componentes y se emplea para comparar la calidad de las medidas.

34. **Error de medida** : Diferencia entre el resultado de una medición y el valor real del mensurando.
35. **Error aleatorio**:Diferencia entre el resultado de una medición y la media de infinitas medidas en condiciones de repetibilidad.  
Para minimizar este error se deben emplear múltiples medidas y utilizar la media aritmética como estimador de la medición.
36. **Error sistemático**: Diferencia entre la media de infinitas medidas realizadas en condiciones de repetibilidad y el valor verdadero del mensurando. Si se conoce la causa del error puede eliminarse aplicando correcciones.

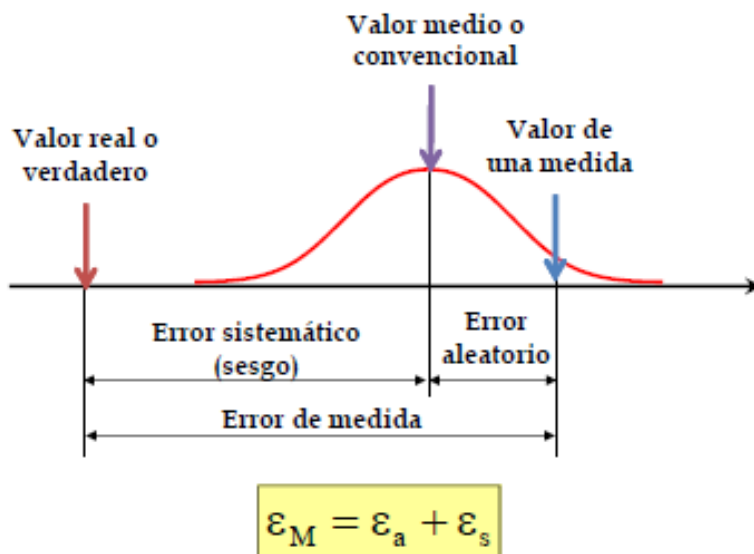


Figura 4: Errores representados gráficamente

37. **Tolerancia:** Intervalo de valores dentro del cual debe situarse el valor real de una magnitud para que se acepte como válida. Es un indicador de un elemento. Si el límite inferior  $LSE$  y superior  $LIE$  se encuentran equidistantes al valor nominal.

$$T = \pm \frac{LSE - LIE}{2}$$

## 1.2. Ley propagación de incertidumbres

1. Medidas independientes: Las variables  $x_i$  son independientes entre sí:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$u_y^2 = \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} u_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} u_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} u_i \right)^2$$

Tras hallar la incertidumbre a través de las incertidumbres sin expandir se expande mediante k.

2. Medidas correlacionadas: Cuando algunas variables están ligadas entre sí:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} u_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} r_{ij} u_i u_j$$

Donde  $r_{ij}$  son los coeficientes de correlación entre las variables.

### 3. Mediante errores porcentuales:

#### ■ Producto de variables:

$$y = x_1 x_2$$

##### • Sin correlación:

$$u_y^2 = (x_2 u_1)^2 + (x_1 u_2)^2$$

Dividiendo por:  $(x_1 x_2)^2$

$$u_{y(pu)}^2 = u_{1(pu)}^2 + u_{2(pu)}^2$$

##### • Con correlación:

$$u_{y(pu)}^2 = u_{1(pu)}^2 + u_{2(pu)}^2 + 2r u_{1(pu)} u_{2(pu)}$$

#### ■ Cociente de variables:

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

##### • Sin correlación:

$$u_y^2 = \left( \frac{u_1}{x_2} \right)^2 + \left( \frac{x_1 u_2}{x_2^2} \right)^2$$

Dividiendo por:  $\left( \frac{x_1}{x_2} \right)^2$

$$u_{y(pu)}^2 = u_{1(pu)}^2 + u_{2(pu)}^2$$

##### • Con correlación:

$$u_{y(pu)}^2 = u_{1(pu)}^2 + u_{2(pu)}^2 - 2r u_{1(pu)} u_{2(pu)}$$

#### ■ Potencia de una variable:

$$y = x^n$$

##### • Sin correlación:

$$u_y = n x^{n-1} u_x$$

Dividiendo por:  $x^n$

$$u_{y(pu)} = n u_{1(pu)}$$

Este método, se emplea para evitar el cálculo de derivadas parciales y se aplican combinados.

### 1.3. Estimación de la incertidumbre

1. Incertidumbres de tipo A: Se basan en datos de resultados experimentales. Se obtiene la media y la incertidumbre a partir de las medidas. La incertidumbre es la desviación típica de la media:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

$$\hat{s} = \sqrt{\sum_{n=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

- Medidas independientes:

$$u_A^2(\bar{x}) = \frac{\hat{s}^2}{n} \rightarrow u_A(\bar{x}) = \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

- Medidas dependientes:

$$u_A^2(\bar{x}) = \frac{\hat{s}^2}{n} + r \left( \frac{n-1}{n} \right) \hat{s}^2$$

2. Incertidumbres de tipo B: Se basan en datos de mediciones anteriores. Se suele estimar en base al alcance de la medida y al tipo de distribución. Requieren el conocimiento del aparato de medida.

El valor de  $\alpha$  se corresponde con el error absoluto máximo de la clase del aparato. Normalmente si no se dice nada la distribución se asume rectangular.

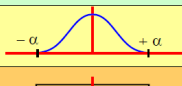

Distribución	Incertidumbre
Normal (menos común)	 $u_B = \frac{\alpha}{3}$
Rectangular (más general)	 $u_B = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$

Figura 5: Incertidumbre según la distribución



#### 1.4. Relación tolerancia incertidumbre

Las tolerancias son la base del principio de intercambiabilidad. Para ello, es necesario medir y así saber si una magnitud está en tolerancia. No obstante, si la incertidumbre es incorrecta puede dar lugar a fallos ocultos o falsos fallos.

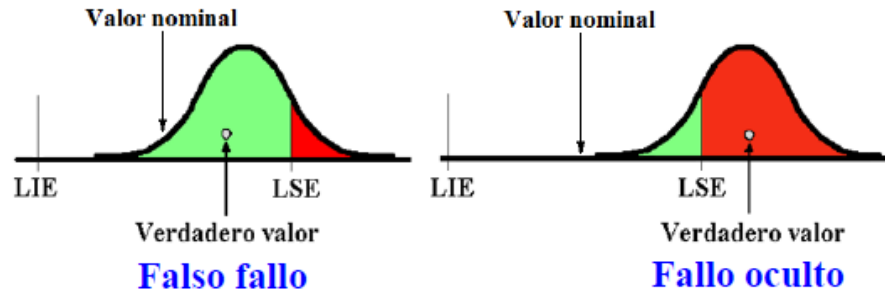


Figura 6: Problemas relación tolerancia incertidumbre

En la práctica se opta por rechazar cualquier mensurando que este fuera de la tolerancia efectiva:

$$T_{eff} = T - 2U$$

Si  $T$  está centrada, suele considerarse admisible mantener:

$$3 \leq \frac{T}{U} \leq 10$$

Si  $T$  no está centrada, entonces:

$$3 \leq \frac{T}{2U} \leq 10$$

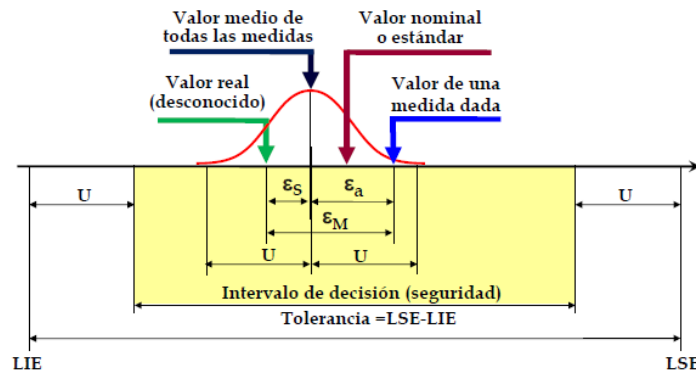


Figura 7: Problemas relación tolerancia incertidumbre

## 1.5. Resumen magnitudes estudiadas en el bloque

Si existe demasiada resolución las lecturas pueden tener más cifras significativas de las necesaria. No obstante, con poca resolución las variación no serán apreciables.

1. Aparatos analógicos

$$0,5 \leq \frac{U(k \geq 2)}{E} \leq 10$$

2. Aparatos digitales

$$0,5 \leq \frac{U}{E} = \frac{\alpha}{dms}$$

Donde  $dms$  es el dígito menos significativo.

## 1.6. Reglas redondeo

1. Si la última cifra es menor a 5 se redondea por defecto.
2. Si la última cifra es mayor a 5 se redondea por exceso.
3. Si la última cifra es 5.
  - a) Si la cifra anterior es par se redondea por defecto.
  - b) Si la cifra anterior es impar se redondea por exceso.

## 2. Tema 2: Verificación de equipos de medida eléctricos

### 2.1. Definiciones

1. **Patrón**: Medida de referencia destinada a definir una unidad de una magnitud. Se usa para detectar desviaciones en aparatos al verificarlos respecto al patrón.
2. **Patrón primario**: Patrones iniciales con los que se comparan los patrones secundarios. Uso muy restringido, destinado a los centros nacionales de metrología.
3. **Patrón secundario**: Se calibran con patrones primarios. Son menos precisos. Se emplean en laboratorios acreditados.
4. **Patrón industrial**: Se calibran con patrones secundarios. Uso en control de calidad.
5. **Trazabilidad**: Resultado de una medición que puede relacionarse con patrones de nivel más alto por medio de una cadena de comparaciones. Permite verificar un resultado.
6. **Calibración**: Operación que establece la relación entre los valores indicados por un patrón y el instrumento a calibrar.
7. **Verificación**: Operación con el fin de comprobar que un instrumento cumple sus especificaciones.
8. **Ajuste**: Acción correctora para evitar que los resultados queden fuera de los valores admisibles.

### 2.2. Cualidades de los aparatos de medida patrones

Están restringidos a laboratorios y centros nacionales de calibración. Tiene las siguientes características:

- Exactitud muy elevada
- Alta sensibilidad, resolución y linealidad
- Deriva temporal pequeña
- Alta transparencia

En función de la magnitud a medir existen distintos patrones.

- **Patrones de fuerza electromotriz:** Se emplean para medir tensiones con baja incertidumbre.

1. Pila Weston:

- Primer patrón de referencia.
- Su f.e.m es muy estable en el tiempo.
- Tiene deriva térmica.
- Si suministran corriente su f.e.m varia.

2. Diodos Zener:

- Tensiones más estables.
- Independiente de la temperatura.

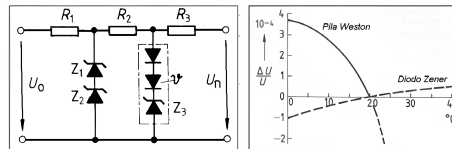


Figura 8: Patrón Zener

- **Patrones de resistencia:** Su clase corresponde a la diferencia en porcentaje entre el valor real y nominal.

Propiedades:

- Buena respuesta en frecuencia.
- Coeficiente de temperatura bajo.
- f.e.m térmica con el cobre baja.
- Elevada resistencia mecánica.

Tipos:

1. Arrollamiento bifilar: Tiene poca autoinducción, pero presenta elevada capacidad entre conductores. Se emplea para resistencias menores a  $100 \Omega$ .



Figura 9: Arrollamiento bifilar

2. Arrollamiento de Wagner: Se divide en secciones para reducir la tensión entre espiras y la capacidad. Se bobina en sentido inverso para reducir la autoinducción. Se fabrican para más de  $100\ \Omega$  y hasta unos  $100\ \text{kHz}$ .

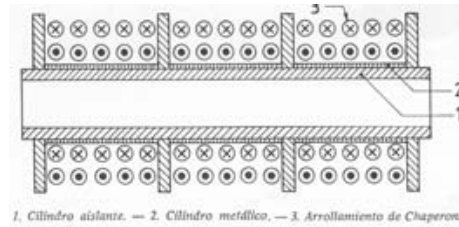


Figura 10: Arrollamiento Wagner

3. Caja de décadas: Su capacidad de ajuste es muy elevada. Resistencias mayores a  $10\ \text{k}\Omega$  en saltos de múltiplos de 10.

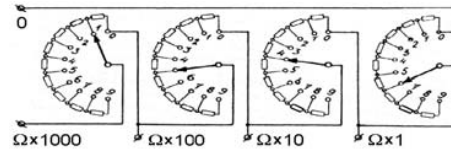


Figura 11: Caja de décadas

- **Patrones de inductancia**: Autoinducción independiente del medio. Baja resistencia óhmica y bajo coeficiente de temperatura.

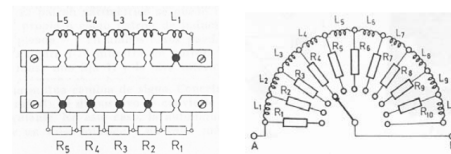
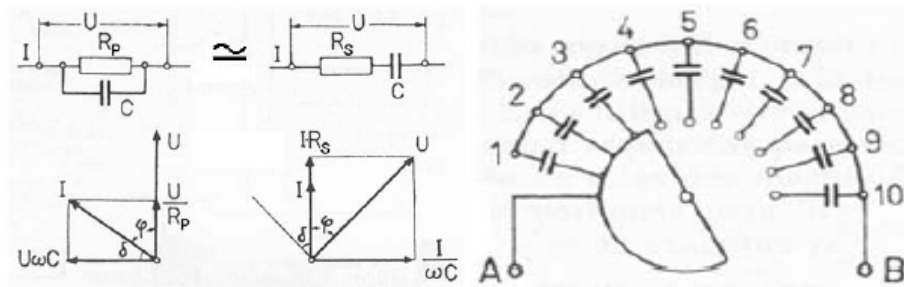


Figura 12: Patrones de inductancia

- **Patrones de capacidad**: Deben reunir las siguientes características:
  1. Gran inmunidad a los campos electromagnéticos ajenos al medio.
  2. Mínima variación a lo largo del tiempo y por efecto de la temperatura.
  3. Capacidad independiente de la frecuencia.
  4. Ángulo de pérdidas bajo: por tener una resistencia interna.



(a) Ángulo de pérdidas  $\tan(\delta)$

(b) Caja de décadas capacitiva

### 2.3. Verificación de un aparato de medida

Por la presencia de ruido o por el envejecimiento de los instrumentos de medida empiezan a aparecer defectos y es necesaria su calibración.

- La principal causa de incertidumbre proviene del aparato a contrastar (Incertidumbre tipo B).
- La mayor componente de tipo B la introduce el patrón.
- La magnitud debe ser ajustable en el rango del equipo a examen.
- Procedimiento:
  1. Los aparatos se montan para que queden sometidos por igual a la magnitud.
  2. La magnitud se varia a intervalos regulares de modo que sus indicaciones sean siempre divisiones exactas.
  3. Los valores del patrón son los verdaderos.
  4. La diferencia entre las lecturas de los aparatos son las desviaciones.
  5. En cada punto se calcula la desviación típica y la media.
  6. Se elabora un gráfico de correcciones y se elabora un gráfico de calibración.
  7. Conviene repetir al menos diez veces las medidas, cinco en sentido ascendente y cinco en sentido descendente para evitar la histéresis.
  8. Obtener la incertidumbre de contratación.

## 2.4. Criterio de rechazo de Chauvenet

Se emplea para discriminar datos erróneos fruto de despistes o un error en la toma de datos. Por ello, para evitar distorsiones se supone que los resultados siguen una distribución normal y se rechazan todas las medidas que verifiquen (proceso recursivo):

$$|x_i - \bar{x}| > K(n)\hat{s}$$

<b>n</b>	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>K(n)</b>	1.15	1.38	1.54	1.65	1.73	1.80	1.86	1.92	1.96
<b>n</b>	11	12	13	14	15	20	30	50	100
<b>K(n)</b>	2.00	2.04	2.07	2.10	2.13	2.24	2.40	2.57	2.81

Cuadro 3: Tabla factor K(n)

## 2.5. Resultados de una verificación

Se emplean gráficos de diferencias para mostrar la linealidad y el sesgo.

$$\text{Diferencia} = \text{Lectura del aparato a verificar} - \text{lectura del patrón}$$

$$\text{Corrección} = - \text{Diferencia}$$

1. **Curva de diferencias absolutas:** Da la corrección a introducir en las lecturas del aparato contrastado. **No debe unirse el cero de la escala con el primer punto de la calibración** para no asumir un error en una zona de alta incertidumbre.

$$\text{Medida} = \text{lectura} + \text{corrección}$$

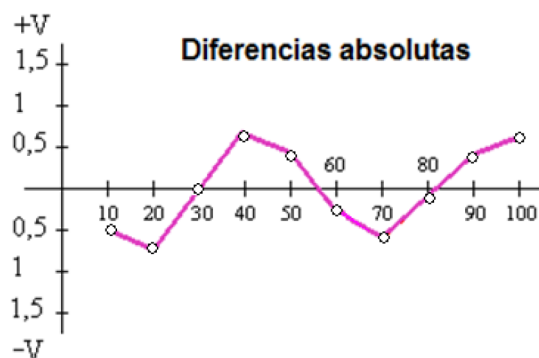


Figura 14: Gráfica diferencias absolutas

2. **Curva de diferencias relativas:** Permite valorar la importancia de cada error con respecto a la lectura. Los puntos se aproximan al eje conforme se avanza en el campo de medida.

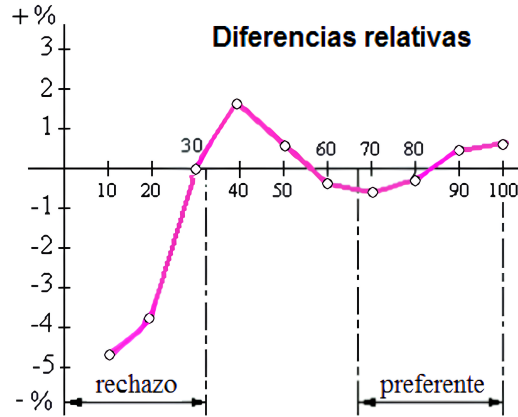


Figura 15: Gráfica diferencias relativas

## 2.6. Incertidumbre de contraste

$$U_c = \max \left[ k_c \sqrt{\frac{t^2 s_{ci}^2}{n_c} + \left( \frac{\Delta_i}{3} \right)^2} + u_p^2 + u_{RC}^2 + \text{Términos adicionales} \right]$$

- $k_c$  es el factor de cobertura.
- El factor  $t$  se obtiene de la tabla  $t$  student, si  $n_c < 10$ :

Número de medidas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Factor $t$	7.0	2.3	1.7	1.4	1.3	1.3	1.2	1.2	1.1

Cuadro 4: Tabla factor  $t$  student

- $s_{ci}$  es la desviación típica del punto de la escala  $i$ .
- $\Delta_i$  es la diferencia respecto al patrón en el punto  $i$ .
- $u_p$  incertidumbre sin expandir del aparato patrón:  $u_p = \frac{\alpha_p}{\sqrt{3}}$
- $u_{RC}$  componente debida a la resolución del aparato contrastado.
  - Analógicos

$$u_{RC} = \frac{E}{2\sqrt{3}} \text{ o } u_{RC} = \frac{E}{4\sqrt{3}}$$



- Digitales

$$u_{RC} = \frac{N dms}{2\sqrt{3}}$$

- $E$  es la división de una escala
- $N$  es un valor proporcionado por el fabricante. Normalmente  $N = 1$
- $dms$  dígito menos significativo.

## 2.7. Clase de un aparato verificado

El índice de clase facilita calcular incertidumbres. Permite fijar un límite de error máximo.

$$Clase = 100 \frac{U_c(k=2)}{CM}$$

## 2.8. Incertidumbre de la medida

La incertidumbre al medir con el aparato calibrado será, donde el subíndice  $M$  denota de la muestra:

$$U_M = k_M \sqrt{u_c^2 + t^2 \frac{s_M^2}{n_m} + \text{términos adicionales}}$$

No obstante, si se mide en condiciones similares a la de la calibración se habla de **capacidad óptima de medida (COM)** y se puede emplear la siguiente expresión:

$$U_M(COM) = k_M \sqrt{u_c^2 + \frac{s_c^2}{n_m} + \text{términos adicionales}}$$

Donde  $s_c$  es la desviación típica de la contratación.