БДЗ №1

РТ-23, Лазба Филипп Борисович

1	2	3	4	5	6	7	8

1. (a) Представить слагаемые и результат в виде *нормализованного* числа с плавающей точкой двойной точности: $(-1)^s \cdot 2^{e-1023} \cdot 1.f$, где $1.f$ записано в двоичном виде. (б) Если результат неточный (не умещается целиком в мантиссе), то указать относительную погрешность ошибки. Исходные данные в десятичной системе счисления.

$$1811,3828125 \cdot 2^{-67} - 224,11328125 \cdot 2^{-15}$$

$1811{,}3828125 * 2^{-67} - 224{,}11328125 * 2^{-15} =$

$= (-1)^0 * \underbrace{11100010011}_{11}.\underbrace{0110001}_{7} * 2^{-67} + (-1)^{-1} * \underbrace{11100000}_{8},\underbrace{00011101}_{8} * 2^{-15} =$

$=(-1)^0 * 1.\underbrace{11000100110110001}_{17}|\underset{35}{0\ldots0}| * 2^{966-1023} + (-1)^{-1} * 1.\underbrace{110000000011101}_{15}|\underset{37}{0\ldots0}| * 2^{1008-1023} =$

$=2^{-15} * (-1.\underbrace{110000000011101}_{15}|\underset{37}{0\ldots0}| + 1.\underbrace{11000100110110001}_{17}|\underset{37}{0\ldots0}| * 2^{-42}) =$

$=2^{-15} * (-1.\underset{15}{110000000011101}|\underset{37}{0\ldots0}| + 0.|0\ldots0|\underbrace{111000100110}_{12}\underbrace{110001}_{6}) =$

$=(-1)1 * 2^{1008-1023} * 1.\underbrace{1100000000111001}_{16}|\underset{24}{1\ldots1}|\underbrace{000111011001}_{12}\underbrace{001110}_{6}$

6 бит нужно отрезать

$1{,}11 * 2^{-54}{}_2$ — абс. погрешность $\sim 2^{-39}$ относительная погрешность

2. Написать последовательность инструкций Matlab, формирующих указанную матрицу. Около каждой инструкции указать промежуточный результат в виде матрицы. Разрешается использовать матричные функции (`eye`, `repmat`, `flipud` и др.). Использовать циклы нельзя.

Входные данные:	*Нужно получить:*
Целое $n \geqslant 20$	$\left.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right\} n \text{ строк}$

```
function bdz2(m)

A=1:m

B=fliplr(A(1,:))

A1=repmat(A,m,1)

B1=repmat(B, length(2:2:(m)),1)

A1(2:2:(m),:)=B1

end
```

3. (а) Локализовать корни уравнения (для каждого корня z_i указать отрезок $[a_i, b_i]$, содержащий только один этот корень z_i). Для *каждого* корня (б) построить итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходящийся к корню и (в) указать начальное значение x_0. Указание: локализацию проводить перебором интервалов $[a_i, b_i]$ или средствами математического анализа.

$$4x^3 - 6x + 1 = 0$$

```
function [res N] = sit(f,x0, eps)
syms x;
k=(subs(f,x0));
xp = x0; n=0;
while abs(k - xp) > eps
xp = k;
k = (subs(f,k));
n=n+1;
end
res = sym2poly(k);
N=n;
end
```

[0 1]

```
f = (4*x^3+1)/6;
[res N]=sit(f,0.25,0.0001)
res =    0.1699
N =     3
```

[1 2]

```
f = sqrt(1.5-0.25/x);
[res N]=sit(f,1.25,0.0001)
res =    1.1309
N =     3
```

[-1 2]

```
f = -sqrt(1.5-0.25/x);
[res N]=sit(f,-1.25,0.0001)
res =   -1.3008
N =     3
```

4. Известно, что интервалу $[a, b]$ принадлежит *только* корень x_* уравнения (другие корни интервалу не принадлежат). (а) Построить итерационный процесс Ньютона $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ и (б) обосновать какую из границ интервала $[a, b]$ можно принять за x_0. Указание: в пункте (б) выяснить знаки производных $f'(x)$ и $f''(x)$ и использовать соответствующую теорему.

$$\arccos x + x - 3/2 = 0, \quad x_* \in [0,5; 0,8]$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2} - 1}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left(\arccos(x) + x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} - 1}$$

$$f''(x) = -\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$f'(x) < 0, \qquad f''(x) < 0$ на $[0.5\ 0.8]$

$=> x_0 = b = 0.8$

5. (а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$ по узлам x_i. (б) Оценить сверху погрешность $|R_n(x)|$ приближения функции многочленом.

$$(\sin x)^2 + 2x \qquad x_0 = -1/2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1/2$$

```
>> X=[-1/2 0 1/2]

X =   -0.5000         0    0.5000

>> Y=(sin(X)).^2+2.*X

Y =   -0.7702         0    1.2298

>> syms x, forig=(sin(x)).^2+2.*x

forig =2*x + sin(x)^2

>> bdz5( X, Y,forig);
```

матрица Вардемонда

```
A =

    1.0000   -0.5000    0.2500

    1.0000         0         0

    1.0000    0.5000    0.2500
```

строим матрицу A^(-1)

```
A =

     0     1     0

    -1     0     1

     2    -4     2
```

коэфициенты полинома для вывода по степеням. Например: M(1)*x^3

0.9194   2.0000   0

полином Лагранжа

$$\frac{1035147181997661 * x^2}{125899906842624} + 2x \approx 0.9194 \cdot x^2 + 2x$$

(n+1) производная интерполируемой функции (нужна для оценки погрешности)

$$f^{(n+1)}(x) = -8 * cos(x) * sin(x)$$

максимум (n+1)й производной в числителе равен

$$Max\left|f^{(n+1)}(x)\right| = 3.3659$$

и достигается при x равном/приблизительно равном

$$x \approx -0.5000$$

полином омега(n+1)

$$\omega_{n+1} = x * (x - 1/2) * (x + 1/2)$$

максимум погрешности

$$|R_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\omega_{n+1} \leq 0.0269$$

6. Заданную функцию будут интерполировать на отрезке $[a, b]$ по чебышёвским узлам с заданной точностью $|R_n(x)| < \varepsilon$. Требуется (а) определить требуемое для заданной точности ε количество узлов (т.е. степень интерполяционного многочлена плюс 1) и (б) вычислить значения всех узлов и отметить их на действительной оси Ox (если узлов окажется много, ограничиться вычислением значений наименьших 10 узлов).

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{3x} \quad \text{на отрезке } [0,5; 2,5] \text{ с точностью } \varepsilon = 10^{-3}$$

syms x

f=sinh(x)./(3.*x)

epsilon=1e-3

ab=[0.5 2.5]

bdz6(f,ab,epsilon)

найдём n и Rx перебором

n = 4 $|R_n(x)| = 0.00012683$

$x_k = cos(\frac{\pi(2k-1)}{8}) + \frac{3}{2}$

$x_1 = 2.4239$

$x_2 = 1.8827$

$x_3 = 1.1173$

$x_4 = 0.57612$

7. Данные некоторого физического эксперимента представлены в таблице. Характер зависимости $y(x)$ заранее точно неизвестен. Есть предположения, что зависимость может быть линейной, квадратичной или кубической. (а) Методом среднеквадратического приближения построить три типа приближения $y(x)$ (т.е. аппроксимирующие многочлены первой, второй и третьей степеней). (б) Для каждого аппроксимирующего многочлена вычислить среднеквадратическое отклонение $\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(y(x_i)-y_i)^2}$. (в) Выбрать минимальное с.к.о. и указать соответствующий ему тип зависимости (линейная, квадратичная или кубическая), т.е. наиболее вероятный в проведённом эксперименте.

x	-3	-2	-1	0	1
y	-11.5	-6.8	-2.3	-0.9	-0.9

X = -3 -2 -1 0 1

Y = -11.5000 -6.8000 -2.3000 -0.9000 -0.9000

аппроксимация многочленом 1 степени

полином:

p =(b + 9/10)^2 + (a + b + 9/10)^2 + (b - 3*a + 23/2)^2 + (b - a + 23/10)^2 + (b - 2*a + 34/5)^2

$\frac{dp}{da}$=30*a - 10*b - 99

$\frac{dp}{db}$=10*b - 10*a + 224/5

a = 2.71; b=-1.77;

$P_1(x)$=(271/100) *x - 177/100

среднеквадратическое отклонение = 1.5236

аппроксимация многочленом 2 степени

полином:

p =(c + 9/10)^2 + (a - b + c + 23/10)^2 + (9*a - 3*b + c + 23/2)^2 + (4*a - 2*b + c + 34/5)^2 + (a + b + c + 9/10)^2

$\frac{dp}{da}$=198*a - 70*b + 30*c + 1339/5

$\frac{dp}{db}$=30*b - 70*a - 10*c - 99

$\frac{dp}{dc}$=30*a - 10*b + 10*c + 224/5

a = -0.89286; b=0.92429; c=-0.87714;

$P_2(x)$=(647/700) *x - (25/28) *x^2 - 307/350

среднеквадратическое отклонение = 0.29876

аппроксимация многочленом 3 степени

полином:

p =(b - a - c + d + 23/10)^2 + (d + 9/10)^2 + (a + b + c + d + 9/10)^2 + (4*b - 8*a - 2*c + d + 34/5)^2 + (9*b - 27*a - 3*c + d + 23/2)^2

$\frac{dp}{da}$=1590*a - 550*b + 198*c - 70*d - 3663/5

$\frac{dp}{db}$=198*b - 550*a - 70*c + 30*d + 1339/5

$\frac{dp}{dc}$=198*a - 70*b + 30*c - 10*d - 99

$\frac{dp}{dd}$=30*b - 70*a - 10*c + 10*d + 224/5

a = -0.1; b = -1.1929; c = 0.96429; d = -0.63714

$P_3(x)$=- x^3/10 - (167*x^2)/140 + (27*x)/28 - 223/350

среднеквадратическое отклонение = 0.24588

таким образом минимальное с.к.о $\delta \approx 0.24588$

"соответствующий ему тип зависимости - " "кубический"

8. (а) Методом неопределённых коэффициентов составить формулу для вычисления указанной производной по значениям функции в указанных узлах. (б) Раскладывая $y(x_i)$ в ряд Тейлора, определить порядок p погрешности $O(h^p)$ полученной формулы.

$$y''(x_1) = c_0 y(x_0) + c_1 y(x_1) + c_2 y(x_2) + c_3 y(x_3) + O(h^p).$$

$$x_0 \underbrace{\qquad\qquad}_{2h} x_1 \underbrace{\qquad\qquad}_{2h} x_2 \underbrace{\qquad\qquad}_{h} x_3$$

f	$(x-x_0)^0$	$(x-x_0)^1$	$(x-x_0)^2$	$(x-x_0)^3$
f''	0	0	2	$6(x-x_0)$

$0 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3$
$0 = c_0(x_0 - x_0) + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0) + c_3(x_3 - x_0)$
$2 = c_0(x_0 - x_0)^2 + c_1(x_1 - x_0)^2 + c_2(x_2 - x_0)^2 + c_3(x_3 - x_0)^2$
$6(x_1 - x_0) = c_0(x_0 - x_0)^3 + c_1(x_1 - x_0)^3 + c_2(x_2 - x_0)^3 + c_3(x_3 - x_0)^3$
$(x_0 - x_0) = 0; (x_1 - x_0) = 2h; (x_2 - x_0) = 2h; (x_3 - x_0) = h;$

$$0 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3$$
$$0 = 2hc_1 + 4hc_2 + 5hc_3$$
$$2 = 4h^2c_1 + 16h^2c_2 + 25h^2c_3$$
$$12 = 8h^2c_1 + 64h^2c_2 + 125h^2c_3$$

$$c_0 = \frac{1}{4h^2};\ c_1 = -\frac{1}{2h^2};\ c_2 = \frac{1}{4h^2}; c_3 = 0$$

$$y'' = \frac{1}{2h^2}(\frac{y_0}{2} - y_1 + \frac{y_2}{2})$$

$$y_0 = y_1 - 2hy_1{}' + 2h^2y_1{}'' - \frac{4}{3}h^3y_1{}''' + \frac{2}{3}h^4y_1^{(IV)} + O((2h)^5)$$

$$y_2 = y_1 + 2hy_1' + 2h^2y_1'' + \frac{4}{3}h^3y_1{}''' + \frac{2}{3}h^4y_1^{(IV)} + O((2h)^5)$$

$$\frac{1}{2h^2}\left(\frac{y_0}{2} - y_1 + \frac{y_2}{2}\right) = \frac{1}{2h^2}(2h^2y_1'' + \frac{2}{3}h^4y_1^{(IV)} + O((2h)^5)) = y_1{}'' \underbrace{+ \frac{h^2}{3}y_1^{(IV)} + O(16h^3))}_{O(h^2)}$$

$$=> p = 2$$