①

9) ф-ла: $y_3'' = \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3)$ функ: $y(x) = \cos(x)$

на $[\frac{\pi}{4}; \pi]$

$\delta = 10^{-7}$

Из-за округления чисел в мантиссе вычисления на ЭВМ ограничены машинной точностью δ

В действительности компьютер вычисляет

$$y_3'' = \frac{1}{h^2}(-\tilde{y}_0 + 4\tilde{y}_1 - 5\tilde{y}_2 + 2\tilde{y}_3), \text{ где } \tilde{y}_i = y_i \pm \delta_i$$

Рассмотрим погрешность:

$$\Delta = \left| y_3'' - \frac{-\tilde{y}_0 + 4\tilde{y}_1 - 5\tilde{y}_2 + 2\tilde{y}_3}{h^2} \right| =$$

$$= \left| \left(y_3'' - \frac{-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3}{h^2} \right) + \frac{1}{h^2}\left((-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) - (-\tilde{y}_0 + 4\tilde{y}_1 - 5\tilde{y}_2 + 2\tilde{y}_3) \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| y_3'' - \frac{-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3}{h^2} \right| + \left| \frac{\delta_0}{h^2} \right| + \left| \frac{4\delta_1}{h^2} \right| + \left| \frac{5\delta_2}{h^2} \right| + \left| \frac{2\delta_3}{h^2} \right| \leq$$

$$\leq \left| y_3'' - \frac{-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3}{h^2} \right| + \left| \frac{12\delta}{h^2} \right|$$

② Разложим y_0, y_1, y_2 в ряд Тейлора в точке x_3

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$-\;\Big|\; y_0 = y_3 + y_3'\cdot(x_0-x_3) + \frac{y_3''\cdot(x_0-x_3)^2}{2} + \frac{y_3'''(x_0-x_3)^3}{6} + \frac{y_3^{IV}(x_0-x_3)^4}{24}$$

$$= y_3 - y_3'\cdot 3h + y_3''\frac{9h^2}{2} - y_3'''\frac{27h^3}{6} + y_3^{IV}\frac{81h^4}{24}$$

$$+4\;\Big|\; y_1 = y_3 - y_3' 2h + y_3''\frac{4h^2}{2} - y_3'''\frac{8h^3}{6} + y_3^{IV}\frac{16h^4}{24}$$

$$-5\;\Big|\; y_2 = y_3 - y_3' h + y_3''\frac{h^2}{2} - y_3'''\frac{h^3}{6} + y_3^{IV}\frac{h^4}{24}$$

$$+2\;\Big|\; y_3$$

$$y_3(-1+4-5+2) + y_3'\left[-(-3h)+4(-2h)-5(-h)\right] +$$

$$+ y_3''\left[-\frac{9h^2}{2} + 4\cdot\frac{4h^2}{2} - 5\cdot\frac{h^2}{2}\right] +$$

$$+ y_3'''\left[-\left(-\frac{27h^3}{6}\right) - \frac{4\cdot 8h^3}{6} - 5\left(-\frac{h^3}{6}\right)\right]$$

$$+ y^{IV}\frac{h^4}{24}\left[-81+4\cdot 16-5\right] = 0+0+h^2 y_3'' + 0 - \frac{11}{12}h^4 y^{(IV)}(\xi)$$

$$-\frac{\phi}{\phi}h^2 + y'' = \frac{11}{12}h^2 y^{(IV)}(\xi)$$

Таким образом:

$$\Delta \le \left|h^2\cdot\frac{11}{12}y^{IV}(\xi)\right| + \left|\frac{12\delta}{h^2}\right| \le \frac{11h^2}{12}M_4 + 12\frac{\delta}{h^2} = \varphi(h)$$

Минимизируем $\varphi(h)$;

$$\varphi'(h) = \frac{11h}{6}M_4 - \frac{12\delta\cdot 2}{h^3} = 0 \qquad \frac{11h}{6}M_4 = \frac{24\delta}{h^3};\; h = \sqrt[4]{\frac{144\cdot\delta}{11M_4}}$$

Найдём $M_4 = \max\limits_{[\frac{\pi}{4};\pi]} |y^{IV}(x)|$

$y^{IV} = \cos(x)$ $\Rightarrow M_4 = 1$

$h_{опт} = \sqrt[4]{\frac{144 \cdot 10^{-7}}{11}} \approx 3{,}3825 \cdot 10^{-2}$

10) $I = \int_1^3 \sin x \, sh(x) dx$ $S(h) = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})$ (лев. пр.)

$h_1 = 2/6$; $h_2 = 2/14$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1,3333	1,6667	2	2,3333	2.6667	3

1)

$S(h_1) = \frac{1}{3} \sum_{0}^{5} \sin(i) sh(i) = \frac{1}{3}(0,9889 + 1,7155 + 2,5411 + 3,2989 + 3,9633 + 3,7746) =$

$= 5.1704$

2)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
1	1,1429	1,2857	1,4286	1,5714	1,7143	1,8571	2	2,1429	2,2857	2,4286	2,5714	2,7143	2,8571	3

$S(h_2) = \frac{1}{7} \sum_{0}^{13} \sin(i) sh(i) = \frac{1}{7}(0,9989 + 1,2814 + 1,6030 + 1,9467 + 2,3028 + 2,6564 +$

$+ 2,9974 + 3,2979 + 3,540 + 3,6742 + 3,6909 + 3,5107 + 3,1139 + 2,4351) =$

$= 5,2899$

$I \approx S(h_1) + c h_1^2$
$\approx S(h_2) + c h_2^2$ $\Rightarrow c = \frac{S(h_1) - S(h_2)}{h_2^2 - h_1^2} \approx 1,3113$

$\varepsilon = |I - S(h_2)| = |c h_2^2| \approx 0,0268$

11) $\int_9^\infty \frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{(1+x^2)^2}dx = \underbrace{\int_9^A \frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{(1+x^2)^2}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_A^\infty \frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{(1+x^2)^2}dx}_{I_2}$

$I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1$ вычислим с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$

$\int = I_1$ с точн $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \approx \varepsilon$

$\lim\limits_{A\to\infty} I_2 = 0$ | т.к. $\cos\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{(1+x^2)^2} = 0$

инт. сходящийся

$\left|\int_A^\infty \frac{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{(1+x^2)^2}\right| \leq \left|\int_A^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\int_A^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg}(x)\right)\Big|_A^\infty =$ ~~$\frac{1}{2}\left(\frac{A}{A^2+1} + \operatorname{arctg}(A)\right)$~~

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{2a}{a^2+1} - 2\operatorname{arctg}(a) + \pi\right) \leq$

$\leq \frac{\varepsilon}{2}$

Пусть $\varepsilon = 10^{-7}$

Для вычисления интеграла с точностью ε достаточно взять $A = 70$

Вычислим интеграл методом Симпсона:

$I \approx I_1 = 0,0002076$

$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7$

Сравним с реальным значением: $\approx 0,00020776$

12) $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -1 & 8 & -2 \\ -7 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) =$$

$$= \max(3+1+7,\ 9+8+10,\ 9+2+2) = 27$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i (A^T A)}$$

$$\cancel{B = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -1 & 8 & -2 \\ -7 & 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ -9 & 8 & 10 \\ 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 171 & -93 & -93 \\ -93 & 69 & 83 \\ -93 & 83 & 153 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 171-\lambda & -93 & -93 \\ -93 & 69-\lambda & 83 \\ -93 & 83 & 153-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 393\lambda^2 - 24332\lambda + 142884}$$

$$\cancel{\lambda_1 = 6.5546}$$

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ -9 & 8 & 10 \\ 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -1 & 8 & -2 \\ -7 & 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59, & -105, & 15 \\ -105, & 245, & -77 \\ 15, & -77, & 89 \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda E| = -\lambda^3 + 393\lambda^2 - 24332\lambda + 142884$$

$\lambda_1 \approx 6.5546$ $\lambda_2 \approx 68.5792$ $\lambda_3 \approx 317.8662$

$$\|A\|_2 \approx \sqrt{317.8662} \approx 17.8288$$

№13

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 6 \\ 1 & -8 & -6 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 8{,}9 \\ 9{,}1 \\ -8{,}3 \end{pmatrix}; \quad \|\delta f\|_\infty = 0{,}1$$

8

$$\mu(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty = \max(6+8+6,\ 1+8+6,\ 6+5+2) = 20$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \\ -\frac{\text{[illegible]}}{35} & -\frac{12}{35} & -\frac{3}{7} \\ 43/70 & 9/35 & 4/7 \end{pmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left[\frac{2}{5};\ \frac{44}{35};\ \frac{101}{70}\right] = \frac{101}{70} \approx 1{,}4429$$

$$\mu(A) \approx 28{,}8571$$

$$\|f\|_\infty = 9{,}1$$

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 28{,}8571 \cdot \frac{0{,}1}{9{,}1} \approx 0{,}3171$$

14) $\begin{cases} y'' = 2\cos(x)+1 \\ y(0) = 1 \\ y'(1) - 3y(1) = 1 \end{cases}$ $p=2$

$$u'(x_n) = \frac{u(x_n) - u(x_{n-1})}{h} + \frac{h\,u''(x_n)}{2} + O(h^2)$$

$$u''(x_n) = 2\cos(x_n) + 1 = 2\cos(1) + 1$$

$$u'(1) \Rightarrow \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{2\cos(1)+1}{2}h$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{2\cos(1)+1}{2}h - 3y_n = 1$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}$$

$u(0) = u(x_0) \to y_0$

$u(1) = u(x_n) \to y_n$

$1 \le i \le n-1$

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = 2\cos(x_i) + 1 & - p=2 \\ y(0) = 1 & - p=\infty \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{2\cos(1)+1}{2}\right) - 3y(n) = 1 & - p=2 \end{cases} \Rightarrow p = \min\{2;\infty;2\} = 2$$

15) $x \in [0,2]$

$$\begin{cases} y'' - yx = 1 \\ y(0) = 1;\ y'(2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - y_i \cdot i h = 1 \\ y_0 = 1 \quad \dfrac{y_n - y_{n-2}}{2h} = 4 \\ \qquad x_n = 2 \end{cases}$$

Тогда:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - y_i \cdot h \cdot i = 1 \qquad (1)$$

Разложим $u_{i\pm1}$ в окр. u_i и подставим в (1), а затем вычтем исх. уравнение

учтём, что т.к. $x_0 = 0$, то $x_i = h \cdot i$

получим невязку $\psi_1 = O(h^2)$

Зап. краевое усл. в разностном виде:

$$\frac{y_n - y_{n-2}}{2h} = 4$$

разложим u_n в окр. u_{n-2}, подставим в посл. уравнение и вычтем исходное.

получаем невязку $\psi_2 = O(h^1)$

$\psi_3 = 0$; $\lim\limits_{h \to 0} \max\{|\psi_1|, |\psi_2|, |\psi_3|\} = 0$

$\Rightarrow$ аппроксимация имеет место.

Порядок аппроксимации равен 1

16

$$A=\begin{pmatrix} -12 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad f=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Преобразуем I и последнее ур-я системы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -1 \end{pmatrix} \qquad f=\begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ -3 \\ 5 \\ 7 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Проверяем усл. применимости метода прогонки

$10 > 6+1 \qquad 10 > 6+2 \qquad 7 > 4+1$

$\frac{5}{12} < 1 \qquad \frac{3}{8} < 1$

$\Rightarrow$ метод прогонки применим

Прогоночные коэффициенты:

$\alpha_1 = \frac{5}{12} \qquad \beta_1 = \frac{1}{12} = -0{,}0833 \qquad y_1 = -12$

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j} \qquad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}$$

$\alpha_2 = 0{,}08 \qquad \beta_2 = -0{,}2$

$\alpha_3 = -0{,}1908 \qquad \beta_3 = -0{,}5516$

$\alpha_4 = -0{,}1288 \qquad \beta_4 = -0{,}3969$ ~~$-0{,}3968$~~

$\alpha_5 = 0 \qquad \beta_5 = -0{,}1442$

~~$x_1 = -0{,}1430$~~
~~$x_2 = -0{,}1433$~~
~~$x_3 = -0{,}7091$~~
~~$x_4 = -0{,}6157$~~
~~$x_5 = -0{,}1442$~~

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}1430 \\ x_2 = -0{,}1433 \\ x_3 = -0{,}7091 \\ x_4 = -0{,}6157 \\ x_5 = -0{,}1442 \end{cases}$$