

# 多Agent动态系统的群集。算法与理论

Reza Olfati-Saber, 会员, IEEE

摘要在本文中，我们提出了一个设计和分析分布式蜂群算法的理论框架。我们讨论了在自由空间和存在多个障碍物的两种情况下的拥挤。我们提出了三种植群算法：两种用于自由植群，一种用于受限植群。对前两种算法进行了全面的分析。我们证明了第一个算法体现了Reynolds的所有三个规则。这是一种提取导致集体行为出现的互动规则的正式方法。我们表明，第一个算法一般会导致有规律的分裂，而第二个和第三个算法都会导致成群结队。我们提供了一种系统的方法来构建蜂群的成本函数（或集体潜能）。这些集体潜力对偏离一类被称为“lattices”的晚期形状的物体进行惩罚。我们使用一个多物种框架来构建集体潜力，该框架由羊群成员或代理以及与代理相关的虚拟代理组成，称为 $\alpha$ -代理。我们表明，羊群的迁移可以通过代理的对等网络进行，即“羊群不需要领导者”。我们给出了粒子系统成群的 $\alpha$ -通用“定义，它与Lyapunov稳定性相似。提供了几个模拟结果，展示了使用所提出的算法对数百个代理进行2-D和3-D成群结队、分裂/重合演习和挤压演习。

## Index

共识理论，分布式控制，动态图，移动传感器网络，联网的自主车辆，网络的自我组装，自组织系统，蜂群。

## Terms-

### I. 简介

锁定是一种具有共同群体目标的大量互动代理的集体行为形式。几十年来，来自动物行为学、物理学、生物物理学、社会科学和计算机科学等不同学科的科学家用具有局部交互作用的代理群体中出现的成群结队、蜂群和学校教育的现象非常着迷[1]-[12]。这些代理人的例子包括鸟、鱼、企鹅、蚂蚁、蜜蜂和人群。在一个抽象的我们把羊群的成员称为“代理人”。

蜂群的工程应用包括在环境中使用移动传感器网络进行大规模的分布式传感；连接移动网络的自我组装；自动平行交付有效载荷；以及使用合作无人驾驶飞行器（UAV）执行军事任务，如侦察、监视和作战。在自然界中，鸟群是

能够协调群体行为的移动代理的自组织网络的例子。羊群/学校的自组织特征[12]可以为传感器网络的设计提供更深刻的见解[13]-[16]。

1986年，Reynolds提出了三条启发式规则，从而创造了第一个计算机植绒动画[5]。这里，是雷诺兹的三个植绒规则

- 1) 羊群中心化：试图靠近附近的羊群伙伴。
- 2) 避免碰撞：避免与附近的羊群伙伴发生碰撞。
- 3) 速度匹配：尝试与附近的群友进行速度匹配。

让我们提一下，这些规则在文献中也被称为内聚、分离和对齐规则。这些规则受到广泛的解释，使客观的分析和实施雷诺兹规则变得复杂。

第一批从理论角度研究蜂群的物理学家有Vicsek等人[6]、Toner和Tu[7]、Shimoyama等人[8]和Levine等人[17]。Vicsek等人的工作主要集中在自驱动粒子系统中出现的排列（这并不等于成群结队），而Toner和Tu使用的是连续体力学方法。Levine等人使用一个基于粒子的模型，用全对全的相互作用创造了被称为圆形蚂蚁磨的旋转群。Mogilner和Eldstein-Keshet[18]，

[9]以及Topaz和Bertozzi[19]提出了其他的蜂群连续体模型。Helbing等人[10]使用基于经验的粒子模型研究了鸟群的逃逸恐慌现象。

最近，由于Olfati-Saber和Murray的工作[20]，[21]以及Jadbabaie等人[22]、Moreau[23]和Ren和Beard[24]在可变拓扑结构网络上的对齐工作，控制科学工作者对共识问题的兴趣大增。在对齐中，对共识值没有约束，而在大多数网络动态系统的共识问题中，目标是通过协议对一个函数进行分布式计算[20]，[25]。

在[26]-[28]中考虑了具有全对全互连的小型粒子群或代理的稳定性分析。Tanner等人[29]提出了一个粒子系统的集中式算法，该算法导致了通用初始状态的不规则崩溃。他们还提出了一种导致不规则破碎的分布式算法。分裂和崩溃是两个众所周知的蜂群陷阱，将在后面讨论。

过去的一些研究与本文有很大关系，包括Fax和Murray[30]关于编队控制和图拉普拉斯的工作；Mesbahi[31]，[32]关于状态依赖性的研究。

2004年6月25日收到稿件；2005年8月10日和2005年11月21日修订。由副编辑E. Jonckheere推荐。这项工作得到了空军科学研究办公室F49620-01-1-0361号拨款的部分支持，以及国防高级研究计划局F33615-98-C-3613号拨款的部分支持。

作者是美国新罕布什尔州汉诺威市达特茅斯学院塞耶工程学院的（电子邮件：[olfati@dartmouth.edu](mailto:olfati@dartmouth.edu)）。

数字对象标识符10.1109/TAC.2005.864190

图; Cortes和Bullo[15]以及Cortes等人[33]关于移动传感器的放置; Rabichini和Frazzoli[34]关于节能的分割算法; Leonard和Fiorelli[35]以及Olfati-Saber和Murray[36]关于结构形成控制的图诱导势函数; Ögren等人[37]关于移动传感器网络的协调; Khatib[38]以及Rimon和Koditschek[39]关于使用人工势来避免障碍物; Strogatz[40]关于移动传感器的位置。[37]关于移动传感器网络的协调; Khatib[38]以及Rimon和Koditschek[39]关于使用人工电位进行避障; Strogatz[40]关于复杂的生物和社会网络; 以及Olfati-Saber[41]关于超高速小世界网络。

最近一些关于蜂群运动控制的论文存在着共同的缺点, 包括使用无界的力来避免碰撞, 缺乏可扩展性, 以及不规则的破碎和崩溃。相比之下, [42]-

[44]中的工作不具备这些特点。在[43]中, 建立了一些分析结果, 如渐进排列和能量耗散。在[43]中提出的分析和其他一些现有的关于蜂群的工作还远远不够完整。特别是, 羊群中的空间秩序的存在从未被证实。在本文中, 我们试图通过回答以下基本问题来弥补其中的一些理论空白。

- 1) 我们如何设计可扩展的蜂群算法并保证其收敛性?
- 2) 与植绒有关的稳定性分析问题有哪些?
- 3) 羊群中存在哪些类型的秩序?
- 4) 鸟群是如何进行分裂/重新组合的动作或通过狭窄空间的?
- 5) 鸟群是如何迁徙的?
- 6) 什么构成植树造林?

我们希望我们的分析能对复杂组织中的合作和集体行为的出现有所启发。

让我们把群体中的粒子/代理称为“代理”, 其目标是进行群聚。我们为“代理”引入了三种可扩展的拥挤算法。我们的第一种算法是一种基于梯度的算法, 配备了速度共识协议。我们证明第一种算法体现了Reynolds的所有三个规则。我们还证明, 对于一般的初始状态, 这种算法会导致有规律的碎片化, 而不是成群结队。对第一种算法的分析对于澄清有规律的分裂现象的特征非常有用。第二种算法(或算法2)是在自由空间中移动的主要成群算法。这个算法有一个额外的术语, 由一个考虑到群体目标的- $m$ 代理人代表。在分析算法2的过程中, 我们提出了两个猜想, 这两个猜想对于解释成群的空间秩序和移动代理的连接网的自我组装至关重要。

第三种算法具有避开障碍物的能力。我们通过被称为 $\beta$ -agent的虚拟代理来表示障碍物的影响。这些代理是运动性的, 在障碍物的边界上移动。然后形成一个多物种的集体潜力, 用于设计和分析第三种成群算法。我们证明了羊群的跟踪问题可以用一个没有领导者的对等结构来解决--因此, 证实了动物行为科学家广泛接受的观点: “学校不需要领导者”[1]。我们提供了40-150个代理的几个模拟结果, 这些代理

成功地以分布式方式进行二维成群、三维成群、二维常规破碎、分裂/重合演习和挤压演习。

本文的主要贡献是为设计和分析 scalable flocking algorithms in

$\mathbb{R}^m$ , 有或无障碍物的情况下提

提供一个理论和计算框架。本文的概要如下。在第一节中介绍了一些关于图、接近网、板块、代数图论、共感问题、集体潜能的背景。

II. 第三节提供了两种在自由空间移动的分布式羊群算法。第四节阐述了群落的集体动力学和一个分解法则。我们对前两种算法的主要分析结果将在第四节中介绍。

V. 算法1和Reynolds规则之间的关系在第六节中确立。在第七节中介绍了具有避障能力的第三种算法。第八节中提供了广泛的模拟结果。在第九节中, 我们阐述了什么是植群, 并给出了植群的普遍定义。最后, 在第十节中提出了结论意见。

## II. 预备工作

本文提出的理论框架依赖于图论[45]-[47]、代数图论[48]、空间诱导图(或接近网)[43]和共识问题[20]、[21]中的一些基本概念, 这些概念将在下面讨论。

### A. 羊群的拓扑结构。接近网

一个图,  $G$  是顶点  $\{1, 2, \dots, n\}$  和边  $\mathcal{E} \subseteq \{(i, j) \mid i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}$  组成的一对  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  :  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 。也就是说, 该图一般是有向的, 没有自循环。如果  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , 则称该图  $G$  为有向图。这两个量分别称为图的顺序和大小。对于网络动态系统, 被称为系统的通信复杂性[49]。

图的邻接矩阵  $A = [a_{ij}]$  是一个具有非零元素的矩阵, 满足  $a_{ij} \neq 0 \iff (i, j) \in \mathcal{E}$ 。只要图的邻接矩阵的元素不只是0-1的元素, 就可以称为加权图。在这里, 我们主要使用与位置相关的邻接元素的加权图。对于一个无定向图, 其邻接矩阵  $A$  是对称的(或  $A^T = A$ )。节点的邻居集合定义为  $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : a_{ij} \neq 0\}$ 。节点的邻居集合定义为  $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : a_{ij} \neq 0\}$ 。

$$\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : a_{ij} \neq 0\} \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (1)$$

$q_i \in \mathbb{R}^m$  Let denote the position of node  $i$  for  $i \in \mathcal{V}$ . 向量  $\text{col}(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{mn}$ , 称为配置。一个框架(或结构)是由一个图和其节点的配置组成的一对  $(G, q)$ 。

考虑一组具有运动方程的动态代理(或粒子)。

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i \\ \dot{p}_i = u_i \end{cases} \quad (2)$$

$q_i, p_i$ , 其中  $\mathbb{R}^m$   $m = 2$  (例如,  $i \in \mathcal{V}$  和

。与连续体相比, 使用基于粒子的鸟群模型的好处是

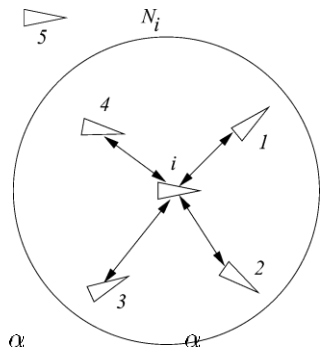


图1. 代理人和它的邻居在一个球形的邻域。

模型是，我们不能把代理间的感应、通信和计算问题视为理所当然。

$r > 0$  让denote表示两个代理人之间的互动范围。一个半径为 $r$ 的开放球（见图1）决定了代理人的空间邻居的集合，该集合用以下方式表示

$$N_i = \{j \in \mathcal{V} : \|q_j - q_i\| \leq r\} \tag{3}$$

其中  $\|\cdot\|$  是欧几里得范数。给定一个互动范围  $r > 0$ ，一个接近网  $G(q) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(q))$ ， $\mathcal{V}$ 可以通过和边的集合来定义

$$\mathcal{E}(q) = \{(i, j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : \|q_i - q_j\| \leq r, i \neq j\} \tag{4}$$

这显然取决于  $q$  和  $r$ 。该框架被称为一个靠近的结构。

有无线电范围的无线传感器网络的拓扑结构是一个接近网[14]。如果所有代理的交互范围是相同的，那么接近网  $G(q)$ ，成为一个无向图。

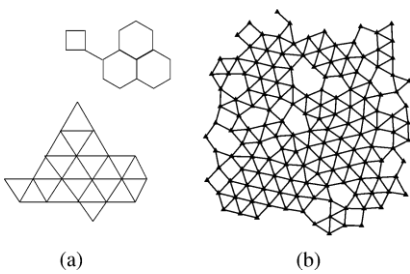
点的接近网在以下任一假设下一般是一个二维图：i) 代理的球形邻接罩没有相同的半径，或者ii) 每个代理使用圆锥形邻接来确定其邻居，如[5]。在本文中，所有的接近网都是双向的图。

B. 羊群的几何学：-格子

为了捕捉现实生活中羊群的明显空间秩序，我们使用格子型结构来模拟羊群中代理人的理想密度的几何结构。为此，我们寻求一组点的构型，其中每一个点与邻近的点在一个接近网  $G(q)$ 。就代理人之间的距离而言，这个几何对象可以被描述为以下一组代数约束的解决方案。

$$\|q_i - q_j\| = d, \forall (i, j) \in \mathcal{E}(q). \tag{5}$$

(5)中一组约束条件的解起到了羊群中代理人的期望构象的作用（即羊群的几何模型）。由于这种几何对象经常出现在本文中，我们发现将其定义为格子型对象是很方便的



定义1 (-Lattice)。一个晶格是一个满足(5)中约束条件的配置。我们把和称为分别作为格子的比例和比率。

图2.  $\alpha$ -lattices和准- $\alpha$ -lattices的例子：(a)一个具有断开的接近网的二维- $\alpha$ -lattice和(b)一个具有 $n = 150$ 个节点的二维准- $\alpha$ -lattice。

由-lattice诱导的接近网不需要是连接的。此外，由-lattice引起的接近结构的所有边都有相同的长度。图2说明了-lattices的其他例子。

备注1：如图2所示，二维晶格的近似结构是由单一（或多个）类型的多边形单元重复使用而成的晶体（或准晶体）的集合。这是由这种近似结构的平面性属性得出的（见定理4）。

为了描述非常接近于满足（5）的-lattice的构象  $q'$ ，我们使用以下一组不等式

$$\|q_i q_j\| \forall (i, j) \in \mathcal{E}(q) \quad (6)$$

并将其解决方案称为准lattice。图2(b)展示了一个准lattice，它是用第二种Flocking算法[或协议(24)]进行数值计算的。

为了衡量一个配置与-格的不同程度，我们使用以下偏差能量。

$$E(q) \mathcal{H}_i \|d\| \quad (7)$$

where  $\psi(z) = z^2$  is called a pairwise potential (note that other scalar potentials can be used as well). The deviation energy can be viewed as a nonsmooth potential function for a system of particles. Interestingly, -lattices are *global minima* of this potential function and achieve the minimum value of zero. For a quasi -lattice with an edge-length uncertainty of  $\varepsilon$ , the deviation energy is given by

这意味着准晶格是点的低能量构象。的偏差能量的数量级。

图2(b)中的准晶格是 $10^{-3}$ （对于  $n = 150$  和  $d = 7$ ）。

### C. $\sigma$ -规范和光滑相邻元素

为了构建一个平滑的集体潜力的羊群和接近网的空间邻接矩阵，我们需要定义一个非负的地图，称为-norm。

一个矢量的-规范，是一个映射（不是规范），定义为

$$(8)$$

$$\|z\|_{\sigma} = \frac{1}{\epsilon} [\sqrt{1 + \epsilon \|z\|^2} - 1]$$

参数  $\epsilon > 0$ , 梯度为  $\sigma_\epsilon(z) \nabla \|z\|_\sigma$ , 其公式为

$$\sigma_\epsilon(z) = \frac{z}{\sqrt{1 + \epsilon \|z\|^2}} = \frac{z}{1 + \epsilon \|z\|_\sigma} \quad (9)$$

在本文中,  $\epsilon$  和  $\sigma$  准则的参数一直是固定的。人们可能会问, 为什么我们甚至需要定义一个新的准则。地图  $\|z\|_\sigma$  在任何地方都是可微的, 但  $\|z\|$  是不可微的。后来,  $\sigma$  准则的这一特性被用于构建粒子群的平滑集体势函数。

凹凸函数是一个在0和1之间平滑变化的标量函数  $\rho_h(z)$ 。这里, 我们使用凹凸函数来构建具有有限截止点和平滑邻接矩阵的平滑势函数。一个可能的选择是在[44]中介绍的以下凹凸函数。

$$\rho_h(z) = \begin{cases} z \in [0, h) \\ , z \in [h, 1] \\ \text{否则} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} 1, \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \pi \frac{(z-h)}{(1-h)} \right) \right] \\ 0, \end{cases}$$

其中(0,1)我们可以证明,  $\rho_h(z)$  是一个  $C^1$  光滑的函数, 其特性是:  $\rho'_h(z) = 0$  在区间  $[1, \infty)$ ,  $|\rho'_h(z)|$  并且在  $z$  中均匀地被约束。使用这个凹凸函数我们可以通过其元素来定义一个空间邻接矩阵  $A(q)$ , 即:

$$a_{ij}(q) = \rho_h(\|q_j - q_i\|_\sigma / r_\alpha) \in [0, 1], \quad \neq i, j \quad (11)$$

其中  $r_\alpha = \|r\|_\sigma$  和  $a_{ii}(q)$  为所有0。对于  $q$   $h = 1$ ,  $\rho_h(z)$  是一个指标函数, 在区间[0,1]内等于1, 否则为0。使用指示器函数会导致  $\psi(\|q_i - q_j\|)$  1位置依赖性adja-cency元素的接近网。

#### D. 集体潜在的功能

一组代理人的集体势能函数是  $V(q)$  函数, 其特性是 (5) 中代数约束集的任何解都与  $V(q)$  的局部最小值 "密切相关", 反之亦然。在本文中, 集体势是偏差能量函数的平滑版本, 其标量对势有一个有限的截止。这一特征被证明是我们的植群算法可扩展性的基本来源。

备注2: 广义的Lennard-Jones函数和指数消失的映射没有有限的截止点, 不做任何修改就能满足我们的目的。创建具有有限截止值的成对势的常见方法是 "软切割", 即成对势乘以一个凹凸函数。让  $\psi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  是一个有吸引力/排斥性的对偶势, 其全局最小值在  $z=0$  和有限截止值在  $z=h$

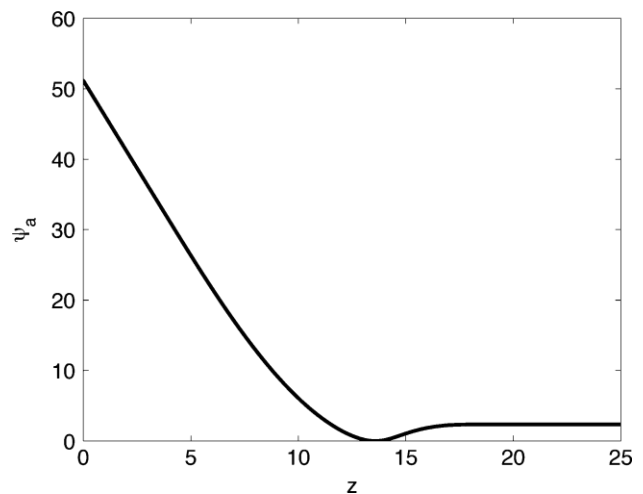


图3. 平滑的成对势 ( $z$ ), 有一个有限的截断。

是一个集体势, 在两个不同节点重合的

异构型中

可微调, 或者说

为了解决这个问题, 我们使用了在 "中" 的一组代数约束。

(5), 用  $\sigma$  准则改写为

$$\|q_j - q_i\|_\sigma = d_\alpha \quad \forall j \in N_i(q) \quad (13)$$

其中  $d_\alpha = \|d\|_\sigma$

。这些约束条件引起了一个平滑的集体势能函数的形式。

$$V(q) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \psi_\alpha(\|q_j - q_i\|_\sigma) \quad (14)$$

那么, 下面的函数。 (12)

其中  $\psi_\alpha(z)$  是一个平滑的成对吸引/排斥势（定义见（16）），在

$\|r\|_\sigma$ ，有一个有限的截止点，在  $d_\alpha$ ，有一个全局最小值。 $r_\alpha =$

为了构建一个具有有限截止的平滑对偶势，我们整合了一个行动函数  $\phi_\alpha(z)$ ，该函数对所有的人都消失了  $z \geq$ 。将这个动作函数定义为  $r_\alpha$

$$\phi(z;b)] \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(z) &\equiv \rho_h(z/r_\alpha)\phi(z-d_\alpha) + (a - \\ &\quad \frac{1}{2}[(a+b)\sigma_1(z+c) \\ &\quad = z/\sqrt{1+z^2} \quad \phi(z) \quad 0 < a \leq \quad = - \\ &\quad b|/\sqrt{4ab} \quad = 0 \end{aligned}$$

其中， $\sigma_1(z)$ ，并且是一个不均匀的正弦波函数，参数满足  $b, c \mid a$  以保证  $\phi(0)$ 。（14）中的成对吸引/排斥势  $\psi_\alpha(z)$   $b|/\sqrt{4ab}$ ，定义为  $= 0$

$$\psi_\alpha(z) \quad (16)$$

$$= \int_{d_\alpha}^z \phi_\alpha(s) \, ds.$$

这个功能在图3中描述。

E. 关于接近网和图拉普拉斯的共识

近似网的图拉普拉斯人出现在对成群的代理人的静脉定位匹配的  $G$  分析中。考虑一个  $G$  阶数为  $n$ ，邻接矩阵  $A = [a_{ij}]$ 。的程度矩阵是一个  $\Delta = \Delta(A)$  矩阵的对角线元素  $\sum_{j=1}^n a_{ij}$  对角线

的行和  $\Lambda$ 。标量图拉普拉斯  $L = [l_{ij}]$  是一个  $n \times n$  图形相关的  $G$  矩阵，其定义为

$$L = \Delta(A) - A. \quad (17)$$

拉普拉斯矩阵  $L$  总是有一个与特征值  $\mathbf{1}_n(1, \dots, 1)^T = 0$  相关的右特征向量  $\lambda_1$ 。

。下面的定理总结了图拉普拉斯的基本属性。

**定理1**：让  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  是一个无序图，有一个非负的邻接矩阵  $A = A^T$ 。那么，该以下声明成立。

- i)  $L$  是一个正半无限矩阵，满足以下的平方之和 (SOS) 特性。

$$z^T L z = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} a_{ij} (z_j - z_i)^2, \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (18)$$

- ii) 该图  $G$  有  $c \geq 1$  个连接组件，如果  $\text{rank}(L) = n - c$ 。特别是，在以下情况下是相连的  $\text{rank}(L) = n - 1$ 。

- iii) 假设  $G$  是一个连接图，那么

$$\lambda_2(L) = \min_{z \perp \mathbf{1}_n} \frac{z^T L z}{\|z\|^2} > 0. \quad (19)$$

**证明**。这三个结果都是阿尔-格布拉图理论领域的著名结果，其证明可以在[48]中找到。

这个量  $\lambda_2(L)$  图的代数连通性[50]。在[21]中，表明线性共识协议的收敛速度等于  $\lambda_2$ 。这种共识协议将作为速度匹配项出现在本文将介绍的所有蜂群算法中。特别是，我们使用-维图形拉普拉斯，定义为

$$\hat{L} = L \otimes I_m \quad (20)$$

其中表示Kronecker积。这个互斥的拉普拉斯满足以下SOS属性。

$$z^T \hat{L} z = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} a_{ij} \|z_j - z_i\|^2, \quad z \in \mathbb{R}^{mn} \quad (21)$$

其中  $z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_n)$  和  $z_i \in \mathbb{R}^m$  为所有  $i$  属性对一个接近的  $n$  来说是成立的。此。

### III. 成群结队的算法

在这一节中，我们提出了一套在自由空间中成群结队的分布式算法，或称自由成群。我们把具有动力学特性的物理代理  $\dot{q}_i$ ，称为  $\alpha$  "代理"。在自然界中，代理对应于鸟类、蜜蜂、鱼类和蚂蚁。后来，我们引入了

其中是

$f_i^g = -\nabla_{q_i} V(q)$  一个基于梯度的项，是一个作为阻尼力的矢量共识项，是一个由于群体目标而产生的导航反馈。群体目标的一个例子是向一个目的地迁移。我们提出了两种分布式算法，可用于创建蜂群运动 (1, 2, 3)，具有很大的意义。

算法1。  $u_i = u_i^\alpha$  与

$$u_i^\alpha = \underbrace{\sum_{j \in N_i} \phi_\alpha(\|q_j - q_i\|_\sigma) \mathbf{n}_{ij}}_{\text{gradient-based term}} + \underbrace{\sum_{j \in N_i} a_{ij}(q)(p_j - p_i)}_{\text{consensus term}} \quad (23)$$

其中  $\mathbf{n}_{ij} = \sigma_\epsilon(q_j - q_i) / \sqrt{1 + \epsilon \|q_j - q_i\|^2}$  是一个沿着连接到和的  $q_i$  线的向

量是一个固定的参数。算法1没有群体目标，被称为  $(\alpha, \alpha)$  蜂群协议[43]，因为它指出了两个代理之间的互动规则。稍后，我们将证明这个算法体现了雷诺兹的所有三个成群规则。

算法2。  $u_i = u_i^\alpha + u_i^\gamma$ ，或

$$u_i = \sum_{j \in N_i} \phi_\alpha(\|q_j - q_i\|_\sigma) \mathbf{n}_{ij} + \sum_{j \in N_i} a_{ij}(q)(p_j - p_i) + f_i^\gamma(q_i, p_i, q_r, p_r) \quad (24)$$

$u_i^\gamma$  其中是导航反馈，由以下公式给出

$$u_i^\gamma := f_i^\gamma(q_i, p_i, q_r, p_r) = -c_1(q_i - q_r) - c_2(p_i - p_r), \quad c_1, c_2 > 0.$$

这

一对是一个代理人的状态。一个代理  $(q_r, p_r) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  是代表团体目标的动态/静态代理，可以被看作是一个移动的会合点。

对固定的-向量，表示-

代理的初始位置和速度。一个动态代理有以下模型。

$$\begin{cases} \dot{q}_r = p_r \\ \dot{p}_r = f_r(q_r, p_r) \end{cases} \quad (25)$$

与  $(q_r(0), p_r(0)) = (q_d, p_d)$ 。静态代理有一个固定的状态，在任何时候等于  $(q_d, p_d)$ 。动态代理的  $f_r(q_r, p_r)$ ，是群体跟踪控制设计的一部分。

的代理人。例如，选择  $f_r \equiv 0$ ，就会产生一个以所需速度沿直线移动的-代理。根据  $u_i^\gamma$ ，一个代理的次要目标是：追踪一个代理。

虚拟代理，称为  $\beta$ -代理和-代理，它们分别模拟了群体的"障碍"和"集体目标"的影响。群体中的代理人的主要目标是与相邻的代理人形成一个"网格"。

在自由浮动中，每个代理应用的控制输入由三个条件组

$$u_i = f_i^g + f_i^d + f_i^{\gamma} \tag{22}$$

我们将看到，尽管这些协议中的某些条款有相似之处<sup>405</sup>，但使用算法1的一组代理的集体行为与应用算法2的一组代理有极大的不同。

事实证明，协议（23）只对非常有限的初始状态集导致了成群行为。对于一般的初始状态集和大量的代理（例如  $n > 10$ ），协议（23）很可能无法产生成群行为，而是导致有规律的碎片化，如图4所示。碎片化是蜂群的一个隐患。相比之下，协议（24）从未导致碎片化。算法1的重要性是由于它作为算法2的一个关键因素在成群过程中形成格子状结构的基本作用。



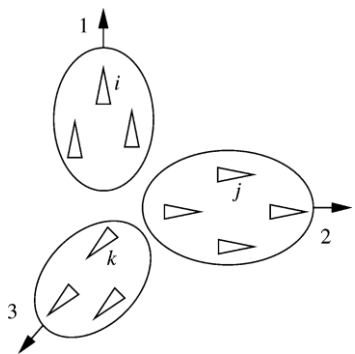


图4. 碎片化现象。

#### IV. 集体动力

一组代理应用程序 (24) 的集体动力学形式为

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\nabla V(q) - \hat{L}(q)p + f_\gamma(q, p, q_r, p_r) \end{cases} \quad (26)$$

其中是  $V(q)$  一个平滑的集体势能函数, 在(14)中给出,

是最近网的 Laplacian

$G(q)$  一个与状态有关的邻接矩阵  $A(q)$

$[a_{ij}(q)]$  有一个与状态有关的邻接矩阵  $f_\gamma \equiv 0$

。请注意, 对于算法1,  $f_\gamma \equiv 0$

第一个预期结果是, 在  $f_\gamma$ , 系统 (26) 是一个带有哈密顿的耗散性粒子系统  $-p_c$ 。

$$H(q, p) = V(q) + \sum_{i=1}^n \|p_i\|^2 - v_i = p_j - p_i \quad (27)$$

这是由于  $\dot{H} = -p^T \hat{L}(q)p \leq 0$

, 以及多维图拉普拉斯是一个对所有  $(q)$  来说都是正半自由的矩阵的事实。  $q$

集体动力学稳定性分析的关键是采用一个正确的坐标系

, 允许使用拉萨尔不变性原理。做法是在

中使用。这种方法的原因是在

在大多数感兴趣的情况下) 不工作的原因是, 我们无法建立解决方案的有界性。在碎片化过程中, 解决方案不能保持有界性。因此, 我们提出使用移动框架来分析成群运动的稳定性, 正如[43]中所建议的那样。

考虑一个以 --所有粒子的质心(CM)为

中心的移动名词  $\bar{z} = (1/n) \sum_{i=1}^n z_i$

$z_i$  让我们把  $= \text{col}(z_1, \dots, z_n)$   $q_c =$

's 与  $p_c = \text{Ave}(p)$  平均值表示出来。让  $\text{Ave}(q)$  和  $p_c(t) =$

表示运动框架的原点的位置和速度。

那么  $\dot{q}_c(t)$  和  $\text{Ave}(u(t))$

。代理人在移动框架中的位置和速度由以下公式给出

$$\begin{cases} v_i = p_i \\ = - \end{cases} \quad (28)$$

因此。  $V(q) = V(x)$  和  $\nabla V(q) = \nabla V(x) \circ (q, \alpha)$  移动框架中的程序可以表示为

$$u_i^\alpha = \sum_{j \in N_i} \phi_\alpha(\|x_j - x_i\|_\sigma) \mathbf{n}_{ij} + \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x)(v_j - v_i)$$

与  $= a_{ij}(x) \|x_i\|_\sigma / r_{ij} \rho_h(\|x_j - x_i\|_\sigma)$ 。我们的第一个结果是一个去位定理, 它是为羊群运动提出结构稳定性问题的基础。

定理2 (分解)。假设导航反馈

$f_\gamma(q, p)$  是线性的, 也就是说, 存在一个分解的

$f_\gamma(q, p)$  以下列形式:

$$f_\gamma(q, p, q_r, p_r) = g(x, v) + \mathbf{1}_n \otimes h(q_c, p_c, q_r, p_r). \quad (29)$$

然后, 应用协议 (24) [或 (23)] 的一组代理的集体动力学可以被分解为移动框架中的二阶系统  $n$

$$\text{structural dyn.} : \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\nabla V(x) - \hat{L}(x)v + g(x, v) \end{cases} \quad (30)$$

和一个参考框架内的二阶系统

$$\text{translational dyn.} : \begin{cases} \dot{q}_c = p_c \\ \dot{p}_c = h(q_c, p_c, q_r, p_r) \end{cases} \quad (31)$$

其中

$$g(x, v) = -c_1 x - c_2 v$$

$$h(q_c, p_c, q_r, p_r) = -c_1(q_c - q_r) - c_2(p_c - p_r) \quad (32)$$

$(q_r, p_r)$  和是代理人的状态。

证明。见[51, 应用A]。

在移动框架中, 相对位置和速度保持不变, 即。

和

□

## V. 植绒的稳定性分析

根据分解定理，我们现在可以将稳定的植群运动定义为以下形式的稳定性属性的组合。1) 结构动力学的某些平衡的稳定性，和2) 平移动力学的一个期望的平衡的稳定性。蜂群行为分析的挑战是建立第一部分。

Algorithms 1和2所创造的群体行为的重大差异是由于两种算法所引起的结构动力学的巨大差异。考虑到算法1，我们可以得到以下结构动态。

$$\Sigma_1 \quad - \quad (33)$$

有一个正半定的拉普拉斯矩阵。相比之下，应用Algorithm 2的一组代理人的结构动力学形式为

$$\Sigma_2 \quad - \quad (34)$$

其中，被称为总潜力函数，定义为

$$(35)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\nabla V(x) - \hat{L}(x)v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\nabla U_\lambda(x) - D(x)v \end{cases}$$

$$U_\lambda(x)$$

$$U_\lambda(x) = V(x) + \lambda J(x).$$

地图 $J(x)$  是所有粒子的势能函数<sup>2</sup>

是导航反馈的一个参数。此外, 阻尼矩阵  $D(x)$  是一个正定矩阵, 有  $c_2 > 0$ .

在介绍算法1和算法2下羊群行为的稳定性分析之前, 我们需要定义系统 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 的结构哈密顿, 如下所示。

$$\begin{aligned} H(x, v) &= V(x) + K(v) \\ &= H_{\lambda}(x, v) U_{\lambda}(x) \end{aligned} \quad (36)$$

其中  $V(x) = (1/2) \sum_{i,j} \|v_i - v_j\|^2$  是速度失配函数, 或粒子系统在运动框架中的动能。我们还需要定义 "群体的凝聚力" 和 "羊群" 的含义。

**定义2 (一个粘性群)。** 设  $(q(\cdot), p(\cdot)) : t \mapsto \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^{mn}$  是一组动态代理人在时间区间内的状态轨迹  $[t_0, t_f]$ 。

如果在  $[t_0, t_f]$  个半径为1.5米的球, 那么我们就说该组对  $q_c(t) = \text{Avg}(q(t))$  所有的人都是内聚的。  $\in [t_0, t_f]$  为中心的

包含了所有时间的所有代理。

$t$ , 即。  $0 : \|x(t)\| \leq R, \forall t \in [t_0, t_f]$

**定义3 (群)。** 如果近似网 $G(q(t))$ 是在  $[t_0, t_f]$   $t_0$ 上连接的, 那么在  $[t_0, t_f]$   $(t_f \geq t_0)$  区间 一组代理被称为群组。

如果临近网的最大组成部分是高度密集的, 那么这个群体就被称为准群。下面的定理提供了集体潜力的局部最小值集合的几何特征, 在建立自组织群的空间秩序方面起着关键作用。

**定理3. (空间-顺序)。**  $V(q)$  的每一个局部最小值都是一个-lattice, 反之亦然。

**证明。** 定义一个-邻域为  $q$

$$= \{q' \in \mathbb{R}^{mn} : \|q'_i - q_i\| \leq \epsilon, \forall i \in \mathcal{I}\} \quad (37)$$

其中  $q' = \text{col}(q'_1, \dots, q'_n)$  如果存在一个  $q$  的-邻域  $\mathcal{N}_{\epsilon}(q)$ , 使得  $V(q) \geq V(q^*)$ , 对于  $q \in \mathcal{N}_{\epsilon}(q^*)$ , 称为  $q^*$  的局部最小值。  $V(q)$  请记住, 在旋转和平移的情况下, 所有的配置都是不变的。

$q_i$ 的, 因此, 它没有任何孤立的局部最小值。

集体势能函数  $V(q)$  可以分解成两个条款。一个由近似性网引起的图形势能函数和附加项, 它是  $h_0$  的整数因子, 即。

$$V(q) = V_G(q) + k(q)h_0 \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} V_G(q) &= \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}(q)} \psi_{\alpha}(\|q_j - q_i\|_{\sigma}) \\ k(q) &= \frac{1}{2} (n(n-1) - |\mathcal{E}(q)|) \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

与  $\mathcal{I} = \{0, 1, \dots, n(n-1)\}$   $k(q)$  请注意, 是一个整数, 直

的值。让我们表示 in-duce proximity nets with edges for a fixed specification. 的  $|\mathcal{E}(q)| = n(n-1) - 2k$  配置集合。观察一下  $\cup_{k=0}^{n(n-1)} Q_k = \mathbb{R}^{mn}$   $k \in \mathcal{I}$ 。对于固定的 我们有

$$V(q) = V_G(q) + kh_0 \geq kh_0 \quad (40)$$

对于所有  $Q_k$ 。任何实现 (40) 中  $q^*$  平等的配置都是的局部最小值, 并满足  $V_G(q^*) = 0$ 。另一方面, 只在  $d_{\alpha}$  取值为零因此, 该配置满足  $z =$

$$\|q_j^* - q_i^*\|_{\sigma} = d_{\alpha} \implies \|q_j^* - q_i^*\| = d$$

为所有  $i, j \in \mathcal{I}$   $N_i(q)$ 。这意味着  $q^*$  是一个-lattice。反过来的证明也相当类似, 因此省略。  $\square$

**定理1:** 考虑一组应用协议的-代理人 (23) (算法1) 与结构动力学  $\Sigma_1$  (定义在 (33)). 设  $\Omega_c = \{(x, v) : H(x, v) \leq c\}$  是一个水平集的哈密顿  $H(x, v)$  of  $\Sigma$  这样对于任何从  $\Omega_c$  开始的解决方案, 代理人形成一个内聚的羊群  $\Omega_c \geq$ 。那么, 以下陈述成立。

- 几乎每一个结构动力学的解决方案都会形成一个平衡  $(x^*, 0)$ , 其配置是一个-格子。  $x^*$
- 所有代理人都渐进式地以相同的速度移动。
- 鉴于  $c < c^* = \psi_{\alpha}(0)$ , 在所有  $\geq$ , 不会发生代理间的碰撞。

**证明。**  $\Sigma_1$  应用协议 (19) 的代理人集体动力学, 都唯一地映射到结构动力学的解决方案  $(x(t), v(t))$ 。我们有

$$\dot{H}(x, v) = -v^T \hat{L}(x) v = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}(x)} a_{ij}(x) \|v_j - v_i\|^2 \leq 0 \quad (41)$$

这意味着 对于所有的  $v$  结构  $t \geq 0$  能量是  $H(x(t), v(t))$  单调的去  $t$ 。此外,  $\Omega_c \leq$  对于所有  $\geq$ , 这意味着  $\Omega_c$  是一个不变的集合。这就保证了速度不匹配的上限为, 因为  $c$

$$K(v(t)) \leq H(x(t), v(t)) \leq c \quad \forall t \geq 0.$$

根据假设, 对于任何从  $\Omega_c$  开始的解决方案, 该组在所有时间内是共挤的  $R > 0$ 。因此, 存在  $t \geq 0$ , 使得  $\|x(t)\| \leq R$ 。速度失配的上界性和组的内聚性的结合保证了始于  $\Omega_c$  的解的有界性。这一事实是以下不等式的结果。

接由近似网的边数决定 并以 算作两条边)。近似网的大小越大, 就越小。

(42)

$$\|(x(t), v(t))\|^2 := \|x(t)\|^2 + \|v(t)\|^2 \leq R^2 + 2c =: C$$

其中是一个常数。

从拉萨尔的不变量原理来看，所有开始的解  
都不融合到最大的不变量集，在

然而，由于该组的

-代理人构成了一个动态的羊群，为所有

对所有

，是一个连通图。因此，根据（41），我们得出结论，

所有代理人的速度在移动中都是匹配的

$$C > 0$$

$$\begin{aligned} & \Sigma_1 \qquad \qquad \qquad \Omega_c \\ E = \{ & (x, v) \in \Omega_c : \dot{H} = 0 \} \end{aligned}$$

$$\alpha \qquad \qquad \qquad t \geq 0, G(q(t))$$

$$t \geq 0$$

$v_1 = \dots$  框架,  $v$  即  $v = 0$ , 因此, 对于所有  $i$  (或  $v = 0$ )。这意味着, 速度的  $p_1 = p_2 = \dots = p_n$  这就证明了第二部分。)此外, 该构型  $x$  渐进地收敛到一个固定的构型  $x^*$  那是  $V(x)$ , 即的外在表现。  $\nabla V(x^*) = 0$ 。

由于任何从某些平衡点开始的系统解, 如局部最大值或鞍点, 都会一直保持在这些平衡点上, 所以不是所有的系统解都会收敛到局部最小值。然而, 除了局部最小值之外的任何东西都是不稳定的均衡(一个总的假设)。因此,

几乎每个系统的解都会收敛到一个均衡  $(x^*, 0)$ , 其中是  $V(x)$  的一个局部最小值。根据定理3,  $V(x)$  的每个局部最小值都是一个。因此,  $\alpha$

是一个 lattice, 渐进地, 所有相邻的无聊代理之间的距离都等于  $\alpha$ 。这就完成了对第一部分) 和第二部分)。

我们通过矛盾法证明第iii)部分。假设存在一个  $t = t_1 > 0$  时代, 两个不同的代理人  $k, l$  碰撞, 或  $q_k(t_1) = q_l(t_1)$ 。对于所有的  $t \geq 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} V(q(t)) &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \psi_\alpha(\|q_j - q_i\|_\sigma) \\ &= \psi_\alpha(\|q_k(t) - q_l(t)\|_\sigma) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{V} \setminus \{k, l\}} \sum_{j \in \mathcal{V} \setminus \{i, k, l\}} \psi_\alpha(\|q_j - q_i\|_\sigma) \\ &\geq \psi_\alpha(\|q_k(t) - q_l(t)\|_\sigma). \end{aligned}$$

因此,  $V(q(t_1)) \geq \psi_\alpha(0) =: c^*$ 。但速度失配是一个非负量, 而且  $\Omega_c$  是一个不变量的水平集。因此

$$V(q(t)) \leq H(x(t), v(t)) - K(v(t)) \leq H(x(t), v(t)) \leq c < c^*$$

$t \geq 0$  所有。这与早先的一个不平等现象相矛盾  $V(q(t_1))$ 。因此, 在任何时候都不会有两个代理人发生碰撞  $t \geq 0$ 。□

定理1中的假设对于一般的初始状态集很少成立, 因此出现了碎片化而不是成群结队。相反, 以下定理的假设对于一般的初始状态集是成立的, 没有必要假定群体的凝聚力或代理人在无限的时间间隔内的接近网的连接性。

定理2: 考虑一组应用协议的代理人

(24)  $c_2$  (算法), 有

$\Sigma_2$  和结构动力学[定义在 (34)]。假设初始速度失配和惯  $K(v(0))$  性  $J(x(0))$  是有限的。那么, 以下声明持有。

- 代理人群体在所有  $t \geq 0$ 。
- 所有的解都渐进地收敛到一个平衡点  $(x_\lambda^*, 0)$   $x_\lambda^*$

那么, 最多只有一对不同的  $\alpha$  可能会发生碰撞 ( $k = 0$ ), 保证无碰撞运动)

证明。首先, 请注意, 具有结构动力学和哈密尔顿粒子系统在移动框架中是一个严格耗散的粒子系统, 因为它满足

$$\dot{H}_\lambda(x, v) = -v^T (c_2 I_m + \hat{L}(x)) v = -c_2 (v^T v) - v^T \hat{L}(x) v < 0$$

对所有  $v \neq 0$ 。因此, 结构能量  $H_\lambda(x, v)$ , 对于所有的  $(x, v)$ , 都是单调递减的。

$$H_\lambda(x(t), v(t)) \leq H_0 := H_\lambda(x(0), v(0)) < \infty.$$

$$H_0 = V(x(0)) + \lambda J(x(0)) + K(v(0))$$

的有限性如下

从假设集体潜能、惯性和速度失配都是初始有限的。因此, 对于所有  $t \geq 0$ , 我们有

$$U_\lambda(x(t)) \leq H_0, K(v(t)) \leq H_0.$$

然而,  $U_\lambda(x) = V(x) + (\lambda/2)x^T x$   $\lambda > 0$  与  $V(x) \geq 0$  为所有  $x$ , 因此

$$x^T(t)x(t) \leq \frac{2H_0}{\lambda} \quad \forall t \geq 0.$$

这保证了所有  $t \geq 0$  因为所有代理人的位置仍然在一个半径为  $R = \sqrt{2H_0/\lambda}$  为中心的球。这种内聚特性对速度与速度失配的有界性一起, 或  $K(v(t)) \leq H_0$ , 保证了结构动力学的解的有界性  $\Sigma_2$ 。为了看到这一点, 让  $z = \text{col}(x, v)$  然后

$$\|z(t)\|^2 =$$

$$\begin{aligned} &x^T(t)x(t) + v^T(t)v(t) \\ &\leq 2 \left( \frac{1}{\lambda} + 1 \right) H_0 =: C(\lambda) < \infty. \end{aligned}$$

, 其中是一个局部的最小值。

- 所有代理人都渐进式地以相同的速度移动。
- 假设粒子系统的初始结构能量小于  $H_0$  与和

第二部分) 由拉萨尔的不变性原则得出。请记住，

implies

。因此，与定理1的证明中的论点

类似，几乎粒子系统

的每一个解都渐进地收敛到一个平衡点 $z_{\lambda}^*$ ，其中 $x_{\lambda}^*$ 是集合势函数 的局部最小值。

第三部分) 由渐近消失的事实得出。因此，所有代理人的速度在参考框架内渐进地匹配。

为了证明第IV部分，

假设在给定的时间内，

有多对不同的代理人发生碰撞  $H_0 < (k+1)c^*$ 。因此，在时间  $k+1$  至少必须有  $k+1$

$$\begin{aligned} H_0 &= V(x(0)) + \lambda \int_{t_1}^t J(x(s)) ds + K(v(0)) \geq V(x(0)) \\ &\geq (k+1)\psi_{\alpha}(0). \end{aligned}$$

这与假设相矛盾, 即  $\leq (k+1)c^* H_0$ 。因此, 在任何时候都不可能有过不同的代理对发生碰撞,  $\leq 0$ 。最后, 通过  $k=0$  没有两个代理人会发生碰撞。□

定理2确立了应用算法2的  $Q(n^2)$  组代理的集体行为的一些关键属性, 包括内聚力、收敛、渐进速度匹配和避免碰撞。但是, 除非提供一个相对较小的

$$U_\lambda(q) \quad \lambda > 0$$

的局部最小值的几何特征, 否则不可能确定极限构象  $x_\lambda^*$  是与-lattice "密切相关"。我想提出两个构想, 以确立  $U_\lambda(q)$  的任何局部最小值的几何和图论特性与羊群的特征之间的这种密切关系。

**猜想1 (连接性)。**  $U_\lambda(q)$  的任何局部最小值  $q_\lambda^*$ , 都会产生一个连接的接近网。

猜想1的含义是, 一群-  $\alpha$  代理人是渐进式的自我组装。下一个猜想说明了  $q_\lambda^*$  的地缘计量特性。

**猜想2 (准格子)。** 设  $U_\lambda(q) = V(q) + \lambda J(x)$  是一个具有参数  $\lambda > 0$

总势函数  $n$ , 对于任何固定的  $= 1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ), 满足  $1$   $r/d$   $q_\lambda^*$   $U_\lambda(q)$ , 存在

这样的情况: 1) 任何局部的最小值与  $q_\lambda^*$   $(0, \lambda^*)$  是一个准  $\kappa$ , 其比率为  $m = 1, 2, 3$ , 诱导出平面图  $(G(q_\lambda^*), q_\lambda^*)$ , 维度。

对这两个猜想的证明/反证是正在进行的研究的主题。现在, 我们准备提出一个更加强化的定理2的版本, 该定理与成群的几何学和图论关系。

**定理3:** 考虑一组应用协议的-代理人 (24) (算法2) 与  $c_1, c_2 > 0$  和结构动力学  $\Sigma_2$ 。假设初始结构能量是有限的, 并且相互作用范围满足  $r/d = 1 + \varepsilon \ll 1$  ( $\varepsilon$ )。如果猜想1和2成立, 那么几乎每一个解都渐进地收敛到一个平衡点  $(x_\lambda^*, 0)$ , 其中  $x_\lambda^*$  是一个准-格子, 并且一个羊群是渐进地自组装的。

**证明。** 该证明由定理2的第ii) 部分和猜想1和2得出。

在成群结队的模拟结果中 (见第八节), 作者观察到在成群结队过程中, 由- 代理人的轨迹诱导的接近结构是平面图。下面的定理, 分析性地确立了这一平面性属性, 以及对由-lattices诱导的接近网的计算复杂性的约束。

**定理4 (平面性)。** 设是一个规模和 比率的-lattice, 节点位于不同的位置。那么

- 近似结构 是  $G(q)$  平面图, 尺寸为 ;
- 在  $\mathbb{R}^2$  中的  $m = 2, 3$  大多数链接上都有近似的 nethas。  $G(q)$
- 靠近的  $G(q)$   $n > m$  网络节点 不可能是一个完整的图形  $m =$  信息。1, 2, 3.

**证明。** 见[51, 应用A]。□

二维空间中接近结构的平面性的重要性在于, 相互间的总数量 维持成群结队运动所需的计算条件是 (与代理的数量成线性关系)。与使用分布式植群算法的成本相比, 使用分布式植群算法的计算复杂性大大降低。

在一些现有的蜂群模型中，所有对所有的互动拓扑结构

3：根据定理4，由lattices诱导的图形的平面性对相互作用范围与期望距离最大比率施加了限制。以立方晶格为例，维度为如果是有效的-晶格，其比率为。否则，两个节点如果在一个超立方体的对角线的对面成为邻居，这作为一个板块就无效了。因为每个节点不能再与所有的邻居保持同样的距离。

## VI. 算法1体现了雷诺兹规则

在这一节中，我们证明算法1将雷诺兹[5]的所有三种规则的前述形式包含在一个方程中。雷诺兹规则的主要模糊之处在于，不清楚每条规则何时以及如何适用，因为没有任何一条规则是用数学方法说明的。这个问题在我们试图从算法1中正式提取雷诺兹规则时得到了解决。

我们分析的关键工具是图的应力元素[44]。让我们把与接近网 $(i, j)$ 的边相关的应力元素定义为： $G(q)$

$$s_{ij}(q) = \frac{1}{\alpha} \frac{(q_j - q_i) \cdot \mathcal{E}(q)}{\|q_j - q_i\|^\alpha}. \quad (43)$$

非相邻代理之间的应力元素被定义为零。 $(\alpha, \alpha)$  蜂群协议可以用应力和邻接元素表示如下。

从前面的等式中可以看出，雷诺兹的三个规则都是如此。第二项代表速度匹配规则（或规则3），第一项体现了羊群中心化和分离规则（规则1和2）。

为了证明这一事实，让我们定义 $S_i(q)$ 。我们有

$$\sum_{j \in N_i} s_{ij}(q) (q_j - q_i) \quad (44)$$

其中， $\langle q_i \rangle$ 是代理的邻居位置的加权平均值，即 $\langle q_i \rangle = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} q_j$ 。因此，每个代理人遵守以下规则：a) 如果

## VII. 避开障碍物的蜂拥而上

在本节中，我们提出了一种具有多重避障能力的分布式蜂群算法。其主要思想是

$$\kappa = 1 + \varepsilon \frac{q}{0 < \epsilon < \sqrt{m}} \frac{r}{m} \frac{d > 0}{\alpha}$$

$$= \frac{\phi_\alpha(\|q_j - q_i\|_\sigma)}{1 + \epsilon \|q_j - q_i\|_\sigma}, \quad \in$$

$$w_i^\alpha = \sum_{j \in N_i(q)} s_{ij}(q) (q_j - q_i) + \sum_{j \in N_i(q)} a_{ij}(q) (p_j - p_i) = w_i^g + u_i^d.$$

$$= \sum_{j \in N_i} s_{ij}(q)$$

$$u_i^g = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} s_{ij}(q) (q_j - q_i) = S_i(q) (q_i - \langle q_i \rangle)$$

，向邻居的加权中心移动。如果 $s_{ij}(q) q_j$ 远(即邻居的加权)中心。这与 $S_i(q) > 0$

$$< 0$$



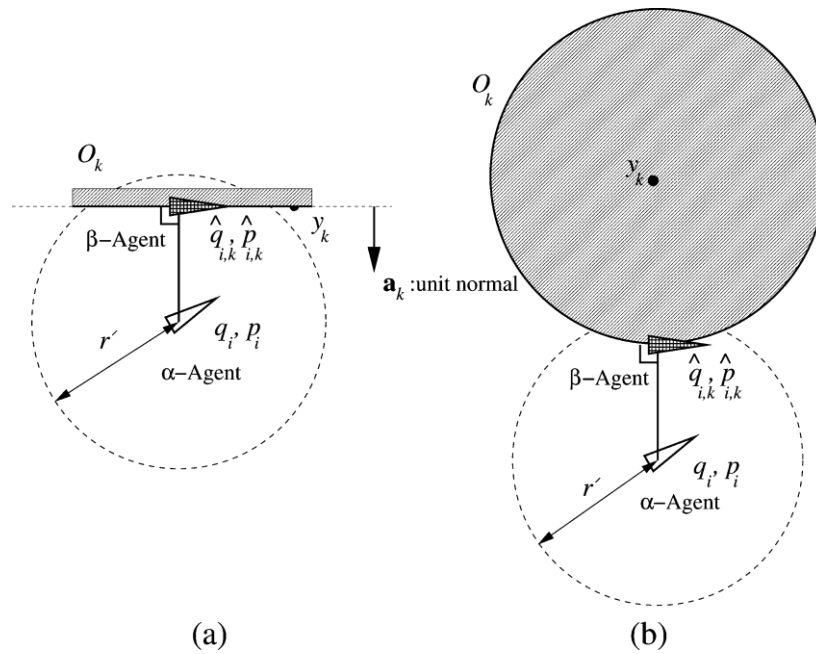


图5. 基于代理的障碍物表示。(a)墙。(b)球形障碍物。

通过创建一种新的代理种类, 即  $\beta$ -代理, 使用基于代理的方式表示所有附近(活动)的障碍物。 $\beta$ -代理是一个运动学代理, 它由一个代理诱导, 每当

$\alpha$ -代理人在靠近障碍物的地方。在下文中, 我们正式定义了  $\beta$  代理的概念, 并规定了代理和  $\beta$  代理之间的行动协议。

我们把我们的研究限制在障碍物上, 这些障碍物是连接的凸形区域<sup>18</sup>, 其边界是光滑流形的。具体来说, 我们关注的障碍物是球体或无限的墙, 如图5所示。我们避开障碍物的方法可以总结为以下步骤。

- 1)  $O_k$  确定作为  $\alpha$ -代理的邻居的障碍物集合的指数  $N_i^\beta$  (有待定义)。
- 2) 在  $\hat{q}_{i,k}$ , 通过投影在邻近的障碍物  $O_k$ , 创建一个(虚拟的)运动学  $\beta$ -代理, 其中  $\hat{q}_{i,k}$  满足以下条件

$$\hat{q}_{i,k} = \arg\min_{x \in O_k} \|x - q_i\|$$

而  $O_k$  是一个封闭的球或一个超平面一侧的封闭半空间。

- 3) 在  $\hat{q}_{i,k}$  ( $\psi_\beta(z)$  待定义)的每一个  $\beta$ -agent 对应的一组 agent 的潜在函数中添加一个术语  $\psi_\beta(\|\hat{q}_{i,k} - q_i\|_\sigma)$ 。

这种方法的部分动机来自于哈提卜的工作 [38] 和 Helbing 等人 [10]。图5示意性地说明了在接近两种类型的障碍物的情况下,  $\alpha$ -代理和  $\beta$ -代理所诱导的位置。不难想象, 在有障碍物的情况下, 近似网、近似结构和-矩阵等概念可以被概括为类似的对应物。

#### A. $\beta$ -代理人的邻居 $(\alpha, \beta)$ 接近网

让  $\mathcal{V}_\alpha = \{1, 2, \dots, n\}$  和  $\mathcal{V}_\beta$  分别表示  $\alpha$ -代理和障碍物 (或  $\beta$ -代理) 的指数集合。请注意, 其元素中的素数是用来保证

代理人) 的指数集合。请注意, 其元素中的素数是用来保证

一个代理被称为

当且仅当球  $B_{r'}(q_i)$  和  $O_k$  重叠时，一个障碍物  $\mathcal{V}_\beta$

(如图5所示)。代理人和障碍物之间的这种邻接形式是一种相互属性。更重要的是，一个代理人可能有多个相邻的障碍物。特别是，当一群代理人打算通过一条狭窄的通道时，这种情况就会发生。

我们定义了" $\alpha$ -邻居"和" $\beta$ -邻居"的集合。

-代理  $\mathcal{V}_\alpha$ ，具体如下。

$$\{j \mathcal{V}_\alpha \| q_{ji} \| r\} \quad (46)$$

$$\{k \mathcal{V}_\beta \| \hat{q}_{ik}, q_{ik} \| r'\} \quad (47)$$

其中  $r, r'$ ，分别是一个代理与邻近的无聊代理和  $\beta$  代理的 *互动范围*。在这里，我们选择

，但一般来说，并可以独立选择。

一个代理  $\mathcal{V}_\alpha$  的-和  $\beta$ -邻居的集合自然地定义了一个 *接近网*，它是一个空间上的诱导图，形式为

$$G_{\alpha,\beta}(q) G_\alpha(q) \quad (48)$$

其中是所有代理人的接近网  
和 是由和  
诱导的 *有向二方图*，是障碍物的  
集合  $\mathcal{V}_\beta$ ，其中  $\mathcal{E}_\beta(q)$   
该条件 保证了良好的处理性  
的定义  $G_\beta(q)$ 。更明确地说，我们有

$$(49)$$

和 同样地，一个  
*接近结构*是一个三联体  
，其中表示所有-代理人的配置。请记住，两个-  
代理之间没有边。

$$\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta = \alpha$$

$$O_k (k \in$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$\alpha \quad i \in$$

$$N_i^\alpha = \in : - <$$

$$N_i^\beta = \in : - <$$

$$> 0$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$r' < r$$

$$r$$

$$r'$$

$$\alpha$$

$$(\alpha, \beta)$$

$$\alpha$$

$$i \in$$

$$= + G_\beta(q)$$

$$G_\alpha(q) = (\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{E}_\alpha(q))$$

$$\alpha$$

$$G_\beta(q) = (\mathcal{V}_\beta, \mathcal{E}_\beta(q))$$

$$q$$

$$\mathcal{O} = \{O_\parallel : \parallel \in$$

$$\subseteq$$

$$= \emptyset$$

$$\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta$$

$$\mathcal{E}_\beta(q) \equiv \{(i, j) : i \in \mathcal{V}_\alpha, j \in N_i^\alpha\}$$

$$G_{\alpha,\beta}(q) = (\mathcal{V}_\alpha \cup \{(i, j) \in \mathcal{E}_\beta(q) \mid (G_{\alpha,\beta}(q), q, \hat{q})\} \quad (\alpha, \beta)$$

$$\beta$$

$$\beta$$

$$\hat{q}$$

一个-代理的新的代理和代理对障碍的代数约束集可以被指定为如下。

$$\begin{cases} \|q_j - q_i\| = d & \forall j \in N_i^\alpha \\ \|\hat{q}_{i,k} - q_i\| = d' & \forall k \in N_i^\beta. \end{cases} \quad (50)$$

一个受约束的lattice表示, (由)个lat- $\alpha$  tice和一组障碍物组成。O中的一组约束条件。(50).一个受约束的-格的相关比率是  $r/d$  和  $d'/d = r'/r$  (我们假设  $\kappa' = \kappa$ )。

### B. 多物种的集体潜力

为了在有障碍物的情况下实现成群结队, 我们对粒子系统使用了以下的多物种集体潜力函数。

$$V(q) = c_1^\alpha V_\alpha(q) + c_1^\beta V_\beta(q) + c_1^\gamma V_\gamma(q) \quad (51)$$

其中  $c_1^\alpha, c_1^\beta, c_1^\gamma$  为正的常数  $(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma)$  和相互作用电位是定义

如下:

$$V_\alpha(q) = \sum_{i \in \mathcal{V}_\alpha} \sum_{j \in \mathcal{V}_\alpha \setminus \{i\}} \psi_\alpha(\|q_j - q_i\|_\sigma) \quad (52)$$

$$= \sum_{i \in \mathcal{V}_\alpha} \sum_{k \in N_i^\beta} \psi_\beta(\|\hat{q}_{i,k} - V_\beta(q)p_i\|_\sigma) \quad (53)$$

$$= \sum_{i \in \mathcal{V}_\alpha} (\sqrt{1 + \|q_i - q_r\|^2} - V_\gamma(q)). \quad (54)$$

该功能  $V_\gamma(q)$ , 与一群代理人的导航目标有关。一群人之间的异质相邻关系。

$\alpha$   $q_i$  和其相邻的  $\beta$ -agent at  $\hat{q}_{i,k}$ , 定义为:

$$= b_{i,k}(q) \rho_h(\|\hat{q}_{i,k} - q_i\|_\sigma / d_\beta) \quad (55)$$

其中  $d_\beta$  与  $d_\beta \|v_\beta\|_\sigma, r_\beta \|r'\|_\sigma$ 。定义为  $\psi_\beta$  斥力作用函数

$$= \rho_h(z/d_\beta) (\sigma_1(\phi_\beta(z) d_\beta)) \quad (56)$$

与  $\sigma_1(z) = z/\sqrt{1+z^2}$ 。请注意,  $\phi_\beta(z)$  平滑地消失了为零, 在  $z = d_\beta$  时为零, 并在  $z \geq d_\beta$  这自然定义了一个排斥性的配对势  $\psi_\beta(z)$  的形式

$$\psi_\beta(z) \equiv \int_{d_\beta}^z \phi_\beta(s) ds \geq 0. \quad (57)$$

由于现实生活中的车辆/机器人/动物不能应用无界的力, 我们避免使用具有无界导数的函数, 如  $1/z$  或  $\log(z)$  ...显然。  $-2 < \psi'_\beta(z) \leq 0$  为所有  $z \in \mathbb{R}$ , 因此,  $\psi_\beta(z)$  的导数是均匀地有界。

### C. 避开障碍物的蜂群

我们准备提出我们的主要植群算法, 该算法具有避开障

其中  $u_i^\alpha$  表示  $(\alpha, \alpha)$  交互条件,  $u_i^\beta$  表示交互条件,  $u_i^\gamma$  并且是一个分布式导航反馈。(58)中的每个项都明确规定如下。

$$\begin{aligned} u_i^\alpha &= c_1^\alpha \sum_{j \in N_i^\alpha} \phi_\alpha(\|q_j - q_i\|_\sigma) \mathbf{n}_{i,j} \\ &\quad + c_2^\alpha \sum_{j \in N_i^\alpha} a_{ij}(q)(p_j - p_i) \\ u_i^\beta &= c_1^\beta \sum_{k \in N_i^\beta} \phi_\beta(\|\hat{q}_{i,k} - q_i\|_\sigma) \hat{\mathbf{n}}_{i,k} \\ &\quad + c_2^\beta \sum_{j \in N_i^\beta} b_{i,k}(q)(\hat{p}_{i,k} - p_i) \\ u_i^\gamma &= c_1^\gamma \sigma_1(q_i q_r) - c_2^\gamma (p_i - p_r) \end{aligned}$$

$\sigma_1(z) = z/\sqrt{1+\|z\|^2}$  其中,  $c_n^\nu$  为正常数, 用于所有  $\nu = 1, 2$  和  $\nu = \alpha, \beta, \gamma$ 。  $(q_r, p_r)$  对是一个的状态。  $\mathbf{n}_{i,j}$   $\hat{\mathbf{n}}_{i,k}$  和是由静态/动态-代理。向量

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{q_j - q_i}{\sqrt{1 + \epsilon \|q_j - q_i\|^2}} \quad \hat{\mathbf{n}}_{i,k} = \frac{\hat{q}_{i,k} - q_i}{\sqrt{1 + \epsilon \|\hat{q}_{i,k} - q_i\|^2}}.$$

拼图中唯一缺失的部分是计算  $\beta$  agents的位置和速度的方法, 这将在接下来讨论。

在传感要求方面, 我们假设每个  $\alpha$ -代理配备了测距传感器, 使代理能够测量障碍物上最近的点与自己之间的相对位置。雷达和激光雷达 (或拉达) 都可以作为测距传感器使用。

### D. $\beta$ 代理商的位置和速度的计算

给定一个障碍物  $O_k$ , 其相邻的-代理的状态为  $(q_i, p_i)$  墙或球体上的  $\beta$ , 其位置和速度由以下定理给出。  
定理4: 让  $\hat{q}_{i,k}, \hat{p}_{i,k}$  与  $(i, k) \in \mathcal{V}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta$  表示由一个-代理产生的位置和速度  $\beta$  其状态在一个障碍物  $O_k$ 。那  $(\hat{q}_{i,k}, \hat{p}_{i,k})$  列条件成立。

i) 对于一个具有超平面边界的障碍物, 其单位为  $\mathbf{a}_k$  法线并通过该点  $y_k$ , 位置障碍物的能力。

算法3: 该算法由三个条款组成

(58)

其中是一个投影矩阵。

ii) 对于半径为 $R_k$ 的球形障碍物， $\beta$ 代理的位置和速度由以下公式给出

其中，和

证明。见[51, Lemma 3]的证明。

下面的定理表明，第二项实际上是一个有效的阻尼力。这一事实在后面将用于确定整个粒子系统是耗散的。

$$\hat{q}_{i,k} = Pq_i + (I - P)y_k \quad \hat{p}_{i,k} = Pp_i \\ P = I - \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T$$

$y_k$

$$\hat{q}_{i,k} = \mu q_i + (1 - \mu)y_k \quad \hat{p}_{i,k} = \mu Pp_i \\ \mu = R_k / \|q_i - y_k\|, \mathbf{a}_k = (q_i - y_k) / \|q_i - y_k\| \\ P = I - \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T$$

□

$w_i^\beta$

定理5: 有  $\hat{f}_d$   $\alpha$  元素的-代理和  $\beta$ -代理之间的力  $\sum_{k \in N_i^\beta} b_{i,k}(\hat{p}_i - \hat{p}_k)$  是一个有效的阻尼力。

即, 让  $K_r$  和假设  $(1/2) \sum_i \|\hat{p}_i\|^2$   $\dot{p}_i = \hat{f}_i^d$  那么  $\dot{K}_r \leq 0$ 。

证明。见[51, Lemma 4]的证明。 ■

### E. 避开障碍物的蜂群分析

一个自然的问题是, 通过应用算法3得到的粒子系统是否是耗散的。在这种情况下, 答案并不像代理之间的相互作用那样可以预测。原因是, 在自由集中, 每个代理都会对其相邻的行动进行互惠, 但在受约束的集中, 接近网是一个有向图。

定理5: 考虑一个应用算法的粒子系统3[或协议(58)]。假设-代理是一个静态的, 有一个固定的状态  $(q_r, p_r) = (q_d, p_d)$ 。定义具有动能的能量  $H(q, p) = V(q) + T(q, p)$  函数  $T(q, p) = (1/2) \sum_{i=1}^n \|\hat{p}_i\|^2$ 。假设存在一个有限的时间, 使  $t_0 \geq 0$  所有代理人的平均速度满足于条件

$$\frac{n}{2} \langle \hat{p}_c(t), \hat{p}_d \rangle \leq T(q(t), p(t)) \quad (60) \quad \forall t$$

那么, 系统的能量是单调下降的 (即。

$\dot{H}(q(t), p(t)) \leq 0$  沿着多物种系统的集体动力学  $t$  轨迹, 所有  $t \geq t_0$ 。

证明。见[51, Th.6]的证明。 □

对一组速度相等的粒子来说, 条件 (60) 的解释很有意思。在某种情况下,

$$\hat{p}_c \hat{p}_d \leq \|\hat{p}_c\| \|\hat{p}_d\|$$

对于所有

$i$  因此, (60)简化为不等式

$$\theta_{c,d} \text{ 矢量 } \hat{p}_d \in \mathbb{R}^m \text{ 表示 } = \langle \hat{p}_c, \hat{p}_d \rangle / (\|\hat{p}_c\| \cdot \|\hat{p}_d\|) \text{ 和 } \sin$$

之间的错位角

$$\cos(\theta_{c,d})$$

。假设

$\hat{p}_c, \hat{p}_d \neq 0$  那么, 该小组必须有足够的敏捷性, 或  $\|\hat{p}_c\| \geq v_0 := \|\hat{p}_d\| \cos(\theta_{c,d})$ 。直观地讲, 这可以被解释为小组的集体努力, 以跟上所需的速度

$\hat{p}_d$  对于一个有  $\hat{p}_d = 0$

的情况下, 条件(60)基本成立

在有障碍物存在的情况下, 分析一群动态代理人的平衡状态, 当鸟群不能绕过所有障碍物时, 就没有意义了。更准确地说, 当一些  $\beta$

代理商长期存在时, 分析羊群集体动力学的平衡状态的稳定性就不那么有趣了。这对于诸如传感器安置和分布式传感等问题来说当然不是这样的[15]。另一方面, 如果我们假设在某个有限的时间  $> 0$

, 没有一个代理曾经接近过障碍物, 那么这个案例就会减

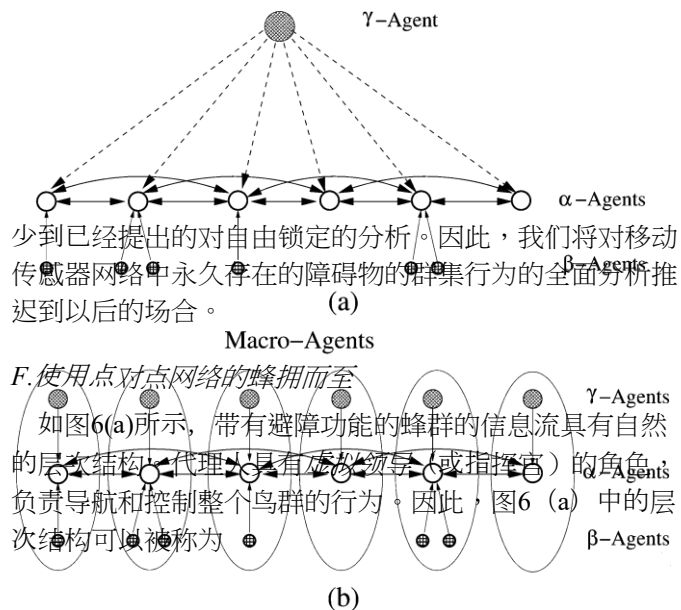


图6. 在受限植群中的代理内和代理内信息流。  
(a) 虚拟领导/追随者的分层架构。(b) 点对点架构。

作为一个*虚拟领导/追随者架构*。代理人和所有之间的虚线表示在

(否则，算法会变得集中化)的单一信息交换。请注意，虚拟领导/追随者架构不应该与领导/追随者架构相混淆，后者的领导是物理代理之一(例如，多车系统中的车辆或学校中的鱼)。

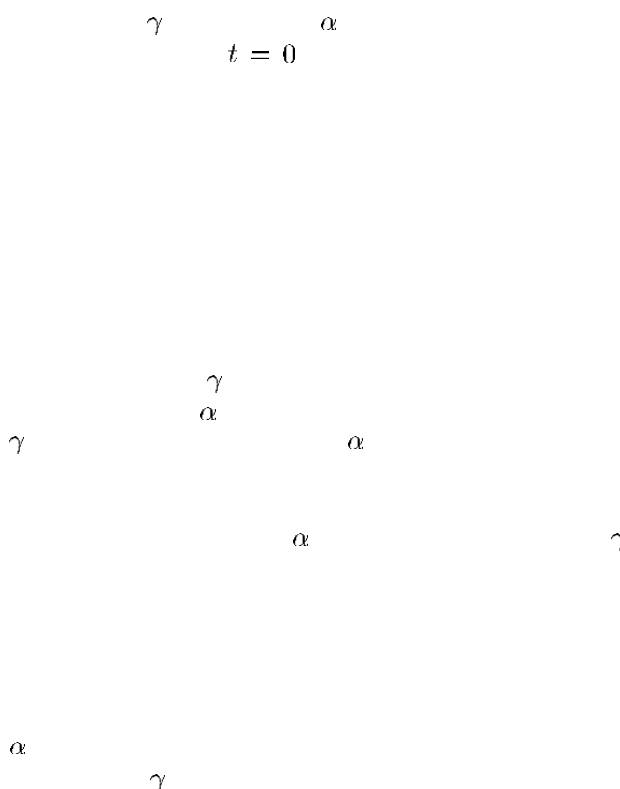
由于实现虚拟代理所需的计算必须由物理代理的嵌入式计算机进行，图6(a)没有提供实现AI-gorithm 3所需的计算架构的现实情况。虽然，分层结构有助于理解为什么一个代理扮演着统一目标的角色，将所有的代理聚集在一起，组成一个移动代理的连接网络。

为了建立算法3的信息流模型，我们创建了一个如图6(b)所示，每个-代理对应的-代理。新的架构是一个*对等的网络*，代表了一组*宏代理*的互动(见图6(b))。如图6(b)所示，每个宏观代理由一个-代理和其相应的-和-代理组成。该图表明，算法1和2是算法3的特例，可以使用点对点网络来实现。

在这个宏观代理的网络中，两个宏观代理只交流其公共组件的状态(即。

代理人)。在所有代理人的初始状态和动态都相同的假设下，虚拟领导/追随者和对等结构成为多物种粒子系统的等效代表。

使用对等网络对动态代理群体进行跟踪/迁移的可行性的生物学含义是：“羊群不需要领导者”。这在数学上证实了一个多年来动物行为学家所知道的事实[1]。



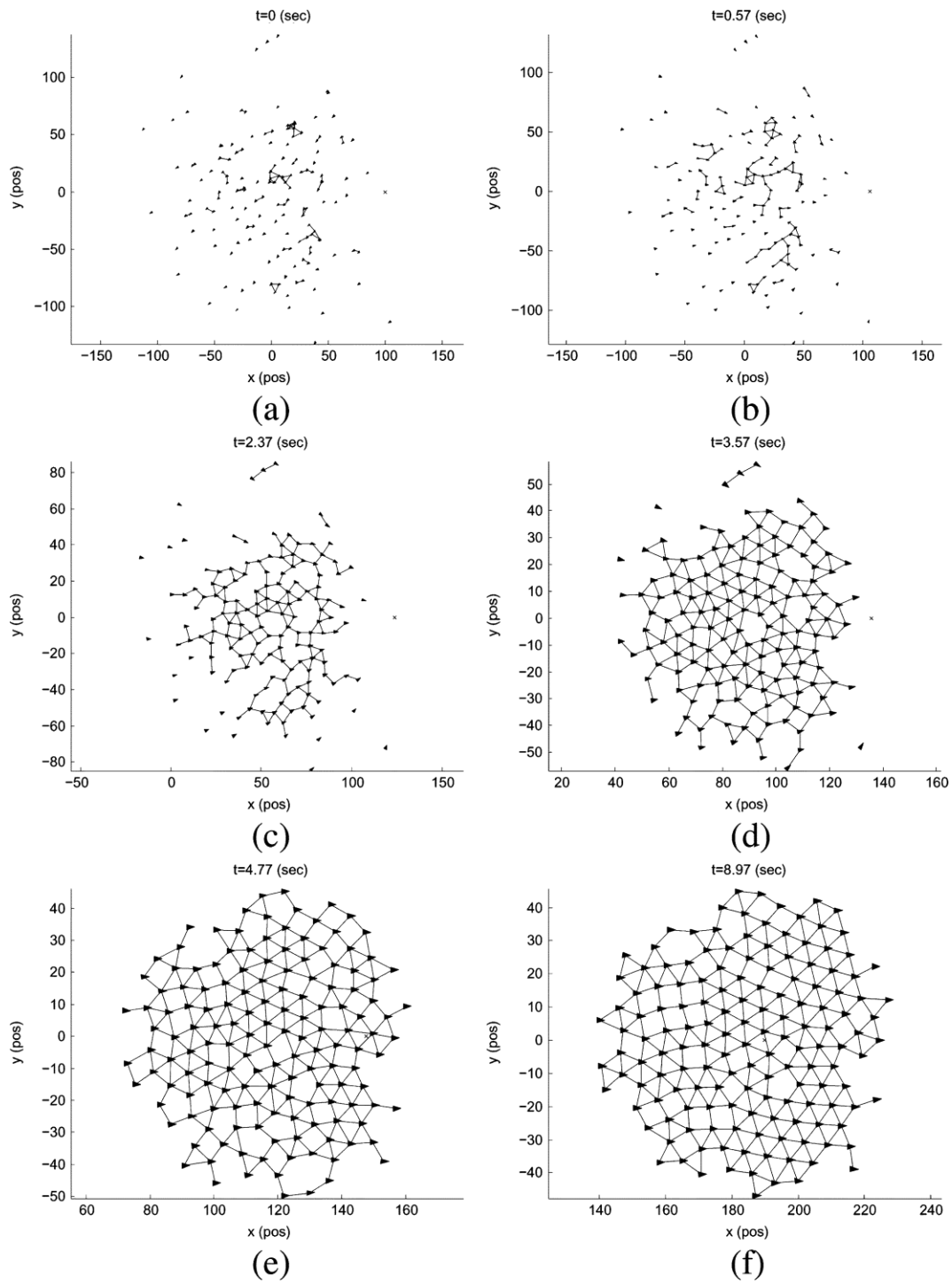


图7.应用算法2的,=100个代理的二维蜂群。

### VIII. 仿真结果

在这一节中，我们提出了几个二维和三维植绒的

是分别为每个

模拟结果。以下参数在所有模拟中保持固定： $d = 1.2d$ ， $r = 1.2r$ （或 $d' = 0.6d, r' = 0.1$ ）， $a = 1.2a, b = 5$ （为 $\phi(z), h = 0.2$  norm）， $\phi_\alpha(z), h = 0.9 \phi_\beta(z)$ 为

，所有模拟中的步长在0.01-0.03s之间（相当于33-100Hz的更新频率）。蜂群算法的参数和初始状态的类型

矩阵来指定，其中 $M_s$ 的每一列是矢量

$$\begin{matrix} & l \\ (m+1) \times l & M_s \\ \text{col}(y_k, R_k) \in \mathbb{R}^{m+1} \end{matrix}$$

在所有的模拟结果中，每个人的航向角（或姿态）都是一样的。

- 代理人指定了该代理人的速度方向。此外，动态代理的位置被标记为一个符号。

$$\alpha \qquad \qquad \qquad \gamma \qquad \qquad \qquad \times$$

A. 自由空间中的二维植绒(150)

=

图7显示了150个代理在自由空间的二维植群过程中的连续快照。



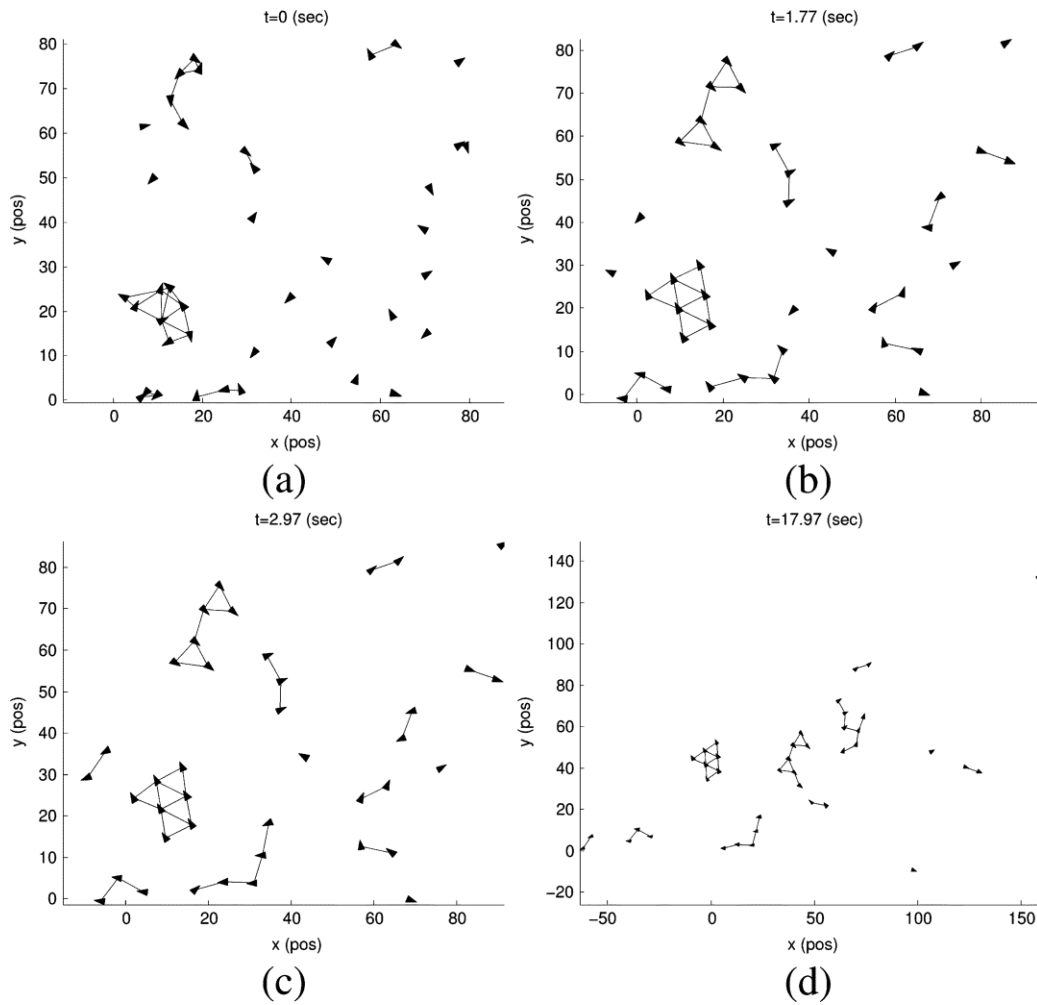


图8. 应用算法1的40个代理的碎片情况。

算法2。初始位置从方差为2500的高斯分布中随机选择。初始速度坐标从盒子中均匀地随机选择  $[-2, -1]^2$ 。在图7(d)中形成了一个鸟群，并在此后保持。本例中使用了一个动态代理。接近网  $G(q(t))$  的边的数量随时间增加，并有使网络连接的趋势。一组初始位置是随机选择的，所以初始的接近网  $G(q(0))$  是高度不连接的（即，有太多的组件）。这使得成群结队的任务更具挑战性。图7(c)到(f)中的接近结构的平面性是非常清楚的。数值测量表明，最终的构象是一个低能量的准平面结构，诱导出一个连接的接近网[见图12 (a)]。这些观察结果与我们在第五节中的理论预测非常一致。 $\alpha$

### B. 自由空间的二维碎片化 (n=40)

图8展示了应用算法1的代理人的碎片化现象。这并不令人惊讶，随着40人惊讶，随着一组随机的初始状态，不会产生成群的行为。在图8(f)中，我们可以确定接近网的九个不同的小部件（每个部件至少包含两个代理）和三个单独的代理。

在算法1（或  $\gamma$  协议）中，由于缺乏群体目标的存在，所以不存在代理。这个模拟结果是另一个证据，表明创建成群运动是相当不容易的，因为使用基于梯度的控制法和速度匹配项的想法不一定能行得通。

分裂是应用算法1的代理的集体行为的一种通用形式。这种行为对代理人的初始位置的概率分布类型不敏感。显然，对于初始速度不匹配的高度密集的初始近似网的情况，人们可能期望代理人群体形成一个准锁。

在图8(d)-(f)中，可以观察到属于接近网的两个不同组成部分的两个代理，随着时间的推移，彼此之间的距离越来越远。同样，这也是碎片化的一个通用属性。碎片化现象可以被看作是一群粒子中缺乏凝聚力[见图12(b)]。

### C. 自由空间中的3-D群落。自动会合

图9显示了使用算法2对一组代理的3-D蜂群的连续快照。每个代理代表一个在  $\mathbb{R}^3$  中移动的无人机。代理的初始状态是以高斯分布随机选择的。姿态

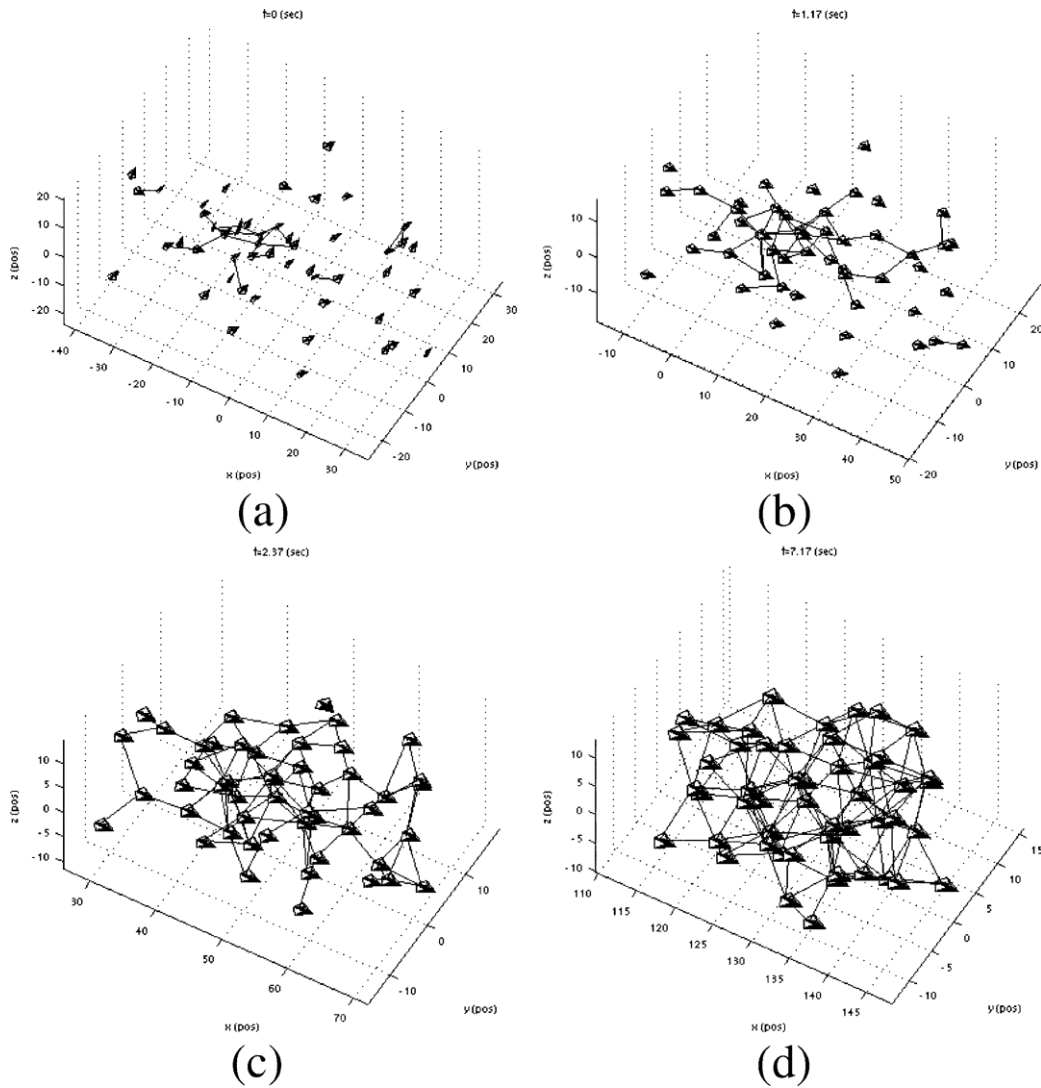


图9. 使用算法2对50个无人机进行3-D成群/自动会合的快照。

每个无人机的旋转矩阵为  $R_i$ ，列为  $SO(3)$   $r_1, r_2, r_3$ 。我们用以下步骤来确定从 velocity i) 设置  $p_i \neq 0$  ii) 设置  $p_i / \|p_i\|$  iii) 设置  $p_i = (0, 0, 1)^T$  表示中的交叉积。对于  $r_3$  定义  $1 \times r_{R_i} \times I_3$ 。根据这个实验，成群结队可以作为中到大数量的自主代理自动会合（或聚集）的一种手段。很明显，在一些有限的时间后，代理人会自我组合成一个羊群，并在之后保持其连接性。这一声明的正式证明需要第五节的猜想1的证明。

#### D. 分裂/重新结合的机动性。无人机的低空飞行和捕食者的回避

考虑一组打算从点  $A$  移动到点  $B$  的代理人。这里， $A$  和  $B$  是该组的源点和目的地的位置。当连接到  $A$  和  $B$  的直线上有多个障碍物时，代理不能通过这些障碍物。因此，他们可能会分成两个或多个较小的组。这种机动方式对于需要无人机低空飞行的任务是非常有用的，或者说，对于那些需要低空飞行的任务是非常有用的。

在城市环境中移动。在鱼群中，分裂/重合的动作被用作躲避捕食者的战术[3]。

执行分裂/重合演习的目的是将最初由于障碍物或敌对代理人的存在而分裂的各种群体聚集起来。图10展示了在存在障碍物的情况下，代理商的小组  $n = 150$  重合演习。根据图10，很明显，在成群的过程中，动态代理的接近网经历了频繁的变化。换句话说，成群结队涉及到对具有切换拓扑结构的动态系统网络的稳定性分析（例如，[21]）。

代理人的初始位置从盒子里均匀地随机选择  $[-40, 80]^2$ 。初始速度被设置为零。群体目标是由一个静态的代理指定的，并具有  $(5, 0)^T$ 。此外，  $c_1^\gamma < c_1^\beta$  和  $c_2^\gamma = 2\sqrt{c_1^\gamma}$ 。障碍物的矩阵是

$$M_s = \begin{bmatrix} 100 & 110 & 120 & 130 & 150 & 160 \\ 20 & 60 & 40 & -20 & 40 & 0 \\ 10 & 4 & 2 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

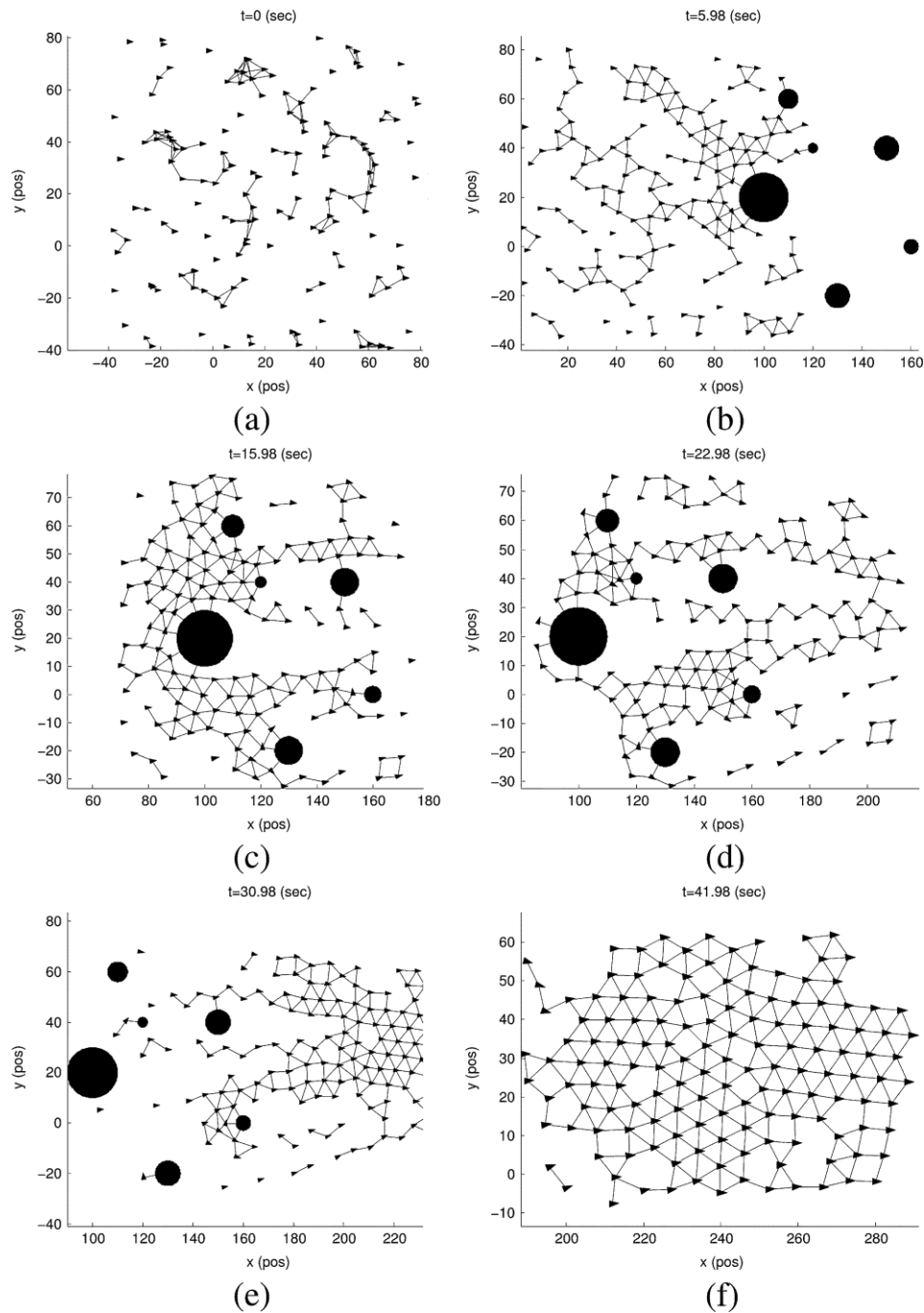


图10.  $n=150$ 个代理的分割/重合演习。

根据图10, 在所有代理通过途中的障碍物后, 这群代理形成了一个集群。通过数值验证, 在粒子的完整运动轨迹中, 没有任何代理人进入六个障碍中的任何一个。

#### E. 挤压式操作。在狭窄的空间中移动

挤压动作是在有相对接近的障碍物存在时成群结队的结果。这是一种特殊的逃亡恐慌现象的案例。所谓"相对接近", 我们的意思是, 障碍物之间的狭窄通道约为

$n = 150$ 。代理人的初始位置是

随机点均匀地分布在盒子里 $[0, 120]^2$ 。 $n = 150$ 。所有代理人的初始速度被设置为零。在这种情况下, 群体目标是由一个静态的-代理指定的, 并且  $\gamma$ 。此外,  $q_d = (230, 60)^T$   $p_d = (6, 0)^T$   $c_1^\alpha < c_1^\beta$  和  $c_2^\gamma = 2\sqrt{c_1^\beta}$  为  $\nu = \alpha, \beta, \gamma$ 。障碍物的矩阵由以下公式给出

$$M_s = \begin{bmatrix} 150 & 150 \\ 30 & 100 \\ 25 & 25 \end{bmatrix}$$

根据图11, 我们可以观察到代理人在前进时避免与两个障碍物发生碰撞。这一点已被细微的

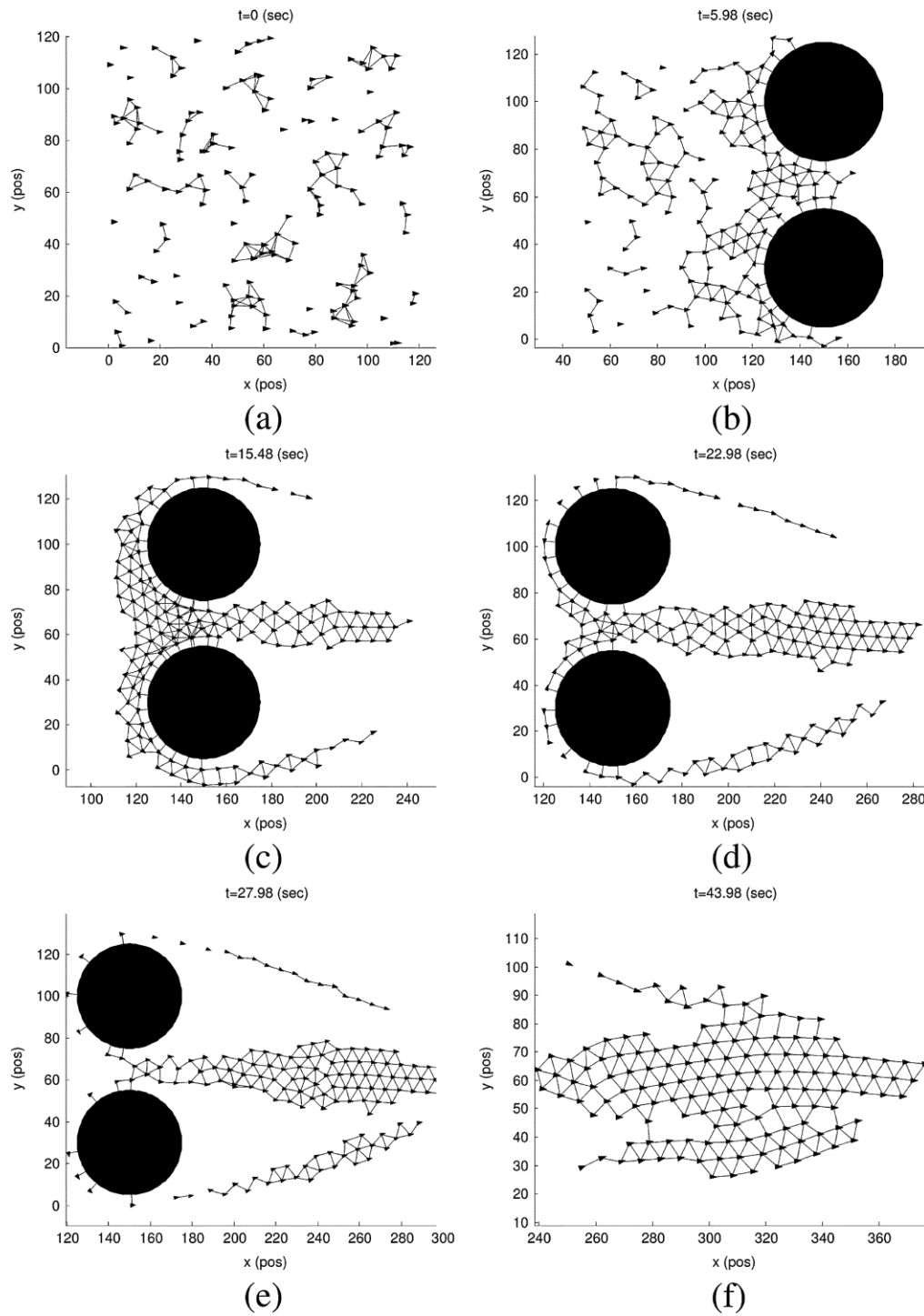


图11. 对于150个代理的挤压机动性。

对粒子的整个轨迹进行验证。由于期望的群速度是非零的，所以群不会在附近停止，而是沿着指定的期望群速度移动。

$p_d$ 在通过这两个障碍物后，代理形成了一个大的羊群，如图11 (f) 所示。

### IX. 什么构成了植绒？

在[52]中，Partridge对动物行为学家对"鱼群"的各种定义进行了简要的调查。

从1927年到1981年，跨越了半个世纪。这个时期的长度清楚地表明了手头任务的难度。为了给蜂群下一个客观的定义，我们确定了一个独立于代理人的集体动力学的蜂群的定量测量。在这个意义上，它不依赖于用于生成粒子轨迹的特定方法，也就是说，该措施是普遍的。在下文中，我们定义了一种特殊形式的群集，称为-群集。

定义4 (-锁定)。设是一个动态代理（或粒子）系统的状态轨迹。

。

$$\alpha \qquad \alpha \qquad z : t \mapsto \text{col}(q(t), p(t)) \qquad n$$

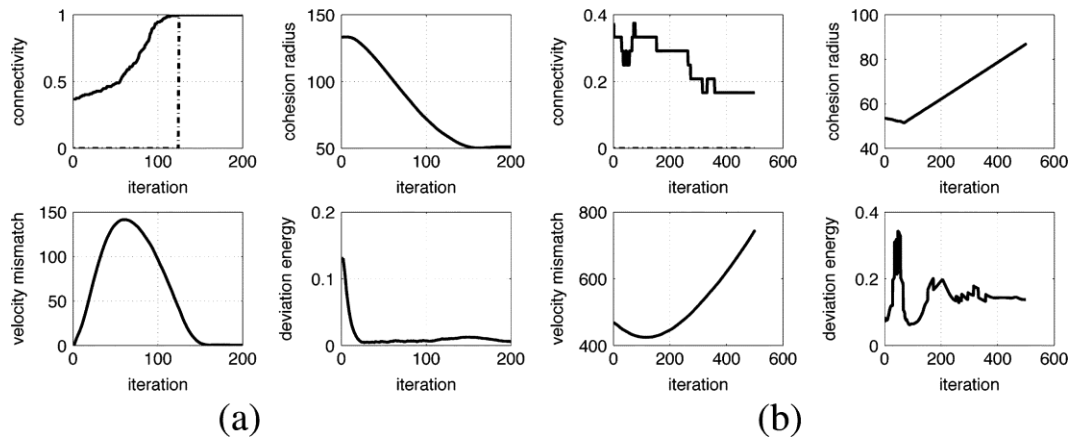


图12.C, R, E,  $\gamma$  (曲线 (按时钟顺序))。(a)成群结队。(b)常规碎裂。

如果存在相对较少的数量, 我们就说一组代理在时间间隔内执行  $\alpha$   $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  和一个  $d > 0$  远景, 即轨迹  $z(t)$  满足所有对所有  $\alpha$  具有互动范围的  $[t_0, t_f]$  的以下条件  $r = (1 + \epsilon_0)d$ :

- 该组仍然是一个准锁。
- 群体仍然具有凝聚力。
- 偏差能量仍然很小  $(E(q(t)) \leq \epsilon_1 d^2)$ ;
- 速度不匹配仍然很小  $(K(v(t)) \leq \epsilon_2 n)$ .

通过用以下三个属性取代上述四个条件, 可以得到一个更严格的植被形式, 即严格植被。

- 这个群体仍然是一个羊群 (即, 接近网  $G(q(t))$ , 仍然是连接的)。
- 偏差能量仍然很小  $(E(q(t)) \leq \epsilon_1 d^2)$ .
- 速度不匹配仍然很小  $(K(v(t)) \leq \epsilon_2 n)$ .

我们可以使用条件 a) 和 b) 来确定该群在区间内保持内聚性  $[t_0, t_f]$ 。

定义4对于粒子系统中的成群结队具有与Lyapunov稳定性对于非线性动态系统相同的作用。值得一提的是, "有规律的破碎

"违反了定义4的 i), ii) 和 iv) 条件, "无规律的破碎

"违反了所有四个成群的条件的条件, 而 "无规律的崩溃

"则严重违反了条件 iii)。因此, 不规则/不规则碎片化和不规则崩溃并不构成第一节中所说的-

锁定。此外, 当舒适/安全的代理间距离被不舒适的距离  $d_d \ll d$  取代时

, "规则崩溃" 是一种可以接受的-锁定形式。令人惊讶的是, 在自然界中可以发现有规律的崩溃现象, 这是鱼群使用的一种防御机制。关于自驱动粒子系统崩溃现象的最新结果可以在 D'Orsogna 等人 [53] 中找到。

编队飞行 (例如鸟类) 可以被看作是最严格的-群组, 有  $\alpha$   $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  和固定的拓扑结构  $G(q(t)) \forall t \in [t_0, t_f]$ 。这与定理2 (第二部分) 的预言是一致的, 即渐进地, 一群-代理人

的拓扑结构演化为

一个固定的图

$G(x_\lambda^*)$ 。

定义4的主要特点是, 无论轨迹生成的方法如何, "锁定" 都可以在数值上验证一个部分系统的轨迹。意味着 "锁定" 的定义是普遍的 (或依赖于算法的)。这类似于定义的普适性

非线性系统的

"李亚普诺夫稳定性" (李亚普诺夫稳定性是非线性系统解决方案的属性, 而不是其矢量场)。挑战在于寻找参数 $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, d$ 。接下来将讨论这个验证过程。

#### A. 核查- 锁定

为了验证一组粒子是否进行了对撞, 我们需要沿着粒子的轨迹计算四个量。这些量的定义如下。

- 相对连通性**。由于阶的连通图的拉普拉斯等级最多为  $(n-1)$ , 所以我们对组的 **相对连通性** 在时间上进行细化为  $C(t)[0, 1]$ , 其中  $L(q)$  是一个图的邻接矩阵, 其 0-1 的邻接元素对应于近似性网的边的集合  $G(q)$ 。
- 凝聚力半径**。我们将一个的代理组在时间的 **内聚力半径** 定义为  $R(t) = \max_i \|q_i(t) - q_c(t)\|$ 。一个有内聚力的群体有一个有限的内聚力半径。
- 归一化的偏差能量**。
- 归一化的速度失配**。

为了澄清这些数量的使用, 考虑应用算法2的粒子的轨迹。曲线

图12(a)显示了该轨迹在前200次迭代中的结果。(步长为  $\Delta t = 0.01$  s), 其中

是迭代数)。在迭代

发生了一个相位转换, 接近网

成为连接。显然, 网络拓扑结构在以后的所有迭代中都保持连接。  $k_c$  是临界值, 该点

由一条盘状线

显示。这一相变的影响在  $k_c$

的 (正常化) 速度失配曲线中很明显

。在这种情况下, 共合半径是单调下降的

。同样明显的是, (归一化的) 能量偏差在以下情况下仍然比较小

迭代。根据模拟数据, 我们得出结论: 在第150次迭代后, 在参数  $\epsilon_0 = 0.2, \epsilon_1 = 0.005, \epsilon_2 = 0.001$ , 实现了-锁定。

与此相反, 图12(b)显示了在碎裂过程中从颗粒的轨迹中得到的四条曲线, 其中包括

代理人。这里有一些观察结果。1) 内聚力半径在短暂的时间后单调地增加, 2) 接近网永远不会成为连接, 并且有太多的成分, 3) 速度不匹配永远不会减少到一个大的常数以下, 并且

$\alpha$

$\alpha$

$n$

-

$t$

$$= (1/n - 1) \text{rank}(L(q(t))) \in$$

$t$

$$= \max_{i \in \mathcal{V}}$$

-

$$\begin{aligned} \tilde{E}(q) \\ \tilde{K}(v) &= E(q)/d^2. \\ &= K(v)/n \end{aligned}$$

$n = 150$

$C, R, \tilde{E}, \tilde{K}$

$T = 0.03$

$t = kT$

$k$

$k_c > 100$

$G(q(t))$

$k >$

$k =$

$k >$

$k = 150$

$\alpha$

$\epsilon_0 =$

$=$

$= 0.3$

$n = 50$

在短暂的一段时间后,能量在增加;4) 偏差能量相对较低。所有这些事实都指出了定期碎裂现象的发生。

## X. 总结

本文提供了一个理论框架,用于设计和分析多代理网络工作系统的分布式拥挤算法。本文讨论了自由成群和避开障碍物的成群情况。

作为羊群的几何模型, lattices在构建羊群潜在函数以及分析羊群行为方面发挥了关键作用。

我们介绍了三种分布式植群算法,它们导致了自组织植群行为。我们证明了算法1负责创建群落的空间秩序。这个算法一般会导致有规律的分裂,并在一个单一的方程式中体现了雷诺兹的所有三个规则。算法2和3都是由算法1演变而来,加入了适当的条款,分别考虑了群体目标和避开障碍物。我们证明,一般来说,算法2会导致成群,而算法1会导致分裂。群体"和"成群"的概念在形式上得到了细化和数字上的验证。使用算法3对150个代理成功地进行了分裂/重新组合机动和挤压机动。

## 鸣谢

作者要感谢R. M. Murray, J. Marsden, J.S. Shamma, E. Frazzoli, A. Bertozzi, and E. Feron的意见和鼓励。他还要感谢匿名审稿人和副编辑的宝贵意见。观察自然界中的成群、成片和成群行为真正激发了这项工作。

## 参考文献

- [1] E.肖, "成群的鱼", 《自然史》, 第84卷, 第8期, 第40-45页, 1975年。
- [2] B.L. Partridge, "鸟群中机动性的合唱线假说", 《自然》, 第309卷, 第344-345页, 1984。
- [3] —, "The structure and function of fish schools," *Sci. Amer.*, vol. 246, no. 6, pp.114-123, 1982。
- [4] A.大久保, "动物分组的动力学方面。Swarms, schools, flocks. and herds," *Adv. Biophys.*, vol. 22, pp.1-94, 1986。
- [5] C.W. Reynolds, "Flocks, herds, and schools:A distributed behavioral model," in *Comput.图形。(ACM SIGGRAPH'87 Conf. Proc.)*, vol. 21, Jul. 1987, pp.
- [6] T.Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, "Novel type of phase transition in a system of self-derived particles," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, no. 6, pp.1226-1229, 1995。
- [7] J.Toner和Y. Tu, "Flocks, herds, and schools:A quantitative theory of flocking," *Phys. Rev. E*, vol. 58, no.4, 第4828-4858页, 1998年10月。
- [8] N.Shimoyama, K. Sugawara, T. Mizuguchi, Y. Hayakawa, and M. Sano, "Collective motion in a system of motile elements," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, no. 20, pp.3870-3873, 1996。
- [9] A.Mogilner和L. Edelstein-Keshet, "一个非局部的蜂群模型", *J.Math.Biol.*, 第38卷, 第534-570页, 1999。
- [10] D.Helbing, I. Farkas, and T. Vicsek, "Simulating dynamical features of escape panic," *Nature*, vol. 407, pp.487-490, 2000。
- [11] T.Vicsek, "A question of scale," *Nature*, vol. 411, pp.421-421, May 2001。
- [12] J.K. Parrish, S. V. Viscido, and D. Grunbaum, "Self-organized fish schools:An examination of emergent properties," *Biol.Bull.*, vol. 202, pp.296-305, 2002。
- [13] D.Estrin, R. Govindan, J. Heidemann, and S. Kumar, "Next century challenges:传感器网络中的可扩展协调", *Proc.Mobile Comput.Network.*, pp.263-270, 1999。
- [14] I.Akyildiz, W. Su, Y. Sankarasubramniam, and E. Cayirci, "A survey on sensor networks," *IEEE Communication.Mag.*, no.8, pp.102-114, Aug.2002。
- [15] J.Cortes and F. Bullo, "Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems," *SIAM J. Control Optim.*, no.5, pp. 1543-1574, May 2005。
- [16] R.Olfati-Saber, "Distributed Kalman filter with embedded consensus filters," in *Proc. 44th IEEE Conf.Decision and Control and Eur.控制会议*, 2005年12月, 第8179-8184页。
- [17] H.Levine, W.-J. Rappel, and I. Cohen, "Self-organization in systems of self-propelled particles," *Phys. Rev. E*, vol. 63, p. 017 101, 2001。
- [18] A.Mogilner和L. Edelstein-Keshet, "自对准物体群的空间-时间秩序。Formation of oriented patches," *Physica D*, vol. 89, pp.346-367, 1996。
- [19] C.M. Topaz和A. L. Bertozzi, "Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups," *SIAM J. Appl. Math.*, May 2004。
- [20] R.O. Saber和R. M. Murray, "Consensus protocols for networks of dynamic agents," in *Proc.Amer.控制会议*, 第2卷, 2003年6月, 第951-956页。
- [21] R.Olfati-Saber和R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Trans.Autom.控制*, 第49卷, 第9期, 第1520-1533页, 2004年9月。
- [22] A.Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, "Compliance of groups of mobile agents using nearest neighbor rules," *IEEE Trans.Autom.控制*, 第48卷, 第6期, 第988-1001页, 2003年6月。
- [23] L.Moreau, "Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links," *IEEE Trans.Autom.控制*, 第50卷, 第2期, 第169-182页, 2005年2月。
- [24] W.Ren和R. W. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Trans.Autom.控制*, vol. 50, no.5, pp. 655-661, May 2005。
- [25] R.Olfati-Saber, A. Fax, and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in multi-agent networked systems," *Proc. IEEE*, <http://engineering.dartmouth.edu/~olfati/papers/olfati-saber-piece.pdf>, 2006, submit for publication。
- [26] Y.Liu, K. M. Passino, and M. M. Polycarpou, "Stability analysis of M-dimensional asynchronous swarms with a fixed communication topology," *IEEE Trans.Autom.控制*, 第48卷, 第1期, 第76-95页, 2003年1月。
- [27] E.W. Justh和P. S. Krishnaprasad, "A simple control law for UAV formation flying," *Inst. Syst. Res.Res.*, Univ. Maryland, College Park, MD, Tech.Rep. 2002-38, 2002。
- [28] V.Gazi和K. M. Passino, "Stability analysis of swarms," *IEEE Trans.Autom.控制*, vol. 48, no.4, pp. 692-697, Apr. 2003。
- [29] H.G. Tanner, A. Jadbabaie, and G. J. Pappas, "Stable flocking of mobile agents Part II: Dynamic topology," in *Proc. 42nd IEEE Conf.决策与控制*, 2003年12月, 第2016-2021页。
- [30] A.Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formation," *IEEE Trans.Autom.控制*, 第49卷, 第9期, 第1465-1476页, 2004年9月。
- [31] M.Mesbahi, "Stage-dependent graphs," in *Proc. 42nd IEEE Conf.Deci- sion and Control*, vol. 3, Dec. 2003, pp.3058-3063。
- [32] —在 "论依赖状态的动态图及其可控性", *IEEE Trans.Autom.Control*, vol. 50, no.3, pp. 387-392, Mar. 2005。
- [33] J.Cortes, S. Martinez, T. Karatas, and F. Bullo, "Coverage control for mobile sensing networks," *IEEE Trans.机器人. Automat.*, vol. 20, no. 2, pp.243-255, Apr. 2004。
- [34] G. Ribichini和E. Frazzoli, "Efficient coordination of multiple-aircraft systems," in *Proc. 42nd IEEE Conf.决策与控制*, 第一卷, 2003年12月, 第1035-1040页。
- [35] N.E. Leonard和E. Fiorelli, "虚拟领导、人工潜能和群体的协调控制", 在*Proc. 40th IEEE Conf.决策与控制*, 2001年, 第2968-2973页。
- [36] R.Olfati-Saber和R.M.Murray, "Distributed cooperative control of multiple vehicle formation using structural potential functions," presented at the Proc. 15 IFAC World Congr., Barcelona, Spain, June.
- [37] P.Ögren, E. Fiorelli, and N. E. Leonard,



- olfati-saber, "移动传感器网络的合作控制: 分布式环境中的自适应梯度爬升", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 8, pp. 1292-1302, Apr.
- [38] O.Khatib, "Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots," *Int. J. Robot.J. Robot.Res.*, 第5卷, 第1期, 第90-98页, 1986年。

- [39] E.Rimon和D. E. Koditschek, "Exact robot navigation using artificial potential functions," *IEEE Trans. 机器人. Automat.*, vol. 8, no.5, pp. 501-518, Oct. 1992.
- [40] S.H. Strogatz, "探索复杂网络", 《自然》, 第410卷, 第268-276页, 2001。
- [41] R.Olfati-Saber, "Ultrafast consensus in small-world networks," in *Proc.Amer.控制会议*, 2005年6月, 第2371-2378页。
- [42] D.E. Chang, S. Shadden, J. Marsden, and R. Olfati-Saber, "Collision avoidance for multiple agent systems," in *Proc. 42nd IEEE Conf.Decision and Control*, 第一卷, 2003年12月, 第539-543页。
- [43] R.Olfati-Saber, "Flocking with obstacle avoidance," California Inst. Technol., Control Dyna.Syst., Pasadena, CA, Tech.Rep. 2003-006, Feb. 2003.
- [44] R.O. Saber和R. M. Murray, "Flocking with obstacle avoidance:在移动网络中与有限的通信合作", 在*Proc.42nd IEEE Conf.决策与控制*, 第2卷, 2003年12月, 第2022-2028页。
- [45] B.Bollobás, *Modern Graph Theory, Vol. 184 of Graduate Texts in Mathematics*.New York:Springer-Verlag, 1998.
- [46] R.Diestel, *Graph Theory, Vol. 173 of Graduate Texts in Mathematics*.New York:Springer-Verlag, 2000.
- [47] R.A. Horn和C. R. Johnson, *矩阵分析*. 剑桥, 英国: 剑桥大学出版社, 1987。
- [48] C.Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory, Vol. 207 of Graduate Texts in Mathematics*.New York:Springer-Verlag, 2001.
- [49] E.Klavins, "多机器人系统的通信复杂性", 载于*Algorithmic Foundations of Robotics V. ser.Springer Tracts in Advanced Robotics*, J. -D.Boissonnats, J. Burdik, K. Goldberg, and S. Hutchinson, Eds.布达佩斯, 匈牙利. Springer, Dec. 2003, vol. 7, pp.
- [50] M.Fiedler, "Algebraic connectivity of graphs," *Czech.Math.J.*, 第23卷, 第98期, 第298-305页, 1973年。
- [51] R.Olfati-Saber, "Flocking for multi-agent dynamic systems:Algorithms and theory," California Inst. Technol., Control Dyna.Syst., Pasadena, CA, Tech.Rep. 2004-005, <http://caltechcdstr.library.caltech.edu/43/>, Jun. 2004.
- [52] B.L. Partridge, "学校教育行为的刚性定义是不充分的", *动物行为学*, 第30卷, 第298-299页, 1982年2月。
- [53] M.R. D'Orsogna, Y.-L. Chuang, A. L. Bertozzi, and L. Chayes, "具有软核相互作用的自推进粒子。模式、稳定性和崩溃," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, Mar. 2006, 待发表。

**Reza Olfati-Saber** (S'97-M'01)分别于1997年和2001年获得剑桥大学麻省理工学院的电子工程和计算机科学的硕士和博士学位。

自2005年以来, 他一直是新罕布什尔州汉诺威市达特茅斯学院塞耶工程学院的助理教授。在加入达特茅斯大学之前, 他是加州理工学院帕萨迪纳分校的博士后学者(2001-2004)和加州大学洛杉矶分校的客座科学家(2004-2005)。他的研究兴趣包括分布式控制理论、多代理系统、传感器网络、信息融合、分布式卡尔曼滤波、蜂群、自组织网络系统、概率学习和推理、社会网络、小世界、共识理论, 以及语言、行为和文化的进化动力学。他是Sigma Xi科学协会的成员。