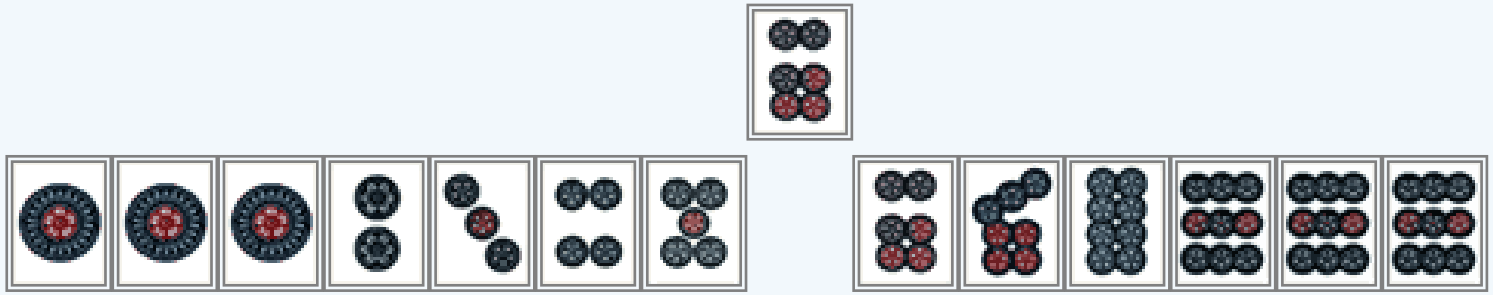


3.列表

（e）插入排序

花荣便道：“前面必有强人。”
把枪带住，取弓箭来整顿得端正，再插放飞鱼袋内。

- 水浒传·第三十四回

邓俊辉

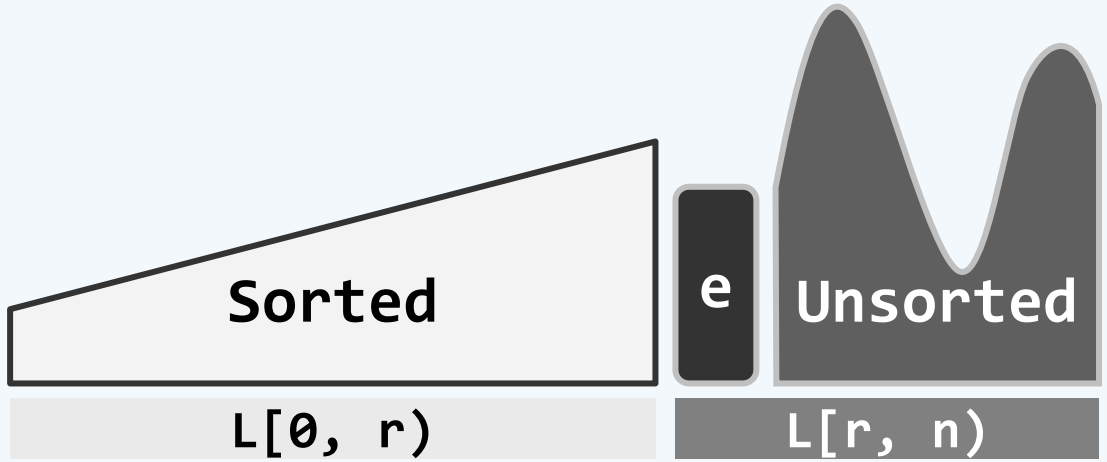
deng@tsinghua.edu.cn

构思

- 始终将序列看成两部分：

  Sorted + Unsorted

  L[0, r) + L[r, n)



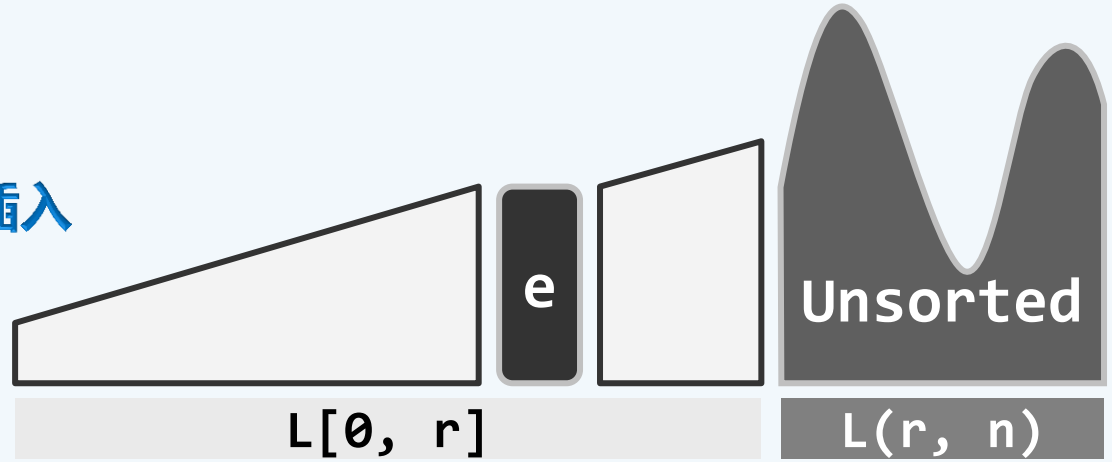
- 【初始化】

  |S| = r = 0 //空序列无所谓有序

- 【迭代】：关注并处理e = L[r]

  在S中确定适当位置 //有序序列的查找

  插入e，得到有序的L[0, r] //有序序列的插入



- 【不变性】

  随着r的递增，L[0, r)始终有序

  直到r = n，L即整体有序

实例

迭代轮次	前缀有序子序列	当前元素	后缀无序子序列
-1	^	^	5 2 7 4 6 3 1
0	^	5	2 7 4 6 3 1
1	(5)	2	7 4 6 3 1
2	(2) 5	7	4 6 3 1
3	2 5 (7)	4	6 3 1
4	2 (4) 5 7	6	3 1
5	2 4 5 (6) 7	3	1
6	2 (3) 4 5 6 7	1	^
7	(1) 2 3 4 5 6 7	^	^

实现

```
//对列表中起始于位置p的连续n个元素做插入排序，valid(p) && rank(p) + n <= size
  template <typename T> void List<T>::insertionSort(Posi(T) p, int n) {
     for (int r = 0; r < n; r++) { //逐一引入各节点，由Sr得到Sr+1
        insertAfter( search( p->data, r, p ), p->data ); //查找 + 插入
        p = p->succ; remove( p->pred ); //转向下一节点
     } //n次迭代，每次O(r + 1)
  } //仅使用O(1)辅助空间，属于就地算法
```

- 紧邻于search()接口返回的位置之后插入当前节点，总是保持有序
- 验证各种情况下的正确性，体会哨兵节点的作用：

  S_r中含有/不含与p相等的元素；S_r中的元素均严格小于/大于p

性能

- 最好情况：完全（或几乎）有序

  每次迭代，只需1次比较，0次交换

  累计$O(n)$时间！

- 最坏情况：完全（或几乎）逆序

  第k次迭代，需$O(k)$次比较，1次交换　　//改用向量呢？稍后分析

  累计$O(n^2)$时间！

- 一般情况：包含I个**逆序对**　　//inversion，不必相邻

  第k次迭代，只需$O(I_k)$次比较，1次交换　　//为什么？

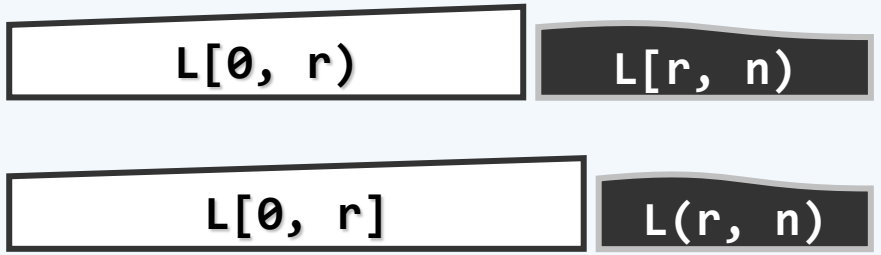
  累计$O(n + I)$！　//逆序对各需单位时间，input-sensitive，对Shellsort至关重要

- 平均而言呢？　　//当然，首先需要假定具体的随机分布...

平均性能

❖ 假定：各元素的取值遵守均匀、独立分布

于是：平均要做多少次元素比较？



❖ 考查：L[r]刚插入完成的那一时刻（穿越？）

试问：此时的有序前缀L[0, r]中，哪个元素是此前的L[r]？

❖ 观察：其中的r + 1个元素均有可能，且概率均等于1/(r + 1)

❖ 因此，在刚完成的这次迭代中，为引入S[r]所花费时间的数学期望为

$$[r + (r - 1) + \ldots + 3 + 2 + 1 + 0] / (r + 1) + 1 = r/2 + 1$$

❖ 于是，总体时间的数学期望 = $[0 + 1 + \ldots + (n - 1)] / 2 + 1 = O(n^2)$

❖ 再问：在n次迭代中，平均有多少次无需交换呢？

若改用向量...

- 借助二分查找之类的算法，查找效率可优化至$O(\log k)$！
- 然而，总体性能会否因此相应地提高？

逆序对