2.向量

（d5）有序向量：插值查找

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

原理与算法

❖ 假设：已知有序向量中各元素随机分布的规律

比如：均匀且独立的随机分布

❖ 于是：[lo, hi)内各元素应大致按照线性趋势增长

$$\frac{mi - lo}{hi - lo} \approx \frac{e - A[lo]}{A[hi] - A[lo]}$$

❖ 因此：通过猜测轴点mi，可以极大地提高收敛速度

$$mi \approx lo + (hi - lo) \cdot \frac{e - A[lo]}{A[hi] - A[lo]}$$

❖ 例如：在英文词典中

binary大致位于2/26处

search大致位于19/26处

[lo]	0	A	1	[1,53)
	1	B	74	[53,104)
	2	C	158	[104,156)
	3	D	292	[156,208)
	4	E	368	[208,259)
	5	F	409	[259,311)
	6	G	473	[311,363)
	7	H	516	[363,414)
	8	I	562	[414,466)
	9	J	607	[466,518)
	10	K	617	[518,569)
	11	L	628	[569,621)
	12	M	681	[621,673)
	13	N	748	[673,724)
	14	O	771	[724,776)
	15	P	806	[776,827)
	16	Q	915	[827,879)
	17	R	922	[879,931)
	18	S	1002	[931,982)
	19	T	1176	[982,1034)
	20	U	1253	[1034,1086)
	21	V	1271	[1086,1137)
	22	W	1289	[1137,1189)
	23	X	1337	[1189,1241)
	24	Y	1338	[1241,1292)
	25	Z	1341	[1292,1344)
[hi]	26		1344	

实例

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	10	12	14	26	31	38	39	42	46	49	51	54	59	72	79	82	86	92

❖ e = 50

lo = 0, hi = 18

插值： mi = 0 + (18 - 0)*(50 - 5)/(92 - 5) ≈ 9.3

取： mi = 9

比较： A[9] = 46 < e

❖ lo = 10, hi = 18

插值： mi = 10 + (18 - 10)*(50 - 49)/(92 - 49) ≈ 10.2

取： mi = 10

比较： A[10] = 49 < e

❖ lo = 11, hi = 18

插值： mi = 11 + (18 - 11)*(50 - 51)/(92 - 51) ≈ 10.8

取： mi = 10 < lo

查找完成（NOT_FOUND）

性能

- 最坏情况：$O(hi - lo) = O(n)$ //具体实例？
- 平均情况：每经一次比较，n缩至$\sqrt{n}$ //[Yao76, PIA78]，习题解析[2-24]
- 于是，待查找区间宽度将按以下趋势缩减：

$$n,\ \sqrt{n},\ \sqrt{\sqrt{n}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}},\ \ldots,\ 2$$

$$n,\ n^{(1/2)},\ n^{(1/2)^2},\ \ldots,\ n^{(1/2)^k},\ \ldots,\ 2$$

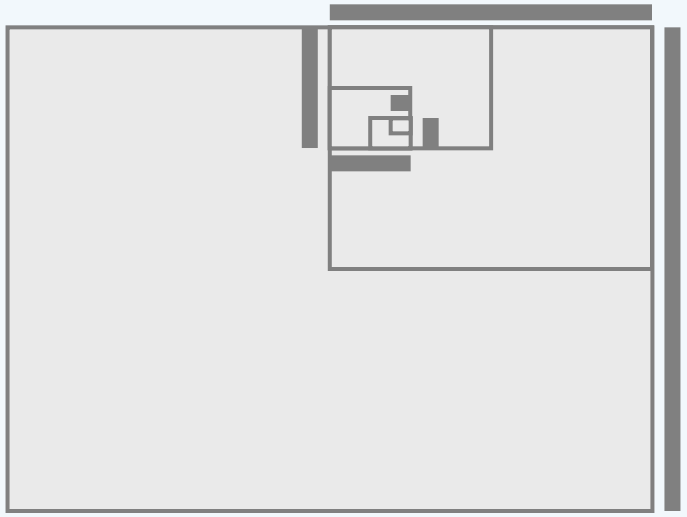
- 经多少次比较之后，有$n^{(1/2)^k} < 2$？

$$(1/2)^k \times \log n < 1$$

$$k*\log(1/2) + \log\log n < 0$$

$$-k + \log\log n < 0 \quad 或 \quad k > \log\log n$$

$\therefore\ O(\log\log n)$



综合

- 从$O(\log n)$到$O(\log\log n)$，是否值得？
- 通常优势不明显

  ——除非查找区间宽度极大，或者比较操作成本极高

  比如，n = 2^(2^5) = 2^32 = 4G时

  $\log_2(n) = 32$，$\log_2(\log_2(n)) = 5$
- 易受小扰动的干扰和“蒙骗”
- 须引入乘法、除法运算
- 实际可行的方法

  首先通过插值查找，将查找范围缩小到一定的范围

  然后再进行二分查找

课后

- 关于插值查找算法的平均性能分析，试阅读：

  A. C. Yao & F. F. Yao

  "The Complexity of Searching an Ordered Random Table"

  Proc. of 17th FOCS (1976), 222-227