6.图

(b1) 邻接矩阵

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

Graph模板类

❖
```
template <typename Tv, typename Te> class Graph { //顶点类型、边类型
 private:
   void reset() { //所有顶点、边的辅助信息复位
      for ( int i = 0; i < n; i++ ) { //顶点
         status(i) = UNDISCOVERED; dTime(i) = fTime(i) = -1;
         parent(i) = -1; priority(i) = INT_MAX;
         for ( int j = 0; j < n; j++ ) //边
            if ( exists(i, j) ) status(i, j) = UNDETERMINED;
      }
   }
 public:  /* ... 顶点操作、边操作、图算法：无论如何实现，接口必须统一 ... */
} //Graph
```

邻接矩阵与关联矩阵

- ❖ adjacency matrix：用二维矩阵记录顶点之间的邻接关系

  一一对应：矩阵元素 $\Leftrightarrow$ 图中可能存在的边

  A(i, j) = 1 若顶点i与j之间存在一条边

  = 0 否则

  既然只考察简单图，对角线统一设置为0

  空间复杂度为$\Theta(n^2)$，与图中实际的边数无关

- ❖ incidence matrix：用二维矩阵记录顶点与边之间的关联关系

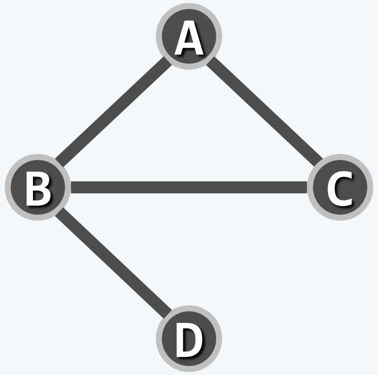
  空间复杂度为$\Theta(n*e) = \mathcal{O}(n^3)$

  空间利用率 $< 2/n$

  解决某些问题时十分有效

实例

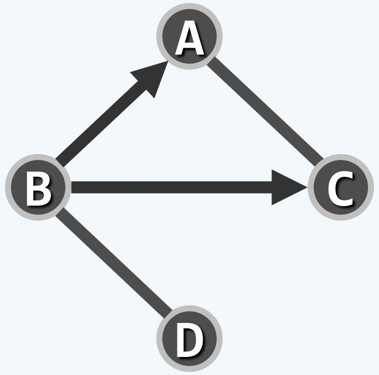
(a) undigraph



0	A	B	C	D
A		1	1	
B	1		1	1
C	1	1		
D		1		

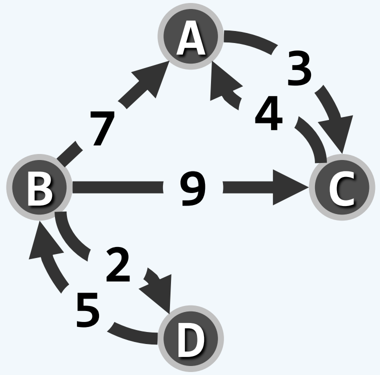
redundancy

(b) digraph



0	A	B	C	D
A			1	
B	1		1	1
C	1			
D		1		

(c) network



∞	A	B	C	D
A			3	
B	7		9	2
C	4			
D		5		

Vertex

❖ typedef enum { UNDISCOVERED, DISCOVERED, VISITED } VStatus;

❖ template <typename Tv> struct Vertex { //顶点对象（并未严格封装）

```
    Tv data; int inDegree, outDegree; //数据、出入度数
    VStatus status; //（如上三种）状态
    int dTime, fTime; //时间标签
    int parent; //在遍历树中的父节点
    int priority; //在遍历树中的优先级（最短通路、极短跨边等）
    Vertex( Tv const & d ) : //构造新顶点
        data(d), inDegree(0), outDegree(0),   status(UNDISCOVERED),
        dTime(-1), fTime(-1),                 parent(-1),
        priority(INT_MAX) {}
};
```

Edge

❖ typedef

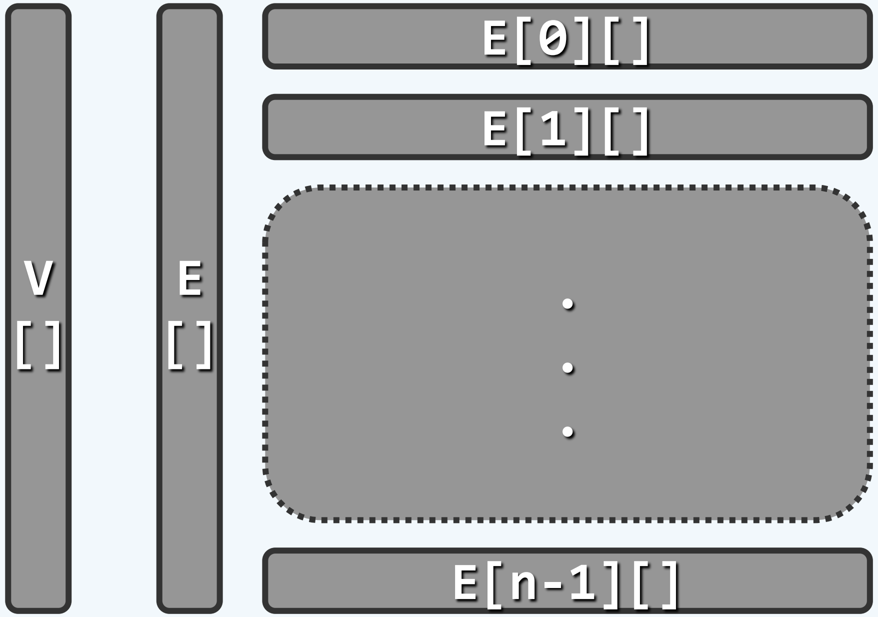
```
enum { UNDETERMINED, TREE, CROSS, FORWARD, BACKWARD }
EStatus;
```

❖ template <typename Te> struct Edge { //边对象（并未严格封装）

```
    Te data; //数据
    int weight; //权重
    EStatus status; //类型
    Edge( Te const & d, int w ) : //构造新边
        data(d), weight(w), status(UNDETERMINED) {}
};
```

GraphMatrix

```
❖ template <typename Tv, typename Te> class GraphMatrix : public Graph<Tv, Te> {
  private:
     Vector< Vertex<Tv> > V; //顶点集
     Vector< Vector< Edge<Te>* > > E; //边集
  public:
     /* 操作接口：顶点相关、边相关、... */
     GraphMatrix() { n = e = 0; } //构造
     ~GraphMatrix() { //析构
        for (int j = 0; j < n; j++)
        for (int k = 0; k < n; k++)
           delete E[j][k]; //清除所有动态申请的边记录
     }
  };
```



顶点操作

```
❖ Tv & vertex(int i) { return V[i].data; } //数据
  int inDegree(int i) { return V[i].inDegree; } //入度
  int outDegree(int i) { return V[i].outDegree; } //出度
  Vstatus & status(int i) { return V[i].status; } //状态
  int & dTime(int i) { return V[i].dTime; } //时间标签dTime
  int & fTime(int i) { return V[i].fTime; } //时间标签fTime
  int & parent(int i) { return V[i].parent; } //在遍历树中的父亲
  int & priority(int i) { return V[i].priority; } //优先级数
```

顶点操作

❖ 对于任意顶点i，如何枚举其所有的邻接顶点neighbor？

```
int nextNbr(int i, int j) { //若已枚举至邻居j，则转向下一邻居
    while ( (-1 < j) && !exists(i, --j) ); //逆向顺序查找，O(n)
    return j;
} //改用邻接表可提高至O(1 + outDegree(i))
```

```
int firstNbr(int i) {
    return nextNbr(i, n);
} //首个邻居
```

边操作

❖
```
bool exists(int i, int j) { //判断边(i, j)是否存在
    return   (0 <= i) && (i < n) && (0 <= j) && (j < n)
          && E[i][j] != NULL; //短路求值
} //以下假定exists(i, j)...
```

❖
```
Te & edge(int i, int j) //边(i, j)的数据
    { return E[i][j]->data; } //O(1)
```

❖
```
Estatus & status(int i, int j) //边(i, j)的状态
    { return E[i][j]->status; } //O(1)
```

❖
```
int & weight(int i, int j) //边(i, j)的权重
    { return E[i][j]->weight; } //O(1)
```

边插入

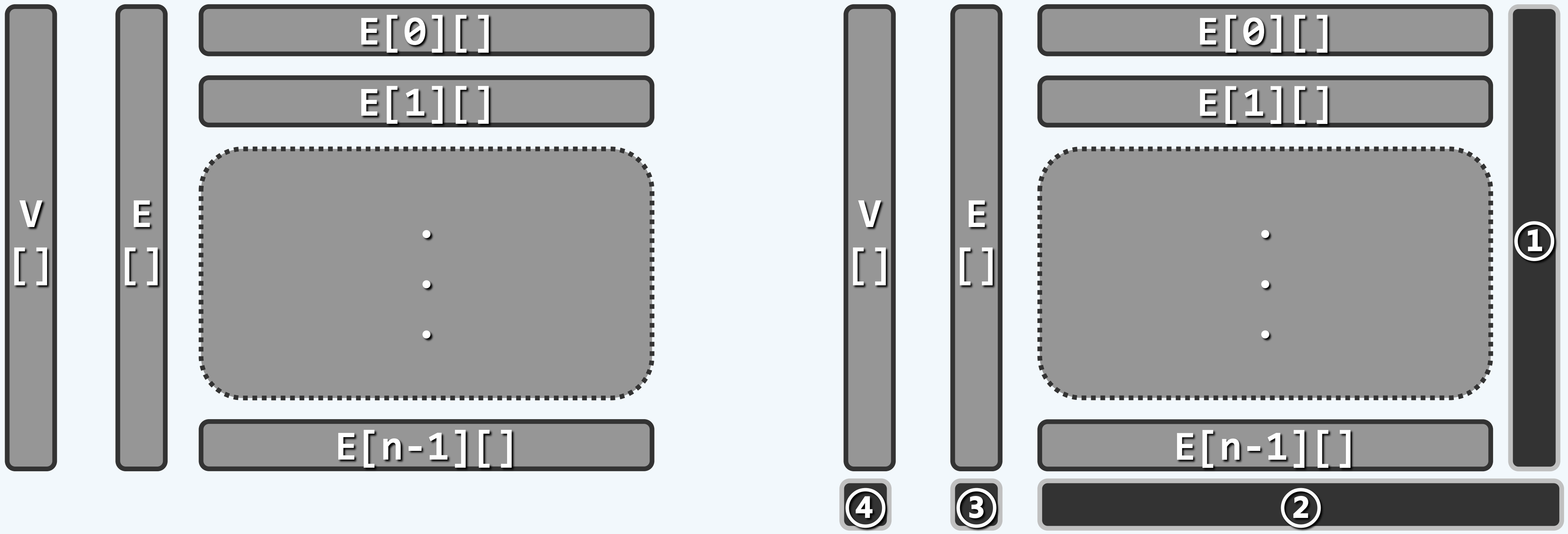
```
❖ void insert(Te const& edge, int w, int i, int j) { //插入(i, j, w)
    if ( exists(i, j) ) return; //忽略已有的边
    E[i][j] = new Edge<Te>(edge, w); //创建新边
    e++; //更新边计数
    V[i].outDegree++; //更新关联顶点i的出度
    V[j].inDegree++; //更新关联顶点j的入度
  }
```

边删除

```
❖ Te remove(int i, int j) { //删除顶点i和j之间的联边(exists(i, j))
    Te eBak = edge(i, j); //备份边(i, j)的信息
    delete E[i][j]; E[i][j] = NULL; //删除边(i, j)
    e--; //更新边计数
    V[i].outDegree--; //更新关联顶点i的出度
    V[j].inDegree--; //更新关联顶点j的入度
    return eBak; //返回被删除边的信息
}
```

顶点插入

```
❖ int insert(Tv const & vertex) { //插入顶点，返回编号
     for (int j = 0; j < n; j++) E[j].insert(NULL); n++; //①
     E.insert( Vector< Edge<Te>* >(n, n, NULL) ); //②③
     return V.insert( Vertex<Tv>(vertex) ); //④
  }
```



顶点删除

```
❖ Tv remove(int i) { //删除顶点及其关联边，返回该顶点信息
    for (int j = 0; j < n; j++)
       if (exists(i, j)) //删除所有出边
          { delete E[i][j]; V[j].inDegree--; }
    E.remove(i); n--; //删除第i行
    for (int j = 0; j < n; j++)
       if (exists(j, i)) //删除所有入边及第i列
          { delete E[j].remove(i); V[j].outDegree--; }
    Tv vBak = vertex(i); //备份顶点i的信息
    V.remove(i); //删除顶点i
    return vBak; //返回被删除顶点的信息
 }
```

优点

- 直观，易于理解和实现
- 适用范围广泛：digraph / network / cyclic / ...

  尤其适用于稠密图（dense graph）
- 判断两点之间是否存在联边：O(1)
- 获取顶点的（出/入）度数：O(1)

  添加、删除边后更新度数：O(1)
- 扩展性（scalability）：

  得益于Vector良好的空间控制策略

  空间溢出等情况可“透明地”予以处理

缺点

- Θ(n^2)空间，与边数无关！
- 真会有这么多条边吗？不妨考察一类特定的图...
- 平面图（planar graph）：可 嵌入 于平面的图
- Euler's formula (1750)：

  $\boxed{v - e + f - c = 1}$, for any PG
- 平面图：$e \le 3 \times n - 6 = O(n) \ll n^2$

  此时，空间利用率 ≈ 1/n
- 稀疏图 sparse graph

  空间利用率同样很低，可采用压缩存储技术