7.二叉搜索树

（c） 平衡与等价

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

树高

- 由以上的实现与分析，BST主要接口search()、insert()和remove()的运行时间

  在最坏情况下，均线性正比于其高度$\boxed{\mathcal{O}(h)}$

- 因此，若不能有效地控制树高，则就实际的性能而言

  较之此前的向量和列表等数据结构，BST将无法体现出明显优势

- 比如在最坏情况下，二叉搜索树可能彻底地$\boxed{\text{退化}}$为列表

  此时的查找效率甚至会降至$\boxed{\mathcal{O}(n)}$，线性正比于树（列表）的规模

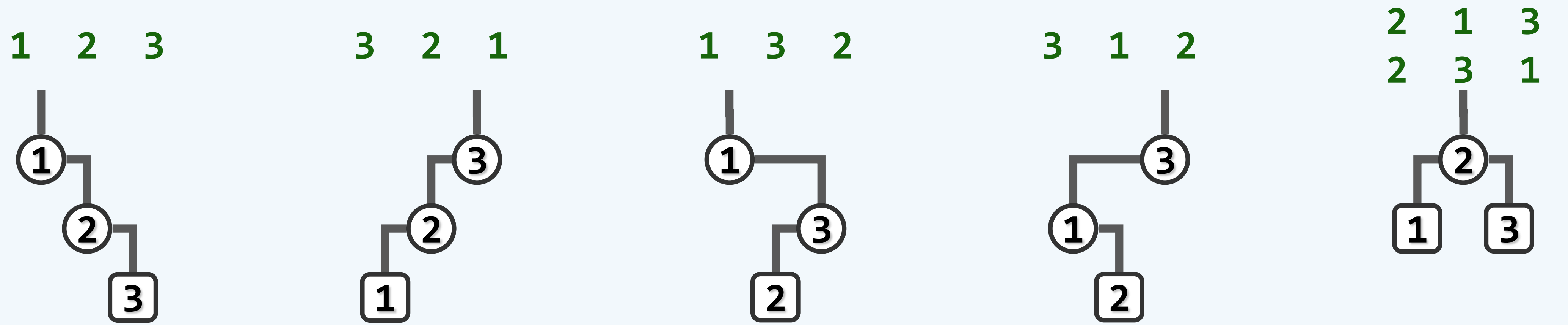
- 那么，出现此类最坏或较坏情况的概率有多大？

  或者，从平均复杂度的角度看，二叉搜索树的性能究竟如何呢？

- 以下按两种常用的随机统计$\boxed{\text{口径}}$，就BST的$\boxed{\text{平均性能}}$做一分析和对比

随机生成

- 考查n个互异词条$\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$，对任一排列$\sigma = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}) \ldots$
- 从空树开始，反复调用insert()接口将各词条**依次插入**，得到$T(\sigma)$
- 与σ相对应的$T(\sigma)$，称由σ**随机生成**（randomly generated）



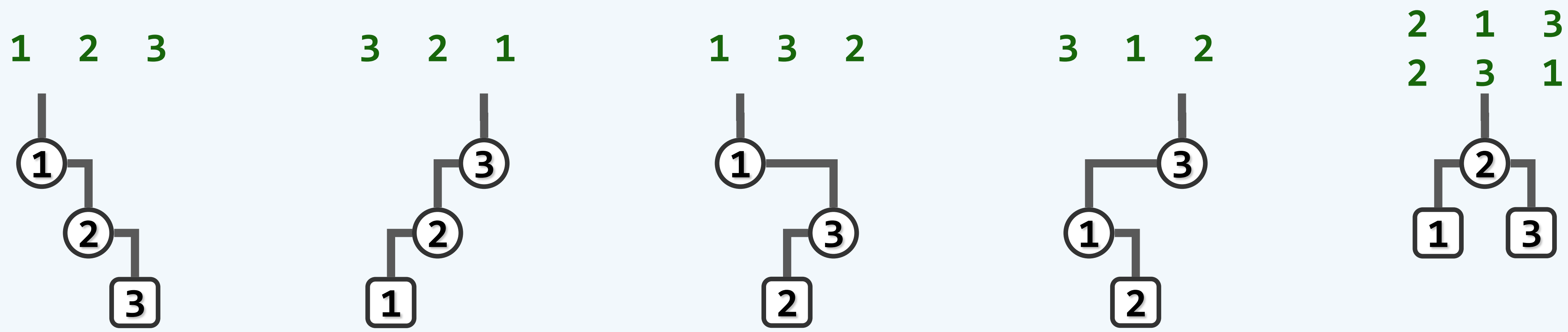
- 若假定任一排列σ作为输入的概率均等$\boxed{1/n!}$

  则由n个互异词条随机生成的二叉搜索树，平均高度为$\boxed{\Theta(\log n)}$

随机组成

❖ n个互异节点，在遵守顺序性的前提下，可随机确定拓扑联接关系

❖ 如此所得的BST，称由这组节点 **随机组成**（randomly composed）



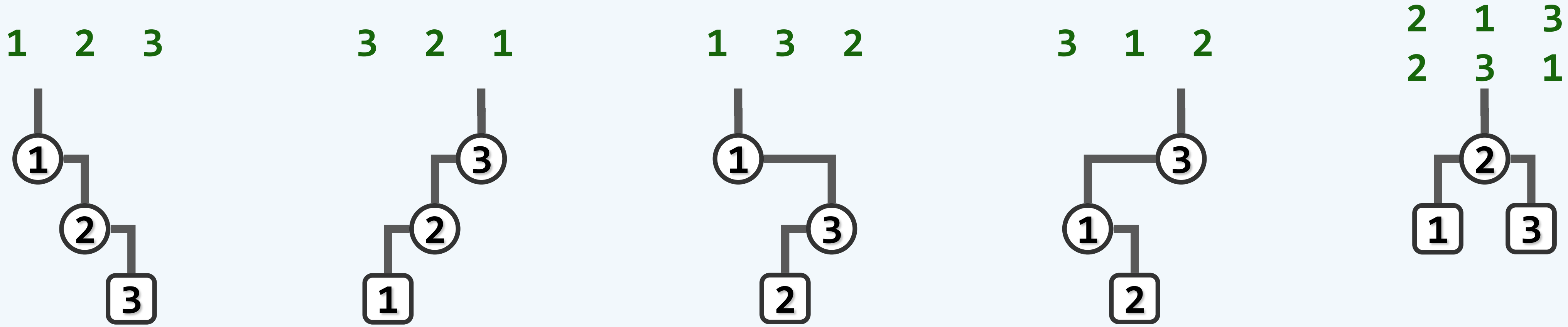
❖ 由n个互异节点随机组成的BST，若共计T(n)棵，则有

$$T(n) = \boxed{\sum_{k=1}^{n} SP(k-1) \cdot SP(n-k)} = Catalan(n) = (2n)! \,/\, (n+1)! \,/\, n!$$

❖ 假定所有BST等概率出现，则其平均高度为 $\boxed{\Theta(sqrt(n))}$

Θ(logn) vs. Θ(sqrt(n))

❖ 按两种口径所估计的平均性能，差异极大——谁更可信？谁更接近于真实情况？



❖ 前一口径中，越低的BST被重复统计更多次——故嫌过于乐观

❖ 若删除算法固定使用succ()，则每棵BST都有越来越左倾的趋势

❖ 理想随机在实际中并不常见，关键码往往按单调甚至线性的次序出现

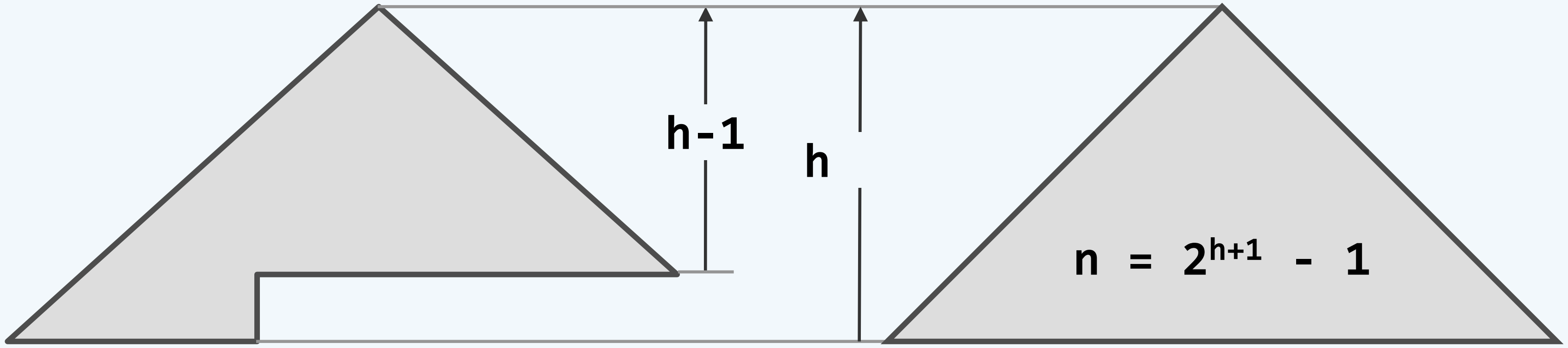
极高的BST频繁出现，不足为怪

理想平衡

❖ 节点数目固定时，兄弟子树高度越接近（$\boxed{\text{平衡}}$），全树也将倾向于$\boxed{\text{更低}}$

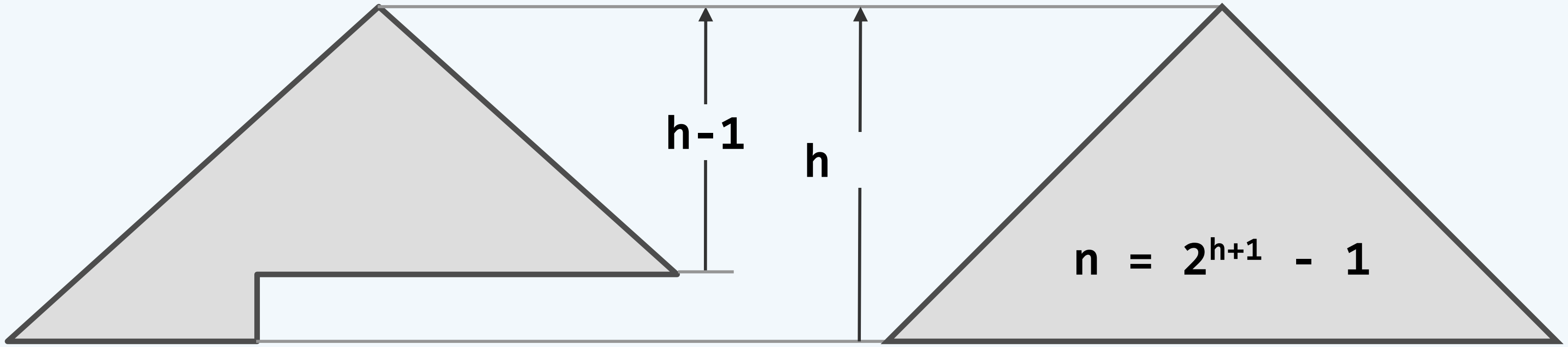
❖ 由n个节点组成的二叉树，高度不低于$\lfloor \log_2 n \rfloor$——$\boxed{\text{恰为}\lfloor \log_2 n \rfloor}$时，称作$\boxed{\text{理想平衡}}$

❖ 大致相当于$\boxed{\text{完全树}}$甚至$\boxed{\text{满树}}$：叶节点只能出现于最底部的两层——条件过于苛刻



适度平衡

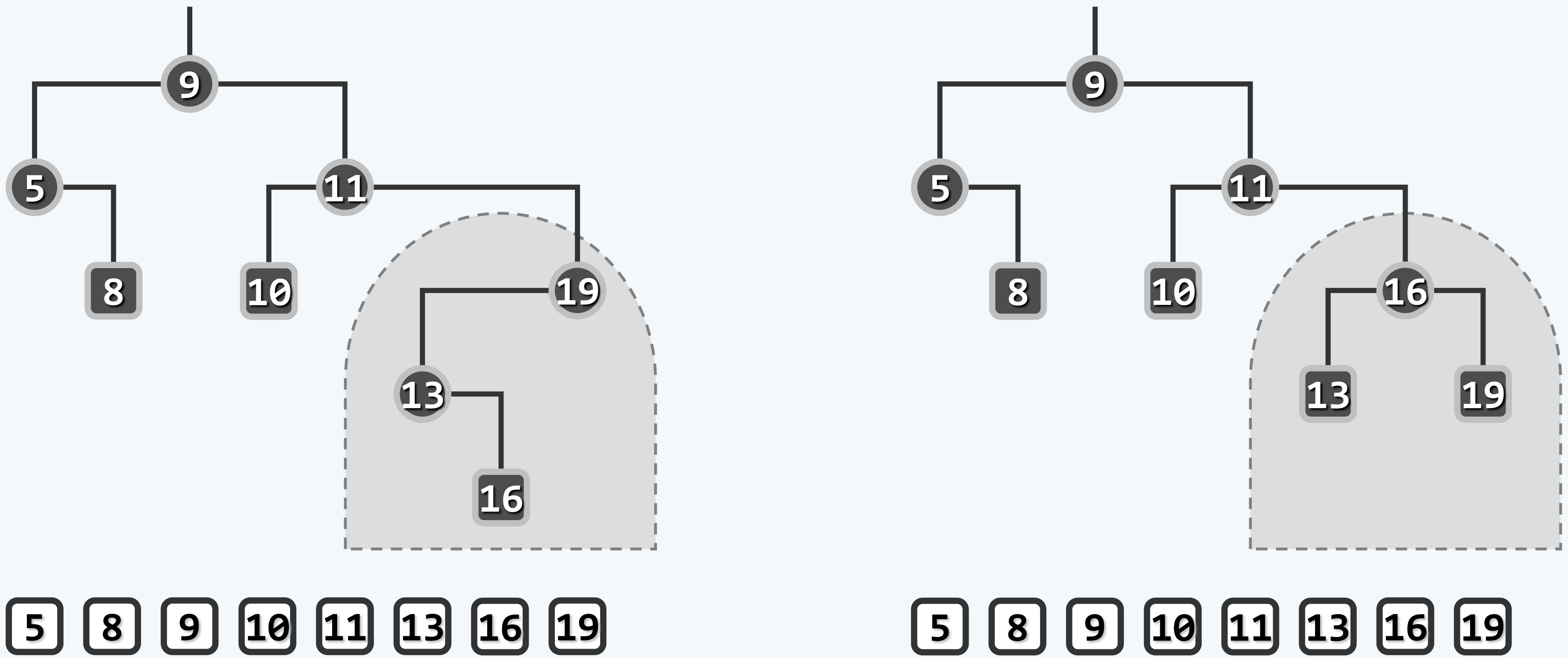
- 理想平衡出现概率极低、维护成本过高，故须适当地放松标准
- 退一步海阔天空：高度渐进地不超过$\mathcal{O}(\log n)$，即可称作适度平衡
- 适度平衡的BST，称作平衡二叉搜索树（BBST）



等价BST

❖ 上下可变：联接关系不尽相同，承袭关系可能颠倒

左右不乱：中序遍历序列完全一致，全局单调非降

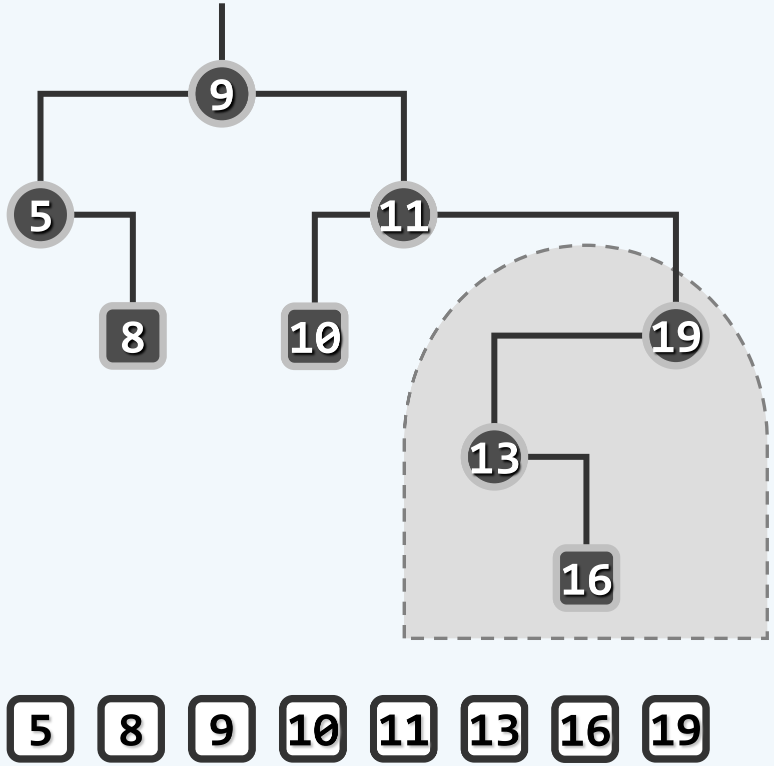


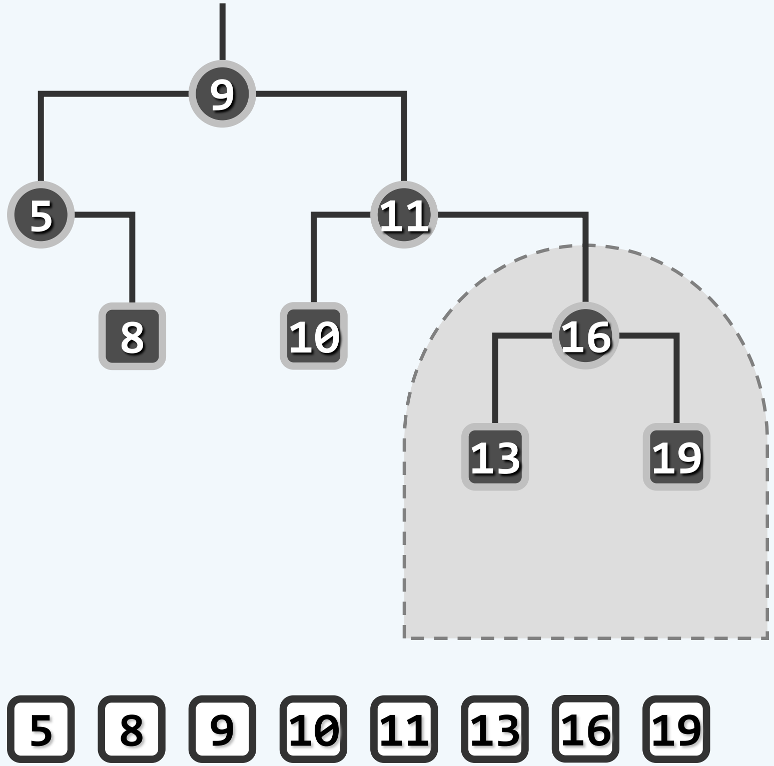
限制条件 + 局部性

❖ 各种BBST都可视作BST的某一子集，相应地满足精心设计的 $\boxed{\text{限制条件}}$

1）单次动态修改操作后，至多 $\boxed{\mathcal{O}(1)}$ 处局部不再满足限制条件

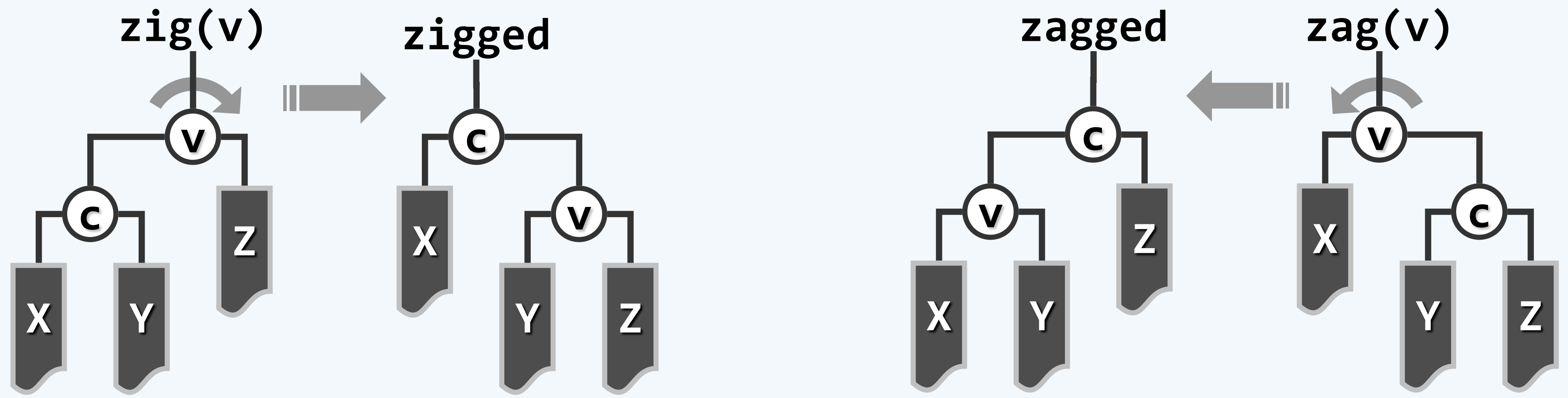
2）可在 $\boxed{\mathcal{O}(\log n)}$ 时间内，使这些局部（以至全树）重新满足





等价变换 + 旋转调整

- 刚刚失衡的BST，必可迅速转换为一棵等价的BBST——为此，只需$\mathcal{O}(\log n)$甚至$\mathcal{O}(1)$次旋转



- zig和zag：仅涉及常数个节点，只需调整其间的联接关系；均属于局部操作、基本操作
- 调整之后：v/c深度加/减1，子（全）树高度的变化幅度，上下不超过1
- 实际上，经过不超过$\mathcal{O}(n)$次旋转，等价的BST均可相互转化 习题解析[7-15]