Atividade 19 - MAT0222

Álgebra Linear II

29/06/2020

Exercício 14 - Lista 6

a)

Quero encontrar uma base ortonormal para o subespaço V gerado pelos polinômios1, x e x^2.

Seja $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ a base desejada. Para encontrar essa base utilizaremos o processo de ortogonalização de Gram-Schimdt. Considere que $v_1 = 1$, $v_2 = x$ e $v_3 = x^2$, então temos que

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \frac{< v_2, u_1 > u_1}{\|u_1\|^2} \\
u_3 &= v_3 - \frac{< v_3, u_1 > u_1}{\|u_1\|^2} - \frac{< v_3, u_2 > u_2}{\|u_2\|^2}
\end{aligned}$$

Para u_2

$$< v_2, u_1 > = \int_0^1 x \ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\|u_1\|^2 &= 1 \\
u_2 &= x - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Para u_3

$$< v_3, u_1 > = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$< v_3, u_2 > = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\|u_2\|^2 =< u_2, u_2 >= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right)\Big|_0^1) = \frac{1}{12}$$

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Sabemos então que $\beta_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortogonal, para chegarmos em β, basta dividir cada vetor pela sua norma. Desta forma, falta apenas calcular a norma de u_3, pois as outras ja foram calculadas acima,

$$\begin{aligned}\|u_3\|^2 &= \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{36} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{180}\end{aligned}$$

Desta forma $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$, onde

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = 1 \tag{1}$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = x\sqrt{12} - \frac{\sqrt{12}}{2} \tag{2}$$

$$w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = 6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \frac{6\sqrt{5}}{6} \tag{3}$$

b)

Para calcular o polinomio de grau 2 que melhor aproxima a função $f(x) = \cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$, usaremos o seguinte resultado:

Seja V um e.v. com produto interno, U um subespço vetorial de dimensão finita e $u_1, ..., u_k$ base ortonormal de U. Se $v \in V$, então o vetor em U mais próximo de v é a projeção ortogonal em U do vetor v, isto é

$$P_U(v) = < v, u_1 > u_1 + ... + < v, u_k > u_k$$

$$< cos(x), w_1 > = \int_0^1 cos(x)dx = sen(x)\Big|_0^1 = sen(1)$$

$$\begin{aligned}< cos(x), w_2 > &= \int_0^1 cos(x) \left(x\sqrt{12} - \frac{\sqrt{12}}{2} \right) dx = \sqrt{12} \int_0^1 xcos(x)dx - \frac{\sqrt{12}}{2} \int_0^1 cos(x)dx \\ &= \sqrt{12} \left(xsen(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 sen(x)dx \right) - \frac{\sqrt{12}}{2} sen(1) = \sqrt{12} \left(sen(1) + cos(1) - 1 \right) - \frac{\sqrt{12}}{2} sen(1) \\ &= \frac{\sqrt{12}}{2} sen(1) + \sqrt{12}cos(1) - \sqrt{12} = \sqrt{12} \left(\frac{1}{2} sen(1) + cos(1) - 1 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}< cos(x), w_3 > &= \int_0^1 cos(x) \left(6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \frac{6\sqrt{5}}{6} \right) dx = 6\sqrt{5} \int_0^1 x^2cos(x)dx - 6\sqrt{5} \int_0^1 xcos(x)dx + \frac{6\sqrt{5}}{6} \int_0^1 cos(x)dx \\ &= 6\sqrt{5}(2cos(1) - sen(1)) - 6\sqrt{5}(sen(1) + cos(1) - 1) + \frac{6\sqrt{5}}{6} sen(1) = 6\sqrt{5}cos(1) - 11\sqrt{5}sen(1) + 6\sqrt{5} \\ &= \sqrt{5}(6cos(1) - 11sen(1) + 6)\end{aligned}$$

Desta forma podemos encontrar a função $h(x) \in P_2(\mathbb{R})$, que mais se aproxima da função $cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$.

$$h(x) = 0.841471 + -0.134969\left(x\sqrt{12} - \frac{\sqrt{12}}{2}\right) + -0.0321256\left(6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \frac{6\sqrt{5}}{6}\right)$$