MAE 221 - Conjunto de exercícios 7

Profa. Beti

Entregar os exercícios assinalados com ♣ em 11.maio.2020.
Os exercícios assinalados com ✎ serão feitos em "aula".

1. (Continuação do Exerc. 1 do Conjunto de Exercícios 6)
   A densidade conjunta de X e Y é dada por
   $$f(x, y) = 6xy(2 - x - y)\ \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$$
   Calcule a **esperança** condicional de X dado que $Y = y$, para y fixado em $(0, 1)$.

   Ross-Introd. Prob. Models-12ed-2019 - Exemplo 3.5 - p.105

2. (Continuação do Exerc. 2 do Conjunto de Exercícios 6)
   Calcule $E(X)$ e $E(Y)$ para (X, Y) com f. densidade de probabilidade conjunta
   $$f(x, y) = \frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})},\ \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$
   e mostre que $Cov(X, Y) = 1$.

3. ✎ Considere que (X, Y) tenham f. densidade de probabilidade conjunta dada por
   $$f(x, y) = 3(x + y)\ \mathbb{1}_{(0,1)}(x + y)\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$$
   Note a simetria em x e y.
   (a) Desenhe a região do suporte conjunto de (X, Y).
   (b) Encontre a função densidade de probabilidade de X. Ao integrar em y, olhe na região do item (a).
   (c) Determine $Cov(X, Y)$.
   (d) Calcule $P(X + Y < 1/2)$.
   (e) Determine $E(Y \mid X = x)$.

4. ♣ A tabela abaixo fornece a função de probabilidade conjunta de X e Y.

$Y \setminus X$	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

   (a) Verifique que $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. O que isso significa?
   (b) X e Y são independentes? Justifique e comente se referindo ao item (a).

5. Mostre ou dê um contra-exemplo.
   (a) $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{E(X)}$
   (b) Se X e Y são independentes, então $E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{E(X)}{E(Y)}$

   Magalhães - Exerc. 6 - §4.4

6. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e, sejam g e h funções reais. Mostre que

$$E\Big[g(X)h(Y)\Big] = E\Big(g(X)\Big) \cdot E\Big(h(Y)\Big)$$

Veja Teorema 9 - Mood et al - p. 160 ou
veja Proposição 4.1 - Cap. 7 - Ross - p.384

7. ♣ Calcular $E\left(\frac{1}{Y}\right)$ para $Y \sim \text{Gama}(r, \theta)$

8. Sejam X e Y v.aleatórias, ambas com média 0 e variância 1, e com coeficiente de correlação entre elas igual a ρ, $\rho \neq 0$. Seja $T = X - \rho Y$, calcule a esperança de T, a variância de T e o coeficiente de correlação entre T e Y.

9. ♣ Calcule $Cov(X, Y)$ em que X e Y são v.a. com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{2}{x} e^{-2x}\, \mathbb{1}_{(0,x)}(y) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

Sugestão: para calcular $E(Y)$ NÃO precisa calcular a densidade marginal $f_Y(\cdot)$ (tente calcular e verifique que não é trivial). Calcule a esperança pela definição $E(g(X, Y))$ com $g(x, y) = y$.

10. Sejam $X \sim \text{Bernoulli}(a)$ e $Y \sim \text{Bernoulli}(b)$, com $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$.
Mostre que, se $Cov(X, Y) = 0$ então X e Y são independentes.

11. Lança-se uma moeda honesta infinitas vezes e define-se as v.a. $X_1, X_2, \ldots$ por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo e o } (i+1)\text{-ésimo lançamentos resultam em cara} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Obtenha $E(X_i)$ e $Var(X_i)$, $i \geq 1$.
   (b) Mostre que

$$Cov(X_i, X_j) \begin{array}{l} \neq 0 \text{ se } |j - i| = 1, \\ = 0 \text{ se } |j - i| > 1. \end{array}$$

12. Considere as variáveis aleatórias (contínuas ou discretas) X_i e Y_j definidas em um mesmo espaço de probabilidade e assuma que elas possuem variâncias finitas para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Mostre que a covariância é **bilinear**, isto é,

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov(X_i, Y_j)$$

com a_i e b_j sendo números reais.

13. ♣ Lança-se independentemente dois dados honestos. Seja X o resultado do primeiro dado e Y o resultado do segundo dado. Sejam $T = X + Y$ e $U = X - Y$.

   (a) Calcule a distribuição de probabilidade conjunta de T e U.
   (b) T e U são independentes ? Justifique.
   (c) Calcule $Cov(T, U) = Cov(X + Y, X - Y)$. Observe o que obteve no item (b) e comente.

14. (Generalização do resultado do exercício anterior)
Sejam X e Y variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com mesma distribuição, mas não necessariamente independentes. Mostre que $Cov(X+Y, X-Y) = 0$
Sugestão: use o resultado do Exerc. 10 desta lista.

15. ♣ Um rato está preso num labirinto. Inicialmente ele pode ir à direita ou à esquerda. Se ele vai à direita, ele percorrerá o labirinto por 3 minutos e retornará à sua posição inicial. Se ele vai à esquerda, então com probabilidade 1/3 ele sairá do labirinto após 2 minutos de percurso; e com probabilidade 2/3 ele retornará à posição inicial após 5 minutos de percurso. Assumindo que o rato escolhe a direita ou a esquerda aleatoriamente com igual chance, calcule

    (a) o tempo médio (em minutos) que o rato fica preso no labirinto.

    (b) a variância do tempo que ele fica no labirinto.

    Resp: $E(T) = 21\text{min}$, $\text{Var}(T) = 438\text{min}^2$ (?)

16. ✎ Um mineiro está preso numa mina contendo 3 portas. A 1a. porta o conduz à saída após 2 horas de caminhada. A 2a. porta o conduz a um túnel que o retorna ao mesmo lugar da mina após 3 horas. A 3a. porta o conduz a um túnel que o retorna ao mesmo lugar após 5 horas. Se o mineiro escolhe qualquer porta aleatoriamente todas as vezes, calcule o tempo esperado que ele vai levar para sair da mina. Calcule a variância desse tempo de saída.

    Resp: $E(T) = 10\text{h}$ e $\text{Var}(T) = 98\text{h}^2$

    Exemplo 3.12 - Ross (Introd.to Prob. Models - 12ed-2019) p.111
    Modificação do Exemplo 5c - Cap 7 - Ross - p.398