Atividade 22 - MAT0222

Álgebra Linear II

Exercício 21 da lista 7

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Quero encontrar uma matrix ortogonal $P \in M_3(\mathbb{R})$, tal que $P^t AP$ seja diagonal. Com esse fim, encontraremos o polinômio característico $p_A(x)$ associado à A.

$$\begin{aligned} p_A(x) = det \begin{bmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -2 & x-3 & -4 \\ -3 & -4 & x-5 \end{bmatrix} &= (x-1)(x-3)(x-5) - 48 - [9(x-3) + 16(x-1) + 4(x-5)] \\ &= (x^2 - 4x + 3)(x-5) - 48 - (29x - 27 - 16 - 20) = (x^3 - 4x^2 + 3x - 5x^2 + 20x - 15) - 48 - (29x - 63) \\ &= x^3 - 9x^2 + 23x - 63 - 29x + 63 = x^3 - 9x^2 - 6x = x(x^2 - 9x - 6) \end{aligned}$$

Agora o foco é encontrar autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 de A.

Usando a fórmula de Bhaskara em $(x^2 - 9x - 6)$, obtemos

$$(x^2 - 9x - 6) = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = \frac{9+\sqrt{105}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{9-\sqrt{105}}{2} \end{cases}$$

Desta forma,

$$p_A(x) = x(x^2 - 9x - 6) \implies \begin{cases} \lambda_1 = \frac{9+\sqrt{105}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{9-\sqrt{105}}{2} \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Considere neste momento os seguintes resultados:

1. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica, isto é $A = A^t$. Então A é diagonalizável, e existe uma matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal (isto é $P^t = P^{-1}$), tal que $P^t AP$ diagonal.*

2. *Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador normal e v e w autovetores de T associados à autovalores distintos. Então v e w são ortogonais.*

3. **Teorema Espectral Real**

   Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador normal. Se seu polinômio característico se decompõe em um produto de fatores de grau 1 em $\mathbb{K}[x]$, entãoV possui uma base ortonormal formada por autovetores de T.

Considere então A sendo a matriz de algum operador linear T na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Logo T é um operador auto-adjunto, com autovalores λ_1, λ_2 e λ_3, além disso sabemos que todo operador auto-adjunto é normal. Então, pelo **Teorema Espectral Real** existe uma base de autovetores respectivamente associados a cada um dos autovalores, que formam uma base ortonormal. Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ a base descrita, vamos encontrar v_1, v_2 e v_3, pois encontraremos de imediato a matriz P desejada após encontrarmos essa base.("matriz mudança de base")

Para determinarmos β, basta encontrarmos os auto-espaços gerados por cada um dos autovalores, e escolhermos um vetor de norma 1, pois ja temos a garantia de que eles são ortogonais, pelo resultado 2. apresentado acima.

Note que sabemos de antemão que $dimV(\lambda_3) = dimV(\lambda_2) = dimV(\lambda_1) = 1$, pois temos 3 autovalores distintos, e $dim\mathbb{R}^3 = 3$.

Para $V(\lambda_3)$, se $v_3 = (a, b, c) \in V(\lambda_3)$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$A \cdot v_3 = 0 \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, teremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 2a + 3b + 4c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b + 2c = 0 \\ b = -2c \end{cases} \implies a = c$$

Logo $V(\lambda_3) = [(1, -2, 1)]$, como quero um $v_3 \in V(\lambda_3)$ tal que $\|v_3\| = 1$, então

$$v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Para $V(\lambda_2)$, se $v_2 = (a, b, c) \in V(\lambda_2)$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\left[A - \left(\frac{9 - \sqrt{105}}{2} \right) I_3 \right] \cdot v_2 = 0 \implies \begin{bmatrix} \frac{-7+\sqrt{105}}{2} & 2 & 3 \\ 2 & \frac{-3+\sqrt{105}}{2} & 4 \\ 3 & 4 & \frac{1+\sqrt{105}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a(-7 + \sqrt{105}) + 4b + 6c = 0 \\ 6a + 8b + c(1 + \sqrt{105}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2a(-7 + \sqrt{105}) + 8b + 12c = 0 \\ 6a + 8b + c(1 + \sqrt{105}) \end{cases} \implies \begin{cases} a(-20 + 2\sqrt{105}) - c(-11 + \sqrt{105}) = 0 \end{cases}$$

$$a(-20 + 2\sqrt{105}) = c(-11 + \sqrt{105}) \implies a = -\frac{c}{10}(5 + \sqrt{105}) \implies b = \frac{c}{20}(5 - \sqrt{105})$$

Logo $V(\lambda_2) = \left[(-\frac{1}{10}(5 + \sqrt{105}), \frac{1}{20}(5 - \sqrt{105}), 1) \right]$,como quero um $v_2 \in V(\lambda_2)$ tal que $\|v_2\| = 1$, então

$$v_2 = \frac{\left(-\frac{1}{10}(5 + \sqrt{105}), \frac{1}{20}(5 - \sqrt{105}), 1 \right)}{\left\| \left(-\frac{1}{10}(5 + \sqrt{105}), \frac{1}{20}(5 - \sqrt{105}), 1 \right) \right\|}$$

$$\left\| \left(-\frac{1}{10}(5 + \sqrt{105}), \frac{1}{20}(5 - \sqrt{105}), 1 \right) \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{10}(35 + \sqrt{105})}$$

Logo,

$$v_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}\left(5+\sqrt{105}\right)}{\sqrt{15}\sqrt{35+\sqrt{105}}}, \frac{5-\sqrt{105}}{\sqrt{30}\sqrt{35+\sqrt{105}}}, \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}\sqrt{35+\sqrt{105}}} \right)$$

Por fim teremos,

Para $V(\lambda_1)$, se $v_1 = (a,b,c) \in V(\lambda_1)$ com $a,b,c \in \mathbb{R}$

$$\left[A - \left(\frac{9+\sqrt{105}}{2} \right) I_3 \right] \cdot v_1 = 0 \implies \begin{bmatrix} \frac{-7-\sqrt{105}}{2} & 2 & 3 \\ 2 & \frac{-3-\sqrt{105}}{2} & 4 \\ 3 & 4 & \frac{1-\sqrt{105}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a(-7-\sqrt{105}) + 4b + 6c = 0 \\ 6a + 8b + c(1-\sqrt{105}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2a(-7-\sqrt{105}) + 8b + 12c = 0 \\ 6a + 8b + c(1-\sqrt{105}) \end{cases} \implies \begin{cases} a(-20-2\sqrt{105}) - c(-11-\sqrt{105}) = 0 \end{cases}$$

$$a(-20-2\sqrt{105}) = c(-11-\sqrt{105}) \implies a = \frac{c}{10}(-5+\sqrt{105}) \implies b = \frac{c}{20}(5+\sqrt{105})$$

Logo $V(\lambda_1) = \left[(\frac{1}{10}(-5+\sqrt{105}), \frac{1}{20}(5+\sqrt{105}), 1) \right]$, como quero um $v_1 \in V(\lambda_1)$ tal que $\|v_1\| = 1$, então

$$v_1 = \frac{\left(\frac{1}{10}(-5+\sqrt{105}), \frac{1}{20}(5+\sqrt{105}), 1\right)}{\left\| \left(\frac{1}{10}(-5+\sqrt{105}), \frac{1}{20}(5+\sqrt{105}), 1\right) \right\|}$$

$$\left\| \left(\frac{1}{10}(-5+\sqrt{105}), \frac{1}{20}(5+\sqrt{105}), 1 \right) \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{10}(35-\sqrt{105})}$$

Logo,

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}\left(-5+\sqrt{105}\right)}{\sqrt{15}\sqrt{35-\sqrt{105}}}, \frac{5+\sqrt{105}}{\sqrt{30}\sqrt{35-\sqrt{105}}}, \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}\sqrt{35-\sqrt{105}}} \right)$$

Finalmente, podemos obter a matriz P, desejada:

$$P = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\left(-5+\sqrt{105}\right)}{\sqrt{15}\sqrt{35-\sqrt{105}}} & -\frac{\sqrt{2}\left(5+\sqrt{105}\right)}{\sqrt{15}\sqrt{35+\sqrt{105}}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{5+\sqrt{105}}{\sqrt{30}\sqrt{35-\sqrt{105}}} & \frac{5-\sqrt{105}}{\sqrt{30}\sqrt{35+\sqrt{105}}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}\sqrt{35-\sqrt{105}}} & \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}\sqrt{35+\sqrt{105}}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.38509 & -0.827671 & 0.408248 \\ 0.55951 & -0.142414 & -0.816497 \\ 0.733931 & 0.542844 & 0.408248 \end{bmatrix} = P'$$

Desta forma, assim como foi dito acima, pelo *Teorema Espectral Real*, podemos dizer que a matriz P, construída dessa maneira, é a matriz ortogonal P, tal que

$$D = P^t A P$$

onde D é a matriz diagonal formada pelos autovalores de A.

Apenas com o intuito de verificarmos nosso resultado, iremos obter uma aproximação de D, por P'

$$\begin{bmatrix} 0.38509 & 0.55951 & 0.733931 \\ -0.827671 & -0.142414 & 0.542844 \\ 0.408248 & -0.816497 & 0.408248 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.38509 & -0.827671 & 0.408248 \\ 0.55951 & -0.142414 & -0.816497 \\ 0.733931 & 0.542844 & 0.408248 \end{bmatrix} = D'$$

$$D' = \begin{pmatrix} 9.62347\ldots & 9.46871E-7 & -5.38443\ldots E-6 \\ 9.46871E-7 & -0.62347\ldots & -8.8792E-8 \\ -5.38443\ldots E-6 & -8.8792E-8 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{9+\sqrt{105}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9-\sqrt{105}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

E o exercício está terminado.