

Segunda Avaliação

Cálculo III

Kevin Yukio Futema 11221539

17/07/2020

1)

Enunciado:

Calcule a massa da superfície S dada por $z = 2x^2 + 3y^2$ com $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, sabendo-se que a densidade de S é definida por $\delta(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}}$

Resolução:

Sabemos que a massa de S , é dada pela integral de superfície de $\delta(x, y, z)$ sobre S , isto é,

$$\text{Massa de } S = \iint_S \delta(x, y, z) dS$$

Sendo assim, considere a seguinte parametrização de S :

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq 1 \\ y = v & \\ z = 2u^2 + 3v^2 & 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (1, 0, 4u) \\ \sigma_v = (0, 1, 6v) \end{cases} \quad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = (-4u, -6v, 1) \implies \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \sqrt{1 + 16u^2 + 36v^2}$$

$$\delta(\sigma(u, v)) = \frac{2u^2 + 3v^2}{\sqrt{1 + 16u^2 + 36v^2}}$$

Considere $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$

Calculando a massa de S :

$$\begin{aligned} \iint_S \delta(x, y, z) dS &= \iint_D \delta(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv = \int_0^1 \left[\int_0^1 2u^2 + 3v^2 du \right] dv \\ &= \int_0^1 \frac{2u^3}{3} + 3uv^2 \Big|_0^1 dv = \int_0^1 \frac{2}{3} + 3v^2 dv = \frac{2v}{3} + v^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

A massa de S é $\frac{5}{3}$

2)

Enunciado:

Calcule a área da superfície S dada pela parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.

Resolução:

Sabemos que a área de S , é dada pela integral de superfície de 1 sobre S , isto é,

$$\text{Área de } S = \iint_S 1 dS$$

Sendo assim, considere a seguinte parametrização de S :

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = 2\cos(u)\sin(v) & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = 2\sin(u)\sin(v) \\ z = 2\cos(v) & 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Note que $v \leq \frac{\pi}{2}$, pois $z \geq 0$ e v atinge a maior angulação quando $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$, então

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 + 3x^2 + 3y^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 1 \implies 4\sin^2(v) = 1 \xRightarrow{0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}} \sin(v) = \frac{1}{2} \\ v &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Desta forma

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = 2\cos(u)\sin(v) & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = 2\sin(u)\sin(v) \\ z = 2\cos(v) & 0 \leq v \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sigma_u = (-2\sin(u)\sin(v), 2\cos(u)\sin(v), 0) \\ \sigma_v = (2\cos(u)\cos(v), 2\sin(u)\cos(v), -2\sin(v)) \end{cases} \\ \sigma_u \wedge \sigma_v = (-4\cos(u)\sin^2(v), -4\sin(u)\sin^2(v), -4\sin(v)\sin(v)) \\ \|\sigma_u \wedge \sigma_v\|^2 = 16\cos^2(u)\sin^4(v) + 16\sin^2(u)\sin^4(v) + 16\sin^2(v)\cos^2(v) = 16\sin^4(v) + 16\sin^2(v)\cos^2(v) \\ = 16\sin^2(v) \implies \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = 4|\sin(v)| = 4\sin(v) \quad \sin(v) > 0 \text{ pois } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Considere $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{6}\}$

Calculando a área de S :

$$\begin{aligned} \iint_S 1 dS &= \iint_D \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin(v) dv \right] du \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin(v) dv = 8\pi (-\cos(v)) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 8\pi \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{16\pi - 8\pi\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

A área de S é $\frac{16\pi - 8\pi\sqrt{3}}{2}$

3)

Enunciado:

Calcule $\iint_S (x^2 + 2y + z) dS$, sendo S a parte do plano $z = 4 + 2x$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Resolução:

Para calcular essa integral de superfície, considere a seguinte parametrização de S :

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = v \cos(u) & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = v \sin(u) + 1 \\ z = 4 + 2v \cos(u) & 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (-v \sin(u), v \cos(u), -2v \sin(u)) \\ \sigma_v = (\cos(u), \sin(u), 2 \cos(u)) \end{cases} \quad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = (2v, 0, -v) \implies \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = v\sqrt{5}$$

Considere $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1\}$

Calculando a massa de S :

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + 2y + z) dS &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (v^2 \cos^2(u) + 2v \sin(u) + 2 + 4 + 2v \cos(u)) v\sqrt{5} du \right] dv \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (v^3 \cos^2(u) + 2v^2 \sin(u) + 6v + 2v^2 \cos(u)) du \right] dv \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 \left[v^3 \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right) - 2v^2 \cos(u) + 6vu + 2v^2 \sin(u) \right] \Big|_0^{2\pi} dv \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 (v^3 \pi + 12v\pi) dv = \pi\sqrt{5} \left(\frac{v^4}{4} + 6v^2 \right) \Big|_0^1 = \pi\sqrt{5} \left(\frac{1}{4} + 6 \right) \\ &= \frac{25\pi\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Então

$$\iint_S (x^2 + 2y + z) dS = \frac{25\pi\sqrt{5}}{4}$$

4)

Enunciado:

Calcule $\iint_S e^{x^2} dydz + 2zdzdx + 4xydx dy$, sendo S a parte do gráfico da função $z = \sqrt{9 - y}$, com $x \geq 0, y \geq 0$ e $0 \leq y \leq 8 - x^2$, orientada com campo normal unitário \vec{n} tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$.

Resolução:

Temos que $\vec{F}(x, y, z) = (e^{x^2}, 2z, 4xy)$

Considere a seguinte parametrização de S :

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq \sqrt{8} \\ y = v & \\ z = \sqrt{9-v} & 0 \leq v \leq 8-u^2 \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (1, 0, 0) \\ \sigma_v = \left(0, 1, \frac{-1}{2\sqrt{9-v}}\right) \end{cases} \quad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{9-v}}, 1\right)$$

Note que essa parametrização nos fornece um vetor normal que já está no sentido desejado, então não há necessidade de fazermos nada para arrumar o sentido.

$$\vec{F}(\sigma(u, v)) = (e^{u^2}, 2\sqrt{9-v}, 4uv)$$

$$\vec{F} \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v = 1 + 4uv$$

Considere $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \sqrt{8}, 0 \leq v \leq 8-u^2\}$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \iint_S e^{x^2} dydz + 2zdzdx + 4xydx dy &= \iint_D \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v dudv = \int_0^{\sqrt{8}} \left[\int_0^{8-u^2} 1 + 4uv dv \right] du \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} \left(v + 2uv^2 \Big|_0^{8-u^2} \right) du = \int_0^{\sqrt{8}} (8-u^2 + 2u(64-16u^2+u^4)) du \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} (8 + 128u - u^2 - 32u^3 + 2u^5) du = \left(8u + 64u^2 - \frac{u^3}{3} - 8u^4 + \frac{u^6}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{8}} \\ &= 8\sqrt{8} + 64 \cdot 8 - \frac{8\sqrt{8}}{3} - 64 \cdot 8 + \frac{8^3}{3} = \frac{512 - 16\sqrt{8}}{3} \end{aligned}$$

Então,

$$\iint_S e^{x^2} dydz + 2zdzdx + 4xydx dy = \frac{512 - 16\sqrt{8}}{3}$$

5)

Enunciado:

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$ e S a parte da superfície $z = 16 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 7$, orientada com campo normal unitário \vec{n} tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$.

Resolução:

Considere a seguinte parametrização de S :

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = \sqrt{16-v}\cos(u) & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = \sqrt{16-v}\sin(u) & \\ z = v & 7 \leq v \leq 16 \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (-\sqrt{16-v}\operatorname{sen}(u), \sqrt{16-v}\cos(u), 0) \\ \sigma_v = \left(-\frac{\cos(u)}{2\sqrt{16-v}}, -\frac{\operatorname{sen}(u)}{2\sqrt{16-v}}, 1\right) \end{cases} \quad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = \left(\sqrt{16-v}\cos(u), \sqrt{16-v}\operatorname{sen}(u), \frac{1}{2}\right)$$

Note que essa parametrização nos fornece um vetor normal que já está no sentido desejado, então não há necessidade de fazermos nada para arrumar o sentido.

$$\vec{F}(\sigma(u, v)) = (\sqrt{16-v}\cos(u), \sqrt{16-v}\operatorname{sen}(u), 2v)$$

$$\vec{F} \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v = (16-v)\cos^2 u + (16-v)\operatorname{sen}^2 u + v = 16 - v + v = 16$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_7^{16} 16 dv du = 16 \int_0^{2\pi} \int_7^{16} 1 dv du = 16 \cdot 2\pi \cdot 9 = 288\pi$$

Então,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 288\pi$$

6)

Enunciado:

Calcule $\iint_S x dy dz + (2x + y) dz dx + \cos(x^2 + z) dx dy$, sendo S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ que está no primeiro octante, entre os planos $z = 0$ e $y + z = 4$, orientada com campo normal unitário \vec{n} que se afasta do eixo z .

Resolução:

Temos que $\vec{F}(x, y, z) = (x, 2x + y, \cos(x^2 + z))$

Considere a seguinte parametrização de S :

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = 2\cos(u) & 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ y = 2\operatorname{sen}(u) \\ z = v & 0 \leq v \leq 4 - 2\operatorname{sen}(u) \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (-2\operatorname{sen}(u), 2\cos(u), 0) \\ \sigma_v = (0, 0, 1) \end{cases} \quad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = (2\cos(u), 2\operatorname{sen}(u), 0)$$

Note que essa parametrização nos fornece um vetor normal que já está no sentido desejado, então não há necessidade de fazermos nada para arrumar o sentido.

$$\vec{F}(\sigma(u, v)) = (2\cos(u), 4\cos(u) + 2\operatorname{sen}(u), \cos(4\cos^2(u) + v))$$

$$\vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v = 4\cos^2(u) + 8\cos(u)\operatorname{sen}(u) + 4\operatorname{sen}^2(u)$$

Considere $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 4 - 2\sin(u)\}$

$$\begin{aligned}
\iint_S xdydz + (2x + y)dzdx + \cos(x^2 + z) dxdy &= \iint_D \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v dudv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{4-2\sin(u)} 4\cos^2(u) + 8\cos(u)\sin(u) + 4\sin^2(u) dv \right] du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{4-2\sin(u)} 4 + 8\cos(u)\sin(u) dv \right] du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4v + 8v\cos(u)\sin(u) \Big|_0^{4-2\sin(u)} \right) du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 - 8\sin(u) + 32\cos(u)\sin(u) - 16\cos(u)\sin^2(u)) du \\
&= \left(16u + 8\cos(u) + \frac{32\sin^2(u)}{2} - \frac{16\sin^3(u)}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{16\pi}{2} + 16 - \frac{16}{3} - 8 = 8 - \frac{16}{3} + \frac{16\pi}{2} = \frac{48 - 32 + 48\pi}{6} \\
&= \frac{16 + 48\pi}{6}
\end{aligned}$$

Então,

$$\iint_S xdydz + (2x + y)dzdx + \cos(x^2 + z) dxdy = \frac{16 + 48\pi}{6}$$