MAE 221 - Conjunto de exercícios 5

Profa. Beti Kira — Entregar os exercícios assinalados com ♣, em 17.abril.2020.

<u>Sugestão:</u> *para resolver esses exercícios consulte o arquivo com as principais distribuições de probabilidade.*

1. ♣ Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos $M_X(\cdot)$.
   (a) Para a e b constantes reais, se $Y = aX + b$, expresse a função geradora de momentos de Y, M_Y, em termos de M_X.
   (b) Seja $Z \sim$Normal$(0, 1)$. Use o resultado acima para obter a distribuição de $Y = \mu + \sigma Z$. Identifique essa distribuição. Justifique.

2. ♣ Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos $M(\cdot)$.
   Definindo $\Psi(t) = \log M(t)$, mostre que

$$\left.\frac{\partial^2 \Psi(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = Var(X).$$

3. Usando <u>função geradora de momentos</u>, mostre que
   (a) se $X_1, \ldots, X_k$ são variáveis aleatórias **independentes** tais que

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i),\ i = 1, \ldots, k \quad \text{então} \quad X_1 + \cdots + X_k \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)$$

   (b) se $X_1, \ldots, X_k$ são variáveis aleatórias **independentes** tais que

$$X_i \sim \text{Binomial}(n_i, p),\ i = 1, \ldots, k \ \text{ então } \ X_1 + \cdots + X_k \sim \text{Binomial}(n_1 + \cdots + n_k, p)$$

   (c) se $X_1, \ldots, X_r$ são variáveis aleatórias **independentes** tais que

$$X_i \sim \text{Geométrica}(p),\ i = 1, \ldots, r \quad \text{então} \quad X_1 + \cdots + X_r \sim \text{Binomial Negativa}(r, p)$$

   (d) ♣ se $X_1, \ldots, X_r$ são variáveis aleatórias **independentes** tais que

$$X_i \sim \text{Exponencial}(\lambda),\ \lambda > 0,\ \ i = 1, \ldots, r \quad \text{então} \quad X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Gama}(r, \lambda)$$

   (e) ♣ se $X_1, \ldots, X_n$ são **independentes** tais que $X_i \sim$ Normal$(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \ldots, n$, então

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Normal}(\mu_1 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

   (f) se $X_1, \ldots, X_k$ são variáveis aleatórias **independentes** tais que

$$X_i \sim \chi^2(n_i),\ i = 1, \ldots, k \quad \text{então} \quad X_1 + \cdots + X_k \sim \chi^2(n_1 + \cdots + n_k).$$

4. Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos $M(t) = e^{3(e^t-1)}$. Determine $P(X = 0)$.

5. A função geradora de momentos de X é dada por $M_X(t) = \exp\{2e^t - 2\}$ e a de Y é dada por $M_Y(t) = \left(\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}\right)^{10}$. Se X e Y são independentes, calcule $P(X + Y = 2)$.

6. ♣ Seja $Z \sim$Normal$(0, 1)$.

   (a) Seja $Y = Z^2$, **calcule** $E(e^{tY}) = E\left(e^{tZ^2}\right)$, usando a definição de esperança e a f.d.p. da normal padrão.
   Sugestão: tente identificar a f.densidade de probabilidade de alguma variável aleatória, exceto por constantes, e usar que a integral dessa f.d.p. é 1.

   (b) Identifique a distribuição de Y. Justifique.

7. Seja Y uma variável aleatória com média $E(Y) = \mu$ finita.
   Mostre que o valor de $E[(Y - b)^2] \stackrel{def}{=} g(b)$ é mínimo para $b = \mu$.

8. Seja Y uma variável aleatória. Mostre que o valor de $E \mid Y - b \mid$ é mínimo para $b =$ mediana de Y.

9. (Desigualdade de Bernstein/Cota de Chernoff)
   Prove que se Y é uma variável aleatória com função geradora de momentos finita $M_Y(t)$, então para todo $u > 0$ e $t > 0$,
$$P(Y > u) \leq e^{-ut}\, M_Y(t).$$

10. (Desigualdade de Chebyshev unilateral)
    Seja Y uma variável aleatória com média 0 e variância σ^2. Então, para qualquer $a > 0$, tem-se que
$$P(Y > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$
    Veja Ross - Cap. 8-Proposição 5.1