Exercícios de entrega-MAE0221

Lista 10 - Probabilidade I

Kevin Yukio Futema 11221539

12/07/2020

3)

Temos do enunciado que $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e idênticamente distribuídas com $X_i \sim U(0,1)$.

O objetivo desse exercício é

$$\vdash -2n\ \ln Y \sim \chi^2_{(2n)} \qquad Y = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$$

Considere agora as seguintes variáveis aleatórias auxiliares que userei neste exercício,

$$Z_i = -\ln X_i \qquad S = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Vamos também encontrar a relação entre S e $-2n\ \ln Y$

$$\begin{aligned} -2n\ \ln Y &= -2n\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n} = -2\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}(-\ln X_i) = 2S \end{aligned}$$

Concluindo que $-2n\ \ln Y = 2S$.

Vamos encontrar a distribução de Z_i,

$$F_{Z_i}(z) = \mathbb{P}(-\ln X_i \leq z) = \mathbb{P}(\ln X_i \geq -z) = \mathbb{P}(X_i \geq e^{-z}) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq e^{-z}) = 1 - F_{X_i}(e^{-z})$$

Verificando o suporte de Z,

$$0 < e^{-z} < 1 \implies 0 < z < +\infty$$

Derivando $F_{Z_i}(z)$ em relação à z obtemos,

$$f_{Z_i}(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F_{Z_i}(z) = -F_{X_i}(e^{-z})(-1) = F_{X_i}(e^{-z}) = e^{-z} 1_{(0,\infty)}(z)$$

Desta forma sabemos que

$$f_{Z_i}(z) = e^{-z} 1_{(0,\infty)}(z) \implies Z_i \sim Gama(1,1)$$

Sabemos ainda que se $Z_i \sim Gama(1,1)$, então a função geradora de momentos de Z_i é dada por $M_{Z_i}(t) = \frac{1}{1-t}$.

Pelo enunciado,$X_1, \ldots, X_n$ são independentes, então sabemos que $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ também serão. Logo posso afirmar que os Z_i, para $i = 1, \ldots, n$ serão independentes.

Se $Z_1, \ldots, Z_n$ são independentes e com função geradora de momentos $M_{Z_i(t)}$, então sabemos que a função geradora de momentos de S será dada pelo produto das funções geradoras $M_{Z_i(t)}$. Dessa maneira obteremos que $M_S(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^n$.

Porém não estamos interessados em S, e sim em $2S$. Então, observe que

$$M_{2S}(t) = \mathbb{E}(e^{2St}) = M_S(2t) \implies M_{2S}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^n = \left(\frac{1/2}{1/2-t}\right)^n$$

E por fim, pela unicidade da função geradora de momentos, sabemos que

$$-2n \ \ln Y \sim \chi^2_{(2n)}$$

ou ainda,

$$-2n \ \ln Y \sim Gama\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

6)

Temos do enunciado que $T \sim \chi^2_{(m)}$ e $U \sim \chi^2_{(n)}$ independentes.

E quero mostrar que mostrar que

$$X = \frac{T/m}{U/n} \sim F_{(m,n)}$$

Primeiro note que que se $Z \sim \chi^2_{(\nu)}$, então podemos afirmar também que $Z \sim Gama\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$, além disso sabemos que a função geradora de momentos de Z é $M_Z(t) = \left(\frac{1/2}{1/2-t}\right)^{\nu/2}$.

Observe agora que a função geradora de momentos de $\frac{Z}{\alpha}$ é $M_{\frac{Z}{\alpha}}(t) = \mathbb{E}(exp\left\{\frac{Z}{\alpha}t\right\}) = M_Z(\frac{t}{\alpha}) = \left(\frac{\alpha/2}{\alpha/2-t}\right)^{\nu/2}$, então pela unicidade da função geradora de momentos podemos afirmar que $\frac{Z}{\alpha} \sim Gama\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$.

Dessa forma, sabemos que $\frac{T}{m} \sim Gama\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$ e $\frac{U}{n} \sim Gama\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ Além disso sabemos que T e U são independentes, então podemos afirmar que $\frac{T}{m}$ e $\frac{U}{n}$, são independentes também.

Para calcular $f_X(x)$, usaremos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} |u| f_{\frac{T}{m}, \frac{U}{n}}(xu, u) du \overbrace{=}^{\text{independência}} \int_{-\infty}^{\infty} |u| f_{\frac{T}{m}}(xu) f_{\frac{U}{n}}(u) du \\ &= \int_0^{\infty} u f_{\frac{T}{m}}(xu) f_{\frac{U}{n}}(u) du \end{aligned}$$

Note que $|u| = u$, pois $\frac{U}{n} \sim Gama\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$. Então, $u \in (0, \infty)$.

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_0^{\infty} u f_{\frac{T}{m}}(xu) f_{\frac{U}{n}}(u) du &= \int_0^{\infty} u \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} e^{-\frac{m}{2}xu} (xu)^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{n}{2}u} u^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} du \\ &= \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \int_0^{\infty} e^{-u\left(\frac{mx+n}{2}\right)} u^{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)} du \end{aligned}$$

Irei calcular a ultima integral separadamente, apenas para tornar mais clara a resolução,

$$\int_0^\infty e^{-u\left(\frac{mx+n}{2}\right)} u^{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)} du = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left(\frac{mx+n}{2}\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}} \int_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left(\frac{mx+n}{2}\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}} e^{-u\left(\frac{mx+n}{2}\right)} u^{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)} du$$

Note que

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left(\frac{mx+n}{2}\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}} e^{-u\left(\frac{mx+n}{2}\right)} u^{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)} du = 1$$

Pois essa integral é a integral para todos os valores do domínio de uma variável aleatória com distribuição $Gama\left(\frac{m+n}{2}, \frac{mx+n}{2}\right)$

Logo,

$$\int_0^\infty e^{-u\left(\frac{mx+n}{2}\right)} u^{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)} du = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left(\frac{mx+n}{2}\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}}$$

Voltando para o cálculo de $f_X(x)$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left(\frac{mx+n}{2}\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}} = x^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}x+1\right)\right]^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{x^{\left(\frac{m}{2}-1\right)}}{\left(\frac{m}{n}x+1\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}} 1_{(0,\infty)}(x) \end{aligned}$$

Desta forma sabemos que

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{x^{\left(\frac{m}{2}-1\right)}}{\left(\frac{m}{n}x+1\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}} 1_{(0,\infty)}(x) \implies X \sim F(m,n)$$

Então consguimos mostrar que $X = \frac{T/m}{U/n} \sim F_{(m,n)}$.

10)

Temos do enunciado que $Z \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2_{(k)}$. Onde Z e Y são independentes.

Quero mostrar que

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}} \sim t - Student(k)$$

Utilizarei nesse exercício o método do Jacobiano. Desta forma, considere as seguintes variaveis

$$\begin{cases} T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}} \\ U = Y \end{cases} \implies \begin{cases} Z = T\sqrt{\frac{U}{k}} \\ Y = U \end{cases}$$

Assim, $h_1(t,u) = t\sqrt{\frac{u}{k}}$ e $h_2(t,u) = u$ e o Jacobiano será

$$|J_h| = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{u}{k}} & \frac{1}{2}t\left(\frac{u}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left|\sqrt{\frac{u}{k}}\right| = \sqrt{\frac{u}{k}}$$

Como Z e Y são independentes então podemos afirmar que $f_{Z,Y}(z,y) = f_Z(z)f_Y(y)$, então

$$f_{T,U}(t,u) = f_Z\left(t\sqrt{\frac{u}{k}}\right) f_Y(u)\sqrt{\frac{u}{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2 u}{2k}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{k}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{\left(\frac{k}{2}-1\right)} e^{-\frac{1}{2}u} u^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)} u^{\left(\frac{k+1}{2}-1\right)}$$

Então para calcular $f_T(t)$,

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T,U}(t,u)du = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-u\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)} u^{\left(\frac{k+1}{2}-1\right)} du$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \left[\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)\right]^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}} \int_0^{+\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)\right]^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} e^{-u\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)} u^{\left(\frac{k+1}{2}-1\right)} du$$

Novamente, note que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)\right]^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} e^{-u\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)} u^{\left(\frac{k+1}{2}-1\right)} du = 1$$

pois é a integral para todos os valores do domínio de uma variável aleatória com distribuição $Gama\left(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)\right)$

Logo,

$$f_T(t) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \left[\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)\right]^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{k}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t^2}{k}+1\right)^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}}$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{t^2}{k}+1\right)^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}} = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}} 1_{(-\infty,+\infty)}(t)$$

Dessa forma sabemos que,

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}\left(\frac{t^2}{k}+1\right)^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}} 1_{(-\infty,+\infty)}(t) \implies T \sim t - Student(k)$$

Então conseguimos mostrar que $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}} \sim t - Student(k)$

13)

Temos do enunciado que X e Y tem distribuição normal bivariada, com médias 0 , variâncias 1 e coeficiente de correlção ρ, $-1 < \rho < 1$.

a)

Quero encontrar a função densidade de probabilidade de $Z = \frac{X}{Y}$ A distribuição conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{(x^2+y^2-2xy\rho)}{2(1-\rho^2)}\right\}$$

Irei utilizar o método do jacobiano para encontrar a distribuição de Z, então considere as seguintes variáveis aleatórias:

$$\begin{cases} Z = \frac{X}{Y} \\ W = Y \end{cases} \implies \begin{cases} X = ZW \\ Y = W \end{cases}$$

Assim, $h_1(z,w) = zw$ e $h_2(z,w) = w$ e o Jacobiano será

$$|J_h| = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |w|$$

Então,

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(zw,w)|w|, \qquad w \neq 0$$

Logo,

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{(z^2w^2 + w^2 - 2zw^2\rho)}{2(1-\rho^2)}\right\}|w|$$

Para calcular $f_Z(z)$, irei integrar $f_{Z,W}(z,w)$ em w, então

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,W}(z,w)dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{(z^2w^2 + w^2 - 2zw^2\rho)}{2(1-\rho^2)}\right\}|w|dw \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(z^2 + 1 - 2z\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}|w|dw \end{aligned}$$

Vamos estudar como é a função

$$v = exp\left\{-\frac{(z^2 + 1 - 2z\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}|w|$$

para tornar mais fácil a vizualização, observe que a "forma" dessa função, é de um modo geral

$$y = e^{-ax^2}|x|, \qquad x \neq 0$$

Com isso fica fácil ver que trata-se de uma função simétrica pelo eixo das ordenadas, e que é uma função não contínua no ponto em que $x = 0$. Além disso note que $(z^2 + 1 - 2z\rho) > 0$, $\forall z \in (-\infty, +\infty)$, pois

$$(z^2 + 1 - 2z\rho) = (z-\rho)^2 - \rho^2 + 1$$

e como todo número real ao quadrado é não negativo e $\rho^2 < 1$, então é válida a afirmação de que $a > 0$. Esse fato será bem importante, para resolvermos a integral.

Além disso temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(z^2 + 1 - 2z\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}|w|dw$$

deveria ser quebrada em duas, dado que não está definida para $w = 0$, e ao dividirmos essa função em dois intervalos que são completamente contínuos ($w > 0$ e $w < 0$), poderíamos calcular essa integral. Porém, ocorre que é uma função simétrica pelo eixo das ordenadas, então eu posso reescrever essa integral como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(z^2 + 1 - 2z\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}|w|dw = 2\int_{0}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(z^2 + 1 - 2z\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}wdw$$

obtendo uma única integral, com uma região de integração bem definida,o que facilita bastante as contas. Agora considere a seguinte mudança de variáveis:

$$u = \frac{(z^2 + 1 - 2z\rho)w^2}{2(1-\rho^2)} \implies du = \frac{(z^2 + 1 - 2z\rho)w}{(1-\rho^2)}dw$$

como $0 < w < \infty$, então os limites de integração para u serão os mesmos, pois $a = \frac{(z^2+1-2z\rho)}{(1-\rho^2)} > 0$ como vimos acima, obtendo assim,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(z^2+1-2z\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}|w|dw &= 2\int_{0}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(z^2+1-2z\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}wdw \\ &= \frac{2(1-\rho^2)}{(z^2+1-2z\rho)}\int_{0}^{+\infty} e^{-u}du = \frac{2(1-\rho^2)}{(z^2+1-2z\rho)}\end{aligned}$$

Por fim, voltando ao cálculo de $f_Z(z)$

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\frac{(z^2+1-2z\rho)w^2}{2(1-\rho^2)}\right\}|w|dw = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\frac{2(1-\rho^2)}{(z^2+1-2z\rho)} \\ &= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(z^2+1-2z\rho)}1_{(-\infty,+\infty)}(z)\end{aligned}$$

Para verificar que $f_Z(z)$ é de fato uma função densidade de probabiliade, ela deve satisfazer no mínimo 2 condições:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)dz = 1$
2. $f_Z(z) > 0, \forall z \in (-\infty, +\infty)$

Note que a condição 2., já foi verificada, pois

$$a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$$

Assim como

$$\frac{1}{\pi a} > 0$$

Para verificarmos a condição 1., irei calcular a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(z^2+1-2z\rho)}dz = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2+1-2z\rho)}$$

Seja

$$u = z - p \implies du = dz$$

$$\int \frac{1}{(z^2+1-2z\rho)}dz = \int \frac{1}{u^2+1-\rho^2}du = \frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{\arctan\left(\frac{(z-p)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(z^2+1-2z\rho)}dz = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z^2+1-2z\rho)} \\ &= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi}\left[\frac{\arctan\left(\frac{(z-p)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{(z-p)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\pi = 1\end{aligned}$$

Dessa forma podemos afirmar que

$$f_Z(z) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(z^2+1-2z\rho)}1_{(-\infty,+\infty)}(z)$$