MAE 221 – Conjunto de exercícios 3

Profa. Beti

Os exercícios assinalados com ✎ serão resolvidos em aula.
Entregar os exercícios assinalados com ♣ em 16.março.2020 - **Início da aula**.

1. Exercícios sobre função de distribuição
   (a) ✎ Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F_X, e sejam a e b constantes, com $a \neq 0$. Então $Y = aX + b$ também é uma variável aleatória. Determine a função de distribuição F_Y de Y em termos de F_X.
   (b) Mostre que se F e G são funções de distribuição, e $0 \leq \alpha \leq 1$, então $\alpha F + (1 - \alpha)G$ é uma função de distribuição.

2. Para que valores da constante c as seguintes funções são funções discreta de probabilidade nos inteiros positivos $\{1, 2, \ldots\}$.
   (a) Geométrica: $p(x) = c\, 2^{-x}$.
   (b) Logaritmica: $p(x) = c\, 2^{-x}/x$.
   (c) Quadrática inversa: $p(x) = c\, x^{-2}$.
   (d) Poisson "modificada": $p(x) = c\, 2^{x}/x!$.

3. Um urna contém bolas numeradas de 1 a N, e n ($n \leq N$) delas são selecionadas sem reposição. Seja Y o maior número selecionado. Determine a função discreta de probabilidade de Y.

4. ♣ Uma urna contém 4 bolas brancas e 4 azuis. Quatro bolas são selecionadas conjuntamente (i.e., sem reposição). Se 2 delas são azuis e 2 brancas, então pára-se o experimento. Caso contrário, repõe-se as 4 bolas na urna e repete-se o procedimento até que exatamente 2 das 4 bolas selecionadas sejam brancas. Qual é a probabilidade de que sejam necessárias n repetições do experimento ? Qual é a variável aleatória envolvida? Especifique seu parâmetro.

5. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade.

t	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

   (a) Calcule o tempo médio de processamento.
   (b) Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de \$ 2,00; mas se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha \$ 0,50 por minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, recebe a quantia adicional de \$ 1,00.
   Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. G: quantia ganha (em \$) por peça.

6. Se $X \sim$ Geométrica (p), mostre que $P(X = n + k \mid X > n) = P(X = k)$, $k \geq 1$. Como se chama essa propriedade ?

7. ♣ Calcule $E\left(\frac{1}{Y+1}\right)$ com $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

8. Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1.000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% com defeito. Normalmente, cada caixa é vendida por \$ 13,50. Um comprador faz a seguinte proposta: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se a caixa não tiver parafusos defeituosos, ele paga \$20,00; um ou dois defeituosos, ele paga \$ 10,00; três ou mais defeituosos, ele paga \$ 8,00. O fabricante deve aceitar a oferta do comprador? Justifique.

9. Seja $X \sim \text{binomial}(n, p)$ com $E(X) = 12$ e $Var(X) = 3$. Determine:
   (a) n e p; (b) $E(Z)$ e $Var(Z)$ em que $Z = (X - 12)/\sqrt{3}$;
   (c) $P(Y \geq 14/16)$ para $Y = X/n$.

10. As cinco primeiras repetições de um experimento de Bernoulli custam \$ 10,00 cada. Todas as repetições subsequentes custam \$ 5,00 cada. Suponha que o experimento seja repetido até que o primeiro sucesso ocorra. Se a probabilidade de sucesso de uma repetição é igual a 0,9, e se as repetições são independentes, qual é o custo esperado do experimento ?

11. ✎ O número de defeitos numa fita magnética segue uma distribuição de Poisson com taxa de 1 defeito por cada 2.000 metros de fita.

    (a) Qual é a probabilidade de que um rolo de fita de 3.000 metros apresente algum defeito ?

    (b) Se um rolo com 6.000 m de fita é encomendado, qual é a probababilidade de se ter mais de que 1 defeito neste rolo ?

12. ♣ O número de petroleiros que chegam a um porto-refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com $\lambda = 2$. As atuais instalações podem atender, no máximo, três petroleiros por dia. Se mais de três petroleiros aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.

    (a) Em um dia, qual é a probabilidade de se enviar petroleiros a outro porto ?

    (b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações (em número de petroleiros) para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos 95% dos dias ?

    (c) Qual é o número médio de petroleiros que chegam por dia ?

13. ✎ Para uma v.a. discreta, inteira e não-negativa X, mostre que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

14. Calcule a média e a variância das distribuições a seguir,

    (a) $\text{Binomial}(n, p)$

    (b) ✎ $\text{Geométrica}(p)$

    (c) $\text{Poisson}(\lambda)$

15. Considere a função $g(y) = e^{ty}$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Calcule $E[g(Y)] = E\left(e^{tY}\right)$ nos seguintes casos, e se necessário, indique para quais valores de t a esperança de $g(Y)$ é finita.

    (a) ✎ $Y \sim$ Bernoulli(p)

    (b) $\clubsuit$ $Y \sim$ Binomial(n, p)

    (c) $Y \sim$ Poisson(λ), $\lambda > 0$ fixado

    (d) $\clubsuit$ $Y \sim$ Geométrica(p)

16. ✎ Um jogo consiste no lançamento de um dado equilibrado com a seguinte regra: em cada jogada (lançamento do dado), o jogador paga a uma banca R$ 1 para jogar e ganha R$ 1 se der face 4 ou 5; e ganha R$ 2 se der face 6. Nos demais resultados, ele não ganha nada.

    (a) Seja X o saldo do jogador em uma jogada. Determine a f.d.p. de X.

    (b) Calcule o saldo esperado de X e responda se esse jogo é honesto (saldo esperado zero) ou se o jogo favorece a banca ou favorece o jogador.

17. Compare as aproximações pela Poisson com as probabilidades binomiais exatas para os seguintes casos.

    (a) $P(X = 2)$ quando $n = 8, p = 0,1$;

    (b) $P(X = 9)$ quando $n = 10, p = 0,95$;

    (c) $P(X = 0)$ quando $n = 10, p = 0,1$;

    (d) $P(X = 4)$ quando $n = 9, p = 0,2$.

18. Seja X uma variável aleatória binomial com parâmetros (n, p). Qual é o valor de p que maximiza $P(X = k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$?

    (Este é um exemplo de um método estatístico para estimar o valor de p quando observamos uma v.a. binomial com valor k. Assumimos que n é conhecido e queremos estimar p de maneira que maximize $P(X = k)$. Esse método é conhecido como estimação de máxima verossimilhança).