MAE 221 - Conjunto de Exercícios 10

Profa. Beti Kira — Entregar os exercícios assinalados com ♣ em 10.julho.2020

Os exercícios assinalados com ✎ serão resolvidos em aula.

1. Pelas funções densidade de probabilidade nota-se as seguintes relações.
$$\text{Se } X \sim \chi^2(a) \text{ então } X \sim \text{Gama}\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \text{e vice-versa.}$$
$$\text{Se } X \sim t(1) \text{ então } X \sim \text{ Cauchy}(0,1); \quad \text{e vice-versa.}$$

2. Mostre que se X tem distribuição $\chi^2(2n)$ (qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade), para n inteiro positivo, então
$$Y = \frac{X}{2\lambda}$$
tem distribuição Gama(n, λ). A recíproca também é verdadeira, isto é, se $Y \sim$ Gama(n, λ) com n inteiro positivo, então $2\lambda\, Y \sim \chi^2(2n)$.

3. ♣ Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independentes com distribuição comum Uniforme [0,1]. Seja Y a média geométrica das X_i, mostre que
$$-2n \ln Y \sim \chi^2(2n), \quad \text{em que} \quad Y = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$$
Sugestão: determine a distrib. da variável $(-\ln X)$, *em seguida a dist. da soma.*

4. Sejam $X_1, \ldots, X_k$ v.a. **independentes** com $X_i \sim \text{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, k$, então mostre que
$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2(k).$$

5. Dê uma prova rápida, sem calcular a densidade (mas mencione o resultado que está sendo utilizado), de que se $X \sim \chi^2(a)$ e $Y \sim \chi^2(b)$ são independentes então
$$\frac{X}{X+Y} \sim \text{ Beta}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right).$$

6. ♣ Sejam T e U variáveis aleatórias **independentes** tal que $T \sim \chi^2(m)$ e $U \sim \chi^2(n)$. Então
$$X = \frac{T/m}{U/n} \sim F(m,n)$$

7. Seja $X \sim F(m,n)$. Prove que $Y = 1/X \sim F(n,m)$. (Não precisa calcular a função densidade.)

8. Se X tem distribuição $F(m,n)$ então
$$Y = \frac{mX/n}{1 + mX/n}$$
tem distribuição Beta (a,b) com $a = m/2$ e $b = n/2$.
(Veja a relação deste resultado com os Exercícios 5 e 6 desse conjunto de exercícios.)

9. Mostre que se $T \sim t(\nu)$ então $T^2 \sim F(1,\nu)$.

10. ♣ Se Z ∼Normal(0,1) e $Y \sim \chi^2(k)$ são v.a. **independentes**, então mostre que

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

tem distribuição $t-$Student com k graus de liberdade.

11. Dizemos que o vetor aleatório (X, Y) tem distribuição **normal bivariada** se a função densidade de probabilidade conjunta é dada por, para $-\infty < x, y < \infty$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]\right\} \\ f(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2\pi|V|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'V^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} \quad \text{(forma matricial)} \end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{x} = (x, y)'$, $\boldsymbol{\mu}$ = vetor de médias e V = a matriz de variância-covariâncias (ou matriz de covariâncias)

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

Notação: $\boldsymbol{X} = (X,Y)' \sim N(\boldsymbol{\mu}, V)$

(a) Mostre que as distribuições marginais de X e de Y são $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente.

(b) Mostre que a f. densidade condicional de X dado que $Y = y_0$, é normal com parâmetros

$$\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y_0 - \mu_y) \quad \text{(locação)} \quad \text{e} \quad \sigma_x^2(1-\rho^2) \quad \text{(dispersão)}$$

(c) Mostre que X e Y são independentes quando (se e só se) $\rho = 0$.

12. Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição Normal bivariada, com densidade de probabilidade dada pelo exercício anterior. Mostre que a distribuição de $X + Y$ é normal com média $\mu_x + \mu_y$ e variância $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y$.

13. Se X e Y tem distribuição normal bivariada com médias zero, variâncias iguais a um e coeficiente de correlação ρ, $-1 < \rho < 1$, encontre a funcão densidade de probabilidade de
(a) ♣ $Z = X/Y$ (NÃO é Cauchy se $\rho \neq 0$) (b) $T = X/|Y|$ (c) $W = |X|/Y$

14. ✎ Se $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e identicamente distribuídas N(μ, σ^2). Considere a média amostral e variância amostral definidas, respectivamente por,

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{e} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

(a) Determine a distribuição de probabilidade de $\overline{X}_n$. Especifique os parâmetros.

(b) Mostre que $\overline{X}_n$ é independente de S^2, mostrando que $\overline{X}_n$ é independente do vetor aleatório $(X_1 - \overline{X}_n, \ldots, X_n - \overline{X}_n)$.

(c) Mostre que

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_j - \overline{X}_n}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

(d) Portanto, pelos itens acima e pelo Exercício 10 desse conjunto de exercícios,

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} \sim t(n-1)$$