MAE 221 - Conjunto de Exercícios 9

Profa. Beti Kira

Entregar os exercícios assinalados com ♣ em 08.junho.2020

Os exercícios assinalados com ✐ serão resolvidos em sala de aula.

1. ♣ Considere a seguinte tabela de contingência 2×2,

	A	A^c	
B	X	Y	
B^c	Z	W	

X, Y, Z e W são v.a. independentes com distrib. de Poisson com parâmetro (λ_i), $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente.

(a) Seja $N \geq 0$ um número inteiro fixado. Mostre que **dado que** $X + Y + Z + W = N$, a distribuição conjunta de (X, Y, Z) é multinomial. Isto é,

$$(X, Y, Z \mid X + Y + Z + W = N) \sim \text{Multinomial}\,(N; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\,,$$

e forneça os valores de α_i, $i = 1, 2, 3$ (naturalmente, $0 \leq \alpha_i \leq 1$).

(b) Sejam N e n são números inteiros fixados (com $N \geq 0$ e $0 \leq n \leq N$). Mostre que, **dado que** $X + Z = n$ e $X + Y + Z + W = N$, a **distribuição condicional** de (X, Y) é o produto de duas binomiais independentes, com parâmetros (n, β_1) e $(N - n, \beta_2)$, respectivamente. Isto é,

$P(X = x, Y = y \mid X + Z = n, X + Y + Z + W = N) =$

$$\binom{n}{x} \beta_1^x (1 - \beta_1)^{n-x} \binom{N-n}{y} \beta_2^y (1 - \beta_2)^{N-n-y} \quad x = 0, 1, \ldots, n;\ y = 0, 1, \ldots, N - n,$$

e forneça os valores de β_i, $i = 1, 2$ (naturalmente, $0 \leq \beta_i \leq 1$.)

(c) Considere que $\lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3$. Sejam N, n e r números inteiros positivos fixados tais que $0 \leq n, r \leq N$, então mostre que, **dado que** $\{X + Z = n, X + Y = r, X + Y + Z + W = N\}$, a **distribuição condicional** de X é hipergeométrica com parâmetros (N, n, r).

2. Sejam X e Y com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{[0,y]}(x) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\,,$$

(a) Determine a distribuição conjunta de X e $X + Y$;

(b) Encontre as distribuições marginais de X e de $X + Y$ e identifique-as.

3. Uma agência bancária está com 2 caixas operando. Três clientes A, B e C chegam simultaneamente. A e B vão diretamente aos caixas e C então espera até A ou B sair para ser atendido. Calcule a probabilidade de que A ainda esteja no banco após B e C terem saído se:

    (a) o tempo de serviço de cada caixa é exatamente de 5 minutos.

    (b) os tempos de serviços de cada caixa podem ser 1, 2 ou 3 minutos com igual probabilidade.

    (c) os tempos de serviços de cada caixa são exponencias com taxa λ para ambos os caixas, independentes entre caixas e entre clientes.

4. ♣ Sejam X e Y duas v.a. independentes, com $X \sim \text{Gama}(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \text{Gama}(\beta, \lambda)$. Considere $T = X/(X+Y)$ e $U = X + Y$.

    (a) Encontre a distribuição conjunta de T e U.

    (b) Encontre e identifique as distribuições marginais de T e U.

    (c) Baseado em (a) e (b), T e U são independentes ?

    Exemplo 25 - p. 208 - Mood et al OU Exemplo 7c - p.335 - Ross

5. Se X e Y são independentes cada um com distribuição exponencial$(\lambda), \lambda > 0$, encontre a função densidade de probabilidade de

    (a) $\mid X - Y \mid$ (b) $\min(X, Y)$ (c) 🍃 $\max(X, Y)$

6. ♣ Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com $X_j \sim$ Exponencial (λ_j), $j = 1, \ldots, n$.

    (a) Encontre a distribuição de $Y_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

    (b) Mostre que $P(Y_1 = X_k) = \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$.

7. Sejam X e Y contínuas e independentes, ambas com distribuição uniforme(0,1).
Encontre as funções densidades de probabilidade de

    (a) $X + Y$ (b) $X - Y$ (c) $\mid X - Y \mid$ (d) 🍃 X/Y (e) $X/(X + Y)$

8. 🍃 Sejam X e Y contínuas e independentes, ambas com distribuição uniforme(0,1).

    (a) Determine a densidade conjunta de $T = X+Y$ e $Z = X-Y$. Desenhe o suporte conjunto de T e Z.

    (b) Determine as funções densidades (marginais) de T e de Z.

    (c) Justifique se T e Z são ou não são independentes.

    (d) Calcule $\text{Cov}(T, Z)$. Compare com o item acima e comente

    Exemplo 22 (modificado) - p. 205 - Mood et al OU Exemplo 7a - p.331 - Ross

9. ♣ Sejam X e Y contínuas e independentes, ambas com distribuição uniforme(0,1).

   Considere $T = X + Y$ e $U = X/(X + Y)$.

   (a) Determine a função densidade de probabilidade conjunta de T e U.
   Desenhe o suporte conjunto de T e U.

   (b) Encontre as funções densidades marginais de T e de U.
   Justifique se T e U são ou não são independentes.

10. Lança-se um dado equilibrado duas vezes, independentemente. Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam os número obtidos no primeiro e no segundo lançamentos, respectivamente.

    (a) Determine $P(X = Y)$.

    (b) Descreva a distribuição de $W =\mid X - Y \mid$.

    (c) Seja
    $$Z = \begin{cases} 1 & \text{se } X + Y \text{ é par.} \\ 0 & \text{se } X + Y \text{ é ímpar.} \end{cases}$$
    Explique por que X e Z são, ou não são, independentes.