MAE 221 – Conjunto de Exercícios 6

Profa. Beti — Entregar os exercícios assinalados com ♣ em **24.abril.2020**

1. A densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & \text{se } 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Calcule a distribuição condicional de X dado que $Y = y_0$, para y_0 fixado, $0 < y_0 < 1$.

2. ♣ Sejam X e Y v.a. com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\exp\left(-y - \frac{x}{y}\right) I_{\{0<x,y<\infty\}}(x,y)$$

   (a) Determine a f. densidade de Y. Identifique a distribuição e especifique seu parâmetro.

   (b) Determine a f. densidade condicional de X dado $Y = y$. Identifique a distribuição e especifique seu parâmetro.

   (c) Determine $P(X > 1 \mid Y = y)$.

   Exemplo 5b (modificado) - Ross - p.322

3. Duas pessoas combinam de se encontrarem num determinado lugar entre 12h00 e 13h00. Elas também combinam que cada um esperará a horas, $0 < a < 1$, pela chegada da outra. Assumindo que as chegadas das 2 pessoas são independentes e uniformemente distribuídas (no intervalo de 12h00 a 13h00), encontre

   (a) a probabilidade p de que elas efetivamente se encontrem,

   (b) o valor de a para que elas se encontrem com probabilidade 0,84.

   Esse exercício é uma variação do Exemplo 2c - Ross - p.295

4. ♣ Sejam X e Y v.a. independentes tais que $X \sim \text{binomial}(M, p)$ e $Y \sim \text{binomial}(N, p)$.

   (a) Determine a distribuição de probabilidade de $T = X + Y$. Justifique.

   (b) Calcule a distribuição condicional de X dado que $X + Y = n$.

   (c) Identifique a distribuição condicional obtida em (b).

5. 🍂 Sejam X e Y v.a. independentes tais que $X \sim \text{Poissonl}(\theta)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\beta)$.

   (a) Determine a distribuição de probabilidade de $T = X + Y$. Justifique.

   (b) Calcule a distribuição condicional de X dado que $X + Y = n$.

   (c) Identifique a distribuição condicional obtida em (b).

6. ♣ Artur e Bernardo entram juntos numa barbeira e são atendidos imediatamente por dois barbeiros. Artur quer cortar o cabelo e Bernardo quer aparar a barba. O tempo de corte de cabelo tem distribuição exponencial com <u>taxa</u> α e é independente do tempo de aparo de barba, que tem distribuição exponencial com <u>taxa</u> β. Qual é a probabilidade de que Artur saia antes de Bernardo ?

7. Sejam X e Y v.a. independentes com mesma distribuição geométrica dada por $P(X = k) = q^k p, k = 0, 1, \ldots, 0 < p = 1 - q < 1$, e seja $Z = \max(X, Y)$. Encontre
   (a) a distribuição de probabilidade de Z.
   (b) a distribuição de probabilidade conjunta de X e Z.
   (c) a dist. de probab. condicional de X dado $Z = \ell$, $\ell = 0, 1, \ldots$, isto é, calcule $P(X = k \mid Z = \ell), k = 0, 1, \ldots$.
   (d) a distribuição condicional de Z dado $X = \ell$.

8. ♣ O número de partículas radioativas T emitidas por um reator segue uma distribuição de Poisson com taxa λ. Cada partícula é classificada, independente das outras partículas, como sendo do tipo α ou do tipo β, com probabilidade p e $1 - p$, respectivamente. Denote por Y o número de partículas do tipo α e por X o número de partículas do tipo β, de modo que $T = Y + X$.
   (a) Encontre a distribução de probabilidade de Y.
   (b) Encontre a distribuição de probabilidade de X.
   (c) Mostre que Y e X são independentes.

   (Sugestão: estabeleça primeiro a distribuição de $Y \mid T = n$. Esse caso é similar ao problema dos ovos e do inseto).

   Similar ao Exemplo 2b - Ross - p.294

9. Uma urna contém n bolas numeradas de 1 a n. Duas bolas são selecionadas ao acaso e sem reposição. Seja X o menor e Y o maior valor obtido nessas retiradas. Encontre
   (a) a função de probabilidade conjunta de X e Y.
   (b) as funções de probabilidade marginais de X e Y.
   (c) a função de probabilidade de $Y - X$ (note que $Y - X$ e X têm mesma distribuição).

10. *Agulha de Buffon (1777)* - Considere um assoalho com tábuas de D unidades de largura (e assuma que não há espaço extra entre as tábuas) e uma agulha de comprimento L unidades, com $L \leq D$.

    Se a agulha cai aleatoriamente no chão, calcule a probabilidade de que ela cruze uma das linhas formadas pelo assoalho (i.e., que ela não esteja totalmente contida em uma das tábuas do assoalho).

    Assuma invariância por rotação e por translação da agulha.

    Sugestão: Considere as variáveis X = distância do centro da agulha até a linha mais próxima e θ = ângulo (agudo) formado pela agulha e as linhas. Assuma que X e θ sejam independentes.

    Exemplo 2d - Ross - p.295

11. Um ponto é escolhido ao acaso de um disco de raio r e X e Y são suas coordenadas no plano cartesiano.
    (a) Encontre a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y.
    (b) Encontre as densidades marginais de X e Y.
    (c) As coordenadas X e Y são independentes ?
    (d) Dado o valor de $X = x$, encontre a densidade condicional de Y.

    Modificação do Exemplo 1d - Ross - p.288-290