Segunda Avaliação

Cálculo III

Kevin Yukio Futema

17/07/2020

1)

Enunciado:

Calcule a massa da superficie S dada por $z = 2x^2 + 3y^2$ com $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, sabendo-se que a densidade de S é definida por $\delta(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}}$

Resolução:

Sabemos que a massa de S, é dada pela integral de superfície de $\delta(x, y, z)$ sobre S, isto é,

$$\text{Massa de S} = \iint_S \delta(x, y, z) dS$$

Sendo assim, considere a seguinte parametrização de S:

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq 1 \\ y = v & \\ z = 2u^2 + 3v^2 & 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (1, 0, 4u) \\ \sigma_v = (0, 1, 6v) \end{cases} \quad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = (-4u, -6v, 1) \implies \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \sqrt{1 + 16u^2 + 36v^2}$$

$$\delta(\sigma(u, v)) = \frac{2u^2 + 3v^2}{\sqrt{1 + 16u^2 + 36v^2}}$$

Considere $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$

Calculando a massa de S:

$$\begin{aligned} \iint_S \delta(x, y, z) dS = \iint_D \delta(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv &= \int_0^1 \left[\int_0^1 2u^2 + 3v^2 du \right] dv \\ &= \int_0^1 \frac{2u^3}{3} + 3uv^2 \Big|_0^1 dv = \int_0^1 \frac{2}{3} + 3v^2 dv = \frac{2v}{3} + v^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

A massa de S é $\frac{5}{3}$

2)

Enunciado:

Calcule a área da superfície S dada pela parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, com $z \geq \sqrt{3x^2+3y^2}$.

Resolução:

Sabemos que a área de S, é dada pela integral de superfície de 1 sobre S, isto é,

$$\text{Área de S} = \iint_S 1dS$$

Sendo assim, considere a seguinte parametrização de S:

$$\sigma(u,v) : \begin{cases} x = 2cos(u)sen(v) & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = 2sen(u)sen(v) & \\ z = 2cos(v) & 0 \leq v \leq\ ?\ \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Note que $v \leq \frac{\pi}{2}$, pois $z \geq 0$ e v atinge a maior angulação quando $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$, então

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x^2+y^2+3x^2+3y^2 &= 4 \\ x^2+y^2 &= 1 \implies 4sen^2(v) = 1 \overbrace{\implies}^{0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}} sen(v) = \frac{1}{2} \\ v &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Desta forma

$$\sigma(u,v) : \begin{cases} x = 2cos(u)sen(v) & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = 2sen(u)sen(v) & \\ z = 2cos(v) & 0 \leq v \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (-2sen(u)sen(v), 2cos(u)sen(v), 0) \\ \sigma_v = (2cos(u)cos(v), 2sen(u)cos(v), -2sen(v)) \end{cases}$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (-4cos(u)sen^2(v), -4sen(u)sen^2(v), -4sen(v)sen(v))$$

$$\begin{aligned} \|\sigma_u \wedge \sigma_v\|^2 &= 16cos^2(u)sen^4(v) + 16sen^2(u)sen^4(v) + 16sen^2(v)cos^2(v) = 16sen^4(v) + 16sen^2(v)cos^2(v) \\ &= 16sen^2(v) \implies \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = 4|sen(v)| = 4sen(v) \qquad sen(v) > 0 \text{ pois } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Considere $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{6}\}$

Calculando a área de S:

$$\begin{aligned} \iint_S 1dS = \iint_D \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| dudv &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4sen(v)dv \right] du \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4sen(v)dv = 8\pi \left. (-cos(v)) \right|_0^{\frac{\pi}{6}} = 8\pi \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{16\pi - 8\pi\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

A área de S é $\frac{16\pi - 8\pi\sqrt{3}}{2}$

3)

Enunciado:

Calcule $\iint_S \left(x^2 + 2y + z\right) dS$, sendo S a parte do plano $z = 4 + 2x$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Resolução:

Para calcular essa integral de superfície, considere a seguinte parametrização de S:

$$\sigma(u,v) : \begin{cases} x = vcos(u) & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = vsen(u) + 1 & \\ z = 4 + 2vcos(v) & 0 \leq v \leq \ 1 \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (-vsen(u), vcos(u), -2vsen(u)) \\ \sigma_v = (cos(u), sen(u), 2cos(u)) \end{cases} \qquad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = (2v, 0, -v) \implies \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = v\sqrt{5}$$

Considere $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1\}$

Calculando a massa de S:

$$\begin{aligned} \iint_S \left(x^2 + 2y + z\right) dS &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(v^2cos^2(u) + 2vsen(u) + 2 + 4 + 2vcos(u)\right) v\sqrt{5}du\right] dv \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(v^3cos^2(u) + 2v^2sen(u) + 6v + 2v^2cos(u)\right) du\right] dv \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 \left[v^3\left(\frac{u}{2} + \frac{sen(2u)}{4}\right) - 2v^2cos(u) + 6vu + 2v^2sen(u)\right]\Bigg|_0^{2\pi} dv \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 \left(v^3\pi + 12v\pi\right) dv = \pi\sqrt{5}\left(\frac{v^4}{4} + 6v^2\right)\Bigg|_0^1 = \pi\sqrt{5}\left(\frac{1}{4} + 6\right) \\ &= \frac{25\pi\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Então

$$\iint_S \left(x^2 + 2y + z\right) dS = \frac{25\pi\sqrt{5}}{4}$$

4)

Enunciado:

Calcule $\iint_S e^{x^2} dydz + 2zdzdx + 4xydxdy$, sendo S a parte do gráfico da função $z = \sqrt{9 - y}$, com $x \geq 0, y \geq 0$ e $0 \leq y \leq 8 - x^2$, orientada com campo normal unitário $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$.

Resolução:

Temos que $\vec{F}(x,y,z) = \left(e^{x^2}, 2z, 4xy\right)$

Considere a seguinte parametrização de S:

$$\sigma(u,v):\begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq \sqrt{8} \\ y = v \\ z = \sqrt{9-v} & 0 \leq v \leq 8-u^2 \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (1,0,0) \\ \sigma_v = \left(0,1,\frac{-1}{2\sqrt{9-v}}\right) \end{cases} \qquad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{9-v}}, 1\right)$$

Note que essa parametrização nos fornece um vetor normal que já está no sentido desejado, então não há necessidade de fazermos nada para arrumar o sentido.

$$\vec{F}(\sigma(u,v)) = \left(e^{u^2}, 2\sqrt{9-v}, 4uv\right)$$

$$\vec{F} \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v = 1 + 4uv$$

Considere $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \sqrt{8}, 0 \leq v \leq 8-u^2\}$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \iint_S e^{x^2} dydz + 2zdzdx + 4xydxdy &= \iint_D \vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v dudv = \int_0^{\sqrt{8}} \left[\int_0^{8-u^2} 1 + 4uvdv\right] du \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} \left(v + 2uv^2 \Big|_0^{8-u^2} \right) du = \int_0^{\sqrt{8}} \left(8 - u^2 + 2u(64 - 16u^2 + u^4)\right) du \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} \left(8 + 128u - u^2 - 32u^3 + 2u^5\right) du = \left(8u + 64u^2 - \frac{u^3}{3} - 8u^4 + \frac{u^6}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{8}} \\ &= 8\sqrt{8} + 64\cdot 8 - \frac{8\sqrt{8}}{3} - 64\cdot 8 + \frac{8^3}{3} = \frac{512 - 16\sqrt{8}}{3} \end{aligned}$$

Então,

$$\iint_S e^{x^2} dydz + 2zdzdx + 4xydxdy = \frac{512 - 16\sqrt{8}}{3}$$

5)

Enunciado:

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$ e S a parte da superfície $z = 16 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 7$, orientada com campo normal unitário $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$.

Resolução:

Considere a seguinte parametrização de S:

$$\sigma(u,v):\begin{cases} x = \sqrt{16-v}cos(u) & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = \sqrt{16-v}sen(u) \\ z = v & 7 \leq v \leq 16 \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (-\sqrt{16-v}sen(u), \sqrt{16-v}cos(u), 0) \\ \sigma_v = \left(-\frac{cos(u)}{2\sqrt{16-v}}, -\frac{sen(u)}{2\sqrt{16-v}}, 1\right) \end{cases} \quad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = \left(\sqrt{16-v}cos(u), \sqrt{16-v}sen(u), \frac{1}{2}\right)$$

Note que essa parametrização nos fornece um vetor normal que já está no sentido desejado, então não há necessidade de fazermos nada para arrumar o sentido.

$$\vec{F}(\sigma(u,v)) = \big(\sqrt{16-v}cos(u), \sqrt{16-v}sen(u), 2v\big)$$

$$\vec{F} \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v = (16-v)cos^2u + (16-v)sen^2u + v = 16 - v + v = 16$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_7^{16} 16 dv du = 16 \int_0^{2\pi} \int_7^{16} 1 dv du = 16 \cdot 2\pi \cdot 9 = 288\pi$$

Então,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 228\pi$$

6)

Enunciado:

Calcule $\iint_S xdydz + (2x+y)dzdx + \cos\left(x^2+z\right)dxdy$, sendo S a parte do cilindro $x^2+y^2=4$ que está no primeiro octante, entre os planos $z=0$ e $y+z=4$, orientada com campo normal unitário $\vec{n}$ que se afasta do eixo z.

Resolução:

Temos que $\vec{F}(x,y,z) = \big(x, 2x+y, cos(x^2+z)\big)$

Considere a seguinte parametrização de S:

$$\sigma(u,v): \begin{cases} x = 2cos(u) & 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ y = 2sen(u) & \\ z = v & 0 \leq v \leq 4 - 2sen(u) \end{cases}$$

Além disso, teremos

$$\begin{cases} \sigma_u = (-2sen(u), 2cos(u), 0) \\ \sigma_v = (0,0,1) \end{cases} \quad \text{Então } \sigma_u \wedge \sigma_v = (2cos(u), 2sen(u), 0)$$

Note que essa parametrização nos fornece um vetor normal que já está no sentido desejado, então não há necessidade de fazermos nada para arrumar o sentido.

$$\vec{F}(\sigma(u,v)) = \big(2cos(u), 4cos(u) + 2sen(u), cos(4cos^2(u) + v)\big)$$

$$\vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v = 4cos^2(u) + 8cos(u)sen(u) + 4sen^2(u)$$

Considere $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 4 - 2sen(u)\}$

$$\begin{aligned}
\iint_S xdydz + (2x+y)dzdx + \cos\left(x^2+z\right)dxdy &= \iint_D \vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v dudv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{4-2sen(u)} 4cos^2(u) + 8cos(u)sen(u) + 4sen^2(u)dv\right] du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{4-2sen(u)} 4 + 8cos(u)sen(u)dv\right] du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4v + 8vcos(u)sen(u)\Big|_0^{4-2sen(u)}\right) du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(16 - 8sen(u) + 32cos(u)sen(u) - 16cos(u)sen^2(u)\right) du \\
&= \left(16u + 8cos(u) + \frac{32sen^2(u)}{2} - \frac{16sen^3(u)}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{16\pi}{2} + 16 - \frac{16}{3} - 8 = 8 - \frac{16}{3} + \frac{16\pi}{2} = \frac{48 - 32 + 48\pi}{6} \\
&= \frac{16 + 48\pi}{6}
\end{aligned}$$

Então,

$$\iint_S xdydz + (2x+y)dzdx + \cos\left(x^2+z\right)dxdy = \frac{16+48\pi}{6}$$