MAE 221 - Conjunto de Exercícios 4

Profa. Beti   Entregar os exercícios assinalados com ♣ em 23.mar. **Adiada para 01.abril.2020**.
Os exercícios assinalados com ✐ serão resolvidos em sala de aula

1. Uma variável aleatória contínua X tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} c, & -1 \leq x < 0; \\ 2/3, & 0 \leq x < 1; \\ 2c, & 1 \leq x < 3/2; \\ 0, & x \geq 3/2. \end{cases}$$

   (a) Determine o valor de c, e a função de distribuição (acumulada) de X.

   (b) Calcule $P(X > -1/2 \mid X \leq 1/2)$.

   (c) Qual é o valor de b tal que $P(X > b) = P(X \leq b)$?

2. Seja X uma variável aleatória com f. densidade de prob. $f(x) = cx^2 \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$.

   (a) Determine o valor da constante c.

   (b) Encontre o valor α tal que $F_X(\alpha) = 1/4$, isto é, o *primeiro quartil* da distribuição de X.

   (c) Encontre o valor m tal que $F_X(m) = 1/2$, isto é, a *mediana* da distribuição de X.

3. ♣ Se Y é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média $1/\lambda$, mostre que

$$E(Y^k) = \frac{k!}{\lambda^k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

4. O tempo T de reparo de uma máquina é uma variável aleatória distribuída exponencialmente com parâmetro λ =2 reparos/hora.

   (a) Calcule a probabilidade de que o tempo de reparo exceda 30 minutos.

   (b) Dado que o tempo de reparo já excedeu 3 horas, calcule a probabilidade de que o tempo de reparo excederá 3,5 horas. Compare com (a) e comente os resultados.

5. Você chega no ponto de ônibus às 6:00, sabendo que o ônibus chegará em algum horário uniformemente distribuído entre 6:00 e 6:30.

   (a) Qual é a probabilidade de que você tenha que esperar mais de 10 minutos?

   (b) Se, às 6:15, o ônibus ainda não tiver chegado, qual é a probabilidade de que você tenha que esperar pelo menos mais 10 minutos? Compare com (a) e comente os resultados

   (c) Comente a comparação do item (b) desse exercício com a comparação do item (b) do exercício anterior.

6. ✐ Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F_X, e sejam a e b constantes, com $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Então $Y = aX + b$ também é uma variável aleatória.

   (a) Determine a função de distribuição F_Y de Y em termos de F_X.

   (b) Assuma agora que X é variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f_X. Determine a função densidade de probabilidade f_Y de Y em função de f_X.

7. ♣ A variável aleatória X tem distribuição Gama(n, θ). Se c é uma constante, $c > 0$, obtenha a função densidade de probabilidade de $Y = cX$, para mostrar que $Y \sim$ Gama$\left(n, \dfrac{\theta}{c}\right)$.

8. Mostre que, para r, λ e b positivos, a função abaixo

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}(x-b)^{r-1}e^{-\lambda(x-b)}\mathbb{1}_{(b,\infty)}(x)$$

é função densidade de probabilidade.
Essa é a distribuição Gama com um terceiro parâmetro b.

9. ♣ Se X tem distribuição Uniforme$(0, 1)$, encontre e **identifique** a função densidade de probabilidade de $Y = -\ln X$.

10. A função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $E(X) = 3/5$, determine os valores de a e b.

11. O nível da água de uma represa é monitorado constantemente. Suponha que um nível baixo (antes do volume morto) é representado pelo valor 1 e que o nível atual da água é representado pela variável aleatória Y cuja função de distribuição é dada por

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0 & , \ y < 1 \\ 1 - \frac{1}{y^2} & , \ y \ge 1 \end{cases}$$

   (a) Verifique que F_Y é uma função de distribuição.
   (b) Encontre $f_Y(\cdot)$ a função densidade de probabilidade de Y.
   (c) Se o nível baixo for representado por zero e usarmos uma unidade de medida que é $1/10$ da anterior, o nível atual da água será representado por $Z = 10\,(Y - 1)$. Encontre a função de distribuição $F_Z(\cdot)$ de Z.

12. ✎ Dizemos que X tem distribuição Cauchy padrão se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,,\ x \in I\!\!R\,.$$

   (a) Calcule $E(X)$.
   (b) Encontre e identifique a função densidade de probabilidade de $Y = X^2$.

13. ♣ Se X tem distribuição exponencial dupla (ou Laplace) com densidade $\frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)$, encontre e identifique a função densidade de probabilidade de $Y = \mid X \mid$.

14. Seja X uma variável aleatória contínua. Mostre que

   (a) ✎ se X é não-negativa então

$$E(Y) = \int_0^\infty [1 - F_Y(u)]du\ ;$$

   (b) se X é variável aleatória contínua qualquer, então

$$E(Y) = \int_0^\infty [1 - F_Y(u)]du - \int_{-\infty}^0 F_Y(u)du\ .$$