





## MAE 221 - Conjunto de exercícios 2

Profa. Beti

Os exercícios assinalados com  serão resolvidos em sala de aula

**Lista 2:** Entregar os exercícios assinalados com  em **09.março.2020** - Início da aula

1.  Na distribuição de  $n$  bolas (distintas) em  $n$  urnas, calcule
  - (a) a probabilidade de que uma urna fixada, por exemplo urna 1, seja a única urna vazia.
  - (b) a probabilidade de que exatamente uma urna esteja vazia.
  - (c) a probabilidade condicional de que somente uma urna esteja vazia, dado que a urna 1 está vazia.
  - (d) a probabilidade condicional de que somente a urna 1 esteja vazia, dado que apenas uma urna está vazia.
2.  Considere uma urna contendo 6 bolas brancas e 4 vermelhas.
  - (a) Calcule a probabilidade da segunda bola retirada ser branca, se as retiradas são feitas
    - i. com reposição
    - ii. sem reposição
  - (b) Calcule a probabilidade da terceira bola ser branca, se as retiradas são feitas
    - i. com reposição
    - ii. sem reposição
  - (c) Compare as probabilidades obtidas nos itens (a) e (b) com a probabilidade de sair uma bola branca na primeira retirada. Comente.
3. Prove que
$$P(E | F) = P(E | F \cap G)P(G | F) + P(E | F \cap G^C)P(G^C | F)$$
4. Em um teste de múltipla escolha, a probabilidade do aluno saber a resposta é  $p$ . Havendo  $m$  escolhas, se ele sabe a resposta ele responde corretamente com probabilidade 1; se não sabe ele responde corretamente com probabilidade  $1/m$ . Qual é a probabilidade que ele saiba a resposta dado que a pergunta foi respondida corretamente ?
5. Considere uma urna contendo 12 bolas das quais 8 são brancas. Uma amostra de 4 bolas é selecionada ao acaso. Calcule a probabilidade condicional que a primeira e a terceira bolas sejam brancas dado que a amostra contém exatamente 3 bolas brancas, se as retiradas são feitas
  - (a) com reposição
  - (b) sem reposição
6.  Considere 3 urnas. Urna  $A$  contém 2 bolas brancas e 4 vermelhas; urna  $B$  contém 8 bolas brancas e 4 vermelhas, e urna  $C$  contém 1 bola branca e 3 vermelhas. Se uma bola é selecionada ao acaso de cada urna, qual é a probabilidade de que a bola retirada da urna  $A$  seja branca, dado que exatamente 2 bolas brancas foram selecionadas ?
7. Considere que você tem um álbum composto de  $m$  figurinhas distintas. Suponha que você compra as figurinhas uma a uma para colar no álbum e, cada figurinha é do tipo  $i$  com probabilidade  $p_i, i = 1, \dots, m; \sum_{i=1}^m p_i = 1$ . Se você adquiriu sua  $n$ -ésima figurinha, qual é a probabilidade que ela seja inédita ? (Sugestão: condicione)

8. Prove ou dê contra-exemplos para cada uma das afirmações abaixo:

- (a)  $\varnothing$  Se  $E$  é independente de  $F$ , e  $E$  é independente de  $G$ , então  $E$  é independente de  $F \cup G$ .
- (b) Se  $E$  é independente de  $F$ ,  $E$  é independente de  $G$ , e  $F \cap G = \emptyset$ , então  $E$  é independente de  $F \cup G$ .
- (c) Se  $E$  é independente de  $F$  e  $F$  é independente de  $G$ , e  $E$  é independente de  $F \cap G$ , então  $G$  é independente de  $E \cap F$ .

9. Prove que se  $E_1, E_2, \dots, E_n$  são eventos (conjuntamente) independentes, então

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(E_i)]$$

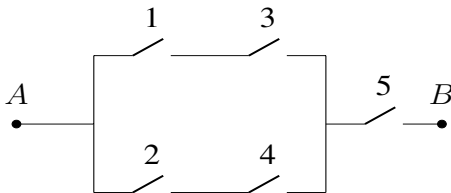
10. Uma urna contém inicialmente 5 bolas brancas e 7 azuis. Seleciona-se uma bola, sua cor é anotada e a bola é reposta na urna juntamente com 2 outras bolas da mesma cor. Repete-se esse procedimento, isto é, cada vez que uma bola é selecionada, ela é reposta com outras 2 da mesma cor. Calcule a probabilidade que

- (a) as 2 primeiras bolas selecionadas sejam azuis e as próximas duas brancas.
- (b) dentre as primeiras 4 bolas selecionadas, exatamente 2 sejam azuis.

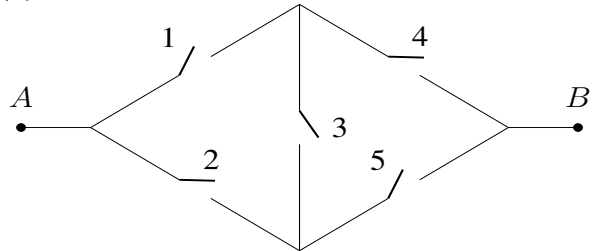
11. Considere os circuitos elétricos mostrados nas figuras abaixo. Para ambos os circuitos, a probabilidade do  $i$ -ésimo relé estar fechado é  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (note que essas probabilidades **não** precisam ter soma igual a 1). Supondo que todos os relés funcionam independentemente, calcule a probabilidade de que uma corrente flua entre  $A$  e  $B$  nos respectivos circuitos.

*Sugestão para o circuito (b): condicione no status do relé 3 (fechado ou aberto)*

(a)



(b)



12. No circuito (a) do problema acima, determine a probabilidade condicional de que os relés 1 e 3 estejam ambos fechados dado que uma corrente fluiu de  $A$  para  $B$ .

13.  $\varnothing$  Um teste simples para o diagnóstico de uma doença resulta positivo em 90% das vezes quando um indivíduo está realmente doente. O teste apresenta 20% de chance de acusar positivo em indivíduos saudáveis (falso positivo). Se a incidência da doença na população é de 10% e um indivíduo, escolhido ao acaso, se submeter ao teste, qual é a probabilidade do indivíduo estar realmente doente se o teste resultar positivo?

14.  $\clubsuit$  Refaça o exercício anterior considerando agora que o indivíduo está no grupo de risco, então a probabilidade de um indivíduo do grupo estar doente é de 30%.