Atividade 21 - MAT0222

Álgebra Linear II

08/07/2020

Exercício 5 da lista 7

Do enunciado temos que $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $T(1+i,0) = (1+i,2)$ e $T(i,1) = (i,i)$.
Seja $C = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^2$, sabemos então que C é uma base ortonormal.

1. Econtraremos $T(1,0)$ e $T(0,1)$

Para $T(1,0)$

$$\begin{aligned} T(1,0) = xT(1+i,0) + yT(i,1) &\implies (1,0) = x(1+i,0) + y(i,1), \qquad x,y \in \mathbb{C} \\ y = 0 \text{ e } x(1+i) = 1 &\implies (a+bi)(1+i) = 1, \text{para } x = a+bi, \qquad a,b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Desenvolvendo $(a+bi)(1+i) = 1 \implies a+bi+ai-b = 1$, chegamos ao seguinte sistema linear,

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} T(1,0) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)T(1+i,0) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(1+i,2) \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}, 1-i\right) = (1,1-i) \end{aligned}$$

Para $T(0,1)$

$$\begin{aligned} T(0,1) = xT(1+i,0) + yT(i,1) &\implies (0,1) = x(1+i,0) + y(i,1), \qquad x,y \in \mathbb{C} \\ y = 1 &\implies (a+bi)(1+i)+i = 0, \text{para } x = a+bi, \qquad a,b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Desenvolvendo $(a+bi)(1+i)+i = 0 \implies a+bi+ai-b+i = 0$ obtemos

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b+1=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} T(0,1) &= \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(1+i,2) + (i,i) \\ &= \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}, -1-i\right) + (i,i) \\ &= (-i,-i-1) + (i,i) = (0,-1) \end{aligned}$$

Assim temos que

$$T(1,0) = (1, 1-i) \qquad T(0,1) = (0,-1)$$

Podemos então encontrar $[T]_C$

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$$

2. Encontrar $[T^*]_C$

Para determinarmos a matriz desejada, vamos primeiro relembrar que se C é uma base ortonormal de $\mathbb{C}^2$, então sabemos que

$$[T^*]_C = \overline{[T]_C^t}$$

Então sabemos calcular $[T^*]_C$, já que conhecemos $[T]_C$

$$\text{Se } [T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \text{ então } [T^*]_C = \overline{[T]_C^t} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vamos considerar agora, $B = \{v_1 = (1+i, 0), v_2 = (i, 1)\}$ base de $\mathbb{C}^2$. Note que para econtrarmos $[T^*]_B$, basta conhecermos T^*v_1 e T^*v_2. Para calcularmos a aplicação de T nos vetores da base, usaremos a matriz $[T^*]_C$, já calculada acima.

$$[T^*]_C \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \end{bmatrix}_C$$

$$[T^*]_C \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i+1 \\ -1 \end{bmatrix}_C$$

Conseguimos obter os valores desejados, porém não estão na base B. Então logicamente, a tarefa agora será encontrar $[u_1]_B = (a,b)_B = (1+i, 0)_C$ e $[u_2]_B = (c,d)_B = (2i+1, -1)_C$

Para $[u_1]_B$ é fácil ver que $[u_1]_C = v_1 \implies [u_1]_B = (1,0)$

Para $[u_2]_B$

$$c(1+i, 0) + d(i, 1) = (2i+1, -1) \implies d = -1$$

Então,

$$\begin{aligned} c(1+i) - i &= 2i - 1 \\ c(1+i) &= 3i - 1 \\ c &= \frac{3i-1}{i+1} = \frac{(3i+1)(1-i)}{2} = \frac{3i+1+3-i}{2} \\ c &= \frac{4+2i}{2} = 2+i \end{aligned}$$

Desta forma temos que $[u_2]_B = (2+i, -1)_B$, logo podemos escrever

$$[T^*]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

E o exercícios está terminado.