MAE 221 - Conjunto de exercícios 8

Profa. Beti

Entregar os exercícios assinalados com ♣ em 22.maio.2020.
Os exercícios assinalados com ✎ serão feitos em "aula".

1. ♣ O número de clientes que entram numa loja em um dia segue uma dist. de Poisson com média $\lambda = 10$. O montante (em R \$) gasto por cada cliente é uniformemente distribuído em (0,100). Encontre a média e a variância da venda diária da loja.

2. Seja $U \sim$ Uniforme$(0, 1)$, e suponha que a distribuição condicional de X dado que $U = p$ seja binomial com parâmetros n e p. Determine a função discreta de probabilidade de X.
   Exemplo 5l - Ross - Cap7. - p.411

3. O número de pessoas que chegam a uma estação de trem, para embarque, em um intervalo de tempo $(0, t]$ pode ser modelado por uma variável aleatória com distribuição de Poison com média λt. Se o primeiro trem chega na estação em um instante de tempo que é uniformemente distribuído ao longo do intervalo $(0, T)$ e é independente do instante de chegada dos passageiros, calcule a média e a variância do número de passageiros que entram no trem.
   Exemplo 5o - Ross - Cap7. - p.413

4. Sejam X, Y e Z indep. e identicamente distribuídos segundo uma uniforme [0,1]. Calcule a esperança e variância de $W = (X + Y)Z$

5. ♣ Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com média $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Denote a média amostral por $\overline{X}$ e por $\widehat{\sigma}^2$ a variância amostral, isto é,

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{e} \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

   (a) Calcule $E\left(\overline{X}\right)$ em função de μ
   (b) Calcule $Var\left(\overline{X}\right)$ em função de σ^2
   (c) Calcule $Cov\left(\overline{X}, X_k - \overline{X}\right)$ para $k = 1, \ldots, n$
   (d) Calcule $E\left(\widehat{\sigma}^2\right)$
   Sugestão: Escreva $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \mu) - \left(\overline{X} - \mu\right)\right]^2$

   Note que esses resultados valem para **qualquer** que seja a distribuição de X.

   Modificação do Ross - Cap.7 - Exemplo 4a (p.387) e Exemplo 4e (p.392)

6. ✎ Uma ilha dos mares do sul tem uma floresta antiga de N seringueiras. Sabe-se que um pirata famoso escondeu secretamente seu tesouro dentro de M dessas árvores, porém nao há indicação de quais árvores contém ouro. Pensando apenas em achar parte desse tesouro um indivíduo derruba as árvores uma a uma, sendo que elas são selecionadas ao acaso, e verifica se há ouro dentro de cada uma delas. Seja X o número de árvores encontradas com ouro se n árvores são derrubadas. Usando funções indicadoras apropriadas, encontre $E(X)$ e $Var(X)$.

7. ♣ Uma secretária tem n cartas e n envelopes ambos endereçados a n pessoas diferentes. Ao abrir a janela, bate um vento e embaralha as cartas sem a secretária perceber, de modo que a secretária coloca as cartas aleatoriamente nos envelopes. Seja X é o número de envelopes contendo a carta correspondente. Usando funções indicadoras, determine $E(X)$ e $Var(X)$.

8. Mostre como calcular $Cov(X, Y)$ a partir da função geradora de momentos conjunta de X e Y.

9. A função geradora de momentos de X é dada por $M_X(t) = \exp\{2e^t - 2\}$ e a de Y é dada por $M_Y(t) = \left(\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}\right)^{10}$. Se X e Y são independentes, calcule
   (a) $P(X + Y = 2)$.
   (b) $P(XY = 0)$.
   (c) $E(XY)$.

10. ♣ Se X e Y possuem função densidade de probabilidade conjunta dada por
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty.$$
   (a) Determine a função geradora de momentos conjunta de X e Y.
   (b) Determine as funções geradoras de momentos individuais de X e de Y, e identifique as distribuições de X e Y, se possível.

11. Dois dados honestos são lançados. Seja X o valor do primeiro dado e seja Y a soma dos valores dos dois dados. Determine a função geradora de momentos conjunta de X e Y.

12. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias positivas e identicamente distribuídas. Para $k \leq n$, calcule
$$E\left(\frac{\sum_{j=1}^{k} X_j}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$
Exercício 7.10 (modificado)- Ross - p.450

13. Suponha que $X \sim$ Poisson (Λ), onde Λ é uma variável aleatória com distribuição exponencial (1), isto é, $X \mid \Lambda = \lambda \sim$ Poisson (λ). Mostre que
$$P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

14. (Ruina do jogador) Considere dois jogadores A e B (B pode representar a banca), em que o jogador A começa com \$ a, $a \geq 0$. O jogador A ganha cada partida valendo \$ 1 com probabilidade p, $0 < p < 1$. Isto é, representando por X_i o ganho do jogador A na i−ésima partida, então $X_i \in \{-1, +1\}$, com $P(X_i = +1) = p = 1 - P(X_i = -1)$.

Considere $S_o = a$ e $S_n = S_{n-1} + X_n$, $n \geq 1$, o capital inicial e o capital do jogador A após n partidas, respectivamente. Considere também que o jogador A deixa o jogo apenas se for a ruina (ter capital zero) ou se tiver um capital de \$ N.

No arquivo 7c, calculamos a probabilidade do jogador ir a ruina. Vamos analisar agora o tempo médio de duração do jogo.

Considere o tempo T_a de duração do jogo se o capital inicial do jogador A é de \$ a, isto é, $T_a = \min\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}$. Assuma que $\mu_a = E(T_a) < \infty$. Para calcular μ_a resolva os itens abaixo

(a) condicionando T_a em X_1 obtenha

$$\mu_a = 1 + p\ \mu_{a+1} + q\ \mu_{a-1}\ , \quad a = 1, \ldots, N-1$$

com condições de fronteira $\mu_0 = 0$ e $\mu_N = 0$.

(b) Similar ao que foi feito no arquivo 7c, usando a soma telescópica, mostre que

$$E(T_a) = \begin{cases} a(N-a) & \text{se } p = q = 1/2\ , \\ \dfrac{a}{q-p} - \dfrac{N}{q-p}\left(\dfrac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^N}\right) & \text{se } p \neq q\ . \end{cases}$$