MAE 221 - Conjunto de exercícios 1

Profa. Beti — Os exercícios assinalados com ✎ serão resolvidos em sala de aula

Lista 1: Entregar os exercícios assinalados com ♣ em 02.março.2020 - **Início da aula**.

1. Calcule quantos anagramas podem ser formados com as letras das palavras
   (a) BEXIGA (b) PROPOSTA (c) MISSISSIPPI (d) ARRUMAR (e) PARANAPIACABA

2. Mostre que, para $n_1 + \cdots + n_r = n$ (resultado dos anagramas-Aula 1):

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_r}{n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

3. ♣ Por argumentos combinatóricos (sem fazer contas com fatorial) prove que

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

   para $0 < r \leq n,\ 0 < r \leq m$, ou seja, $0 < r \leq \min\{n, m\}$.

   Sugestão: Considere um grupo de n homens e m mulheres. Quantos subgrupos de tamanho r podem ser formados a partir desse grupo ?

4. De quantas maneiras 8 pessoas podem se sentar (alinhados) se

   (a) não há restrição de posições;

   (b) há 4 homens e 4 mulheres e quer-se intercalar homens e mulheres;

   (c) há 5 homens e eles devem sentar-se juntos;

   (d) há 4 casais e cada casal quer sentar-se junto.

5. De um grupo de 8 mulheres e 6 homens forma-se uma comissão com 3 homens e 3 mulheres. Quantas comissões são possíveis se:

   (a) dois dos homens recusam-se a estar na mesma comissão;

   (b) duas das mulheres recusam-se a estar na mesma comissão;

   (c) um homem e uma mulher recusam-se a estar na mesma comissão.

6. Sejam E, F e G três eventos. Encontre expressões em função de E, F, G para os eventos abaixo.

   (a) somente E ocorre;
   (b) E e G ocorrem, mas F não ocorre;
   (c) pelo menos um deles ocorre;
   (d) pelo menos dois deles ocorrem;
   (e) todos os 3 ocorrem;
   (f) nenhum dos 3 ocorre;
   (g) no máximo um deles ocorre;
   (h) no máximo 2 deles ocorrem;
   (i) exatamente dois deles ocorrem;
   (j) no máximo 3 deles ocorrem.

7. Considere N pessoas, incluindo A e B. Calcule a probabilidade que A e B estejam juntos se
   (a) as pessoas estão aleatoriamente arranjados em uma fila.
   (b) se as pessoas estão arranjadas aleatoriamente em um círculo (denominado arranjo circular).

8. Um elevador que serve 10 andares (além do térreo) começa no térreo com 7 passageiros. Admitindo que todas as distribuições dos passageiros pelos andares têm mesma probabilidade, qual é a probabilidade de que em cada andar desça no máximo 1 passageiro?

9. $\clubsuit$ Distribui-se as cartas de um baralho com 52 cartas.
   (a) Qual é a probabilidade que a décima quarta carta distribuída seja um ás ?
   (b) Qual é a probabilidade que o primeiro ás seja distribuído na décima quarta carta ?

10. Num estacionamento há doze vagas dispostas paralelamente uma a outra e em sequência. Um homem observou que existem oito carros estacionados, e que os quatro lugares vazios são vizinhos um do outro (formando uma sequência). Essa disposição é surpreendente, no sentido de ser um indicativo de não-aleatoriedade ? Para responder, calcule a probabilidade dessa disposição.

11. $\clubsuit$ Uma reserva florestal contém 20 macacos, dos quais 5 são capturados, marcados e liberados novamente. Passado um certo tempo, 4 dos 20 macacos são capturados. Qual é a probabilidade que 2 desses 4 macacos estejam marcados ? Que suposições você fez para resolver o problema ?

12. $\clubsuit$ (exceto item (f)) Suponha que cada um de N homens numa festa deixe seu chapéu no centro de uma sala. Os chapéus são misturados e cada homem seleciona um chapéu ao acaso. Dizemos que ocorreu um *pareamento* ou uma *coincidência* se um homem seleciona seu próprio chapéu. Seja A_i o evento que denota a ocorrência de pareamento do i-ésimo homem, $1 \leq i \leq N$.
    (a) Calcule $P(A_i)$.
    (b) Calcule $P(A_i \cap A_j)$, $1 \leq i, j \leq N, i \neq j$, que é a probabilidade de ocorrência de pareamentos do i-ésimo e j-ésimo indivíduos simultaneamente.
    (c) Calcule $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$ e $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ para $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N$, $1 \leq k \leq N$.
    (d) Calcule a probabilidade p_N de *pelo menos* um pareamento usando os itens acima e a fórmula da inclusão-exclusão (sugestão: note que a soma $\sum_{1 \leq i < j \leq N}$ contém $C_{N,2}$ elementos e assim por diante).
    (e) Efetue as contas de p_N para $N = 4$, 5, 6 e 7. Note que essa probabilidade praticamente não depende de N. Mostre que $p_N \approx 1 - e^{-1}$ (sugestão: calcule $\lim_{N \to \infty}(1 - p_N)$).
    (f) Calcule a probabilidade $p_{k,N}$ de **exatamente** k pareamentos entre os N, $1 \leq k \leq N$. Tome o limite de $p_{k,N}$ quando N tende a infinito e identifique a distribuição resultante.

13. Mostre que

(a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$

(b) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

(c) $A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$

(d) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(e) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(g) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$

(h) $(\limsup_n A_n)^C = \liminf_n A_n^C$

14. Consider $\Omega = I\!R$ e seja $A_n = (-\infty, 1 - 1/n]$ e $B_n = [\frac{1}{n}, 1]$, para $n \geq 1$.

(a) ♣ $\{A_n\}$ é uma sequência monótona? Crescente ou decrescente?

(b) ♣ Calcule $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(c) ♣ Existe $\lim_{n \to \infty} A_n$? Em caso positivo, qual é esse limite?

(d) $\{B_n\}$ é uma sequência monótona? Crescente ou decrescente?

(e) Calcule $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

(f) Existe $\lim_{n \to \infty} B_n$? Em caso positivo, qual é esse limite?

15. Seja $\Omega = I\!R$ e $A_n = [c, a_n)$ e $B_n = (b_n, d]$ para $n \geq 1$, com c e $d \in I\!R$ e, $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(a) $\{A_n\}$ é uma sequência monótona? Crescente ou decrescente?

(b) Calcule $\lim_{n \to \infty} A_n$.

(c) ♣ $\{B_n\}$ é uma sequência monótona? Crescente ou decrescente?

(d) ♣ Calcule $\lim_{n \to \infty} B_n$

16. Seja $\{A_n, n \geq 1\}$ é uma sequência de eventos num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, isto é, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Mostre que

(a) $(\limsup_n A_n)^C = \liminf_n A_n^C$;

(b) $(\liminf_n A_n)^C = \limsup_n A_n^C$.

17. Seja $\{A_n, n \geq 1\}$ é uma seq. de eventos quaisquer num espaço de probab. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Mostre que

(a) $P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n) \leq \limsup_n P(A_n) \leq P(\limsup_n A_n)$;

(b) Se $\lim_n A_n$ existe, então $\lim_n P(A_n) = P(\lim_n A_n)$.

(Sug.: analise $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ e $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ e use a continuidade da probabilidade no limite).