

北京理工大学 2020 年春季学期期末试卷

一、填空题

1. 点 $M(1,0,2)$ 到直线 $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ 的距离是_____.
2. 函数 $u = xyz$ 在点 $P(5,1,2)$ 处沿从点 $P(5,1,2)$ 到点 $Q(9,4,14)$ 方向的方向导数为_____.
3. 设 $f(x,y)$ 在全平面上连续, 交换累次积分的积分次序 $I = \int_0^\pi dx \int_0^c f(x,y) dy =$ _____.
4. 已知 L 为右半圆: $x^2 + y^2 = R^2 (x \geq 0)$, 计算 $\int_L |y| dl =$ _____.
5. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{p-3}}$ 条件收敛, 则 p 的取值范围为_____.

二、计算题

1. 求点 $P(1, 2, -1)$ 在平面 $2x - y + z = 5$ 上的投影点的坐标.
2. 设 $z = f(x + \varphi(x-y), y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, φ 有二阶导数, 求

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

3. 计算 $I = \iiint_V (x + y + z) dV$, 其中 V 是由 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 所围成的区域.
4. 已知函数 $u = x^2 + yz$, 计算 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

三、设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^x (\int_0^t u f(u^2 + t^2) du) dt$, 求 $F''(x)$.

四、设 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和曲面 $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 围成的密度为 1 的均匀几何体. 试计算 Ω 关于 z 轴的转动惯量.

五、求常数 a, b, c 的值, 使函数 $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$ 在点 $M(1, 2, -1)$ 处沿 z 轴正方向的方向导数有最大值 64.

六、已知在半平面 $x > 0$ 内 $(x-y)(x^2 + y^2)^\lambda dx + (x+y)(x^2 + y^2)^\lambda dy$ 为二元函数

$f(x, y)$ 的全微分.

(1) 求 λ 的值;

(2) 求 $f(1, \sqrt{3}) - f(2, 0)$ 的值.

七、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$ 的收敛区间及和函数.

八、将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并求收敛区间及 $f^{(5)}(1)$ 的值.

九、计算曲面积分 $I = \iint_S \frac{xdydz + z^2 dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面

$z = R, z = -R (R > 0)$ 所围成的立体表面的外侧.

十、设 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, 其中 $t > 0$. 已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 又设 $F(t) = \iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$.

(1) 求证: $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 并求 $F'(t)$ 的表达式;

(2) 设 $f(0) \neq 0$, 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\lambda} F'(\frac{1}{n})$ 在 $\lambda > 0$ 时收敛, $\lambda \leq 0$ 时发散.