2010-2011 工科数学分析第二学期期末试题（A 卷）解答（2011.6）

一. 1. -30

2. $1+e$

3. $-\frac{1}{2}$

4. $\int_L \frac{x^2+3x^2y}{\sqrt{1+9x^4}}dl$

5. $u\frac{\partial z}{\partial u}=z$

二. $I=\int_0^1\frac{e^x}{x}dx\int_{x^2}^{x}dy$ …………………………(3 分)

$=\int_0^1(e^x-xe^x)dx$ …………………………(6 分)

$=e-2$ …………………………(9 分)

三. $f_x'=2xy$ ， $f_y'=x^2+y-1$ …………………………(2 分)

令 $f_x'=0$， $f_y'=0$，得 $x=0,y=1$ 或 $y=0,x=\pm1$

得三点 $P_1(0,1)$， $P_2(1,0)$， $P_3(-1,0)$ …………………………(4 分)

$f''_{x^2}=2y$， $f''_{xy}=2x$， $f''_{y^2}=1$ …………………………(5 分)

在点 P_1， $A=2,B=0,C=1$， $AC-B^2=2>0$， $A=2>0$

$P_1(0,1)$ 是极小点，极小值 $f(0,1)=-\frac{1}{2}$ …………………………(7 分)

在点 P_2， $A=0,B=2,C=1$， $AC-B^2=-4<0$，

在点 P_3， $A=0,B=-2,C=1$， $AC-B^2=-4<0$，

P_2,P_3 都不是极值点 …………………………(9 分)

四. $3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-2z-2x\frac{\partial z}{\partial x}=0$ ……………(2 分)

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2z}{3z^2-2x}$ ……………………………(3 分)

$3z^2\frac{\partial z}{\partial y}-2x\frac{\partial z}{\partial x}+1=0$ ……………..…………….(5 分)

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1}{3z^2-2x}$， ……………………………….(6 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2\frac{\partial z}{\partial y}(3z^2-2x)-2z(6z)\frac{\partial z}{\partial y}}{(3z^2-2x)^2}$$ ……………………………… .(7 分)

$$=\frac{6z^2+4x}{(3z^2-2x)^3}$$ ……………………………(9 分)

五. 设切点$M(x_0,y_0,z_0)$， $\frac{\partial z}{\partial x}=y$， $\frac{\partial z}{\partial y}=x$，法向量$\vec{n}=\{y_0,x_0,-1\}$ ………(3 分)

由题设， $\vec{n}//\{1,3,1\}$， $\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}$ ……………………………… (5 分)

得 $x_0=-3$， $y_0=-1$， $z_0=x_0y_0=3$，所求点为$M(-3,-1,3)$ ……… (7 分)

切平面为 $(x+3)+3(y+1)+(z-3)=0$

即 $x+3y+z+3=0$ …………………………….(9 分)

六. $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$， 故是全微分方程 …………… (2 分)

$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy$ …………………………… (4 分)

$=\int_1^x 0dx+\int_0^y x^y\ln xdy$ …………………………... (6 分)

$=x^y-1$ ……………………..... (7 分)

通解为 $x^y=C$ ……………………..... (8 分)

七. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ ， $R=1$ ………………………………(1 分)

$x=\pm1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(\pm1)^{n-1}$ ，发散，收敛域为$(-1,1)$ ………(2 分)

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$

$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ ……………………… (4 分)

$\int_0^x(\int_0^x S(x)dx)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}$ ………………………… (6 分)

$=\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1-x$ …………………….. (8 分)

$\int_0^x S(x)dx=\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}-1$ …………………….. (9 分)

$S(x)=\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}$ …………………….. (10 分)

八. $m=\iiint\limits_V\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dV$ .... (1 分)

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\frac{1}{r^2}r^2\sin\varphi dr$ .... (3 分)

$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=\pi$ …………………. (4 分)

$\bar{x}=\bar{y}=0$， .... (6 分)

$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint\limits_V\frac{z}{x^2+y^2+z^2}dV$ ……………… (7 分)

$=\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\frac{r\cos\varphi}{r^2}r^2\sin\varphi dr$ ……………… (9 分)

$=\frac{1}{m}4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi=\frac{3}{4}$ ……………… (10 分)

质心 $(0,0,\frac{3}{4})$

九. $f(x)=(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ .... (3 分)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$ .... (4 分)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$ .... (6 分)

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\frac{(-1)^n}{2n+1})x^{2n+1}=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$$ .... (8 分)

收敛域为 $[-1,1]$ .... (9 分)

十. 设曲面 $S_1: z=1$ （$x^2+y^2\le 1$）

$$I=\oiint_{S+S_1^-}-\iint_{S_1^-}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$$ .... (1 分)

$$\oiint_{S+S_1^-}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$$

$$=\iiint_V(-3)dV$$ .... (3 分)

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_1^{2-\rho^2}dz$$ .... (4 分)

$$=-\frac{3}{2}\pi$$ .... (5 分)

$$\iint_{S_1^-}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$$

$$=\iint_{S_1^-}(x^2-z)dxdy=-\iint_{D_{xy}}(x^2-1)dxdy$$ .... (6 分)

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3\cos^2\theta d\rho+\pi$$ .... (7 分)

$$=\frac{3}{4}\pi$$ .... (8 分)

$$I=-\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi=-\frac{9}{4}\pi$$ .... (9 分)

十一. 当$\lambda \neq 1$时， $\lim_{n\to\infty} b_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda \ln(1+a_n)}{a_n} = 1-\lambda \neq 0$

级数发散 .... (2 分)

当$\lambda \neq 1$时， $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2}$ .... (3 分)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - (a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2))}{a_n^2}$$ .... (5 分)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$ .... (7 分)

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛 .... (8 分)