

课程编号: MTH17004, MTH17006 北京理工大学 2010-2011 学年第二学期

工科数学分析期末试题 (A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题, 试卷后面空白纸撕下作草稿纸)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$, 且 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角是钝角, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。

2. 设 $u = x^2y + ye^z + yz \ln x$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)|_{(1,1,1)} =$ _____。

3. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, 但向量 $\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \lambda\vec{a} + \vec{c}$ 共面, 则 $\lambda =$ _____。

4. 设 L 是曲线 $x=t, y=t^3, z=1$ 上从 $A(0,0,1)$ 到 $B(2,8,1)$ 的一段, 若将 $I = \int_L x^2 dx + y dy + z dz$ 化成第一类曲线积分, 则有 $I =$ _____。

5. 变量替换 $u = x, v = \frac{y}{x}$ 可将微分方程 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ 化成_____。

二. (9 分) 交换积分次序并计算 $I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{e^x}{x} dx$ 。

三. (9 分) 求函数 $f(x, y) = x^2y + \frac{1}{2}y^2 - y$ 的极值和极值点。

四. (9 分) 设方程 $z^3 - 2xz + y = 5$ 确定函数 $z = z(x, y)$ ，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

五. (9 分) 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使曲面在此点处的切平面垂直于直线

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \text{ 并写出切平面方程。}$$

六. (8 分) 证明方程 $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$ 是全微分方程, 并求出通解。

七. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$ 的收敛域及和函数。

八. (10 分) 设 V 是球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ ($z \geq 1$) 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围的立体, 其上每点的密度与此点到原点的距离的平方成反比(比例系数为 1), 求 V 的质量及质心。

九.(9 分) 将 $f(x) = (x^2 + 1)\arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并指出收敛域。

十.(9 分) 利用高斯公式计算 $I = \iint_S (y^2 - x)dydz + (z^2 - y)dzdx + (x^2 - z)dxdy$, 其中 S 是抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ ($z \geq 1$) 的上侧。

十一.(8 分) 设 $a_n > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $b_n = 1 - \frac{\lambda \ln(1+a_n)}{a_n}$ (λ 是常数), 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的收敛性。