

课程编号: A071001

北京理工大学 2006-2007 学年第二学期

2006 级数学分析 B 期末试题(A)

一. 解下列各题 (每小题 6 分)

1. 设直线 $L: \frac{x-a}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{n}$ 在平面 $\pi: 3x-2y+z-8=0$ 上, 求 a 与 n 的值.
2. 设 $z = xf(\frac{y}{x}) + \varphi(x^2 + y^2)$, 其中 f, φ 二阶可导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
3. 设 D 是由直线 $y = x$, $y = 2x$, $y = 1$ 所围成的均匀薄片(面密度为 1), 求 D 对于 y 轴的转动惯量.
4. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$, 指出 p 在什么范围内取值时级数绝对收敛, p 在什么范围内取值时级数条件收敛, p 在什么范围内取值时级数发散(要说明理由).

二. 解下列各题 (每小题 7 分)

1. 已知 \vec{n} 是曲面 $x^2 + 2y^2 + \frac{z^2}{2} = 5$ 在点 $(1,1,2)$ 处指向 x 增大方向的单位法向量, $u = e^x + \ln(1 + y^2 + z^2)$, 求 $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{(0,1,1)}$.
2. 设 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 位于平面 $z=1$ 上方的部分, 计算曲面积分 $I = \iint_S \frac{1}{z} dS$.
3. 计算 $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dV$, 其中 Ω 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 所围成的立体.
4. 求二元函数 $z = x^3 + y^2 - 2xy$ 的极值点与极值.

三. (8 分) 设 $f(x) = \pi - 2|x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, 将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

四. (8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n n}$ 的收敛域与和函数.

五. (8 分) 计算第二类曲面积分 $I = \iint_S 2xz dydz + yz dzdx - z^2 dx dy$, 其中 S 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧.

六. (8 分) 将 $f(x) = \ln(5-2x)$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 确定其收敛域, 并求 $f^{(5)}(1)$ 的值.

七. (10 分) 设 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内不取零值的可微函数, 已知

$\varphi(x)(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + \varphi(x)(x^2 + y^2)dy$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分.

(1) 求 $\varphi(x)$ 满足的微分方程及 $\varphi(x)$ 的表达式; (2) 求 $u(x, y)$ 的表达式.

八. (6 分) 设 $t > 0$, 以 $\Omega(t)$ 表示由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = t$ 围成的有界闭区域. 已知

$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 又设 $F(t) = \iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2) dx dy dz$.

(1) 求证: $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连可导, 并求 $F'(t)$ 的表达式;

(2) 若 $\forall t > 0$, 有 $\frac{1}{\pi} F(t) = e^{-t} - \int_0^t f(x) dx$, 且 $f(0) = 1$, 试求 $f(x)$ 的表达式.