例. 质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，$\vec{v}$ 表示速度，$\vec{a}$ 表示加速度，S 表示路程，a_t 表示切向加速度，则

（1）$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=a$　　（3）$\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=v$

（2）$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=v$　　（4）$\left|\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t\right|=a_t$

选（D）

（A）只有(1)、(4)是对的.　　(B) 只有(2)、(4)是对的.

（C) 只有 (2) 是对的.　　(D) 只有 (3) 是对的.

例. 一质点在平面上运动， 已知质点位置矢量的表 示式为 $\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$ (其中 a、b 为常数)，则该质点作

(1) 抛物线运动；　　（2）匀速直线运动

(3）变速直线运动；　　（4）一般曲线运动

选（3）

例、质点在平面上做曲线运动，比较以下关系，

$\vec{v}$是瞬时速度，　v是瞬时速率，　$\overline{\vec{v}}$平均速度，　$\overline{v}$平均速率

(1) $\quad |\vec{v}| = v \ \ldots \ |\overline{\vec{v}}| = \overline{v}$

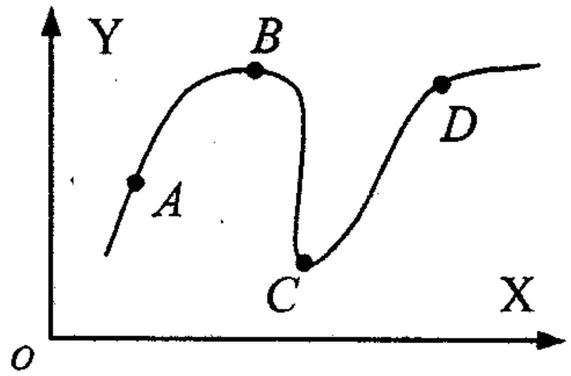
(2) $\quad |\vec{v}| \neq v \ \ldots \ |\overline{\vec{v}}| = \overline{v}$

(3) $\quad |\vec{v}| \neq v \ \ldots \ |\overline{\vec{v}}| \neq \overline{v}$

(4) $\quad |\vec{v}| = v \ \ldots \ |\overline{\vec{v}}| \neq \overline{v}$

选（4）

例．一质点以匀速率在 X－Y 平面中运动，其轨迹如图所示，由图中 A、B、C、D 四点可知 ____ 点的加速度量值最大，_____ 点的加速度量值最小。



答：C、 A

例. 某物体做直线运动，其速度随时间变化的关系为 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-kv^2t$, 式中 k为大于零的常量。当 $t=0$ 时，初速度为v_0，则该物体的速度v与时间t 的函数关系是

（A） $v=\frac{1}{2}kt^2+v_0$ （B） $v=-\frac{1}{2}kt^2+v_0$

(C) $\frac{1}{v}=\frac{kt^2}{2}+\frac{1}{v_0}$ (D) $\frac{1}{v}=-\frac{kt^2}{2}+\frac{1}{v_0}$

选（C）

例、一质点沿直线运动,其运动方程为 $x=6t-t^2$ (SI)，则在 t 由 0 至 4s 的时间间隔内，质点的位移大小为 ______ ， t 时刻质点的速度的大小为 ________ 。

答：8m， $|6-2t|$

例、已知一质点在 xOy 平面内运动，其运动方程为

$$\vec{r} = 3\cos\frac{\pi}{6}t\,\hat{i} + 3\sin\frac{\pi}{6}t\,\hat{j}$$

则质点的瞬时速度 $\vec{v}=$________；加速度 $\vec{a}=$________。

$$\vec{v} = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}t\,\hat{i} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}t\,\hat{j} \qquad \vec{a} = -\frac{\pi^2}{12}\cos\frac{\pi}{6}t\,\hat{i} - \frac{\pi^2}{12}\sin\frac{\pi}{6}t\,\hat{j}$$

例、一质点沿 x 轴作直线运动，它的运动学方程为

$x = 3 + 5t + 6t^2 - t^3$ (SI)，　　则

(1) 质点在 $t = 0$ 时刻的速度 $\vec{v}_0 =$______

(2) 加速度为零时，该质点的速度 $\vec{v} =$________

$5\,\vec{i}$ m/s　　　　$17\,\vec{i}$ m/s

例、一个质量为3kg 的物体在合力F_x=6＋4x－3x^2（SI）的作用下由静止开始沿 x 轴从 x=0 运动到 x=3m 处。求（1）此过程中力F_x所做的功，（2）该物体位于x = 3m 处时，力F_x 的功率。

（1） $$W = \int_0^3 F_x \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(6 + 4x - 3x^2\right)\mathrm{d}x = 9(\mathrm{J})$$

(2) 求 $x = 3\mathrm{m}$ 时功率，$P = Fv$

$$a = \frac{F_x}{m} = 2 + \frac{4}{3}x - x^2 \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_0^x \left(2 + \frac{4}{3}x - x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^v v\mathrm{d}v \qquad v^2 = 4x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

当物体由 $x = 0$ 运动到 $x = 3$，沿 x 轴正向运动，$v > 0$

故 $x = 3\mathrm{m}$处 $\quad v = \sqrt{6}(\mathrm{m/s}) \qquad F_x = -9(\mathrm{N})$

$$P = F_x v = -9 \times \sqrt{6} = -22(\mathrm{W})$$

例、一质点从静止出发，沿半径 $R = 3$ m的圆周运动．切向加速度 $a_t = 3\ \mathrm{m/s^2}$ 保持不变，当总加速度与半径成角45^o时，所经过的时间 t =______，在上述时间内质点经过的路程 S = _____ 答：1 s， 1.5m

例、一个以恒定角加速度转动的圆盘，如果在某一时刻的角速度为$\omega_1 = 20\pi$ rad / s ，再转60转后角速度为$\omega_2 = 30\pi$ rad / s ，则角加速度β = ______, 转过上述60 转所需的时间Δt = _____. 答：6.54 rad/s² 4.8s

例、一吊车底板上放一质量为 10 kg 的物体，若吊车底板加速上升，加速度大小为 $a = 3 + 5t$ (SI)，则 2 s 内吊车底板给物体的冲量大小 I =______； 2 s 内物体动量的增量大小 P =_____。 答：356 N·s 160 N·s

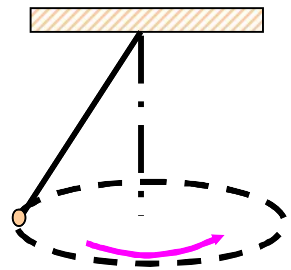
例、如图所示圆锥摆。质量为m 的小球在水平面内以角速度 ω匀速转动。在小球转动一周的过程中

（1）小球所受重力的冲量的大小为______________。

（2）小球所受绳子拉力的冲量的大小为___________。

答：（1）$I = mg\Delta t$ $\qquad \Delta t = 2\pi / \omega$

（2）$I = mg\Delta t$



例、质量为 m 的 A 粒子的初速度为 $3\hat{i} + 4\hat{j}$

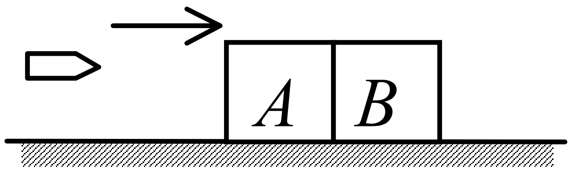
质量为 $4m$ 的 B 粒子的初速度为 $2\hat{i} - 7\hat{j}$

两粒子相互作用后，A 粒子的速度变为 $7\hat{i} - 4\hat{j}$

B 粒子的速度变为_____。

答：$\vec{v}_B = \hat{i} - 5\hat{j}$

例、两块并排的木块 A 和 B，质量分别为m_1和m_2 ，静止地放置在光滑的水平面上，一子弹水平地穿过两木块，设子弹穿过两木块所用的时间分别为Δt_1 和Δt_2 ，木块对子弹的阻力为恒力F，则子弹穿出后，木块A的速度大小为______，木块B的速度大小为______.



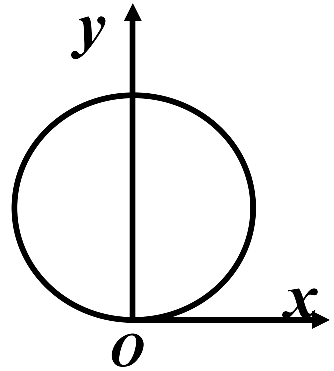
答：$\dfrac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}$， $\dfrac{F\Delta t_2}{m_2}+\dfrac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}$

例、两个相互作用的物体A和B，无摩擦地在一条水平直线上运动。A的动量表达式为$P_A= P_0-b\,t$ ，P_0、b为正值常量，t是时间。在下列两种情况下，写出物体B的动量作为时间函数的表达式：(1) 开始时，若B静止，$P_{B1}=$______；(2) 开始时，B的动量为$-P_0$，P_{B2} = ______。

答：$b\,t$ ， $-P_0+b\,t$

例、一质点在如图所示的坐标平面内作圆周运动，有一力 $\vec{F} = F_0\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$ 作用在质点上。在该质点从坐标原点运动到(0, 2R) 位置过程中，力对它所作的功为

(A) F_0R^2 (B)$2F_0R^2$ (C) $3F_0R^2$ (D)$4F_0R^2$



$$A = \int_0^{(0,2R)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{(0,2R)} F_0\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j}\right)$$

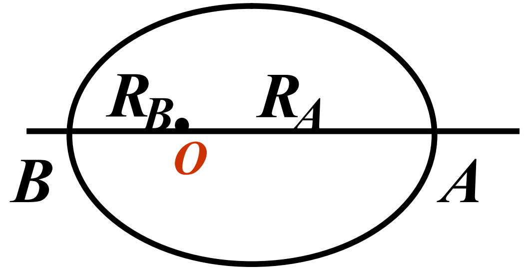
答：(B)

例、一质量为 m的质点沿着一条曲线运 动，其位置矢量在空间直角 坐标系中的表达式为 $\vec{r} = a(\cos\omega t)\vec{i} + b(\sin\omega t)\vec{j}$,其中 a、b、ω皆为常数，则此质点对原点的角动 量 $L =$ ________；此质点所受对原点的力 矩 $M =$ ________.

$L = mab\omega$

$M = 0$

例、质量为m的行星以椭圆轨道绕太阳运动，轨道半长轴R_A，半短轴R_B，太阳质量M，则行星运动的机械能 $E=?$ 行星对应的角动量分别是L_A、L_B，动能分别是E_{KA}、E_{KB}，它们的大小关系？



$$E=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{r}$$

$$E=-G\frac{mM}{R_A+R_B}$$

角动量守恒 $L_B=L_A$，　能量守恒 $E_{KA}<E_{KB}$

例、两个质点的质量分别为m_1，m_2。当两者间的距离由a缩短到b时，它们之间万有引力所做的功为______。

答案：$W=\frac{Gm_1m_2}{b}-\frac{Gm_1m_2}{a}$

例、一个力F作用在质量为 1.0 kg的质点上，使之沿x轴运动。已知在此力作用下质点的运动学方程为

$$x = 3t - 4t^2 + t^3$$ （SI）在 0 到 4 s 的时间间隔内，

(1) 力F的冲量大小 I =____________________。

(2)力F对质点所作的功 W =____________________。

答：16 N·s， 176 J

例、有一劲度系数为k的轻弹簧，竖直放置, 下端悬一质量为m的小球．先使弹簧为原长，而小球恰好与地接触．再将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止．在此过程中外力所作的功为:

答：$\dfrac{m^2 g^2}{2k}$

例、质量为 m 的质点在指向圆心的平方反比力$F=-k/r^2$ 的作用下，作半径为 r 的圆周运动。此质点的速度$v=?$ 若取距圆心无穷远处为势能零点,它的机械能 $E=?$

解：(1) 向心力

$$\frac{k}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$$

$$v^2=\frac{k}{r\cdot m}$$

$$v=\sqrt{\frac{k}{r\cdot m}}$$

(2) 能量

$$E=E_k+E_p$$

$$=\frac{1}{2}mv^2+\int_r^\infty \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\frac{1}{2}m\frac{k}{mr}+\int_r^\infty\left(-\frac{k}{r^2}\right)\cdot\mathrm{d}r$$

$$=\frac{k}{2r}+\left.\frac{k}{r}\right|_r^\infty$$

$$=\frac{k}{2r}-\frac{k}{r}=-\frac{k}{2r}$$

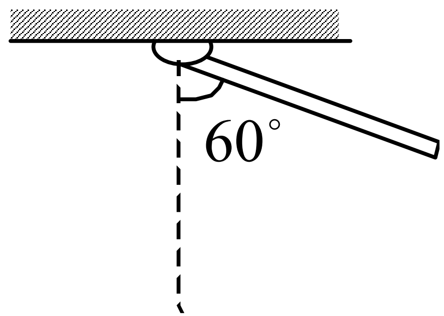
例、一定滑轮半径为0.1m，相对于中心轴的转动惯量为1×10^{-3}kg·m^2，一变力$F=0.5t$ N沿切线方向作用在滑轮的边缘，如果滑轮最初处在静止状态，则在1s末它的角速度为________

答：25 rad·s^{-1}

例、一飞轮以600 rev/min的转速旋转，转动惯量为2.5 kg·m^2，现加一恒定的制动力矩使飞轮在1 s内停止转动，则该恒定制动力矩的大小$M=$____。

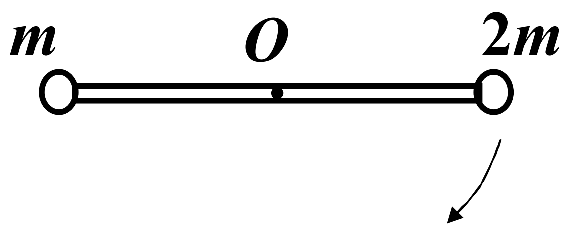
答：50π或157 Nm

例、一均匀细杆可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内自由转动,杆长$l=(5/3)$ m. 今使杆从与竖直方向成60°角的位置由静止释放(g取10 m/s^2)，则杆的最大角速度为____



答：3 rad /s

例、一长为L，质量为m的均匀细棒，两端分别固定有质量分别为m和$2m$的小球（小球尺寸不计）。棒可绕通过棒中点O的水平轴在铅直平面内自由转动，如图。则由两个小球和细棒组成的这一刚体相对于转轴O轴的转动惯量J＝____。若棒从水平位置由静止开始转动，则该刚体在水平位置时的角加速度β ＝ ___；该刚体通过铅直位置时的角速度ω = ____。



$$J = m(\frac{L}{2})^2 + 2m(\frac{L}{2})^2 + \frac{1}{12}mL^2 = \frac{5}{6}mL^2$$

$$M = 2mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{2} \qquad M = J\beta \qquad \beta = \frac{3g}{5l}$$

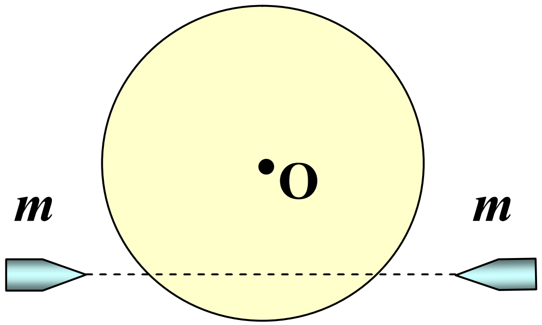
$$mg\frac{L}{2} - 2mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}J\omega^2 = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{6g}{5L}}$$

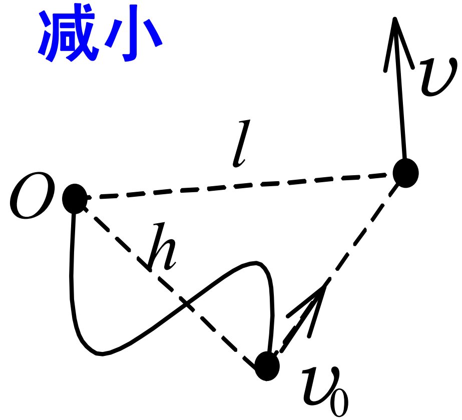
例，一长为L的轻质细杆，两端分别固定质量为m和$2m$的小球，此系统在竖直平面内可绕过中心O且与杆垂直的水平光滑固定轴转动，开始杆与水平成60^0角，处于静止状态。求：系统绕O轴转动的转动惯量J，杆转到水平位置时，刚体受到的和外力矩M，角加速度 β

$$J = m(\frac{L}{2})^2 + 2m(\frac{L}{2})^2 = \frac{3}{4}mL^2 \qquad M = 2mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{2}$$

$$M = J\beta \qquad \beta = \frac{2g}{3L}$$

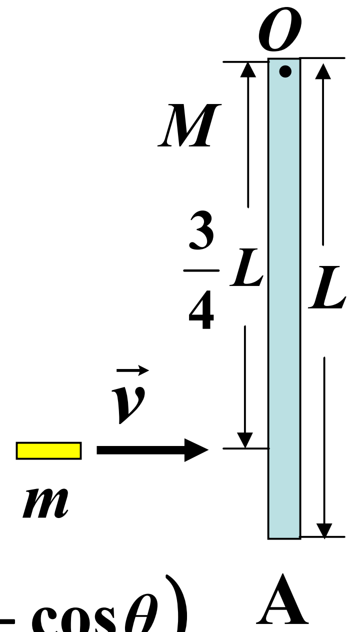
例、一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴O转动，质量和速度大小相同的两颗子弹沿同一条直线相对射入圆盘并且留在盘内，问子弹射入后的瞬间，圆盘的角速度如何变化？（增大；减小；不变） 答： 减小





例、一根长为l 的细绳的一端固定于光滑水平面上的O点，另一端系一质量为m的小球，开始时绳子是松弛的，小球与O点的距离为h。使小球以某个初速率沿该光滑水平面上一直线运动，该直线垂直于小球初始位置与O点的连线。当小球与O点的距离达到l 时，绳子绷紧从而使小球沿一个以O点为圆心的圆形轨迹运动，则小球作圆周运动时的动能E_K与初动能E_{K0}的比值E_K / E_{K0} = 答：h^2 / l^2

例. 均匀杆长 $L=0.40\text{m}$，质量 $M=1.0\text{kg}$ ，由其上端的光滑水平轴吊起而静止。今有一质量 $m=8.0\text{g}$ 的子弹以 $v=200\text{m/s}$ 的速率水平射入杆中而不复出。射入点在轴下 $d=3L/4$ 处。(1) 求子弹停在杆中时杆的角速度；(2) 求杆的最大偏转角。



解：(1) 由子弹和杆系统对悬点O的角动量守恒

$$mv\times\frac{3}{4}L=\left[\frac{1}{3}ML^2+m\left(\frac{3L}{4}\right)^2\right]\omega$$

$$\omega=\frac{3mv}{4\times\left[\frac{1}{3}ML+\frac{9}{16}mL\right]}=8.89\ \text{rad/s}$$

(2) 对杆、子弹和地球，由机械能守恒得

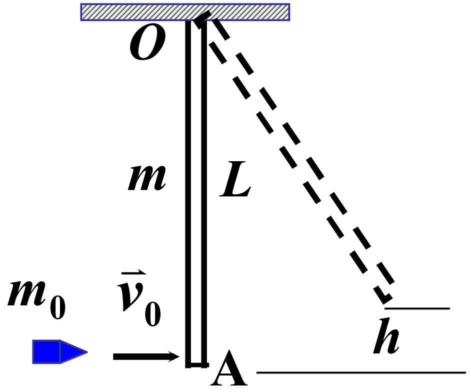
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2+\frac{9}{16}mL^2\right)\omega^2=\left(Mg\frac{L}{2}+mg\frac{3}{4}L\right)(1-\cos\theta)$$

$$\theta=94^\circ 18'$$

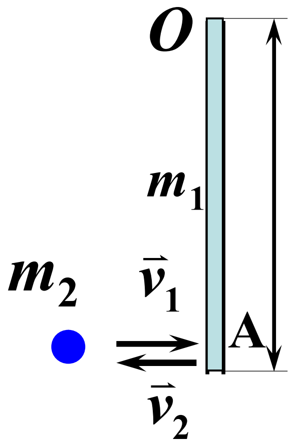
质量为m，长为L的细棒，可绕O点在竖直面内旋转，子弹m_0以v_0射入A点（不穿出），求系统上升的最大高度h

$$m_0 v_0 L = \left(m_0 L^2 + mL^2/3 \right) \omega$$

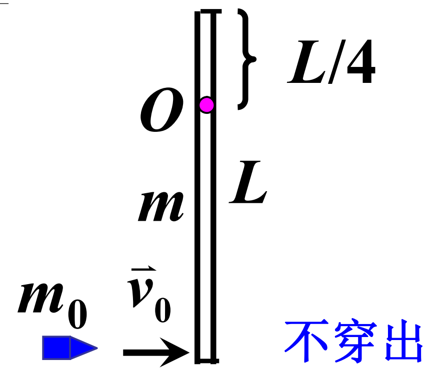
$$\frac{1}{2}\left(m_0 L^2 + \frac{1}{3} mL^2\right) \omega^2 = m_0 gh + \frac{1}{2} mgh$$



$$m_2 v_1 L = -m_2 v_2 L + \frac{1}{3} m_1 L^2 \omega$$



$$m_0 v_0 3L/4 = [\, m_0 (3L/4)^2 + mL^2/12 + m(L/4)^2 \,]\omega$$

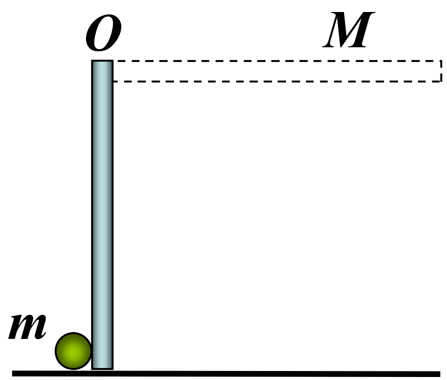


例、质量为M的匀质棒，长为L，可绕其端点O在纸面内无摩擦地转动。从水平位置静止释放，求：

（1）棒到达竖直位置时的角速度；

（2）棒到达竖直位置时与静止在地面上的质量为$m = M/3$的小球做弹性碰撞，小球的速度是多少？

解：1）以棒和地球为系统，系统机械能守恒



$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

2）竖直位置与小球碰撞时，角动量守恒

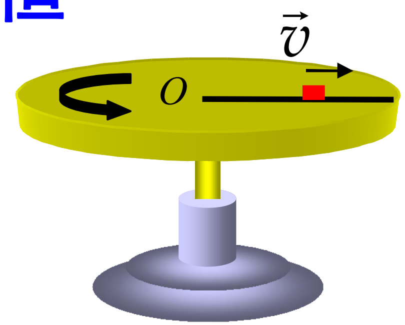
$$J\omega = J\omega_1 + mvL \qquad J = \frac{1}{3}ML^2$$

弹性碰撞系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad v = \sqrt{3gL}$$

例、质量为 m_1 半径为R 水平圆盘绕竖直轴以角速度ω_0转动。圆盘上有一质量为m_2玩具汽车从 $t=0$ 时刻沿它的一条半径由中心向边缘行驶。现将玩具汽车视为质点，且它相对于圆盘的速率v 恒定。已知 $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg, $R = 1$m, $\omega_0 = 20\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $v = 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,
求：玩具汽车行至圆盘边缘时，圆盘转了多少圈?

解、圆盘与玩具汽车组成的系统角动量守恒



$$J_1\omega_0 = (J_1 + J_2)\omega$$

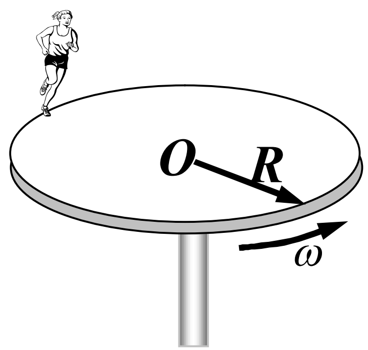
$$J_1 = \frac{1}{2}m_1R^2 \qquad J_2 = m_2r^2 = m_2(vt)^2$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t \qquad N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{5}{2}\ [\text{圈}]$$

$$\theta = \int_0^{R/v}\omega\,\mathrm{d}t = \int_0^{R/v}\frac{J_1\omega_0}{J_1+J_2}\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{20}{1+t^2}\mathrm{d}t = 5\pi$$

例．一个水平圆盘半径为R，以角速度为ω 绕过其中心的竖直轴转动，一质量为m的人站在该圆盘边上。设圆盘对该竖直轴的转动惯量为J，其轴处的摩擦可以忽略不计。若人从盘边走到盘心，求（1）圆盘的角速度将变化多少？（2）人与圆盘组成的系统动能的变化。

解　1）人与圆盘系统角动量守恒



$$(J + J_{人})\omega = J\omega' \qquad \omega' = \frac{J + mR^2}{J}\omega$$

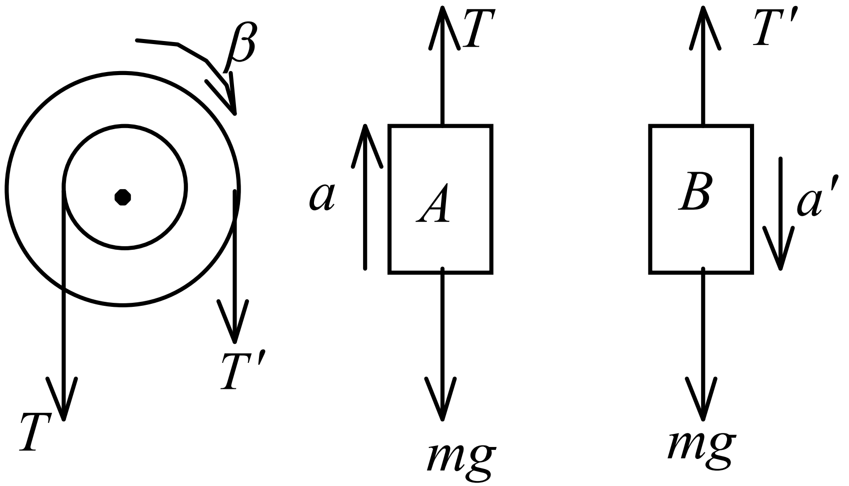
$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \frac{mR^2\omega}{J}$$

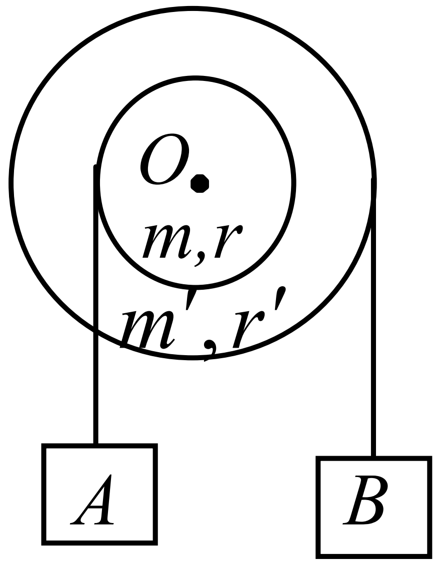
2）动能变化 $\Delta E_k = \frac{1}{2}J\omega'^2 - \frac{1}{2}(J + J_{人})\omega^2$

$$= \frac{1}{2}J\left(\frac{J + mR^2}{J}\omega\right)^2 - \frac{1}{2}(J + mR^2)\omega^2 = \frac{J + mR^2}{2J}mR^2\omega^2$$

例、两个匀质圆盘，一大一小，同轴地粘结在一起，构成一个组合轮．小圆盘的半径为r，质量为m；大圆盘的半径= $2r$，质量= $2m$．组合轮可绕通过其中心且垂直于盘面的光滑水平固定轴O转动，对O轴的转动惯量$J = 9mr^2/2$．两圆盘边缘上分别绕有轻质细绳，细绳下端各悬挂质量为m的物体A和B，这一系统从静止开始运动，绳与盘无相对滑动，绳的长度不变．已知 $r = 10$ cm，求 (1) 组合轮的角加速度β;

(2) 当物体A上升 $h = 40$ cm 时，组合轮的角速度ω

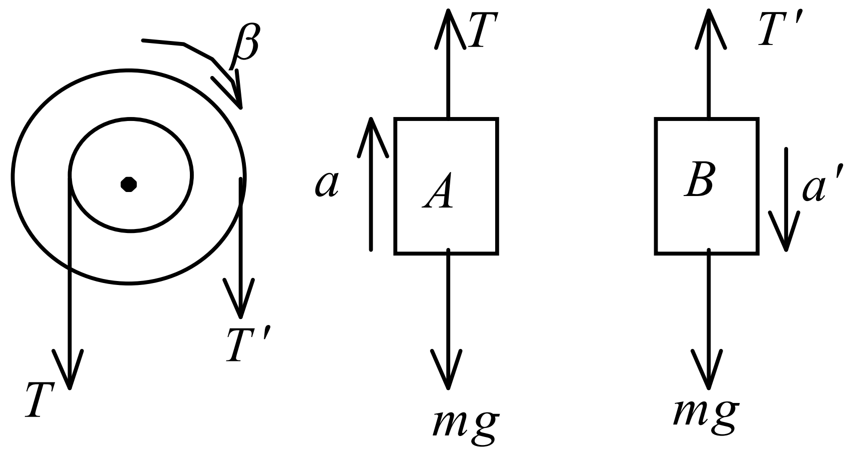




A： $T - mg = ma$

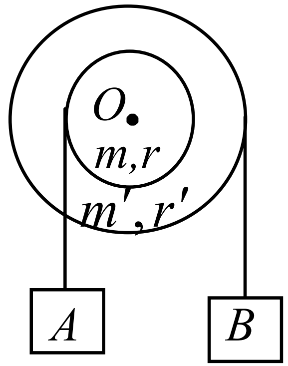
B： $mg - T' = ma'$

$$T'(2r) - Tr = (9mr^2/2)\beta$$



$a = r\beta \qquad a' = 2r\beta$

$\beta = 2g/(19r) = 10.3\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$

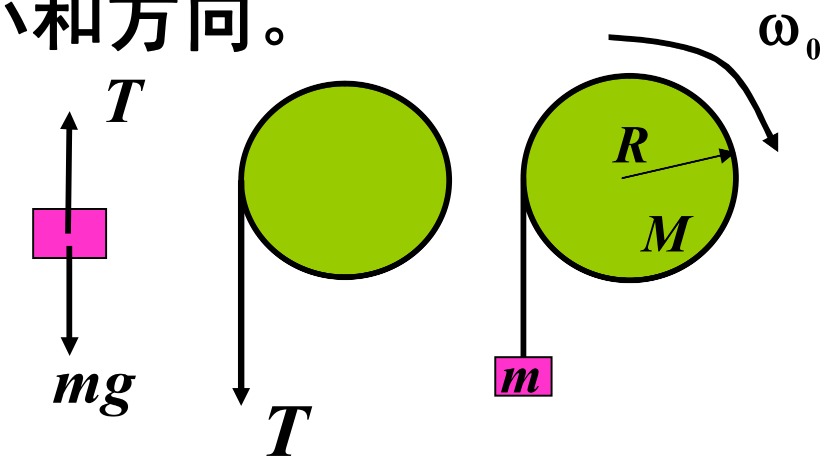


(2) 当物体A上升 $h = 40$ cm时，组合轮的角速度ω

设θ为组合轮转过的角度 $\theta = h/r$

匀变速：$\omega^2 - 0 = 2\beta\theta \qquad \omega = (2\beta h/r)^{1/2} = 9.08\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

例、一轴承光滑的定滑轮，质量M=2kg，半径R=0.1m，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系一质量为$m=5\text{kg}$的物体，已知定滑轮的转动惯量为J=1/2 MR^2，其初角速度 $\omega_0=10\text{rad/s}$，方向垂直纸面向里。求（1）定滑轮的角加速度大小和方向，（2）定滑轮角速度变化到 $\omega=0$ 时物体上升的高度；（3）当物体回到原来位置时，定滑轮角速度大小和方向。



解(1)

$$\begin{cases} T-mg=ma \\ -TR=J\beta \\ a=R\beta \end{cases}$$

$\beta=-81.7\text{rad/s}^2$ 垂直纸面向外

(2) $\omega^2-\omega_0^2=2\beta\Delta\theta$ $h=R\Delta\theta=6.12\times10^{-2}m$

或 $\frac{1}{2}J\omega_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2=mgh$ （3）10 rad/s 垂直纸面向外.

例. 已知质量为m、半径为R的均匀圆盘。初角速度为ω_0，绕中心轴逆时针转动。空气对圆盘表面单位面积的摩擦力正比其线速度, 即 $\vec{f} = -k\vec{v}$ 。不计轴承处的摩擦。

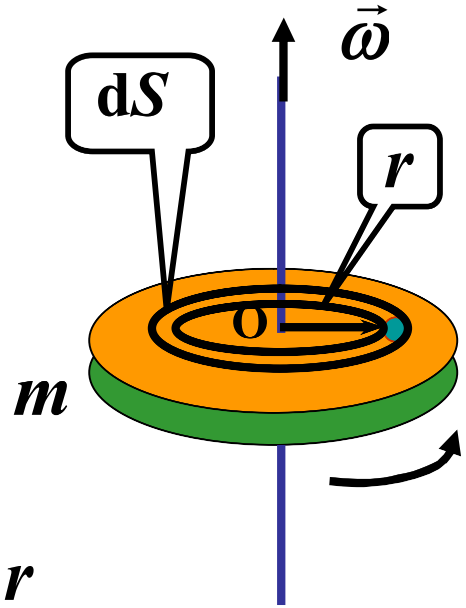
求：圆盘在停止转动时所转过的圈数 $N=$ ？

解：1. 刚体m为研究对象，取逆时针旋转时，ω方向为正

2. 分析运动

r不同时，f不同，力臂也不同

3. 需划分微元求 M



选半径为r、宽度为dr的面积元dS，

其上各质元具有相同的线速度 v

dS上阻力的大小 $\mathrm{d}F = f\mathrm{d}S = f\,2\pi r\mathrm{d}r$

考虑盘的上下表面，故dS 阻力矩为

$$\mathrm{d}M = -2\, r\, \mathrm{d}F$$

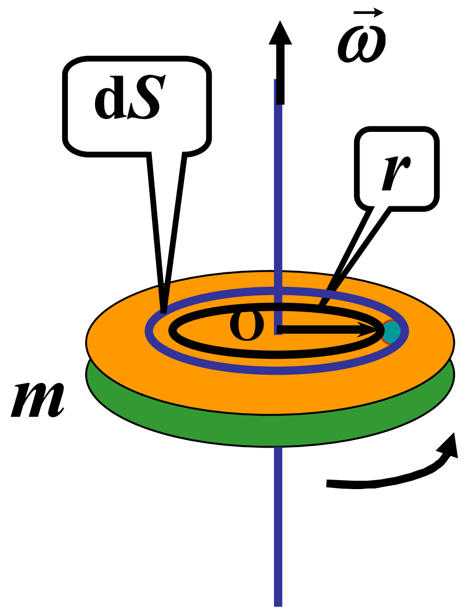
总阻力矩

$$M = \int_m \mathrm{d}M = -\int_0^R 2r\, f\, 2\pi r\, \mathrm{d}r$$

$$= -\int_0^R 2\, r\, kv\, 2\pi\, r\, \mathrm{d}\, r$$

$$= -\int_0^R 2r\, kr\omega\, 2\pi\, r\, \mathrm{d}\, r$$

$$= -4\pi\, k\omega \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = -k\omega\pi R^4$$



M 随 ω 变化

$$M = J\beta$$

$$M = J\beta = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{M = -k\omega\pi R^4}$$

$$-k\pi \cdot \omega \cdot R^4 = \left(\frac{1}{2}mR^2\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

两边积分 $$\int_{\omega_0}^{0} \mathrm{d}\omega = -\int_0^t \frac{2k\pi \cdot R^2}{m} \cdot \omega \cdot \mathrm{d}t$$

$$\int_{\omega_0}^{0} \mathrm{d}\omega = -\int_0^{\theta} \frac{2k\pi \cdot R^2}{m} \mathrm{d}\theta$$

$$-\omega_0 = -\frac{2k\pi \cdot R^2}{m}\theta$$

$$\theta = \frac{m\omega_0}{2k\pi \cdot R^2} \qquad \therefore N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{m\omega_0}{4\pi^2 \cdot kR^2}$$

例、一质量均匀分布的圆盘，质量为 M，半径为R，放在一粗糙水平面上(摩擦系数为μ)，圆盘可绕通过其中心 O 的竖直固定光滑轴转动。开始时，圆盘静止，一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上，求

(1) 子弹击中圆盘后，盘所获得的角速度 ω。

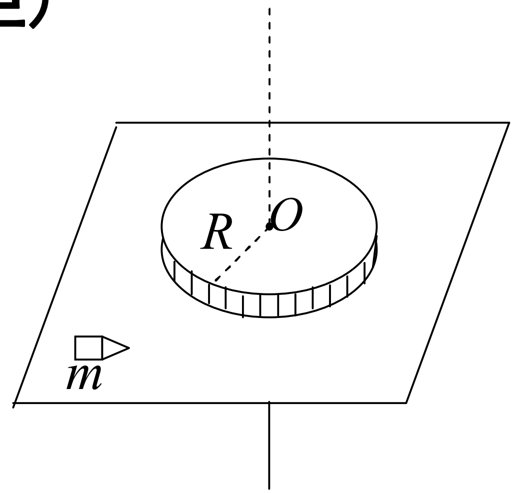
(2) 经过多少时间后，圆盘停止转动。

(圆盘绕通过O的竖直轴的转动惯量为 $MR^2/2$

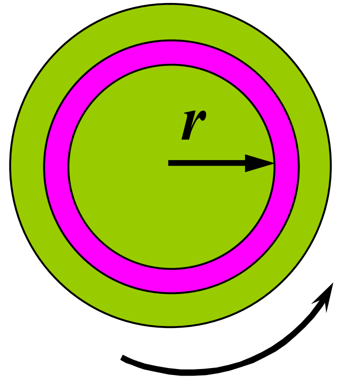
忽略子弹受重力造成的摩擦阻力矩)

解 （1）$mv_0R = (MR^2/2 + mR^2)\omega$

$$\omega = \frac{mv_0}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R}$$



（2）求圆盘受的摩擦阻力矩大小



$$\mathrm{d}M = \mu\,\mathrm{d}mg\,r = \mu\,\sigma\,2\pi r\,\mathrm{d}r\,g\,r = 2\pi\,\mu\,\sigma\,g\,r^2\,\mathrm{d}r$$

$$M = \int_0^R 2\pi\mu\sigma g r^2\mathrm{d}r = 2\pi\mu\sigma g R^3/3 = 2\mu M g R/3$$

$$\boxed{\begin{aligned} M &= J\beta \\ 0 &= \omega + \beta t \end{aligned}}$$

$$-M\Delta t = 0 - J\omega$$

$$\Delta t = J\omega/M$$

$$= (MR^2/2 + mR^2)\{2mv_0/[(M+2m)R]\}/(2\mu M g R/3)$$

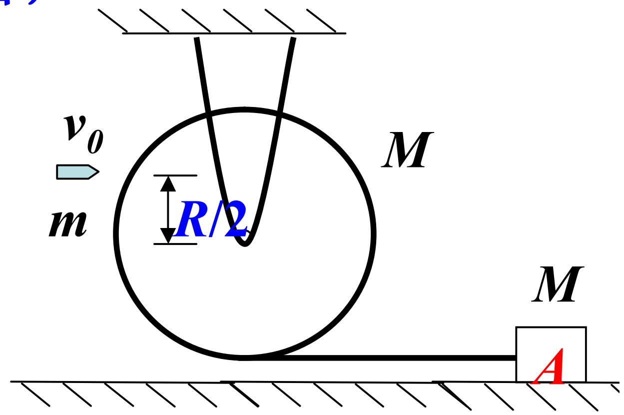
$$\Delta t = \frac{3mv_0}{2\mu M g}$$

例、一质量为M，半径为R的定滑轮上面绕有细绳，并沿水平方向拉着一个质量为M的物体A, 现有一质量为m的子弹在距转轴$R/2$的水平方向以速度v_0射入并固定在定滑轮的边缘，使滑轮拖动A在水平面上滑动，忽略轴的摩擦力，求：

1) 子弹射入并固定在滑轮边缘后，滑轮开始转动的角速度ω,

2) 若滑轮拖着A刚好转一圈而停止, 求物体A与水平面间的摩擦系数μ。

解 1）以m、滑轮、物体A为一系统，碰撞前后，外力矩远小于冲量矩，故角动量守恒



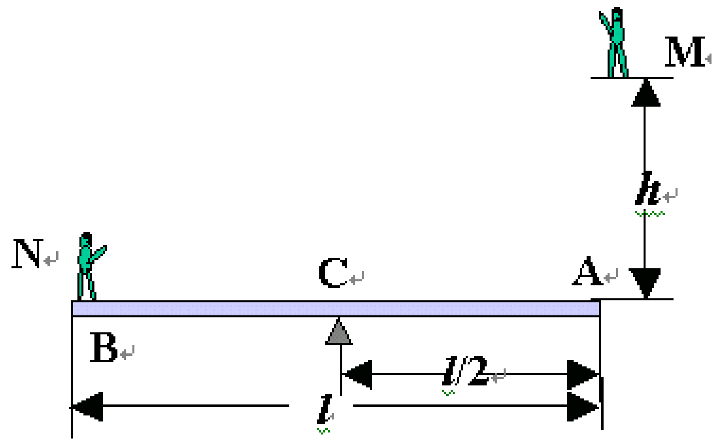
$$mv_0\frac{R}{2}=\left[mR^2+\frac{1}{2}MR^2+MR^2\right]\omega$$

2) 对m、滑轮、物体A系统。应用动能定理

$$0-\frac{1}{2}\left[mR^2+\frac{1}{2}MR^2+MR^2\right]\omega^2=-\mu Mg2\pi R$$

$$\mu=\frac{m^2v_0^{\ 2}}{16\pi Mg(m+\frac{3}{2}M)R}$$

例、一杂技演员 M由距水平跷板高为 h 处自由下落到跷板的一端，并把跷板另一端的演员N弹了起来.设跷板是匀质的,长度为 l, 质量为 m', 支撑板在板的中部点C, 跷板可绕点C在竖直平面内转动, 演员M, N的质量都是 m ， 假定演员M落在跷板上, 与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞，问演员N可弹起多高。

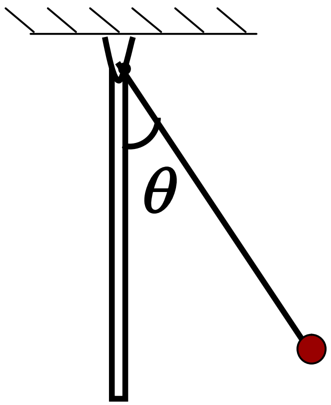


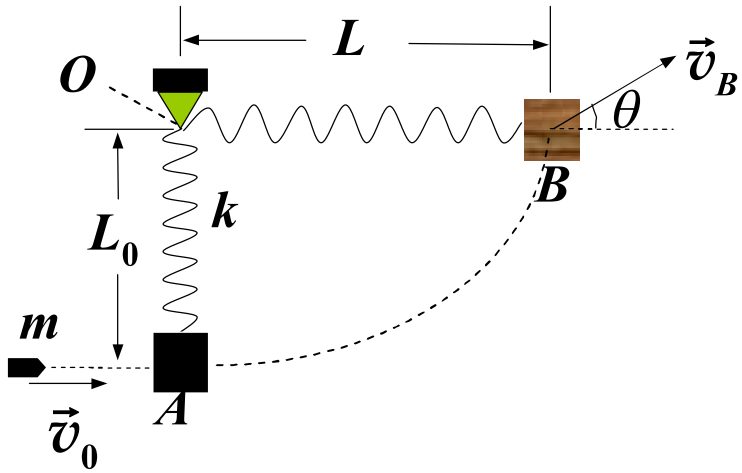
解. 现把M,N和跷板作为一个系统,并以通过点C垂直平面的轴为转轴.由于M,N的质量相同,所以当演员M碰撞板A处时,作用在系统上的合外力矩为零, 角动量守恒

$$mv_M\frac{l}{2}=J\omega+2mu\frac{l}{2}=J\omega+\frac{1}{2}ml^2\omega \qquad J=\frac{1}{12}m'l^2$$

$$\omega=\frac{mv_M\frac{l}{2}}{\frac{1}{12}m'l^2+\frac{1}{2}ml^2}=\frac{6m(2gh)^{1/2}}{(m'+6m)l} \qquad h'=\frac{l^2\omega^2}{8g}=\left(\frac{3m}{m'+6m}\right)^2h$$

例、长为l，质量为m的均匀细杆可绕其上端的水平光滑固定轴转动，另一质量也为m的小球，用长为 l 的轻绳系于转轴上，开始时杆静止在竖直位置，现将小球拉开一定角度，然后使其自由摆下与杆发生弹性碰撞，结果使杆最大偏角为$\pi/3$，求小球最初被拉开的角度θ。





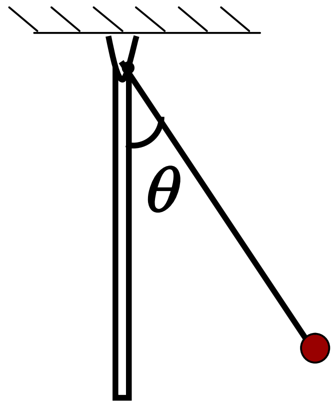
例 质量为M的木块被置于光滑水平桌面上, 与一端固定于O点的轻弹簧相连。弹簧的原长为L_0、劲度系数为k。木块原静止于A处，且弹簧保持原长。一质量为m的子弹以初速 v_0水平射向M并嵌入其中，使木块在平面上运动，如图所示。已知木块运动到 B 处时, 弹簧的长度为L，此时$OB\perp OA$。求木块在B点的速度方向和速率v_B。

解　1)　小球下落过程中机械能 守恒

$$mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2$$

2) 小球与杆碰撞过程中，　小球与杆系统不受外力 矩

角动量守恒：　$mvl = mv'l + \frac{1}{3}ml^2\omega$



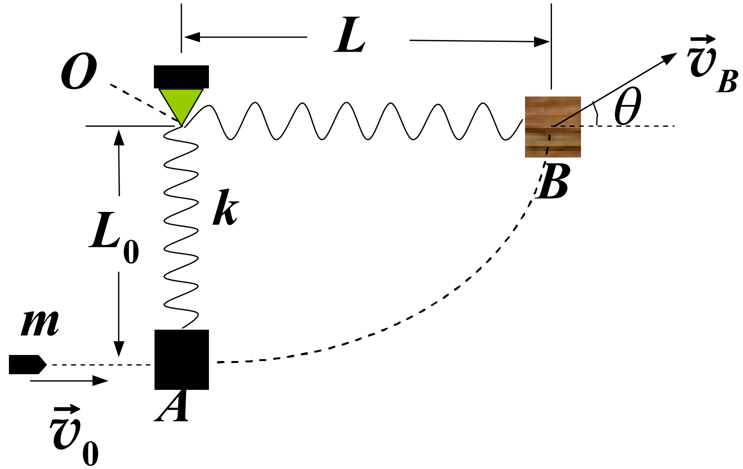
3)　弹性碰撞，动能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$$

4)　杆在上升过程中机械能 守恒

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 = mg\frac{l}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\theta=\frac{2}{3}$$



$$mv_0 = (m+M)v_A$$

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v_A^2 = \tfrac{1}{2}(m+M)v_B^2 + \tfrac{1}{2}k(L-L_0)^2$$

$$(m+M)v_A L_0 = (m+M)v_B L\sin\theta$$

$$v_B = \left[\frac{m^2}{(m+M)^2}v_0^2 - \frac{k(L-L_0)^2}{m+M}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \arcsin\frac{mL_0v_0}{L}\left[m^2v_0^2 - k(L-L_0)^2(M+m)\right]^{-\frac{1}{2}}$$