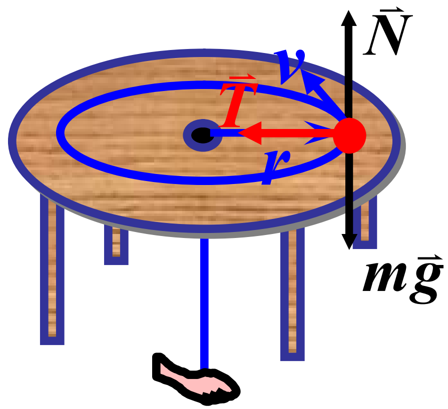
例、在光滑桌面上开一小孔，把系在轻绳一端的小球放在桌面上，绳的另一端穿过小孔而执于手中。设开始时小球以速率 v_0 作半径为 r_0 的圆周运动，然后向下缓慢拉绳使小球的转动半径减为 r，求这时小球的速率 v



解：

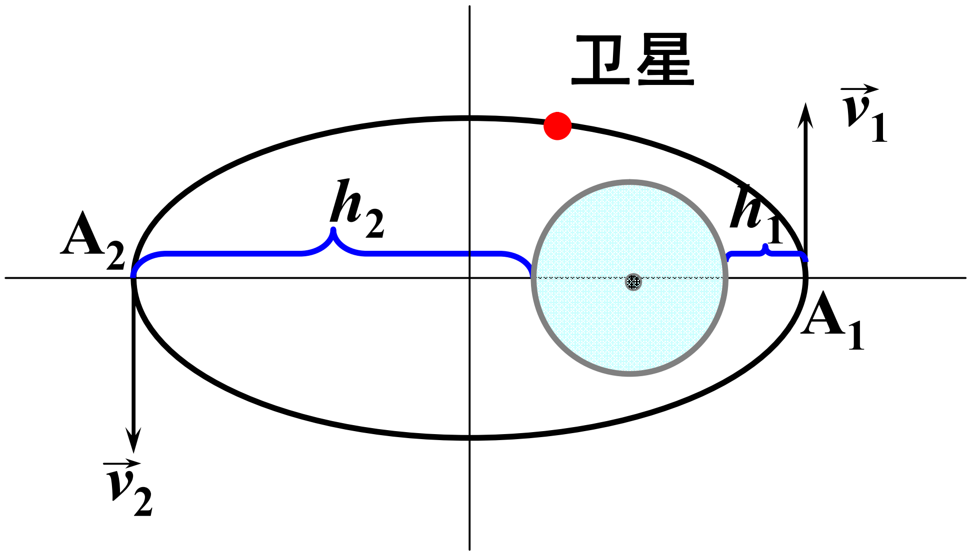
$$\vec{N} + m\vec{g} = 0 \qquad \vec{T} \,//\, (-\vec{r})$$

$$\vec{M} = 0 \qquad \vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

绳缓慢拉下，每一瞬时均可看作小球近似作圆周运动。

$$mv_0 r_0 = mvr \qquad v = \frac{v_0 r_0}{r}$$

例：卫星绕地球沿椭圆轨道运行，地球的中心位于椭圆的一个焦点上，地球R=6378km，卫星距地面的最近距离h_1=439km，最远距离h_2=2384km,卫星在近地点 A_1 的速率v_1=8.10km/s，求：卫星在远地点A_2的速率 v_2.



解：卫星运动中受地球引力，力矩为零，角动量守恒。

$$\vec{L}_{A1} = \vec{L}_{A2}$$

在A_1和A_2两点 $\vec{L}$ 方向相同

$$L_{A1} = L_{A2}$$

$$L_{A1} = (R + h_1) m v_1$$

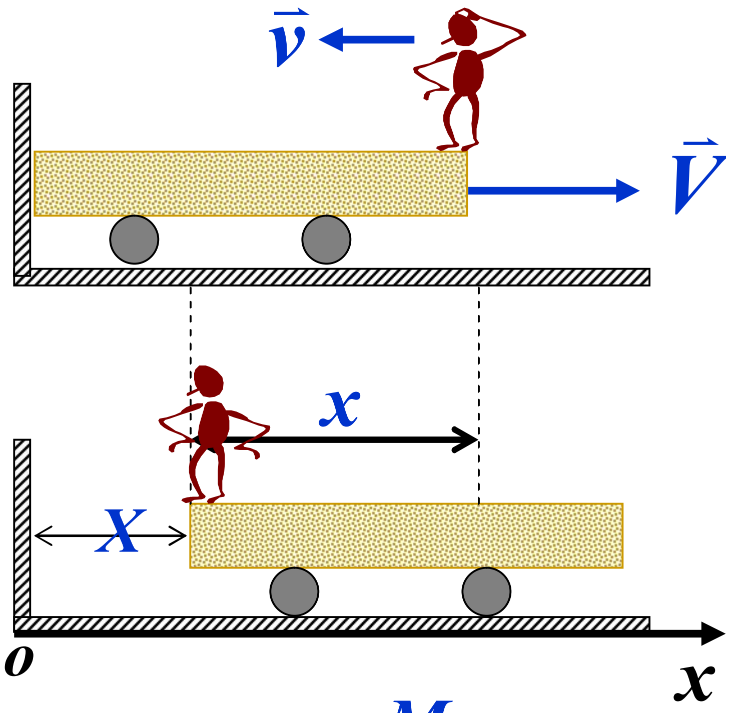
$$L_{A2} = (R + h_2) m v_2$$

$$m v_1 (R + h_1) = m v_2 (R + h_2)$$

$$v_2 = \frac{(R + h_1)}{(R + h_2)} v_1$$

例：水平光滑平面上有一小车，长度为 l，质量为M。车上站有一人，质量为 m，人、车原来都静止。若人从车的一端走到另外一端，问人和车各移动了多少距离？

解：人与车在水平方向受外力为零，水平方向动量守恒



$$0 = M\vec{V} + m\vec{v} \qquad \vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

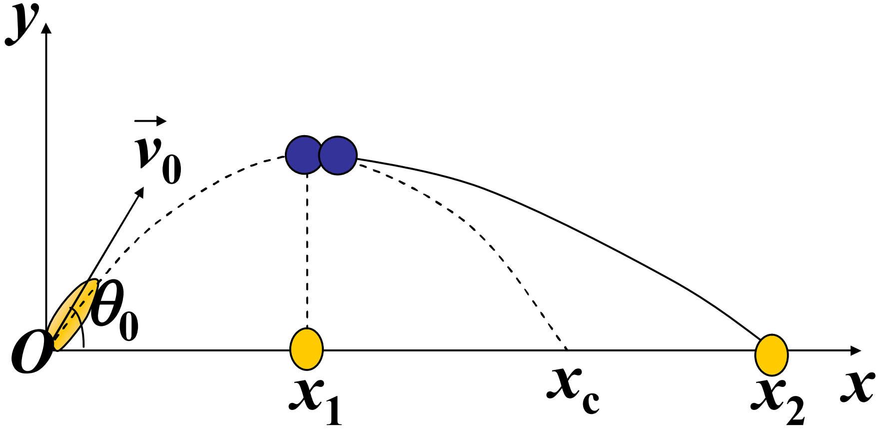
$$\vec{v}_{人地} = \vec{v}'_{人对车} + \vec{V}_{车地}$$

$$\vec{v}'_{人对车} = \vec{v} - \vec{V} = \vec{v} + \frac{m}{M}\vec{v} = \frac{M+m}{M}\vec{v}$$

$$v_{人对车} = \frac{M+m}{M}v \qquad l = \frac{M+m}{M}x \qquad x = \frac{M}{M+m}l$$

$$\int_0^t v_{人对车}\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{M+m}{M}v\,\mathrm{d}t \qquad X = l - x = \frac{m}{M+m}l$$

例 一枚炮弹发射的初速度为 $\vec{v}_0$，发射角为 θ_0，在它可能达到的飞行最高点炸裂为质量相等的两块，一块儿炸裂后竖直下落，另一块儿继续向前飞行。求这两块儿碎片着地点的位置。(忽略空气阻力)



解：根据质心运动定理，质心在重力的作用下作斜抛运动，其轨迹为一抛物线。

由斜抛的运动学知识，两碎片同时落地，

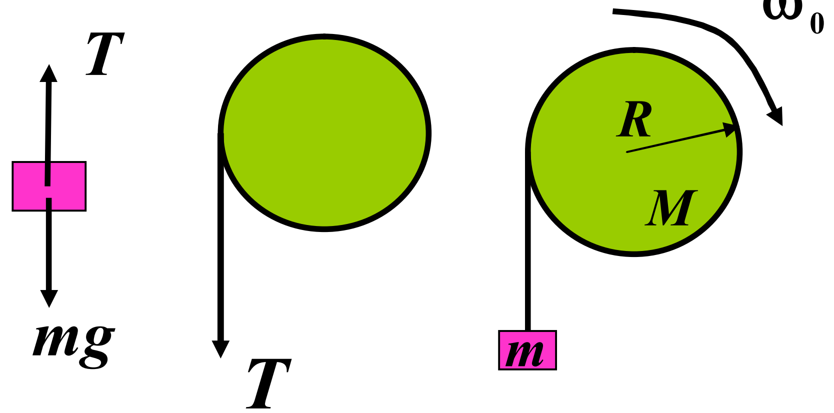
此时质心的位置为 $$x_c = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

竖直下落碎片落地点位置为 $$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

另一碎片的落地点为 $$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{\frac{x_c}{2} + x_2}{2} \qquad x_2 = \frac{3v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

例、一轴承光滑的定滑轮，质量M=2kg，半径R=0.1m，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系一质量为$m = 5\text{kg}$的物体，已知定滑轮的转动惯量为J=1/2 MR^2，其初角速度 $\omega_0 = 10\text{rad/s}$,方向垂直纸面向里。求（1）定滑轮的角加速度大小和方向，（2）定滑轮角速度变化到 $\omega = 0$ 时物体上升的高度；（3）当物体回到原来位置时，定滑轮角速度大小和方向。

(1) $$\begin{cases} T - mg = ma \\ -TR = J\beta \\ a = R\beta \end{cases}$$



$\beta = -81.7\text{rad/s}^2$ 垂直纸面向外

(2) $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\Delta\theta \quad h = R\Delta\theta = 6.12\times10^{-2}m$

（3）10 rad/s 垂直纸面向外.

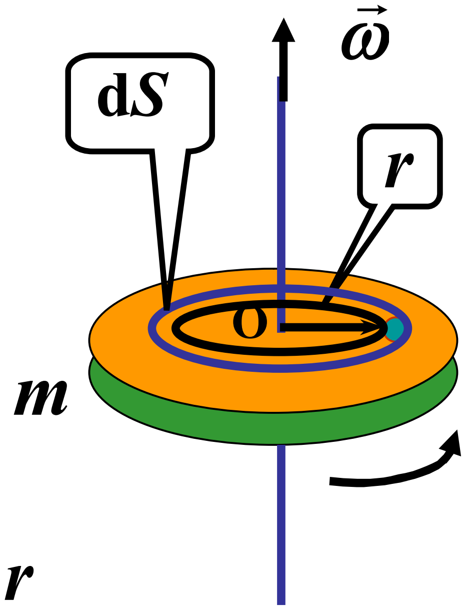
例. 已知质量为m、半径为R的均匀圆盘。初角速度为ω_0，绕中心轴逆时针转动。空气对圆盘表面单位面积的摩擦力正比其线速度，即 $\vec{f}=-k\vec{v}$ 。不计轴承处的摩擦。求：圆盘在停止转动时所转过的圈数 $N=$ ？

解：1. 刚体m为研究对象，取逆时针旋转时，ω方向为正

2. 分析运动

r不同时，f不同，力臂也不同

3. 需划分微元求 M



选半径为r、宽度为dr 的面积元dS，其上各质元具有相同的线速度 v

dS上阻力的大小 $\mathrm{d}F=f\mathrm{d}S=f\,2\pi r\mathrm{d}r$

考虑盘的上下表面，故dS 阻力矩为

$$\mathrm{d}M = -2\,r\,\mathrm{d}F$$

总阻力矩

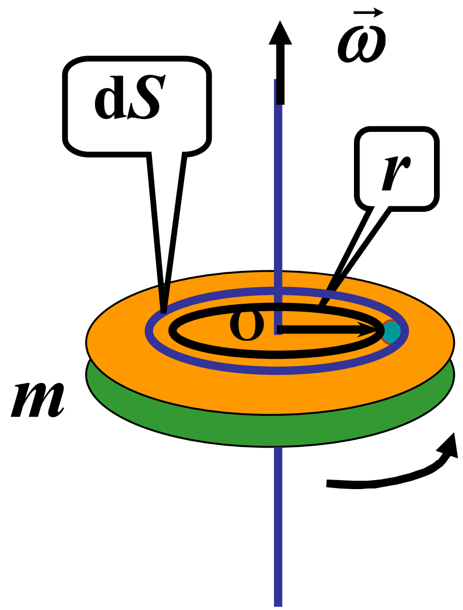
$$M = \int_m \mathrm{d}M = -\int_0^R 2r\,f\,2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$= -\int_0^R 2\,r\,kv\,2\pi\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= -\int_0^R 2\,r\,k\,r\,\omega\,2\pi\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= -4\pi\,k\omega\int_0^R r^3\mathrm{d}r = -k\,\omega\,\pi\,R^4$$

M 随 ω 变化



$$M = J\beta$$

$$M = J\beta = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{M = -k\omega\pi R^4}$$

$$-k\pi \cdot \omega \cdot R^4 = \left(\frac{1}{2}mR^2\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

两边积分 $$\int_{\omega_0}^{0} \mathrm{d}\omega = -\int_0^t \frac{2k\pi \cdot R^2}{m} \cdot \omega \cdot \mathrm{d}t$$

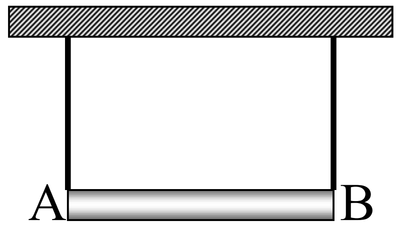
$$\int_{\omega_0}^{0} \mathrm{d}\omega = -\int_0^{\theta} \frac{2k\pi \cdot R^2}{m} \mathrm{d}\theta$$

$$-\omega_0 = -\frac{2k\pi \cdot R^2}{m}\theta$$

$$\theta = \frac{m\omega_0}{2k\pi \cdot R^2} \qquad \therefore N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{m\omega_0}{4\pi^2 \cdot kR^2}$$

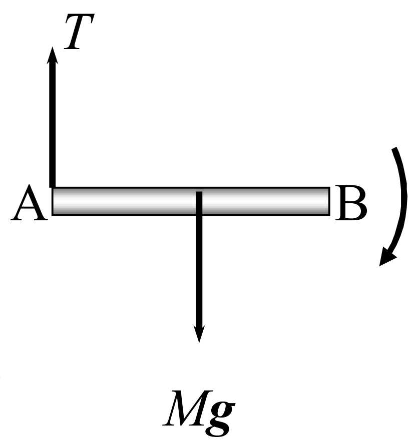
例．将一根质量为M，长为L的匀质细杆两端A、B用等长的线水平地悬挂在天花板上，若突然剪断其中一根，求此瞬间另一根绳内的张力有多大。

解：突然剪断B线，棒AB受重力和A线对它的拉力作用AB绕A点在竖直面内转动。



A线的拉力对A点的力矩为零

重力对A点的力矩为 $Mg\dfrac{L}{2}$



转动定律 $Mg\dfrac{L}{2}=J\beta$ $\quad J=\dfrac{1}{3}ML^2$

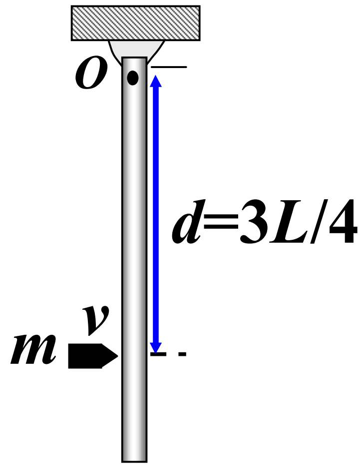
$$\beta=\frac{3g}{2L} \qquad a_C=a_t=r\beta=\frac{L}{2}\frac{3g}{2L}=\frac{3g}{4}$$

根据质心运动定理 $Mg-T=Ma_C$ $\quad T=\dfrac{Mg}{4}$

例. 均匀细杆长为 L，质量为M，由其上端的水平光滑轴吊起并静止。现有一质量为 m 的子弹以速率v 水平射入杆中而不复出。射入点在轴下 $d=3L/4$ 处。

求：子弹刚停在杆中时，杆的角速度ω。

解：子弹与杆碰撞时间很短，杆保持在原位不变，碰撞瞬间，系统所受合外力对转轴的力矩为零，角动量守恒

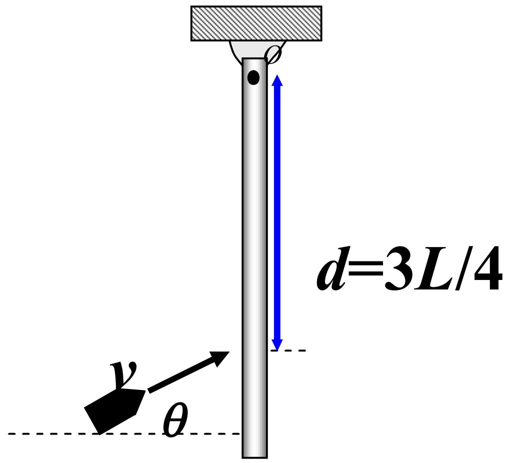


初始： 子弹的角动量大小 $mv(3L/4)$

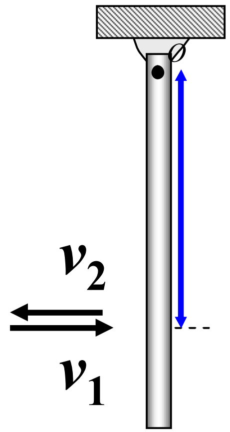
末态： $\left[\frac{1}{3}ML^2+m\left(\frac{3}{4}L\right)^2\right]\omega$

$$mv\times\frac{3}{4}L=\left[\frac{1}{3}ML^2+m\left(\frac{3L}{4}\right)^2\right]\omega \qquad \omega=\frac{3mv}{4\times\left[\frac{1}{3}ML+\frac{9}{16}mL\right]}$$

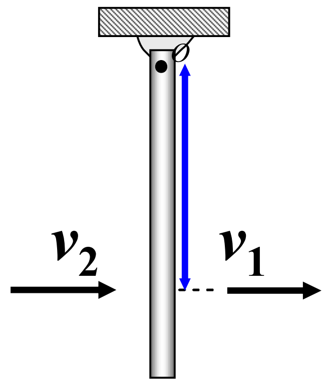
$$mv\cos\theta\,\frac{3L}{4} = \left[\frac{1}{3}ML^2 + \mathrm{m}\left(\frac{3L}{4}\right)^2\right]\omega$$



$$mv_1\frac{3L}{4} = -\mathrm{m}v_2\frac{3L}{4} + \frac{1}{3}ML^2\omega$$



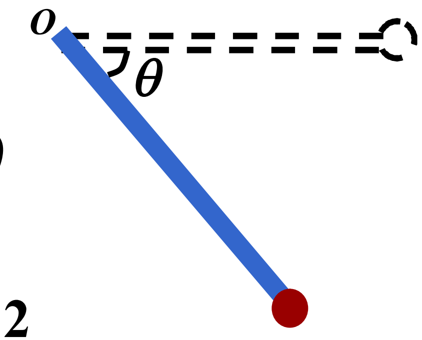
$$mv_1\frac{3L}{4} = m\,v_2\frac{3L}{4} + \frac{1}{3}ML^2\omega$$



例：质量为m，长度为L的匀质细棒，一端固定一质量为m的小球，另一端绕过O点的水平光滑轴在竖直平面内转动。初始时棒处于水平位置并静止。 求当棒在竖直面内转过θ 角时，它的角速度 ω 。

解：把细棒、小球和地球视为一个系统。系统机械能守恒

设：初始水平位置 $E_p = 0, \quad E_k = 0$



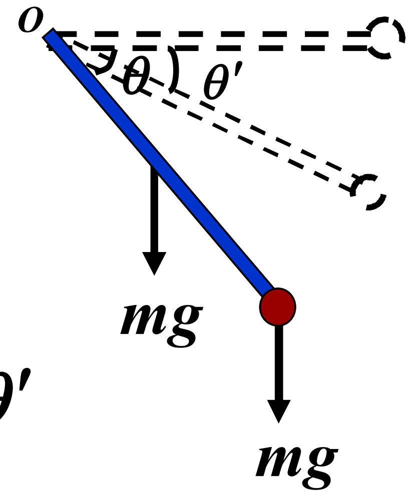
当棒转过θ角时 $E_p = -\frac{L}{2} mg\sin\theta - mgL\sin\theta$

$$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2 \qquad J = \frac{1}{3} mL^2 + mL^2 = \frac{4}{3} mL^2$$

$$\frac{1}{2} J\omega^2 - \frac{1}{2} mgL\sin\theta - mgL\sin\theta = 0$$

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g\sin\theta}{L}}$$

用动能定理求解 $W = E_{K2} - E_{K1}$



把细棒、小球视为一个系统

$$M = mg\frac{L}{2}\cos\theta' + mgL\cos\theta' = \frac{3}{2}mgL\cos\theta'$$

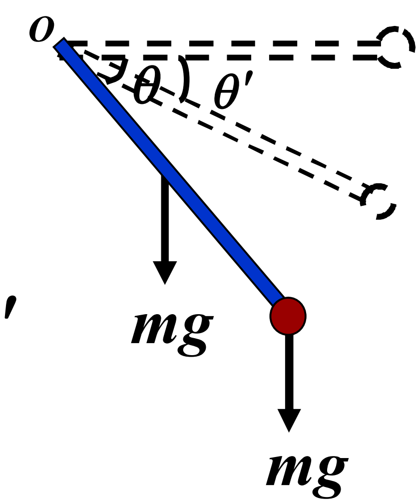
$$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta' = \frac{3}{2}mgL\cos\theta'\mathrm{d}\theta'$$

$$W = \int_0^\theta M\mathrm{d}\theta' = \frac{3}{2}mgL\int_0^\theta \cos\theta'\mathrm{d}\theta' = \frac{3}{2}mgL\sin\theta$$

$$W = E_{K2} - E_{K1} = \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad J = \frac{1}{3}mL^2 + mL^2 = \frac{4}{3}mL^2$$

转动定律 + 运动学

$$M_g = J\beta$$



$$M = mg\frac{L}{2}\cos\theta' + mgL\cos\theta' = \frac{3}{2}mgL\cos\theta'$$

$$\frac{3}{2}mgL\cos\theta' = J\beta$$

$$\beta = \frac{3mgL\cos\theta'}{2J} \qquad \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta'}\frac{d\theta'}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta'}$$

$$\omega d\omega = \frac{3mgL\cos\theta'}{2J}d\theta' \qquad \int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3mgL\cos\theta'}{2J}d\theta'$$

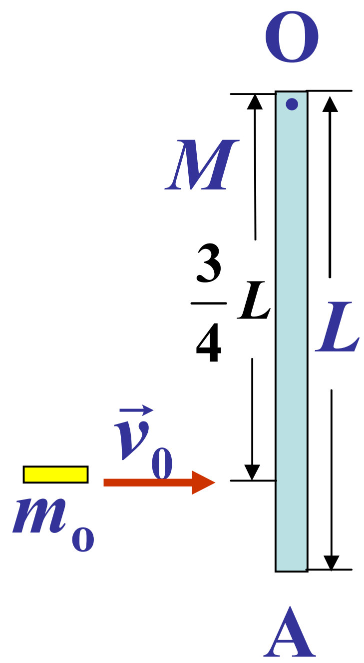
例. 均匀杆长 $L = 0.40\text{m}$，质量$M = 1.0\text{kg}$，由其上端的光滑水平轴吊起而静止。今有一质量 $m = 8.0\text{g}$ 的子弹以 $v = 200\text{m/s}$ 的速率水平射入杆中而不复出。射入点在轴下 $d = 3L/4$ 处。(1) 求子弹停在杆中时杆的角速度；(2) 求杆的最大偏转角。

解：(1) 子弹和杆系统对悬点O的角动量守恒

$$mv \times \frac{3}{4}L = \left[\frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2\right]\omega$$

$$\omega = \frac{3mv}{4\times\left[\frac{1}{3}ML + \frac{9}{16}mL\right]}$$

$$= 8.89\ \text{rad/s}$$

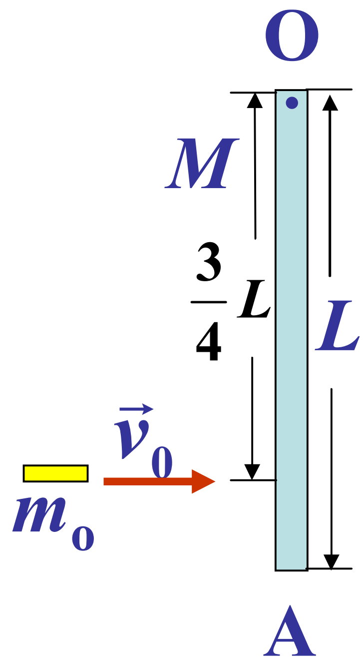


(2) 对杆、子弹和地球系统，由机械能守恒得

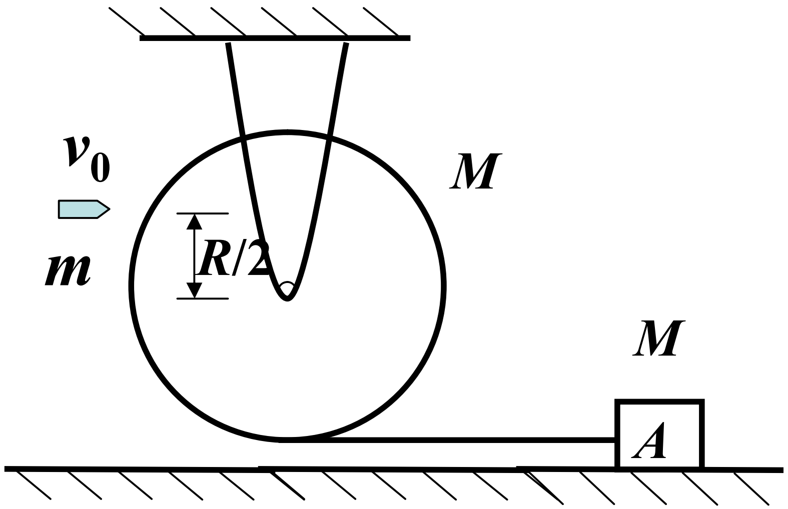
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2+m\left(\frac{3L}{4}\right)^2\right)\omega^2=\left(Mg\frac{L}{2}+mg\frac{3}{4}L\right)(1-\cos\theta)$$

$$\theta=\arccos\left[1-\frac{\left(\frac{1}{3}M+\frac{9}{16}m\right)L\omega^2}{\left(M+\frac{3}{2}m\right)g}\right]$$

$$=94^\circ 18'$$



例、一质量为M，半径为R的定滑轮上面绕有细绳，并沿水平方向拉着一个质量为M的物体A，现有一质量为m的子弹在距转轴$R/2$的水平方向以速度v_0射入并固定在定滑轮的边缘，使滑轮拖动A在水平面上滑动，忽略轴的摩擦力，求：1）子弹射入并固定在滑轮边缘后，滑轮开始转动的角速度ω， 2）若滑轮拖着A刚好转一圈而停止，求物体A与水平面间的摩擦系数 μ

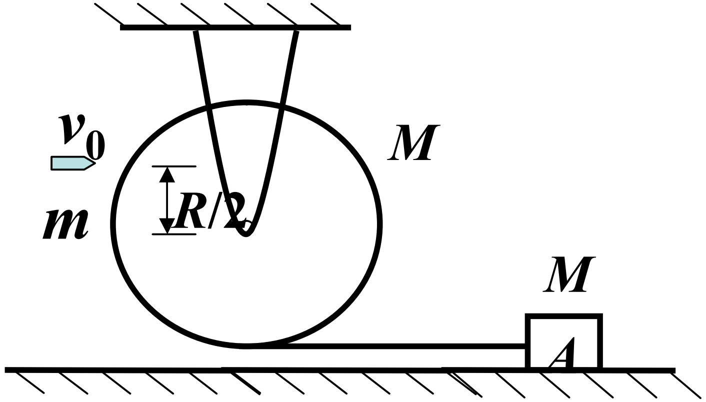


解：1）以m、滑轮、A为一系统，碰撞前后，外力矩远小于冲量矩，故角动量守恒

$$mv_0\frac{R}{2}=\left[mR^2+\frac{1}{2}MR^2+MR^2\right]\omega$$

$$mv_0\frac{R}{2}=\left[mR^2+\frac{1}{2}MR^2+MR^2\right]\omega$$

2）若滑轮拖着A刚好转一圈而停止，求物体A与水平面间的摩擦系数μ 。



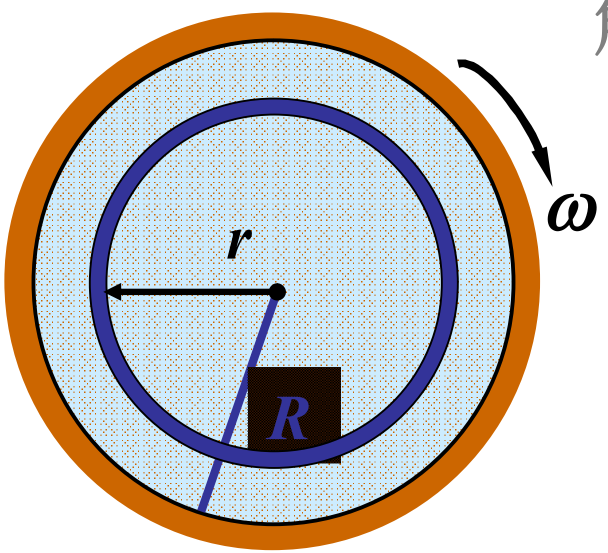
以m、滑轮、物体A为一系统。

应用动能定理

$$-\mu Mg2\pi R=0-\frac{1}{2}\left[mR^2+\frac{1}{2}MR^2+MR^2\right]\omega^2$$

$$\mu=\frac{m^2v_0^{\ 2}}{16\pi Mg(m+\frac{3}{2}M)R}$$

2-22、唱机的转盘绕通过盘心的固定竖直轴转动，唱片放上去后将受到转盘摩擦力作用而随转盘转动。唱片可看成是半径为R 的均匀圆盘，质量为m，唱片与转盘之间的滑动摩擦系数为μ_k，转盘原来以角速度ω 匀速转动。求：1）唱片刚放上去时它受到的摩擦力矩是多大？ 2）唱片达到角速度ω 需要多长时间？3）在这段时间内转盘保持角速度ω不变，驱动力矩共做了多少功？4）唱片获得了多大动能？



解：1） $\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r \qquad \mathrm{d}m = \dfrac{m}{\pi R^2}\mathrm{d}S$

$$\mathrm{d}M = r\mathrm{d}f = r\mu_k \mathrm{d}mg = r\mu_k g\frac{m}{\pi R^2}\mathrm{d}S$$

$$M = \int_0^R g\mu_k \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{2}{3}\mu_k mgR$$

2）唱片达到角速度ω 需要多长时间？

$$M=\frac{2}{3}\mu_k mgR \qquad \beta=\frac{M}{J}=\frac{4}{3}\frac{\mu_k g}{R} \qquad J=\frac{1}{2}mR^2$$

$$\omega=\beta t \qquad t=\frac{\omega}{\beta}=\frac{3R\omega}{4\mu_k g}$$

3）在这段时间内转盘保持角速度ω不变，驱动力矩共做了多少功？

由于转盘保持角速度ω不变，驱动力矩等于摩擦力矩

驱动力矩作功 $W=M\cdot\Delta\theta=M\cdot\omega t=\frac{1}{2}mR^2\omega^2$

转盘转过的角位移

4）唱片获得动能 $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{4}mR^2\omega^2$

例、二个容器中分别贮有氦气和氧气, 已知氦气的压强是氧气的1/2，氦气的容积是氧气的 2倍，求氦气内能是氧气的多少倍?

$$E=\frac{i}{2}\nu RT$$

解：已知：$\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{1}{2}$ $\qquad \dfrac{V_1}{V_2}=2$

$$pV=\nu RT$$

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{i_1}{2}\nu_1 RT_1}{\frac{i_2}{2}\nu_2 RT_2}=\frac{\frac{i_1}{2}p_1V_1}{\frac{i_2}{2}p_2V_2}=\frac{i_1}{i_2}=\frac{3}{5}$$

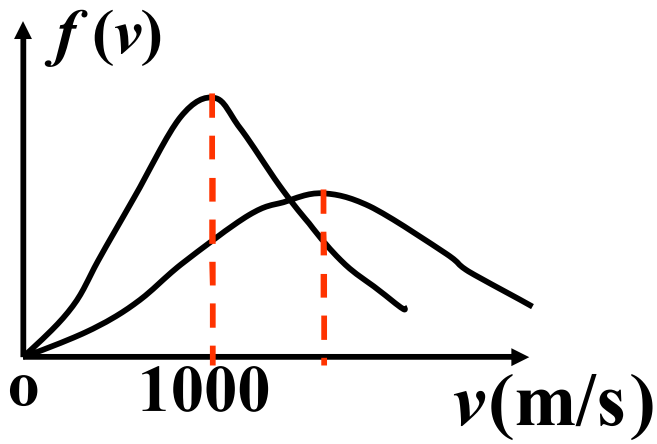
已知$f(v)$为麦克斯韦速率分布函数，v_p为分子的最概然速率．则 $\int_0^{v_p} f(v)\mathrm{d}v$ 表示________；速率 $v > v_p$ 的分子的平均速率表达式为_______。

解：表示$0 \to v_p$ 速率区间内的分子数占总分子数的百分比

$$\bar{v} = \frac{\int_{v_p}^{\infty} v f(v)\mathrm{d}v}{\int_{v_p}^{\infty} f(v)\mathrm{d}v}$$

例：图为H_2和He在同一温度下的麦克斯韦速率分布曲线，

氦分子的最概然速率______，　氢分子的最概然速率______。



解：

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\mathrm{mol}}}}$$

He　$M_{\mathrm{He,mol}} = 4,$　　$v_p = 1000[\mathrm{m/s}]$

H_2　$M_{\mathrm{H_2,mol}} = 2,$

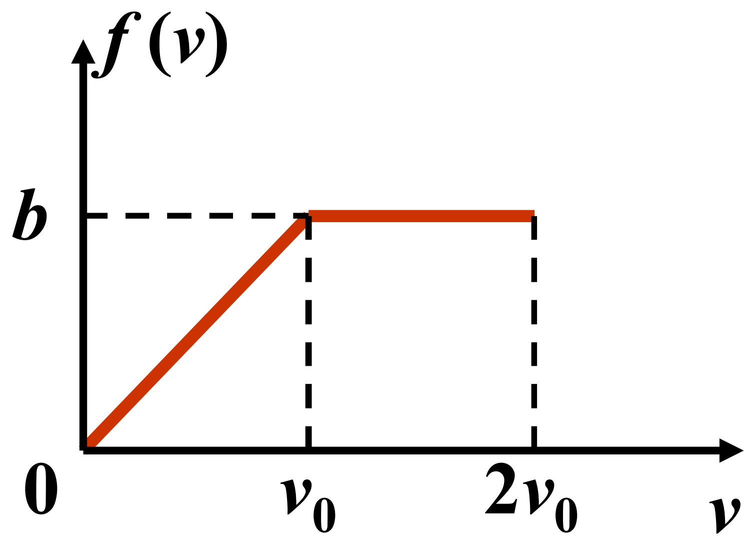
$$H_2 \quad v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\mathrm{H_2,mol}}}} = \sqrt{\frac{2\times 2RT}{M_{\mathrm{He,mol}}}} = \sqrt{2}\times 1000[\mathrm{m/s}]$$

例. 有N个假想的气体分子, 其速率分布如图所示, $v > 2v_0$ 的分子数为零。N, v_0 已知。

求：1. $b = ?$

2. 速率在 v_0--$2v_0$ 之间的分子数 $= ?$

3. 分子的平均速率 $= ?$

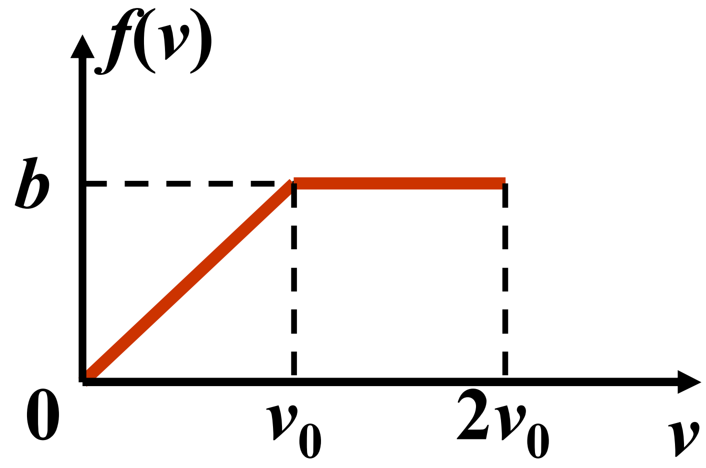


解: 写出 $f(v)$ 函数形式

$$
\begin{cases}
0 \le v < v_0, & f_1(v) = \dfrac{b}{v_0} v \\
v_0 \le v \le 2v_0, & f_2(v) = b \\
2v_0 < v < \infty, & f_3(v) = 0
\end{cases}
$$

(1) 求 $b=$ ？

由归一化条件



$$\int_0^{\infty} f(v)\cdot \mathrm{d}v = 1$$

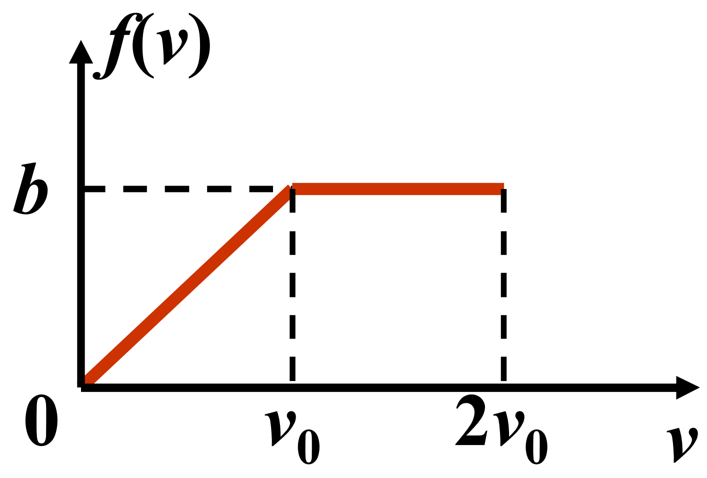
$$\int_0^{v_0} f_1(v)\cdot \mathrm{d}v + \int_{v_0}^{2v_0} f_2(v)\cdot \mathrm{d}v + \int_{2v_0}^{\infty} f_3(v)\cdot \mathrm{d}v = 1$$

$$\int_0^{v_0} \frac{b}{v_0} v\cdot \mathrm{d}v + \int_{v_0}^{2v_0} b\cdot \mathrm{d}v + 0 = 1$$

$$\frac{b}{v_0}\frac{v_0^2}{2} + b(2v_0 - v_0) = 1 \qquad b = \frac{2}{3v_0}$$

另法:由图可有面积 S $\quad S = \frac{1}{2}bv_0 + bv_0 = 1 \qquad \therefore b = \frac{2}{3v_0}$

(2) 求v_0 -- $2v_0$间的分子数 N_1



$$N_1 = \int_{v_0}^{2v_0} \mathrm{d}N = \int_{v_0}^{2v_0} N f_2(v) \cdot \mathrm{d}v$$

$$= N \cdot \int_{v_0}^{2v_0} b \,\mathrm{d}v$$

$$= Nbv_0 = N \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{v_0}{v_0} = \frac{2}{3} N$$

(3) 求平均速率

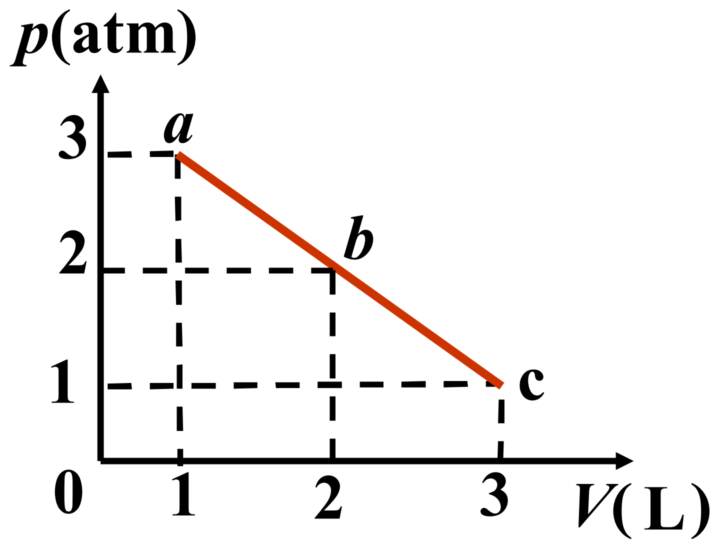
$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \cdot f(v) \cdot \mathrm{d}v$$

$$\bar{v} = \int_0^{v_0} v \cdot f_1(v) \cdot \mathrm{d}v + \int_{v_0}^{2v_0} v \cdot f_2(v) \cdot \mathrm{d}v + 0$$

$$= \int_0^{v_0} v \frac{bv}{v_0} \cdot \mathrm{d}v + \int_{v_0}^{2v_0} v \cdot b \cdot \mathrm{d}v = \frac{11}{9} v_0$$

例. 一定量的理想气体，由状态a 经 b 到 c，如图，abc 为一直线。求此过程中(1) 气体对外作的功；(2) 气体内能的增量；(3) 气体吸收的热量。

解：(1) 利用曲线下面积计算功



$$A=(\frac{1}{2}\times 2\times 2+1\times 2)$$

$$\times 1.013\times 10^{5}\times 10^{-3}=405.2\ \ (\mathrm{J})$$

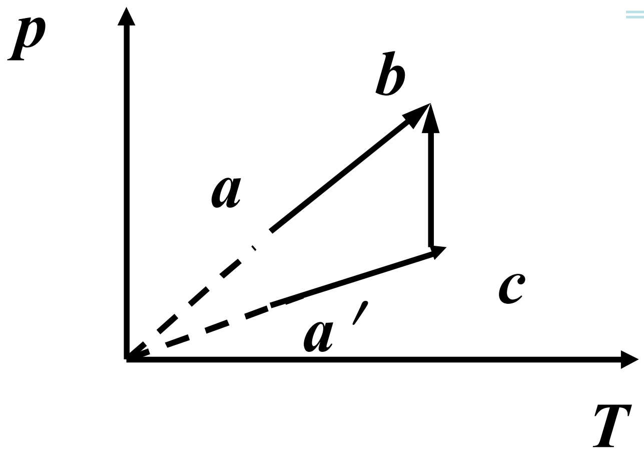
对外做正功

(2) 由图看出

$p_aV_a = p_cV_c \qquad \therefore\ T_a = T_c \qquad$ 内能增量 $\Delta E = 0$

(3) 由热一律 $\qquad Q=\Delta E + A = 405.2\ \mathrm{J}$

例：一定量的理想气体分别由（1）初态 a 经 ab 过程到达 b。(2) 由初态 a' 经 $a'cb$ 过程到达 b，则两过程中气体从外界吸收的热量 Q_1 ＞＜＝ Q_2



(1) $a\,b$ $\qquad \dfrac{p}{T}=c$ $\qquad$ 等体过程

$$Q_1=\Delta E=\nu\frac{i}{2}R\left(T_b-T_a\right) > 0$$

(2) $a'cb$ $\qquad a'c$ 等体，$c\,b$ 等温

$c\,b$ 等温

$$p_bV_b=p_cV_c$$

$$p_b > p_c \rightarrow V_b < V_c$$

$$Q_2=Q_{a'c}+Q_{cb}=\Delta E_{a'c}+A_{cb}$$

$$=\underbrace{\nu\frac{i}{2}R\left(T_c-T_{a'}\right)}_{Q_1}+\nu RT_b\ln\frac{V_b}{V_c}$$

$\wedge$

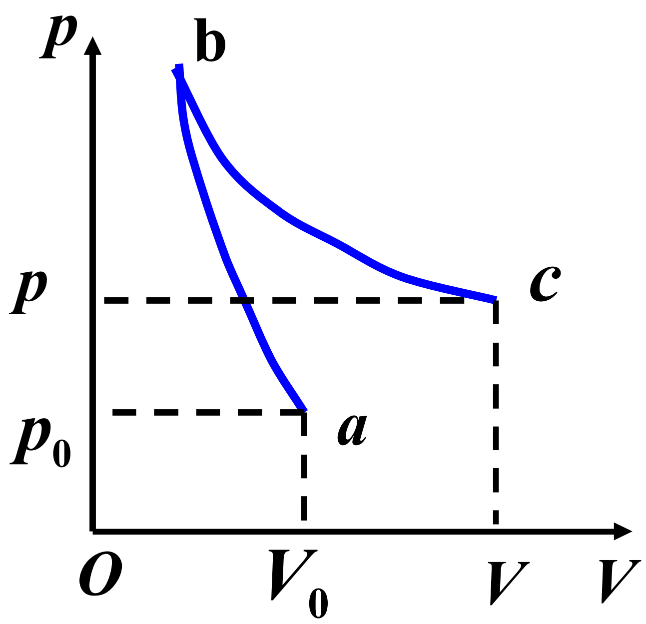
0

$$Q_1 > Q_2$$

例. 在标准状态下, 1mol单原子理想气体先经过一个绝热过程由$a \to b$, 再经过一个等温过程 $b \to c$, 最后压强和体积均增加一倍, 求：整个过程中系统吸收热量.

设：$a\,(p_0, V_0, T_0)$ $\quad b(\,p', V', T'\,)$

c（$p = 2p_0$, $V = 2V_0$, $\quad T = T'$）



解： $Q_{ab} = 0 \qquad Q = Q_{bc} = \nu RT \ln \dfrac{V}{V'}$

c: $\quad pV = RT \qquad T = 4T_0 = 1.092\times10^3\,[\mathrm{K}]$

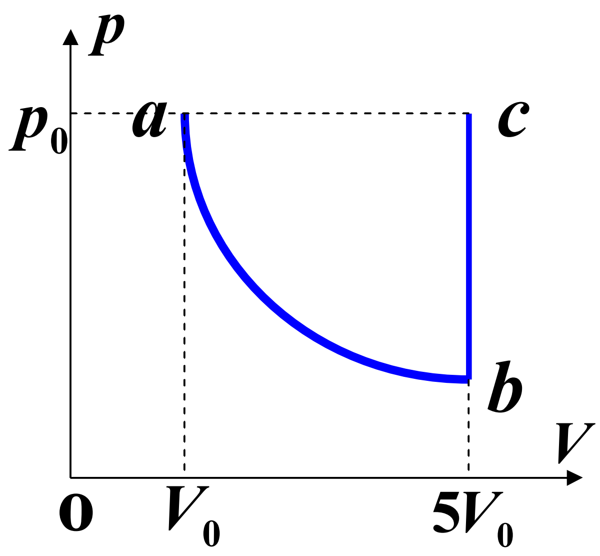
a_b 绝热 $\qquad T_0 V_0^{\gamma-1} = TV'^{(\gamma-1)}$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V'}\right)^{\gamma-1} \qquad \frac{1.092\times10^3}{273} = \left(\frac{22.4}{V'}\right)^{1.67-1} \qquad V' = 2.83\ [\mathrm{L}]$$

$$Q_{bc} = 8.31\times1.092\times10^3 \ln\frac{2\times22.4}{2.83} = 2.5\times10^4\,[\mathrm{J}]$$ 吸热

例： 3mol 理想气体，T_0=273K 等温膨胀到原来体积的五倍，再等容加热使其末态压强正好等于初态压强，整个过程气体吸热 8×10^4J， 试画P-V图，

求： 比热容比



设：a态：(p_0, V_0, T_0)　　b态：$(p, 5V_0, T_0)$　　c态：$(p_0, 5V_0, T)$

解：求 T　　$\dfrac{p_0V_0}{T_0}=\dfrac{p_0 5V_0}{T}$　　$T=5T_0$

等温：$Q_T=\nu RT_0\ln\dfrac{5V_0}{V_0}=1.09\times10^4$ [J]

等容：$Q_V=\nu C_{V,\mathrm{m}}(T-T_0)=12C_{V,\mathrm{m}}T_0=Q-Q_T$

$$C_{V,\mathrm{m}}=\frac{Q-Q_T}{12T_0}=\frac{(8-1.09)\times10^4}{12\times273}=21.1\,[\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}]$$

$$\gamma=(C_{V,\mathrm{m}}+R)/C_{V,\mathrm{m}}=1.39$$

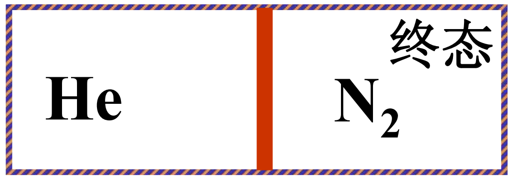
例: 绝热容器被分为两部分, 分别充有 1mol 的氦气(He) 和氮气 (N_2), 视气体为刚性分子理想气体。若活塞可导热、可滑动，摩擦忽略不计。

初始态：氦的压强 $P_{He} = 2$ 大气压，$T_{He} = 400K$，

氮的压强 $P_{N2} = 1$ 大气压，$T_{N2} = 300K$。

求：达到平衡态时, 两部分的状态参量。

解：对左右两系统应用热力学第一定律



He： $E'_{He} - E_{He} = Q_{He} - A_{He}$

N_2： $E'_{N_2} - E_{N_2} = Q_{N_2} - A_{N_2}$

总系统绝热，有 $Q = Q_{He} + Q_{N2} = 0$

活塞无摩擦滑动，有 $A_{He} = - A_{N2}$

$$C_{V_{He}}\left(T'_{He} - T_{He}\right) + C_{V_{N_2}}\left(T'_{N_2} - T_{N_2}\right) = 0$$

$$C_{V_{\mathrm{He}}}\left(T'_{\mathrm{He}}-T_{\mathrm{He}}\right)+C_{V_{\mathrm{N}_2}}\left(T'_{\mathrm{N}_2}-T_{\mathrm{N}_2}\right)=0$$

$$C_{V_{\mathrm{He}}}=\frac{3}{2}R,\qquad C_{V_{\mathrm{N}_2}}=\frac{5}{2}R$$

$$T'_{\mathrm{He}}=T'_{\mathrm{N}_2}=T'=337.5\mathrm{K}$$

$$V_{\mathrm{He}}+V_{\mathrm{N}_2}=V'_{\mathrm{He}}+V'_{\mathrm{N}_2}$$

$$\frac{RT_{\mathrm{He}}}{p_{\mathrm{He}}}+\frac{RT_{\mathrm{N}_2}}{p_{\mathrm{N}_2}}=\frac{RT'}{p'}+\frac{RT'}{p'}$$

$$p'=1.35\,[\mathrm{atm}]$$

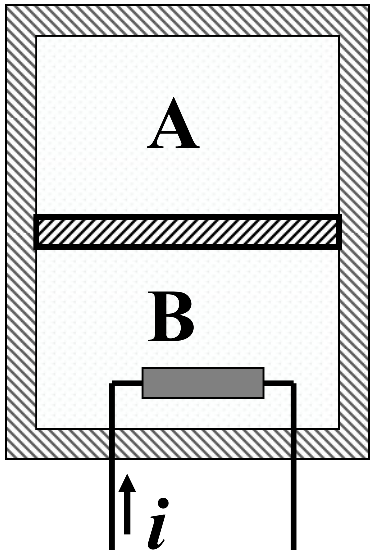
$$V'_{\mathrm{He}}=V'_{\mathrm{N}_2}=\frac{RT'}{p'}=\frac{V}{2}$$

例、总体积为40L的绝热容器，中间用一隔热板隔开，隔板重量忽略，可以无摩擦的自由升降。A、B两部分各装有1mol的氮气（视为理想气体），它们最初的压强是1.013×10^5 Pa，隔板停在中间，现在使微小电流通过B中的电阻而缓缓加热，直到A部分气体体积缩小到一半为止，求在这一过程中：

(1) B中气体的过程方程，以其体积和温度的关系表示；

(2) 两部分气体各自的最后温度；

(3) B中气体吸收的热量？



解：1）求 B 中气体过程方程，以 V, T 表示

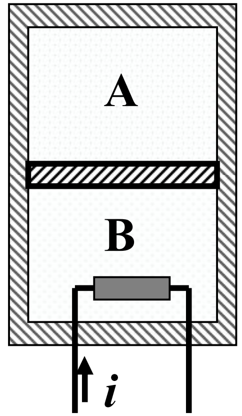
A 为准静态绝热过程，且 $p_A = p_B$

$$p_A V_A^\gamma = p_{A1} V_{A1}^\gamma = 1.013\times10^5\times0.02^{1.4} = 4.2\times10^2$$

$$p_B\left(V - V_B\right)^\gamma = 4.2\times10^2 \qquad p_B V_B = RT_B$$

上两式消去 p_B：$$T_B\left(0.04 - V_B\right)^\gamma = 51V_B$$

$$T_B(0.04-V_B)^{\gamma}=51V_B$$



2） A, B 最后温度

$$T_{A2}=T_{A1}\left(\frac{V_{A1}}{V_{A2}}\right)^{\gamma-1}=\frac{p_{A1}V_{A1}}{R}\left(\frac{V_{A1}}{V_{A2}}\right)^{\gamma-1}=322\mathrm{K}$$

$$T_{B2}=\frac{51V_{B2}}{(0.04-V_{B2})^{1.4}}=965\ \mathrm{K}$$

3）B 中气体吸收的热量 $p_B(V-V_B)^{\gamma}=4.2\times10^2$

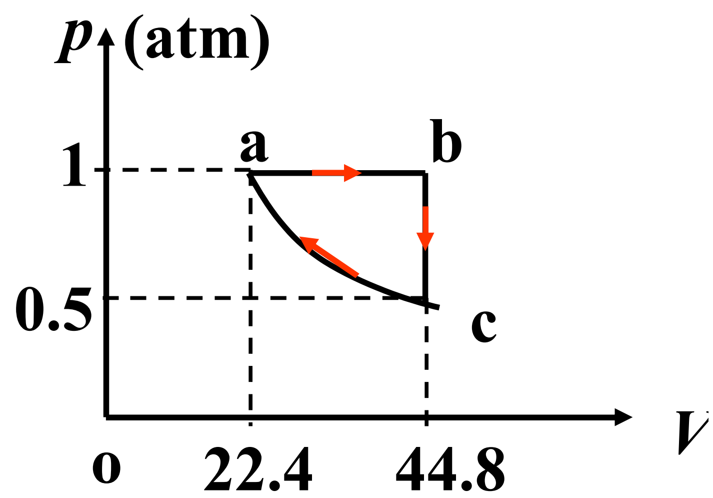
$$Q_B=\Delta E+A=\frac{i}{2}R(T_{B2}-T_{B1})+\int_{V_{B1}}^{V_{B2}}p_B\mathrm{d}V_B$$

$$=\frac{i}{2}R\left(T_{B2}-\frac{p_{B1}V_{B1}}{R}\right)+\int_{V_{B1}}^{V_{B2}}\frac{4.2\times10^2}{(0.04-V_B)^{\gamma}}\mathrm{d}V_B=1.66\times10^4J$$

例：1mol 双原子理想气体由状态 a 等压膨胀到状态 b，再等容降压到状态 c，再等温压缩回到 a.

求 1) 循环过程系统对外做的功

2) 各过程吸收热量



$$p_a = 1\text{atm}, V_a = 22.4\text{L}, T_a = 273\,\text{K}$$

$$V_b = 44.8\text{L}, T_b = 546\,\text{K}$$

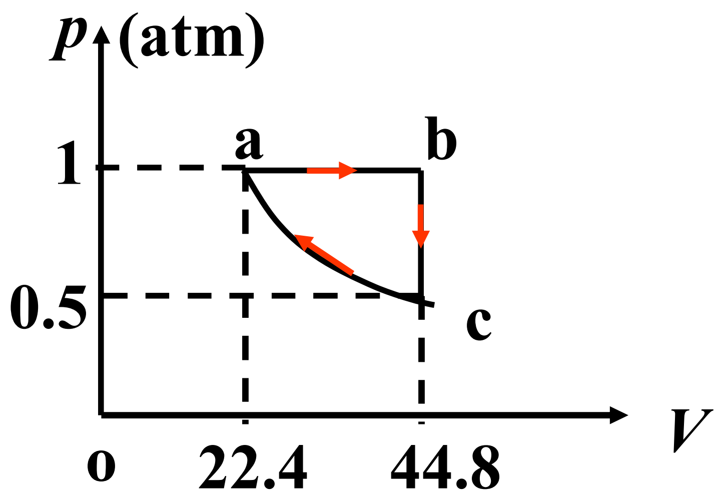
解 1） $A_{ab} = P_a(V_b - V_a)$

$$= 1.013\times10^5 \times 22.4\times10^{-3} = 2.269\times10^3 [J] \qquad A_{bc} = 0$$

$$A_{ca} = \nu RT\ln\frac{V_a}{V_c} = 1\times8.31\times273\ln\frac{22.4}{44.8} = -1.573\times10^3 [J]$$

$$A = A_{ab} + A_{bc} + A_{ca} = 6.96\times10^2 [J]$$

2) 各过程吸收热量



$$Q_{ab} = \nu C_{p,m}\Delta T = \frac{7}{2}R(546-273)$$

$$= 7.94 \times 10^{3}[J]$$

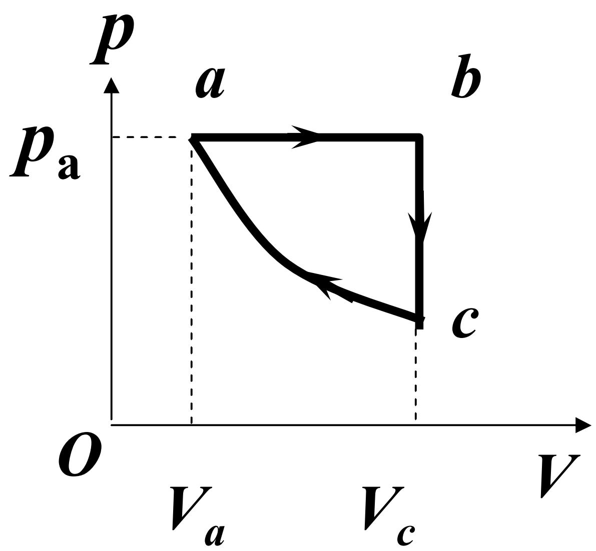
$$Q_{ab} = A_{ab} + \Delta E_{ab} = 2.269\times 10^{3} + \nu\frac{i}{2}R\Delta T$$

$$Q_{bc} = \nu C_{V}\Delta T = \frac{i}{2}R\Delta T = \frac{5}{2}\times 8.31(T_{c} - T_{b})$$

$$= \frac{5}{2}\times 8.31(273-546) = -5.67\times 10^{3}[J]$$

$$Q_{ca} = A_{ca} = -1.57\times 10^{3} = -1.57\times 10^{3}[J]$$

例：如图为理想气体的循环过程，$c\rightarrow a$ 是绝热过程，P_a，V_a，V_c 已知，比热比为 γ，求此循环效率。



解：$$\eta=\frac{A}{Q_1}=1-\frac{|Q_2|}{Q_1}$$

a b $\quad Q_1=\nu C_{p,\mathrm{m}}(T_b-T_a)$

$$=\frac{C_{p,m}}{R}(p_bV_b-p_aV_a)=\frac{C_{p,m}}{R}p_a(V_c-V_a)$$

b c $\quad Q_2=\nu C_{V,\mathrm{m}}(T_\mathrm{c}-T_b)$

$$=\frac{C_{V,m}}{R}(p_cV_c-p_bV_b)$$

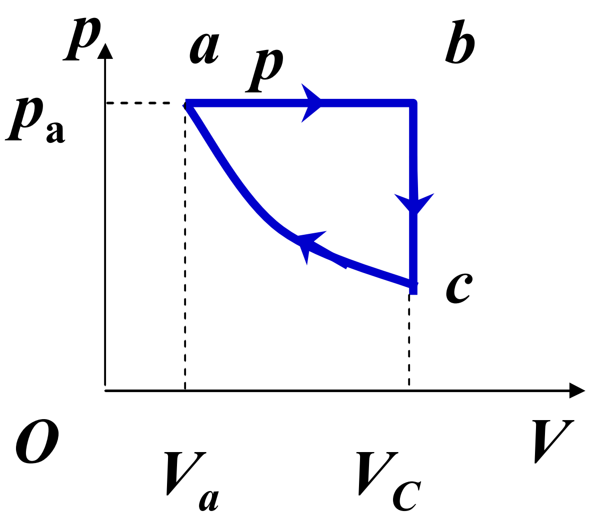
$$=\frac{C_{V,m}}{R}(p_cV_c-p_aV_c)=\frac{C_{V,m}}{R}\left(p_a\frac{V_a^\gamma}{V_c^{\gamma-1}}-p_aV_c\right)$$

$$p_cV_c^\gamma=p_aV_a^\gamma$$

$$p_cV_c=p_a\frac{V_a^\gamma}{V_c^{\gamma-1}}$$

$$Q_1 = \frac{C_{p,m}}{R} p_a (V_c - V_a)$$

$$Q_2 = \frac{C_{V,m}}{R} \left(p_a \frac{V_a^{\gamma}}{V_c^{\gamma-1}} - p_a V_c \right)$$



$$|Q_2| = \frac{C_{V,m}}{R} p_a \left(V_c - \frac{V_a^{\gamma}}{V_c^{\gamma-1}} \right)$$

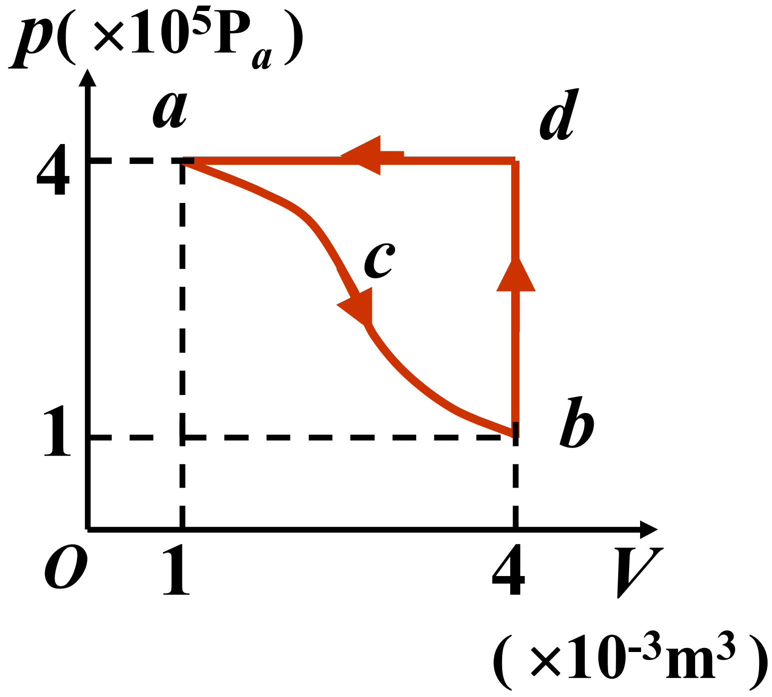
$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{C_{V,m}}{R} p_a \left(V_c - \frac{V_a^{\gamma}}{V_c^{\gamma-1}} \right)}{\frac{C_{p,m}}{R} p_a (V_c - V_a)}$$

$$= 1 - \frac{C_{V,m}}{C_{p,m}} \frac{1 - \frac{V_a^{\gamma}}{V_c^{\gamma}}}{1 - \frac{V_a}{V_c}} = 1 - \frac{1 - \frac{V_a^{\gamma}}{V_c^{\gamma}}}{\gamma \left(1 - \frac{V_a}{V_c} \right)}$$

例. 一定量的理想气体经历 acb 过程时吸热 $200\,J$，

问：经历 $acbda$ 过程时，吸热为多少？

解： $Q_{acbda}=Q_{acb}+Q_{bd}+Q_{da}$



$$Q_{bd}=\nu C_{V,m}(T_d-T_b)$$

$$Q_{da}=\nu C_{p,m}(T_a-T_d)$$

$$=\nu C_{V,m}(T_a-T_d)+A_{da}$$

由图 $p_a V_a=p_b V_b \quad \therefore \ T_a=T_b$

$$Q_{acbda}=Q_{acb}+\nu C_{V,m}(T_d-T_b)+\nu C_{V,m}(T_a-T_d)+A_{da}$$

$$=Q_{acb}+A_{da}=200-(4\times 3)\cdot 10^2=-1000(J)$$

例：1 kg 0 ºC 的冰与恒温热库（$t = 20$ ºC ）接触，
求：冰全部溶化成水（$t = 20$ ºC ）的熵变？
（冰熔解热$\lambda = 334$J/g ）， 求冰和水微观状态数的比？

求冰融化成 0°C 水的熵变ΔS_1：

设想冰与 0°C 恒温热源接触，此为可逆吸热过程。

$$\Delta S_1 = \int \frac{đQ}{T} = \frac{Q}{T} = \frac{m\lambda}{273} = \frac{334 \times 10^3}{273} = 1.22 \times 10^3 (\mathrm{J/K})$$

求0°C——20 °C 水的熵变ΔS_2 ：

设想水与一系列热库接触，进行等温热传导，可逆过程

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{đQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cm \ \mathrm{d}T}{T} = c\ m \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$= 1 \times 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{293}{273} = 0.30 \times 10^3 \ (\mathrm{J/K})$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 1.52 \times 10^3 \, (\mathrm{J/K})$$

冰和水微观状态数目比 ？ $S = k \ln \Omega$

$$\Delta S = k \ln \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \qquad \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = e^{\Delta S / k} = e^{\Delta S \times 0.72 \times 10^{23}}$$

热库($t = 20\ ^{\circ}\mathrm{C}$) 的熵变： 设计等温放热过程（可逆）

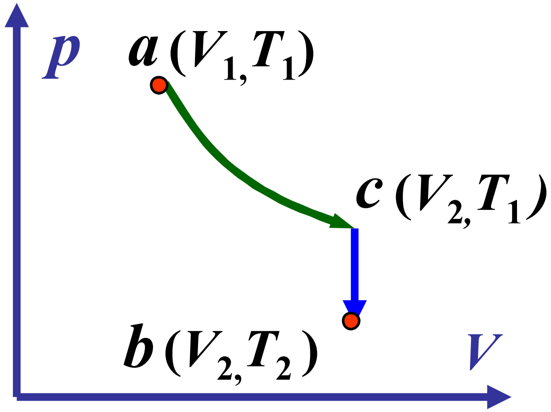
$$\Delta S_3 = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{Q}{T_2} = -\frac{m\lambda + cm(t_2 - t_1)}{T_2}$$

$$= -\frac{334 + 4.18 \times (20 - 0)}{293} \times 10^3 = -1.42 \times 10^3 \ (\mathrm{J/K})$$

冰与热库总熵变化 $\Delta S_{总} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 1.0 \times 10^2 (\mathrm{J} / \mathrm{K})$

例：1mol 理想气体从初态 $a\,(V_1,\ T_1)$ 经某过程变到末态 $b\,(V_2,\ T_2)$，求熵变。(设C_V、C_p 均为常量)。

设计一可逆过程进行计算：



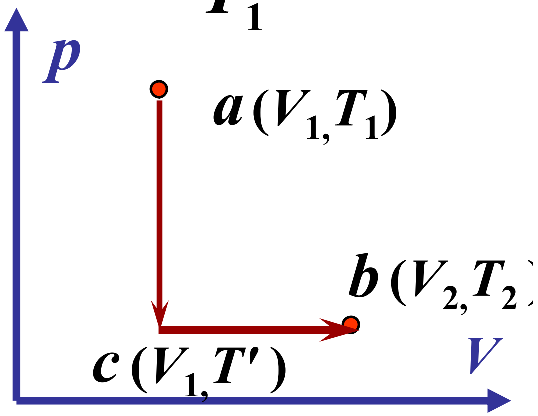
从$a\,(V_1,\ T_1)$ 等温膨胀至 $c\,(V_2,\ T_1)$；

从$c\,(V_2,\ T_1)$ 等容变化至 $b\,(V_2,\ T_2)$。

解：a→c $\displaystyle \Delta S_{a\to c}=\int_a^c\frac{\mathrm{d}Q}{T}=\int_{V_1}^{V_2}\frac{p\,\mathrm{d}V}{T}=\int_{V_1}^{V_2}\frac{\nu R\,\mathrm{d}V}{V}=R\ln\frac{V_2}{V_1}$

c →b $\displaystyle \Delta S_{c\to b}=\int_c^b\frac{\mathrm{d}Q}{T}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{\nu C_V\,\mathrm{d}T}{T}=C_V\ln\frac{T_2}{T_1}$

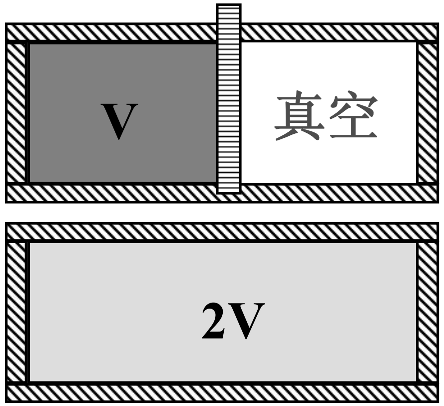
总熵变 $\displaystyle \Delta S=C_V\ln\frac{T_2}{T_1}+R\ln\frac{V_2}{V_1}$



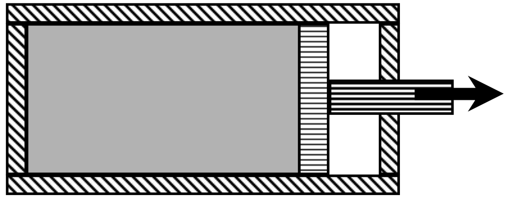
适用于1mol理想气体任意两状态间熵变

例. 证明理想气体绝热自由膨胀过程熵增加

摩尔数ν，初态：V, T；末态：$2V, T$



设计一可逆的等温膨胀过程连接初末状态，此时系统吸热并对外做功



解：对可逆等温膨胀，$đQ = p\mathrm{d}V$

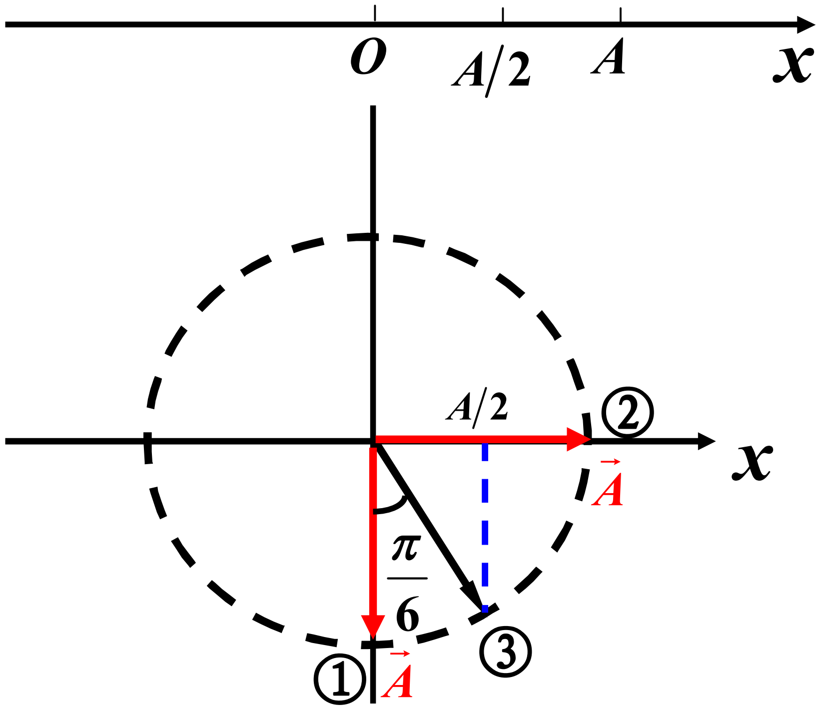
$$\Delta S = \int_1^2 \frac{đQ}{T} = \int_V^{2V} \frac{p\mathrm{d}V}{T} = \int_V^{2V} \frac{\nu R\mathrm{d}V}{V} = \nu R\ln 2 > 0$$

绝热自由膨胀过程熵增加，符合热二律。

例：已知质点向 x轴正向振动，振幅为 A

质点由 $x=0$运动到 $x=A$，所用时间为 2秒

求：质点由 $x=0$运动到 $x=\dfrac{A}{2}$，用时为多少 $t=?$



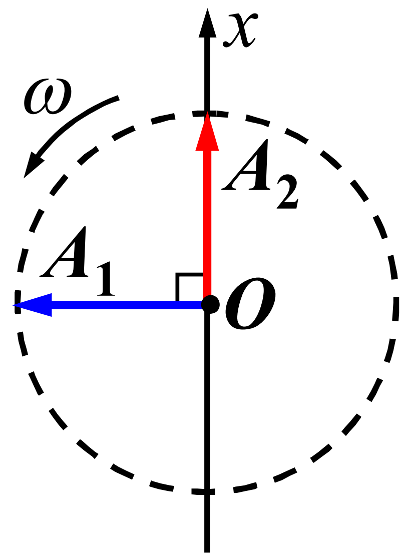
$$x=0\rightarrow A \qquad \Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$x=0\rightarrow \frac{A}{2} \qquad \Delta\varphi=\frac{\pi}{6}$$

有 $t=\dfrac{2}{\frac{\pi}{2}}\times\dfrac{\pi}{6}$ $\qquad t=\dfrac{2}{3}s$

例、两个谐振子作同频率同振幅的简谐运动。第一个振子振动表达式 $x_1= A\cos(\omega t +\varphi)$，当第一个振子从振动的正方向回到平衡位置时，第二个振子恰在正方向位移的端点。求（1）第二个振子的振动表达式和二者的相位差；（2）若 t =0 时，$x_1= -A/2$，并向 x 负方向运动，画出二者的旋转矢量图及 x - t 曲线。

解：（1）由已知条件画出旋转矢量图，



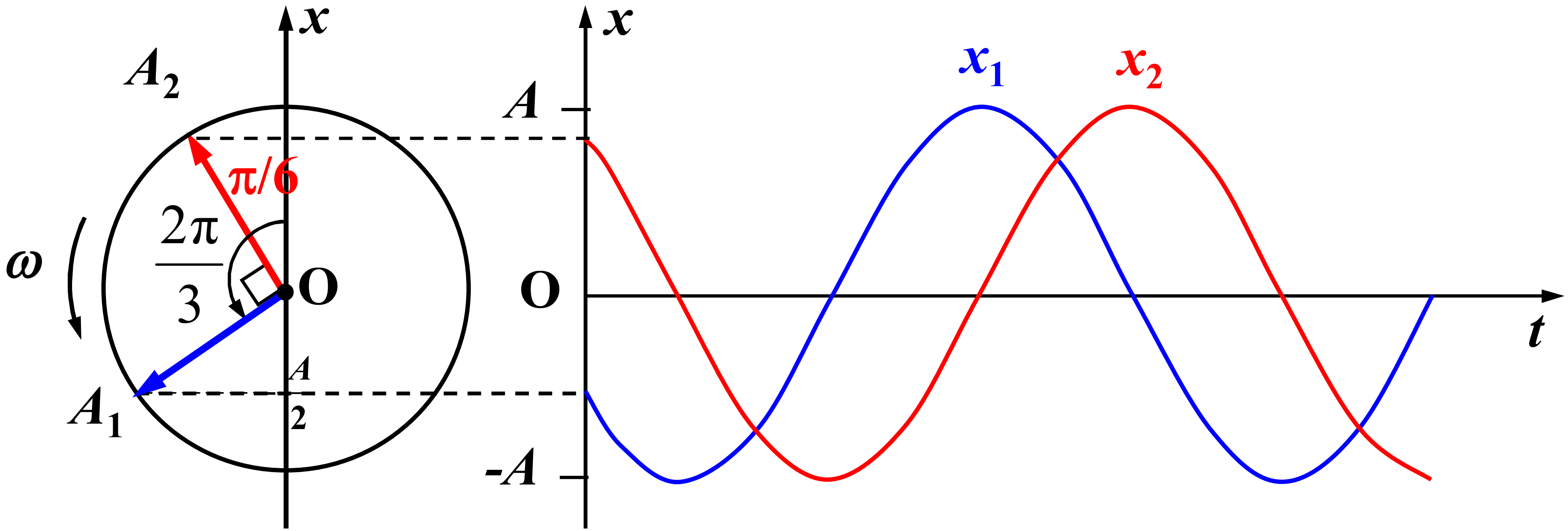
第二个振子比第一个振子相位落后 $\pi/2$，

第二个振子振动函数 $x_2= A\cos(\omega t +\varphi - \pi/2)$

(2) 若 $t=0$ 时，$x_1=-A/2$，并向 x 负方向运动，画出二者的旋转矢量图及 $x-t$ 曲线。

$$\varphi_1 = 2\pi/3 \qquad \varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2 = \pi/6$$

$$x_1 = A\cos(\omega t + 2\pi/3), \qquad x_2 = A\cos(\omega t + \pi/6)$$

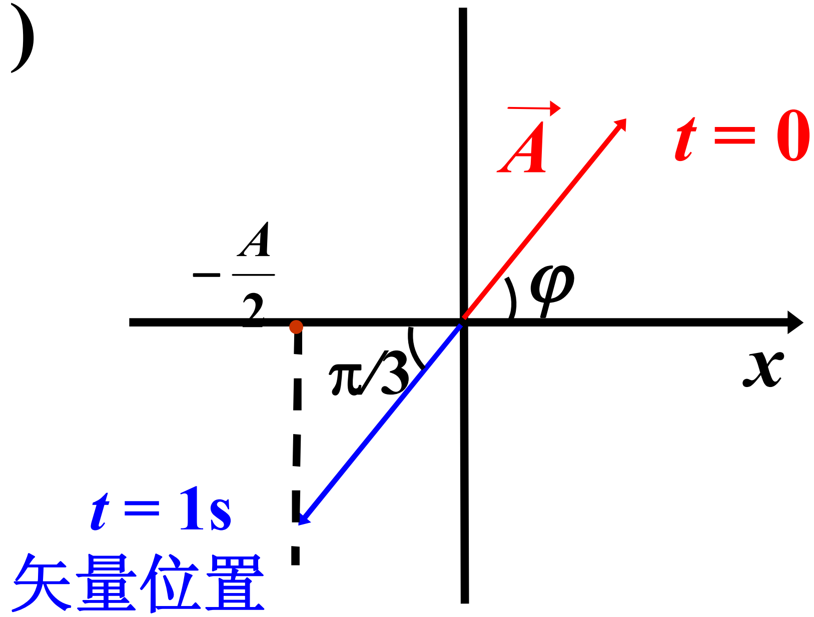


[例]　已知一简谐运动　$A = 4$ cm，$\nu = 0.5$ Hz，$t = 1$s 时，$x = -2$cm 且向 x 正向运动，写出振动表达式。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

由题意，$T = 2$ s

$$\therefore x = 4\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})\ \text{cm}$$



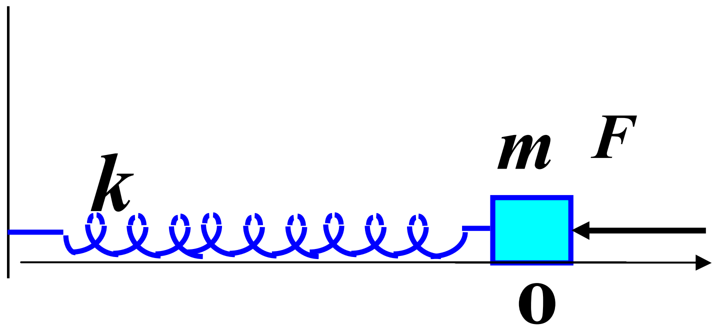
另一种解法　$\omega t + \varphi = \omega \times 1 + \varphi = \pi + \pi/3$

$$\omega = \pi \qquad \varphi = \pi/3$$

例：如图，一光滑水平面上放一弹簧振子 ，重物静止在平衡位置上，设以一水平恒力F 向左作用于物体，使之由平衡位置向左运动了0.05m, 此后撤去F，当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。

已知：k =24N/m, F = 10N, m = 6kg

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$



解： $W = FS = \frac{1}{2}kA^2$

$$\frac{1}{2}kA^2 = FS = 10\times 0.05 = 0.5$$

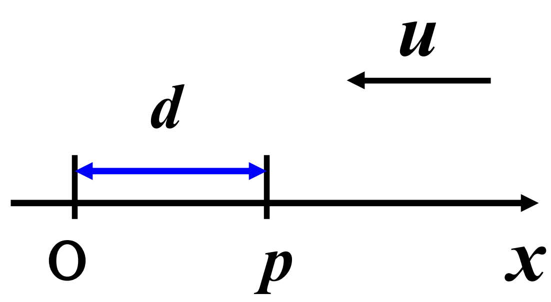
$$A = 0.204\ \text{m} \qquad \varphi = \pi \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$$

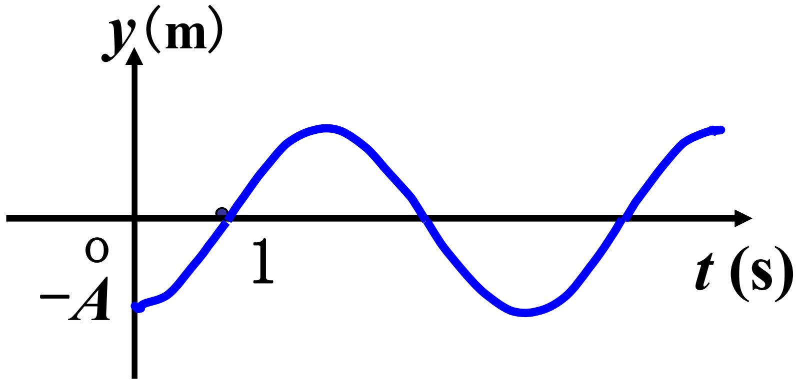
$$x = 0.204\cos(2t+\pi)$$

例：一平面简谐波沿 x 轴的负方向传播，波长为 λ ，已知 p 处质点的振动规律如左图所示，

（1）求 p 处质点的振动方程；

（2）求此波的波函数；





解：由图 $T=4$， $\omega=\dfrac{\pi}{2}$

（1） $y_p=A\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t+\pi\right)$

（2）波函数

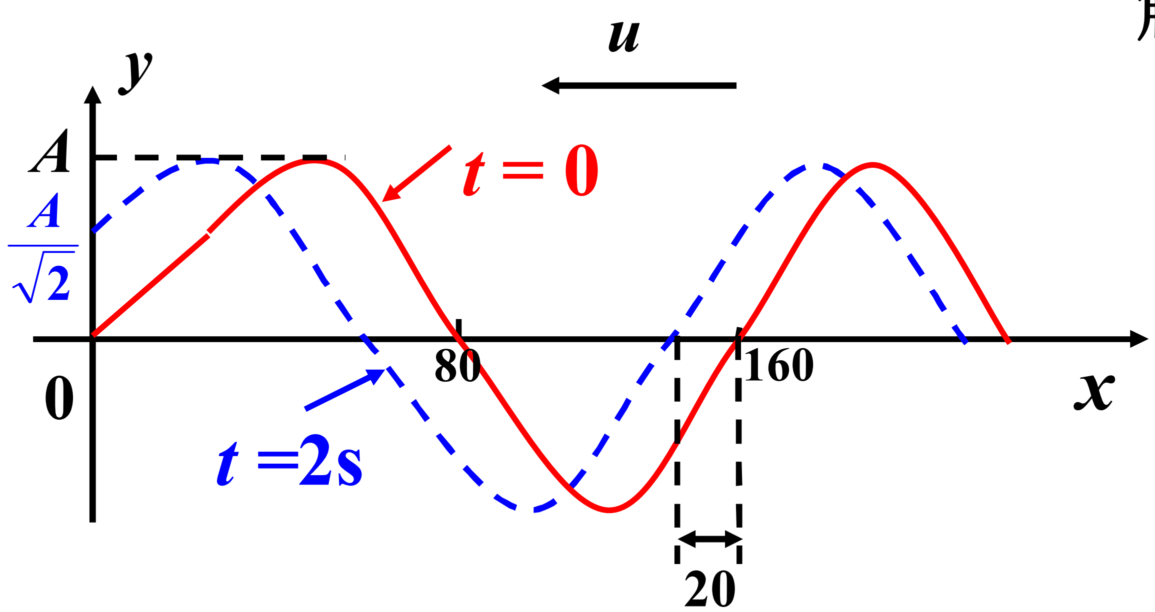
$$\varphi_x-\varphi_p=\frac{x-d}{\lambda}\cdot 2\pi$$

$$y=A\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\pi+\frac{x-d}{\lambda}\cdot 2\pi\right)$$

例：一平面余弦波在 $t=0$ 时与 $t=2\text{s}$ 时的波形如图，

求（1）坐标原点处介质质点的振动方程

（2）该波的波函数



解：$t=0$，$x=0$ 处

$$\varphi=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lambda=160$$

$$u=\frac{20}{2}=10$$

$$\nu=\frac{u}{\lambda}=\frac{1}{16}$$

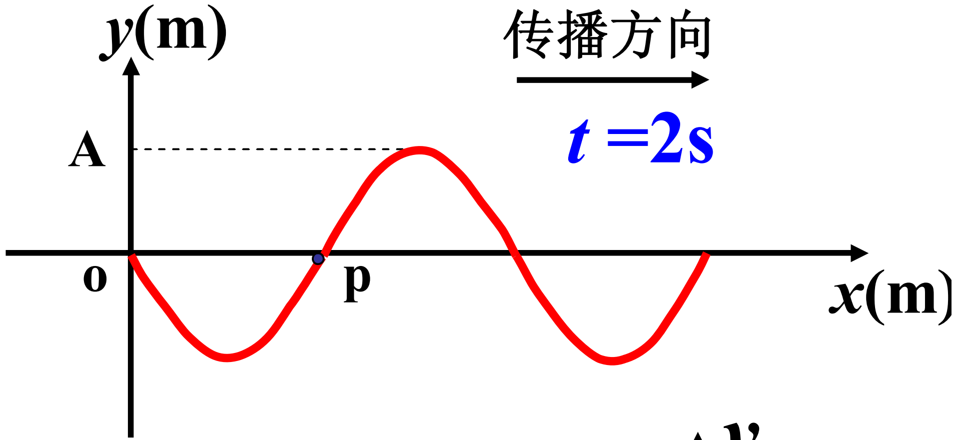
$$\omega=\frac{\pi}{8}$$

振动方程 $y_0=A\cos(\frac{\pi}{8}t-\frac{\pi}{2})$

波函数 $y=A\cos(\frac{\pi}{8}t-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{160}\cdot 2\pi)$

例：图示一平面简谐波在 t =2s 时刻的波形图。波的振幅为 0.2m，周期为 4s，则图中 p 点处质点的振动方程为：

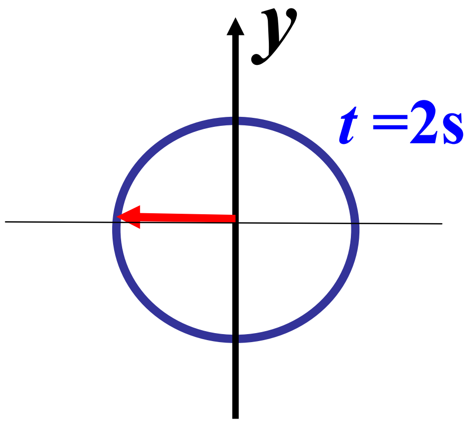
解： 由已知：$\omega = \dfrac{\pi}{2}$



解法一：

设 $y_p = 0.2\cos[(\pi t/2) + \varphi]$

$t = 2\mathrm{s}$ p点的振动状态 ：$y = 0, v < 0$

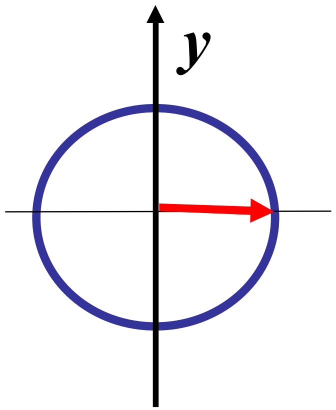


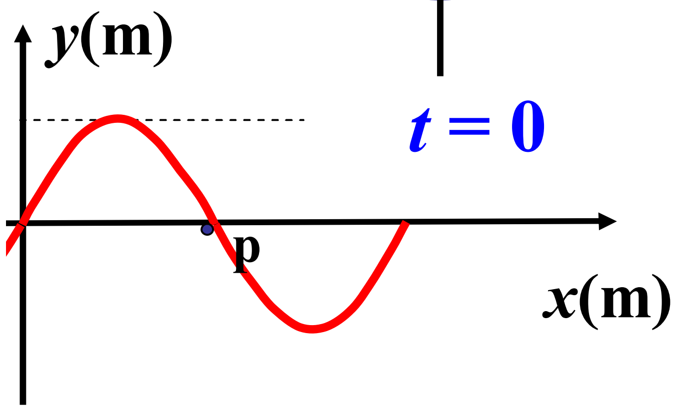
$$\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi}{2}\times 2 + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

解法二：

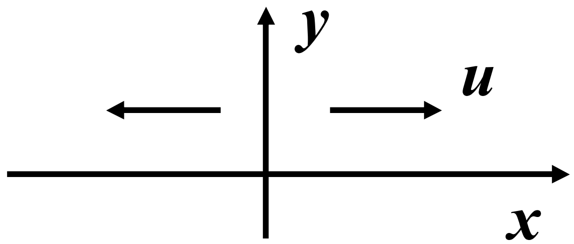
$t = 0$ p点振动状态：

$$y = 0, v > 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$



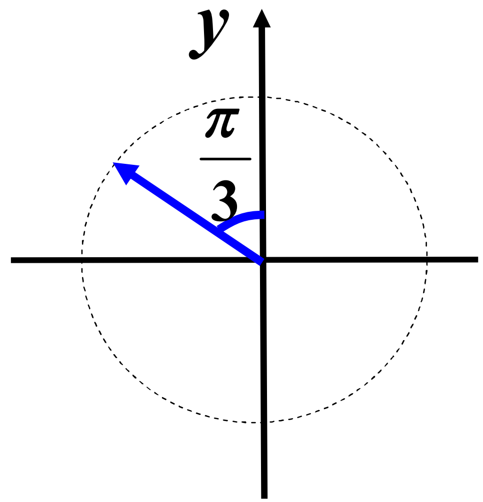


例：已知波源在原点（A、ω），设t=0时，波源处振动质点位于 $y=\dfrac{A}{2}$ $v<0$ 的状态，求：波函数



解（1）$x=0$ 点的振动方程

$$y = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$$



(2) 任意点与 $x=0$ 点的相位差

$$\varphi_x - \varphi_0 = \mp \frac{x}{\lambda} 2\pi \quad \begin{cases} x>0 & 取 - \\ x<0 & 取 + \end{cases}$$

（3）波函数

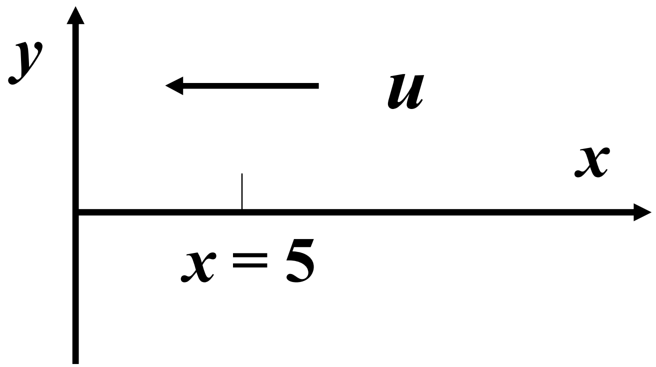
$$y = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{3} - \frac{x}{\lambda}\cdot 2\pi) \quad x>0$$

$$y = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{3} + \frac{x}{\lambda}\cdot 2\pi) \quad x<0$$

例：已知 $x=5\text{cm}$ 处 ，质点的振动方程为：

$$y=5\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}t+42\pi)$$

$u=100\text{cm/s}$，求 λ ν T 及波函数



解：由振动方程可知

$$\nu=\frac{1}{4}\quad T=4\text{s}\quad \lambda=\frac{u}{\nu}=400\text{cm}$$

波源在 $+\infty$

基准点 $x=5$

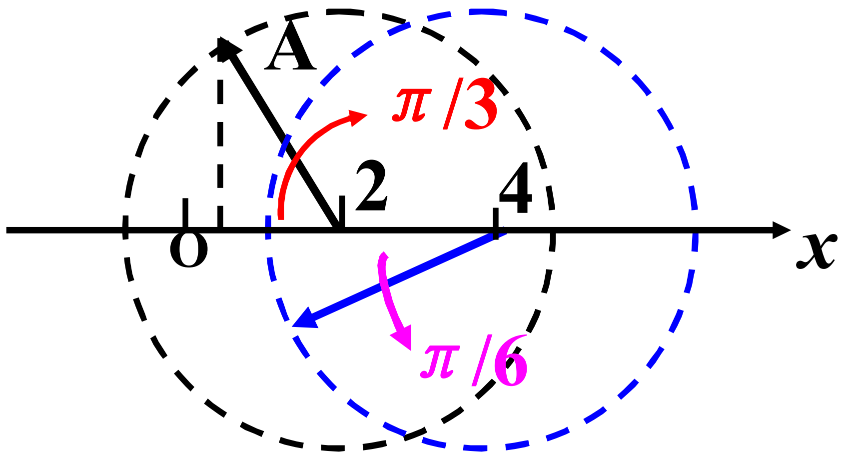
$$\varphi_x-\varphi_{x=5}=\frac{x-5}{\lambda}\cdot2\pi\qquad \begin{cases} x>5 \\ 0<x<5 \\ x<0 \end{cases}$$

波函数 $$y=5\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}t+42\pi+\frac{x-5}{\lambda}\cdot2\pi)$$

例. 一纵波沿x轴负向传播(平面简谐波)，振幅 $A=3\times10^{-2}$m 已知 x= 2cm和 x= 4cm处质元的相位差为$\pi/2$；设t 时刻 x=2cm处的位移为 - $A/2$, 且沿 x 轴负向运动，则 x = 4cm 处的质元 t 时刻位置坐标是______，运动方向为______。

解：因波向x轴负传播，故

x=4cm处质元的旋转矢量超前x=2cm处的旋转矢量$\pi/2$，即与x 轴负向夹角 $\pi/6$



则 x = 4cm 处质元的位置坐标为

$$x = 4 - A\cos\pi/6 = 1.4\ \text{(cm)};$$ 且向 x 轴正向运动

例、一平面简谐波在弹性媒质中传播，在媒质质元从最大位移处回到平衡位置的过程中，

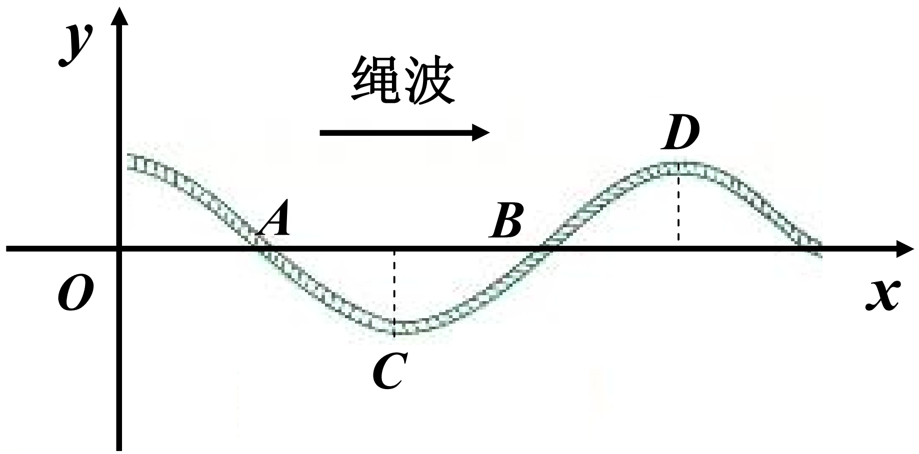
(A) 它的势能转化成动能；

(B) 它的动能转化成势能；

(C) 它把自己能量传给相邻一段媒质质元，其能量减小；

(D) 它从相邻的一段媒质质元获得能量，其能量增加。

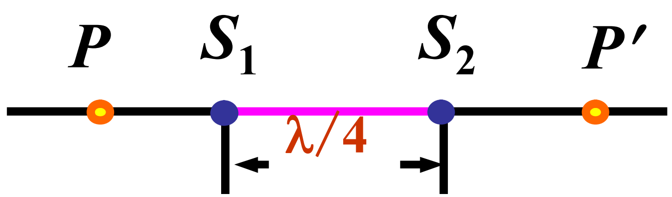
(D)



例：S_1、S_2 为两个振幅相同的相干波源，相距 λ/4，S_2 振动超前 S_1 振动 π/2，两波在 S_1、S_2 连线方向上强度相同，且不随时间变化，问 S_1、S_2 连线上在 S_1 外侧各点合成波的强度如何？在 S_2 外侧各点合成波的强度又如何？

解：设 $y_{10} = A\cos(\omega t)$

$$y_{20} = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



两波在S_1 外侧 P 点的相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = 0$$

$$A_{合} = 2A$$

$$I_{合} = 4I$$

两波在S_2 外侧 P' 点的相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi\frac{r_2' - r_1'}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}(-\frac{\lambda}{4}) = \pi$$

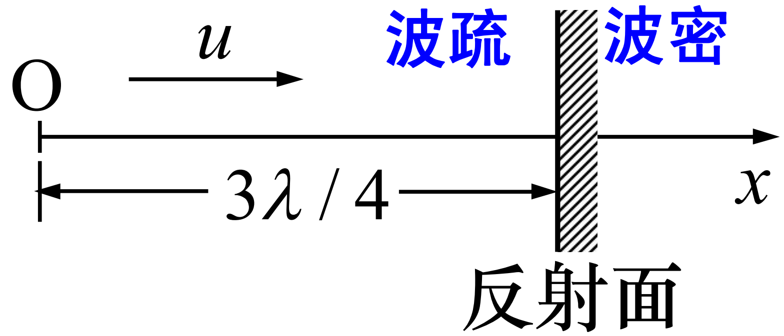
$$A_{合} = 0$$

$$I_{合} = 0$$

例：平面简谐波沿x轴正向传播，振幅为A，频率为v，传播速度为 u。（1）t=0 时，在原点 O 处的质元由平衡位置向 x 轴正向运动，试写出波函数；（2）若经反射面反射的波的振幅和入射波振幅相等，写出反射波波函数, 并求在 x 轴上因两波叠加而静止的各点的位置。

解：(1) O 处质元的振动函数

$$y = A\cos(2\pi vt - \pi/2)$$

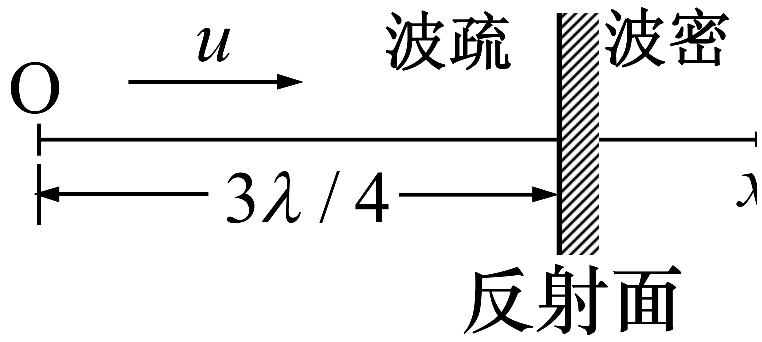


入射波的波函数为

$$y = A\cos\left(2\pi vt - 2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(2\pi vt - \frac{2\pi v}{u}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

（2）求反射波波函数

入射波在反射点的振动方程



$$y = A\cos\left[2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{u}\frac{3}{4}\lambda - \frac{\pi}{2}\right]$$

反射波在反射点的振动方程

$$y = A\cos\left[2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{u}\frac{3}{4}\lambda - \frac{\pi}{2} + \pi\right]$$

反射波波函数

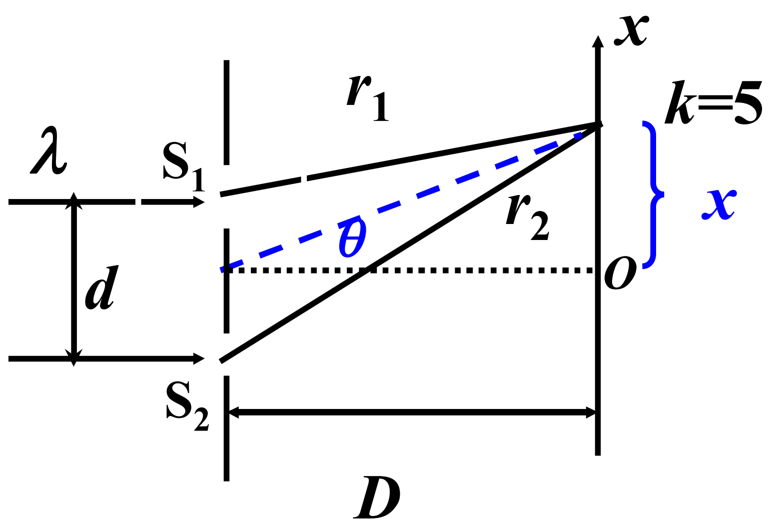
$$y = A\cos\left[2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{u}\frac{3}{4}\lambda - \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{2\pi\nu}{u}\left(\frac{3}{4}\lambda - x\right)\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\nu t + \frac{2\pi\nu}{u}x - \frac{\pi}{2}\right]$$

反射点是波节，另一波节与反射点相距$\lambda/2$，即$x = \lambda/4$处。

例. 双缝与屏之间的距离D=120cm，两缝之间的距离d=0.50mm，用波长λ=5000 Å 的单色光垂直照射双缝。求：（1）O点（零级明条纹所在处）上方的第五级明条纹的坐标 x。

（2）如果用厚度 l =1.0×10^{-2}mm，折射率 n = 1.58 的透明薄膜复盖在S_1缝后面，上述第五级明纹的坐标 x'



解（1） $\delta = r_2 - r_1 = 5\lambda$

$x = k\,D\lambda \;/\; d$

$= 5 \times 1200 \times 5000 \times 10^{-7} / 0.50$

$= 6.0\text{mm}$

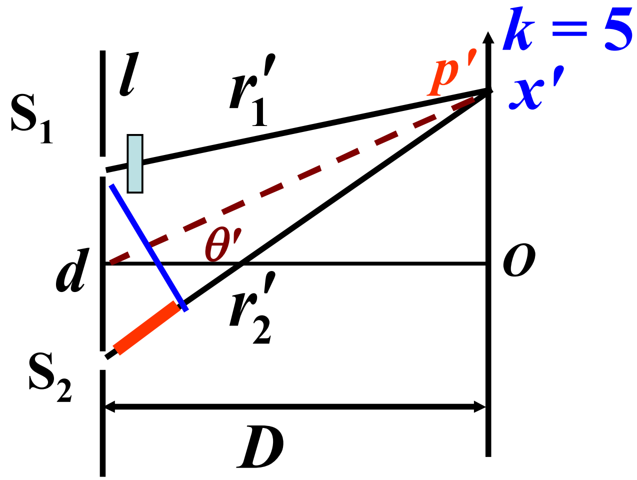
第5级明纹 $\delta = r_2 - r_1 \approx d\,\sin\theta = 5\lambda$

（2）加透明薄膜后，上述第五级明纹的坐标 x'

第5级明纹光程差

$$\delta = r_2' - (r_1' - l + nl) = r_2' - r_1' - (n-1)l = 5\lambda$$

$$r_2' - r_1' \approx d\sin\theta' \approx d\frac{x'}{D}$$



$$\delta = d\frac{x'}{D} - (n-1)l = 5\lambda$$

$$x' = D[(n-1)l + 5\lambda]/d$$

$$= 19.9\text{mm}$$

零级条纹 $\delta = r_2' - r_1' - (n-1)l = 0$ 上移 $\Delta x'$变化？

原第5级明纹处现为第几级

$$\delta = r_2 - r_1 - (n-1)l = k\lambda \qquad r_2 - r_1 = 5\lambda \Longrightarrow k$$

[例] 在杨氏双缝干涉中，用透明薄膜挡住一个缝，发现中央明纹移动了 3.5 倍条纹间距的距离。已知 $\lambda = 5500$ Å，$n = 1.4$，求膜的厚度 $e = ?$

解： 条纹向上移动还是向下移动？

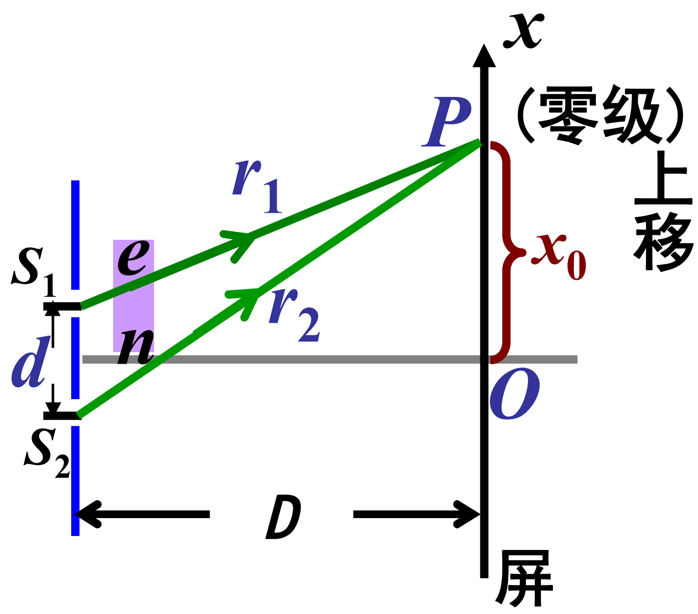
零级明纹光程差 $\delta_0 = r_2 - r_1 - (n-1)e = 0$

$$(n-1)e = r_2 - r_1 \approx \frac{dx_0}{D}$$

$$x_0 = 3.5\,\Delta x = 3.5\frac{D\lambda}{d}$$

$$(n-1)e = 3.5\lambda$$

$$e = \frac{3.5\lambda}{n-1} = 4.83\times10^{-6}\ \text{m}$$



例：白光入射双缝，缝间距 d，屏到缝距离为D。
求：能观察到的清晰可见光谱的级次。

解：　白光　4000 Å – 7000 Å

明纹位置　$x = k\dfrac{D}{d}\lambda$

$$x_{k红} \rangle x_{(k+1)紫}$$

$$k\frac{D}{d}\lambda_{红} \rangle (k+1)\frac{D}{d}\lambda_{紫}$$

$$k \rangle \frac{\lambda_{紫}}{\lambda_{红}-\lambda_{紫}} = \frac{4000}{7000-4000} = 1.3$$

能观察到的清晰可见光谱只有0级明纹两侧第1级。

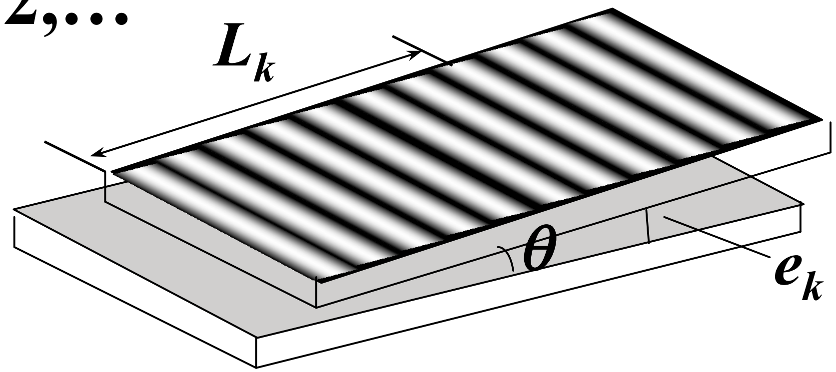
例：两平板玻璃之间形成一个$\theta = 10^{-4}$ rad 的空气劈尖，若用λ=600nm 的单色光垂直照射。

求：1）第15条明纹距劈尖棱边的距离；

2）若将劈尖充以液体(n =1.28)后，第15条明纹移动了多少?

解：1)设第k 条明纹对应的空气厚度为 e_k

由$\delta = 2e_k + \dfrac{\lambda}{2} = k\lambda \qquad k = 1, 2, \ldots$



$$e_{15} = \frac{2\times 15 - 1}{4}\times 600\times 10^{-9}$$

$$= 4.35\times 10^{-6}[\mathrm{m}]$$

$$\therefore L_{15} = \frac{e_{15}}{\sin\theta} \approx \frac{e_{15}}{\theta} = 4.35\times 10^{-2}[\mathrm{m}]$$

2） 劈尖充以液体后第15条明纹向哪移动？

设此时第15条明纹距棱边的距离为L_{15}'，所对应的液体厚度为e_{15}'

无论是空气膜还是液体膜，第15条明纹对应的光程差不变

$$\delta = 2ne_k' + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

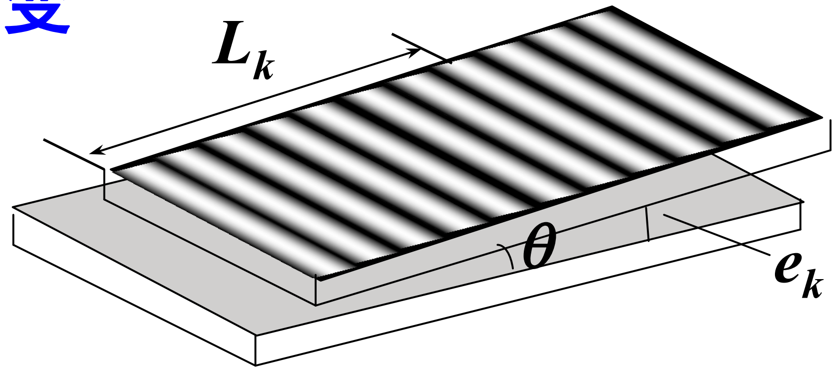
向棱边方向移动

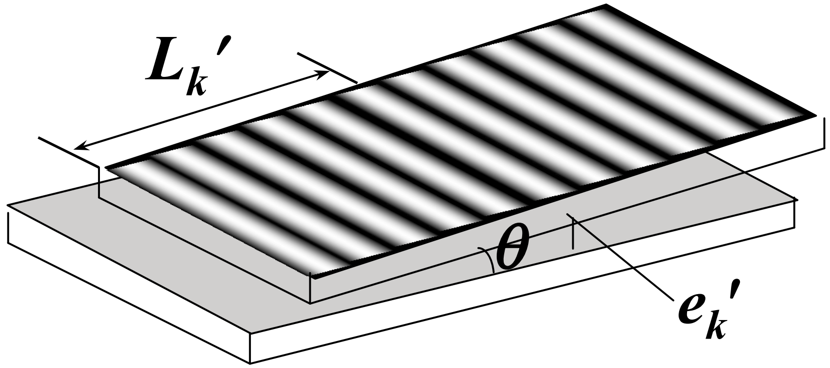
$$2e_{15} + \frac{\lambda}{2} = 2ne_{15}' + \frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore e_{15}' = \frac{e_{15}}{n}$$

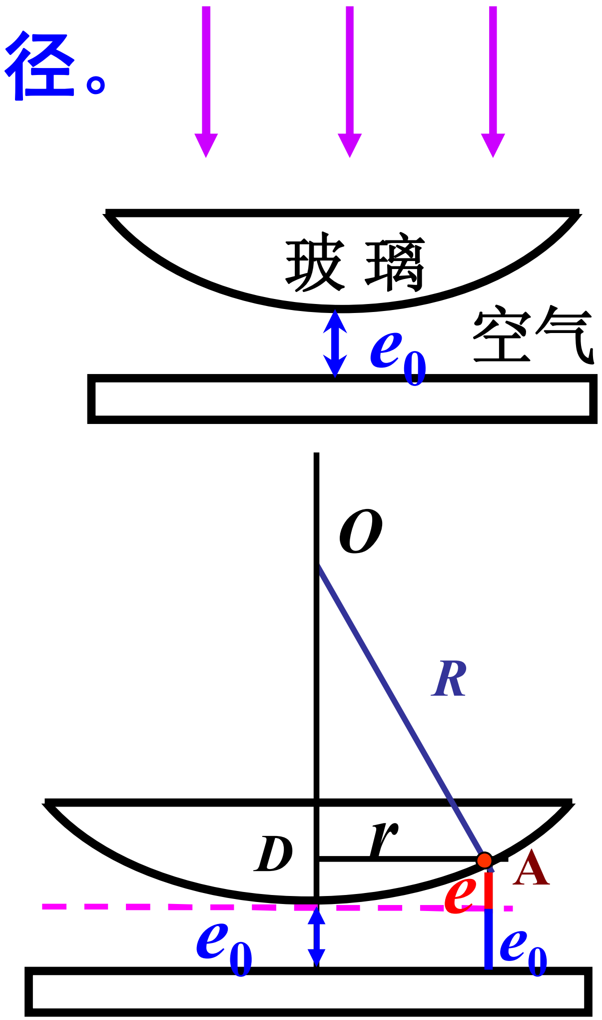
$$\Delta L = L_{15} - L_{15}'$$

$$= \frac{e_{15} - e_{15}'}{\theta} = 9.5\times 10^{-3}[\mathrm{m}]$$





例：牛顿环装置的平凸透镜与平板玻璃有一小缝e_0. 用波长为λ的单色光垂直照射，已知平凸透镜的半径为R 。求：反射光形成的牛顿环的各暗环半径。



解：设某暗环半径为 r

暗纹

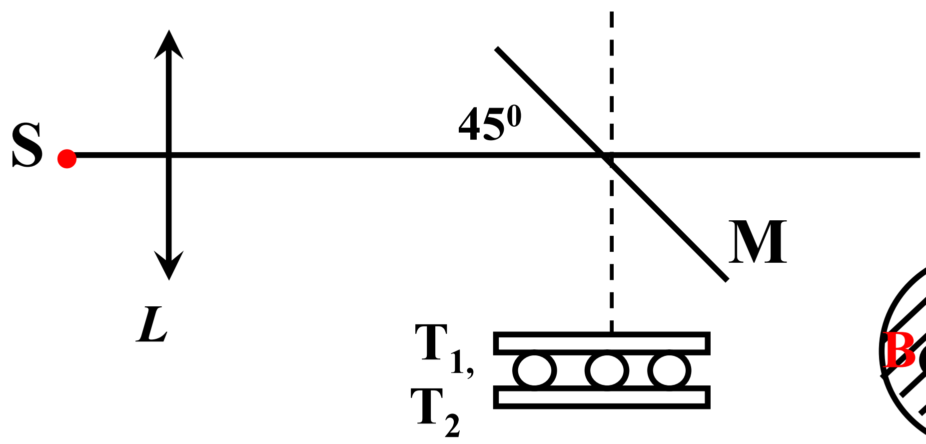
光程差：$\delta = 2(e + e_0) + \dfrac{\lambda}{2} = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

几何关系 $e = \dfrac{r^2}{2R}$ 代入上式

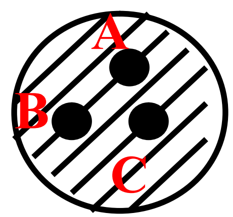
得 $r = \sqrt{R(k\lambda - 2e_0)}$

$k \ge \dfrac{2e_0}{\lambda}$的整数

检查滚珠大小的干涉装置示意如图（a），S为单色光源，波长为λ，L为会聚透镜，M为半透半反镜，在平晶T_1、T_2之间放置A、B、C三个滚珠，其中A为标准件，直径为d_0，在M上方观察时，观察到等厚条纹如图（b），若轻压C珠上方，条纹间距变小，则B珠直径d_1= d_0，C 珠直径 d_2= $d_0-\lambda$。



(a)

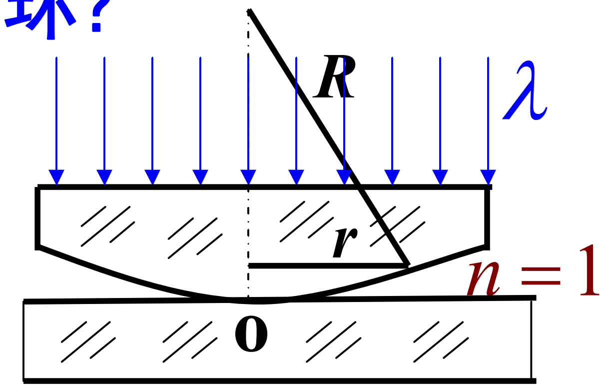


(b)

例：如图为观察牛顿环的装置，平凸透镜的半径为R=1m的球面；用波长 λ=500nm的单色光垂直照射。

求：(1) 在牛顿环半径 r_m= 2mm 范围内能见多少明环？

(2) 若将平凸透镜向上平移 e_0=1μm 最靠近中心O处的明环是平移前的第几条明环？



解：(1) 第 k 条明环半径为

$$r=\sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}},\qquad k=1,2,\cdots$$

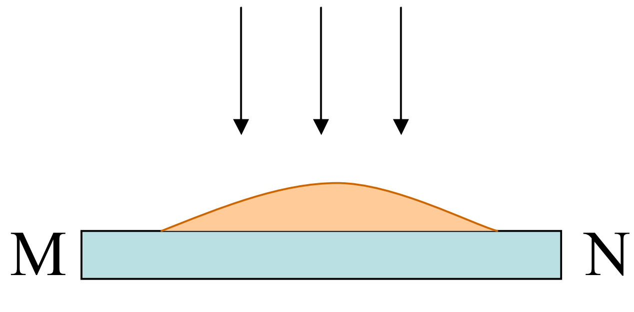
令$r=r_m$，　$k=8.5$　　有8条明环

(2) 向上平移e_0后，光程差改变 $2e_0$，而光程差改变λ时，明条纹往里“缩进”一条，共“缩进”条纹：$\delta=2e+\frac{\lambda}{2}=k\lambda$

$$\frac{2e_0}{\lambda}=\frac{2\times1\times10^{-6}}{5\times10^{-7}}=4$$

最中间的明纹为平移前的第5条

例：平面玻璃片MN上放有一油滴，当油滴展开成圆形油膜时，在波长 λ =6000Å的单色光垂直照射下，从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹。已知玻璃的折射率 n_1=1.5,油膜的折射率 n_2=1.2。问（1）当油膜中心最高点与玻璃片上表面相距 h=12000Å 时，看到的条纹情况如何？可看到几条明纹？明条纹所在处的油膜厚度为多少？中心点的明暗情况如何？（2）当油膜继续扩展时，所看到的条纹情况将如何变化？中心点的情况如何变化？



解： $$\delta = 2n_2 e = k\lambda$$

$k=0 \quad e_0=0 \qquad k=1 \quad e_1=2500$

$k=2 \quad e_2=5000 \qquad k=3 \quad e_3=7500$

$k=4 \quad e_4=10000 \qquad k=5 \quad e_5=12500>h$

中心处不是明纹，是否暗纹？ $$\delta = 2n_2 e = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

中心处也不是暗纹 $\qquad k=4 \quad e_4=11250 \qquad k=5 \quad e_5=13750$

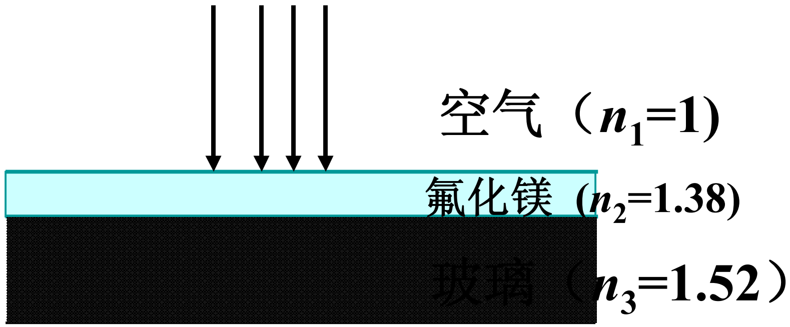
当油膜继续扩展时，h减小，条纹级数减少，间距扩大，中心点由半明半暗→ 暗纹→明纹， 直到整个油膜呈现一片明亮区域

例：照相机镜头上涂一层 $n_2=1.38$ 氟化镁膜，使人眼最敏感的波长为5500埃的黄绿光反射最小，求：最小厚度

解：实际应用时，光线接近于垂直入射（$i=0$）

反射光 $\delta=2n_2e=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

$$e=(2k+1)\frac{\lambda}{4n_2}$$



$$k=0,\quad e_{min}=\frac{\lambda}{4n_2}=9.96\times10^{-8}\,\mathrm{m}$$

黄绿光反射最小（增透），但此时紫光反射干涉加强，相机镜头呈兰紫色。

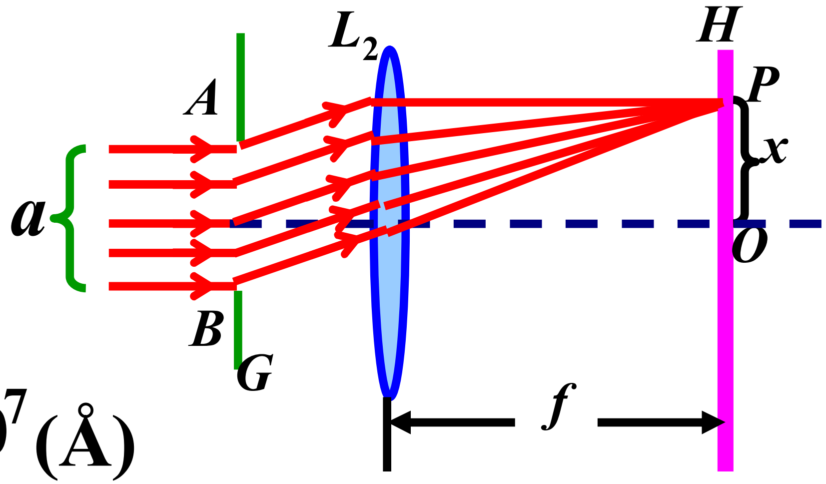
例：在迈克耳逊干涉仪的M_2镜前，插入一薄玻璃片时，可观察到有150条干涉条纹向一方移动，若玻璃片的折射率 $n = 1.632$， $\lambda = 5000\text{Å}$ 。求：玻璃片的厚度

$$l = \frac{\Delta k \lambda}{2(n-1)} = \frac{150 \times 5000 \times 10^{-10}}{2 \times (1.632 - 1)} = 5.9 \times 10^{-3} \text{cm}$$

例 夫琅和费单缝衍射装置，缝宽$a = 0.5$ mm，$f = 50$cm，用白光垂直照射狭缝，在观察屏上$x = 1.5$ mm 处看到衍射明纹，求 (1) 该明纹对应的光线的波长及衍射级数；(2) 该明条纹对应的半波带数目。

解：(1) $a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

$$x = (2k+1)\frac{f\lambda}{2a}$$



$$\lambda = \frac{2ax}{(2k+1)f} = \frac{2\times0.5\times1.5}{(2k+1)\times500}\times10^{7}(\text{Å})$$

$k = 1$，　$\lambda_1 = 10000$ Å 红外（舍）

$k = 2$，　$\lambda_2 = 6000$ Å 符合　　$N = 2k+1 = 5$

$k = 3$，　$\lambda_3 = 4286$ Å 符合　　$N = 2k+1 = 7$

$k = 4$，　$\lambda_4 = 3333$ Å 紫外（舍）

例：在夫琅和费单缝衍射实验中，波长为λ的单色光垂直入射在宽度为$a = 4\lambda$的单缝上，对应于衍射角为 30^0 的方向，单缝处波阵面可分成的半波带数目为：

$$a\sin\theta = 4\lambda\sin 30^0 = 4\lambda\frac{1}{2}$$ 4个半波带

例：以波长λ=5000Å的平行光垂直照射到宽度a=0.25mm的单缝上，在缝后放置一焦距$f = 25$cm的凸透镜，屏放在透镜的焦平面处。试求（1）中央明纹的宽度。（2）中央明纹两侧第三级暗条纹之间的距离。

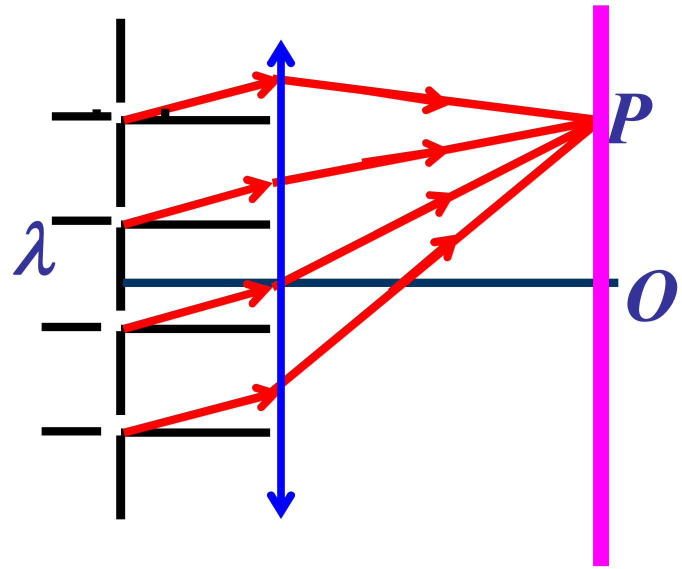
解 (1) $\Delta x = \dfrac{2\lambda}{a} f = \dfrac{2\times 5000\times 10^{-7}\times 250}{0.25} = 1\text{mm}$

(2) 第三级暗纹之间的距离

$a\sin\theta = \pm k\lambda$，（暗）

$$\Delta x = 2\times\frac{k\lambda}{a} f = 2\times\frac{3\times 5000\times 10^{-7}\times 250}{0.25} = 3\text{mm}$$

[例] $\lambda = 6000$ Å $\perp$ 入射光栅，第二级明纹出现在 $\sin\theta = 0.2$ 处，第四级缺级。求（1）$a + b = ?$（2）缝宽，（3）屏上实际出现的条纹数；



解：1） $(a+b)\sin\theta = k\lambda$

$$a+b = \frac{k\lambda}{\sin\theta} = \frac{2\times 6000\times 10^{-10}}{0.2}$$

$$= 6\times 10^{-4}\ \text{(cm)}$$

2） $k = 4$ 为第1次缺级

$$\frac{a+b}{a} = 4 \qquad a = 1.5\times 10^{-4}\ \text{cm}$$

3） $(a+b)\sin\theta = k\lambda \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{2} \qquad k_{max} = \pm\frac{a+b}{\lambda} = \pm 10$

能够出现 0，±1，±2，±3，±5，±6，±7，±9

中央明纹中有多少主极大 0，±1，±2，±3

例：以平行白光垂直入射到光栅常数为10^6Å的光栅上，用焦距为2m的透镜把通过光栅的光线聚焦在屏上。

已知：紫光波长λ_1=4000Å，红光波长λ_2=7500Å

求 1）第二级光谱中紫光和红光的距离。

2)证明此时第二级和第三级光谱相互重迭。

解：1） $d\sin\theta = \pm k\lambda \qquad x = f\tan\theta \approx f\sin\theta = f\dfrac{k\lambda}{d}$

第二级紫光 $\quad x_1 = \dfrac{2\times 4\times 10^{-7}\times 2}{10^6\times 10^{-10}} = 0.16\text{m}$

第二级红光 $\quad x_2 = \dfrac{2\times 7.5\times 10^{-7}\times 2}{10^6\times 10^{-10}} = 0.30\text{m}$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0.14\,\text{m}$$

例: 波长为 $\lambda_1 = 5000$Å和$\lambda_2 = 5200$Å 的两种单色光垂直照射光栅,光栅常数为0.002cm, $f = 2$ m, 屏在透镜焦平面上。求 (1) 两光第三级谱线的距离; (2) 若用波长为4000Å ~ 7000Å 的光照射, 第几级谱线将出现重叠; (3) 能出现几级完整光谱?

解: (1) $(a+b)\sin\theta = 3\lambda$

$$x = f\tan\theta \approx f\sin\theta = f\frac{3\lambda}{a+b}$$

$$x_1 = f\frac{3\lambda_1}{a+b} \qquad x_2 = f\frac{3\lambda_2}{a+b}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = f\frac{3(\lambda_2 - \lambda_1)}{a+b} = 6\ [\text{mm}]$$

例：以入射光λ=5900Å垂直照射光栅 a=5 λ, b=2a

求（1）最多能看到多少条明纹（主极大）

（2）中央明纹中有多少条主最大

（3）以30⁰入射时，最多能看到第几条明纹

(1) 由 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$ $\qquad k = \dfrac{(a+b)\sin\theta}{\lambda}$

当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad k = 15$

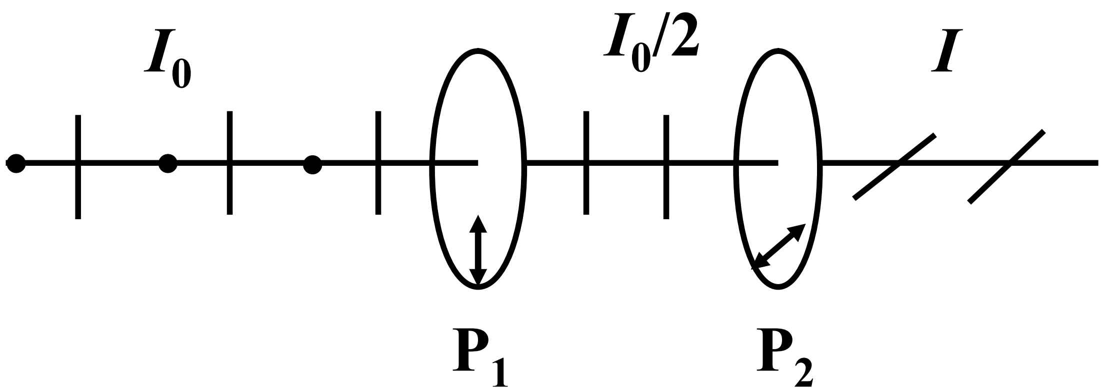
去掉缺级 $\quad k = \dfrac{a+b}{a}k' = 3k'$

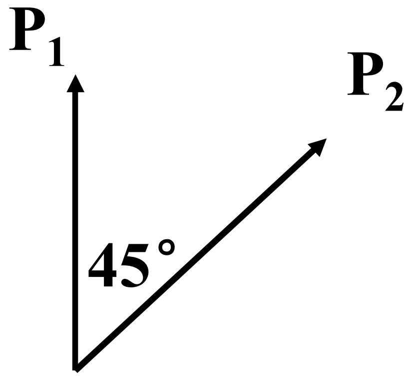
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \pm 8, \pm 10, \pm 11, \pm 13, \pm 14.$

则最多看到 21条明纹

（2）中央明纹中有5条主最大，即 $k = 0, \pm 1, \pm 2$

例：自然光通过偏振化方向成45°角的两个偏振片后，光强为I，求（1）入射自然光的强度。（2）如果透射光强度变为 $I/2$ （入射光强不变），则两偏振片偏振化方向之间的夹角是多少？



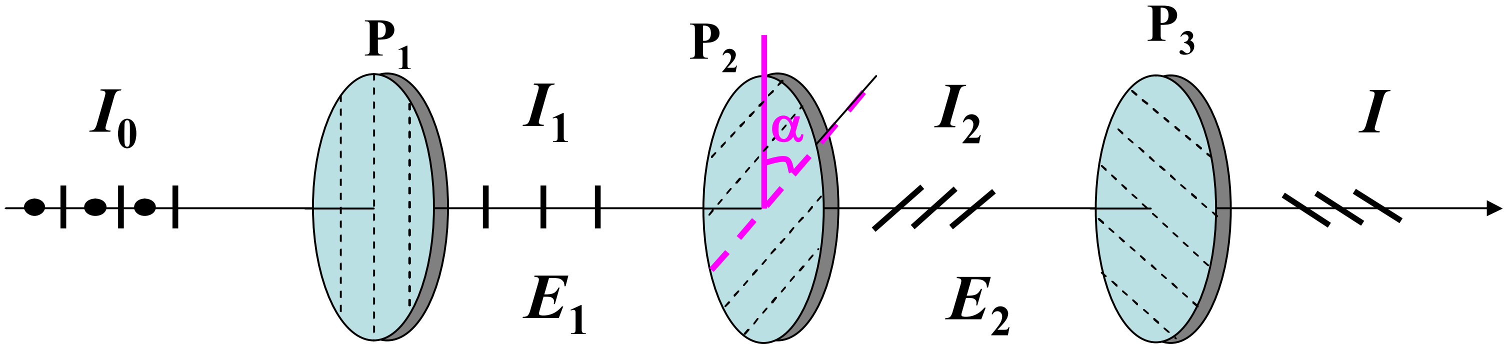


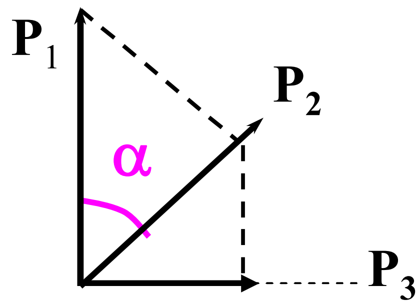
（1）$I = \frac{I_0}{2}\cos^2 45^0 = \frac{1}{4}I_0 \qquad I_0 = 4I$

（2）$\frac{I}{2} = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha \qquad \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}4I\cos^2\alpha \qquad \cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$

$$\alpha = 60^0, \quad 120^0$$

例：两正交偏振片P_1和P_3之间插入另一个偏振片P_2，光强为 I_0 的自然光射向P_1，在P_3后方测量光强 I，当转动P_2时， I 将发生变化．求 I 与转角 α 的关系．





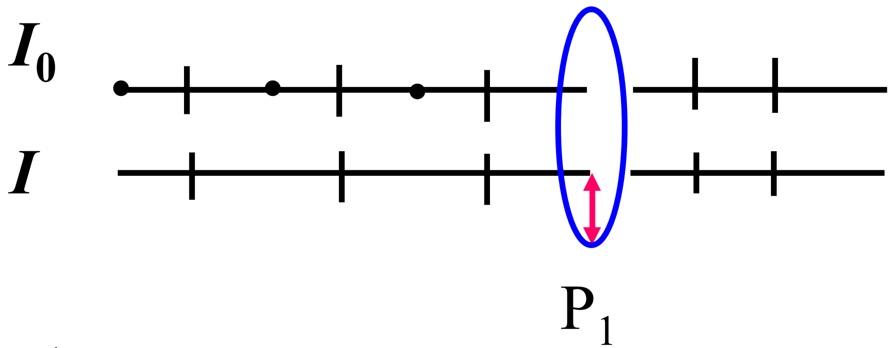
解：自然光通过P_1后，$I_1 = (1/2)\, I_0$

$$E_2 = E_1 \cos\alpha \qquad I_2 = I_1 \cos^2\alpha$$

$$E_3 = E_2 \cos\left(90^0 - \alpha\right) \qquad I = I_2 \cos^2(90^\circ - \alpha) = I_1 \cos^2\alpha \sin^2\alpha$$

$$I = I_1\,(1/4)\sin^2 2\alpha = (1/8)\, I_0 \sin^2 2\alpha$$

例：用相互平行的一束自然光和一束线偏振光构成的混合光垂直照射在一偏振片上，以光的传播方向为轴旋转偏振片时，发现透射光强的最大值为最小值的7倍，则入射光中，自然光强 I_0与线偏振光强 I 之比为多少？

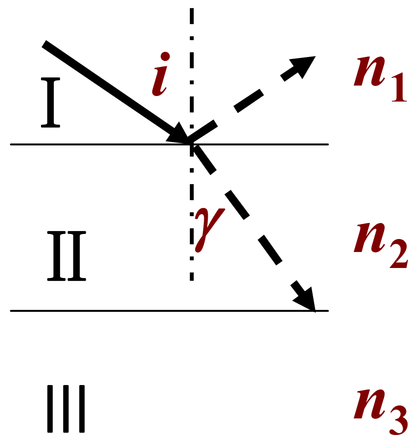


$$\frac{\frac{1}{2}I_0 + I}{\frac{1}{2}I_0} = 7 \qquad I_0 = \frac{1}{3}I$$

例、三种透光媒质Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，其折射率分别为 n_1=1.33，n_2=1.5，n_3=1，两交界面相互平行。若 tan$i$ =1.128，一束自然光自媒质Ⅰ入射到Ⅰ与Ⅱ的交界面上，反射光的偏振态为 线偏振光 ，媒质Ⅱ与Ⅲ界面上的反射光的偏振状态为 部分偏振光

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} = 1.128$$

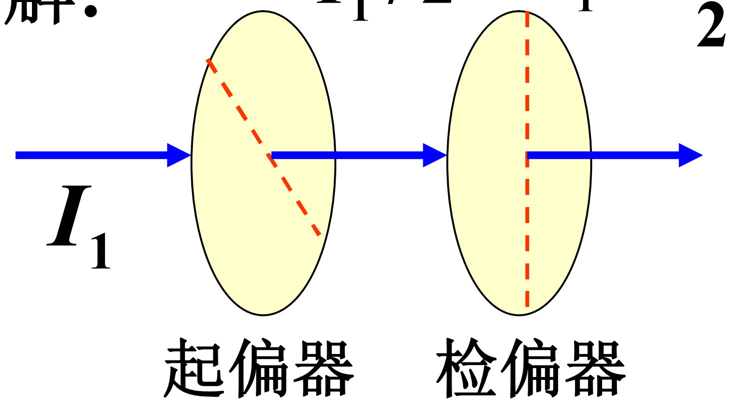
$$\tan\gamma = \frac{n_1}{n_2} \neq \frac{n_3}{n_2} \qquad i_0 \text{与} \gamma \text{互余}$$

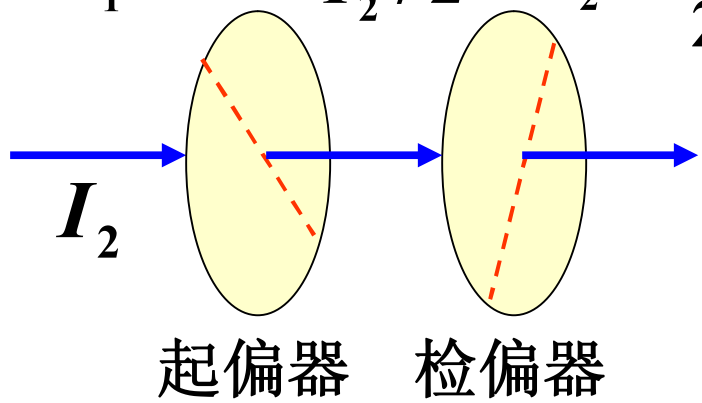


例：起偏器和检偏器,在它们的偏振化方向成$\alpha_1=30^\circ$时，观测一束单色自然光。又在$\alpha_2=60^\circ$时，观测另一束单色自然光，设两次所得的透射光强度相等，求：两光束强度之比。

解：

$I_1/2 \qquad I_1' = \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha_1 \qquad\qquad I_2/2 \qquad I_2' = \frac{I_2}{2}\cos^2\alpha_2$





按题意 $I_1'=I_2'$ 于是 $\frac{I_1}{2}\cos^2\alpha_1 = \frac{I_2}{2}\cos^2\alpha_2$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_1} = \frac{\cos^2 60^\circ}{\cos^2 30^\circ} = \frac{1}{3}$$