2007-2008 学年《数学分析 B》第二学期期末考试
参考答案及评分标准(A 卷)

2008 年 6 月 18 日

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1. $f'_x(0,0)=2,\quad f'_y(0,0)=-3;$

2. 极小值点为(2, 1)，极大值点为(0, 0)；

3. −10；

4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2});$

5. 绝对收敛；

6. 1，π^2-1，2，3 （各 1 分）

7. $\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{12\times 3^n}]x^n$，$-1<x<1$

（3 分，其中展开式没有合并扣 1 分，1 分）

二、将 $x=2,y=1$ 代入已知方程得 $u=1,z=1$ ………… 2 分

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-1=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2 \end{cases}$$ ………… 4 分

将 $x=2,y=1$，$u=1,z=1$ 代入得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{3}{2},\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$ ………… 6 分

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}+4y=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy+\ln y \end{cases}$$ ………… 8 分

将 $x=2,y=1$，$u=1,z=1$ 代入得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=4$ ………… 10 分

三、 $I=2\int_0^1 dy\int_{y^2}^{3-2y^2}(y^2-x)dx$ ………… 3 分

$=\int_0^1(18y^2-9y^4-9)dy$ ………… 6 分

$=-\dfrac{24}{5}$ ………… 8 分

四、设所求点为(x_0,y_0,z_0)，曲面在此点的法向量为

$\vec{n}=\{y_0,x_0,-1\}$ ………… 3 分

由题设 $\vec{n}//\{1,3,1\}$，故 $\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{x_0}{3}=\dfrac{-1}{1}$ ………… 5 分

得 $x_0=-3$，$y_0=-1$，$z_0=x_0y_0=3$

所求点为 $(-3,-1,3)$ ………… 8 分

法线方程为 $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ ………… 10 分

五、$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{2n+1}{2^{2n+2}}}{\frac{2n-1}{2^{2n}}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{(2n-1)4}=\dfrac{1}{4}$， …………1 分

$R=2$， 收敛区间为 $(-2,2)$ …………2 分

令 $\sigma(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n}}x^{2n-2}$

$\int_0^x\sigma(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n}}x^{2n-1}$ …………5 分

$=\dfrac{x}{4-x^2}$ …………7 分

$\sigma(x)=(\dfrac{x}{4-x^2})'=\dfrac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$ …………9 分

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n}}x^{2n-1}=x\sigma(x)=\dfrac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$ …………10 分

六、 $I_z=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x^2+y^2)dV$ ………… 2 分

$=\mu\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy\int_{x^2+y^2}^{2x}dz$ ………… 5 分

$=\mu\iint\limits_{D}(x^2+y^2)(2x-x^2-y^2)dxdy$

$=\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2(2\rho\cos\theta-\rho^2)\rho d\rho$ ………… 7 分

$=\frac{2^6}{15}\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$ ………… 9 分

$=\frac{2}{3}\mu\pi$ ………… 10 分

七、补充平面 $S_1:z=0,x^2+y^2\le 4$，取下侧，则由 Gauss 公式

$\oiint\limits_{S+S_1^-}2xdydz+(z+2)^2dxdy=-\iiint\limits_{\Omega}[2+2(z+2)]dxdydz$ ………… 2 分

$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^2(6+2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$ ………… 4 分

$=-24\pi$ ………… 6 分

$\iint\limits_{S_1^-}2xdydz+(z+2)^2dxdy$

$=\iint\limits_{S_1^-}4dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}4dxdy=-16\pi$ ………… 8 分

$I=\oiint\limits_{S+S_1^-}-\iint\limits_{S_1^-}2xdydz+(z+2)^2dxdy$

$=-24\pi+16\pi=-8\pi$ ………… 10 分

八、记 $X=x^2y^3+2x^5+ky,\quad Y=xf(xy)+2y$，由题意，有

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},$$ ………… 1 分

即 $3x^2y^2+k=f(xy)+xyf'(xy)$ ………… 2 分

令 $u=xy$，有 $f'(u)+\frac{1}{u}f(u)=3u+\frac{k}{u}$ ………… 3 分

解得: $f(u)=u^2+k+\frac{C}{u}.$ ………… 4 分

由题设可得 $f(0)=k$，解得 $C=0$，故

$f(u)=u^2+k$ ………… 5 分

选择折线路径:$(0,0)\to(t,0)\to(t,-t)$,**则有**

$$I=\int_{(0,0)}^{(t,-t)}(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[xf(xy)+2y]dy$$

$$=\int_{(0,0)}^{(t,-t)}(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[x(x^2y^2+k)+2y]dy$$

$$=\int_0^t 2x^5dx+\int_0^{-t}(t^3y^2+kt+2y)dy$$ ………… 6 分

$=(1-k)t^2=2t^2$ ………… 7 分

$1-k=2$， $k=-1$ ………… 8 分

九、（1）由已知条件，有 $\frac{u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}}{u_{n+1}}\ge a>0$，即

$u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}>0$， $u_nv_n>u_{n+1}v_{n+1}$

又 $u_nv_n>0$，所以 $\{u_nv_n\}$ 单调减少且有界 ………… 2 分

（2） 由（1）得 $u_{n+1}\le\frac{1}{a}(u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1})$ ………… 3 分

又 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 的部分和满足

$$S_n=u_2+u_3+\cdots+u_{n+1}\le\frac{1}{a}(u_1v_1-u_{n+1}v_{n+1})\le\frac{1}{a}u_1v_1$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。 ………… 6 分