(2014-2015-2) 工科数学分析期末试题(A 卷)解答（2015.7）

一. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

2. $\frac{31}{10}$

3. I_2, I_4

4. $-\frac{\pi^2}{2}-\frac{3}{2}$

5. $\frac{2(\pi-2)}{5\pi}$

二. $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}dy$ ……………….(3 分)

$=\int_0^1\frac{\sin x}{x}y\Big|_{x^2}^{x}dx$

$=\int_0^1(\sin x-x\sin x)dx$ ……………….(6 分)

$=1-\sin 1$ ……………….(8 分)

三. $f_x'=2x(2+y^2)$ $f_y'=2x^2y+\ln y+1$ ……………….(2 分)

令 $f_x'=0$ $f_y'=0$ 得 $x=0$ $y=\frac{1}{e}$ ……………….(3 分)

$f_{x^2}''=2(2+y^2)$ $f_{xy}''=4xy$ $f_{y^2}''=2x^2+\frac{1}{y}$ ……………….(5 分)

在点 $(0,\frac{1}{e})$ $A=2(2+\frac{1}{e^2})$ $B=0$ $C=e$

$AC-B^2=2e(2+\frac{1}{e^2})>0$ 且 $A>0$

故 $(0,\frac{1}{e})$ 是极小值点，极小值为 $f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$ ……………….(8 分)

四. 两方程两端分别对 x 求导，得

$$\begin{cases} 1+\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dx} \\ yz+xz\dfrac{dy}{dx}+xy\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$ ……………….(2 分)

将点 P 代入得 $\begin{cases} 1+\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dx} \\ 3+\dfrac{dy}{dx}+3\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$ ……………….(3 分)

解得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{9}{5}$ $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{2}{5}$ ……………….(5 分)

$\vec{s}=\{1,-\dfrac{9}{5},-\dfrac{2}{5}\}$ ……………….(6 分)

切线 $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-3}{-9}=\dfrac{z-1}{-2}$ ……………….(8 分)

五. $I=\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$ ……………….(3 分)

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3 d\rho$ ……………….(6 分)

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$ ……………….(7 分)

$=\dfrac{3}{2}\pi$ ……………….(9 分)

六. (1) $\vec{n}=\{-x,-2y,-1\}\big|_P=\{-2,-2,-1\}$ ……………….(2 分)

切平面为 $2(x-2)+2(y-1)+(z+4)=0$

即 $2x+2y+z=2$ ……………….(4 分)

（2） $I=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{2-2x-2y}dz$ ……………….(7 分)

$=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(2-2x-2y)dy$ ……………….(8 分)

$=\int_0^1 x(1-x)^2dx$ ……………….(10 分)

$=\dfrac{1}{12}$ ……………….(11 分)

七. $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1 \qquad R=1$$ ……………….(1 分)

$x=\pm1$时，级数为$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$收敛，　收敛域为$x\in[-1,1]$ …….(3 分)

令 $$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$ ……………….(4 分)

$$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}$$ ……………….(5 分)

$$=\frac{x^2}{1+x^2}$$ ……………….(6 分)

$$S(x)=\int_0^x\frac{x^2}{1+x^2}dx=x-\arctan x$$ ……………….(8 分)

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n-1}=x^2-x\arctan x$$ ……………….(9 分)

八. $$\oint_{L+\overline{AO}}(e^{-x}\cos y-2y^3)dx+(e^{-x}\sin y-xy^2)dy=\iint_D 5y^2dxdy$$ ………….(2 分)

$$=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\sin^2\theta d\rho$$ ……………….(4 分)

$$=20\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta$$ ……………….(5 分)

$$=\frac{25}{8}\pi$$ ……………….(6 分)

$$\int_{\overline{AO}}(e^{-x}\cos y-2y^3)dx+(e^{-x}\sin y-xy^2)dy=-\int_{\overline{OA}}(e^{-x}\sin y-xy^2)dy$$ ……….(7 分)

$$=-\int_0^2\sin y\,dy$$ ……………….(8 分)

$$=\cos2-1$$ ……………….(9 分)

$$I=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}(e^{-x}\cos y-2y^3)dx+(e^{-x}\sin y-xy^2)dy$$

$$=\frac{25}{8}\pi+1-\cos2$$ ……………….(10 分)

九. $f(x)=(-1+(x+1))\ln(1+(x+1))$ ……………….(2 分)

$$=(-1+(x+1))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^n$$ ……………….(4 分)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}(x+1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^{n+1}$$ ……………….(6 分)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}(x+1)^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n-1}(x+1)^{n}$$ ……………….(7 分)

$$=-(x+1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)(x+1)^n$$ ………….(8 分)

收敛域为 $-2<x\le 0$ ……………….(9 分)

十. $$\frac{\partial Y}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y=\frac{\partial X}{\partial y}$$

故所给方程是全微分方程 ……………….(2 分)

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$$ …….(4 分)

$$=\int_0^x 2xdx+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)dy$$ ……………….(6 分)

$$=y^2\cos x+x^2\cos y$$ ……………….(8 分)

通解为 $y^2\cos x+x^2\cos y=C$ ……………….(9 分)

十一. $$I=\oiint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^3dxdy$$ ……………….(1 分)

$$=-\iiint_V(2x+2y+3z^2)dxdy$$ ……………….(3 分)

$$=-\iiint_V 3z^2dxdydz$$ ……………….(4 分)

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}3r^4\cos^2\varphi\sin\varphi dr$$ …………….(6 分)

$$=-\frac{6\pi}{5}2^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi$$ ……………….(8 分)

$$=-\frac{24\pi}{5}$$ ……………….(9 分)