2008-2009 第二学期数学分析 B(下)(A 卷)解答

一. 1. -4, $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (2 分, 2 分)

2. $\dfrac{x}{2-z}$, $\dfrac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$ (2 分, 2 分)

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} \dfrac{1}{\rho^2} d\rho$, $2-\dfrac{\pi}{2}$ (2 分, 2 分)

4. $y'+2y=x^2e^{-2x}$, $y=e^{-2x}(C+\dfrac{x^3}{3})$ (2 分, 2 分)

5. $\dfrac{4}{3}$, $(0,\dfrac{3}{5})$ (2 分, 2 分)

6. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{\pi}$, $-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$, 0 (2 分, 1 分, 1 分)

7. $8\pi R(R^2+1)$ (4 分)

二. $\vec{n}=\{yz,xz,xy\}$ …………………….(2 分)

切平面 $yz(X-x)+xz(Y-y)+xy(Z-z)=0$ ……………………(4 分)

即 $yzX+xzY+xyZ=3xyz$

三坐标轴截距 $3x$, $3y$, $3z$ ……………………(6 分)

$$V=\frac{1}{6}(3x)(3y)(3z)=\frac{9}{2}xyz=\frac{9}{2}a^2$$ ……………………..(8 分)

三. 令 $t=\dfrac{x+1}{2}$，得级数(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$， $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$, $R=1$ ……………(2 分)

$t=\pm 1$ 时，级数(1)发散，故(1)的收敛域为 $t\in(-1,1)$ ……………..(3 分)

由 $-1<\dfrac{x+1}{2}<1$, 得原级数收敛域 $-3<x<1$ ………………..(4 分)

设 $S(t)=\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$ $\int_0^t S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty} t^n=\dfrac{t}{1-t}$ …………………(6 分)

$$S(t)=(\frac{t}{1-t})'=\frac{1}{(1-t)^2}$$ …………………(8 分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{x+1}{2})^n=\frac{x+1}{2}\cdot\frac{1}{(1-\frac{x+1}{2})^2}=\frac{2(x+1)}{(x-1)^2}$$ ……………………..(9 分)

四. $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3\sin\varphi dr$ …………………………….(4 分)

$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi$ ……………………………(7 分)

$=-\frac{8}{5}\pi\cos^5\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{5}\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{8})$ …………………………….(9 分)

五. $f_x'=2xy$ $f_y'=x^2+3y^2-1$ ………………(2 分)

令 $f_x'=0, f_y'=0$，解得 $x=0$， $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，或 $x=\pm1$， $y=0$

得四点 $P_1(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$，$P_2(0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$，$P_3(1,0)$，$P_4(-1,0)$ ………………..(4 分)

$f_{x^2}''=2y$ $f_{xy}''=2x$ $f_{y^2}''=6y$

在点 P_1， $AC-B^2=4>0$， $A=\frac{2}{\sqrt{3}}>0$

$P_1(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ 是极小点， $f(P_1)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 是极小值 ………………..(6 分)

在点 P_2， $AC-B^2=4>0$， $A=-\frac{2}{\sqrt{3}}<0$

$P_2(0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$ 是极大点， $f(P_2)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 是极大值 ……………..(8 分)

在点 P_3,P_4，都有 $AC-B^2=-4<0$，故 P_3,P_4 不是极值点 …………(10分)

六.　　由题意，有　$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$　……………………….(1 分)

即　$2x+\varphi'(y)=2(x-y)$　　$\varphi'(y)=-2y$　…………………….(3 分)

$$\varphi(y)=-y^2+C$$ …………………….(4 分)

由 $\varphi(0)=1$，得 $C=1$，　故　$\varphi(y)=1-y^2$　…………………….(5 分)

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,2)}(2xy+1-y^2)dx+(x-y)^2dy$$

$$=\int_0^1 dx+\int_0^2(1-y)^2dy$$ …………………….(8 分)

$$=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$ …………………….(10 分)

七.　$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}$$ …………………..(3 分)

$$=(x^2+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n-1}$$ …………………….(4 分)

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n-1}x^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n-1}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n-1)}x^{2n-1}$$ ……………………….(6 分)

收敛域为　$x\in[-1,1]$　……………………….(8 分)

八.　　设 $S_1: z=2\ \ (x^2+y^2\le 4)$，$S_2: z=1\ \ (x^2+y^2\le 1)$

$$I=\oiint_{S+S_1^++S_2^-}-\iint_{S_1^+}-\iint_{S_2^-}x^3dydz+y^3dzdx+(z+1)dxdy$$ ………………..(1 分)

$$\oiint_{S+S_1^++S_2^-}x^3dydz+y^3dzdx+(z+1)dxdy=\iiint_V(3x^2+3y^2+1)dV$$ ……………..(3 分)

$$=\int_{1}^{2}dz\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{z}(3\rho^2+1)\rho d\rho=\frac{349}{30}\pi$$ ……………(5 分, 6 分)

$$-\iint_{S_1^+}-\iint_{S_2^-}x^3dydz+y^3dzdx+(z+1)dxdy$$

$$=-\iint_{S_1^+}3dxdy+\iint_{S_2^+}2dxdy=-3\iint_{x^2+y^2\le 4}dxdy+2\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$

$$=-3\cdot\pi 2^2+2\pi=-10\pi$$ ……………(8 分)

$$I=\frac{49}{30}\pi$$ ……………..(9 分)

九. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a$， 得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ ………………..(1 分)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=a$$ ……………….(2 分)

若 $a=0$，则 $f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$， $f(\frac{1}{n})=\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{|f''(0)|}{2}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})\right|$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛 …...(5 分)

若 $a>0$，有 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=a$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散， $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})\right|$ 发散 ……………(7 分)

但由于 $f'(0)>0$ 及 $f'(x)$ 的连续性，在 $x=0$ 的某邻域内有

$f'(x)>0$， $f(x)$ 单调增，故当 n 充分大时 $f(\frac{1}{n})$ 单调减少，且 $f(\frac{1}{n})\to 0$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})$ 收敛， 且为条件收敛 ……………(9 分)