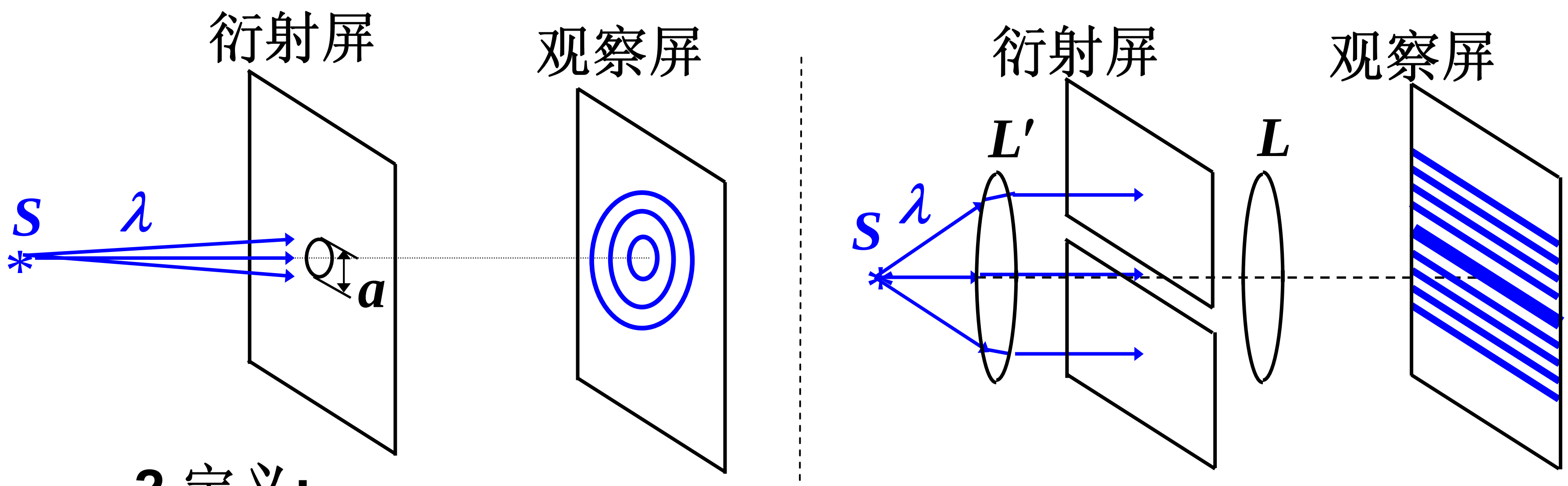
第二章　光的衍射（Diffraction of light）

§1 衍射现象、惠更斯 —— 菲涅耳原理

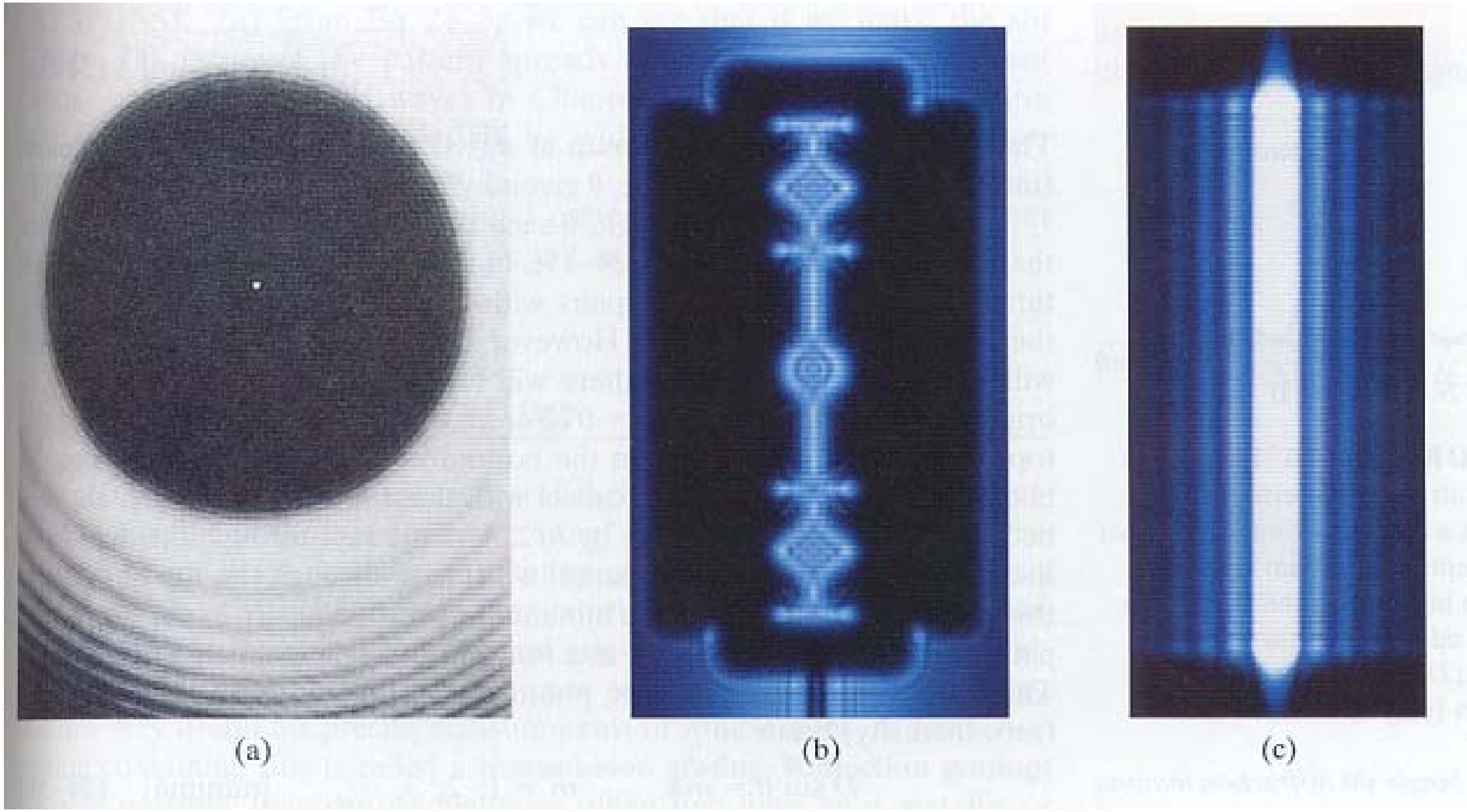
一. 光的衍射

1.现象:

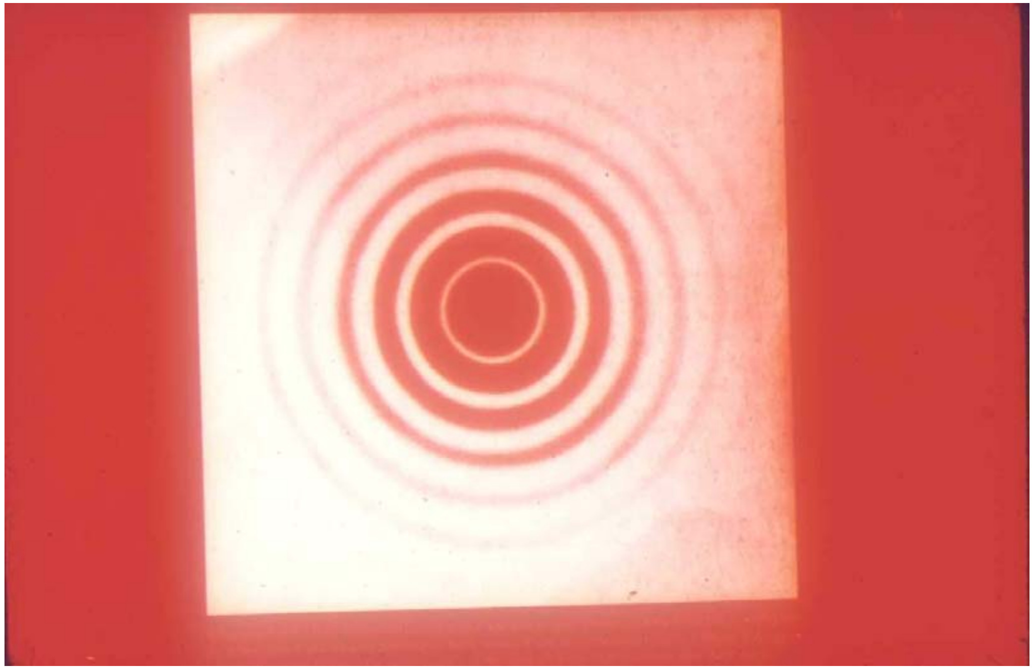


2.定义:

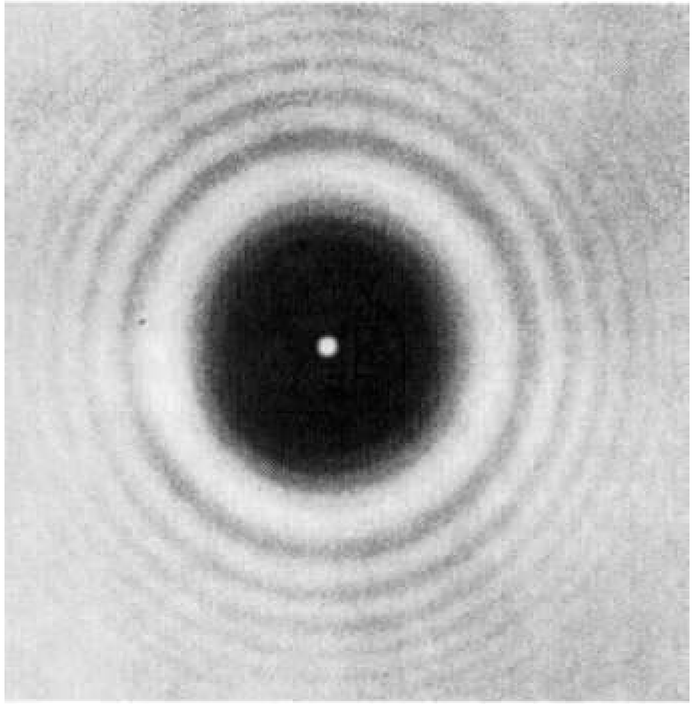
光在传播过程中能绕过障碍物的边缘而偏离直线传播的现象。



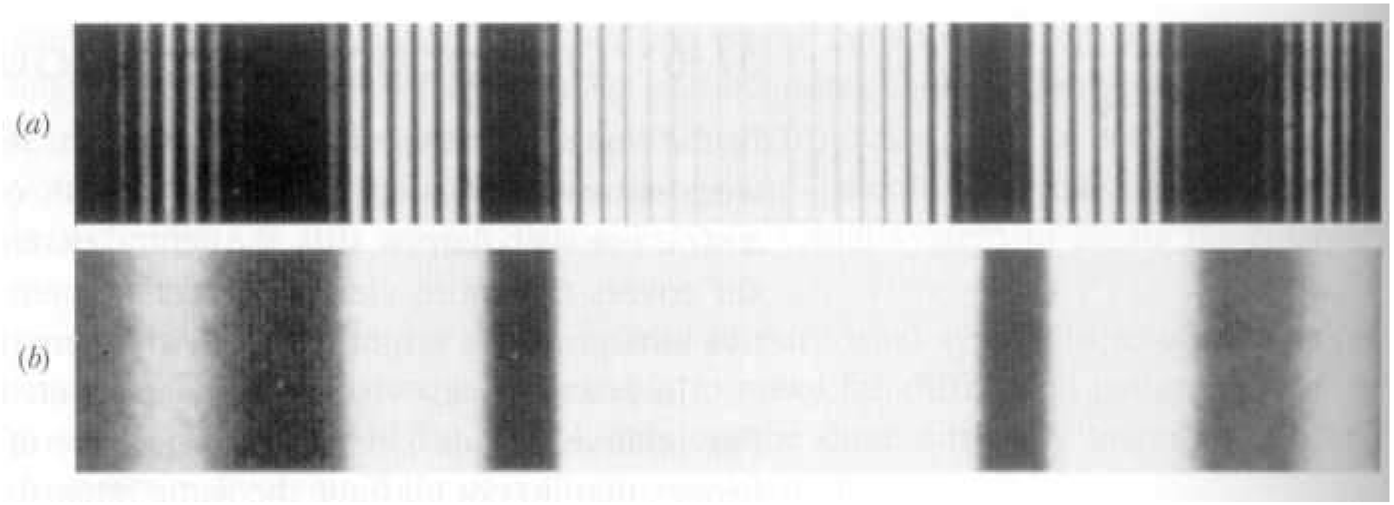
Diffraction pattern of (a) a penny, (b) a razor blade, (c) a single slit, each illuminated by a (nearly) point source of monochromatic light.



圆孔的夫朗和费衍射



泊松斑



单缝和多缝的衍射

3. 分类**:**

(1) 菲涅耳衍射　　　　　近场衍射

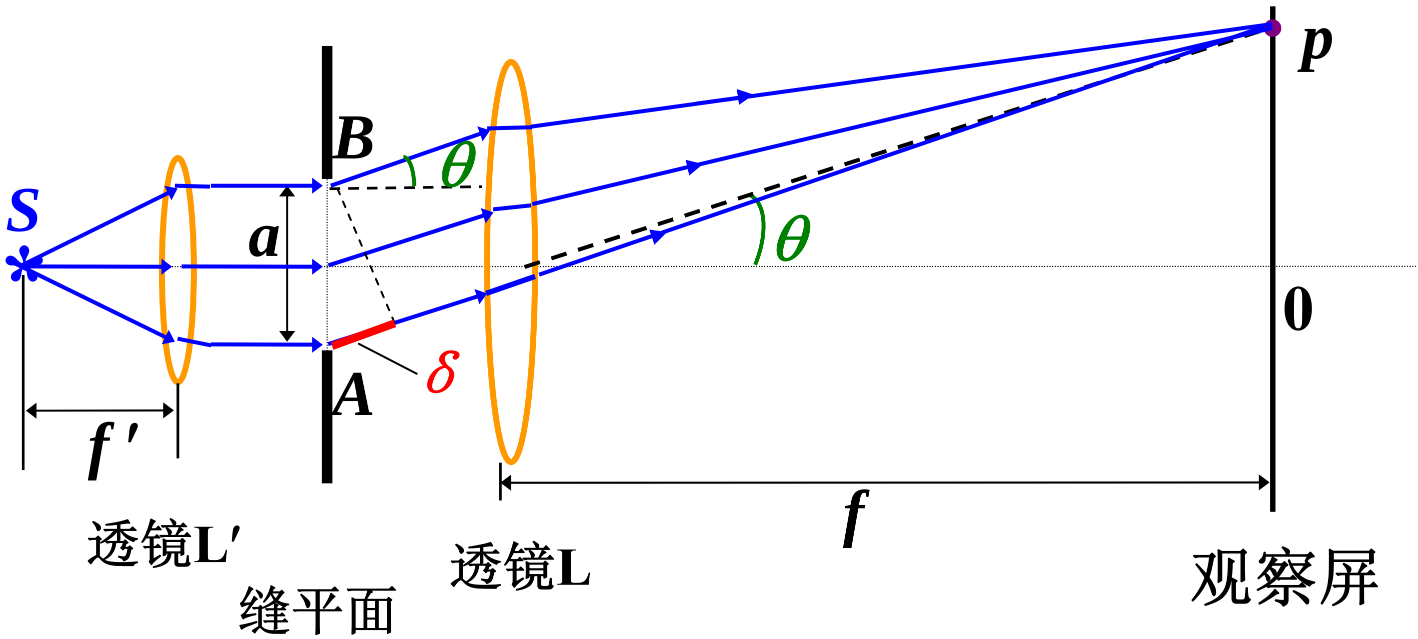
(2) 夫琅禾费衍射　　　　远场衍射

二**.** 惠更斯**——**菲涅耳原理

波传到的任何一点都是子波的波源，各子波在空间某点的相干叠加，就决定了该点波的强度。

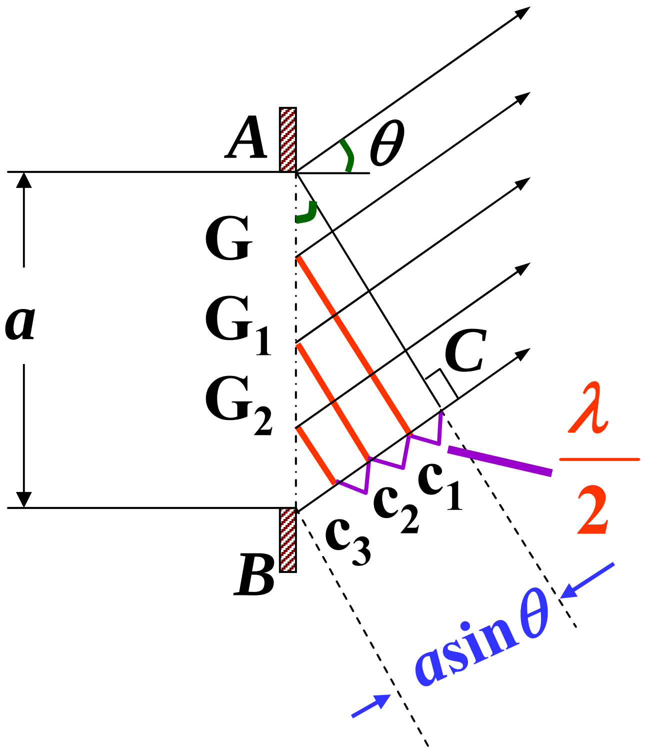
§2　单缝的夫琅禾费衍射、半波带法

一.装置

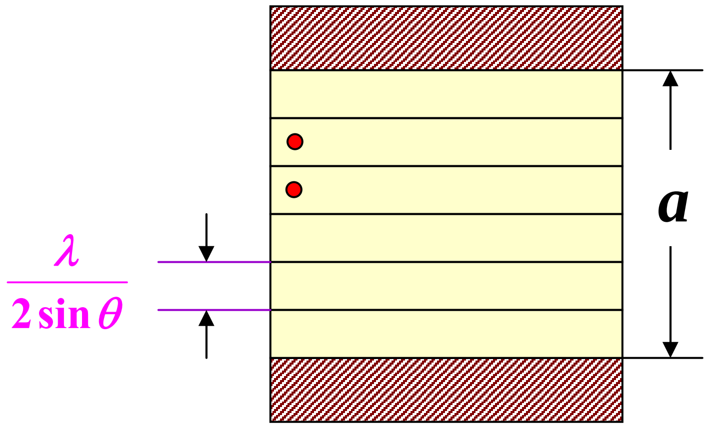


S: 单色光源　　θ**:** 衍射角　　$\overline{AB} = a$ **(缝宽)**

二.半波带法



A
θ
G
G_1
G_2
a
C
c_1
c_2
c_3
B
$\frac{\lambda}{2}$
$a\sin\theta$

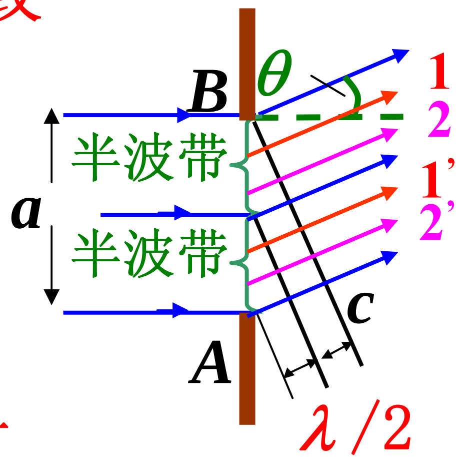


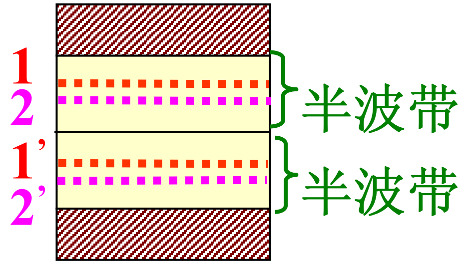
$\frac{\lambda}{2\sin\theta}$
a

分成偶数个半波带 —暗纹

$$a\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda$$

k=1,2,3

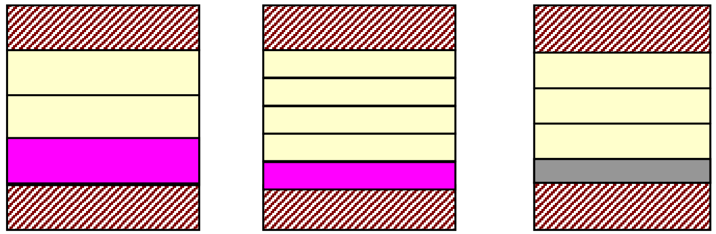




分成奇数个半波带—明纹

$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad k=1,2,3$$

θ增大→波带数增加→光强减小

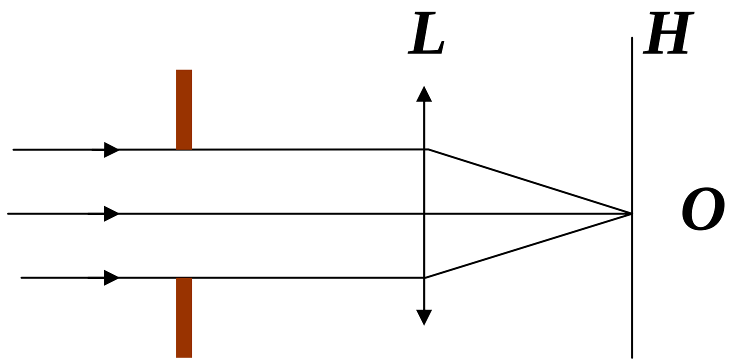


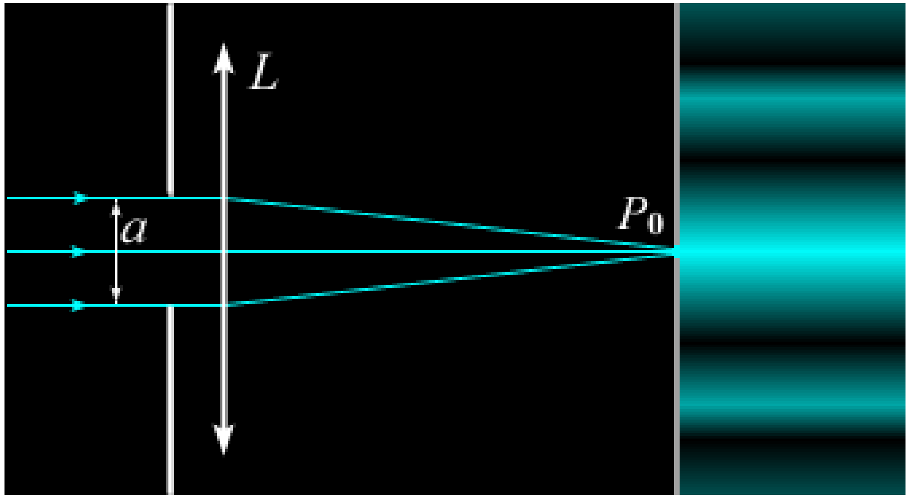
不能分成整数个半波带

光强介于最强与最暗之间

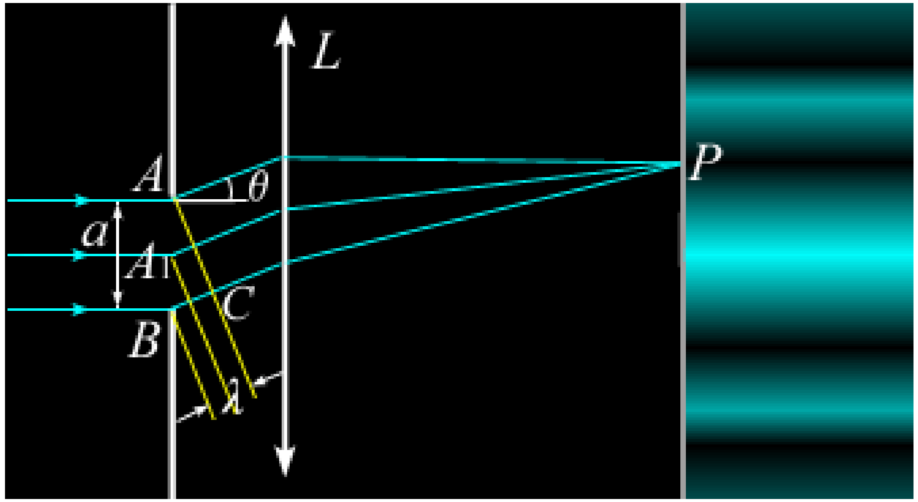
$$\theta = 0, \quad \delta = 0$$

—— 中央明纹(中心)

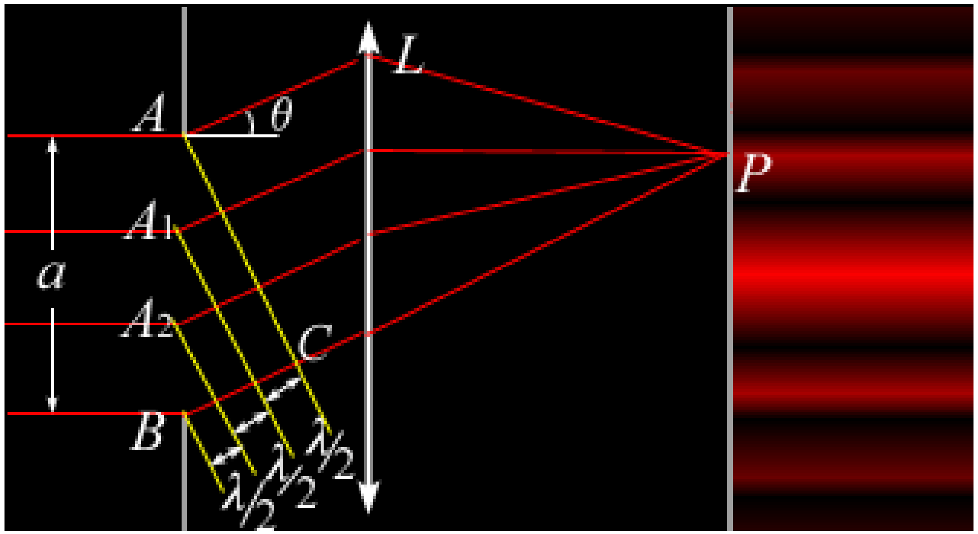




中央明纹中心



一级暗纹



一级明纹

三、明暗纹条件

$$a\sin\theta = 0$$ —— 中央明纹(中心)

$$a\sin\theta = \pm(2k'+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k' = 1,2,3\cdots$$

—— 明纹中心(近似)

$$a\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 1,2,3\cdots$$ ——暗纹(中心)

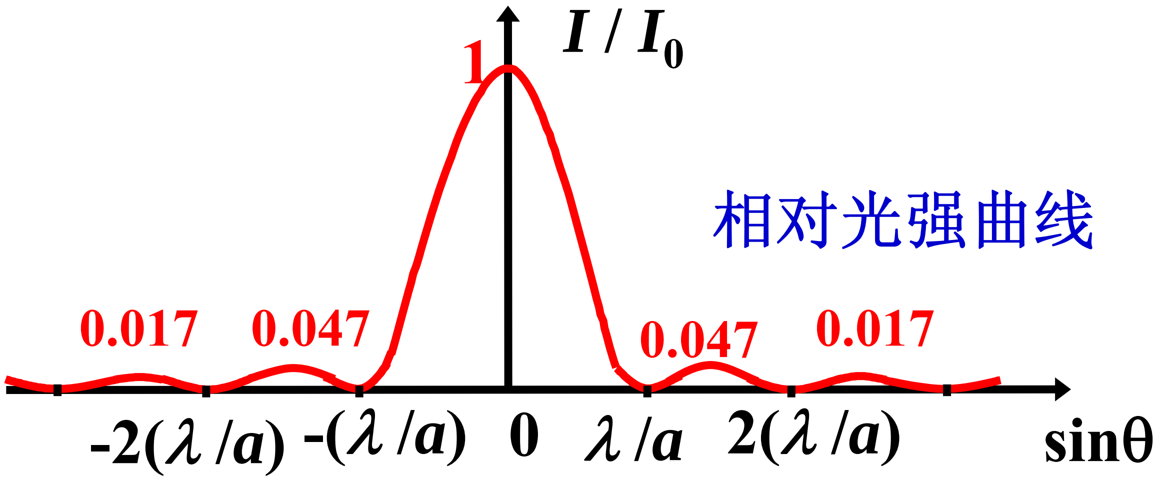
若 $a\sin\theta$ 不是半波长的整数倍，亮度介于最明和最暗之间。

四、光强分布

$I_1 = 4.7\ \%\ I_0$

$I_2 = 1.7\ \%\ I_0$

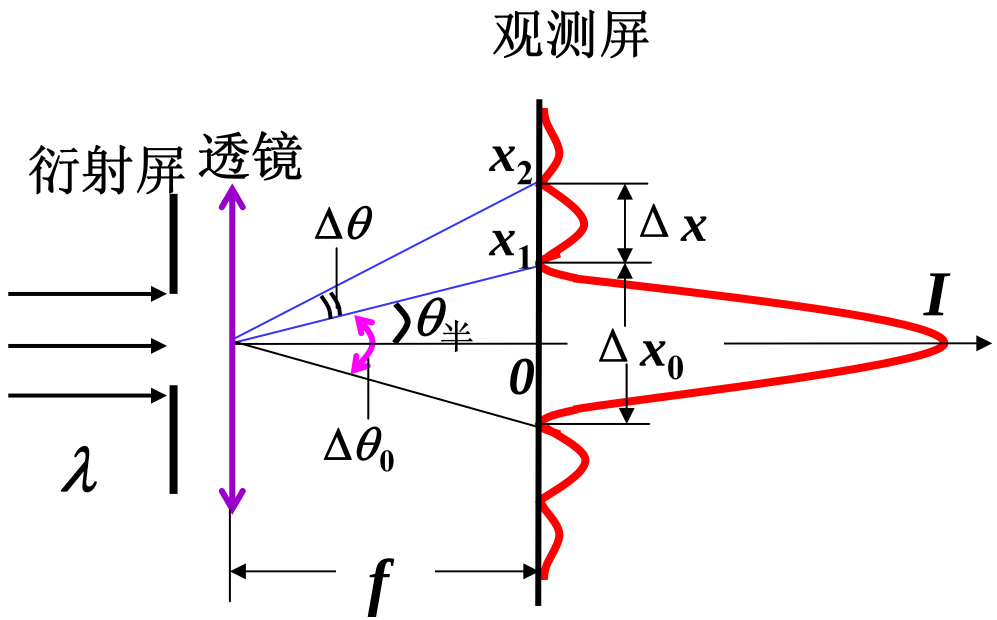
$I_3 = 0.8\ \%\ I_0$



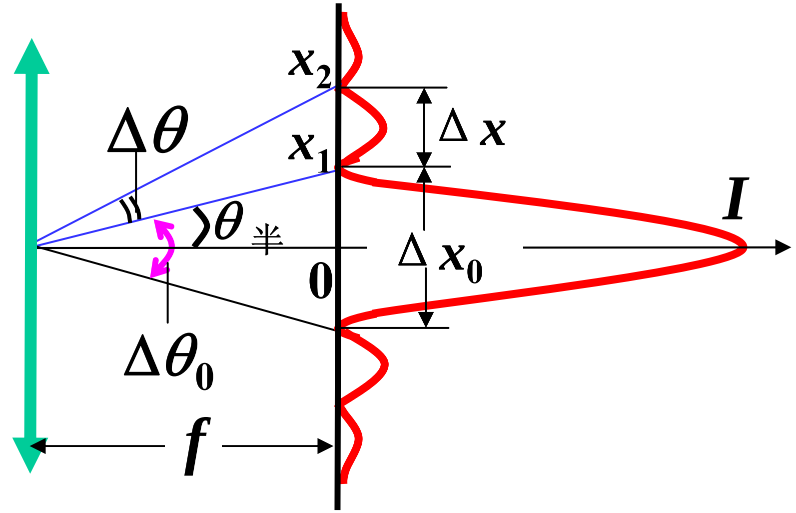
五、条纹宽度

1. 角宽度

某一亮纹的角宽度为该亮纹两侧两相邻暗纹中心对透镜光心所张的角度。



k 级明纹角宽度



对k 级暗纹

$$a \sin\theta_k = \pm k\lambda$$

$$\sin\theta_k \approx \theta_k$$

$$\theta_k = \frac{k\lambda}{a}$$

故 k 级明纹角宽度 $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k = \dfrac{(k+1)\lambda}{a} - \dfrac{k\lambda}{a} = \dfrac{\lambda}{a}$

中央明纹角宽度

$$\Delta\theta_0 = \theta_{+1} - \theta_{-1} = \frac{\lambda}{a} - (-\frac{\lambda}{a}) = \frac{2\lambda}{a}$$

中央明纹半角宽度 $\Delta\theta_{半} = \dfrac{\lambda}{a}$

2.亮纹的线宽度

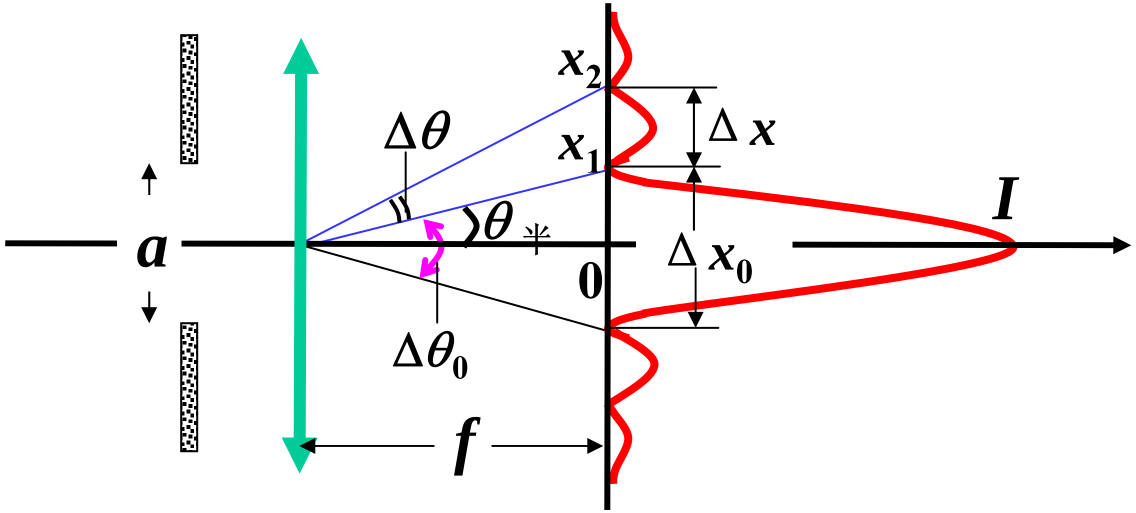
中央亮纹 $\Delta x_0 = 2f \ \tan\theta_{半} = 2f\ \theta_{半} = 2f\dfrac{\lambda}{a}$

$$\Delta x_0 \propto \frac{\lambda}{a}$$ ——衍射反比定律

其它次极大

$$\Delta x = f\,\Delta\theta$$

$$= f\frac{\lambda}{a}$$



讨论：

$$\theta_k = \frac{k\lambda}{a} \qquad \Delta\theta_{半} = \frac{\lambda}{a} \qquad \Delta x = f\frac{\lambda}{a}$$

- 波长对条纹宽度的影响

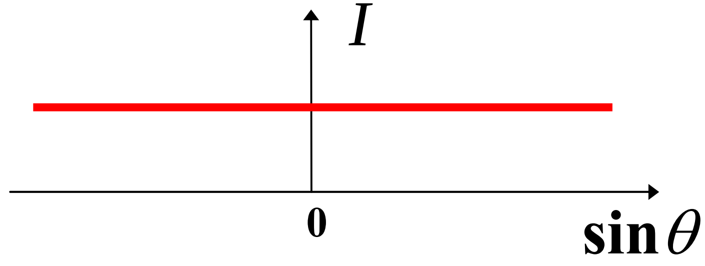
缝宽 a 一定，$\lambda\uparrow\ \Delta\theta\uparrow\ \Delta x \propto \lambda$，波长越长，条纹宽度越宽

- 缝宽变化对条纹的影响

- $\Delta x = \frac{1}{2}\Delta x_0 = f\frac{\lambda}{a}$ 缝宽越小，条纹宽度越宽

当$a > \lambda$且$\frac{\lambda}{a} \to 1$时，$\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$，

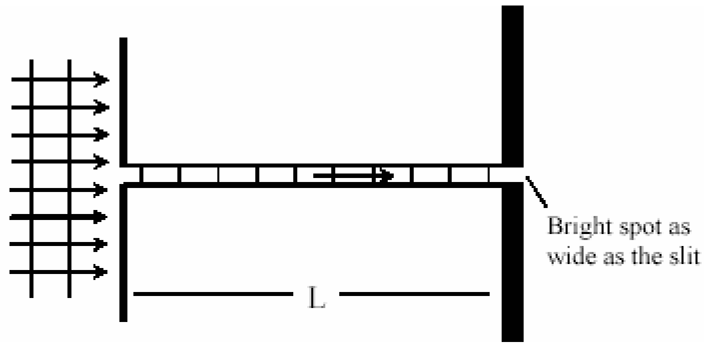
屏幕上一片亮。



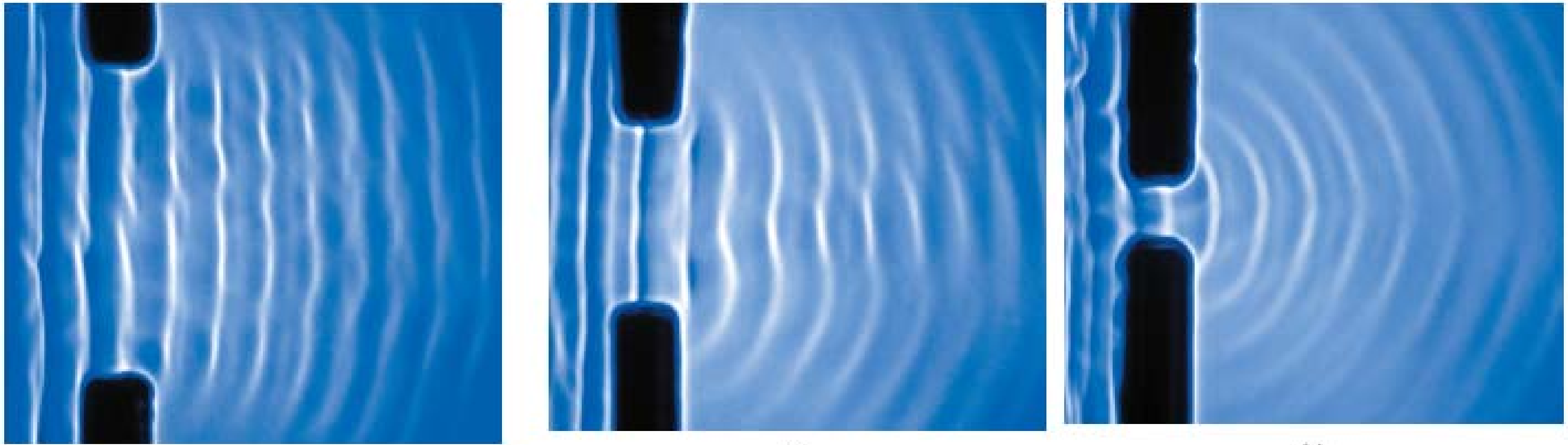
- 当 $a >> \lambda$ 时，$\frac{\lambda}{a} \to 0 \quad \Delta x \to 0$

只显出单一的明条纹

—— 单缝的几何光学像。



$\therefore$几何光学是波动光学在 $a >> \lambda$ 时的极限情形.

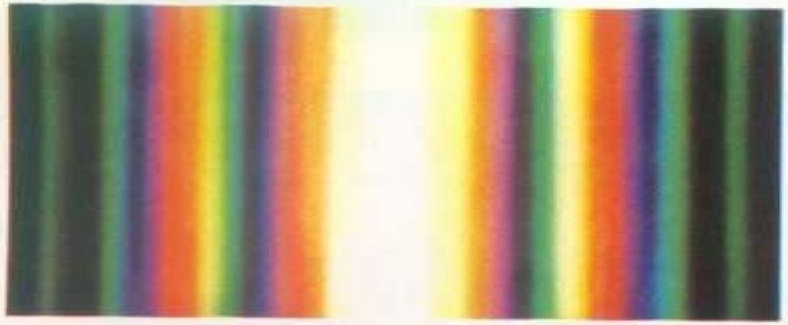


(a) (b) (c)

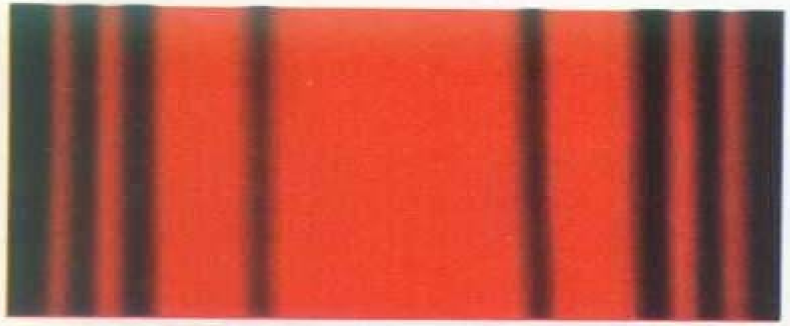
Figure 25.28 Water waves moving from left to right in a ripple tank pass through openings of different widths.

- 白光入射单缝

  中央 白色明纹
  两侧 对称彩带，由紫到红



B. Passing white light through a single slit produces this diffraction pattern.



Red light passed through the same slit produces this pattern.

- 单缝上下平移，
屏上衍射条纹位置不变

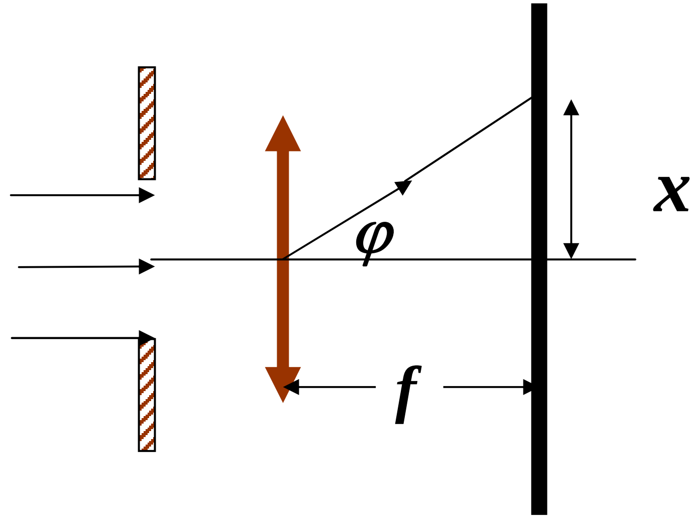
- 以上明、暗纹公式只适用于平行光垂直单缝入射，入射光线倾斜，需考虑入射光的光程差。

例：如图所示单缝衍射装置，缝宽 a =0.5mm，f =50cm ，用可见光照射单缝，在观察屏上 x =1.5mm 处看到明纹极大，求：

（1） 入射光的波长及衍射级次。

（2） 单缝所在处的波阵面被分成的波带数目。

解： (1)明纹 $a\sin\varphi = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$



$$\tan\varphi = \frac{x}{f} = \frac{1.5}{500} = 0.003 < 5^\circ$$

$$\sin\varphi = 0.003$$

$$\lambda = \frac{2a\sin\varphi}{(2k+1)} = \frac{2\times 0.5\times 0.003}{(2k+1)}\times 10^7 \ (\text{Å})$$

$$\lambda = \frac{3\times 10^4}{(2k+1)} \ (\text{Å})$$

$$\lambda = \frac{3\times 10^4}{(2k+1)}\ (\mathring{A})$$

$$k=1 \qquad \lambda_1 = 10000(\mathring{A}) \qquad \text{红外}$$

$$\left.\begin{array}{ll} k=2 & \lambda_2 = 6000(\mathring{A}) \\ k=3 & \lambda_3 = 4286(\mathring{A}) \end{array}\right\} \text{可见光}$$

$$k=4 \qquad \lambda_4 = 3333(\mathring{A}) \qquad \text{紫外}$$

(2) 半波带数目

$$k=2 \qquad \lambda_2 = 6000(\mathring{A}) \qquad N = 2k+1 = 5$$

$$k=3 \qquad \lambda_3 = 4286(\mathring{A}) \qquad N = 2k+1 = 7$$

例：波长为 λ 的单色光以 α 角斜射到宽度为 b 的单缝上，如图。求各级暗纹的衍射角。

解：　1、2 光线的光程差

$$BC + BD = b\sin\theta + b\sin\alpha$$

由暗纹条件

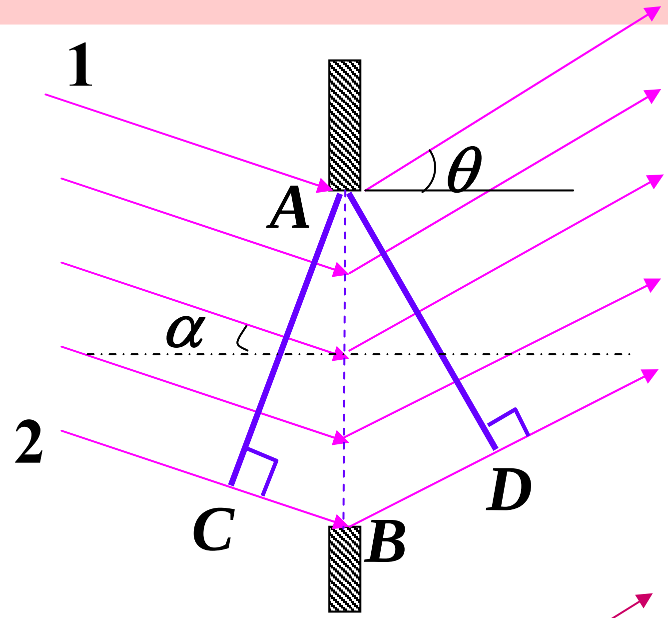
$$b\sin\theta \pm b\sin\alpha = \pm k\lambda$$

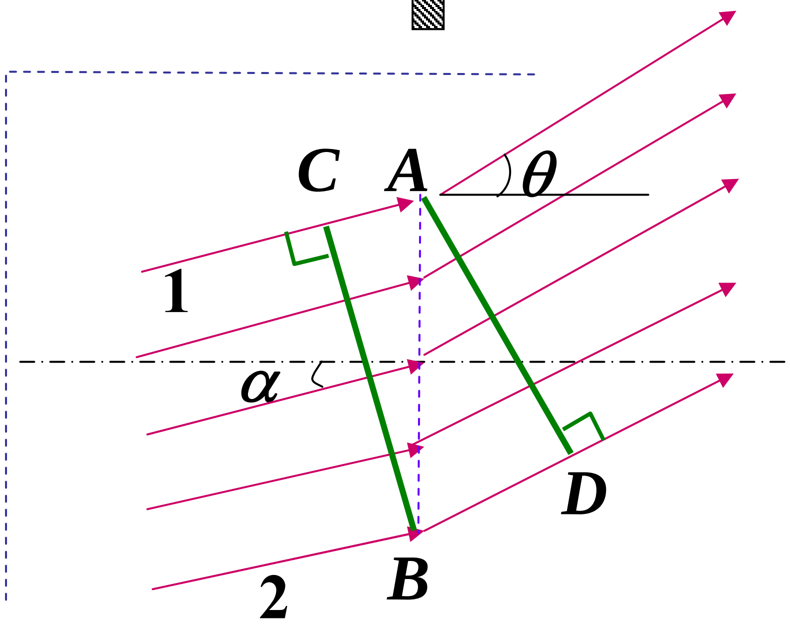
$$k = 1, 2, \ldots.$$

θ 、α 在法线同侧取+

θ 、α 在法线异侧取−

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\pm k\lambda}{b} \mp \sin\alpha\right)$$





§3 光学仪器的分辨本领

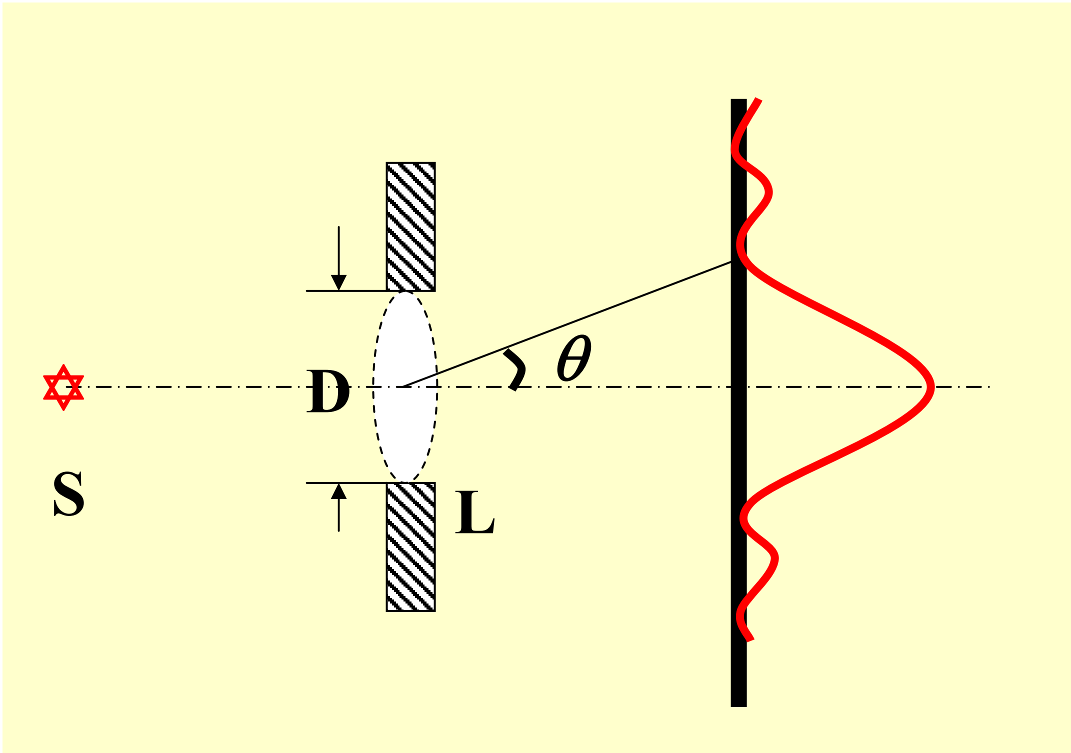
The Resolution of Optical Instruments

一、圆孔的夫琅禾费衍射

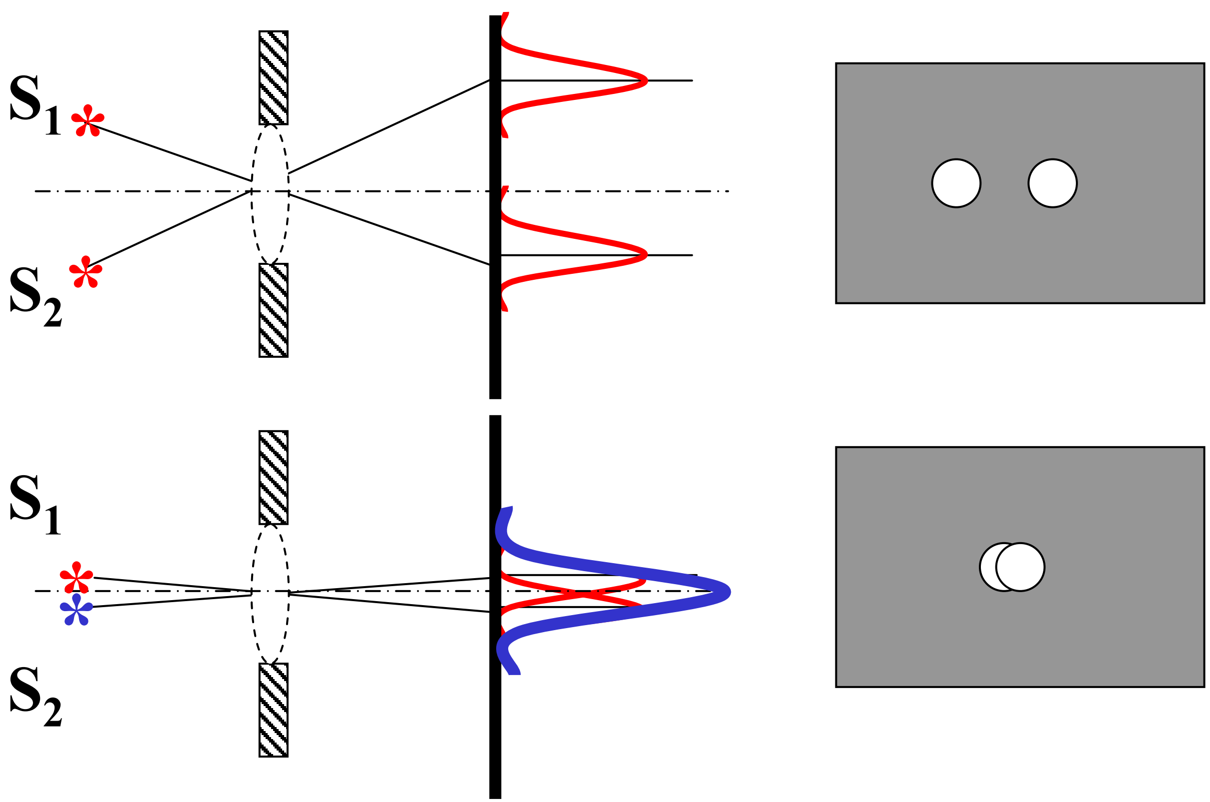
第一极小的角位置

$$\sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

Figure 25.35 Diffraction pattern from a circular aperture on a distant screen.

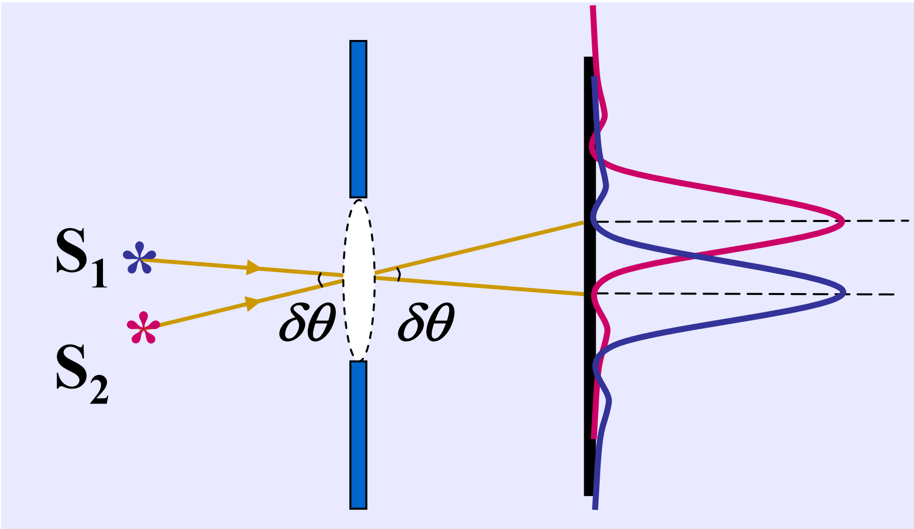


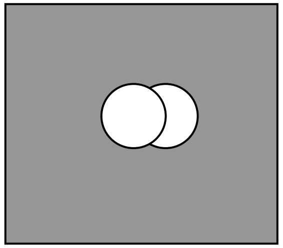
二、光学仪器的分辨本领



1. 瑞利判据：

对于两个强度相等的不相干的点光源（物点），一个点光源的衍射图样的主极大刚好和另一个点光源的衍射图样的第一极小相重合时，两个点光源（或物点）恰好为这光学仪器所分辨。





2. 角分辨率：最小分辨角 $\delta\theta$

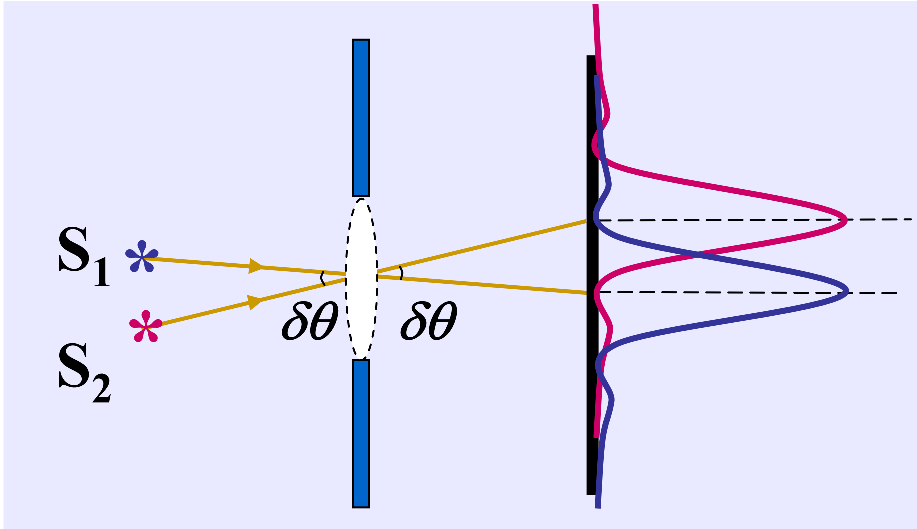
3. 分辨本领（分辨率）*R*：

$$R = \frac{1}{\delta\theta}$$

对圆孔的夫琅禾费衍射

$$\sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

$$\theta \approx \sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$



角分辨率：

$$\delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

分辨率：

$$R = \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

讨论：

$D\uparrow$ $R\uparrow$ 哈勃望远镜 物镜直径 2.4 m

$\lambda\downarrow$ $R\uparrow$ 电子显微镜 ($\lambda \sim 10^{-3}$nm)

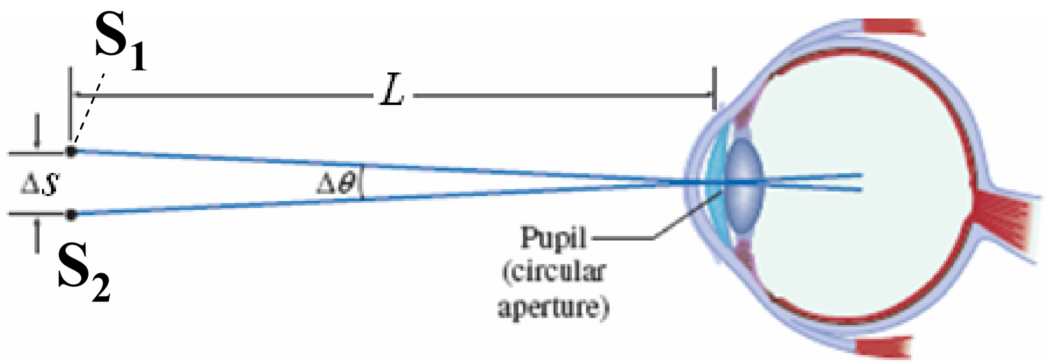
例：在通常亮度下，人眼瞳孔直径为 **3 mm,** 求人眼的最小分辨角是多大？远处两细丝之间的距离为**2.0mm,**问距离细丝多远时人眼恰好能分辨它们？

解：　取 $\lambda = 550\ \text{nm}$

$$\delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\times\frac{550\times10^{-9}}{3\times10^{-3}} = 2.24\times10^{-4}(\text{rad}) \approx 1'$$

若要恰好分辨

$$\delta\theta = \frac{\Delta s}{L}$$



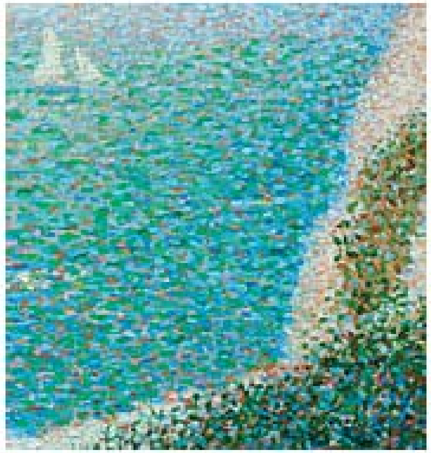
Angular separation $\Delta\theta$ of two adjacent dots.

$$L = \frac{\Delta s}{\delta\theta} = \frac{2\times10^{-3}}{2.24\times10^{-4}}$$

$= 8.9\text{m}$

印象派的点彩 画作

(a)



(b)

Figure 25.39

(a) *La grève du Bas Butin à Honfleur* by Georges Seurat (1859–1891). (b) A close-up view of the same painting.

取 $\lambda = 400$ nm，两个不同颜色的点之间的距离为 2 mm，人眼瞳孔直径为 2.2 mm。

则 距离画约9m处观看，颜色均匀混合。

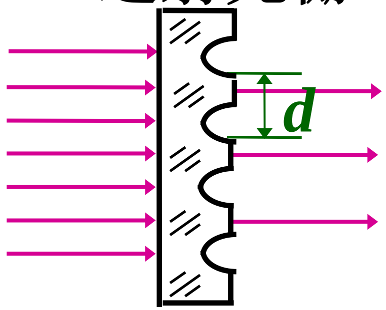
§4 光栅衍射

一、 光栅

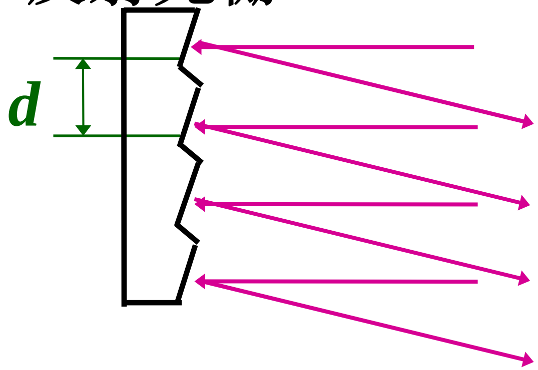
1. 光栅： 大量等宽等间距的平行狭缝(或反射面)构成的光学元件。

2. 种类:

透射光栅



反射光栅



晶体–天然光栅

一般光栅
几十—几千条缝/mm

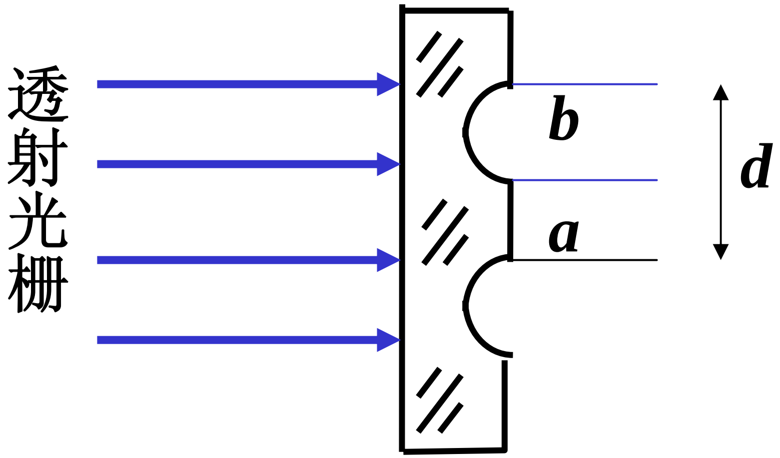
3. 光栅常数 *d*

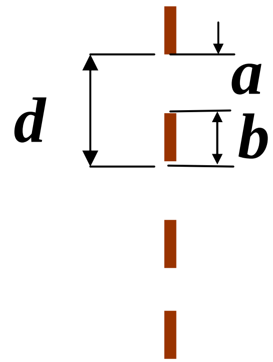
a： 透光（或反光）部分的宽度

b： 不透光(或不反光)部分的宽度

$$d = a + b$$

—光栅常数





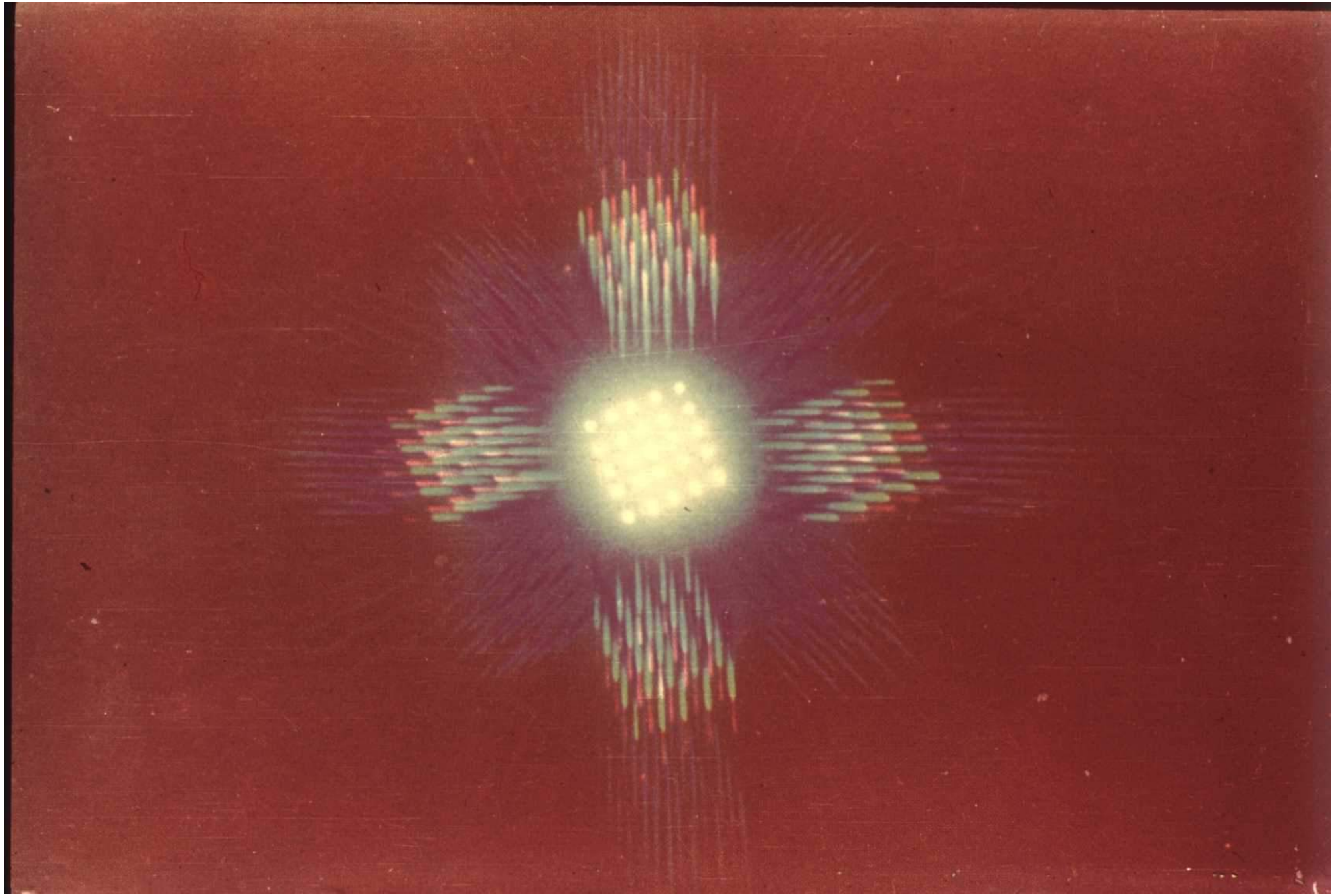
光栅常数 d 与缝数/cm（刻痕/cm)成倒数关系。

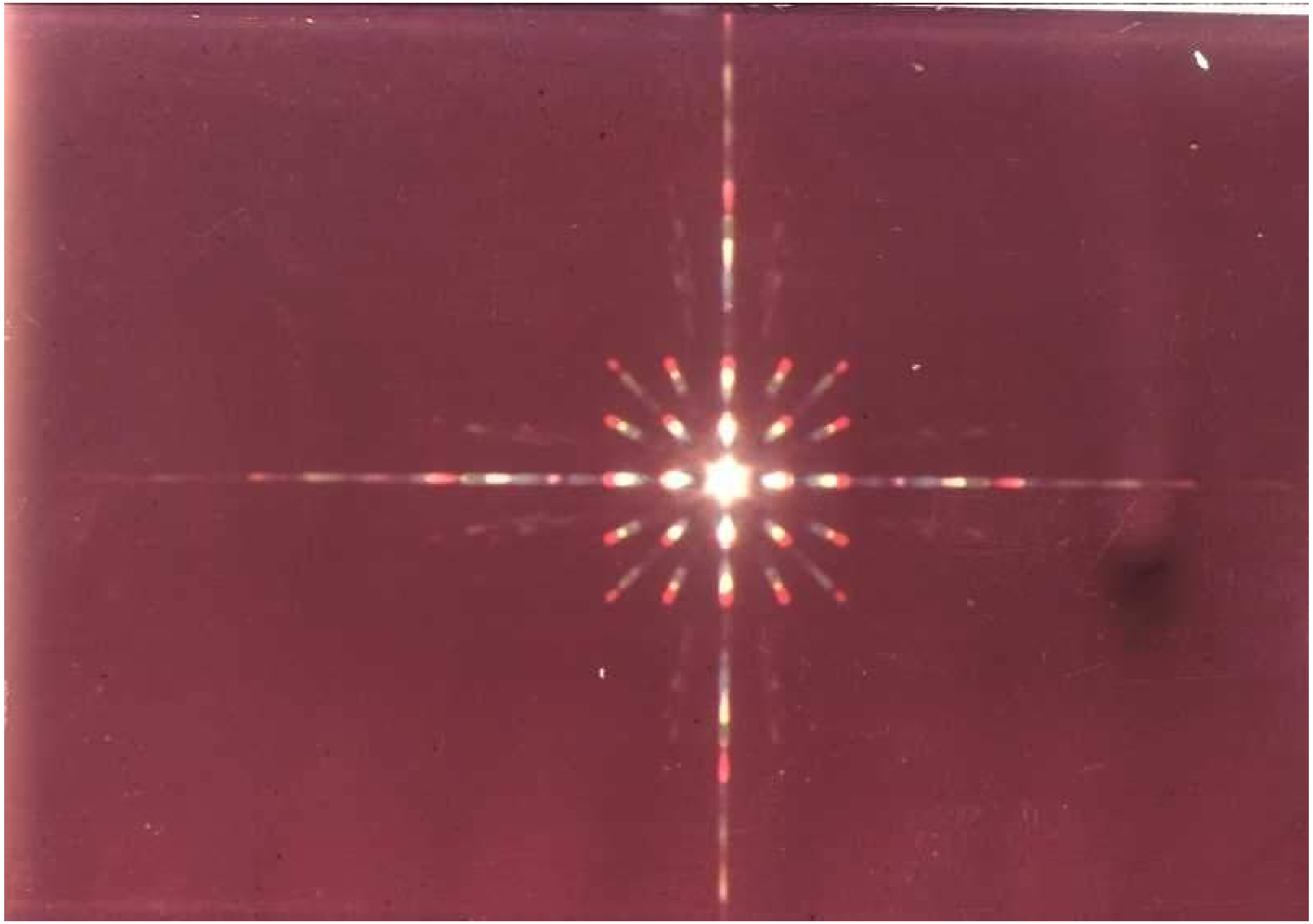
例： 8000/cm

$$d = a + b = \frac{1}{8000} = 1.25 \times 10^{-4}\,(\mathrm{cm})$$

光栅缝数 N

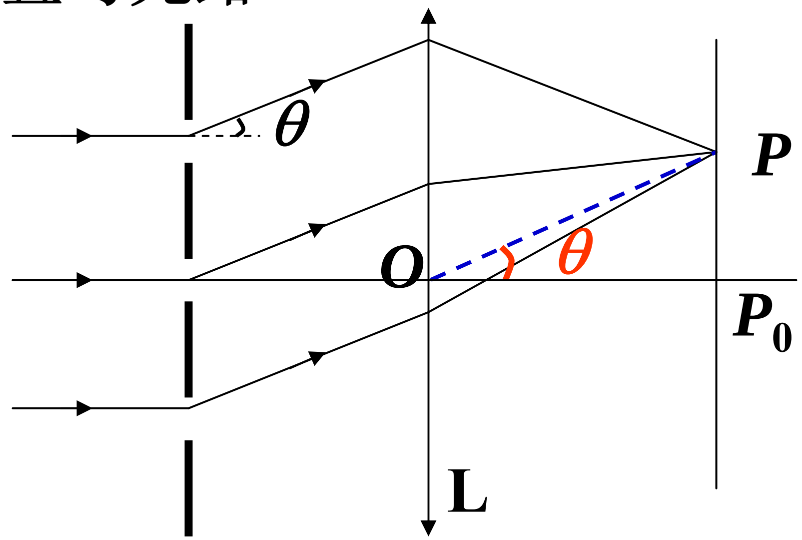
N , d 光栅的重要常数。



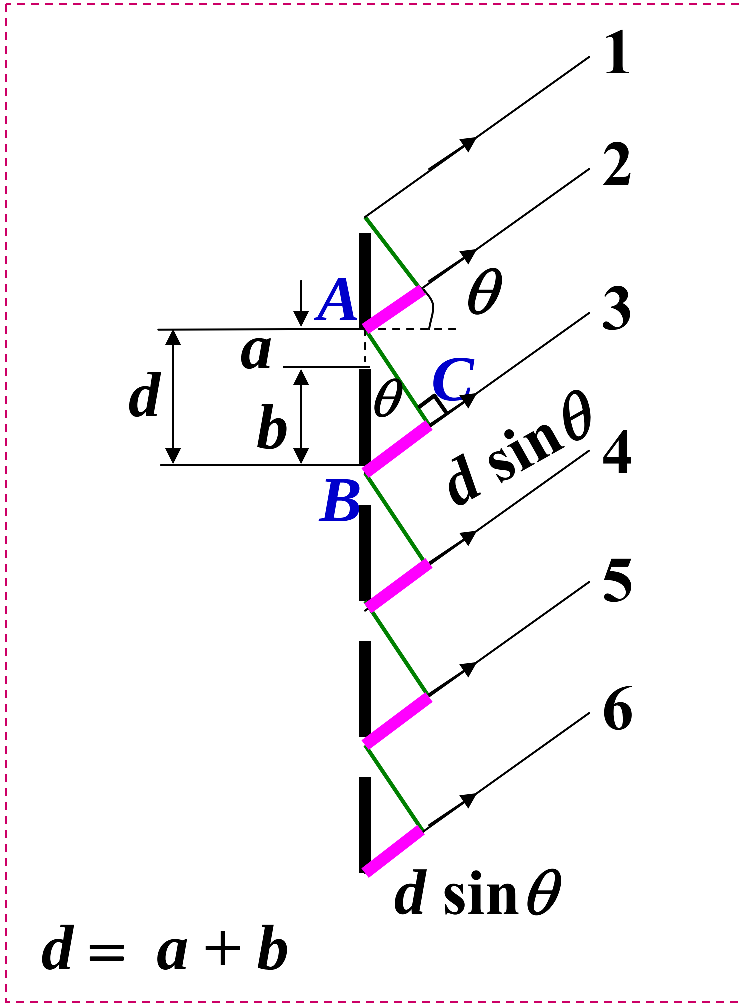


二、光栅衍射

1.装置与光路



多光束干涉 + 单缝衍射



2.多光束干涉

2.多光束干涉

2.1光栅方程

$$d\sin\theta = \pm k\lambda$$ ——光栅方程

k =0,1,2…

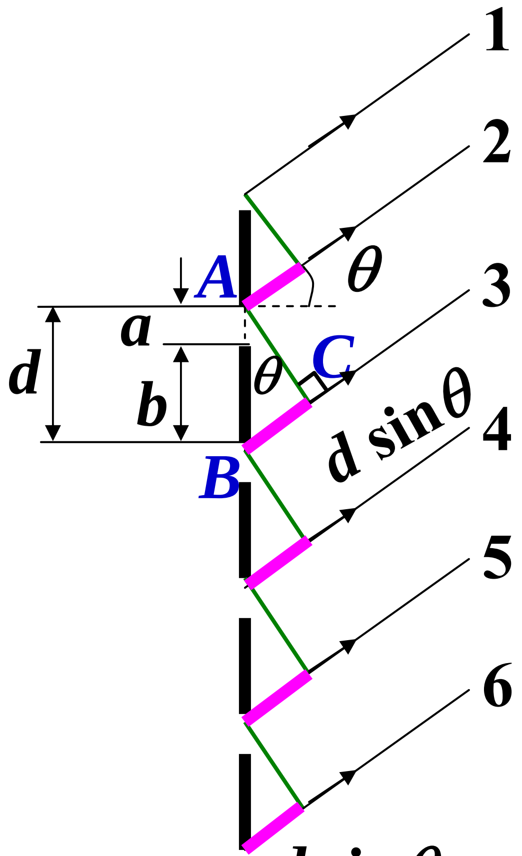
主极大的级次

P为明纹（主极大）

$$\underbrace{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow}_{N个}$$

$$A = N A_0$$

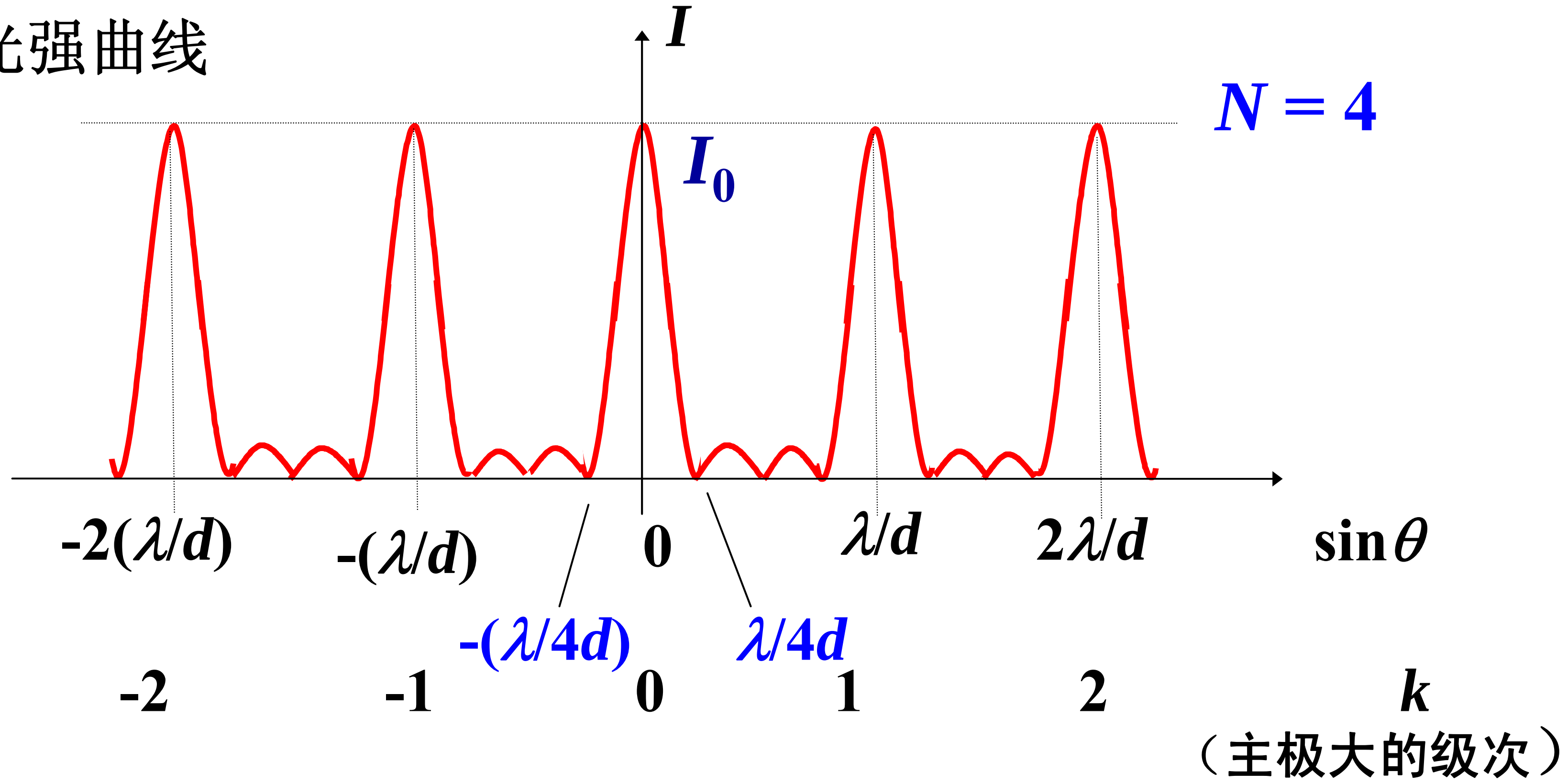
$$I = N^2 I_0$$



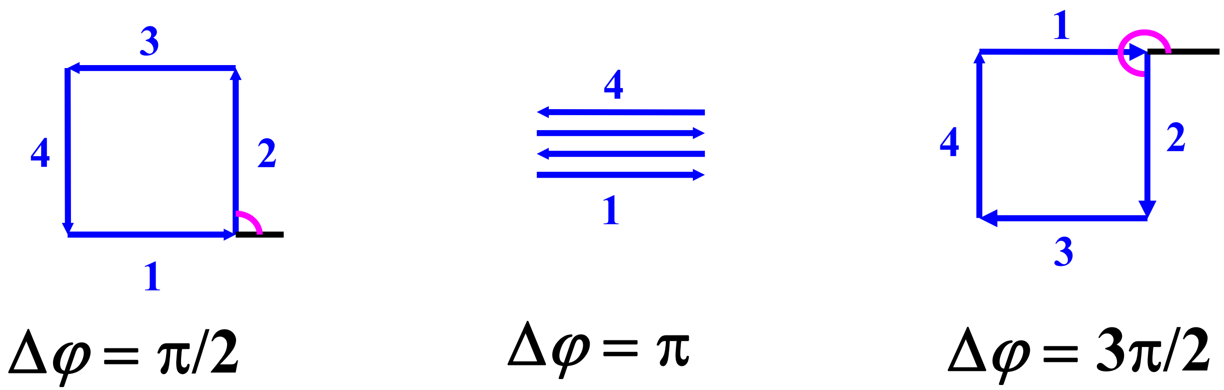
$d\sin\theta$

$d = a + b$

2.2 光强曲线



设 $N = 4$,有三个极小。极小值的形成



2.3 极小值位置

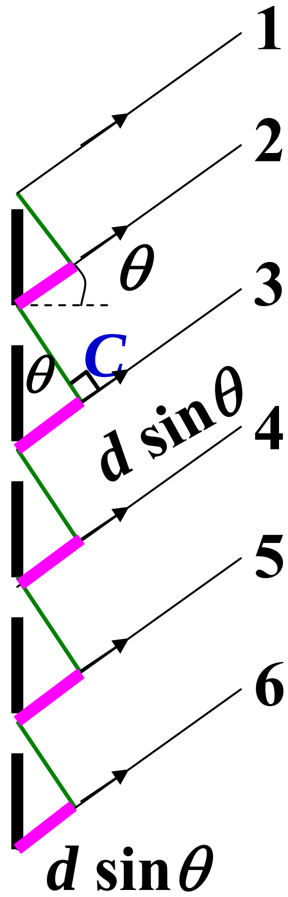
初相差 $\Delta\varphi = \dfrac{2j'\pi}{N}(j' \neq Nk)$ 合振幅为零

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta = \frac{2j'\pi}{N}$$

$$(j' \neq 0, \pm N, \pm 2N \cdots)$$

$$Nd\sin\theta = j'\lambda \quad (j' \neq 0, \pm N, \pm 2N \cdots)$$

——极小值位置



$$Nd\sin\theta = \pm j'\lambda$$

$$[j' = 1, 2, \cdots (N-1), (N+1) \cdots]$$

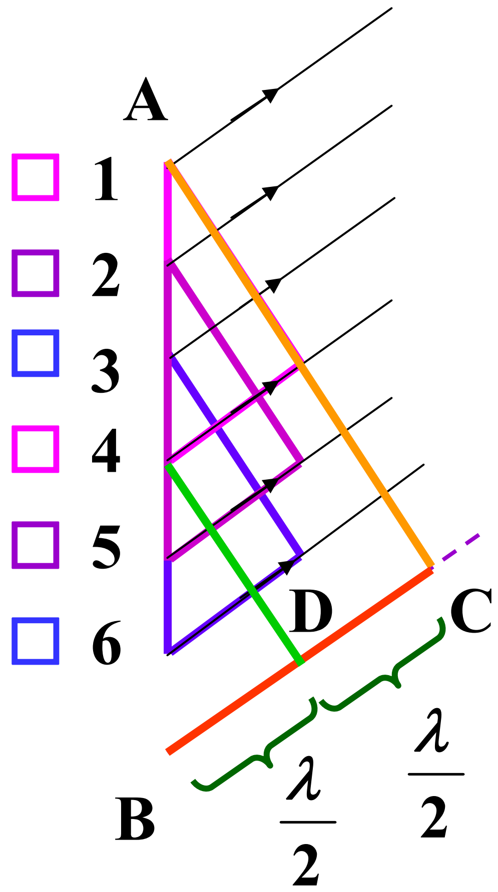
相邻主极大间有（N—1）个暗纹。

极小值举例，N=6

取 $j' = 1$

$$Nd\ \sin\theta = \lambda$$

$$Nd\ \sin\theta = j'\lambda$$

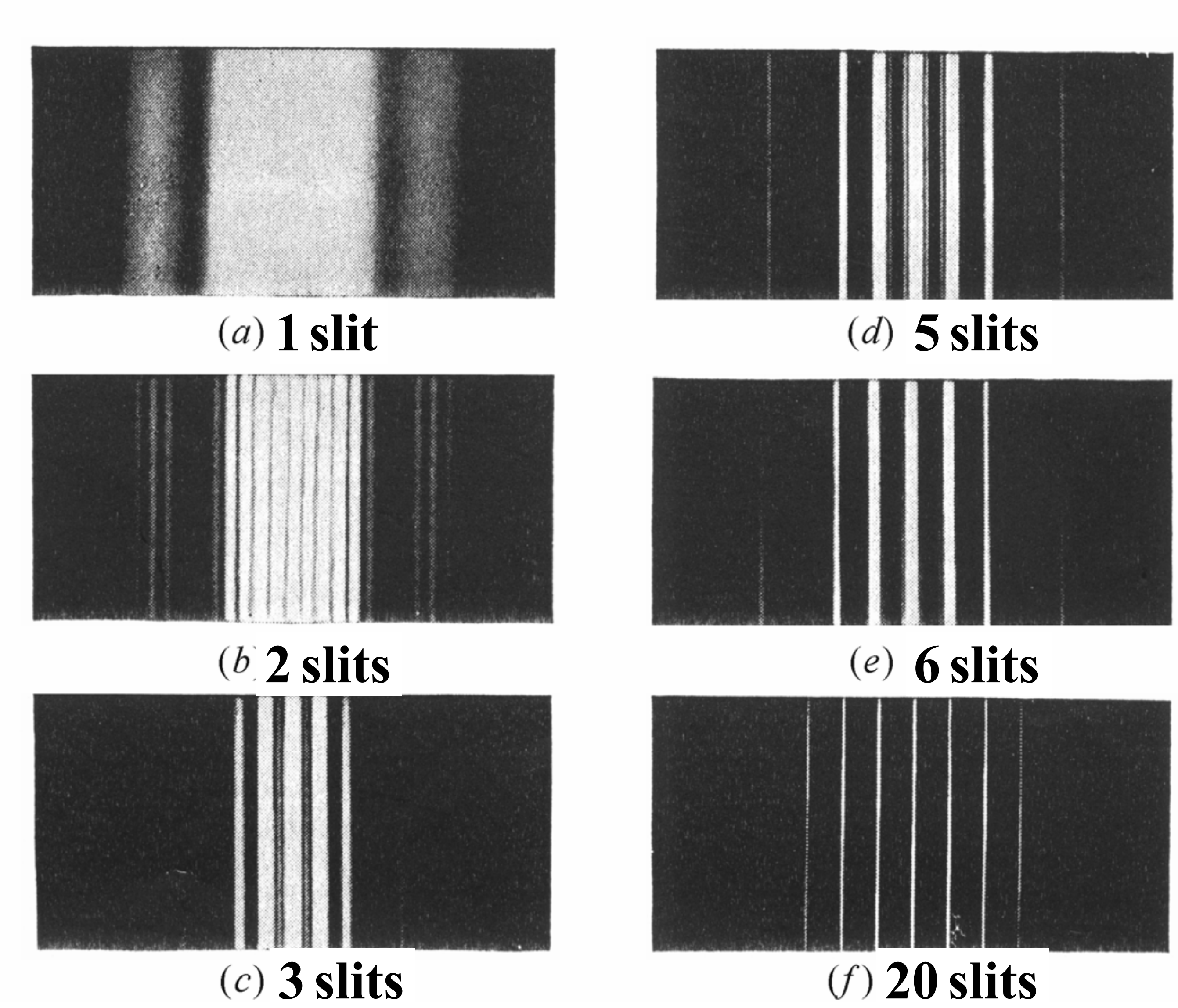


2.4 多光束干涉条纹特点：

（1）几乎黑的背景上的又细、又亮条纹

$I = N^2 I_0$

因为缝数 N 很大，所以主极大很亮。



As ***N*** increases, the pattern changes to narrow maxima separated by wide dark regions.

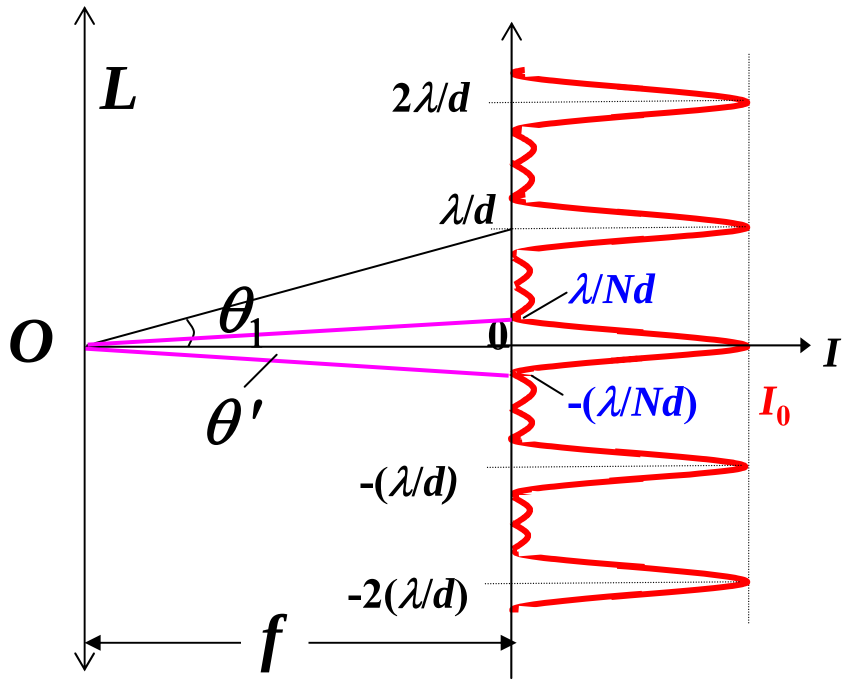
缝数 N 很大时，主极大线很细的解释

0级与一级明纹的角宽度θ_1

$$d\sin\theta = \pm k\lambda$$

$$d\sin\theta_1 = \lambda \qquad \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d}$$

$$\theta_1 > \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d}$$



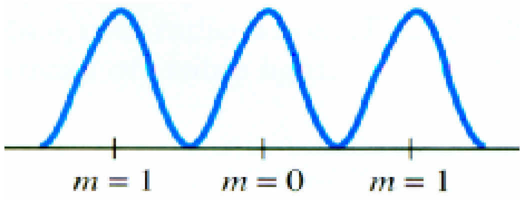
零级与一级最小的角宽度θ'

$$Nd\sin\theta' = \lambda \qquad \theta' = \frac{\lambda}{Nd} \qquad 2\theta' = \frac{2\lambda}{Nd}$$

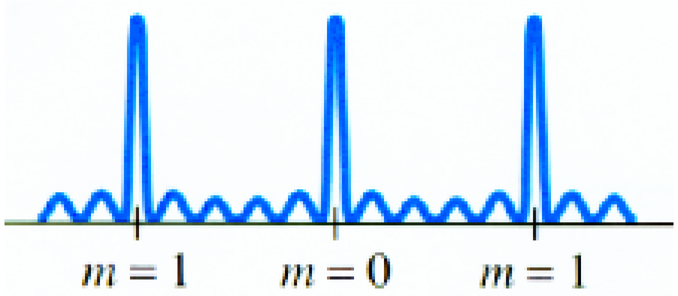
$$\frac{\theta_1}{2\theta'} > \frac{\frac{\lambda}{d}}{\frac{2\lambda}{Nd}} = \frac{N}{2}$$

因为缝数 N 很大，所以 $\theta_1 >> 2\theta'$。

缝数N越大，条纹越亮，越细。



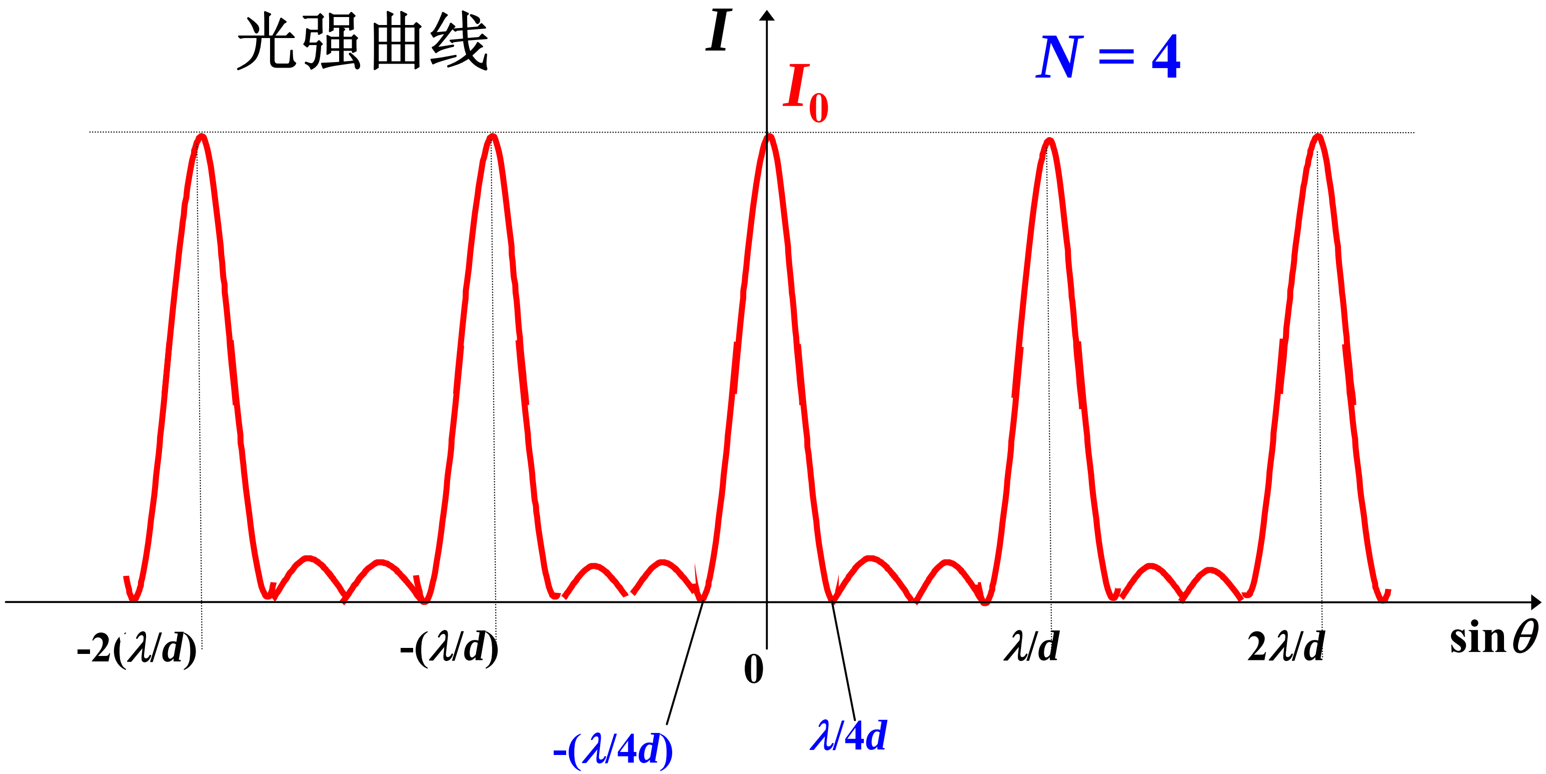
two-slits



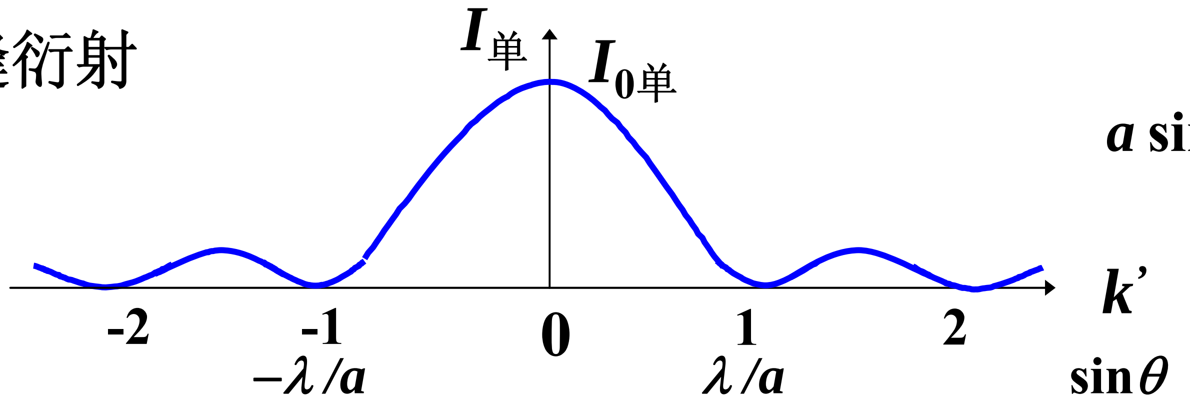
six-slits

（2）相邻主极大之间分布着（$N-1$）个极小，($N-2$)次极大。

光强曲线

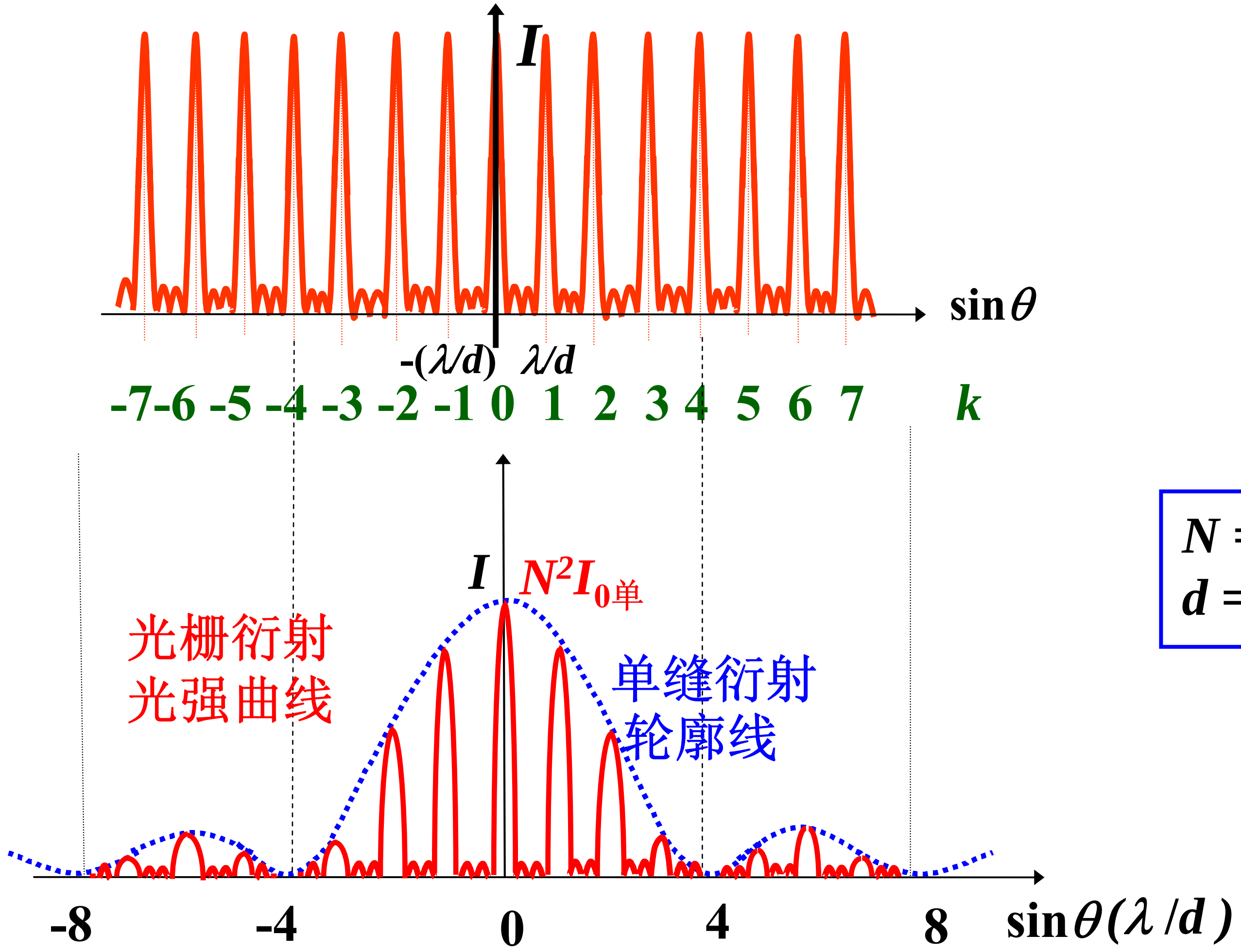


3.单缝衍射



$$a \sin\theta = \pm k\lambda$$

4.光栅



$N = 4$
$d = 4a$

5.缺级

定义： 当多缝光束干涉的主极大恰好与单缝衍射的极小位置重合时，该级主极大将在屏幕上消失的现象。

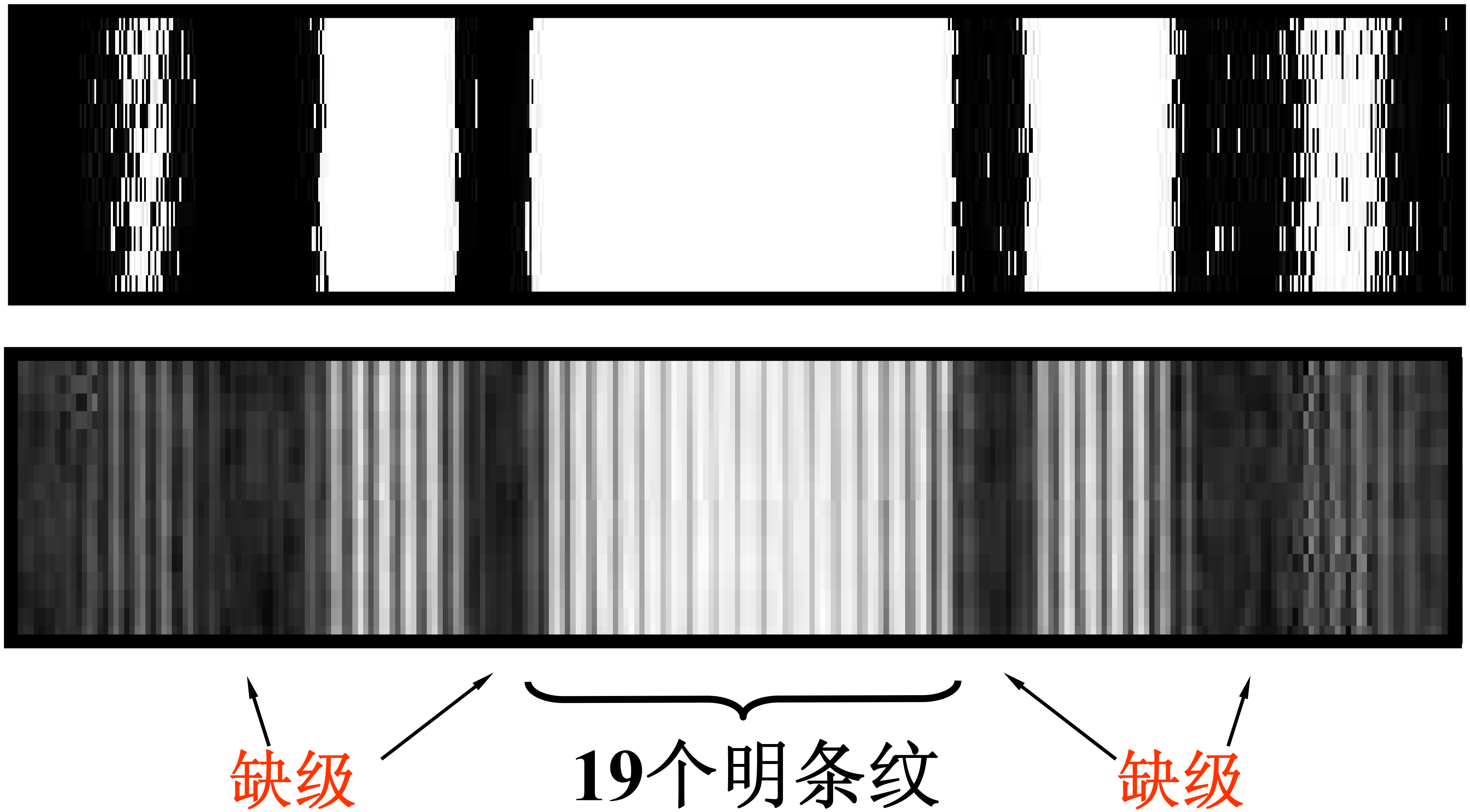
$$\begin{cases} a\sin\theta = \pm k'\lambda & k'=1,2\ldots \quad \text{单缝衍射极小} \\ (a+b)\sin\theta = d\sin\theta = \pm k\lambda & k=0，1, 2\ldots \quad \text{多光束干涉主极大} \end{cases}$$

$$k = \pm\frac{a+b}{a}k' = \pm\frac{d}{a}k' \qquad k'=1,2\ldots \text{—— 缺级条件}$$

例： d =1600nm(16000Å) , a =800nm(8000Å)

$$d/a = 2 \qquad k = \pm\frac{d}{a}k' = \pm 2k' \qquad k'=1,2\ldots$$

缺的级次为： ±2，±4，±6， …



单缝衍射和多缝衍射干涉的对比（$d=10a$）

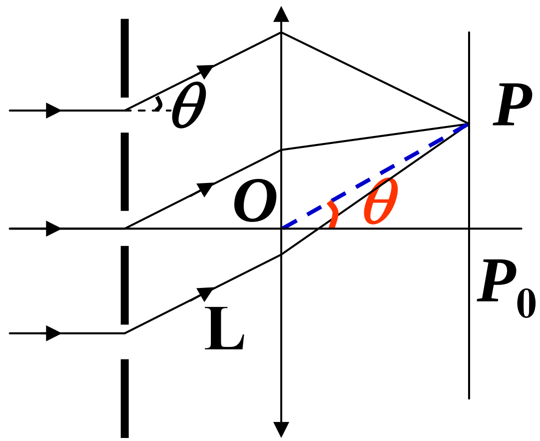
例：求单缝衍射中央明纹内的条纹数。d/a =整数

解： $$k = \pm \frac{d}{a} k'$$ $k'=1$

$$k = \pm \frac{d}{a}$$

条纹数目：$1 + 2(\frac{d}{a} - 1) = 2\frac{d}{a} - 1$（条）

6. 光栅衍射图样特点



- P_0处为明纹，两侧出现明暗相间的花纹。
- 明纹亮、细锐，亮度随 N 的增大而增大
- $I = N^2 I_0$

  $N\uparrow \rightarrow$明纹越细且条纹明暗对比越强。

7. 衍射光谱

$$d\sin\theta = \pm k\lambda \qquad \sin\theta \propto \lambda \quad (k \neq 0)$$

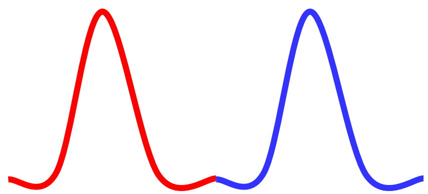
白光入射， $k = 0$ 白色

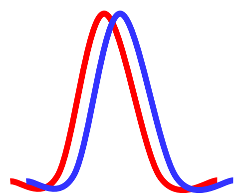
$k \neq 0$ 两侧按波长顺序排列

由中心向外形成紫到红的彩色光谱

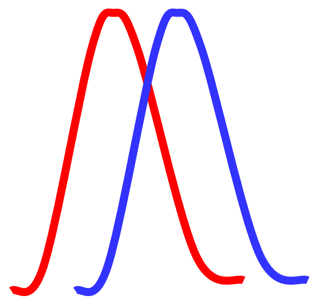
光谱中有部分谱线重叠

8 .光栅的分辨本领





$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

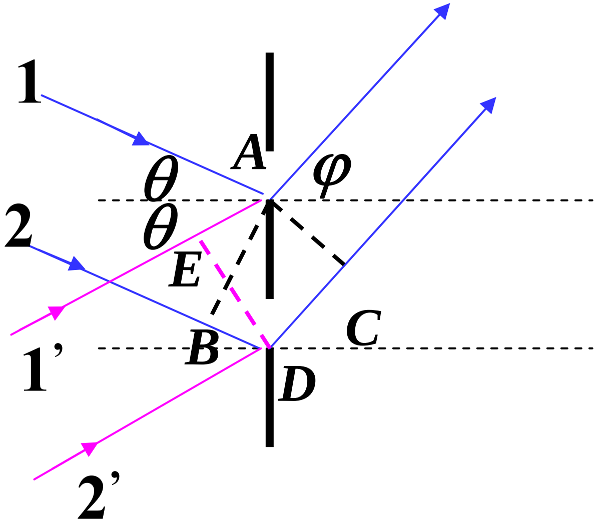


N：缝数

例：用5000/cm的平面透射光栅观察钠黄光谱线，λ=589.3nm

求：(1) 光线垂直入射时，第三级谱线的衍射角有多大?

(2) 光线以30° 角入射时，最多可看到几级条纹?



解：(1) $d=\dfrac{1}{5000}$ (cm) = 2×10^3nm

$$d\sin\varphi=\pm k\lambda \qquad k=3 \qquad \sin\varphi_3=\pm\frac{k\lambda}{d}$$

$$\sin\varphi_3=\pm\frac{3\times589.3}{2\times10^3}=\pm0.884$$

$\varphi_3=\pm62°\ 12'$

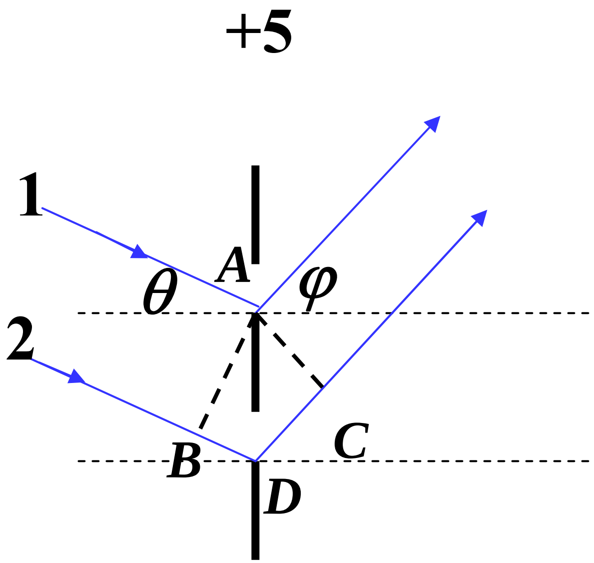
(2) 斜入射 $d(\sin\varphi\pm\sin\theta)=\pm k\lambda$ $k=0，1, 2\dots$

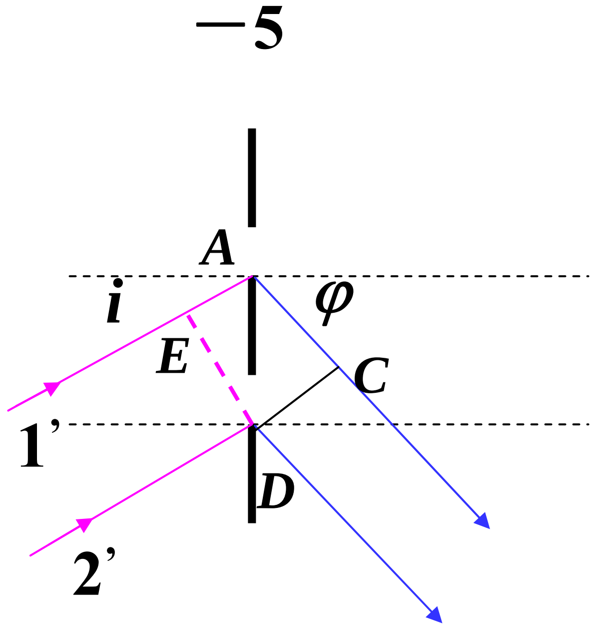
θ、φ 在法线的同侧， 取+

θ、φ 在法线的两侧， 取–

——光栅方程

$$k_{\max}=\pm\frac{d}{\lambda}(\sin\varphi+\sin\theta)=\pm\frac{2\times10^3}{589.3}(1+0.5)=\pm\ 5$$





若垂直入射 $d\sin\varphi = \pm k\lambda$

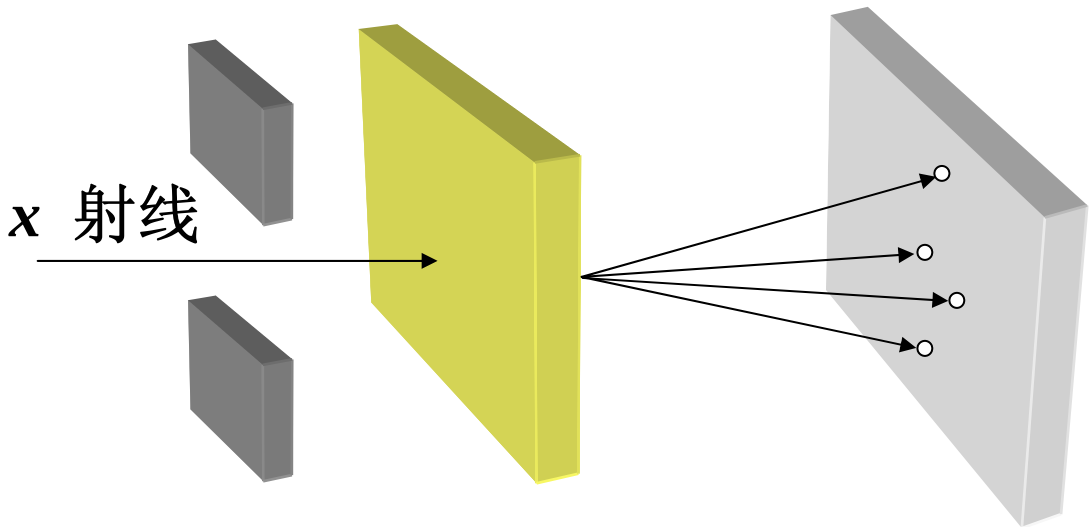
$$k_{\max} = \frac{2\times 10^3 \times \sin(90^\circ)}{589.3} = 3.4$$

最多可看到3级条纹。

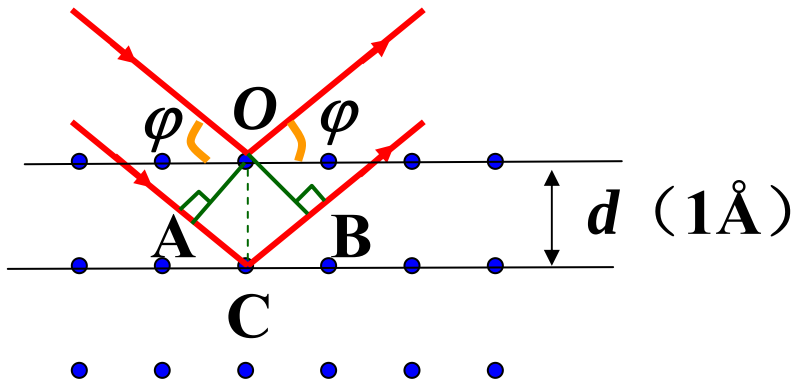
§5 *x* 射线衍射、布喇格方程

x **射线　　波长在0.01nm—10nm间的电磁波。**

1912 年，　德国 物理学家 劳厄 成功进行了
x **射线衍射实验 — 劳厄实验**



x 射线衍射、布喇格方程



反射波出现衍射花纹的条件为

♉ 任一层原子所散射的射线中，按反射定律的反射光线的强度最大，

♉ 一系列平行的晶面产生的反射光束发生相长干涉.

$$\delta = AC + BC = 2d\sin\varphi = k\lambda \qquad k = 1,2,3,\cdots$$ 形成亮点

—— 布喇格方程

应用

- 已知晶格结构，测波长
- 已知波长，了解晶格结构,测d（x 射线衍射晶格结构分析）