2017 级第二学期《高等数学》期中考试试卷 (A 类)

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下述方程在原点附近不能确定隐函数 $y=y(x)$ 的是 （ ）

（A） $e^{x+y}=\cos xy$； （B） $\ln(x+y+1)+xy=0$；

（C） $\int_0^y e^{t^2}dt=\cos(x^2+y^2)$； （D） $x^3-y^3=x^2\sin y$。

2. 曲线 $x=4t$，$y=t^2$，$z=t^2$ 的平行于平面 $x+y+z=1$ 的切线方程是 （ ）

（A） $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$； （B） $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

（C） $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$； . （D） $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

3. 设二元函数 $f(x,y)=(2x^2+y^2)^2-x-y$，则 $f(x,y)$ （ ）

（A）没有驻点； （B）至多有一个极值点；

（C）恰有两个极值点； （D）至少有三个极值点。

4. 函数 $f(x,y)=\dfrac{x^3y+x^2y^2+xy^3}{x+y}$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限 （ ）

（A）存在且等于 0； （B）存在但不等于 0；

（C）不存在且是无穷大； （D）不存在且不是无穷大。

5. 设定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数，且 $\mathbf{grad}f\neq\mathbf{0}$。下述论断中，正确论断的个数为 （ ）

（1）值域 $f(\mathbf{R}^2)$ 必是开区间（开区间包括无穷开区间）；

（2） 若 $A=\{(x,y)\,|\,f(x,y)\le 2019\}$ 非空，则 A 必然无界；

（3）在任意光滑闭曲线 C 上必然存在点 P 使得该点的切向量垂直于 $\mathbf{grad}f(P)$。

（A） 0 个； （B） 1 个； （C） 2 个； （D） 3 个。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 二元函数 $z=e^{x^y}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分 $dz\big|_{(2,1)}=$____________________。

7. 设曲面 $z=xy$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面与平面 $x+3y+z+9=0$ 平行，则 P_0 的坐标 $(x_0,y_0,z_0)=$_________________。

8. 设函数 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，f 可微，则 $z_x=$________________________。

9. 旋转抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分面积的 $S=$_____________。

10. 设一物体占有空间 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 2z,0\le z\le 1\}$，且该物体在 $(x,y,z)\in\Omega$ 处的密度 $\rho(x,y,z)=2z+1$，则该物体的质量 $M=$___________。

三、（本题 8 分）

11. 设函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$。研究函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性、可导性和可微性，说明理由。

四、(每小题 8 分，共 16 分)

12. 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}+2x, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，平面向量 $\vec{l}=(1,1)$，求方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}$。

13. 设 $f(u,v)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有连续的二阶偏导，且 $\dfrac{\partial f}{\partial v}\neq 0$，函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y=f(x,z)$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

五、计算题（第 14 小题 8 分，第 15 小题 10 分，共 18 分）

14. 设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 2, x\geq 0, y\geq 0\}$，$[x]$ 为取整函数，计算二重积分 $\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}\sigma$。

15. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t (\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{y^2})\mathrm{d}y}{t^4}$。

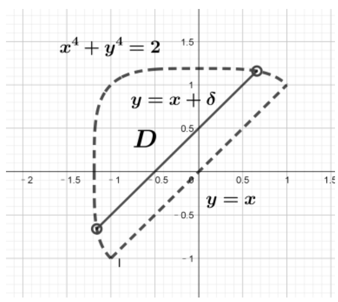
六、(每小题 10 分，共 20 分)

16. 试说明函数 $f(x,y)=(2x+y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上能取到最大值和最小值，并求出最值。

17. 设常数 a,b,c 满足 $0<a<b<c$，空间立体 Ω 由曲面 S：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 围成。对于 S 上的点 P，记 π_P 为 S 在点 P 的切平面，函数 $g(x,y,z)$ 为 Ω 中的点 (x,y,z) 到 π_P 的距离，$I_P=\iiint_\Omega g^2(x,y,z)\mathrm{d}V$。求点 P 的坐标，使得 I_P 取得最小值。

七、证明题（本题 8 分）

18. 设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^4+y^4<2, y>x\}$，曲线 $C_\delta=\{(x,y)\in D\,|\,y=x+\delta\}$，其中 δ 是正常数，函数 $f(x,y)=\dfrac{(x-y)^2}{4-(x+y)^2}$。



证明：（1）$f(x,y)$ 在 D 上有定义，且 $f(x,y)$ 在 C_δ 上不存在最大值；

（2）$f(x,y)$ 在 D 上有上界。