大学物理上力学习题课题目及解答 2013.03

一、填空题

1. 已知一质点质量为 1kg，运动方程为$\vec{r} = 3t\hat{\boldsymbol{i}} - 4t^2\hat{\boldsymbol{j}}$（SI）求: 质点运动的轨道方程、速度、加速度和对坐标原点的角动量。

答案：　$4x^2 + 9y = 0$；$\vec{v} = 3\hat{\boldsymbol{i}} - 8t\hat{\boldsymbol{j}}$ ，$\vec{a} = -8\hat{\boldsymbol{j}}$，$\vec{L} = -12t^2\hat{k}$

2. 质点沿x轴作直线运动，其加速度$a = 4t$ m/s^2，在$t = 0$时刻，$v_0 = 0$，$x_0 = 10$ m，则该质点的运动方程为$x =$ ___________。

答案：$x = 10 + \dfrac{2}{3}t^3$

3．一质点从静止出发绕半径R的圆周作匀变速圆周运动，角加速度为β，则该质点走完半周所经历的时间为____________。

答案：$\sqrt{\dfrac{2\pi}{\beta}}$

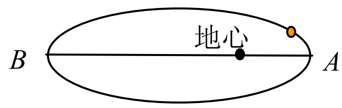
4.一质量为$m = 2$kg 的质点在力$F_x = (2+3t)$（N）作用下由静止开始运动，若此力作用在质点上的时间为 2s，则该力在这 2s 内冲量的大小$I =$_______；质点在第 2s 末的速度大小为________。

答案：10 NS，5m/s

7．一质点受力$F = -6x^2$的作用，式中x以 m 计，F以 N 计，则质点从$x = 1.0$m 沿x轴运动到x=2.0 m 时，该力对质点所作的功$A =$_____________。

答案：−14J

8. 如图，一人造地球卫星绕地球作椭圆运动，　近地点A 和远地点B距地心的距离分别为r_1 、r_2 。 设卫星的质量为m，地球的质量为M，万有引力常量为G，则卫星在A 、B 两点处的速率之比v_A:v_B= _____________，　卫星在A 、B 两点处万有引力势能之差为Ep$_A$－Ep$_B$= ________________。



答案：v_A:v_B=r_2/r_1　Ep$_A$－Ep$_B$= $GMm(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1})$

9.一刚体绕定轴转动，初角速度$\omega_0=8\,\text{rad/s}$，现在大小为 8（N·m）的恒力矩作用下，刚体转动的角速度在 2 秒时间内均匀减速到$\omega=4\,\text{rad/s}$，则刚体在此恒力矩的作用下的角加速度$\alpha=$________，刚体对此轴的转动惯量$J=$________。

答案： $-2\text{rad}/\text{s}^2$，$4\text{kg}\cdot\text{m}^2$

10．一滑冰者展开双臂自转时动能为$\frac{1}{2}J_0\omega_0{}^2$。现她收回双臂，使转动惯量减少为$\frac{J_0}{3}$。则她此时的自转角速度$\omega=$__________。

答案：$3\omega_0$

二、计算题

1.两个固定在一起的同轴圆柱体可绕它们的轴 OO' 转动。两个柱体上均绕有绳子，分别与质量为m_1、m_2的物体相连，如图 1（a）所示。设小圆柱体和大圆柱体的半径分别为R_1、R_2，两者的质量为M_1、M_2。将m_1、m_2两物体释放后，m_2下落，且绳子均不打滑。求柱体的角加速度。

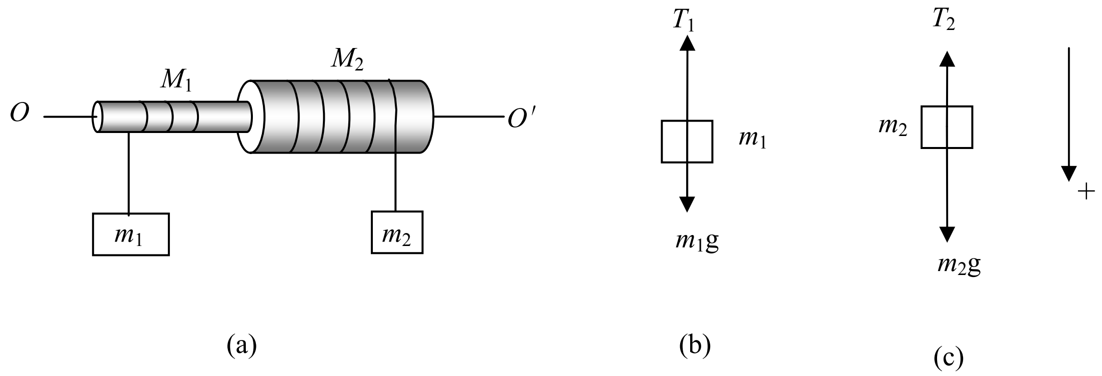


图 1　　习题 1 用图

解 被绳子悬挂的两物体m_1 、m_2受力情况如图 1（b)、（c）所示。设它们的加速度值为a_1、a_2，应用牛顿第二定律得到方程：

$$T_1-m_1g=m_1a_1$$

$$m_2g-T_2=m_2a_2$$

对于大、小圆柱体组成的系统，根据转动定律，以水平向右为正向，得到方程

$$T_2R_2 - T_1R_1 = (\frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2)\beta$$

因为绳子均不打滑，故加速度值为a_1、a_2与柱体的角加速度β间满足方程

$$\beta = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2}$$

联立以上四个方程解得

$$\beta = \frac{(m_2R_2 - m_1R_1)g}{\left(\frac{M_1}{2} + m_1\right)R_1^2 + \left(\frac{M_2}{2} + m_2\right)R_2^2}$$

2. 如图 2 所示，长度为 2 r 的匀质细杆的一端与半径为 r 的圆环固连在一起，它们可绕过杆的另外一端 O 点的水平轴在竖直面内转动，设杆和圆环的质量均为 m。使杆处于水平位置，然后由静止释放该系统，让它在竖直面内转动，求：（1）系统对过 O 点水平轴的转动惯量；（2）杆与竖直线成θ角时，系统的角加速度与系统质心的切向加速度。

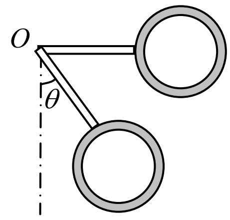


图 2 习题 2 用图

解 (1)将杆与圆环视为一个系统，它对 O 点的转动惯量为

$$J_{\mathrm{O}} = \frac{1}{3}m(2r)^2 + mr^2 + m(r+2r)^2 = \frac{34}{3}mr^2$$

(2)确定质心的位置。系统质心距 O 点的距离为

$$r_{\mathrm{c}} = \frac{mr + m3r}{m+m} = 2r$$

系统受到重力和轴给予的作用力。根据刚体定轴转动定律得

$$2mg(2r\sin\theta) = J_O\beta$$

解得杆与竖直线成θ角时，系统的角加速度为

$$\beta = \frac{6g\sin\theta}{17r}$$

故系统质心的切向加速度为

$$a_{\mathrm{ct}} = r\beta = 2r\frac{6g}{17r}\sin\theta = \frac{12g\sin\theta}{17}$$

3. 唱机的转盘绕着通过盘心的固定竖直轴转动，唱片放上去后将受转盘摩擦力的作用而随转盘转动, 如图3 所示。设唱片为半径为R、质量为 m的均匀圆盘，唱片和转盘间的摩擦系数为μ_k，转盘以角速度ω 匀速转动。求：（1）唱片刚被放到唱盘上去时受到的摩擦力矩为多大？（2）唱片达到角速度ω 需要多长时间？在这段时间内，转盘保持角速度ω不变，驱动力矩共做了多少功？唱片获得了多大的动能？

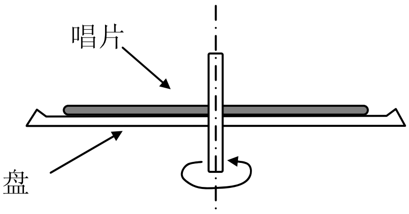


图 3 习题 3 用图

解　（1）唱片的面密度为$m/(\pi R^2)$。在唱片上取如图 4 所示的面积元dm，其面积为$\mathrm{d}S=r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$。小质元的质量可以写为

$$\mathrm{d}m= mr\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r/(\pi R^2)$$

该面元所受摩擦力对转轴的力矩为

$$\mathrm{d}M= r\mathrm{d}f=\mu_k\, r\mathrm{d}mg=\mu_K mgr^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r/(\pi R^2)$$

唱片上各质元所受的力矩方向相同，所以整个唱片受到的摩擦力矩的大小为

$$M=\int \mathrm{d}M=\frac{\mu_k mg}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\mu_k mgR$$

（2）唱片受到摩擦力矩作用，做匀角加速转动，角速度增大，直至达到转盘的角速度为止。这段时间内，其角加速度的值由转动定律求得

$$\beta=\frac{M}{J}=\frac{\frac{2}{3}\mu_k mgR}{\frac{1}{2}mR^2}=\frac{4\mu_k g}{3R}$$

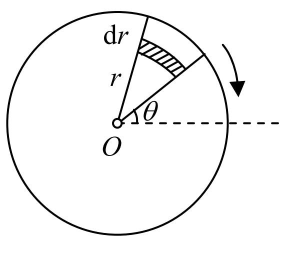


图 4 习题 3 解答用图

唱片达到角速度ω 需要的时间为

$$t=\frac{\omega}{\beta}=\frac{3R\omega}{4\mu_k g}$$

转盘保持角速度ω 不变，驱动力矩的功为

$$A=M\cdot\Delta\theta=M\cdot\omega t=\frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

唱片获得的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2=\frac{1}{4}mR^2\omega^2$$

4. 质量为m_1半径为R水平圆盘绕竖直轴以角速度 ω_0转动。圆盘上有一质量为m_2玩具汽车从$t = 0$ 时刻沿它的一条半径由中心向边缘行驶，如图 5 所示。现将玩具汽车视为质点，且它相对于圆盘的速率v恒定。已知m_1=2kg, m_2=1kg, R=1m,ω_0=20rad·s^{-1},v =1m·s^{-1}，求：玩具汽车行至圆盘边缘时， 圆盘转了多少圈?

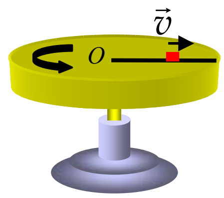


图 5 习题 4 用图

解 圆盘与玩具汽车组成的系统角动量守恒，得到方程

$$J_1\omega_0 = (J_1 + J_2)\omega$$

解方程得： $\omega = J_1\omega_0/(J_1 + J_2)$

圆盘转动惯量为 $J_1 = \frac{1}{2}m_1R^2$。车在 t 时刻位于距轴 r 处时的转动惯量为 $J_2 = m_2r^2 = m_2(vt)^2$。

圆盘在 0→t 时间间隔内的角位移为：

$$\theta = \int_0^{R/v}\omega \mathrm{d}t = \int_0^{R/v}\frac{J_1\omega_0}{J_1 + J_2}\mathrm{d}t$$

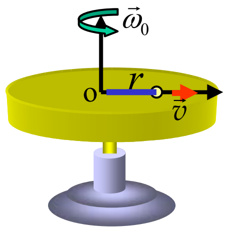


图 6 习题 4 解答用图

将已知条件代入上式得：

$$\theta = \int_0^1\frac{20}{1+t^2}\mathrm{d}t = 20\mathrm{arctg}\,t\Big|_0^1 = 5\pi$$

圆盘在 0→t 时间间隔转动的圈数 N 为

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{5}{2}[\text{圈}]$$

5. 质量为M的木块被置于光滑水平桌面上，与一端固定于O点的轻弹簧相连。弹簧的原长为L_0、劲度系数为k。木块原静止于A处，且弹簧保持原长。一质量为m的子弹以初速v_0水平射向M并嵌入其中，使木块在平面上运动，如图 7 所示。已知木块运动到 B 处时，弹簧的长度为L，此时$OB\perp OA$。求木块在B点速度的方向和速率v_B。

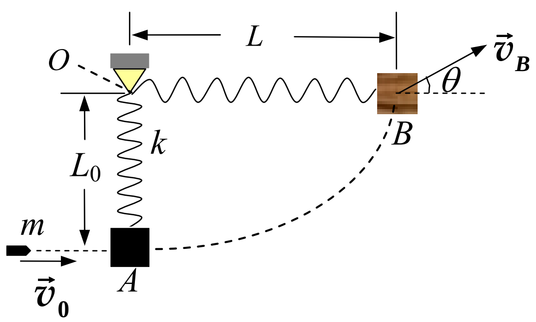


图 7 习题 5 用图

解 m 和 M 组成的系统在碰撞前后动量守恒

$$mv_0 = (m + M)v_A \quad ①$$

木块从 A 运动到 B 的过程中，只有弹力作功， 弹簧和木块组成的系统机械能守恒

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v_A^2=\tfrac{1}{2}(m+M)v_B^2+\tfrac{1}{2}k(L-L_0)^2 \qquad ②$$

木块从 A 运动到 B 的过程中, 弹簧和木块组成的系统对 O 点的合外力矩为零，系统角动量守恒。设木块在 B 点的速度与 OB 延长线间的夹角为θ，如图所示，得

$$(m+M)v_A L_0=(m+M)v_B L\sin\theta \qquad ③$$

联立上面各方程解得

$$v_B=\left[\frac{m^2}{(m+M)^2}v_0^2-\frac{k(L-L_0)^2}{m+M}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta=\arcsin\frac{mL_0v_0}{L}\left[m^2v_0^2-k(L-L_0)^2(M+m)\right]^{-\frac{1}{2}}$$