05 数学分析第二学期期末试题参考解答(2006.6)

一. 1. $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$　$\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x+\frac{2y}{y^2+z^2}$　$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{y^2+z^2}$ …………(3 分)

$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(e,1,2)}=1$　$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(e,1,2)}=e+\frac{2}{5}$　$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(e,1,2)}=\frac{4}{5}$ …………(5 分)

$du=dx+(e+\frac{2}{5})dy+\frac{4}{5}dz$ ………………(6 分)

2. $\vec{T}=\{2t,-1,3t^2\}$ ………………..(1 分)

由题设　$6t-9+3t^2=0$，　即　$t^2+2t-3=0$ …………………(2 分)

解得　$t=1$，　$t=-3$ …………………(3 分)

切点为　$(1,-1,1)$　或　$(9,3,-27)$

$\vec{T}=\{2,1,3\}$　或 $\vec{T}=\{-6,-1,27\}$

切线为　$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{3}$　或　$\frac{x-9}{-6}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+27}{27}$ …………….(6 分)

3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}d\rho$ …………………..(2 分`)

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=(\sqrt{2}-1)$ ……………………(6 分)

4. $\frac{1}{\sqrt{n}}\tan\frac{2}{\sqrt{n}}\sim\frac{2}{n}$ ……………………….(2 分)

$\because\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$　发散　　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\frac{2}{\sqrt{n}}$　发散………………(3 分)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ……………………….(4 分)

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 单调减少且趋于零，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 收敛 ……..(6 分)

二. 1. $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot e^x\sin y$ $\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot e^x\cos y$ ………………………….(2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot e^{2x}\sin^2 y+f'\cdot e^x\sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot e^{2x}\cos^2 y-f'\cdot e^x\sin y$$ …………………………..(4 分)

代入已知方程得 $f''-f=0$ ……………………………(5 分)

$r^2-1=0$ $r=\pm 1$

$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$ ……………….…(7 分)

2.. $I=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy$ ……………………(3 分)

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho$$ ………………….(5 分)

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$ ……………….(7 分)

3. $$S(x)=\begin{cases}2 & -\pi<x<0\\ x^2 & 0<x<\pi\\ 1 & x=0\\ 1+\frac{\pi^2}{2} & x=\pm\pi\end{cases}$$ ………………(3 分)

$S(6)=S(6-2\pi)=2$ $S(-6)=S(2\pi-6)=(2\pi-6)^2$

$S(2\pi)=S(0)=1$ $S(3\pi)=S(\pi)=1+\frac{\pi^2}{2}$ ………..(7 分)

4. 解 1 $L: x=\cos t, y=\sin t, z=2-\cos t$ …………….(2 分)

$$I=\int_0^{2\pi}[(-\sin^3 t+2\cos^2 t-(2-\cos t)\sin t]dt$$ ……….……….(5 分)

$=2\pi$ ………………….(7 分)

解 2 利用斯托克斯公式，设 S 是 L 所围平面

$I=\iint\limits_{+S}(2-2y)dxdy$ ………………...(3 分)

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(2-2y)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy=2\pi$$ …………………….(7 分)

三. $$f(x)=\frac{1}{3}(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-3})$$ ……………………..(2 分)

$$=\frac{1}{3}[\frac{-1}{1+(x-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}]$$ ………………………..(4 分)

$$=\frac{1}{3}[-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-1}{2})^n]$$ ……………(6 分)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}[(-1)^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}](x-1)^n$$ ……………….(7 分)

由 $|x-1|<1$ 及 $\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$ 得收敛域 $x\in(0,2)$ …………(8 分)

四. (1) $$m=\iiint_V k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$ ……………..(1 分)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}kr^3\sin\varphi dr$$ ……………(3 分)

$$=8k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi=\frac{8k\pi}{5}$$ ……………(4 分)

(2) $$\bar{x}=0 \qquad \bar{y}=0$$ ………………….(5 分)

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint_V zk\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$. ……………(6 分)

$$=\frac{k}{m}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi\cos\varphi dr$$ ………… (7 分)

$$=\frac{64k\pi}{5m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^6\varphi d\varphi=\frac{64k\pi}{35m}=\frac{8}{7}$$ ……………(8 分)

V 的质心为 $(0,0,\frac{8}{7})$

五. 曲面上任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面法向量为

$$\vec{n} = \{y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0\}$$ ……………………….(2 分)

切平面 $$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y\ ) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0$$ ……….(4 分)

即 $$y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3 x_0 y_0 z_0$$

在三坐标轴上截距分别为 $3x_0, 3y_0, 3z_0$ ……………….(6 分)

$$3x_0 \cdot 3y_0 \cdot 3z_0 = 27 x_0 y_0 z_0 = 27m$$ ………………..(8 分)

六. $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} = 1$$ …………………(1 分)

$R = 1$, 收敛区间 $-1 < x < 1$ ………………….(2 分)

设 $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)} x^{2n-1}$$ …………………..(3 分)

. $$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1} x^{2n-2}$$ …………………..(4 分)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2(-x^2)^{n-1} = \frac{2}{1+x^2}$$ ………..………(6 分)

$$S'(x) = 2\arctan x$$ …………………(7 分)

$$S(x) = 2x\arctan x - \ln(1+x^2)$$ …………………(8 分)

七. 设$S: x^2+y^2\le 1, z=0$，利用高斯公式

$$I=\oiint_{\Sigma+S}-\iint x^3dydz+[yf(yz)+y^3]dzdx+[z^3-zf(yz)]dxdy \quad \text{……….(2 分)}$$

$$=\iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)dV-0 \quad \text{……………………..(4 分)}$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr \quad \text{……………………(6 分)}$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{6\pi}{5} \quad \text{……………………(8 分)}$$

八. $$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{x^2-f(y)}{[x^2+f(y)]^2} \qquad \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{x^2+f(y)-yf'(y)}{[x^2+f(y)]^2} \quad \text{………..(4 分)}$$

由$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ 得 $\frac{x^2-f(y)}{[x^2+f(y)]^2}=\frac{x^2+f(y)-yf'(y)}{[x^2+f(y)]^2}$

即 $$yf'(y)=2f(y) \quad \text{……………………(5 分)}$$

$$\frac{df(y)}{f(y)}=\frac{2dy}{y} \quad \text{……………………(6 分)}$$

$$\ln|f(y)|=2\ln|y|+C_1 \qquad f(y)=Cy^2 \quad \text{………………….(7 分)}$$

由 $f(1)=1$ 得 $C=1$ $\therefore f(y)=y^2$ …………………..(8 分)