北京理工大学 2018-2019 学年第二学期《工科数学分析》（下）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准　　2018年6月24日

一、填空题（每小题 4 分, 共 20 分）

1. $x+y-1=0$

2. $-\dfrac{11}{3}$

3. $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f\left(x,y\right)dx$

4. -2π

5. $\left|a\right|<e$

二、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 解：　由 L，视 x 为自变量，有

$$\begin{cases}4x+6y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0,\\ 6x+2y\dfrac{dy}{dx}-2z\dfrac{dz}{dx}=0.\end{cases}$$

以 $(x,y,z)=(1,-1,2)$ 代入并解出 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$，

得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{4},\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{7}{8}$，　…………..（3 分）

所以切线方程为　$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{\frac{5}{4}}=\dfrac{z-2}{\frac{7}{8}}$，

法平面方程为 $\left(x-1\right)+\dfrac{5}{4}\left(y+1\right)+\dfrac{7}{8}\left(z-2\right)=0$，

即 $8x+10y+7z-12=0$　…………..（5 分）

2. 解:　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}f'(\dfrac{y}{x}))+2f'(\dfrac{x}{y})$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^2}{x^3}f''(\dfrac{y}{x})+\dfrac{2}{y}f''(\dfrac{x}{y})$　………….. (3 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})-\dfrac{2x}{y^2}f''(\dfrac{x}{y})$

$x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$　………….. (5 分)

3. 解：由题设，S 的方程为 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，因此

$$dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy=2dxdy$$

在 xoy 坐标面上的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 3$

$$I=\iint_S (x^2+y^2)dS=2\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy \qquad \text{…………….(3 分)}$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^3dr$$

$$=9\pi \qquad \text{…………….(5 分)}$$

4. 解：

$$gradu=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})=(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}) \qquad \text{……….. (2 分)}$$

$$div(gradu)=div(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2+z^2})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2+z^2})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

$$=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

…………... (5 分)

三、解：$$\iint_D(\frac{t^2}{x}-6y)f(x)dxdy=\int_0^t f(x)dx\int_0^x(\frac{t^2}{x}-6y)dy=\int_0^t(t^2-3x^2)f(x)dx.$$

…………….(3 分)

记 $F(t)=\int_0^t(t^2-3x^2)f(x)dx=t^2\int_0^t f(x)dx-3\int_0^t x^2 f(x)dx$

$F'(t)=2t\int_0^t(f(x)-f(t))dx$ …………….(6 分)

由于 $f(x)$ 是单调减少的函数，因此，$f(x)\ge f(t), 0\le x\le t,$

故 $F'(t)\ge 0,$ 所以 $F(t)$ 关于 t 单调增加.因 $F(0)=0,$ 故对任意 $t\ge 0, F(t)\ge 0,$

亦即待证的不等式成立. …………….(8 分)

四、解: 设整个物体Ω的质心为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 由对称性得$\bar{x}=0,\bar{y}=0,$ 而$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}\rho z dv}{\iiint\limits_{\Omega}\rho dv}$,

根据题意，只需：$\iiint\limits_{\Omega}\rho z dv=\iiint\limits_{\Omega}z dv=0$ 即可. ………….. (2 分)

$$0=\iiint\limits_{\Omega}z dv=\int_{-h}^{0}z dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy+\int_{0}^{1}z dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2}dxdy$$

$$=\pi\int_{-h}^{0}z dz+\pi\int_{0}^{1}z(1-z^2)dz$$ ………….. (4 分)

$$=-\frac{\pi}{2}h^2+\frac{1}{4}\pi$$

解得$h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，整个物体的质心恰好在半球的球心处. ………….. (6 分)

五、解：设所求平面方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,a>0,b>0,c>0$. 由题意得

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}=1$$

题目转化为对函数$V=\dfrac{1}{6}abc$

在约束条件$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{3c}=1$下的最小值. 即为条件极值问题. ……….. (3 分)

构造函数：$F(a,b,c,\lambda)=\dfrac{1}{6}abc+\lambda\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{3c}-1\right)$

$$\begin{cases} F_a{}'=\dfrac{bc}{6}-\dfrac{2\lambda}{a^2}=0 \\ F_b{}'=\dfrac{ac}{6}-\dfrac{\lambda}{b^2}=0 \\ F_c{}'=\dfrac{ab}{6}-\dfrac{\lambda}{3c^2}=0 \\ F_\lambda{}'=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{3c}-1=0 \end{cases},$$ ……….. (6 分)

得唯一解$a=6,b=3,c=1$, 所求平面为$\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{1}=1$. ……….. (8 分)

六、**解：**（1）记 $X=2xy,\ \ Y=Q(x,y)$ 由题意，有

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}，\ 即\quad 2x=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}，\quad Q(x,y)=x^2+C(y)$$ ……….. (2 分)

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=t^2+\int_0^1 C(y)dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=t+\int_0^t C(y)dy$$

由条件得： $t^2+\int_0^1 C(y)dy=t+\int_0^t C(y)dy$

求导得 $C(y)=2y-1,\qquad Q(x,y)=x^2+2y-1.$ ……….. (5 分)

（2）原函数 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xydx+(x^2+2y-1)dy+C$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y(x^2+2y-1)dy+C$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y(x^2+2y-1)dy+C$$

$$=x^2y+y^2-y+C$$

所求原函数为 $u(x,y)=x^2y+y^2-y+C$ ……….. (8 分)

七、解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2$

$|x|<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$绝对收敛；$|x|>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$发散（因为$u_n(x)$不趋于 0）.

收敛半径 $R=1,$ 收敛域为$[-1,1]$. ……….. (3 分)

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\le x\le 1),$ 则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$$

又因为 $S(x)=S(0)+\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=$ arct ……….. (7 分)

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\arctan x(x\in[-1,1])$ ……….. (8 分)

八、解: $f(x)=\frac{1}{(x+3)(x+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3})$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}]$ ……….. (2 分)

$=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}]$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(x-1)^n$

其收敛域为：$-1<x<3.$ ……….. (6 分)

$a_{10}=\frac{1}{2^{12}}-\frac{1}{2^{23}}=\frac{f^{(10)}(1)}{10!}$,

$f^{(10)}(1)=(\frac{1}{2^{12}}-\frac{1}{2^{23}})10!.$ ……….. (8 分)

九、解: 添加辅助面 $S_0: z=0, x^2+y^2\le 4$, 取上侧；

$S_1: z=1, x^2+y^2\le 3$, 取下侧.

Ω 为 Σ 与 S_0, S_1 所围成的空间区域. ………….. (2 分)

$$I=\frac{1}{4}\oiint_{\Sigma+S_0+S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy-\frac{1}{4}\oiint_{S_0}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$-\frac{1}{4}\oiint_{S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

………….. (4 分)

$$\frac{1}{4}\oiint_{\Sigma+S_0+S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$=-\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv$ （利用高斯公式）

$=0-\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}zdv$ （利用对称性）

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 zdz\iint_{x^2+y^2\le 4-z^2}dxdy=-\frac{\pi}{2}\int_0^1(4z-z^3)dz$$

$$=-\frac{7}{8}\pi \qquad \text{…………..(6 分)}$$

$$\frac{1}{4}\oiint_{S_0}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=0$$

$$\frac{1}{4}\oiint_{S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=-\frac{1}{4}\iint_{x^2+y^2\le 3}dxdy=-\frac{3}{4}\pi$$

$$I=-\frac{7}{8}\pi-(0-\frac{3}{4}\pi)=-\frac{1}{8}\pi. \qquad \text{…………..(8 分)}$$

十、 解: 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 而 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0. \qquad \text{…………..(2 分)}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林公式为：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot x^2(\xi\in(0,x).$$

所以 $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot\frac{1}{n^2}$, 其中$(\xi\in(0,\frac{1}{n})$. …………..(5 分)

由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|$, 而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛. …………..(6 分)