课程编号：07000131；07000150

# 北京理工大学 2007-2008 学年第二学期
# 《数学分析 B》期末考试试卷(A 卷)

2008.6

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-3y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f_x'(0,0)=$______，$f_y'(0,0)=$______.

2．设 $f(x,y)=x^3+8y^3-3x^2-12y^2$，则 $f(x,y)$ 取得极小值的点为__________，$f(x,y)$ 取得极大值的点为____________ .

3．函数 $f(x,y,z)=x^2+3y^2-z^2$ 在 $P(-2,2,1)$ 点处沿着从 $P$ 到 $O(0,0,0)$ 方向的方向导数为 ____________________ .

4．设 $L$ 是曲线弧 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$（$0\le t\le 2$），则曲线积分 $\int_L \dfrac{ds}{x^2+y^2+z^2}=$_______________________.

5．数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n}$ 是条件收敛、绝对收敛、还是发散？答：__________.

6．设 $f(x)=\begin{cases}2 & 0\le x<1\\ x^2-1 & 1\le x<\pi\end{cases}$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 $2\pi$ 为周期的余弦级数展开式的和函数，则 $S(1)=$_____，$S(\pi)=$_____，$S(-2\pi)=$_____，$S(-2)=$_____.

7．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ 的麦克劳林级数的展开式为______________________，其收敛域为______________________.

二、（10 分）设 $u(x,y)$ 是由方程 $u^2-z^2+2y^2-x=0$ 确定的可微的隐函数，其中 $z=z(x,y)=xy^2+y\ln y-y$，且 $u(x,y)>0$，求 $(2,1)$ 点处 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

三、（8 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D (y^2-x)dxdy$，其中 $D$ 是由抛物线 $x=y^2$ 与 $x=3-2y^2$ 围成的有界闭区域.

四、（10 分） 在曲面$\Sigma: z = xy$上求一点$P$，使曲面$\Sigma$在$P$点处的法线垂直于平面$x + 3y + z + 9 = 0$，并写出$\Sigma$在$P$点处法线的标准方程.

五、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{2^{2n}} x^{2n-1}$ 的收敛区间及和函数.

六、(10 分) 设$\Omega$是由曲面$z = x^2 + y^2$和平面$z = 2x$所围成的立体, 其上质量分布是均匀的(密度为$\mu$), 求$\Omega$绕$z$轴旋转的转动惯量.

七、（10 分）计算第二类曲面积分$I = \iint\limits_S 2xdydz + (z+2)^2 dxdy$，其中$S$是曲面$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$的上侧.

八、（8 分） 设$f(u)$在$(-\infty, +\infty)$内有连续的导函数，$k$是一个待定常数. 已知曲线积分$\int_\Gamma (x^2 y^3 + 2x^5 + ky)dx + [xf(xy) + 2y]dy$与路径无关，且对任意的$t$, 有

$$\int_{(0,0)}^{(t,-t)} (x^2 y^3 + 2x^5 + ky)dx + [xf(xy) + 2y]dy = 2t^2$$

求$f(u)$的表达式和常数$k$的值.

九、（6 分） 设$u_n > 0$，$v_n > 0$，且$v_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - v_{n+1} \geq a > 0$，$n = 1, 2, \cdots$，其中$a$为常数. 求证:（1） 数列$\{u_n v_n\}$单调有界；（2）级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。