质点力学小结提纲

一. 质点力学线索框图（见第4页）

要搞清各规律的内容、来源、适用对象、成立条件、对参考系的依赖关系。

二. 解题的基本方法与步骤

1. 用牛顿定律解题

2. 用功能、动量、角动量及守恒定律解题

三. 总结自己在哪些方面、哪些问题上较中学有所提高

四. 专题小结（例如角动量、质心…）

描述运动的量

质点

- 位矢、位移、位置角、角位移
- 速度、角速度
- 加速度、角加速度
- 质量、动量、角动量
- 机械能
- 相对运动

质点系

- 质心的位矢及计算
- 质心的速度、加速度
- 质心的动量

研究运动状态的变化

力、力矩（动量、角动量、加速度、角加速度）

冲量（动量的变化）

功（能量、动能、势能、机械能）

对于质点 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$ $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

对于质点系 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}_{\mathrm{c}}$ $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

三个守恒定律（动量、角动量、机械能）

力 $\vec{F}$

时间积累 $\vec{I}=\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$ $\xrightarrow{\text{质点 牛II}}$ $\vec{P}=m\vec{v}$，$\vec{I}=\Delta\vec{P}$ $\xrightarrow{\text{系 牛III}}$ $\vec{I}_{外}=\Delta\vec{P}$ $\rightarrow$ $\vec{F}_{外}=0$，$\vec{P}=\vec{C}$

空间积累 $W=\int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

- $\xrightarrow{\text{质点 牛II}}$ $E_k=\frac{1}{2}mv^2$，$W=\Delta E_k$ $\xrightarrow{\text{系}}$ $W_{外}+W_{内}=\Delta E$
- $\xrightarrow{\text{一对力}}$ $\oint_{(L)}\vec{f}_{保}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$ $\xrightarrow{\text{系 牛III}}$ $E_{p1}=\int_{(1)}^{(0)}\vec{f}_{保}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$，$W_{保}=-\Delta E_p$

$\rightarrow$ $E=E_k+E_p$，$W_{外}+W_{内非}=\Delta E$

$\downarrow$

$\mathrm{d}W_{外}=0$，$\mathrm{d}W_{内}=0$，$E=C$

转动效应 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ $\xrightarrow{\text{质点}}$ $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$，$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\xrightarrow{\text{系 牛III}}$ $\vec{M}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\rightarrow$ $\vec{M}_{外}=0$，$\vec{L}=\vec{C}$

定 轴 转 动 的 刚 体

描述运动的物理量

- 位置角、角位移
- 角速度、角加速度（大小、方向）
- 转动惯量 （轴、平行轴定理）
- 角动量（大小、方向）
- 转动动能

研究运动状态变化用到的物理量

- 力、力矩（角动量）
- 力矩的功

平动与转动
Analogy between translational and rotational motion

平动	刚体定轴转动
$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	$\vec{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
m	$J = \int_V r^2 \mathrm{d}m$

Analogy between translational and rotational motion

平动	刚体定轴转动
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = J\vec{\beta}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{p} = \sum_i \Delta m_i \vec{v}_i$
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$	$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\vec{\omega})}{\mathrm{d}t}$
动量守恒 合外力为零，动量守恒	角动量守恒 合外力矩为零，角动量守恒

Analogy between translational and rotational motion

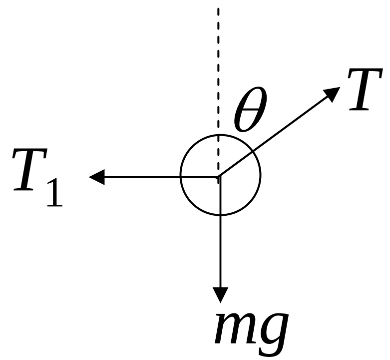
平动	刚体定轴转动
$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$	$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta$
$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2$
$W_{内} + W_{外} = E_{K2} - E_{K1}$	$W_{外} = E_{\mathrm{K}2} - E_{\mathrm{K}1}$

力 学 测 验 题

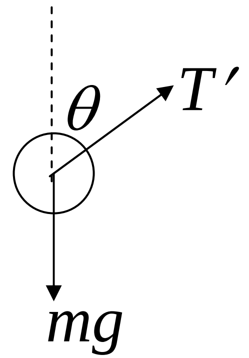
一、填空题

1．质量为 m 的小球，用轻绳AB、BC连接如图，剪断AB前后BC绳中的张力T: T'= _______________。

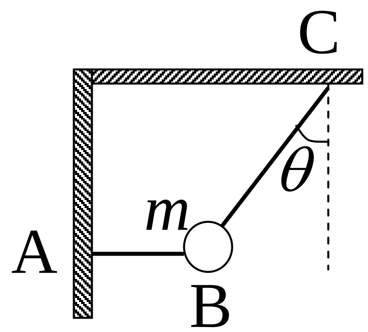
解:



剪断前



剪断后



剪断BC前 $$T=\frac{mg}{\cos\theta}$$

剪断BC后 $$T'-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{l}$$

$$v=0 \qquad T'=mg\cos\theta$$

计算得

$$T:T'=1:\cos^2\theta$$

2． 灯距地面的高度为 h_1，人的身高为h_2，在灯下以匀速率 v 沿水平直线行走, 如图。求：他的头顶在地面上的影子M点沿地面移动的速率。

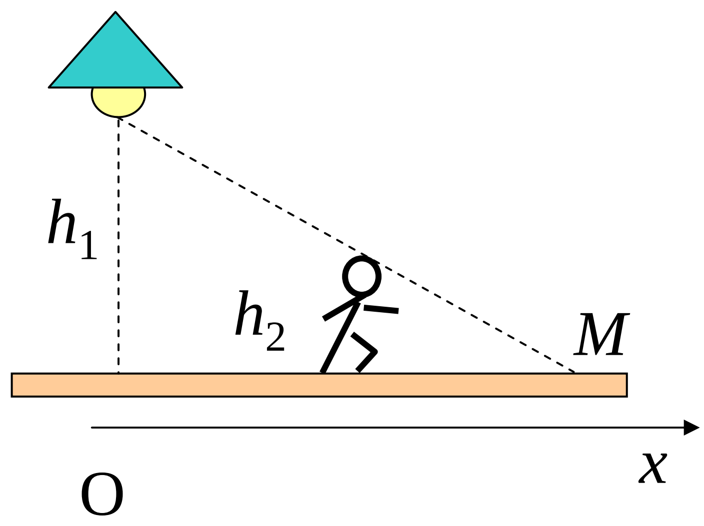
解：如图建立坐标系。设人的坐标为x，M点的坐标为x_M。

$$\frac{x_M - x}{x_M} = \frac{h_2}{h_1} \qquad x_M = \frac{h_1}{h_1 - h_2} x$$

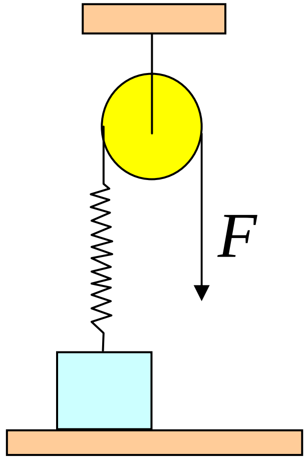
$$v_M = \frac{\mathrm{d}x_M}{\mathrm{d}t} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{h_1}{h_1 - h_2} v$$

$$v_M > v$$



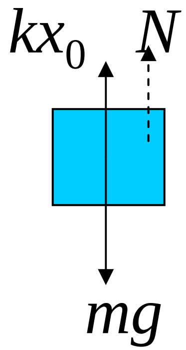
3．如图所示系统中，外力 F 通过不可伸长的绳子和一弹性系数为 k =200N/m的轻弹簧缓慢地拉起了地面上的物体，物体质量 m =2kg。初始时弹簧为自然伸长，在把绳子拉下20cm的过程中，力 F 所做的功。（g =10m/s²）



解：支持力为零时，物体开始离开地面。

$$kx_0 = mg \qquad \text{解得：} x_0 = 0.1\text{m}$$

对于轻滑轮，力 F 的大小与弹簧的弹力相等。



$$W = \int_0^{x_0} kx\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{0.2} mg\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}kx_0^2 + mg(0.2 - x_0) = 3\text{（J）}$$

4．设质点的运动函数为 $\vec{r}(t)=3t^2\hat{i}+2t\hat{j}$ **（m），**

求：$t=3$ s 时质点的速度，速率和加速度。

解： $\vec{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}=6t\hat{i}+2\hat{j}$

$$\vec{v}(3)=18\hat{i}+2\hat{j}\ \ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}=6\hat{i}$$

$$v(3)=18.1\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{a}(3)=6\hat{i}\ \ \mathrm{m/s^2}$$

5. 某物体做直线运动，其速度随时间变化的关系为 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -kv^2t$，式中$k$为大于零的常量．当$t = 0$时，初速为$v_0$。求：该物体的速度与时间$t$ 的函数关系。

解：

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -kt\mathrm{d}t \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\int_0^t kt\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = \frac{1}{2}kt^2$$

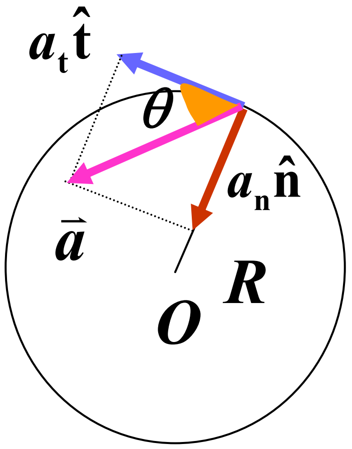
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{2}kt^2$$

6．一物体做半径为 R=80m 的圆周运动，速率为$v = 30+2t$ (m/s)。$t = 5$ s 时物体的法向加速度大小和方向为________、切向加速度大小和方向为________，加速度的大小和方向为________。

解：$a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2\,\mathrm{m/s^2}$　方向：沿圆的切线，与速度方向一致。

$v(5)= 30+2\cdot5=40$ m/s

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{40^2}{80} = 20\ \mathrm{m/s^2}$$　方向：沿半径指向圆心。



$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 20.1\,\mathrm{m/s^2}$$

$\tan\theta = a_n/ a_t =10$,　$\theta = 84.2°$

8．一个力*F* 作用在质量为 1.0 kg的质点上，使之沿 *x* 轴运动。已知在此力作用下质点的运动学方程为 $x = 3t - 4t^2 + t^3$ (SI)。在0到4 s的时间间隔内，

(1)力*F* 的冲量大小 I =____________________。

(2)力*F* 对质点所作的功 W =__________________。

解： $v(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 3 - 8t + 3t^2$

$v(0) = 3\,\mathrm{m/s}$ $\quad$ $v(4) = 19\,\mathrm{m/s}$

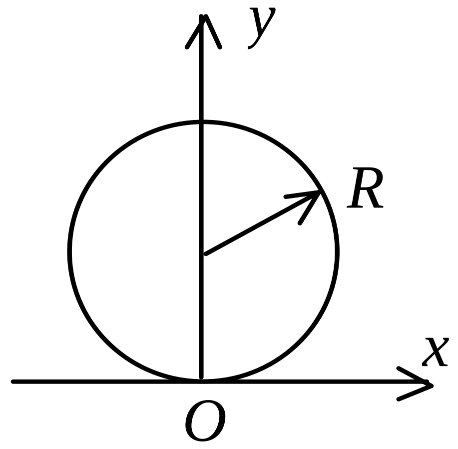
$$I = mv(4) - mv(2) = 16\ \mathrm{N\cdot s}$$

$$W = \frac{1}{2}mv(4)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = 176\ \mathrm{J}$$

9．一质点在如图所示的坐标平面内作圆周运动，有一力

$$\vec{F} = F_0(x\hat{i} + y\hat{j})$$

作用在质点上．在该质点从坐标原点运动到(0，2*R*)位置过程中，力对它所作的功。



解：
$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_1^2 (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y)$$

$$= F_0 \int_1^2 (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$$

$$= \frac{F_0}{2}(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2)$$

$$= 2F_0R^2$$

10.一长为*l*、重 *W* 的均匀梯子，靠墙放置，如图。梯子下端连一劲度系数为 *k* 的弹簧．当梯子靠墙竖直放置时，弹簧处于自然长度。墙和地面都是光滑的．当梯子依墙而与地面成θ角且处于平衡状态时，

(1) 地面对梯子的作用力的大小为__________________，

(2) 墙对梯子的作用力的大小为______________________，

(3) W、k、l、θ应满足的关系式为______________________。

解：

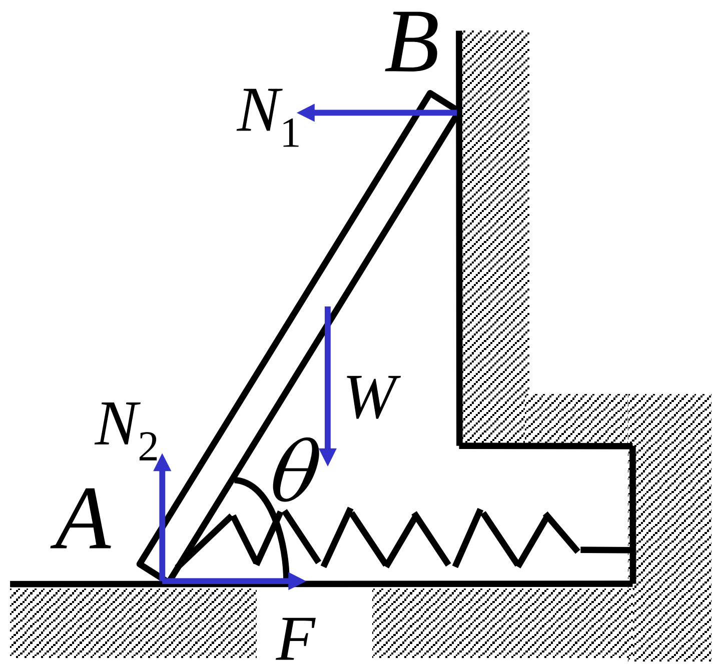
$$N_2 = W$$

$$N_1 l\sin\theta = W\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$N_1 = \frac{W}{2}\cot\theta$$

$$N_1 = kl\cos\theta$$

$$W = 2kl\sin\theta$$

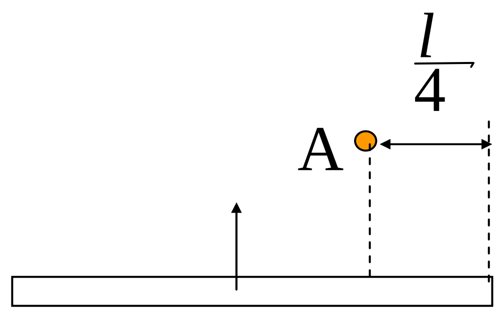


11． 光滑平面上，有一长为l、质量为m的均匀细棒，以速度v平动，之后与固定在桌面上的钉子 **A** 发生碰撞，碰后绕**A**点转动。求该细棒转动的角速度ω。

解：碰撞前后，杆对**A** 的角动量守恒。

$$mv\frac{l}{4}=[\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{4})^2]\omega$$

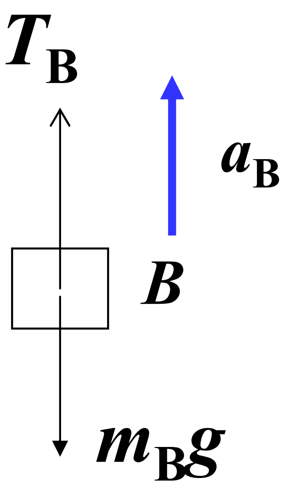
$$\omega=\frac{12v}{7l}$$

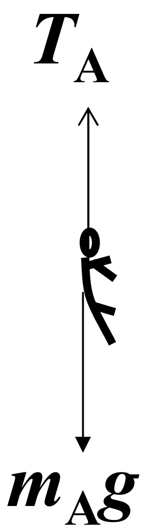


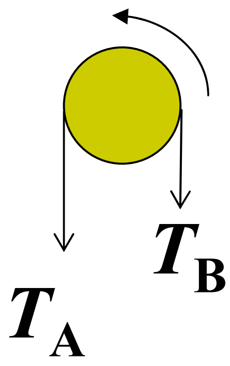
计 算 题

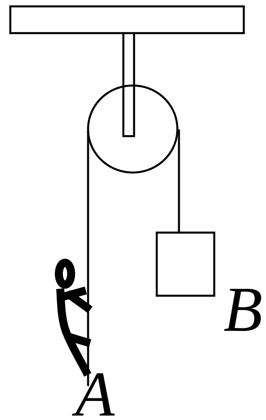
1． 一轻绳绕过定滑轮。滑轮质量为 $M/4$，均匀分布在滑轮的边缘上。质量为M 的人抓住绳子一端A ,绳子另一端系一重物B，质量为$M/2$。设人从静止开始上爬时，当人相对于绳子以匀速u上爬时,（1）求B端重物上升的加速度多大？ （2）若B端重物质量为M，它上升的速度多大？

解：









$$m_Ag - T_A = m_Aa_A \qquad a_A = a_{A绳} + a_{绳地} = 0 + a_B = a$$

$$T_B - m_Bg = m_Ba_B \qquad a = a_t = R\beta$$

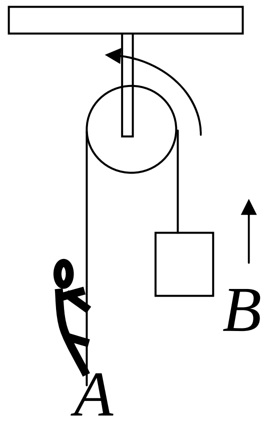
$$T_AR - T_BR = J\beta \qquad J = \frac{1}{4}MR^2 \quad m_A = M,\ m_B = M/2,$$

$a = 2g/7$

(2) $m_B = M$, 角动量守恒.　设B的速率为v

$v_A = v_{A绳} + v_{绳地} = u - v$

以垂直屏幕向外为正。

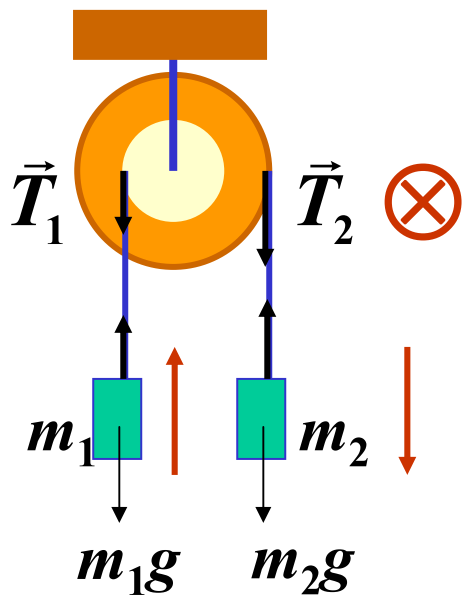


$$\frac{1}{4}MR^2\omega + MvR - MR(u-v) = 0$$

$$v = R\omega$$

$$v = \frac{4}{9}u$$

2. 如图，两圆轮的半径分别为R_1和R_2（$R_1<R_2$），质量分别为M_1和M_2，皆可视为均匀圆柱体且同轴固结在一起，二盘边缘绕有细绳，绳子下端挂两个质量分别为m_1和m_2的物体，求在重力作用下，m_2下落时轮的角加速度。



解： $m_1: T_1 - m_1 g = m_1 a_1$

$$m_2: m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

对整个轮，由转动定律

$$T_2R_2 - T_1R_1 = \left(\frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2\right)\beta$$

由运动学关系 $\beta = \dfrac{a_1}{R_1} = \dfrac{a_2}{R_2}$

联立解得 $\beta = \dfrac{(m_2R_2 - m_1R_1)g}{\left(\dfrac{M_1}{2}+m_1\right)R_1^2 + \left(\dfrac{M_2}{2}+m_2\right)R_2^2}$

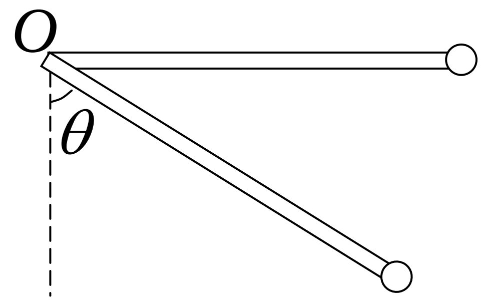
3.一刚体由长为L，质量为m 的匀质细杆和一个质量为m的小球牢固地连接在杆的一端而成，可绕过杆另一端O的水平轴转动，如图所示。先将杆拉至水平，然后让其自由转动，轴处的摩擦忽略，求：（1）刚体绕O轴的转动惯量，（2）杆与竖直轴成θ角时，刚体的角速度，（3）杆与竖直线成 θ角时，该刚体质心的法向和切向加速度。

解： (1) $J = mL^2/3 + mL^2 = 4\,mL^2/3$

(2) 杆与地球组成的系统，机械能守恒。

$$0 = \frac{1}{2}J\omega^2 - mg\frac{1}{2}L\cos\theta - mgL\cos\theta \qquad J = \frac{4}{3}mL^2$$

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g\cos\theta}{L}}$$



(3) 质心位置 $l_c = \dfrac{m\dfrac{L}{2} + mL}{m+m} = \dfrac{3L}{4}$

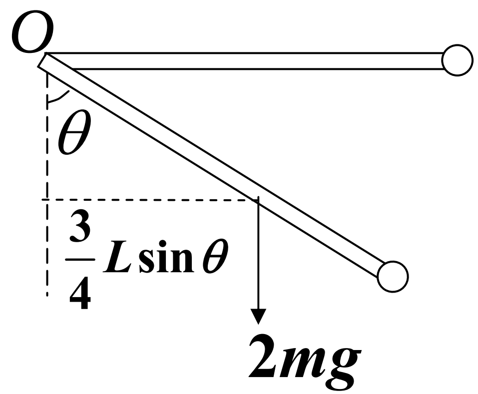
$$a_{cn} = r\omega^2 = \frac{3}{4}L \cdot \frac{9}{4}\frac{g\cos\theta}{L} = \frac{27g\cos\theta}{16}$$

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g\cos\theta}{L}}$$

$$J = 4\,mL^2/3$$

根据转动定律

$$2mg\frac{3}{4}L\sin\theta = J\beta = \frac{4}{3}mL^2\beta$$

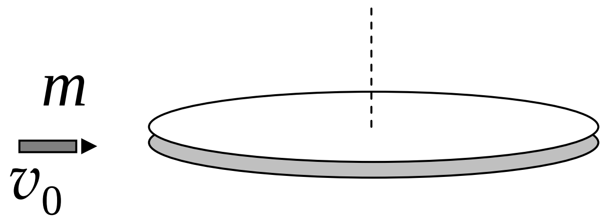


$$\beta = \frac{9g\sin\theta}{8L}$$

$$a_{ct} = r\beta = \frac{3}{4}L\frac{9g\sin\theta}{8L} = \frac{27g\sin\theta}{32}$$

4．一均匀圆盘，质量为M，半径为R，盘面与粗糙的水平面接触。圆盘可绕过其中心的竖直轴转动。质量为m，速度为v_0的子弹垂直打入圆盘边缘并镶嵌在盘边上。设圆盘与水平面间的摩擦系数为 μ，求（1）子弹击中圆盘后，盘的角速度;（2）经过多少时间，圆盘停转？（3）圆盘转过的角度为多少？

解：（1）子弹与圆盘组成的系统，角动量守恒。



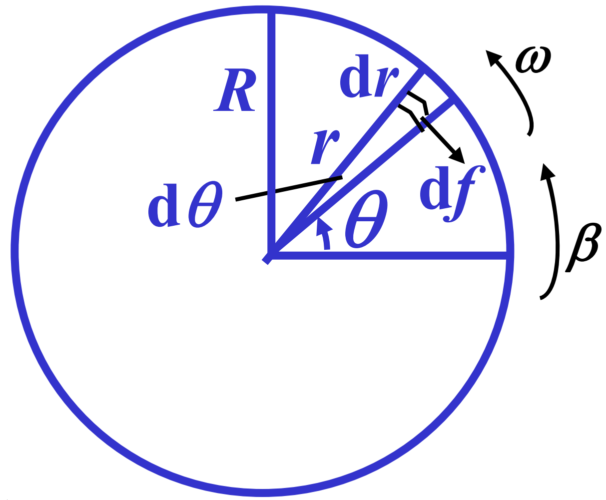
$$mv_0R = mR^2\omega_0 + \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{mv_0}{(m+\frac{1}{2}M)R}$$

（2）摩擦力矩

$$M_f = \int_0^R -\mu\cdot \mathrm{d}m\cdot gr + (-\mu\cdot mgR)$$

$$= -\int_0^R \mu gr\sigma 2\pi r\mathrm{d}r - \mu\cdot mgR = -\frac{\mu gR}{3}\cdot(3m+2M)$$



以垂直屏幕向外为正方向

$$\beta = \frac{M_f}{J} = -\frac{\mu g R}{3J}\cdot(3m+2M)$$

$$M_f = -\frac{\mu g R}{3}\cdot(3m+2M)$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

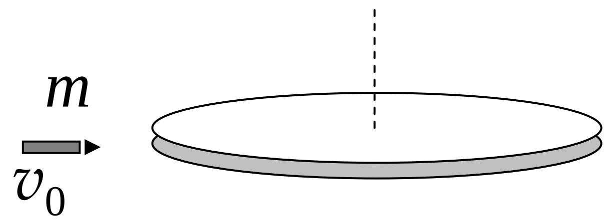
$$\omega_0 = \frac{mv_0}{(m+\frac{1}{2}M)R}$$

$$\beta = -\frac{2\mu g}{3R}\cdot\frac{(3m+2M)}{(2m+M)}$$

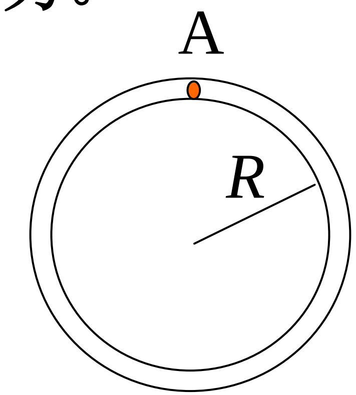
$$\omega = \omega_0 + \beta t \qquad \omega = 0 \qquad t = \frac{\omega_0}{-\beta} = \frac{3mv_0}{\mu g(2M+3m)}$$

(3) $\omega^2 - \omega^2{}_0 = 2\beta\,\theta$

$$\theta = \frac{\omega_0^2}{-2\beta} = \frac{3m^2v_0^2}{\mu g R(2M+3m)(M+2m)}$$



5． 一圆环质量为m, 半径为R , 可在竖直面内绕过**A** 点的固定水平轴转动。现将圆环拉起，使其圆心与转轴位于同一水平高度，之后放手，求（**1**）放手的瞬间转轴对环的作用力；（**2**） 圆心位于转轴正下方时转轴对环的作用力。

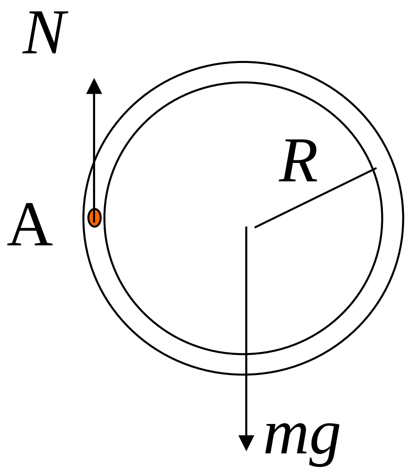


解：（**1**）由转动定律，角加速度为

$$\beta = \frac{M}{J} \qquad M = mgR$$

根据平行轴定理 $J = mR^2 + mR^2 = 2\,mR^2$

$$\beta = \frac{g}{2R}$$



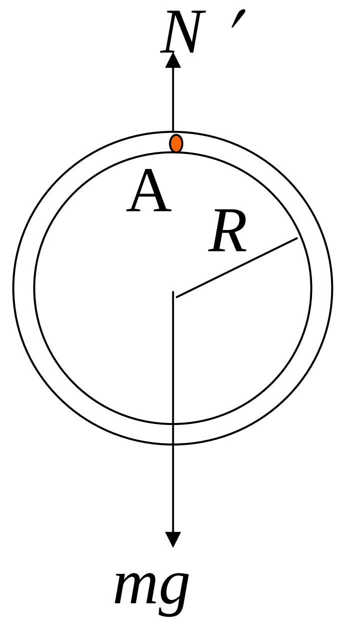
质心的加速度为 $a_{ct}=R\beta=g/2$

$$a_{cn}=0$$

根据质心运动定理

$$mg - N = m\,a_{ct} \qquad N = mg/2$$

(2) 机械能守恒



$$\frac{1}{2}J\omega^2 - mgR = 0 \qquad J = 2mR^2$$

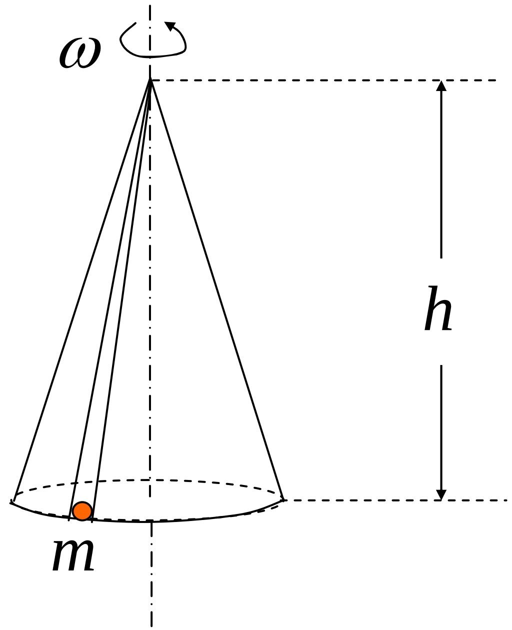
$$\omega^2 = g/R$$

$$a_{cn} = R\,\omega^2 = g \qquad a_{ct} = 0$$

$$N' - mg = m\,a_{cn} = mg$$

$$N' = 2mg$$

6． 一个高为h, 底部半径为R 的圆锥体可绕竖直对称轴转动，锥体表面沿母线刻有一条细槽。设锥体以角速度ω_0 旋转时，有一质量为m 的小滑块从槽的顶端从静止开始滑下。已知锥体对其对称轴的转动惯量为J，且不计摩擦。求：(1) 当滑块到达底部时，圆锥体的角速度；（2）当滑块到达底部时，滑块运动速度的大小。



解:（1）角动量守恒

$$J\omega_0 = (J + mR^2)\omega \qquad \omega = \frac{J\omega_0}{J + mR^2}$$

（2）机械能守恒

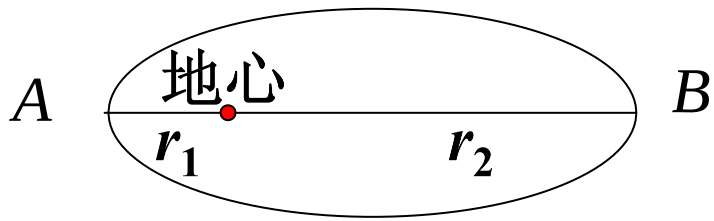
$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

$$V = \sqrt{2gh + \frac{J\omega_0^2 R^2 (2J + mR^2)}{(J + mR^2)^2}}$$

其 它 典 型 题

1. 一人造地球卫星绕地球作椭圆运动， A 、B 分别为近地点和远地点， A 、B 距地心的距离分别为 r_1 、 r_2 。设卫星的质量为 m ，地球的质量为M，万有引力常量为G，则卫星在A 、B 两点 处的万有引力势能的差为多少？卫星在A 、B 两点 处的动能差为多少？

解: 由万有引力势能公式得



$$E_{pB}-E_{pA}=-G\frac{Mm}{r_2}-(-G\frac{Mm}{r_1})$$

$$=GMm\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}$$

由机械能守恒

$$E_{kB}-E_{kA}=-(E_{pB}-E_{pA})\ =-GMm\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}$$

2. 弹簧原长为AB，劲度系数为*k*,下端固定在点A，上端与一质量为*m*的木块相连，木块总靠在一半径为*a*的半圆柱的光滑表面上。今沿半圆的切向用力*F* 拉木块使其极缓慢地移过角度*θ*。求在这一过程中力*F* 的功。

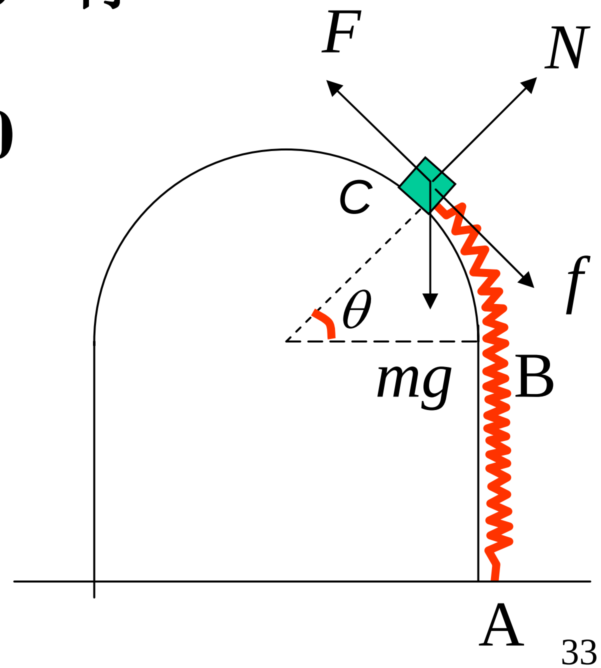
解：以 *m* 为研究对象，根据动能原理，

且保守力的功等于势能增量的负值，有

$$K_c - K_B = W_F - mgh_c - \frac{1}{2}ks^2 = 0$$

$$h_c = a\sin\theta, s = a\theta$$

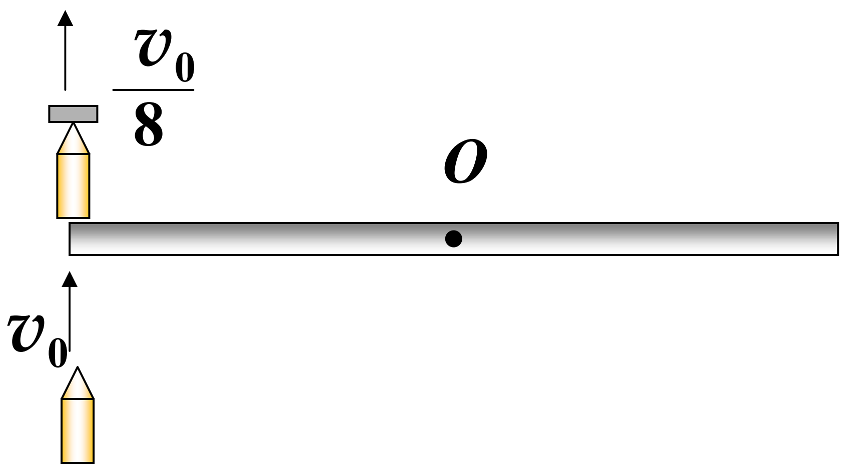
$$W_F = mga\sin\theta + \frac{1}{2}ka^2\theta^2$$



3. 一质量为M，长度为 L 的均匀细杆，放在光滑的水平桌面上，可绕通过其中点 O 的光滑固定竖直轴转动，开始时静止。一质量为 m（$m<M$）的子弹以速度 v_0 垂直击中杆的一端，撞击后从杆的一端打下质量也为m 的一段（可视为质点），与子弹结合在一起以 $v_0/8$ 的速度沿垂直于杆的方向飞出，如图。求：(1)撞击后瞬间杆转动的角速度;(2)撞击过程中的机械能损失。

解：由角动量守恒

$$\frac{1}{2}mv_0l=\frac{1}{2}(2)m\frac{v_0}{8}l+J\omega$$



$$J=\frac{1}{12}Ml^2-m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}(M-3m)l^2$$

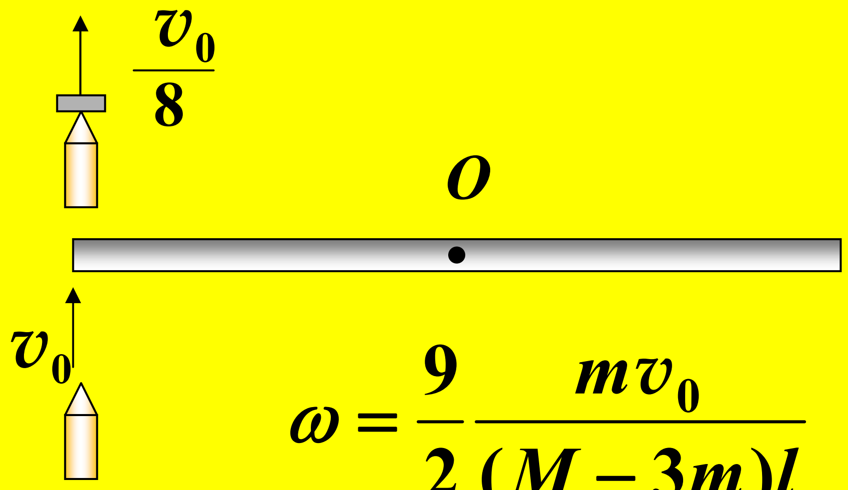
$$\omega=\frac{9}{2}\frac{mv_0}{(M-3m)l}$$

（2）损失的机械能

$$\Delta E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv_0^2-[\frac{1}{2}2m(\frac{v_0}{8})^2+\frac{1}{2}J\omega^2]$$

$$=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{64}mv_0^2-\frac{1}{12}(M-3m)l^2\frac{81mv_0^2}{4(M-3m)l^2}$$

$$=\frac{1}{2}mv_0^2(\frac{31}{32}-\frac{27}{16}\frac{m}{M-3m})$$



$$\omega=\frac{9}{2}\frac{mv_0}{(M-3m)l}$$