2006 级工科《数学分析 B》期末试卷(B 卷)参考答案与评分标准

一．求解下列各题

1. 直线过点(1,0,-2)，方向向量$\vec{s}=\{2,m,3\}$，平面法向量$\vec{n}=\{1,-1,2\}$--------------------2 分

$\vec{n}\perp\vec{s}\Rightarrow\{1,-1,2\}\cdot\{2,m,3\}=2-m+6=0\Rightarrow m=8$------------------------------------4 分

$d=\dfrac{|1-0-4+D|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}\Rightarrow D=9,-3$ ---6 分

或 过$(1,0,-2)$与L,π 垂直的直线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ 与 π 交点：

$x=\dfrac{D-9}{6},\ y=\dfrac{15-D}{6},\ z=\dfrac{D-21}{3}$

$d=\sqrt{(\dfrac{D-9}{6}-1)^2+(\dfrac{5-D}{6})^2+(\dfrac{D-21}{3}+2)^2}=\sqrt{6}\Rightarrow D=-3,9.$

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2}f(xy)+\dfrac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)$ ---3 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$ --6 分

3. $\int_L\dfrac{x^2}{y}dx+\dfrac{x}{y}dy=\int_1^4(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}+\dfrac{x}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}})dx$ --3 分

$=[\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\dfrac{1}{2}x]_1^4=\dfrac{139}{10}$ ------------------------------------6 分

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^p}\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{p+1}}}=1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1^n)\dfrac{1}{n^p}\ln(1+\dfrac{1}{n})|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\ln(1+\dfrac{1}{n})$有相敛散性 ---------------------------------2 分

1) $p>0$，绝对收敛；

2) $-1<p\le 0$，条件收敛；

3) $p<-1$，发散。 --6 分

二．解下列各题

1. $\vec{n}=\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}$ --3 分

$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2=4,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy=8,\frac{\partial u}{\partial z}=-\ln z-1=-1$ --6 分

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(2,2,1)}=\{4,8,-1\}\cdot\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}=-3$ ---7 分

2. $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ --- --1 分

$=\frac{1}{x-1+2}-\frac{1}{x-1+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$ -------------------------2 分

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{x-1}{2})^{n-1}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{x-1}{3})^{n-1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n})(x-1)^{n-1}$ ------------------------------4 分

收敛区间 $(-1,3)$ ---5 分

$f^{(5)}(1)=-5!(\frac{1}{2^6}-\frac{1}{3^6})$ ---7 分

3. $I=\iint_D dxdy\int_0^2 zx^2dz$ --3 分

$=\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^1dy\int_0^2zx^2dz=\int_{-1}^1x^2dx\int_{x^2}^1dy\int_0^2zdz$ - -------------------------------------4 分

$=\frac{8}{15}$ --7 分

4.二元函数的一阶偏导数

$\begin{cases} f_x=3x^2-6x-9=0 \\ f_y=-2y+2=0 \end{cases}$ ---2 分

$\Rightarrow(3,1),(-1,1)$ ---3 分

$f_{xx}=6x-6,f_{xy}=0,f_{yy}=-2$ - ---4 分

$$H_1=\begin{pmatrix}12 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},(3,1)，\quad H_2=\begin{pmatrix}-12 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},(-1,1)$$ -----------------------------------5 分

$f_{\max}=f(-1,1)=8$ 为极大值，$(-1,1)$ 为极大值点。 ------------------------------------7 分

三． $f(x)$ 为偶函数，傅立叶级数为余弦级数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+1)dx=\frac{2}{3}\pi^2+2$$ --3 分

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+1)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{n\pi}[x^2\sin nx|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin nxdx]+\frac{2}{n\pi}\sin nx|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$ --5 分

$$=\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx|_0^{\pi}-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx$$

$$=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$ ---6 分

$$f(x)=\frac{1}{3}\pi^2+1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$$ --8 分

四． $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2,\\ x^2+y^2=z^2.\end{cases}\Rightarrow 2z^2=2,z=1$ - --2 分

立体在 xoy 面上的投影区域为 $D:x^2+y^2=1$ ---3 分

$$S_1=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \qquad z_x=\frac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}},z_y=\frac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}},$$

$$=\iint_D\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{2-r^2}}dr$$

$$=-2\sqrt{2}\pi(2-r^2)^{\frac{1}{2}}|_0^1=2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)$$ ------------------------------------5 分

$$S_2=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \qquad z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$=\iint_D \sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\pi$ ---7 分

$S=\pi(4-\sqrt{2})$ --8 分

五. $z=x^2+y^2,\vec{n}=\{z_x,z_y,-1\}=\{2x,2y,-1\}$ --------------------------------------2 分

$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^3\cdot 2x+y^3\cdot 2y-1)dxdy=2\iint_D(x^4+y^4)dxdy-\iint_D dxdy$ --------------4 分

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^5\cos^4\theta d\theta+2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^5\sin^4\theta dr-\pi$

$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(\frac{1+\cos 2\theta}{2})^2 d\theta+\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(\frac{1-\cos 2\theta}{2})^2 d\theta-\pi$

$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\cos^2 2\theta d\theta-\pi$

$=-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta=-\frac{\pi}{2}$ ---8 分

或 加补平面 $S_1: z=1, x^2+y^2=1$ 上侧 -

$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,z\ge x^2+y^2, z=1\}$ ---2 分

$I+\iint_{S_1}x^3dydz+y^3dxdz+dxdy=\iint_{S+S_1}x^3dydz+y^3dxdz+dxdy$

$=\iiint_\Omega(3x^2+3y^2)dxdydz$ -----------------------------4 分

$\Rightarrow I=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2)dxdy-\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy$

$=3\iint_{x^2+y^2}dxdy\int_{x^2+y^2}^1(x^2+y^2)dz-\pi$ --6 分

$=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$ --8 分

六. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$，收敛区域为$(-1,1)$ ---2 分

$x \in (-1,1),\ S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = x(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1})''$ -----------------------------4 分

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$ ---5 分

$(\frac{x^2}{1-x})'' = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$ ----------------------------------7 分

$S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$ --8 分

七．1). $P(x,y) = (x-y)(x^2+y^2)^{\lambda},\ Q(x,y) = (x+y)(x^2+y^2)^{\lambda}$ --------------1 分

$\frac{\partial P}{\partial y} = -(x^2+y^2)^{\lambda} + 2y\lambda(x-y)(x^2+y^2)^{\lambda-1}$ -----------------------2 分

$\frac{\partial Q}{\partial x} = (x^2+y^2)^{\lambda} + 2x\lambda(x+y)(x^2+y^2)^{\lambda-1}$ -----------------------3 分

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow 2(\lambda+1)(x^2+y^2)^{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ -----------------------4 分

2). $P(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2},\ Q(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

$df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ---5 分

$f(1,\sqrt{3}) - f(2,0) = \int_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ------------------------------------6 分

$= \int_0^{\sqrt{3}} Q(1,y)dy + \int_2^1 P(x,0)dx$

$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+y}{1+y^2}dy + \int_2^1 \frac{x}{x^2}dx$

$= \arctan y\,|_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\,|_0^{\sqrt{3}} - \ln 2$

$= \frac{\pi}{3}$ --------------------------------------8 分

八．1). $F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\sin\varphi d\rho$ -------------------------------------2 分

$$= 4\pi\int_0^t \rho^2 f(\rho^2)d\rho$$ --3 分

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$$ - ---4 分

2). $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\lambda} F'(\frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi \frac{1}{n^{1+\lambda}} f(\frac{1}{n^2})$ --------------------------------6 分

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4\pi}{n^{1+\lambda}} f(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^{1+\lambda}}} = 4\pi f(0)$$

$\lambda > 0$ 时收敛，$\lambda \le 0$ 是发散。 ------------------------------------8 分