

课程编号: MTH17004

北京理工大学 2011-2012 学年第二学期

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 平面 $\pi_1: 3x + 2y - z + 6 = 0$ 与 $\pi_2: 3x + 2y - z - 7 = 0$ 之间的距离 $d =$ _____.

2. 设 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + |y|^3}$, 根据偏导数的定义, $f'_y(0, 0) =$ _____.

3. 设 $\vec{A} = e^{xy}\vec{i} + \sin(xy)\vec{j} + \sin(xz^2)\vec{k}$, 则 $\text{div}\vec{A} =$ _____.

4. 设曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 则 $\iint_S (x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2)dS =$ _____.

5. $f(x) = \ln x$ 在 $x_0 = 3$ 处的泰勒级数展开式为 $f(x) =$ _____.

二. (8 分) 已知 $e^z - xz = y$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

三. (8 分) 证明曲线 $\begin{cases} x^2 - z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ 在点 $P(1, -2, 1)$ 处的切线与直线 $\begin{cases} 3x - 5y + 5z = 0 \\ x + 5z + 1 = 0 \end{cases}$ 垂直.

四. (11 分) 求函数 $z = xy(1 - x - y)$ 的极值点和极值.

五. (9 分) 将 $I = \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x \frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)}}$ 化成极坐标系中的累次积分, 并求出积分的值.

六. (9 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ 的收敛域及和函数.

七. (9 分) 设 V 是由柱面 $y = x^2$, 平面 $y + z = 1$ 以及 xOy 面所围成的空间有界闭区域, 计算

$$I = \iiint_V x^2 dx dy dz.$$

八. (10 分) 已知 $\frac{ax+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y+b}{x^2+y^2} dy$ 在右半平面 ($x > 0$) 是函数 $u(x, y)$ 的全微分, 求 a, b

的值, 并求 $u(x, y)$.

- 九. (8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上以 2π 为周期的傅里叶级数展开式中 $\sin nx$ 的系数 b_n , 并给出此傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上的和函数 $S(x)$ 的表达式.

- 十. (9 分) 利用高斯公式计算 $I = \iiint_S xz^2 dydz + (x^2y - z^3) dzdx + (2xy + y^2z + 3) dxdy$, 其中 S 是曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的下侧.

十一. (9 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导, 且满足 $f(x) = \sin x + \int_0^x (x-u)f(u)du$, 求 $f(0)$,

$f'(0)$, 并证明 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛.