理想气体分子平均相对速率公式的推导

王明美
（合肥师范学院物理与电子工程系，安徽 合肥 230061）

[摘　要] 运用麦克斯韦速率分布律，推导出理想气体分子平均相对速率与算术平均速率的关系式。

[关键词] 理想气体；分子平均相对速率；分子平均速率
[中图分类号] O552　[文献标识码] A　[文章编号] 1674-2273(2009)06-0027-02

在推导理想气体平均碰撞频率的公式 $\bar{z}=\pi d^2\bar{v}_r n=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n$ 中，涉及到气体分子的相对速率 $\bar{v}_r$ 和算术平均速率 $\bar{v}$ 的关系式，在常用的普通物理学[1][2]和热学[3][4]的教材中，一般只有简单的说明，如："利用麦克斯韦速率分布律不难求出，平均相对速率与算术平均速率的关系为：$\bar{v}_r=\sqrt{2}\bar{v}$"，没有具体的推导。其实，学生在此常提出问题，这个关系式是如何得出来的？以下推导关系式 $\bar{v}_r=\sqrt{2}\bar{v}$。

1　概率 dw

为使计算简单起见，假定每个分子都是质量为 m，直径为 d 的小球，再假定除一个分子外其他分子都静止不动，只有那一个分子以平均相对速率 $\vec{v}_r$ 运动。由麦克斯韦速率分布律已知分子的算术平均速率为 $\bar{v}=\int_0^\infty vf(v)dv=\int_0^\infty 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dv=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$。

设处在平衡态的气体为理想气体。按麦克斯韦速度分布律，气体中的任一分子 1 处在速度区间 $\vec{v}_1\sim\vec{v}_1+\overrightarrow{dv}_1$ 内的概率 dw_1 为

$$dw_1=\frac{dN_1}{N_1}=f(\vec{v}_1)\overrightarrow{dv}_1=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}}\overrightarrow{dv}_1$$

气体中的任一分子 2 处在速度区间 $\vec{v}_2\sim\vec{v}_2+\overrightarrow{dv}_2$ 内的概率 dw_2 为

$$dw_2=\frac{dN_2}{N_2}=f(\vec{v}_2)\overrightarrow{dv}_2=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}\overrightarrow{dv}_2$$

由于分子 1 处在速度区间 $\vec{v}_1\sim\vec{v}_1+\overrightarrow{dv}_1$、分子 2 处在速度区间 $\vec{v}_2\sim\vec{v}_2+\overrightarrow{dv}_2$ 是两个独立事件，所以分子 1 和分子 2 同时存在于上述两个区间的概率 dw 为

$$dw=dw_1\cdot dw_2=f(\vec{v}_1)\overrightarrow{dv}_1\cdot f(\vec{v}_2)\overrightarrow{dv}_2=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}}\overrightarrow{dv}_1\cdot 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}\overrightarrow{dv}_2 \quad (1)$$

2　相对速率分布函数 $f(v_r)$

假设分子 1 相对于分子 2 的速度为 $\vec{v}_r$，则有

$$\vec{v}_r=\vec{v}_1-\vec{v}_2 \quad (2)$$

设两个分子的质心速度为 $\vec{u}_c$，则有

$$\vec{u}_c=\frac{m\vec{v}_1+m\vec{v}_2}{m+m}=\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2} \quad (3)$$

联立(2)式和(3)式解得 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 分别为：

$$\vec{v}_1=\vec{u}_c+\frac{\vec{v}_r}{2},\ \vec{v}_2=\vec{u}_c-\frac{\vec{v}_r}{2}.$$

则有

$$mv_1^2+mv_2^2=m\left(\vec{u}_c+\frac{\vec{v}_r}{2}\right)^2+m\left(\vec{u}_c-\frac{\vec{v}_r}{2}\right)^2=m\left(2u_c^2+\frac{v_r^2}{2}\right)=2mu_c^2+\frac{mv_r^2}{2} \quad (4)$$

根据积分变量替换法则：

$$\overrightarrow{dv}_1\cdot\overrightarrow{dv}_2=J\cdot\overrightarrow{du}_c\cdot\overrightarrow{dv}_r \quad (5)$$

其中 J 为雅克比行列式：

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial\vec{r}_r} & \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial\vec{u}_c}\\ \frac{\partial\vec{v}_2}{\partial\vec{r}_r} & \frac{\partial\vec{v}_2}{\partial\vec{u}_c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1/2 & 1\\ -1/2 & 1\end{vmatrix}=1 \quad (6)$$

将(4)、(5)、(6)式代入(1)式：

$$dw=dw_1\cdot dw_2=f(\vec{v}_1)\overrightarrow{dv}_1\cdot f(\vec{v}_2)\overrightarrow{dv}_2$$

[收稿日期] 2009－06－24
[作者简介] 王明美(1956－)，女，江苏南京人，合肥师范学院物理与电子工程系副教授。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}} \overrightarrow{dv_1} \circ \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}} \overrightarrow{dv_2}$$

$$=\left(\frac{2m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2mu_c^2}{2kT}} \overrightarrow{du_c} \circ \left(\frac{m/2}{2\pi kT}\right) e^{-\frac{mv_r^2/2}{2kT}} \overrightarrow{dv_r}$$

$$=f(\vec{u_c})\overrightarrow{du_c} \circ f(\vec{v_r})\overrightarrow{dv_r} \tag{7}$$

其中 $f(\vec{u_c})=\left(\frac{2m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2mu_c^2}{2kT}}$ (8)

$$f(\vec{v_r})=\left(\frac{m/2}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv_r^2/2}{2kT}} \tag{9}$$

可以证明 $\int_0^{+\infty} f(\vec{u_c})d\vec{u}_c = 1$ (10)

$$\int_0^{+\infty} f(\vec{v_r})d\vec{v}_r = 1 \tag{11}$$

由相对速度分布函数 $f(\vec{v_r})$可以得到相对速率分布函数 $f(v_r)=4\pi\left(\frac{m/2}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv_r^2/2}{2kT}} v_r^2$。

3 分子间平均相对速率 $\bar{v}_r$

这样分子 1 与分子 2 之间相对速率在 $v_r \sim v_r + dv_r$ 之间的概率为 $f(v_r)dv_r$，所以对全部分子求得分子间平均相对速率为

$$\bar{v}_r=\int_0^{\infty} 4\pi\left(\frac{m/2}{2\pi kT}\right)^{3/2} v_r^2 e^{-\frac{mv_r^2/2}{2kT}} dv_r$$

由积分公式 $\int_0^{\infty} v^3 e^{-bv^2} dv = \frac{1}{2b^2}$，得：

$$\bar{v}_r = \sqrt{2} \circ \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{2}\,\bar{v}$$

以上是利用麦克斯韦速率分布律求出平均相对速率与算术平均速率的关系 $\bar{v}_r=\sqrt{2}\bar{v}$ 的方法。

[参 考 文 献]

[1] 程守洙，江之永. 普通物理学(第 6 版)[M]. 北京：高等教育出版社，2006: 190.

[2] 马文蔚. 物理学(第 4 版)[M]. 北京：高等教育出版社，1999: 253.

[3] 詹佑邦. 热学(第 2 版)[M]. 上海：华东师范大学出版社，1997: 189.

[4] 黄淑清，聂宜如. 热学教程(第 2 版)[M]. 北京：高等教育出版社，1994: 259.

The Derivation of the Formula of Ideal Gas Molecules Average Relative Rate

WANG Ming-mei

(*Department of Physics and Electronic Engineering*, *Hefei Normal University*, *Hefei* 230061, *China*)

Abstract: By using Maxwell speed distribution law, the paper derives the relationship between average relative rate and arithmetic average rate of ideal gas molecules.

Key words: ideal gas; mean relative speed of molecule; mean speed of molecule

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net