(2012-2013)工科数学分析第二学期期末试题(A 卷)解答（2013.6）

一. **1.** $\arcsin\dfrac{5}{2\sqrt{21}}$

2. $\dfrac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$

3. -6

4. $-\dfrac{4}{25\pi}$

5. $2ydydz+(y-x^2)dxdy$

二. 两方程两端分别对 x 求导，得

$$\begin{cases} u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}, \qquad \text{……………….(3 分)}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$ ……………….(4 分)

两方程两端分别对 y 求导，得

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}-v-y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}, \qquad \text{……………….(7 分)}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}$ ……………….(8 分)

三. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2d\rho$ ……………….(4 分)

$=\dfrac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$ ……………….(6 分)

$=\dfrac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$

$=\dfrac{2}{9}(8-5\sqrt{2})$ ……………….(9 分)

四. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-12 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=6xy$ ……………….(2 分)

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial z}{\partial y}=0$ 解得 $x=0, \quad y=\pm 2$ 或 $x=\pm 2, \quad y=0$ …………(3 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x$ ……………….(4 分)

在点 $P_1(0,2)$，$A=0 \quad B=12 \quad C=0$

$AC-B^2=-144<0$ 故 $P_1(0,2)$ 不是极值点 ……………….(5 分)

在点 $P_2(0,-2)$，$A=0 \quad B=-12 \quad C=0$

$AC-B^2=-144<0$ 故 $P_2(0,-2)$ 不是极值点 ……………….(6 分)

在点 $P_3(2,0) \quad A=12 \quad B=0 \quad C=12$

$AC-B^2=144>0$ 且 $A>0$

故 $P_3(2,0)$ 是极小值点，极小值 $z\big|_{(2,0)}=-16$ ……………….(8 分)

在点 $P_4(-2,0) \quad A=-12 \quad B=0 \quad C=-12$

$AC-B^2=144>0$ 且 $A<0$

故 $P_4(-2,0)$ 是极大值点，极大值 $z\big|_{(-2,0)}=16$ ……………….(10 分)

五. 设切点 $M(x,y,z)$，在切点处，$xyz=\lambda$ 的法向量为 $\vec{n}_1=\{yz,xz,xy\}$ ….(2 分)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的法向量为 $\vec{n}_2=\{\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\}$ …………….(4 分)

由 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$， 得 $\frac{\frac{x}{a^2}}{yz}=\frac{\frac{y}{b^2}}{xz}=\frac{\frac{z}{c^2}}{xy}$ ……………….(6 分)

因此有 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

代入椭球面方程得 $x^2=\frac{a^2}{3} \quad y^2=\frac{b^2}{3} \quad z^2=\frac{c^2}{3}$ …………….(8 分)

$\lambda=xyz=\left|\frac{a}{\sqrt{3}}\frac{b}{\sqrt{3}}\frac{c}{\sqrt{3}}\right|=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$ ……………….(9 分)

六. $$I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$ ……………….(2 分)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r^5\sin^3\varphi dr$$ ……………….(5 分)

$$=2\pi\cdot\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi d\varphi$$ ……………….(7 分)

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\varphi-1)d\cos\varphi$$

$$=\frac{\pi}{9}(2-\frac{5\sqrt{2}}{4})$$ ……………….(9 分)

七. $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1 \qquad R=1$$ ……………….(1 分)

$x=\pm1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}$收敛，收敛域为$[-1,1]$ ……….(2 分)

令 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}$$ ……………….(4 分)

$$=\frac{x^2}{1+x^2}$$ ……………….(5 分)

$$S(x)=\int_0^x\frac{x^2}{1+x^2}dx=x-\arctan x$$ ……………….(7 分)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\begin{cases}1-\frac{1}{x}\arctan x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ ……………….(9 分)

八. 设 $X=(6y+x^2y^2)y^3f(x)$，$Y=(8x+x^3y)y^3f(x)$，

由题设，$X=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ $Y=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 故有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，即 ……………….(1 分)

$(8y^3+3x^2y^4)f(x)+(8xy^3+x^3y^4)f'(x)=(24y^3+5x^2y^4)f(x)$ ……….(3 分)

比较 y 的同次幂系数，得 $xf'(x)=2f(x)$ ……………….(4 分)

$\dfrac{df(x)}{f(x)}=\dfrac{2dx}{x}$， $f(x)=Cx^2$ ……………….(6 分)

由 $f(1)=1$ 得 $C=1$ $f(x)=x^2$ ……………….(7 分)

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(6x^2y^4+x^4y^5)dx+(8x^3y^3+x^5y^4)dy+C$ ……….(8 分)

$=0+\int_0^y(8x^3y^3+x^5y^4)dy+C$ ……………….(9 分)

$=2x^3y^4+\dfrac{1}{5}x^5y^5+C$ ……………….(10 分)

九. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$ ……………….(1 分)

$=\dfrac{1}{2+(x-1)}-\dfrac{1}{3+(x-1)}$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{3}}$ ……………….(3 分)

$=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-1}{2})^n-\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-1}{3})^n$ ……………….(6 分)

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n$ ……………….(7 分)

收敛域为 $(-1,3)\cap(-2,4)=(-1,3)$ ……………….(9 分)

十. (1) $S: x^2+y^2=2z$ ……………….(1分)

(2) 设 $S_1: z=2 \quad (x^2+y^2\le 4)$

$$I=\oiint_{S+S_1^-}-\iint_{S_1^-} xy^2dydz+x^2ydzdx+(z-1)dxdy$$ ……………….(2 分)

$$\oiint_{S+S_1^-} xy^2dydz+x^2ydzdx+(z-1)dxdy=-\iiint_V (y^2+x^2+1)dV$$ …………(4 分)

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho(\rho^2+1)d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz$$ ……………….(6 分)

$$=-2\pi\int_0^2\rho(\rho^2+1)(2-\frac{\rho^2}{2})d\rho$$

$$=-\frac{28}{3}\pi$$ ……………….(7 分)

$$-\iint_{S_1^-} xy^2dydz+x^2ydzdx+(z-1)dxdy=\iint_{S_1^+}(z-1)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}dxdy=4\pi$$ ……………….(8 分)

$$I=-\frac{28}{3}\pi+4\pi=-\frac{16}{3}\pi$$ ……………….(9 分)

十一. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 收敛，有 $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})=0$ ……………….(2 分)

由题设，有 $f(0)=\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})=0$ ……………….(4 分)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=f'(0)$$ ……………….(6 分)

若 $f'(0)\ne 0$，不妨设 $f'(0)>0$，则由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以有 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散，

与已知矛盾，故 $f'(0)=0$ ……………….(8 分)