北京大学光华管理学院期中试题

2022－2023 学年第二学期

考试科目：高等数学 B(下)　　　　考试时间：＿＿＿＿＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　学号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

本试卷共 10 大题，满分 100 分.

1.(10 分)求方程 $\left(xy-x^3y^3\right)\mathrm{d}x+\left(1+x^2\right)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的解.

2. (10 分)求方程 $x^2y''-3xy'+4y=0\ (x>0)$ 的满足条件 $y(1)=1$，$y'(1)=1$ 的解，其中 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y''=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3. (10 分)方程 $y''+y'-2y=x+e^x+\sin x$ 的满足条件 $y(0)=-\dfrac{7}{20}$，$y'(0)=\dfrac{38}{15}$ 的解，其中 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y''=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. (10 分)设 $I(R)=\displaystyle\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$，证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}I(R)=0$.

5. (10 分)设 L 为空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+z=1\end{cases}$,其正向为自 z 轴正向看下来的逆时针方向.

计算积分 $I=\int_L\left(y-z+\sin^2x\right)\mathrm{d}x+\left(z-x+\sin^2y\right)\mathrm{d}y+\left(x-y+\sin^2z\right)\mathrm{d}z$.

6. (10 分)计算积分 $I=\iint\limits_D(x+y+xy)^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\le1\right\}$.

7. (10 分)计算积分 $I=\iint\limits_D\left(\dfrac{3x^2\sin y}{y}+2e^{x^2}\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x, y=x^3$ 围成.

8. (10 分)计算积分 $I=\iiint\limits_\Omega\dfrac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1+x^2+y^2+z^2\right)}\mathrm{d}V$，其中 $\mathrm{d}V$ 即 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 是由曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}, z=\sqrt{3\left(1+x^2+y^2\right)}, x^2+y^2=1$ 所围成的区域.

9. (10 分)计算积分 $I=\oint\limits_{\Gamma}\left(\dfrac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin x^2\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin y^2\right)\mathrm{d}y$，其中 Γ 是 $x^2+y^2=9\left(y\geq 0\right),\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1\left(y\leq 0\right)$ 所组成的闭曲线的逆时针方向.

10. (10 分)设曲面 S 是柱体 $\Omega=\left\{\left(x,y,z\right)\middle|x^2+y^2\leq 1,0\leq z\leq 1\right\}$ 的表面的外侧，计算下列积分：

① $I_1=\iint\limits_{S}\left(y-z\right)\left|x\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(z-x\right)\left|y\right|\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x-y\right)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

② $I_2=\iint\limits_{S}\left(y-z\right)x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(z-x\right)y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x-y\right)z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

③ $I_3=\iint\limits_{S}\left(y-z\right)x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(z-x\right)y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x-y\right)z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.