计算理论

教材:

[S] 唐常杰等译, **Sipser**著, 计算理论导引(第3版), 机械工业.

参考资料:

[L] Lewis等著, 计算理论基础, 清华大学.

计算理论

第一部分 计算模型

第1章 有限自动机

第3章 图灵机

第二部分 可计算性

第4章 存在没有算法的问题

第三部分 计算复杂性

第7章 **P, NP** 与**NP**完全性

计算机的基本能力和局限性是什么?

第1章 有限自动机

常用证明方法

数学归纳法
反证法
鸽巢原理

数学归纳法

命题: 所有的马都是一种颜色.

证明: 我们只需要证明任意n 匹马只有一种颜色.

(i) (初始步) 当 n=1时, 只有一匹马, 马的颜色只有一种.

(ii) (递推步) 假设对正整数k , k 匹马只有一种颜色. 考察 k+1 匹马. 不妨把这些马编号为 1, 2, ..., k, k+1 . 由归纳假设, 去掉编号为2的马后, (1, 3, 4, ..., k+1) 这k匹马只有一种颜色, 于是编号为3, 4, ..., k+1的马与编号为 1的马同色.

同样地由归纳假设, 去掉编号为 k+1 的马后, (1, 2, 3, ..., k)这k 匹马只有一种颜色, 所以编号为2 的马与编号为 1的马同色.

综上, 编号为2, 3, ..., k, k+1的马都与编号为1 的马同色, 因此 k+1匹马的颜色相同. 证毕.

字符串与语言

字母表: 任意一个有限集. 常用记号Σ, Γ.

符号: 字母表中的元素

字符串: 字母表中符号组成的有限序列

如asdf, 通俗地说即单词

串的长度$|\cdot|$, 例: $|abcde|=5$

串的连接*, 例: (abc)*(de)=abcde

串的反转R, 例: $(abcde)^R=edcba$

空词: 记为ε, 长度为0

语言: 给定字母表上一些字符串的集合

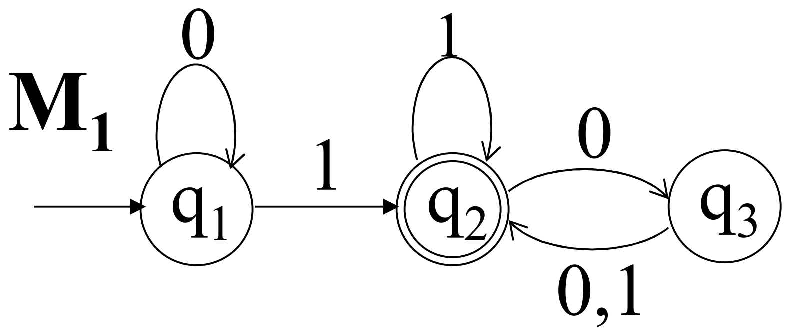
取字母表 $\Sigma=\{0,1\}$, Σ上的语言举例:

A={0,00,0000}, B={0,00,01,000,001,…}

确定型有限(穷)自动机的形式定义

定义: 有限自动机是一个5元组(Q,Σ,δ,s,F),

1) Q是有限集, 称为状态集;
2) Σ是有限集, 称为字母表;
3) $\delta: Q\times \Sigma\rightarrow Q$是转移函数;
4) $s\in Q$是起始状态;
5) $F\subseteq Q$是接受状态集;



- 状态图等价于形式定义

$Q=\{q_1,q_2,q_3\}$, 状态集

$\Sigma=\{0,1\}$, 字母表

$s=q_1$, 起始状态

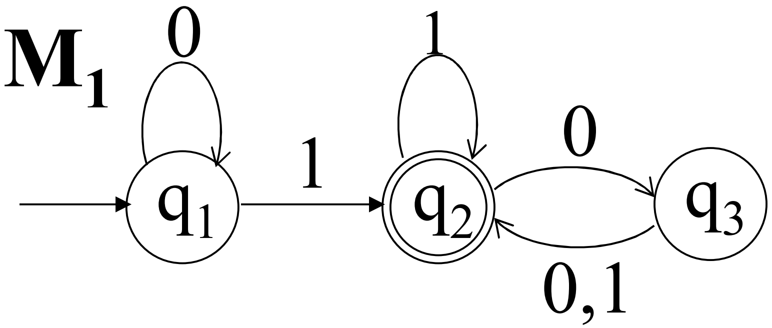
$F=\{q_2\}$接受状态集

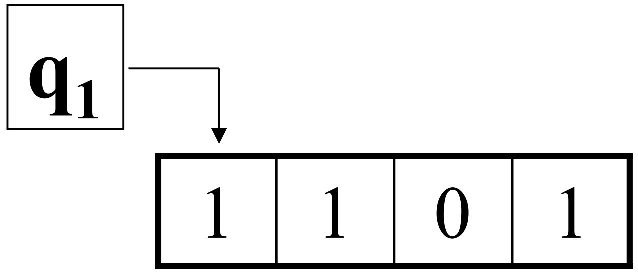
δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

有限自动机

读写头不能改写, 且只能右移

M_1





状态: q_1, q_2, q_3　　起始状态q_1

接受状态q_2　　转移: 箭头

运行: 从起始状态开始沿转移箭头进行.

输出: 输入读完处于接受状态则接受, 否则拒绝.

接受: **1, 11, 100, 101, 1101, …**

拒绝: **ε, 0, 10, 110, 1010, …**

DFA计算的形式定义

设$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$是一个DFA,

$w=w_1w_2\ldots w_n$是字母表Σ上的一个字符串.

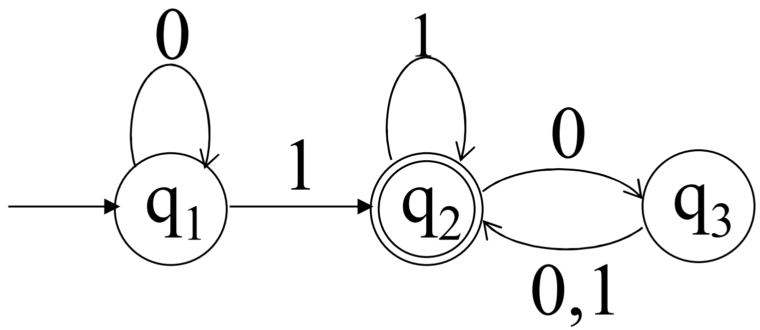
若存在Q中的状态序列$r_0,r_1,\ldots,r_n$, 满足

1) $r_0 = s$;

2) $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$;

3) $r_n \in F$

则M接受w.



$$s \xrightarrow{w_1} r_1 \xrightarrow{w_2} r_2 \cdots\cdots \rightarrow r_{n-1} \xrightarrow{w_n} r_n$$

有限自动机的语言:正则语言

对有限自动机M, 若 $A = \{ w \in \Sigma^* \mid M$接受$w \}$,

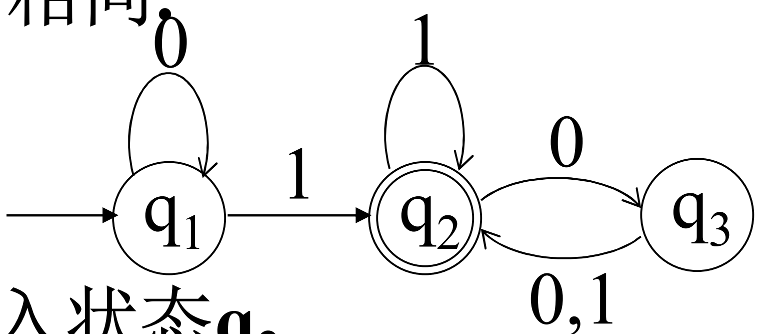
即A是有限自动机M的语言, 记为L(M)=A, 也称M识别A.

注: M的语言唯一. M不识别任何其它语言.

若存在DFA识别语言A, 则称A是正则语言.

称两个有限自动机等价若它们语言相同.

M_1



注: 在任何状态, 读到1后一定会进入状态q_2.

$L(M_1)$={w | w是0,1串, 至少含一个1,

且最后一个1后面含有偶数个0 }

注: 任何其它语言都不是M_1的语言.

有限自动机的设计(难点)

- 自己即自动机
- 寻找需要记录的关键信息

设计识别下列语言的**DFA:**

$\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$从1开始, 以0结束 $\}$

$\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$含有子串1010 $\}$

$\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$的倒数第2个符号是1 $\}$

$\{ 0^k \mid k$是2或3的倍数 $\}$

有限自动机的设计

{ w∈{0,1}* | w从1开始, 以0结束 }

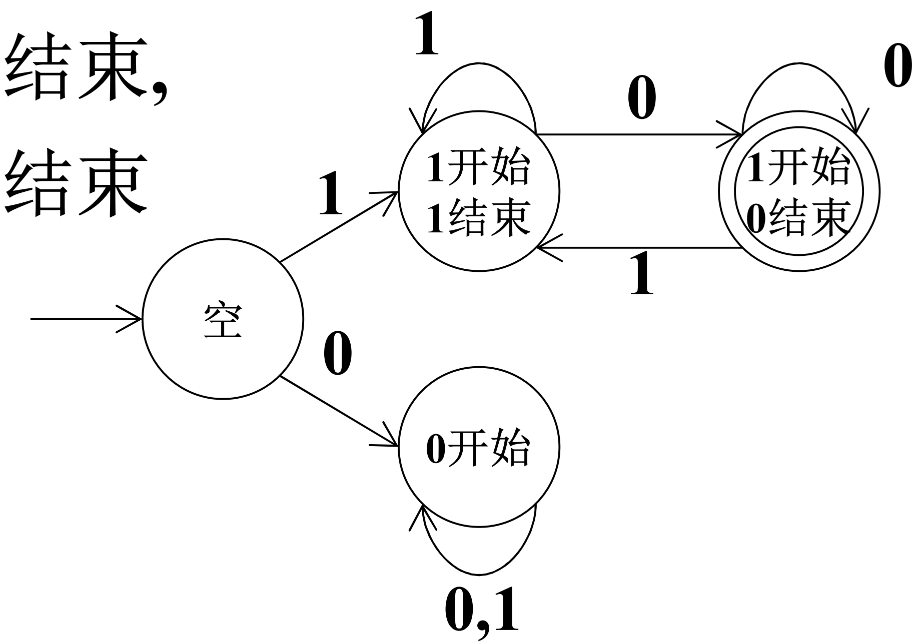
Σ={0,1}, 根据关键信息设计状态,

空,

以0开始,

以1开始以0结束,

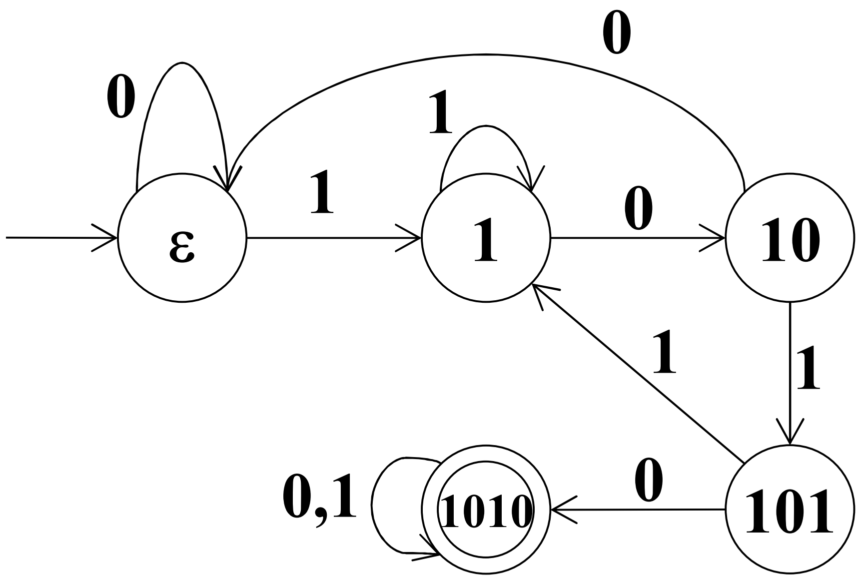
以1开始以1结束



有限自动机的设计

{ w∈{0,1}* | w含有子串1010 }

Σ={0,1}，关键信息: ε, 1, 10, 101, 1010



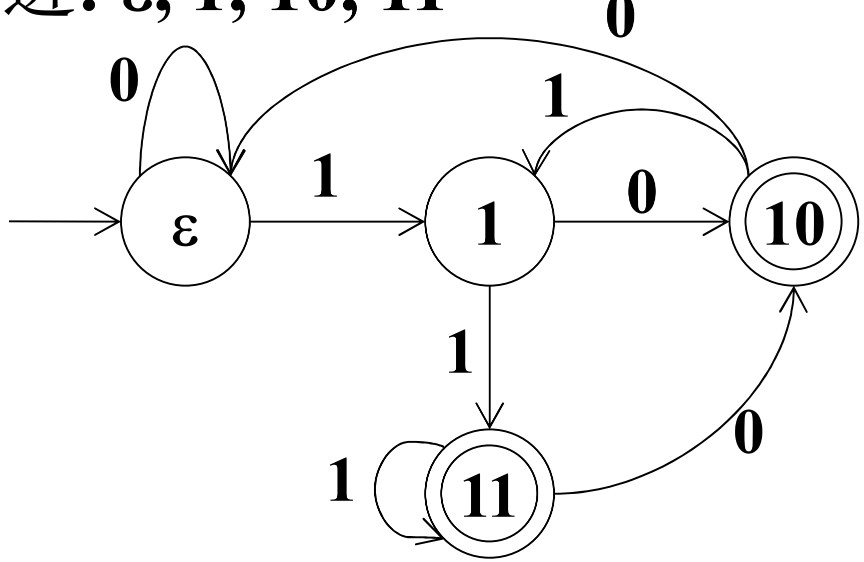
有限自动机的设计

{ w∈{0,1}* | w倒数第2个符号是1 }

只需关注最后两个符号

Σ={0,1}, 关键信息: ε, 0, 00, 1, 01, 10, 11

关键信息改进: ε, 1, 10, 11

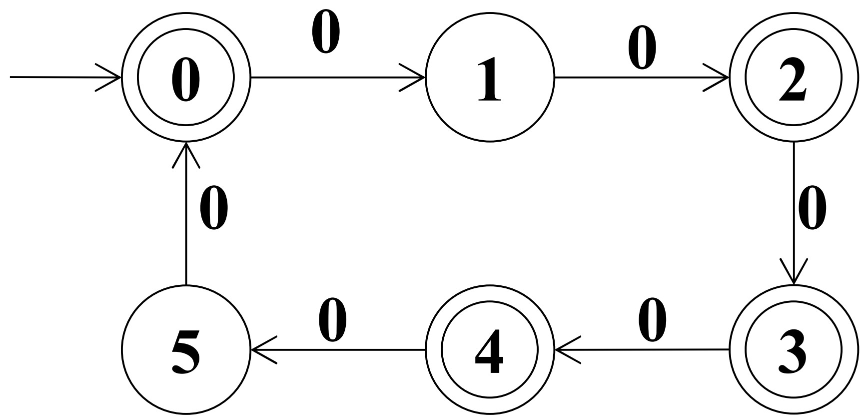


有限自动机的设计

$\{ 0^k \mid k$是2或3的倍数 $\}$

$\Sigma=\{0\}$, 关键信息: $\varepsilon, 0^1, 0^2, 0^3, 0^4, 0^5$.

记为: 0,1,2,3,4,5

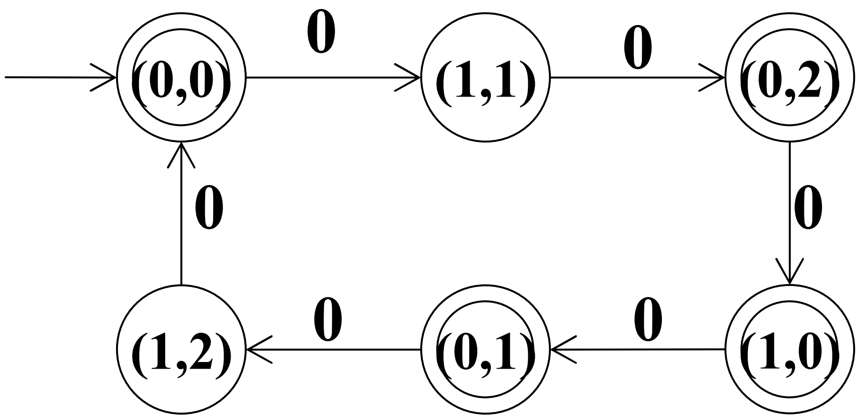


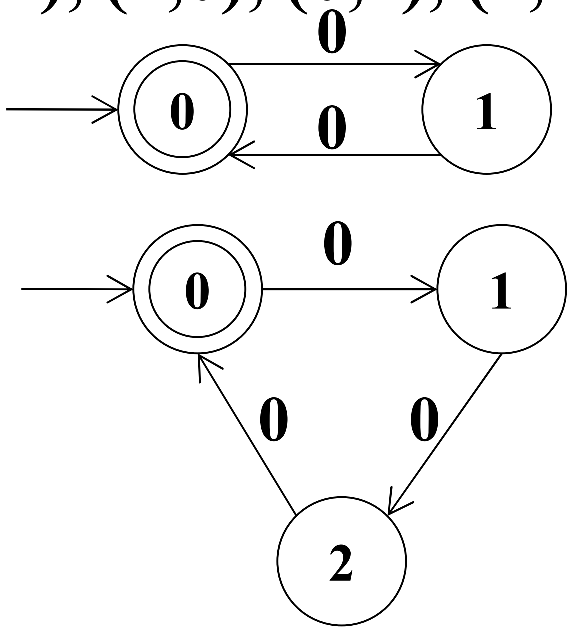
有限自动机的设计

{ 0^k | k是2或3的倍数 }

Σ={0}, 关键信息: $\varepsilon,0^1,0^2,0^3,0^4,0^5$,

记为: 0,1,2,3,4,5 或 (0,0), (1,1), (0,2), (1,0), (0,1), (1,2)





$\{0^k|k是2或3的倍数\} = \{0^k|k是2倍数\} \cup \{0^k|k是3的倍数\}$

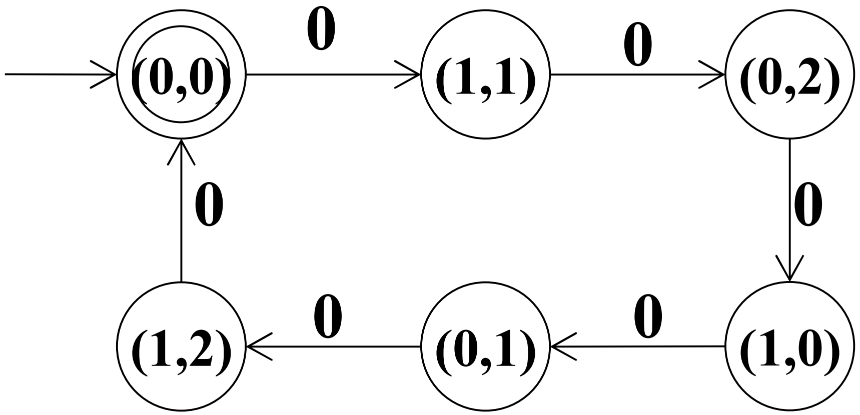
$\{0^k|k是2和3的倍数\} = \{0^k|k是2倍数\} \cap \{0^k|k是3的倍数\}$?

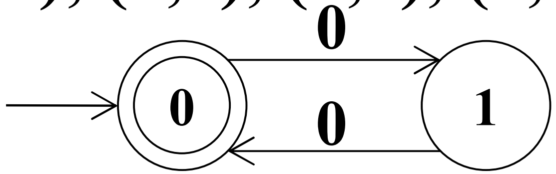
有限自动机的设计

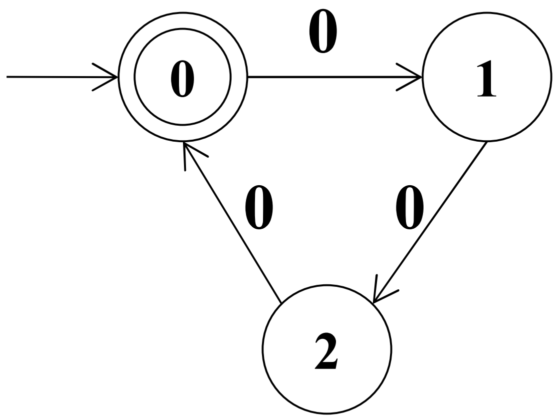
$\{ 0^k \mid k$是2和3的倍数$\}$

$\Sigma=\{0\}$, 关键信息: $\varepsilon,0^1,0^2,0^3,0^4,0^5$,

记为: 0,1,2,3,4,5 或 (0,0), (1,1), (0,2), (1,0), (0,1), (1,2)







$\{0^k|k$是2和3的倍数$\} = \{0^k|k$是2倍数$\} \cap \{0^k|k$是3的倍数$\}$

正则语言的并是正则语言

定理: 设**A,B**都是Σ上的正则语言, 则$A\cup B$也是正则语言.

证明: 设$M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$和$M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$是**DFA,**

且 $L(M_1)=A$, $L(M_2)=B$,

令$Q=Q_1\times Q_2$, $s=(s_1,s_2)$, $F = F_1\times Q_2 \cup Q_1\times F_2$,

δ: $Q\times\Sigma\rightarrow Q$, $\forall a\in\Sigma$, $r_1\in Q_1$, $r_2\in Q_2$,

$$\delta(\,(r_1,r_2)\,,\,a\,) = (\,\delta_1(r_1,a),\,\delta(r_2,a)\,),$$

即对$i=1,2$, 第i个分量按M_i的转移函数变化.

令$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$, 则 $\forall x\,(\,x\in L(M) \leftrightarrow x\in A\cup B\,)$

即 $L(M) = A\cup B$. 证毕

正则语言的交是正则语言

定理: 设**A,B**都是Σ上的正则语言, 则$A\cap B$也是正则语言.

证明: 设$M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$和$M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$是**DFA**,

且 $L(M_1)=A$, $L(M_2)=B$,

令$Q=Q_1\times Q_2$, $s=(s_1,s_2)$, $F=F_1\times F_2$,

δ: $Q\times\Sigma\to Q$, $\forall a\in\Sigma$, $r_1\in Q_1$, $r_2\in Q_2$,

$\delta(\,(r_1,r_2)\,,\,a\,) = (\,\delta_1(r_1,a),\,\delta(r_2,a)\,)$,

即对$i=1,2$, 第i个分量按M_i的转移函数变化.

令$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$, 则 $\forall x\,(\,x\in L(M)\leftrightarrow x\in A\cap B\,)$

即 $L(M) = A\cap B$. 证毕

证明特点: 构造性证明

正则语言与正则运算

如果语言**A**被一**DFA**识别,则称**A**是正则语言

算术中, 对象是数, 操作是运算, 如+×.

计算理论中, 对象是语言, 操作是语言的运算.

定义: 设**A**和**B**是两个语言,定义正则运算

并,连接,星号如下:

- 并: $A \cup B = \{x | x \in A \text{或} x \in B\}$
- 连接: $A \circ B = \{xy | x \in A \text{且} y \in B\}$
- 星号: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k | k \ge 0 \text{且每个} x_i \in A\}$

正则运算举例

设字母表Σ由标准的26个字母组成

A={good,bad}, B={boy,girl}, 则

$A \cup B$={ good, bad, boy, girl }

$A \circ B$={ goodboy, goodgirl, badboy, badgirl }

A^*={ε, good, bad, goodgood, goodbad, … }

问题:

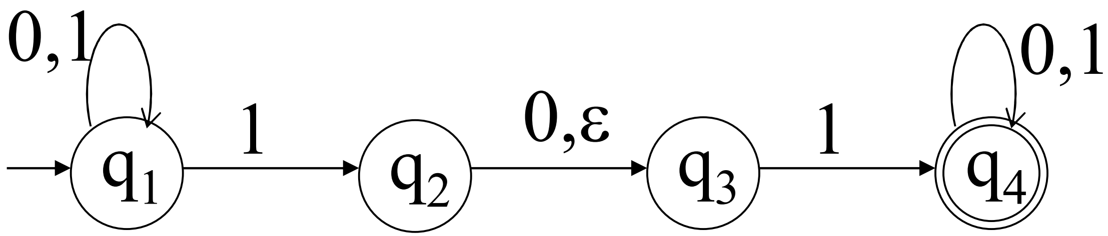
1. 正则语言对于正则运算是否封闭?
2. 如何判断一个语言是正则语言?

非确定型机器(难点)

前面因为δ: **Q**$\times\Sigma\rightarrow$**Q**是一个函数, 所以

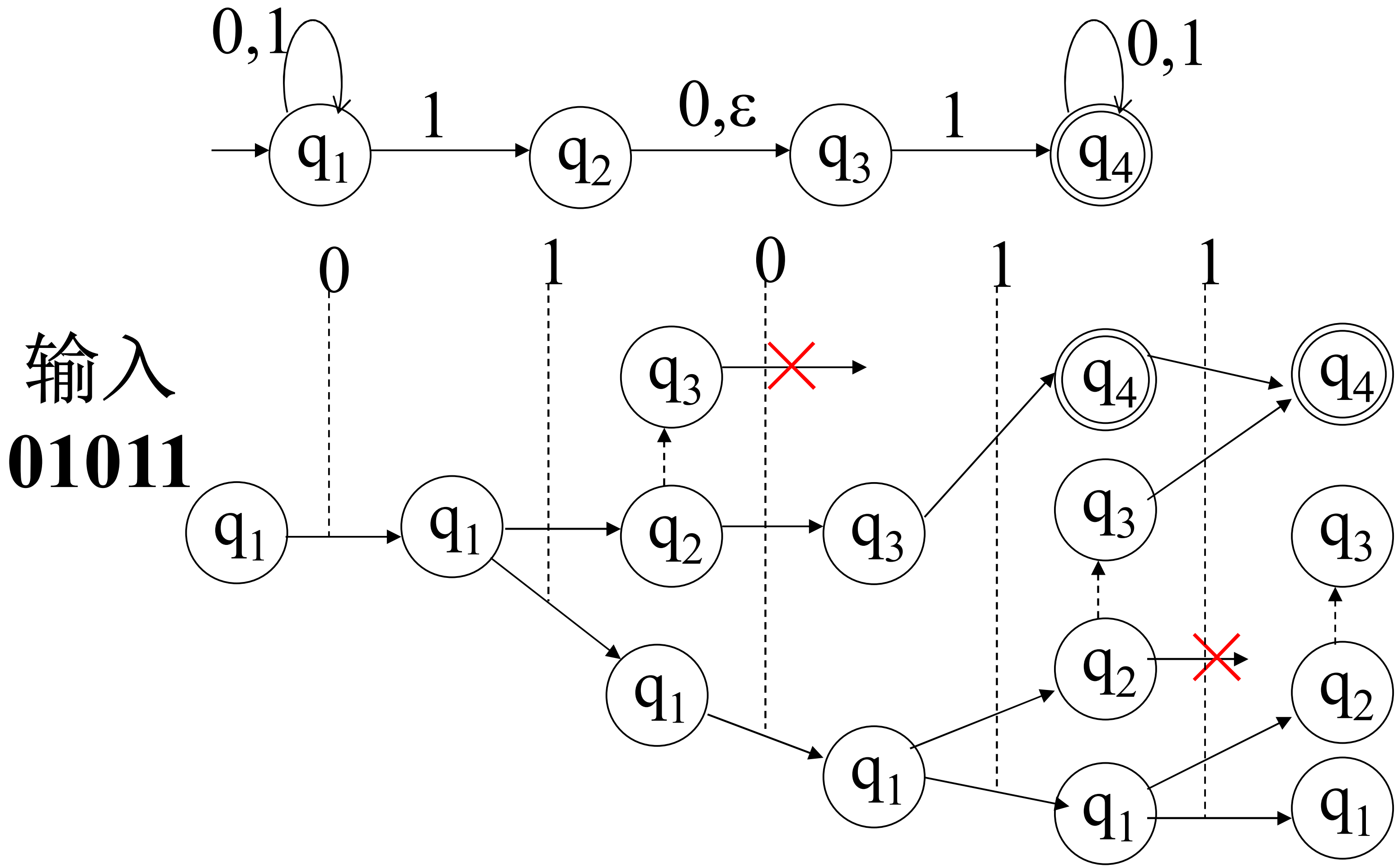
- 每步存在唯一的方式进入下一状态
- 称为确定型有限自动机(**DFA**)

现在引入非确定型有限自动机(**NFA**)



- 每步可以**0**至多种方式进入下一步
- 转移箭头上的符号可以是空串ε,
  表示不读任何输入就可以转移过去

非确定型计算



注: 若起始状态有射出的ε箭头?

NFA的计算方式

Step 1.设读到符号**s**, 对(每个副本)机器状态**q**,

若**q**有多个射出**s**箭头,则机器分裂成多个副本.

状态相同的副本视为同一副本.

Step 2. 对每个副本的状态,若其上有射出的ε箭头,

则不读任何输入, 机器分裂出相应副本.

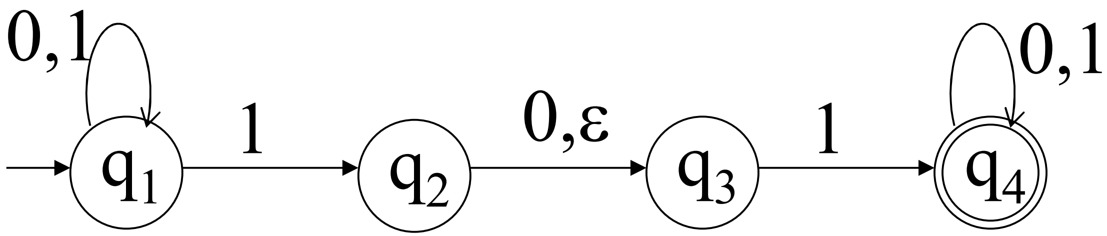
Step 3. 读下一个输入符号, 转**step1.**

若无输入符号, 计算结束, 并且,

若此时有一个副本处于接受状态,则接受,

否则拒绝.

NFA的形式定义



状态图
与
形式定义
包含
相同信息

定义: **NFA**是一个5元组(Q,Σ,δ,s,F),

1) Q是状态集;

2) Σ是字母表;

3) $\delta: Q\times \Sigma_\varepsilon \to P(Q)$是转移函数;

4) $s\in Q$是起始状态;

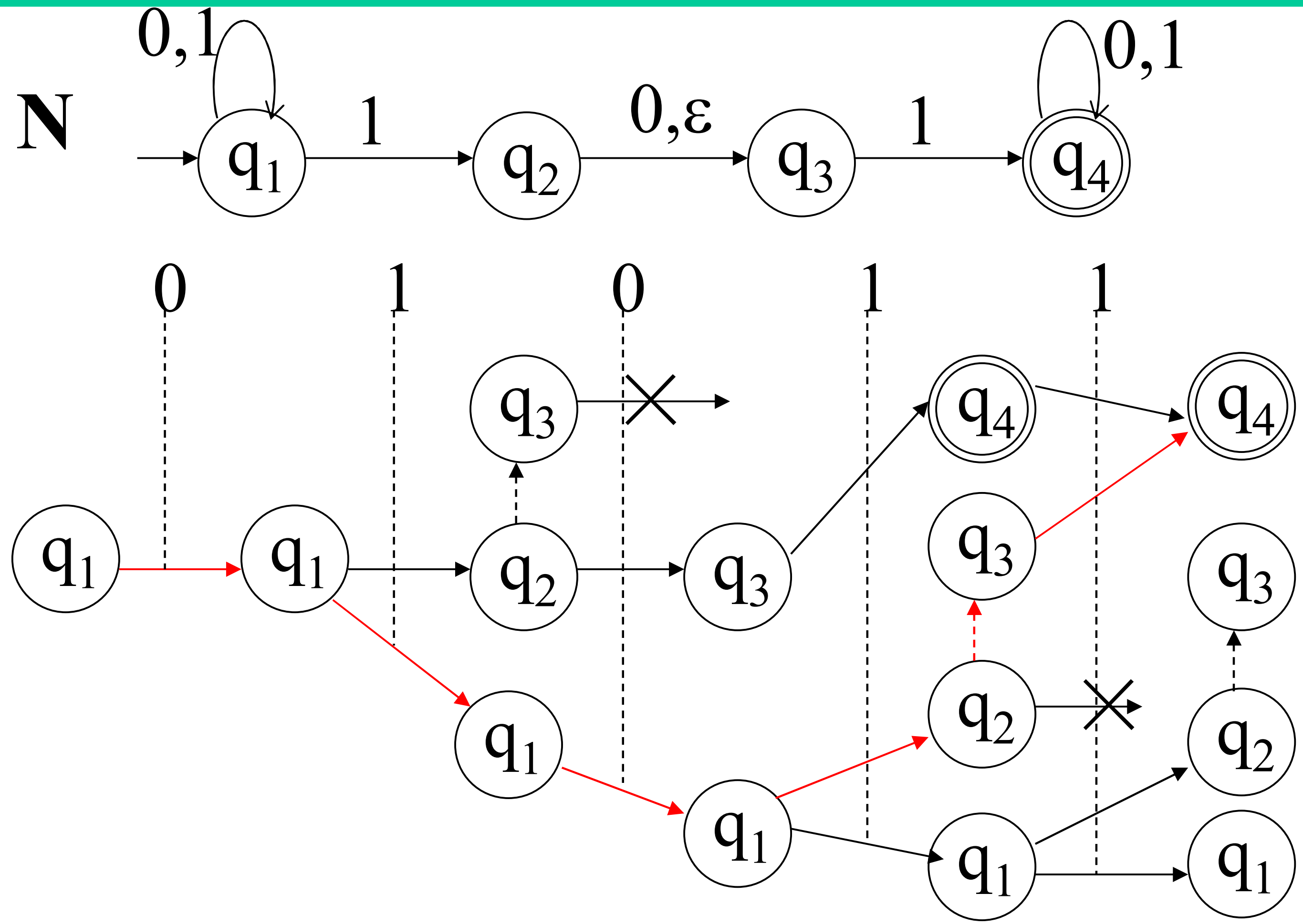
5) $F\subseteq Q$是接受状态集;

其中 $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

试写出该状态图
对应的形式定义

$$\delta(q_1,1) = \{q_1,q_2\}$$
$$\delta(q_2,\varepsilon) = \{q_3\}$$
$$\delta(q_2,1) = \varnothing$$
$$\delta(q_1,\varepsilon) = \varnothing$$

如何定义NFA的计算



NFA计算的形式定义

设$N=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$是一台NFA, w是Σ上字符串

称 N接受w,

若 w能写作$w=w_1w_2\ldots w_n$, $w_i\in\Sigma_\varepsilon$,且

存在Q中的状态序列$r_0,r_1,\ldots,r_n$, 满足

1) $r_0 = q_0$;

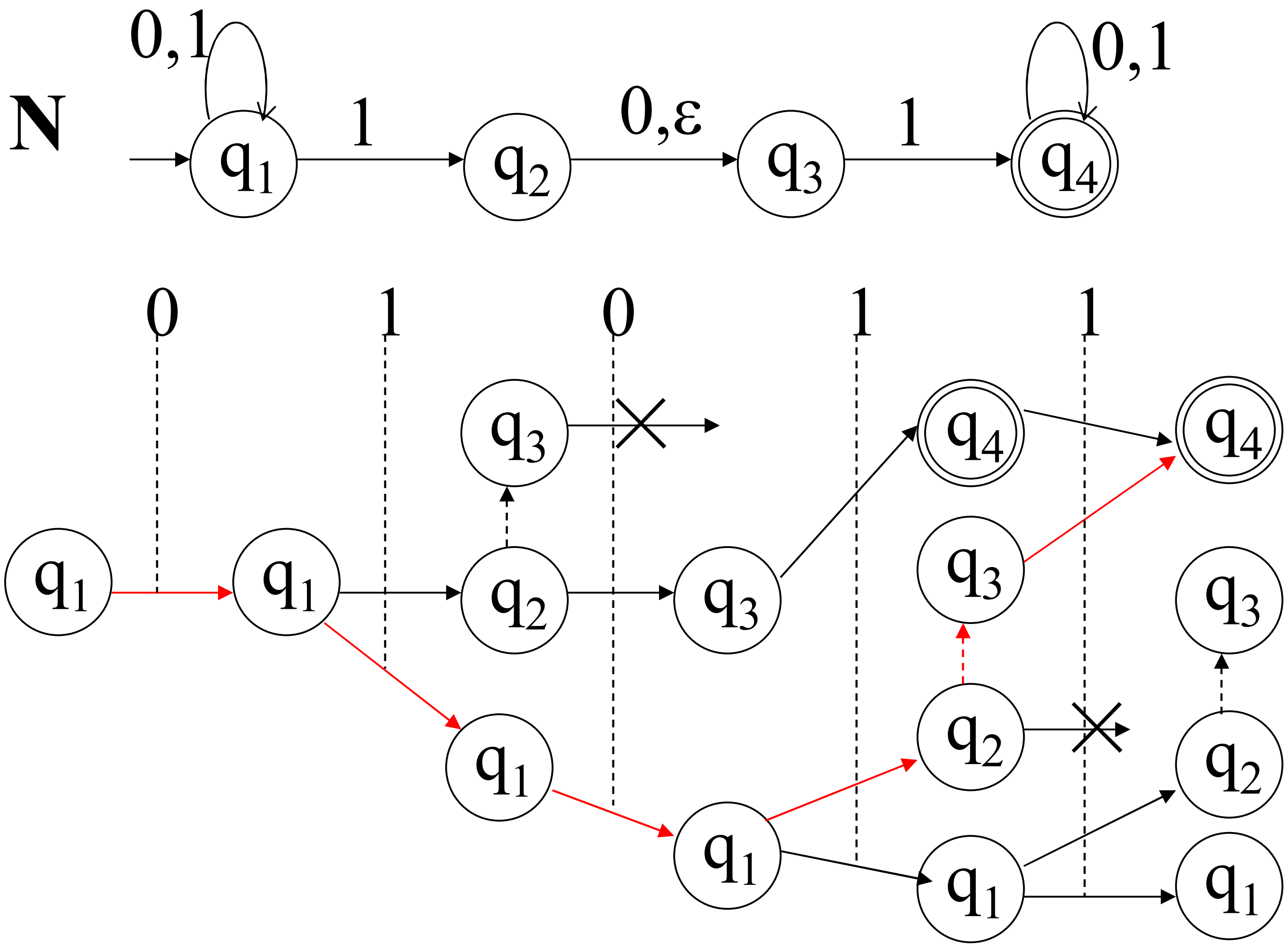
2) $r_{i+1}\in\delta(r_i, w_{i+1})$;

3) $r_n \in F$

$$r_0 \xrightarrow{w_1} r_1 \xrightarrow{w_2} r_2 \overset{\cdots}{\dashrightarrow} r_{n-1} \xrightarrow{w_n} r_n$$

对于输入, NFA计算的路径可能不唯一.

NFA计算形式定义举例



NFA的设计(难点)

- 自己即自动机
- 寻找需要记录的关键信息

设计识别{0,1}上以下语言的**NFA:**

$\{\ \mathbf{w} \in \{\mathbf{0,1}\}^* \mid \mathbf{w}$从1开始, 以0结束 $\}$

$\{\ \mathbf{w} \in \{\mathbf{0,1}\}^* \mid \mathbf{w}$含有子串1010 $\}$

$\{\ \mathbf{w} \in \{\mathbf{0,1}\}^* \mid \mathbf{w}$是倒数第2位是1 $\}$

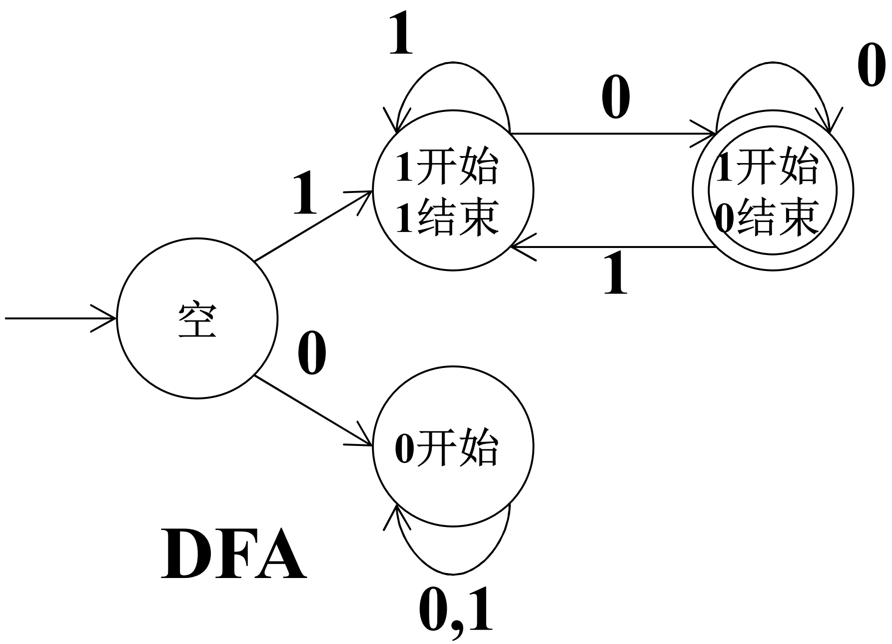
$\{\ \mathbf{0}^k \mid \mathbf{k}$是2或3的倍数 $\}$

NFA的设计

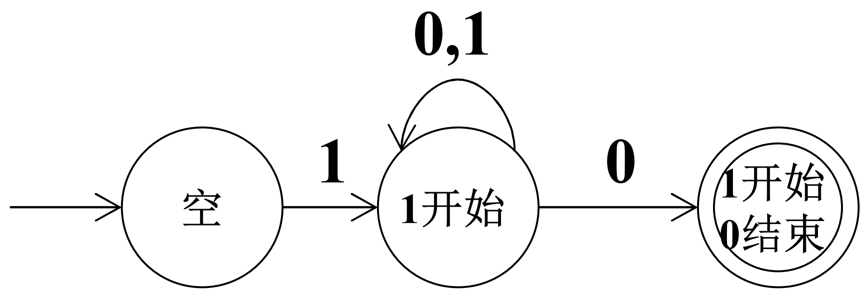
{ w∈{0,1}* | w从1开始, 以0结束 }

Σ={0,1}, 根据关键信息设计状态,

空, 以0开始, 以1开始以1结束, 以1开始以0结束



DFA

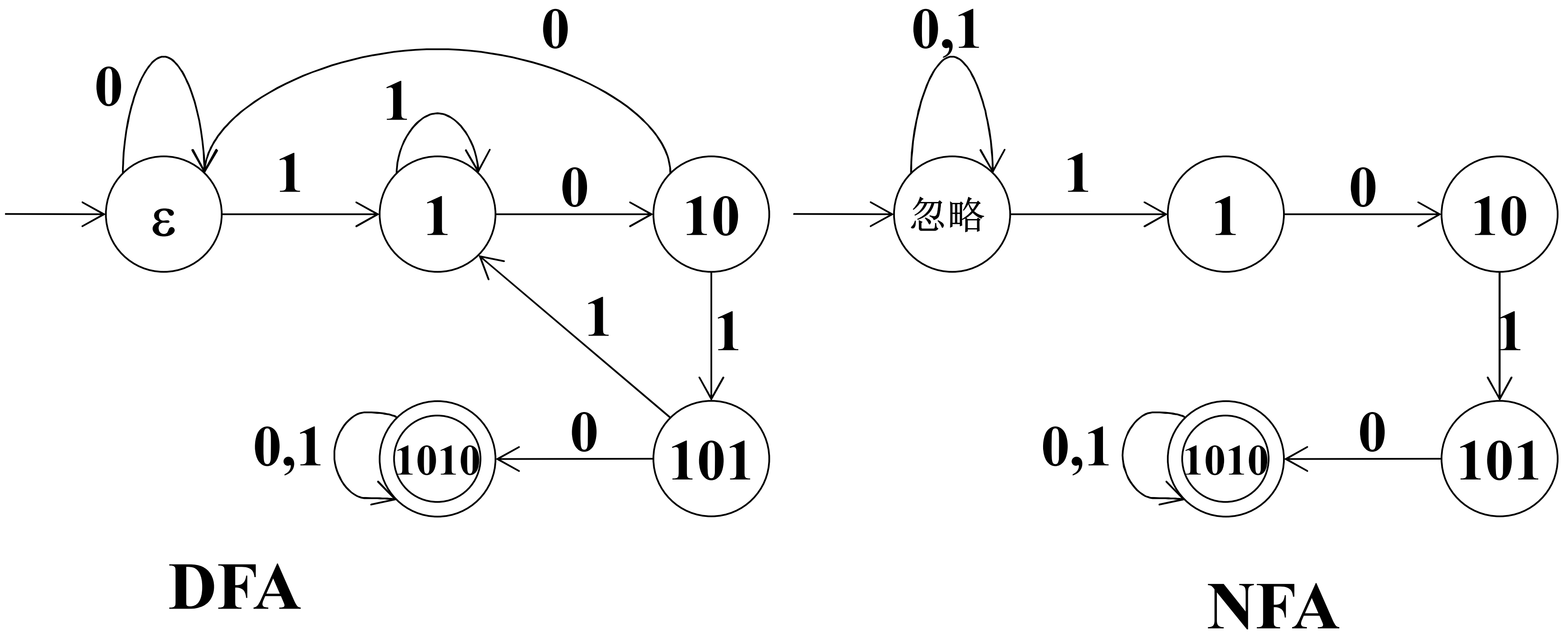


NFA

NFA的设计

{ w∈{0,1}* | w含有子串1010 }

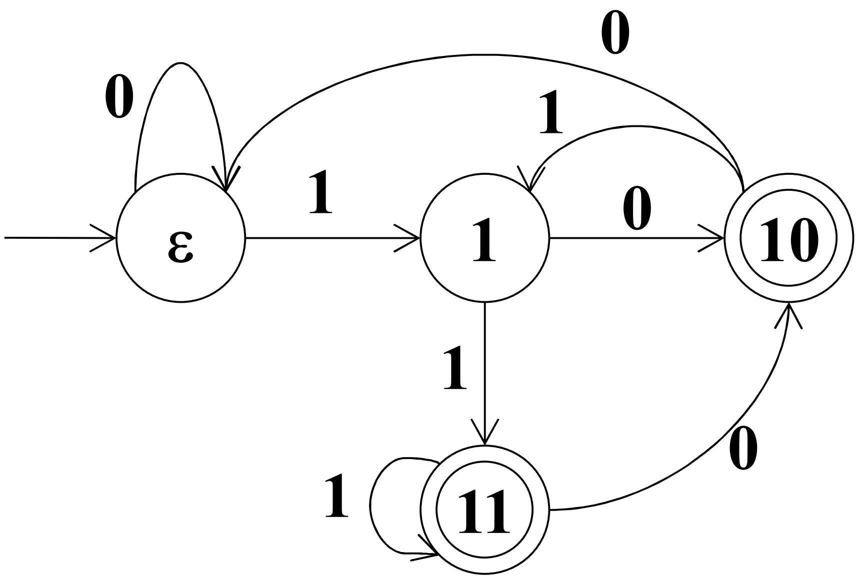
Σ={0,1}，关键信息: 忽略(ε), 1, 10, 101, 1010



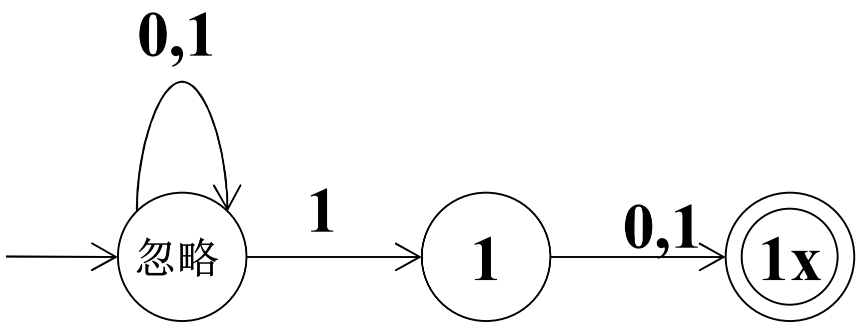
NFA的设计

{ w∈{0,1}* | w倒数第2个符号是1 }

Σ={0,1}, 关键信息: 忽略(ε), 1, 1x,



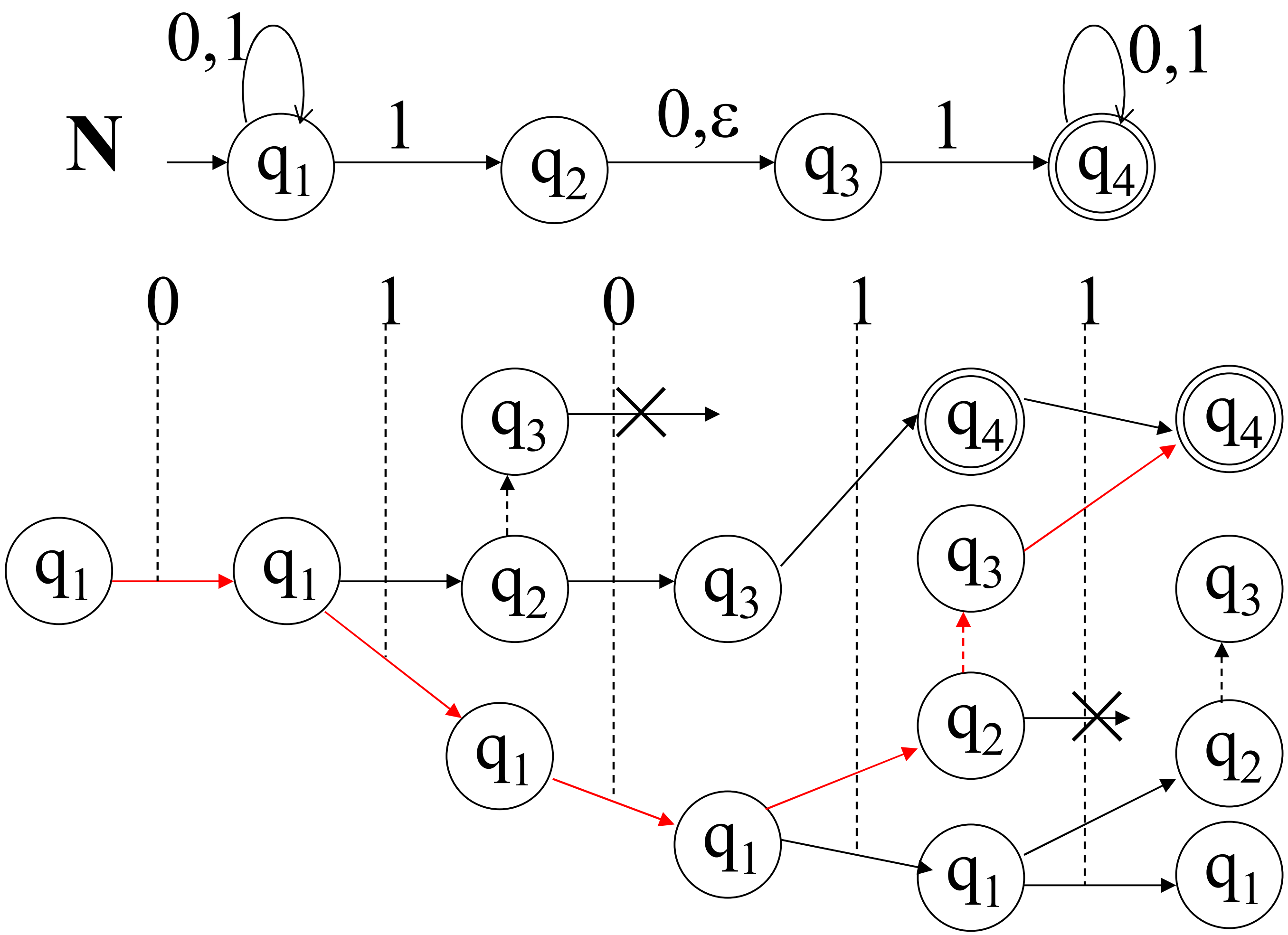
DFA



NFA

NFA与DFA等价

定理: 每个NFA都有一台等价的DFA.



构造DFA
关键信息
每个时刻
所有
副本状态
的集合

每个NFA都有等价的DFA
NFA的确定化:子集法

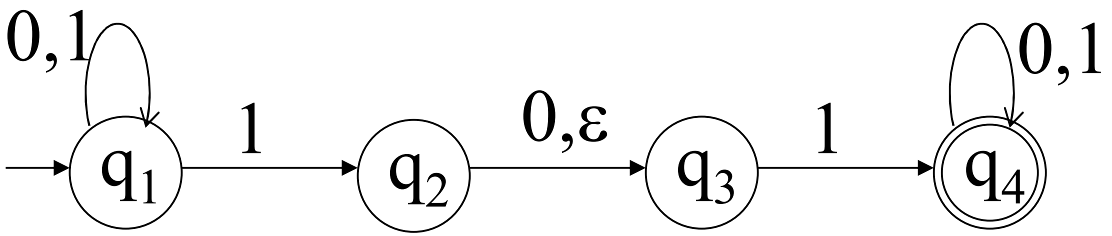
(1)首先将从 **NFA N**的起始状态**S**出发经过任意条**ε**弧所能到达的状态组成的集合作为确定化后的**DFA M**的起始状态**S′**。

(2)从**S′**出发，经过对任意输入符号**a**∈∑的状态转移所能到达的状态（包括读入输入符号**a**之后所有可能的**ε**转移所能到达的状态）所组成的集合作为**M**的新状态。

（**3**）如此重复，直到不再有新的状态出现为止。

（**4**）在所产生的状态中，含有原**NFA**接受态的子集作为**DFA**的接受态。

每个NFA都有等价的DFA



以原状态的子集为新机器的状态

编号	δ	0	1
1	$\{q_1\}$ 1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$2
2	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$3	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$4
3	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
4*	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$5	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
5*	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$6	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
6*	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

每个NFA都有等价的DFA

证明: 设$N = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$是NFA,　//设计$Q, F, s, \delta$

令 $Q = P(Q_1)$,　//全体子集

$F = \{ A \in Q : F_1 \cap A \neq \varnothing \}$,

$s = E(\{s_1\})$, $E(A) = \{ q : \exists r \in A$, r经0到多个ε箭头可达$q \}$

$\delta: Q \times \Sigma \to Q$,　$\forall a \in \Sigma$, $\forall A \in Q$,

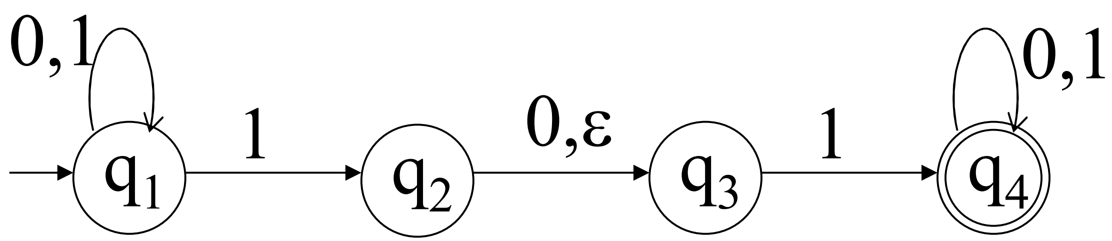
$$\delta(A, a) = E\left(\cup_{r \in A} \delta_1(r,a) \right)$$

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$,

则 $\forall x \,(x \in L(M) \leftrightarrow x \in L(N))$,

即 $L(M) = L(N)$.

证毕



正则运算的封闭性

定理: 正则语言对并运算封闭.

定理: 正则语言对连接运算封闭.

定理: 正则语言对星号运算封闭.

证明: 画状态图.

证明若A, B正则, 则A∪B正则

DFA: $M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$, $M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$, $L(M_1)=A$, $L(M_2)=B$,

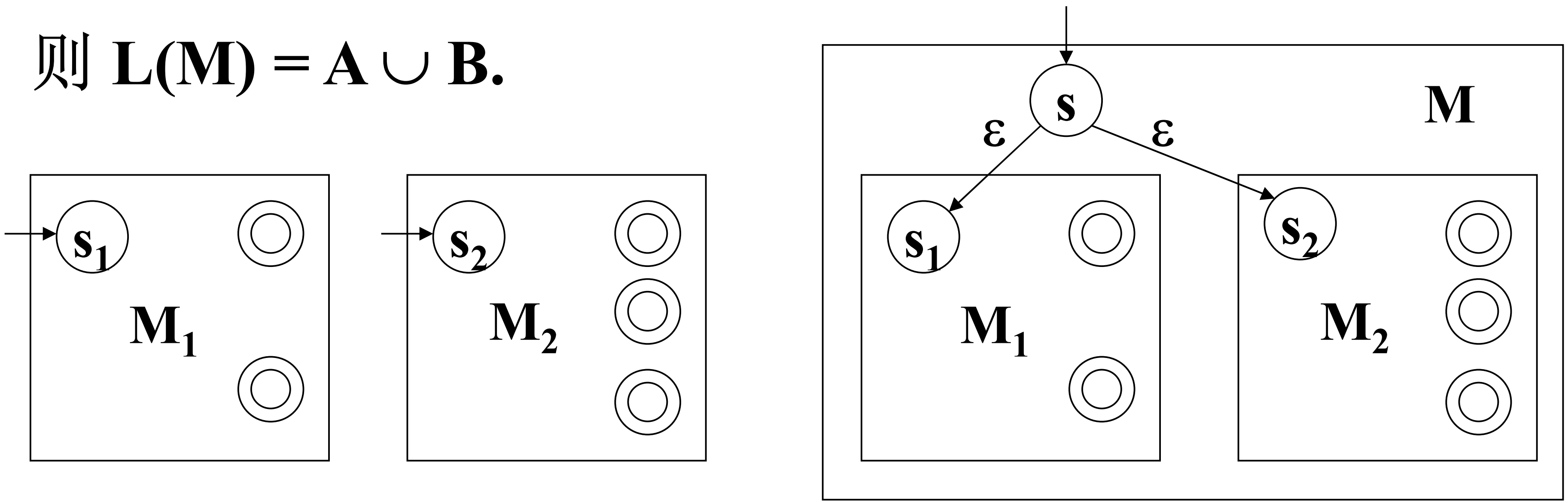
令 $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$ 不交并, $F = F_1 \cup F_2$ 不交并

$\forall i=1,2$, $\forall r\in Q_i$, $\forall a\in\Sigma$, $\delta(r,a) = \{\delta_i(r,a)\}$

$\delta(s,\varepsilon) = \{s_1,s_2\}$

$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$,

则 $L(M) = A \cup B$.



证明若A, B正则, 则A°B正则

DFA: $M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$, $M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$, $L(M_1)=A$, $L(M_2)=B$,

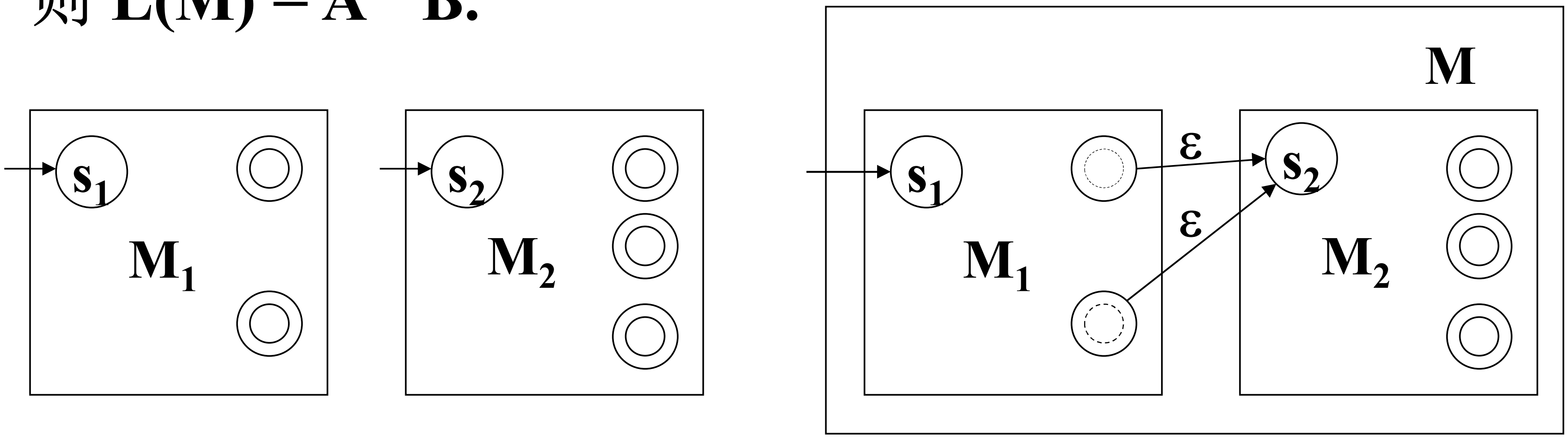
令 $Q = Q_1 \cup Q_2$ 不交并, $F = F_2$,

$\forall r \in F_1$, $\delta(r,\varepsilon) = \{s_2\}$

$\forall i=1,2$, $\forall r \in Q_i$, $\forall a \in \Sigma$, $\delta(r,a) = \{\delta_i(r,a)\}$

$M=(Q,\Sigma,\delta,s_1,F)$,

则 $L(M) = A \circ B$.



证明若A正则, 则A^*正则

DFA: $M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$, $L(M_1)=A$,

令 $Q = Q_1 \cup \{s\}$ 不交并, $F = F_1 \cup \{s\}$ 不交并

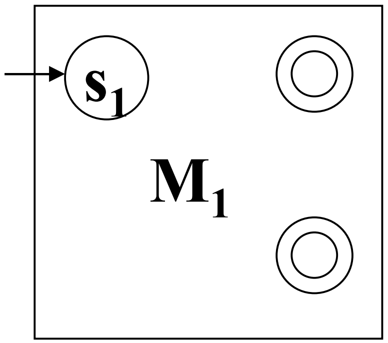
$\forall r\in Q_1, \forall a\in\Sigma,\ \delta(r,a) = \{\delta_1(r,a)\}$

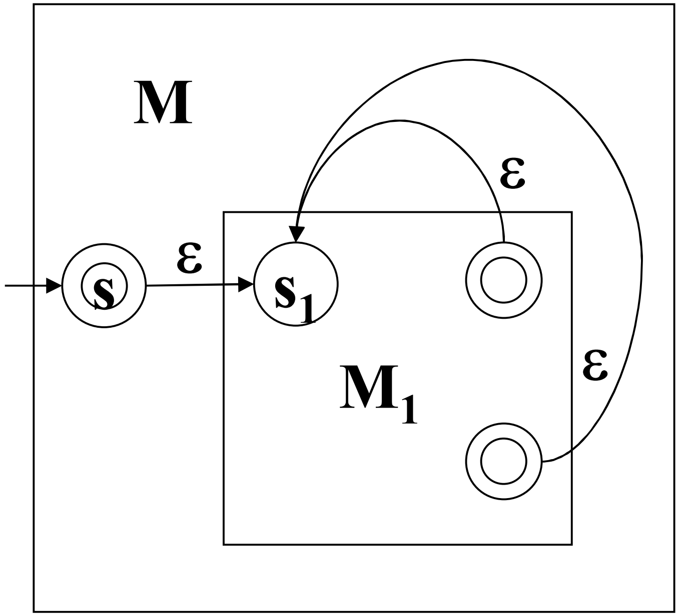
$\forall r\in F_1, \delta(r,\varepsilon) = \{s_1\}$,

$\delta(s,\varepsilon) = \{s_1\}$,

$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$,

则 $L(M) = A^*$.





正则表达式

定义: 称**R**是一个正则表达式, 若**R**是

1) $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Sigma$;

2) ε ;

3) $\varnothing$;

4) $(\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2)$, $\mathbf{R}_1$和$\mathbf{R}_2$是正则表达式;

5) $(\mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2)$, $\mathbf{R}_1$和$\mathbf{R}_2$是正则表达式;

6) $(\mathbf{R}_1^{*})$, $\mathbf{R}_1$是正则表达式;

每个正则表达式**R**表示一个语言(**?**),记为**L(R)**.

例: $\mathbf{0^*10^*}$, $\mathbf{01 \cup 10}$, $(\Sigma\Sigma)^*$, $\mathbf{1}^*\varnothing$, $\varnothing^*$.

正则表达式与**DFA**等价

定理**2.3.1:** 语言**A**正则$\Leftrightarrow$**A**可用正则表达式描述.

($\Leftarrow$**)** 若 语言**A**可用正则表达式描述,

则 **A**正则. **(**容易**)**

($\Rightarrow$**)** 若语言**A**正则,

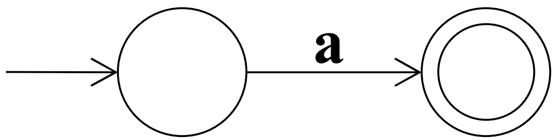
则**A**可用正则表达式描述. **(**困难**)**

A有正则表达式⇒A正则

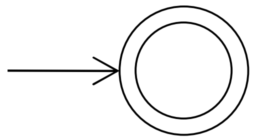
数学归纳法

R是一个正则表达式, 若R是

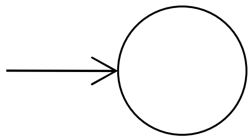
1) **a, a$\in\Sigma$**



2) **ε**



3) **$\varnothing$**



4) **$(R_1 \cup R_2)$**

5) **$(R_1 \circ R_2)$**

6) **(R_1^{*})**

A正则⇒A有正则表达式

构造广义非确定有限自动机(**GNFA**)

- 非确定有限自动机
- 转移箭头可以用任何正则表达式作标号

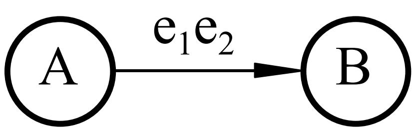
证明中的特殊要求:

- 起始状态无射入箭头.
- 唯一接受状态(无射出箭头).

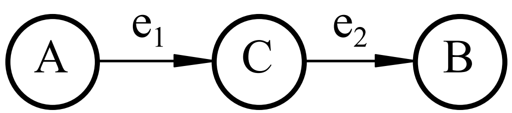
手段: 一个一个地去掉中间状态.

正则表达式到NFA的转换

(1) **替换成**

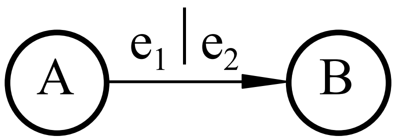


(a)

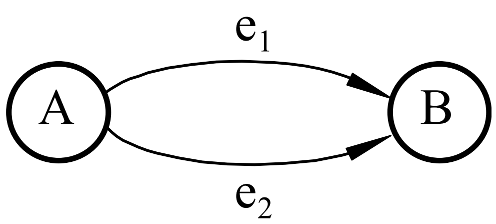


(b)

(2) **替换成**

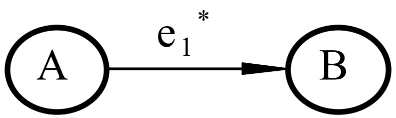


(c)

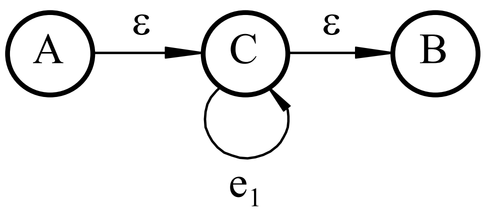


(d)

(3) **替换成**



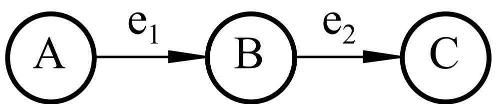
(e)



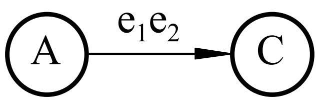
(f)

NFA到正则表达式的转换

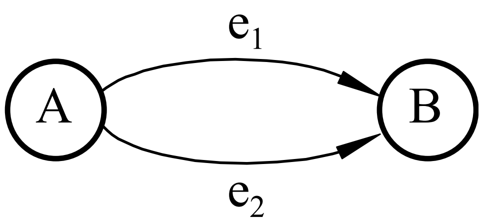
(1)



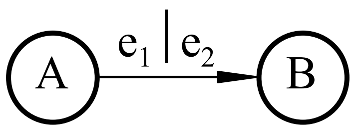
替换成



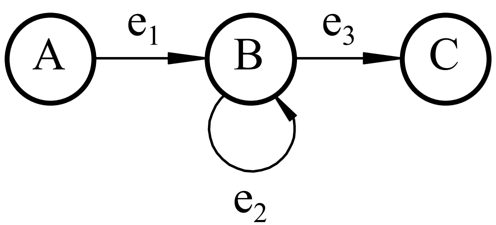
(2)



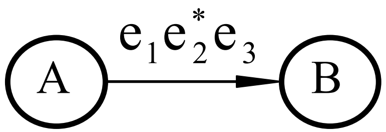
替换成



(3)



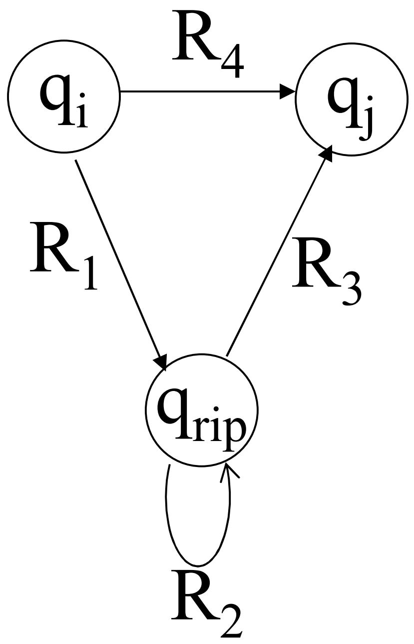
替换成

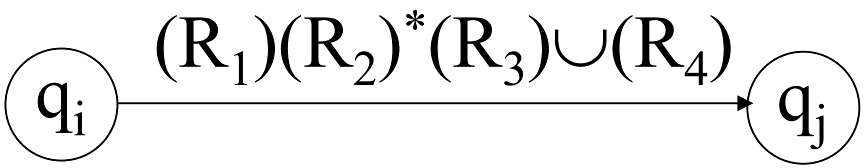


删除一个中间状态

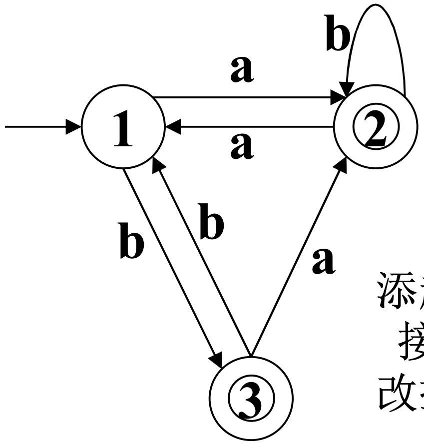
设$\mathbf{q_{rip}}$为待删中间状态,

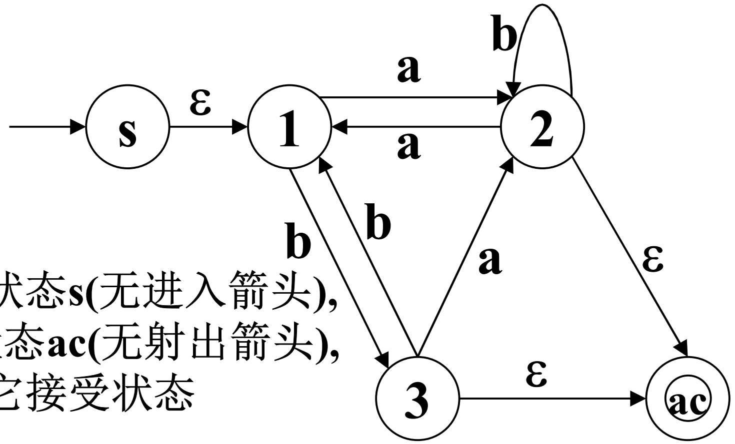
对任意两个状态$\mathbf{q_i}$, $\mathbf{q_j}$都需要修改箭头标号



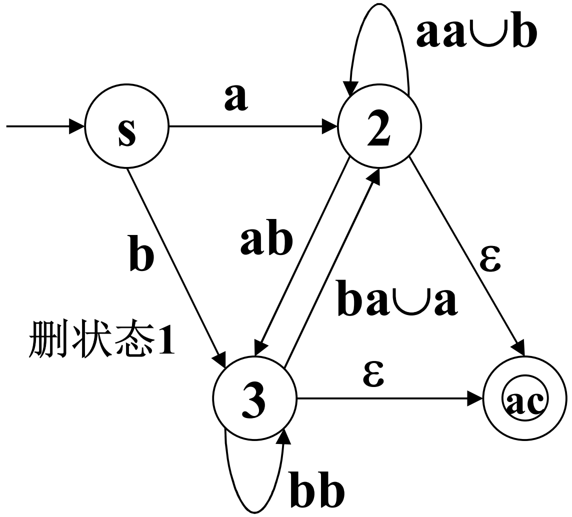


举例: A正则⇒A有正则表达式

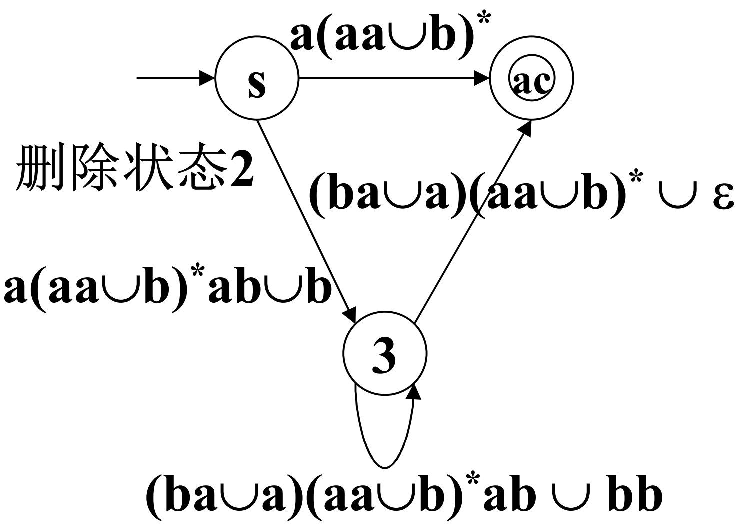




添起始状态s(无进入箭头),
接受状态ac(无射出箭头),
改掉其它接受状态

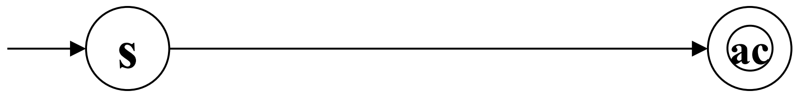


删状态1



删除状态2

((a(aa∪b)*ab∪b)((ba∪a)(aa∪b)*ab ∪ bb)*
((ba∪a)(aa∪b)*∪ε)) ∪ (a(aa∪b)*)



删除状态3

非正则语言

B={ 0^n1^n | n≥0 }

C={ w | w中0和1的个数相等 }

D={ w | w中01和10的个数相等 }

哪些是正则语言?

泵引理

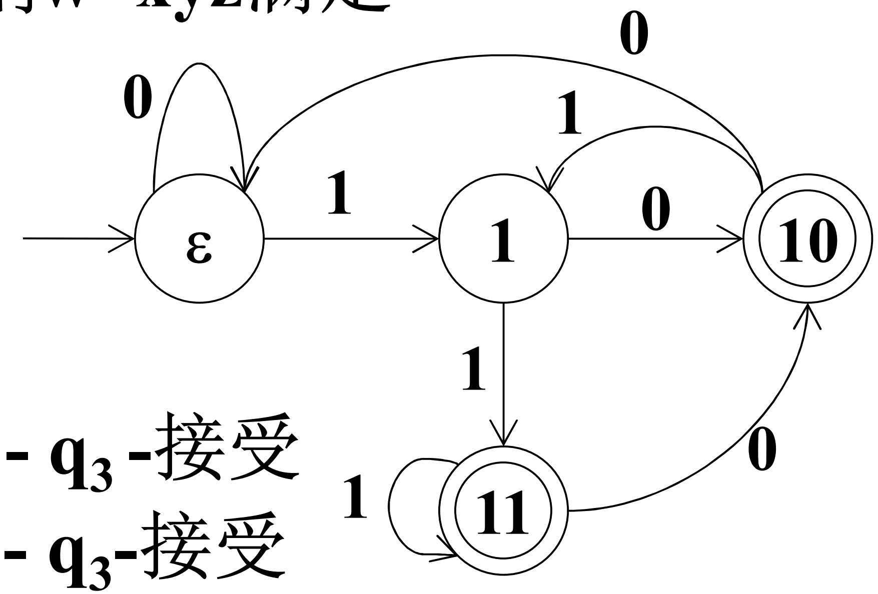
定理(泵引理): 设A是正则语言,则存在p>0使得

对任意$w \in A$, $|w| \geq p$, 存在分割$w=xyz$满足

1) 对任意 $i \geq 0$, $xy^iz \in A$;

2) $|y|>0$;

3) $|xy| \leq p$.



11011 : q_0-1- q_1- 101 - q_1 - 1 - q_3 -接受

1(101)^{i}1: q_0-1- q_1- $(101)^i$ - q_1 - 1 - q_3-接受

11011=xyz

x=1, y=101, z=1. xy^iz 被接受的原因?

取p为DFA状态个数.

由鸽巢原理, 读前p个符号必有状态重复

泵引理的等价描述

定理(泵引理): 设A是正则语言,则存在$p>0$使得

对任意$w \in A$, $|w| \geq p$, 存在分割$w=xyz$满足

1) 对任意 $i \geq 0$, $xy^iz \in A$;

2) $|y|>0$;

3) $|xy| \leq p$.

若A是正则语言, 则$\exists p>0$ $\forall w \in A(|w| \geq p)$ $\exists x,y,z(|y|>0, |xy| \leq p, w=xyz)$ $\forall i \geq 0$, $xy^iz \in A$.	若$\forall p>0$ $\exists w \in A(|w| \geq p)$ $\forall x,y,z(|y|>0, |xy| \leq p, w=xyz)$ $\exists i \geq 0$, $xy^iz \notin A$. 则A非正则语言

若A是正则语言,

则$\exists p>0$

$\forall w \in A(|w| \geq p)$

$\exists x,y,z(|y|>0, |xy| \leq p, w=xyz)$

$\forall i \geq 0$,

$xy^iz \in A$.

若$\forall p>0$

$\exists w \in A(|w| \geq p)$

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy| \leq p, w=xyz)$

$\exists i \geq 0$,

$xy^iz \notin A$.

则A非正则语言

$B = \{ 0^n1^n \mid n \geq 0 \}$ 非正则

∵ $\forall p>0$,

令$w=0^p1^p$,

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

令$i=0$,

$xz = 0^{p-|y|}1^p \notin B$

∴ B非正则语言

若$\forall p>0$

$\exists w \in A(|w| \geq p)$

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

$\exists i \geq 0$,

$xy^iz \notin A$.

则A非正则语言

$C = \{ ww \mid w \in \{0,1\}^* \}$ 非正则

$\because$ $\forall p>0$,

令 $w=0^p10^p1$,

$\forall x,y,z(|y|>0,\ |xy|\le p,\ w=xyz)$

令 $i=0$,

$xz = 0^{p-|y|}10^p1 \notin C$

$\therefore$ C非正则语言

若 $\forall p>0$

$\exists w\in A(|w|\ge p)$

$\forall x,y,z(|y|>0,\ |xy|\le p,\ w=xyz)$

$\exists i\ge 0$,

$xy^iz \notin A$.

则A非正则语言

泵引理的证明

定理(泵引理): 设A是正则语言,则存在p>0使得

对任意$w\in A$, $|w|\ge p$, 存在分割$w=xyz$满足

1) 对任意 $k \ge 0$, $xy^kz \in A$;

2) $|y|>0$;

3) $|xy|\le p$.

证明: 令$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ 且 $L(M)=A$, 令$p=|Q|$,

设 $w = w_1w_2\ldots w_n\in A$, $w_i\in\Sigma$, 且$n\ge p$, 则有

$$s=r_0 \xrightarrow{w_1} r_1 \xrightarrow{w_2} r_2 \overset{\cdots}{\dashrightarrow} r_{n-1} \xrightarrow{w_n} r_n\in F$$

由鸽巢原理, 存在$i<j\le p$使得$r_i=r_j$, 令$x=w_1\ldots w_i$, $y=w_{i+1}\ldots w_j$, $z=w_{j+1}\ldots w_n$. 那么对$\forall k\ge 0$, $xy^kz\in A$.

第3章 图灵机

1. 图灵机基础

1.1 图灵机的定义

1.2 图灵机举例

1.3 图灵机的描述

图灵对计算的观察

图灵: 计算通常是一个人拿着笔在纸上进行的.

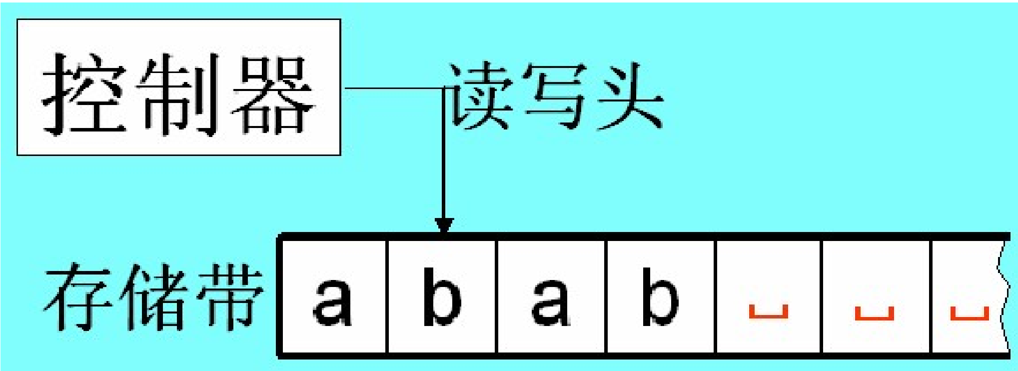
他根据 • 眼睛看到的纸上符号,

• 脑中的若干法则,

指示笔 • 在纸上擦掉或写上一些符号,

• 再改变他所看到的范围.

继续, 直到他认为计算结束.



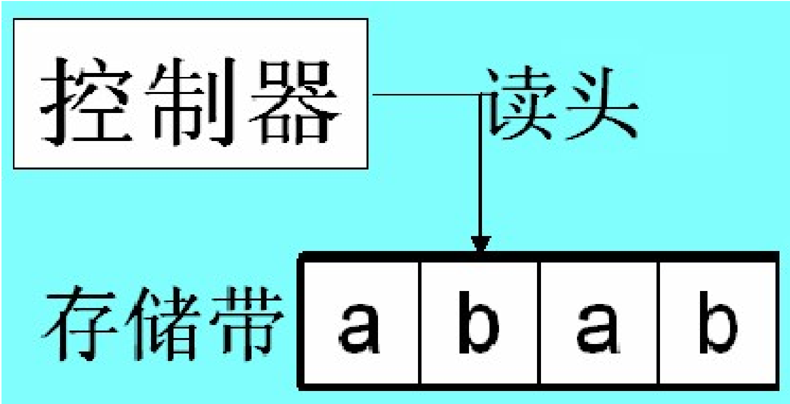
脑:控制器　纸:存储带

眼睛和笔:读写头

法则:转移函数

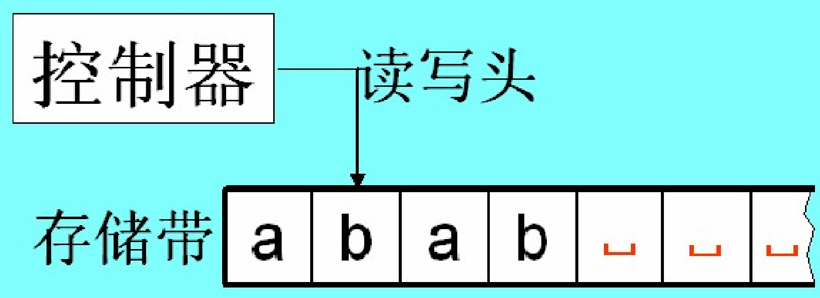
与有限自动机的区别

有限自动机:



- 输入带长度有限
- 只能读和右移，不能写和左移
- 读完输入停机

图灵机(TM)的形式化定义



TM是一个7元组($Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r$)

1) Q是状态集.

2) Σ是输入字母表,不包括空白符$\sqcup$.

3) Γ是带字母表,其中$\sqcup \in \Gamma$, $\Sigma \subset \Gamma$.

4) $\delta: Q\times\Gamma \to Q\times\Gamma\times\{L,R\}$是转移函数.

5) $q_0 \in Q$是起始状态. 6) $q_a \in Q$是接受状态.

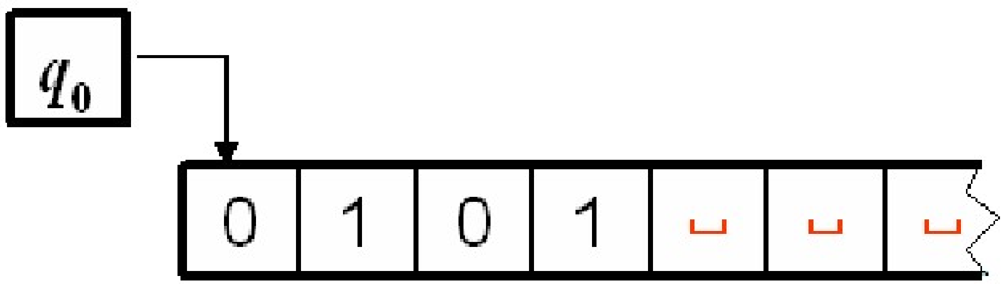
7) $q_r \in Q$是拒绝状态, $q_a \neq q_r$.

图灵机的初始化

设$\mathbf{M}=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$, $\mathbf{w}=\mathbf{w}_1\ldots\mathbf{w}_n\in\Sigma^n$,

- 输入带: 将输入串**w**放在最左端n格中, 带子其余部分补充空格␣.
- 读写头: 指向工作带最左端.

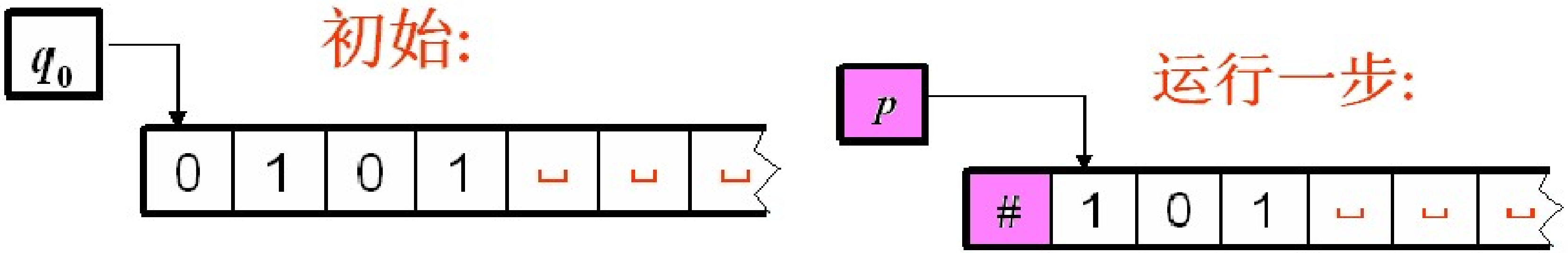
例:设输入串为**0101**, 则其初始形态为



图灵机的运行

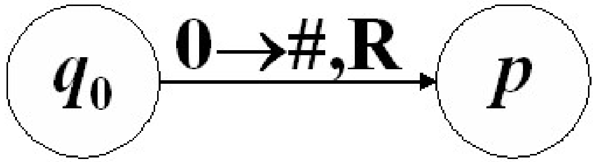
- 图灵机根据转移函数运行.

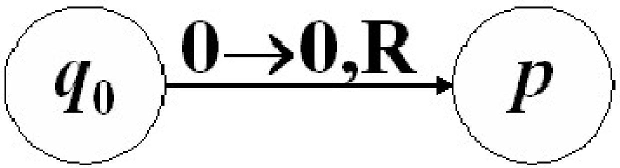
  例:设输入串为**0101**, 且$\delta(q_0,0)=(p,\#,R)$, 则有



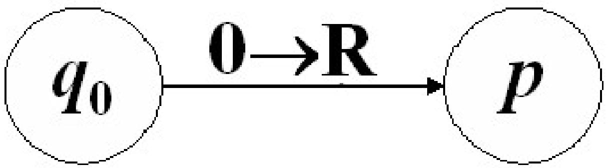
- 注: 若要在最左端左移, 读写头保持不动.

$\delta(q_0,0)=(p,\#,R)$的状态图表示:





简记为



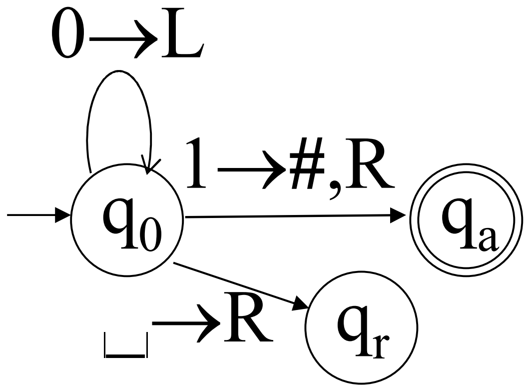
判定器与语言分类

- 图灵机运行的三种结果

  1. 若TM进入接受状态,则停机且接受输入,

  2. 若TM进入拒绝状态,则停机且拒绝输入,

  3. 否则TM一直运行,不停机.



- 定义: 称图灵机M为判定器,

  若M对所有输入都停机.

- 定义不同语言类:

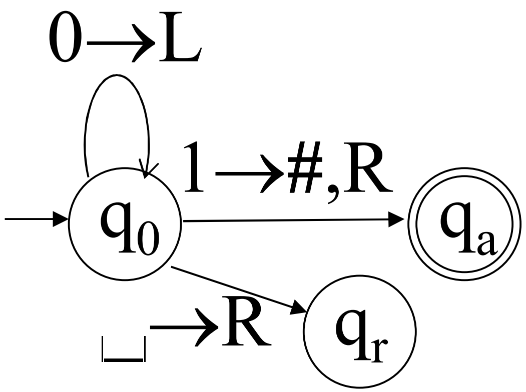
  图灵可判定语言: 某个判定器的语言(也称递归语言)

  图灵可识别语言: 某个图灵机的语言,

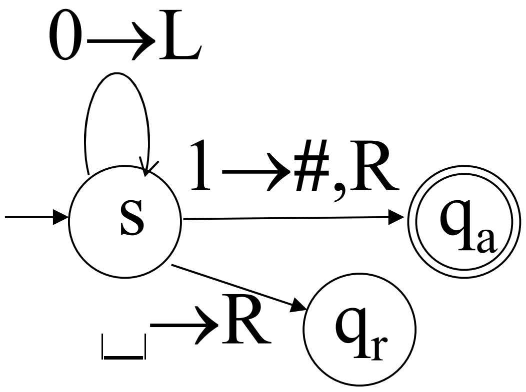
  也称为递归可枚举语言

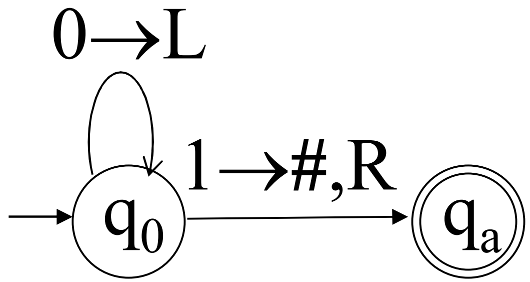
图灵机的格局

- 描述图灵机运行的每一步需要如下信息:
  控制器的状态; 存储带上字符串; 读写头的位置.
- 定义: 对于图灵机$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$,
  设$q\in Q$, $u,v\in\Gamma^*$, 则格局 uqv 表示
  1) 当前控制器状态为q ;
  2) 存储带上字符串为uv(其余为空格);
  3) 读写头指向v的第一个符号.
- 起始格局, 接受格局, 拒绝格局.



格局演化举例





省略拒绝状态

s 0 1

s 0 1

…

循环

s 1 0

 # q_a 0

接受

s _ _

_ q_r _

拒绝

图灵机计算的形式定义

称图灵机**M接受**字符串**w**,

若存在格局序列$C_1,C_2,\ldots,C_k$使得

1) C_1是M的起始格局q_0w;

2) C_i产生C_{i+1}, $i=1,\ldots,k-1$;

3) C_k是M的接受格局.

M的**语言**: M接受的所有字符串的集合,

记为**L(M)**.

1. 图灵机基础

1.1 图灵机的定义

1.2 图灵机举例

1.3 图灵机的描述

图灵机举例

$\Sigma=\{0,1\}$, $A=\{0w1 : w\in\Sigma^*\}$ 正则语言

$B=\{0^n1^n : n\geq 0\}$ 上下文无关语言

$\Sigma=\{0\}$，$C=\{0^k : k=2^n, n\geq 0\}$ 图灵可判定语言

M=“对于输入串**w,**

1) 若**w=ε,** 则拒绝**.**

2) 若只有**1**个**0,**则接受**.**

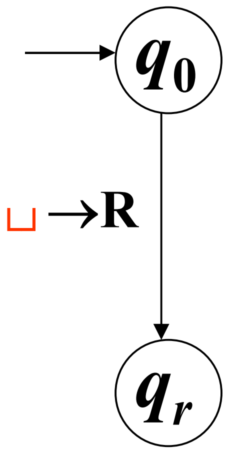
3) 若有奇数个**0,**则拒绝**.**

4) 隔一个**0,**删一个**0.** 转**(2).”**

L(M)=C, 即**M**识别**C.**

状态图

M=“对于输入w,
1) 若w=ε, 则拒绝.
2) 若只有1个0,则接受.
3) 若有奇数个0,则拒绝.
4) 隔一个0,删一个0. 转(2).”



状态图

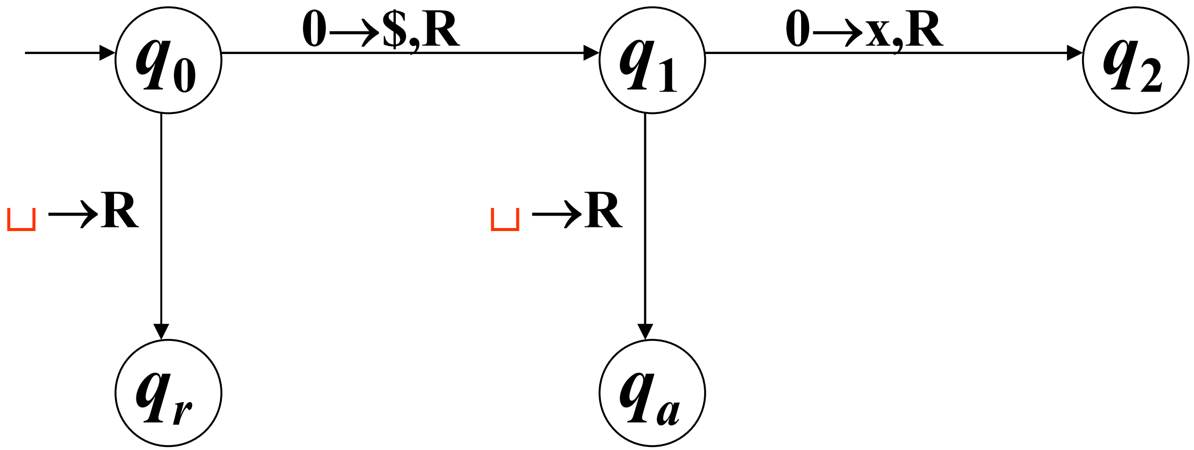
M="对于输入w,

1) 若w=ε, 则拒绝.

2) 若只有1个0,则接受.

3) 若有奇数个0,则拒绝.

4) 隔一个0,删一个0. 转(2)."



状态图

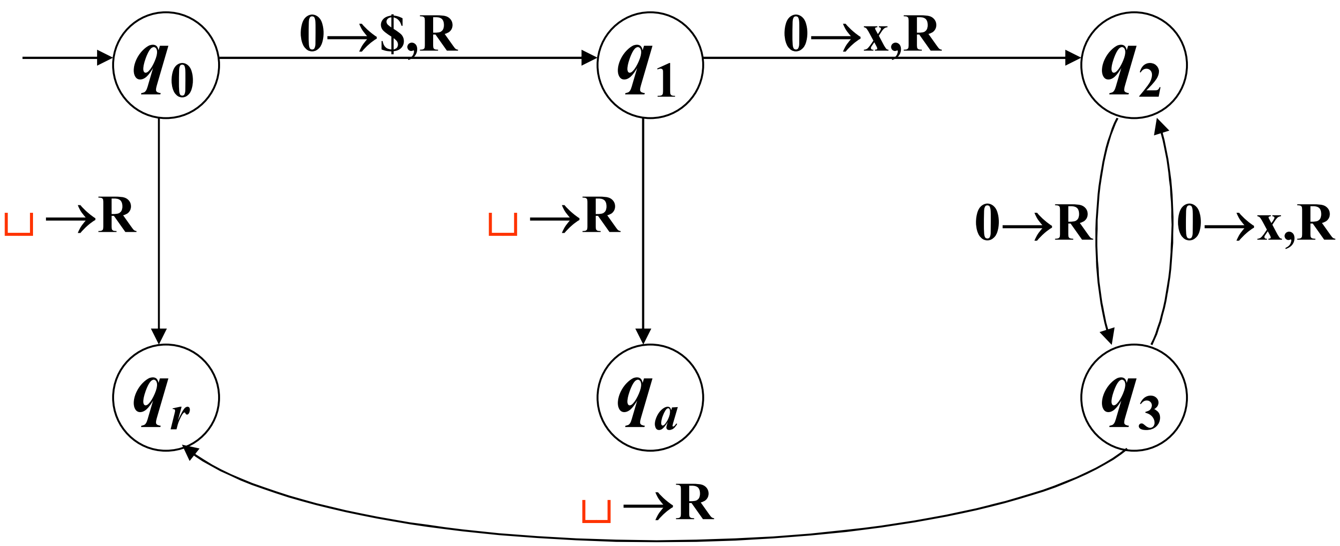
M="对于输入w,

1) 若w=ε, 则拒绝.

2) 若只有1个0,则接受.

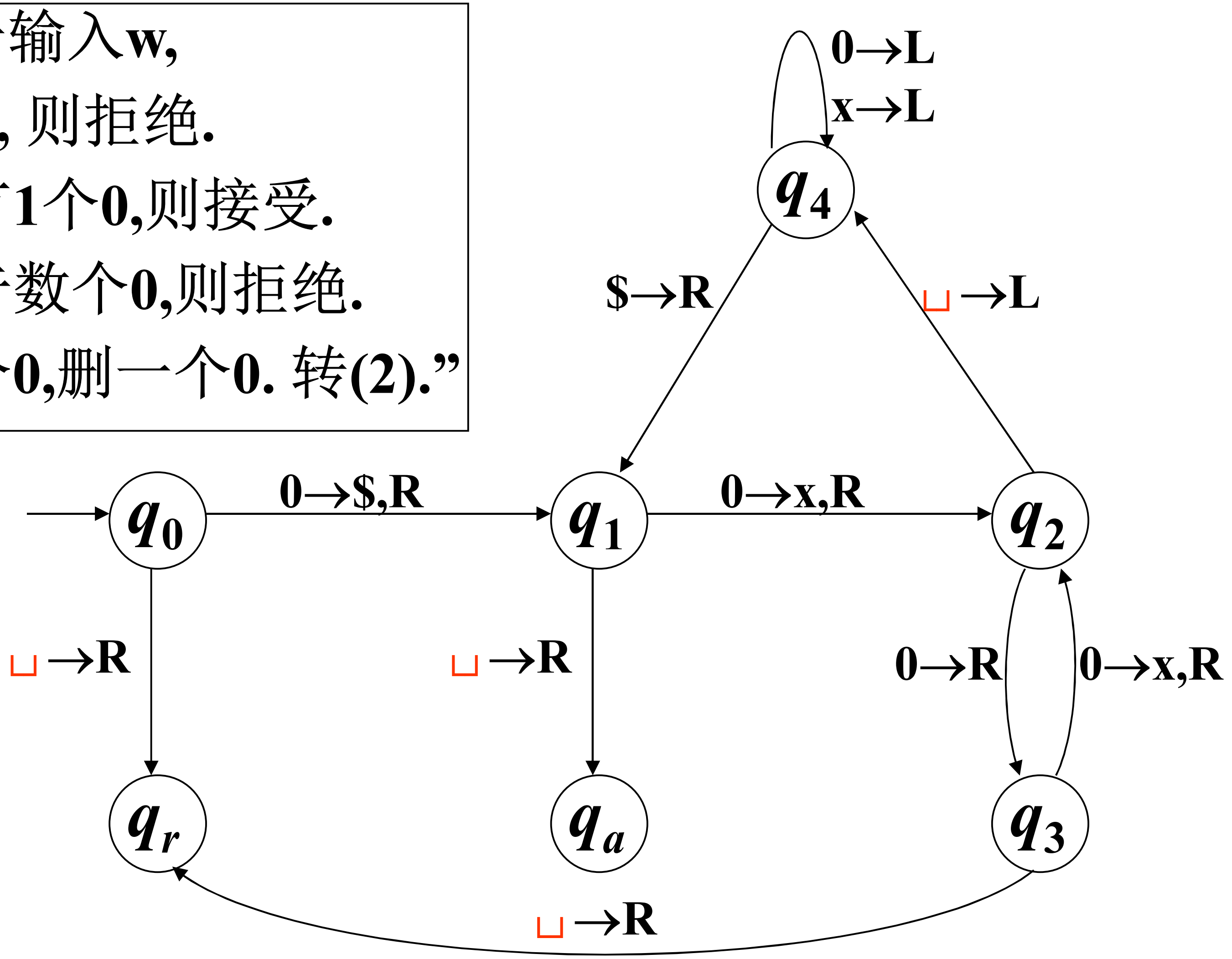
3) 若有奇数个0,则拒绝.

4) 隔一个0,删一个0. 转(2)."



状态图

M="对于输入w,
1) 若w=ε, 则拒绝.
2) 若只有1个0,则接受.
3) 若有奇数个0,则拒绝.
4) 隔一个0,删一个0. 转(2)."



状态图

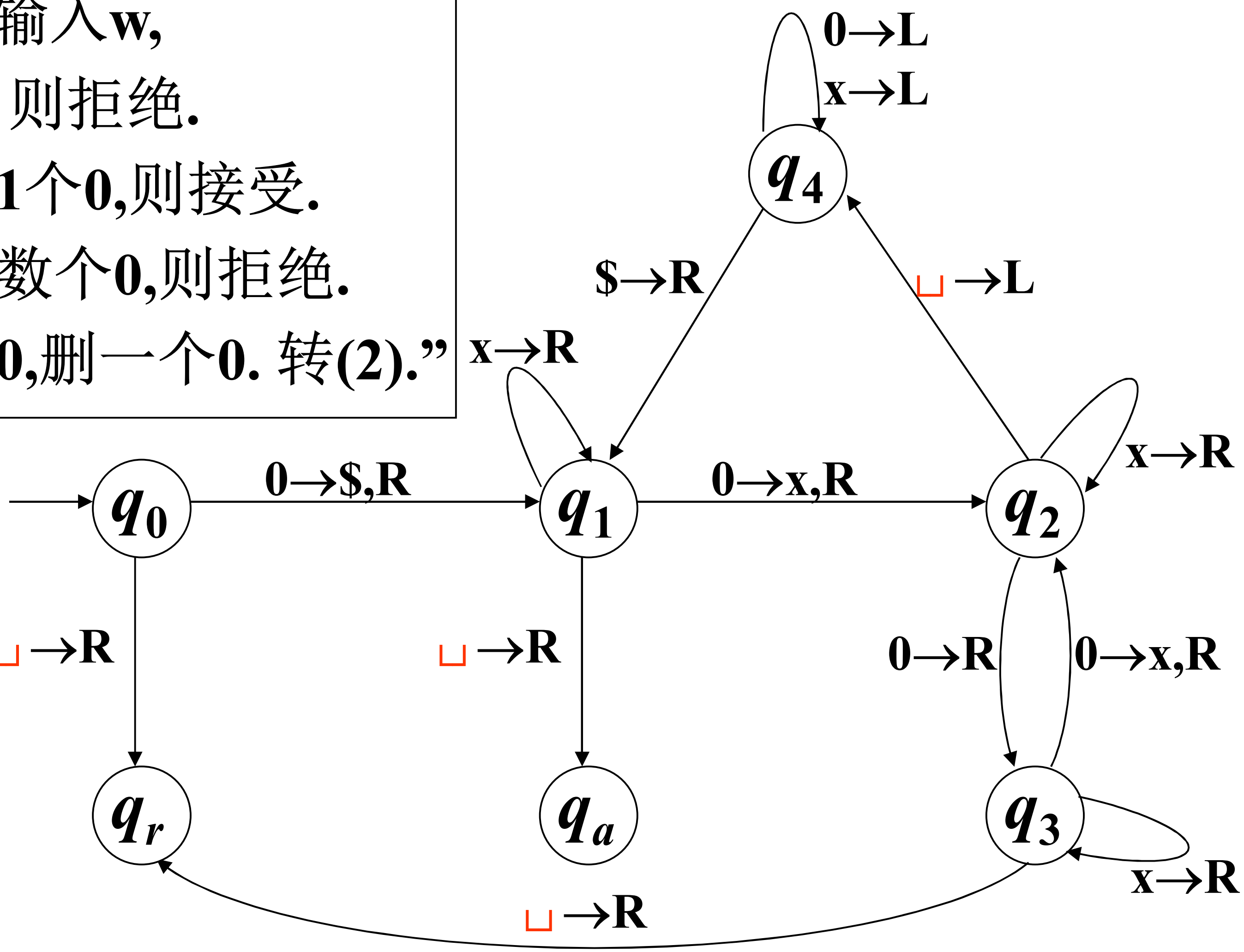
M="对于输入w,

1) 若w=ε, 则拒绝.

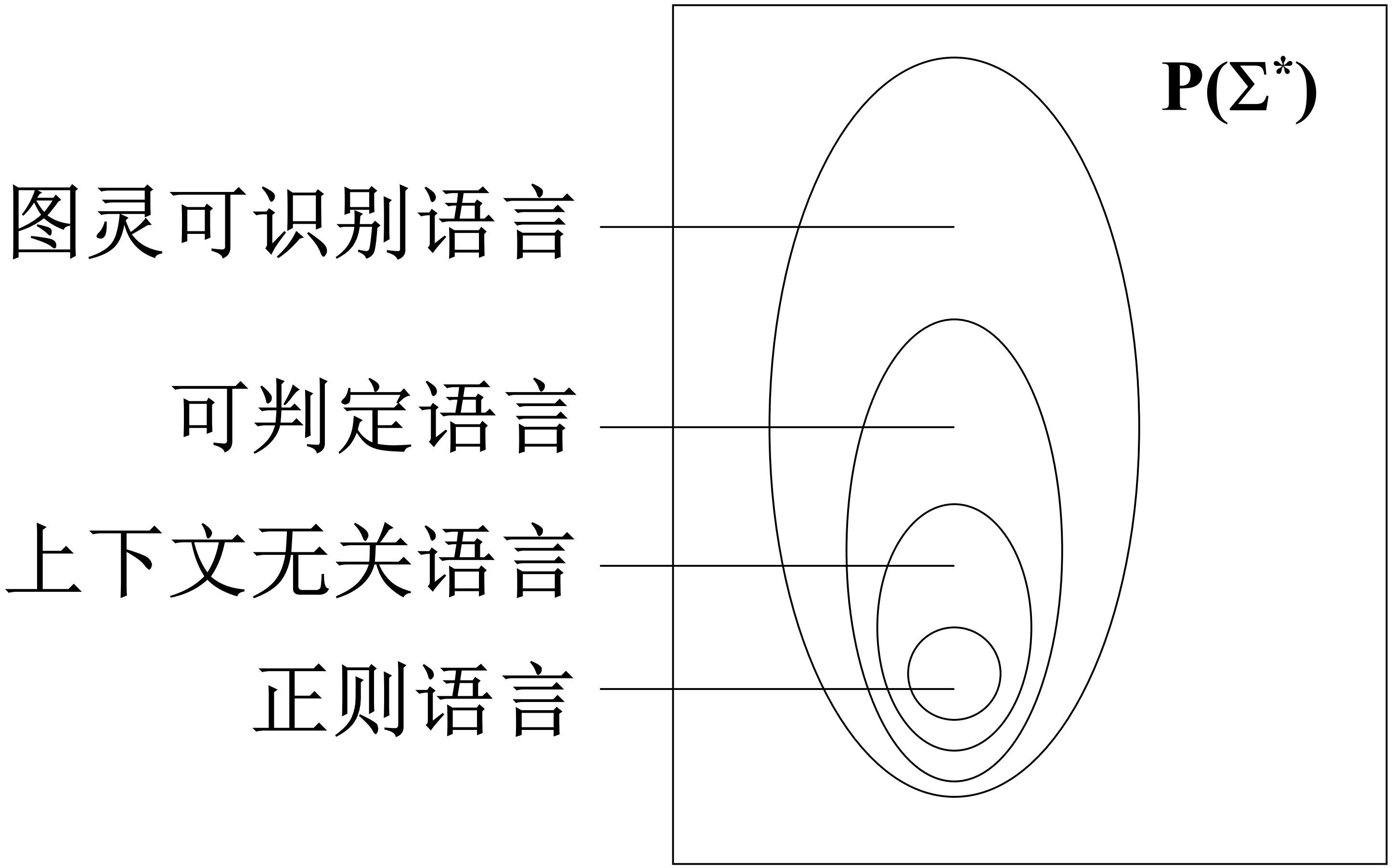
2) 若只有1个0,则接受.

3) 若有奇数个0,则拒绝.

4) 隔一个0,删一个0. 转(2)."



各种语言类的包含关系



图灵机的描述

(1) 形式水平的描述**(**状态图或转移函数**)**

(2) 实现水平的描述**(**读写头的移动**,**改写**)**

(3) 高水平描述**(**使用日常语言**)**

用带引号的文字段来表示图灵机. 例如:

M=“对于输入串**w,**

1) 若**w=**ε**,** 则拒绝**.**

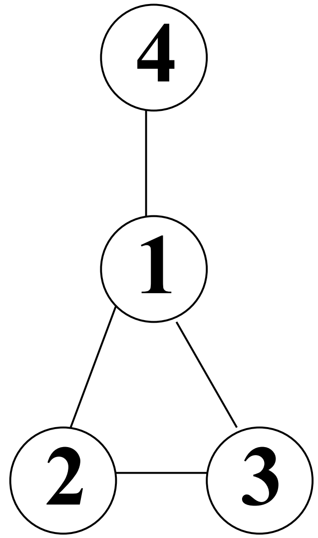
2) 若只有**1**个**0,** 则接受**.**

3) 若**0**的个数为奇数**,** 则拒绝**.**

4) 从带左端隔一个**0,** 删一个**0.** 转**(2).”**

图灵机的输入

- 由定义, TM的输入总是字符串.
- 有时候要输入数, 图, 或图灵机等对象.
  那么要将对象编码成字符串.
- 记对象O的编码为<O>.
- 本课程中一般不关心实际编码方式.
  数: 可取二进制,十进制,或其它编码.
  图: 例如左边的图可以编码为:
  G=(1,2,3,4)((1,2),(2,3),(3,1),(1,4))
- 特别的, 图灵机是有向带权图
  也可以编码为字符串.



输入为对象的图灵机举例

M_1="对于输入<G>, G是一个无向图,

1) 选择G的一个顶点, 并做标记.

2) 重复如下步骤, 直到没有新标记出现.

3) 对于G的每个未标记顶点, 若有边将它连接到已标记顶点, 则标记它.

4) 若G的所有顶点已标记, 则接受; 否则, 拒绝."

分析M_1的语言可知:

$L(M_1)=\{<G> \mid G\text{是连通的无向图}\}$

1. 图灵机基础
2. 图灵机的变形

图灵机的变形

图灵机有多种变形:

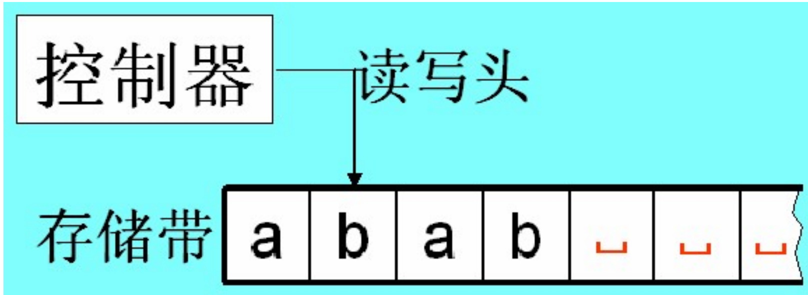
例如多带图灵机, 非确定图灵机

还有如枚举器, 带停留的图灵机等等

只要满足必要特征,

它们都与这里定义的图灵机等价.

非确定型图灵机(NTM)



- **NTM的转移函数**

  $\delta: Q\times\Gamma\rightarrow P(Q\times\Gamma\times\{L,R\})$

- **NTM转移函数举例**

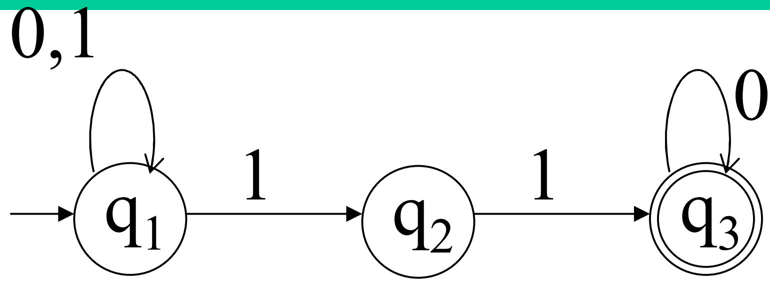
  $\delta(q_3,0)=\{(q_2,x,R), (q_1,1,L), (q_3,\$,R)\}$

- 称**NTM M**接受**x**, 若在**x**上运行**M**时有接受分支.
- 称一**NTM**为判定的,

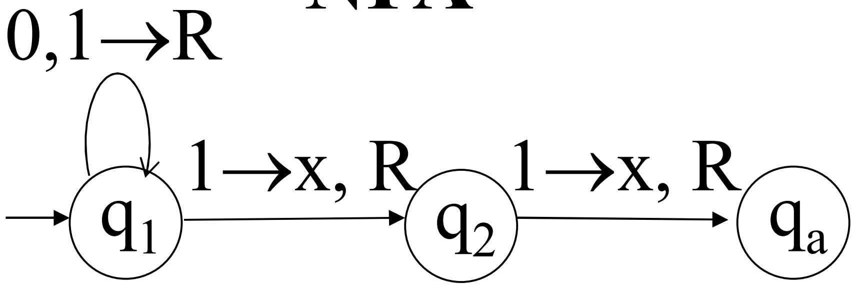
  若它对所有输入,所有分支都停机.

- 定理: 每个**NTM**都有等价的确定**TM**.
- 定理: 每个判定**NTM**都有等价的判定**TM**.

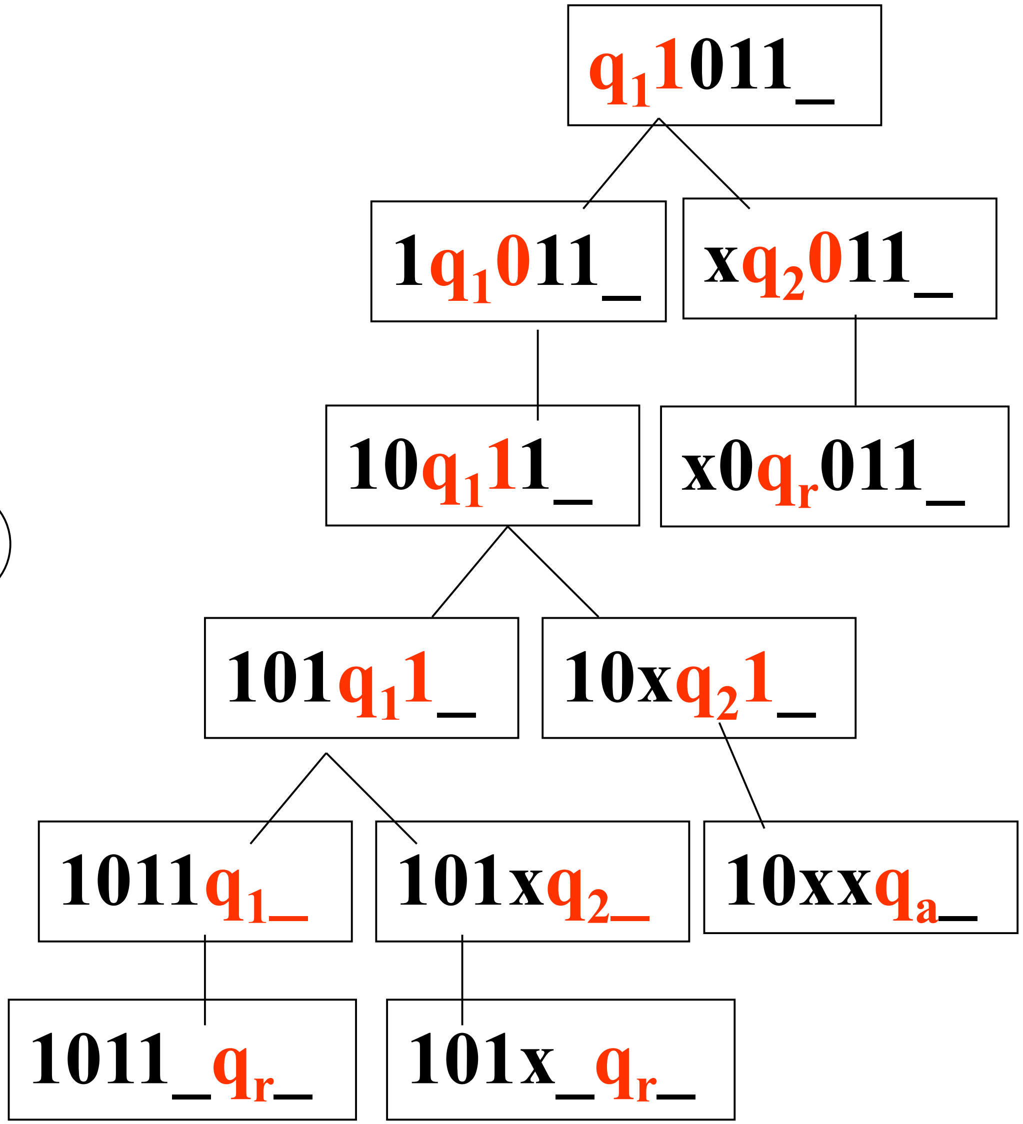
举例


0,1
1
1
0,1
q1
q2
q3

NFA


0,1→R
1→x, R
1→x, R
q1
q2
qa

NTM


q11011_
1q1011_
xq2011_
10q111_
x0qr011_
101q11_
10xq21_
1011q1_
101xq2_
10xxqa_
1011_qr_
101x_qr_

计算理论第1章作业

1.1 下图给出了两台**DFA** M_1和M_2的状态图。

回答下述关于这两台机器的问题。

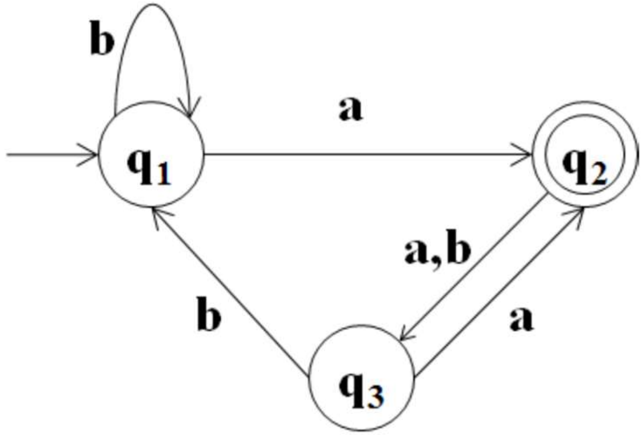
a. 它们的起始状态是什么?

b. 它们的接受状态集是什么?

c. 对输入**aabb**，它们经过的状态序列是什么?

d. 它们接受字符串**aabb**吗?

e.它们接受字符串ε吗?



M_1

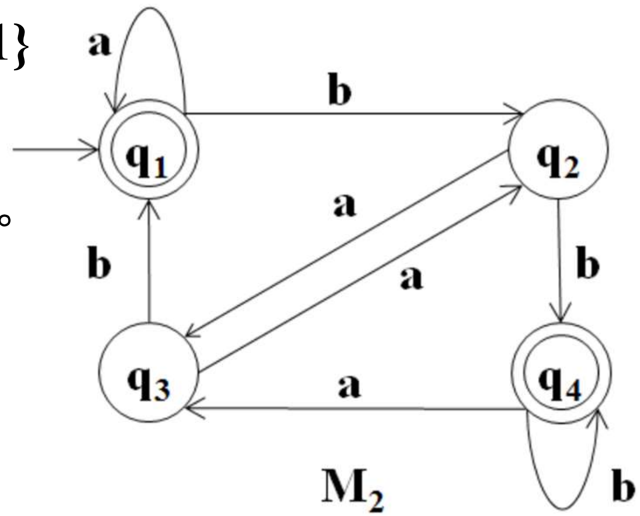
1.6 画出识别下述语言的**DFA**状态图。字母表为{0,1}

d. { w | w的长度不小于3, 并且第3个符号为0};

1.7. 给出下述语言的**NFA**，并且符合规定的状态数。

字母表为{0,1}

e. 语言$0^*1^*0^*0$, 3个状态。

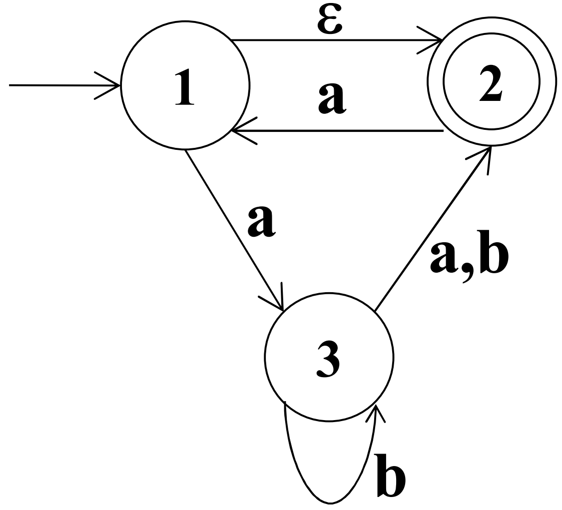


M_2

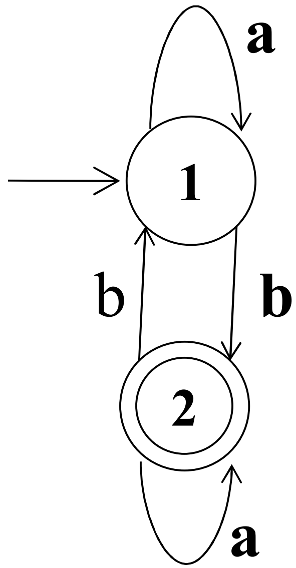
计算理论第1章作业

1.16(b) 将如右图的非确定有限自动机转换成等价的确定有限自动机.

1.21(a) 将如右图的有限自动机转换成等价的正则表达式.



1.16(b)题图



1.21(a)题图

计算理论第1章作业

1.22 在某些程序设计语言中, 注释出现在两个分隔符之间, 如/#和#/. 设C是所有有效注释串形成的语言. C中的成员必须以/#开始, /#结束, 并且在开始和结束之间没有#/. 为简便起见, 所有注释都由符号a和b写成; 因此C的字母表 $\Sigma=\{a, b, /, \#\}$.

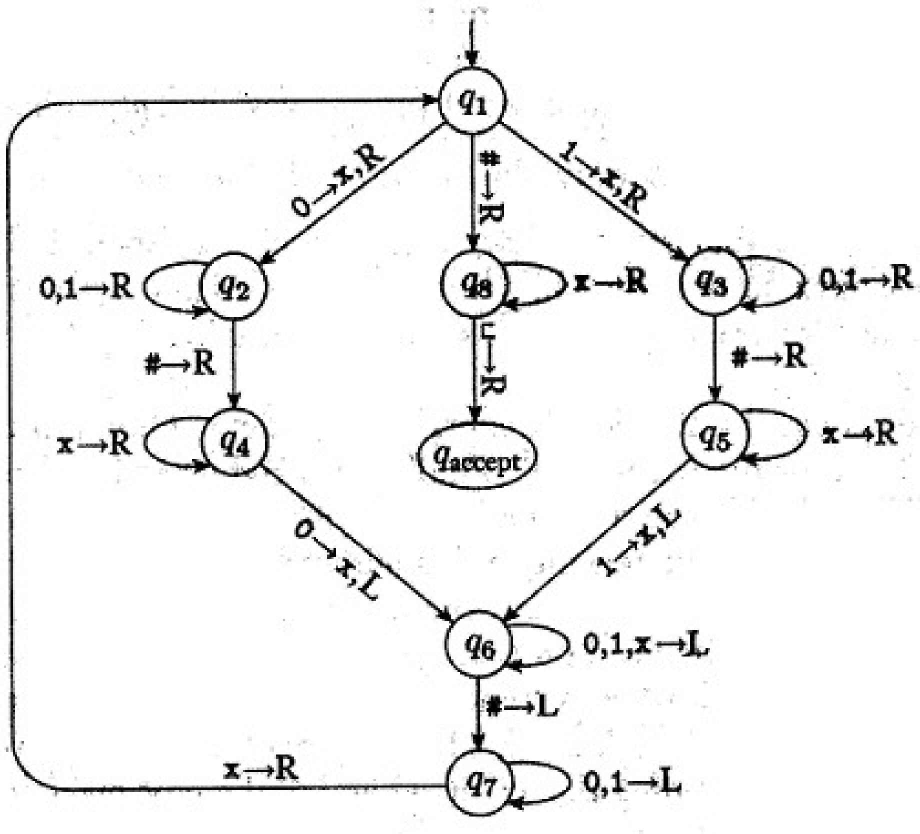
a. 给出识别C的DFA

b. 给出生成C的正则表达式.

1.29 使用泵引理证明下述语言不是正则的。

b. $A = \{ www \mid w \in \{a,b\}^* \}$

计算理论第3章作业



补充说明: 没有画出的箭头指向拒绝状态

3.2 对于识别{**w|w=u#u, u**$\in$**{0,1}***}的图灵机M_1 (见左图), 在下列输入串上, 给出M所进入的格局序列.

c. 1##1, d. 10#11, e. 10#10

3.8 下面的语言都是字母表{**0,1**}上的语言, 以实现水平的描述给出判定这些语言的图灵机:

b. {**w|w**所包含的**0**的个数是**1**的个数的两倍}

c. {**w|w**所包含的**0**的个数不是**1**的个数的两倍}

3.15b 证明图灵可判定语言类在连接运算下封闭.

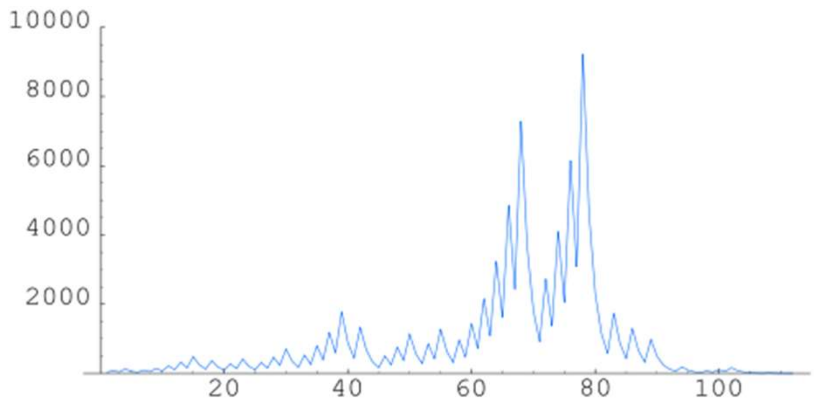
3.16d证明图灵可识别语言类在交运算下封闭.

3.21 设多项式 $c_1x^n + c_2x^{n-1} + \ldots + c_nx + c_{n+1}$有根 $x = x_0$, c_{max}是c_i的最大绝对值. 证明

$$|x_0| \le (n+1)\, c_{max} / |c_1|$$

3n+1问题目前不知道有没有算法

- 输入: 一个正整数n,
- 映射: $f(n) = n/2$, 若n是偶数;
  $f(n) = 3n+1$, 若n是奇数.
- 迭代: 5→16→8→…, 到1则停止
- 输出: n可在f迭代下是否能到1停止
- 直接模拟是正确的算法吗?
- 27需迭代111步(见右图)
- $1\sim5\times10^{18}$都能到1.([wiki])



不可判定问题(没有算法)举例

Hilbert第十问题**: “**多项式是否有整数根**”**有没有算法**?**

1970’s 被证明不可判定**.**

M = “对于输入 **“p”, p**是**k**元多项式**,**

1. 取**k**个整数的向量**x (** 绝对值和从小到大 **)**

2. 若**p(x) = 0,** 则停机接受**.**

3. 否则转**1. ”**

这个图灵机对输入 $p(x,y) = x^2+y^2-3$ 不停机