复习

连续型随机变量

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$X \sim U[a,b]$

指数分布

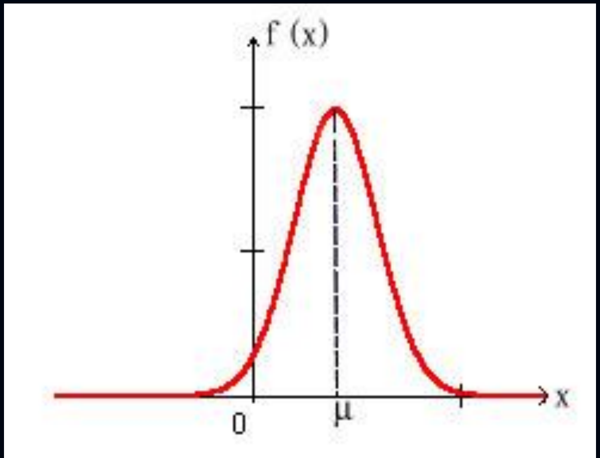
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$X \sim E(\lambda)$

正态分布

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$



密度函数f(x)的性质

标准正态分布

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty$$

分布函数(二)

一. 概率分布函数的概念与性质(已讲)

二. 离散型随机变量的分布函数(已讲)

三．连续型随机变量的分布函数

密度函数与分布函数的关系

如果 X 是连续型随机变量，有概率密度 $f(x)$ 则

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

并且在 $f(x)$ 的连续点有

$$f(x)=F'(x)$$

注：

1、　对于连续型的随机变量,密度函数唯一决定分布函数

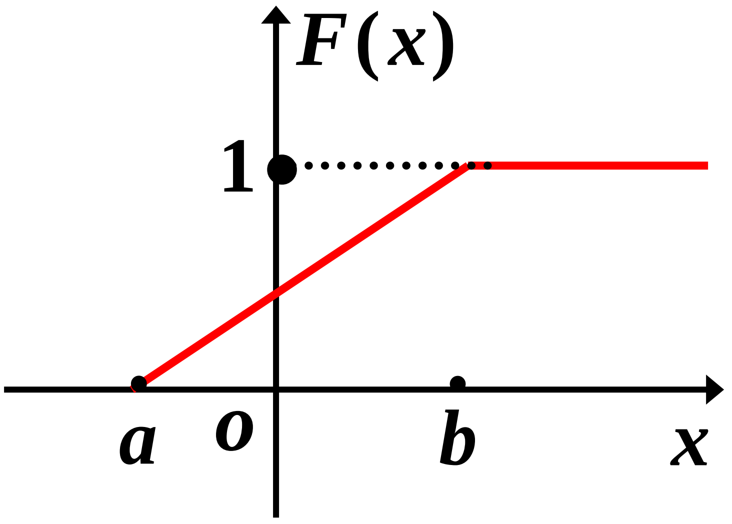
2、　连续型随机变量的分布函数一定是连续的，分布函数如果不连续就不是连续型随机变量　（除了连续型分布和离散型分布以外理论上还存在其它类型的分布）

几种常用的连续型随机变量的分布函数

1. 均匀分布

若 $X \sim U(a, b)$，则其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

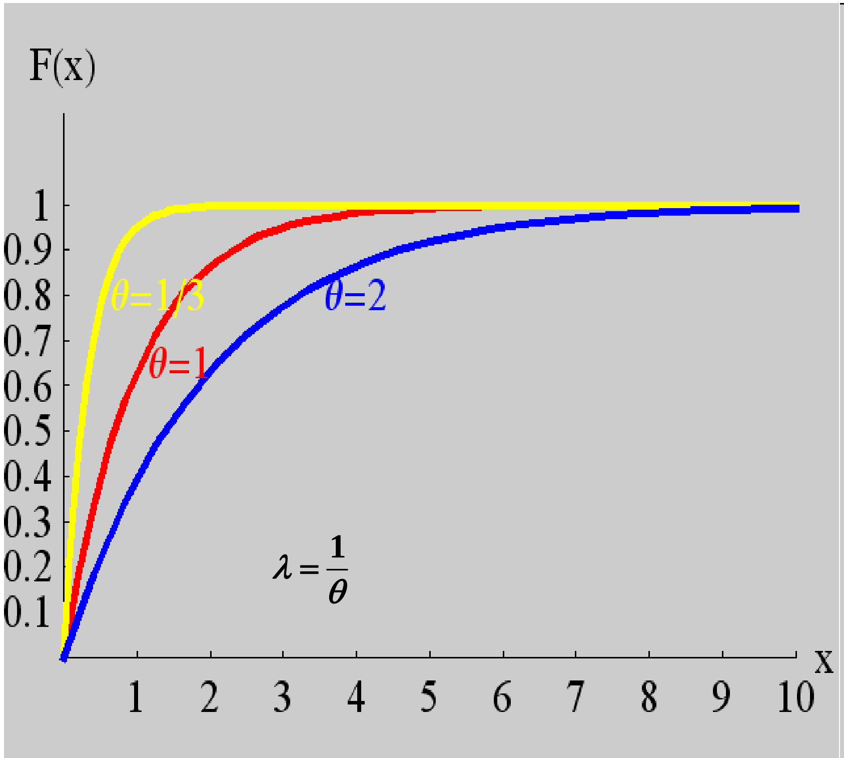


2. 指数分布

若 $X \sim E(\lambda)$，则其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

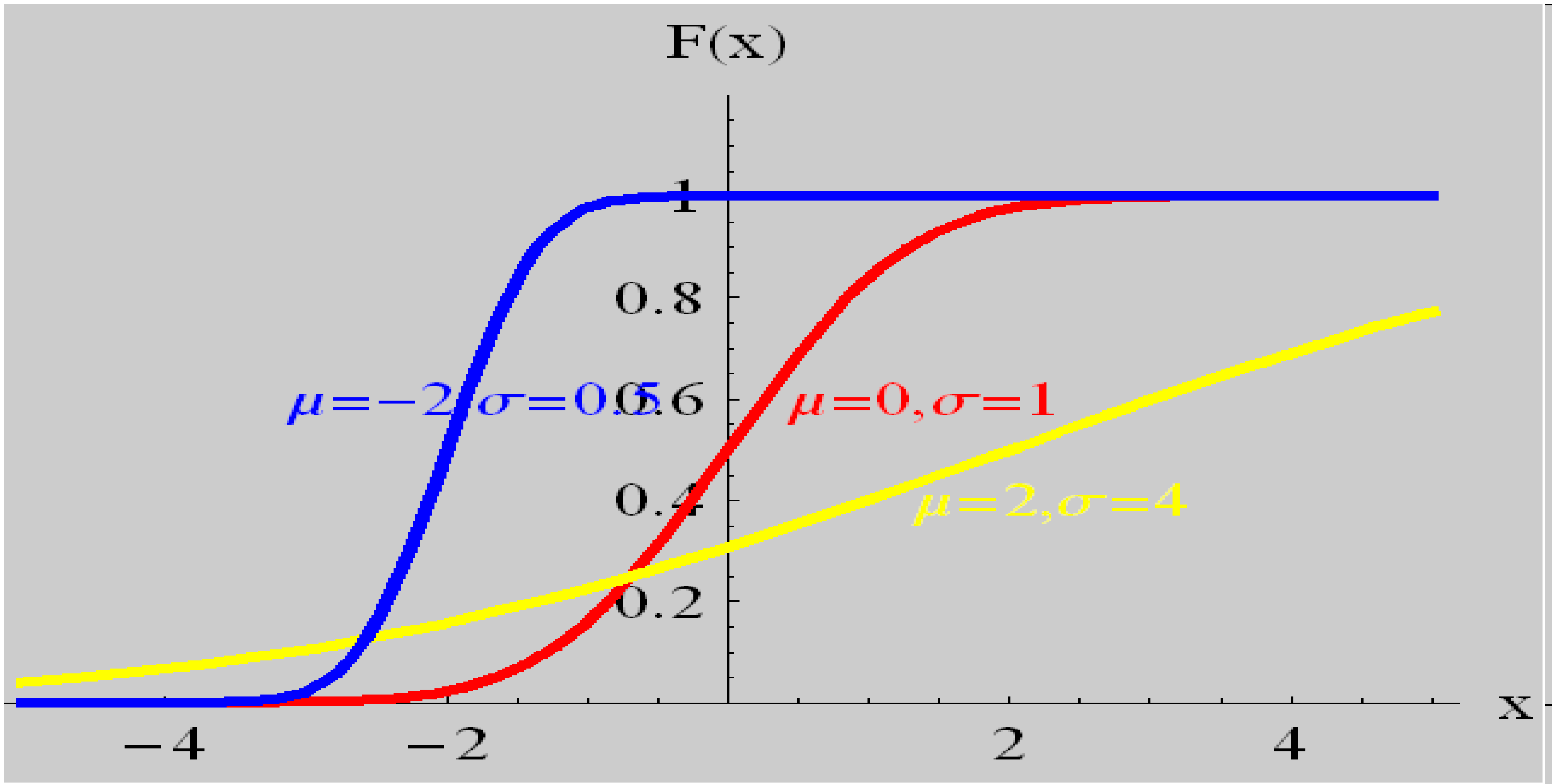
图中 $\lambda=\dfrac{1}{\theta}$



3. 正态分布

若 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则其分布函数为

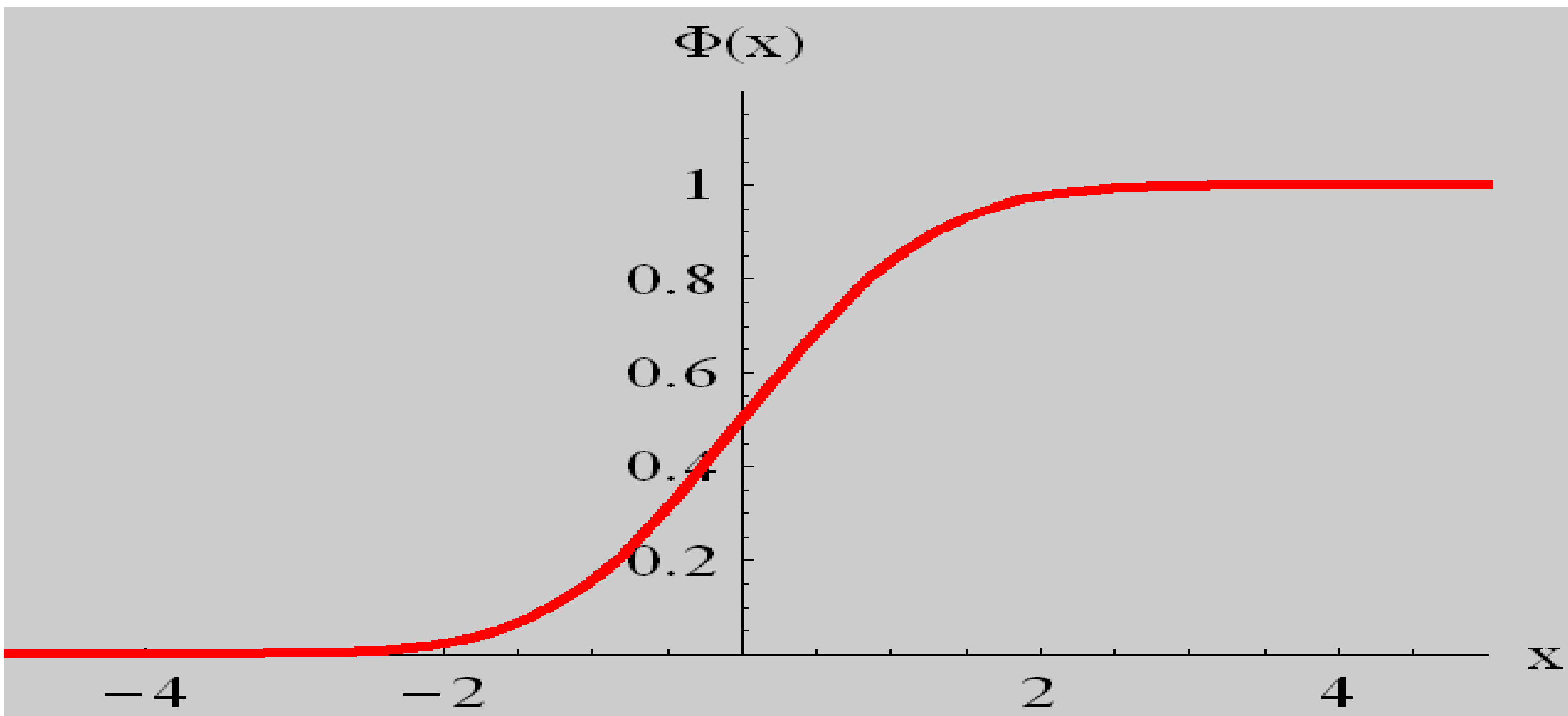
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$



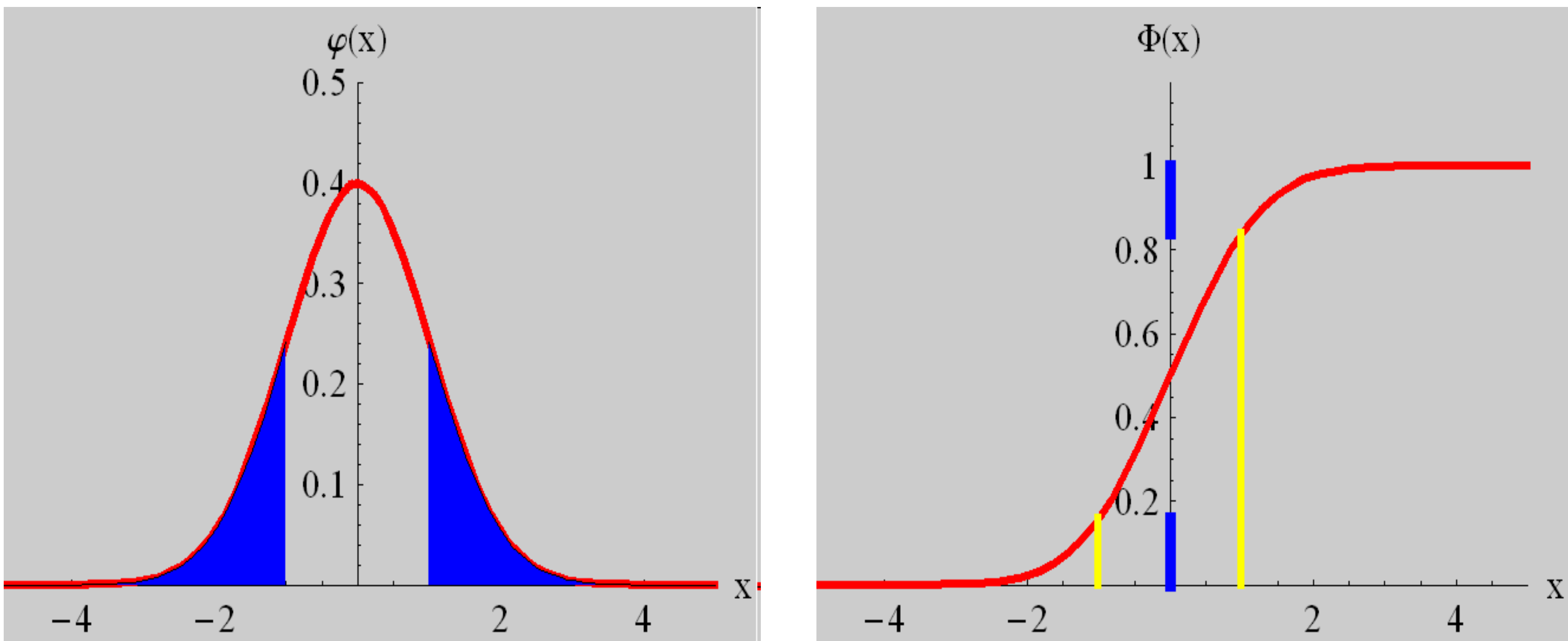
4. 标准正态分布

若 $X \sim N(0,1)$，则其分布函数为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$



$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



正态分布下的概率计算

$$P\left(X \le x\right) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= ?$$

方法一:利用MATLAB软件包计算

方法二:转化为标准正态分布查表计算

重要结论

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

1、 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

2、 $F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

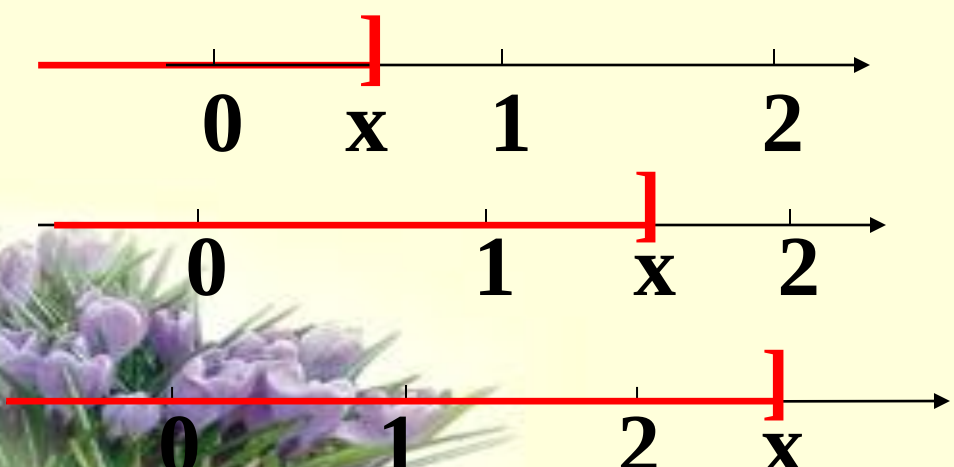
3、 $P(a \le X \le b) = \Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

例7设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求X的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt=0, & x\le 0 \\ \int_{0}^{x} t\,dt=\frac{1}{2}x^2 & 0<x\le 1 \\ \int_{0}^{1} t\,dt+\int_{1}^{x}(2-t)dt & \\ =-\frac{1}{2}x^2+2x-1, & x<1\le 2 \\ \int_{0}^{2} f(t)dt=1, & x>2 \end{cases}$$



例8 设连续型随机变量 X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -a \\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a \\ 1, & x>a \end{cases}$$

（1）确定 A、B 的值；

（2）求 $P\left(-a<X<\dfrac{a}{2}\right)$；

（3）求 X 的概率密度

例8（续）

解：（1）因为 X 是连续型随机变量，所以

$F(x)$ 连续

故有 $F(-a)=\lim\limits_{x\to -a}F(x)$

$$F(a)=\lim_{x\to a}F(x)$$

即 $A+B\arcsin\left(\dfrac{-a}{a}\right)=A-\dfrac{\pi}{2}B=0$

$$A+B\arcsin\left(\frac{a}{a}\right)=A+\frac{\pi}{2}B=1$$

例8（续）

解得 $A=\dfrac{1}{2},\quad B=\dfrac{1}{\pi}$

所以

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -a \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a \\ 1, & x>a \end{cases}$$

例8（续）

解： (2) $P\left(-a<X<\dfrac{a}{2}\right)=F\left(\dfrac{a}{2}\right)-F(-a)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{2a}\right)-0$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}$$

(3) 由 $f(x)=F'(x)$ 得

$$f(x)=\begin{cases}1/\pi\sqrt{a^2-x^2}, & -a<x<a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

这一节我们介绍了随机变量的分布函数

分布函数

离散型随机变量的分布函数

分布函数的性质

连续型随机变量的分布函数

概率函数与分布函数的关系

概率密度与分布函数的关系

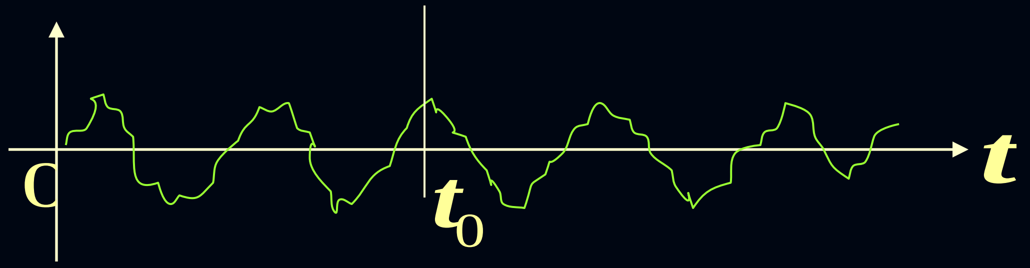
第二章作业2：

25,27,31,32,35,36,,40,42,46

引例

在实际中，人们常常对随机变量的函数更感兴趣.

已知$t=t_0$ 时刻噪声电压 V的分布，



求功率 $W=V^2/R$ （R为电阻）的分布.

§5　随机变量函数的分布

设X, Y 是两个随机变量，$y=g(x)$是一个已知函数，如果当X 取值 x 时，Y取值为$g(x)$，则称Y 是随机变量X 的函数。

记为$Y = g(X)$

问题：已知随机变量 X 的分布函数 或密度函数（分布列）

$$Y = g(X)$$

求 随机变量Y 的分布

离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量 X 的分布列为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布列

解: 随机变量 Y 的取值为 0，1，4

且 $Y=0$ 对应于 $(X-1)^2=0$,

解得 $X=1$

所以 $P(Y=0)=P(X=1)=0.1$

例1（续）

同理

$$P(Y=1)=P(X=0)+P(X=2)$$

$$=0.3+0.4=0.7$$

$$P(Y=4)=P(X=-1)=0.2$$

所以，$Y=(X-1)^2$ 的分布列为

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

例2.已知随机变量Y的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$$

令 $Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)$， 求Y的分布律。

解：已知Y可能的取值为 -1，0，1

且:
$$Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)=\begin{cases}-1, & X=4n-1\\ 0, & X=2n\\ 1, & X=4n-3\end{cases},n=1,2,\cdots$$

$$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots \qquad Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)=\begin{cases}-1, & X=4n-1\\ 0, & X=2n \\ 1, & X=4n-3\end{cases},n=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=-1\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=4n-1\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4n-1}}=\frac{1/8}{1-1/16}=\frac{2}{15}$$

$$P\{Y=0\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=2n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=1\}=1-P\{Y=-1\}-P\{Y=0\}=\frac{8}{15}$$

$\therefore Y$的分布律为:

Y	-1	0	1
P	2/15	1/3	8/15

连续型随机变量函数的分布

➢ X连续 Y离散

例3.设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

令 $Y=\begin{cases}1, & X\le\frac{1}{2}\\ 0, & X>\frac{1}{2}\end{cases}$ 求Y的分布。

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & X\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & X>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

解：$P\{Y=1\}=P\{X\le \frac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{1/2} f(x)dx=\int_{0}^{1/2} 2xdx=\frac{1}{4}$

$$P\{Y=0\}=1-P\{Y=1\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

所以Y的分布为

Y	0	1
P	3/4	1/4

连续型随机变量函数的分布

➢ 当 $y=g(x)$ 是单调函数

定理 若连续型随机变量 X只在(a, b)上取值,它的概率密度为 $f_X(x)$，又 $y=g(x)$ 是严格单调的可导函数，则$Y=g(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\,|[g^{-1}(y)]'| & y\in(\alpha,\beta) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中(α，β)是$y=g(x)$, $a<x<b$ 的值域。

步骤

1 证明严格单调可导

2 求值域

3 求反函数

4 求反函数导数

5 代入公式

例4　设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b$, 求Y的密度函数

1　y=ax+b 严格单调可导

2 值域为R

$-\infty < y < \infty$

3 反函数x=(y-b)/a

4 dx/dy=1/a

例4　设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y = aX + b$, 求Y的密度函数

$$5 \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\,|a|} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2a^2\sigma^2}} \qquad -\infty < y < \infty$$

$$Y \sim N(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$$

特别地，若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

则 $$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\,|[g^{-1}(y)]'|$$

例 5

假设随机变量X服从参数为2的指数分布，

证明：$Y=1-e^{-2X}$ 在区间（0，1）上服从均匀分布。

解：X的密度函数为

$$f_X(x) = 2e^{-2x} \qquad x > 0$$

易知 $y = 1 - e^{-2x}$ 为严格单调的可导函数，

由已知条件可知Y的取值范围为(0，1)

其反函数为 $x = -\frac{1}{2}\ln(1-y)$，且 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2(1-y)}$，

所以 $f_Y(y) = 2e^{-2[-\frac{1}{2}\ln(1-y)]}\left|\frac{1}{2(1-y)}\right| = 1, \quad 0 < y < 1$

➢ 当y=g(x)是非单调函数

1 求出 Y的 的分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$

2 $f_Y(y) = F_Y^{'}(y)$

例6 已知 $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$, 求 $f_Y(y)$

解

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$$

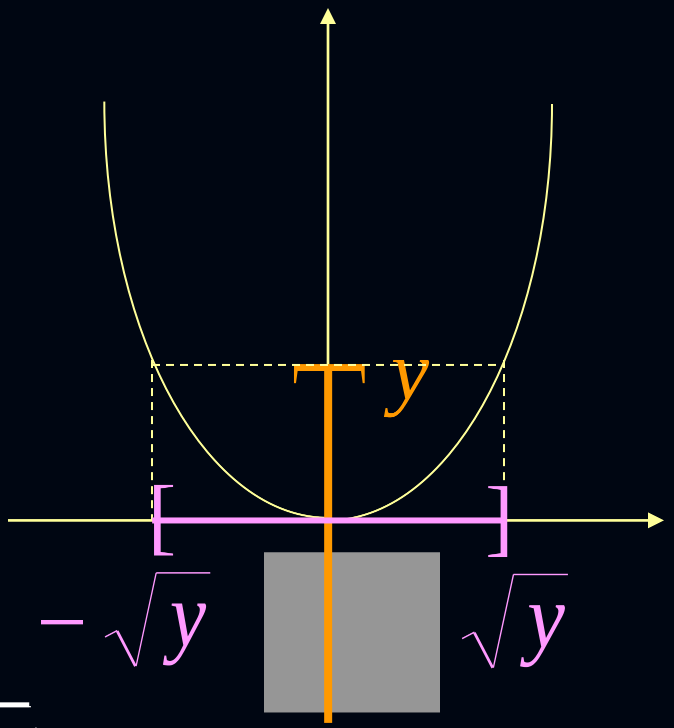
当$y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$

当$y > 0$ 时,

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y)$$

$$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$$



$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0 \\ \Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y}), & y>0 \end{cases}$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(\varphi(\sqrt{y})+\varphi(-\sqrt{y})\right), & y>0 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,y^{1/2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \end{cases}$$

例 7　已知随机变量 $X \sim U[0, \pi]$, 求 $Y = \sin X$ 的概率密度 $f_Y(y)$

解　$F_Y(y) = P(Y \le y)$

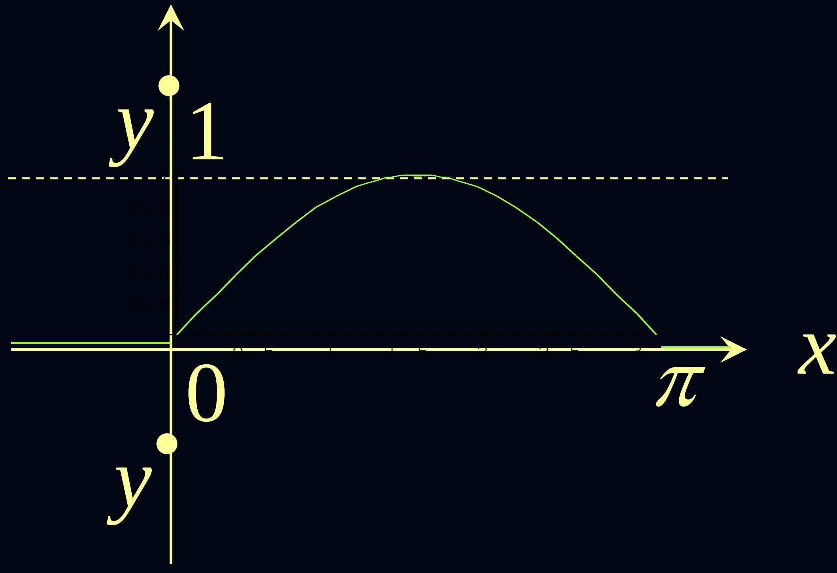
当 $y \le 0$

$F_Y(y) = 0$

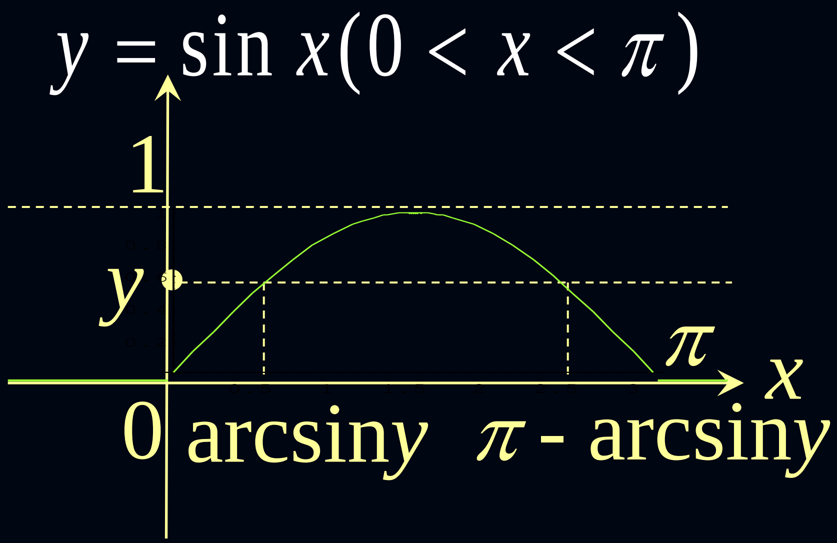
$y \ge 1$ 时

$F_Y(y) = 1$

$y = \sin x (0 < x < \pi)$



当$0 < y < 1$时



$$F_Y(y) = P(\sin X \le y)$$

$$= P(0 \le X \le \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y \le X \le \pi)$$

$$= \frac{2\arcsin y}{\pi}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y\le 0 \\ \dfrac{2\arcsin\sqrt{y}}{\pi} & 0<y<1 \\ 1 & y\ge 1 \end{cases}$$

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & 0<y<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

例8 假设一设备开机后无故障工作的时间X服从参数为1/4的指数分布。设备定时开机，出现故障自动关机，而在无故障的情况下工作3小时便关机。试求该设备每次开机无故障工作时间Y的分布函数。

解：易知X的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{4}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}X, & X<3\\ 3, & X\geq 3\end{cases}$$

例8.假设一设备开机后无故障工作的时间X服从参数为1/4的指数分布。设备定时开机，出现故障自动关机，而在无故障的情况下工作3小时便关机。试求该设备每次开机无故障工作时间Y的分布函数。

$$\therefore F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

$$=P\left\{\{Y\le y, X<3\}\cup\{Y\le y, X\ge 3\}\right\}$$

$$=P\left\{X\le y, X<3\right\}+P\left\{3\le y, X\ge 3\right\}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{4}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\quad Y=\begin{cases}X, & X<3\\ 3, & X\ge 3\end{cases}\quad F_Y(y)=P\{X\le y, X<3\}+P\{Y\le y, X\ge 3\}$$

当$y<0$时 $$F_Y(y)=P\{X\le y\}+0=0$$

当$0\le y<3$时 $$F_Y(y)=P\{X\le y\}+0=1-e^{-y/4}$$

当$y\ge 3$时 $$F_Y(y)=P\{X<3\}+P\{X\ge 3\}=1$$

所以Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-y/4}, & 0\le y<3\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$$

易知$F_Y(y)$在$y=3$时不连续。

例9.设随机变量X 服从参数为1/4的指数分布，令 $Z=(X-1)^2$.求Z的概率密度。

解：易知X的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

先求Z的分布函数

当$z<0$时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=0$

当$z\ge 0$时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{(X-1)^2\le z\}$ $=P\{1-\sqrt{z}\le X\le 1+\sqrt{z}\}$ $=F_X(1+\sqrt{z})-F_X(1-\sqrt{z})$

即有 $F_Z(z)=\begin{cases}F_X(1+\sqrt{z})-F_X(1-\sqrt{z}), & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}$

$$F_Z(z)=\begin{cases} F_X(1+\sqrt{z})-F_X(1-\sqrt{z}), & z\geq 0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

所以Z的密度函数为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{z}}[f_X(1+\sqrt{z})+f_X(1-\sqrt{z})], & z\geq 0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$

当$z\geq 0$时 $f_X(1+\sqrt{z})=\frac{1}{4}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}$，

当$0\leq z<1$时，$f_X(1-\sqrt{z})=\frac{1}{4}e^{-\frac{1-\sqrt{z}}{4}}$

当$z\geq 1$时 $f_X(1-\sqrt{z})=0$

$$f_X(1+\sqrt{z})=\frac{1}{4}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}},z>0 \qquad f_X(1-\sqrt{z})=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1-\sqrt{z}}{4}}, & 0\le z<1\\ 0, & z\ge 1\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}(\frac{1}{4}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}+\frac{1}{4}e^{-\frac{1-\sqrt{z}}{4}}), & 0\le z<1\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}(\frac{1}{4}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}+0), & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{8\sqrt{z}}[e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}+e^{-\frac{1-\sqrt{z}}{4}}], & 0\le z<1\\ \frac{1}{8\sqrt{z}}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}, & z\ge 1\end{cases}$$

例10.在半径为R，圆心在原点O的圆周上任取一点M，设MO与x轴正向的夹角$\Theta \sim U(-\pi, \pi)$，求M点与$A(-R,0)$，$B(R,0)$三点构成的三角形面积的密度函数。

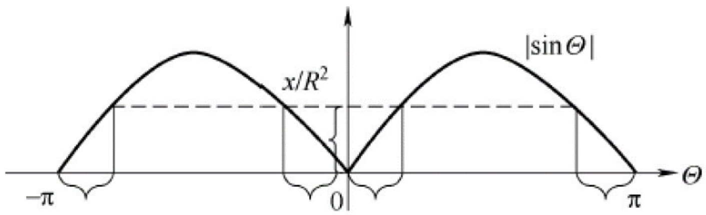
解：易知三角形的面积为

$$S = R^2 \left|\sin\Theta\right|, -\pi < \Theta < \pi$$

先求分布函数 $F_S(x) = P\{S \le x\} = P\{R^2 \left|\sin\theta\right| \le x\} = P\{\left|\sin\Theta\right| \le \dfrac{x}{R^2}\}$

当 $\dfrac{x}{R^2} < 0$ **即$x<0$时** $F_S(x) = 0$

当 $\dfrac{x}{R^2} \ge 1$ **即$x>R^2$时** $F_S(x) = 1$



$$F_S(x) = P\{|\sin\Theta| \le \frac{x}{R^2}\} \qquad \Theta \sim U(-\pi, \pi)$$

当 $0 \le \frac{x}{R^2} < 1$ 即$0 \le x < R^2$时

$$F_S(x) = P\{|\sin\Theta| \le \frac{x}{R^2}\} = P\{0 \le \Theta \le \arcsin(\frac{x}{R^2})\}$$

$$+P\{\pi - \arcsin(\frac{x}{R^2}) \le \Theta \le \pi\} + P\{-\arcsin(\frac{x}{R^2}) \le \Theta \le 0\}$$

$$+P\{-\pi \le \Theta \le \pi - \arcsin(\frac{x}{R^2})\} = 4\arcsin(\frac{x}{R^2}) \Big/ 2\pi$$

故 $F_S(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{2\arcsin(\dfrac{x}{R^2})}{\pi}, & 0\le x\le R^2 \\ 1, & x>R^2 \end{cases}$

所以 $f_S(x)=F_S'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{R^4-x^2}}, & 0\le x\le R^2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

第二章

- 作业3： 50,53,57,59