北京理工大学 2017-2018 学年第一学期

2016 级概率与数理统计试题（A 卷）

座号_______________班级_______________ 学号_______________ 姓名_______________

（本试卷共 8 页，八个大题，满分 100 分；最后一页空白纸为草稿纸）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	核分
得分										
签名										

附表：

$\Phi(\sqrt{0.5})=0.7601$ ，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$

$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.10}(24)=1.3178$ ，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.10}(25)=1.3163$

一、（12 分）

得分	

有甲、乙、丙三个盒子，其中分别有 3 个白球和 2 个黑球、3 个黑球和 2 个白球、3 个白球和 3 个黑球。掷一颗均匀的骰子，若出现 1、2、3 点则选甲盒，若出现 4 点则选乙盒，否则选丙盒。然后从所选中的盒子中随机地任取一球. 求：

1．取出的球是白球的概率；

2．当取出的球为白球时，此球来自甲盒的概率.

二、（**12 分**）

得分	

设连续型随机变量 X 的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases} a-\dfrac{a}{2}x, & 0<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $a>0$ 为常数.

1．求常数 a 的值；2. 求 X 的分布函数 $F(x)$；

3. 求条件概率 $P\{X>\dfrac{1}{2}|X\le 1\}$；4. 设 $Y=\begin{cases} 2, & X\le 1 \\ X, & X>1 \end{cases}$，求 Y 的分布函数.

三、（**16 分**）

得分	

1. 设二维连续型随机变量(X, Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（1）求边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；（2）判断 X 与 Y 是否独立（说明理由）.

2.（1）设 $X\sim N(6,1)$, $Y\sim N(7,1)$, 且 X 与 Y 相互独立.

写出 $U=\dfrac{1}{2}(X+Y)$ 的分布，并求 $P\{|U-6.5|<\dfrac{1}{2}\}$.

（2）设 X 与 Y 相互独立，且均服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布。

求 $V=min\{X,Y\}$的概率密度函数.

四、（14 分）

得分	

设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

再设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立，且与 X 具有相同的分布.

（1）求 $E(X)$，$D(X)$；

（2）记 $Y=X_1-X_2+X_3-X_4+X_5$，求 $E(Y)$，$D(Y)$；

（3）记 $Z=max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$,求 $E(Z)$.

五、（8 分）

得分	

一复杂系统由 n 个相互独立的部件所组成，每个部件能正常工作的概率为 0.9，且必须至少有 80%的部件正常工作才能使整个系统正常工作，问 n 至少为多大才能使系统正常工作的概率不低于 0.95.

六、（8 分）

得分	

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$， $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自该总体的一个样本，令 $\bar{X}_5 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i$.

问 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X}_5)^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=6}^{10}(X_k - \mu)^2$ 服从什么分布？并给出证明.

七、（15 分）

得分	

1. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$$

其中θ>0 为未知参数，$X_1, X_2,\ldots,X_n$ 为来自该总体的一个样本.

（1）求参数θ 的矩估计量$\hat{\theta}$；（2）求$D(\hat{\theta})$.

2. 设总体 X 服从参数为 p 的几何分布，其分布律为

$$P\{X=x\}=pq^{x-1} \qquad (x=1,\ 2,\ 3,\cdots).$$

其中$0<p<1$是未知参数，$q=1-p$. $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自该总体中的一个样本，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为相应的样本观察值. 求参数 p 的最大似然估计量.

八、（**15 分**）

得分	

1. 叙述假设检验问题中犯第一类错误和第二类错误的含义，并解决以下问题：
设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，其中 $\mu\in R$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，考虑假设检验问题 $H_0:\mu=2$; $H_1:\mu=3$，若检验的拒绝域由 $D=\{(X_1,\cdots,X_n):\bar{X}\ge 2.6\}$ 确定.
求该检验犯第一类错误的概率 α 和第二类错误的概率 β.（结果用标准正态分布函数 $\Phi(\bullet)$ 表示）

2. 设考生成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ^2 均未知. 在某地区一次数学统考中随机抽取了 25 名考生的成绩，算得平均成绩为 76 分，标准差为 15 分. 问在显著性水平 $\alpha=0.10$ 下，能否认为这次考试全体考生的平均成绩为 82 分?