程序设计方法与实践

——时空权衡

时空权衡

- 时空权衡在算法设计中是一个众所周知的问题
  - 对问题的部分或全部输入做预处理，然后对获得的额外信息进行存储，以加速后面问题的求解——输入增强
  - 使用额外空间来实现更快和（或）更方便的数据存取——预构造

时空权衡

- **时空权衡**是指在算法的设计中，对算法的时间和空间作出权衡。
- **常见的以空间换取时间的方法有：**
  - 输入增强
    - 计数排序
    - 字符串匹配中的输入增强技术
  - 预构造
    - 散列法
    - B树

时空权衡

- **7.1 计数排序**
- 7.2 串匹配中的输入增强技术
- 7.3 散列法
- 7.4 B树

7.1 计数排序

- 针对待排序列表中的每个元素，算出列表中小于该元素的元素个数，并把结果记录在一张表中。
  - 这个“个数”指出了元素在有序列表中的位置
  - 可以用这个信息对列表的元素排序，这个算法称为“比较计数”

7.1 计数排序

- 思路：针对待排序列表中的每一个元素，算出列表中小于该元素的元素个数，把结果记录在一张表中。

数组 A[0..5]		62	31	84	96	19	47
初始	Count []	0	0	0	0	0	0
$i = 0$ 遍之后	Count []	3	0	1	1	0	0
$i = 1$ 遍之后	Count []		1	2	2	0	1
$i = 2$ 遍之后	Count []			4	3	0	1
$i = 3$ 遍之后	Count []				5	0	1
$i = 4$ 遍之后	Count []					0	2
最终状态	Count []	3	1	4	5	0	2
数组 S[0..5]		19	31	47	62	84	96

7.1 计数排序

```
算法  Comparison(A[0…n-1])
{  //用比较计数法对数组排序
   for(i=0;i < n;i++)    Count[i]=0;
   for(i=0;i < n-1;i++)
        for(j=i+1;j < n; j++)
                      if(A[i]<A[j]) Count[j]++;
                      else  Count[i]++;
   for(i=0;i < n ; i ++) S[Count[i]] = A[i];
   return  S;
}
```

$$C(n) = \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2}[(n-1)-(i+1)+1]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2}(n-1-i)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

7.1 计数排序

- 该算法执行的键值比较次数和选择排序一样多，并且还占用了线性数量的额外空间，所以几乎不能来做实际的应用
- 但在一种情况下还是卓有成效的——待排序的元素值来自一个已知的小集合
  - 如待排序集合只有多个1，2元素（更一般：元素位于下界l 和上界u之间的整数)
  - 那扫描列表中1和2的数目计入F[0]和F[1], (F[0]~F[u-l])
  - 有序列表中前F[0]个就是1，接下来F[1]个是2。

7.1 计数排序

- 另一种更现实的情况：待排序的数组元素有一些其他信息和键值相关（不能改写列表的元素）
  - 将A数组元素复制到一个新数组S[0…n-1]中
  - A中元素的值如果等于最小的值l，就被复制到S的前F[0]个元素中，即位置0到F[0]-1中
  - 值等于l+1的元素被复制到位置F[0]至(F[0]+F[1])-1，以此类推。
- 因为这种频率的累积和在统计中称为分布，这个方法也称为“分布计数”。

7.1 计数排序

13	11	12	13	12	12

数组值	11	12	13
频率	1	3	2
分布值	1	4	6

```
算法 DistributionCountingt(A[0..n-1],L，U)
for(j ← 0 to U-L)  D[j] ← 0;
for(i ← 0 to n-1)   D[A[i]-L] ← D[A[i]-L]+1;
for(j ← 1 to U-L)  D[j] ← D[j-1]+D[j];
for(i ← n-1 downto 0){ //开始放入数据
        j ← A[i]-L;
        S[D[j]-1] ← A[i];//地址在S[D[j]-1]
        D[j] ← D[j]-1;
}
return S;
```

	D[0..2]			S[0..5]					
A[5] = 12	1	**4**	6				12		
A[4] = 12	1	**3**	6			12			
A[3] = 13	1	2	**6**						13
A[2] = 12	1	**2**	5		12				
A[1] = 11	**1**	1	5	11					
A[0] = 13	0	1	**5**					13	

算法 DistributionCounting(A[0…n-1],l,u)

```
{ //分布计数法对有限范围整数的数组排序
  for(j=0;j <= u-l ;++i)  D[j]=0;//初始化频率数组
  for(i=0;i < n; ++i)     D[A[i]-l]++;//计算频率值
  for(j=1;j <= u-l ; ++j)  D[j]+=D[j-1];//分布值
  for(i=n-1;i>=0;--i){
        j = A[i] – l ;
        S[D[j]-1] = A[i];
        D[j]--;
  }
  return  S;
}
```

➢假设数组值的范围是固定的，那么这是一个线性效率的算法

➢但重点是：除了空间换时间之外，分布技术排序的这种高效是因为利用了输入列表独特的自然属性！

时空权衡

- 7.1 计数排序
- **7.2 串匹配中的输入增强技术**
- 7.3 散列法
- 7.4 B树

7.2 串匹配中的输入增强技术

- 字符串匹配问题：要求在一个较长的n个字符的串（称为**文本**）中，寻找一个给定的m个字符的串（称为**模式**）。
  - 蛮力法：简单地从左到右比较模式和文本中每一个对应的字符，如果不匹配，把文本向右移动一格，再进行下一轮尝试，最差效率为O(nm)，随机文本的平均效率O(n)
  - 输入增强技术：对模式进行预处理以得到它的一些信息，把这些信息存储在表中，然后在给定文本中实际查找模式的时候使用这些信息——Knuth-Morris_Pratt(KMP)算法和Boyer-Moore(BM)算法

7.2 串匹配中的输入增强技术

- Knuth-Morris_Pratt算法和Boyer-Moore算法的主要区别在于：**前者是从左到右，后者是从右到左**
- 但因为后者更简单，所以**我们只考虑Boyer-Moore算法**：
  - 开始的时候把模式和文本的开头字符对齐。如果第一次尝试失败了，把模式向右移。
  - 只是每次尝试过程中的比较是从右向左的，即从模式的最后一个字符开始
  - Horspool算法和Boyer-Moore算法的简化版

7.2 Horspool算法

- 从模式的最后一个字符开始从右向左，比较模式和文本的相应字符
  - 如果模式中所有的字符都匹配成功，就找到了一个匹配子串，就可以停止了
  - 如果遇到一对不匹配的，把模式右移

$s_0 \ldots \quad c \ldots \quad s_{n-1}$

BARBER

7.2 Horspool算法

- 根据对齐模式的**最后一个字符c**的不同情况确定移动的距离：
  - 情况1：模式不存在c，模式安全移动的幅度就是它的全部长度m
  - 情况2：模式存在c，且不是模式末尾字符，移动时把模式中最右的c与文本中的c对齐
  - 情况3：c是模式的最后一个字符，且模式中不包含其他c，移动幅度等于模式长度m
  - 情况4：c是模式的最后一个字符，而模式前m-1个字符中包含c，把模式中前m-1个字符中的c和文本中的c对齐

7.2 Horspool算法

考虑在某些文本中查找模式BARBER

$s_0 s_1$ … c … s_{n-1}

BARBER

$s_0 s_1$ … S … s_{n-1}

BARBER

BARBER

情况1：模式中无c，
移动幅度等于模式长度

$s_0 s_1$ … B … s_{n-1}

BARBER

BARBER

情况2：模式有c且末尾不是c
模式最右c与文本c对齐

$s_0 s_1$ … MER … s_{n-1}

LEADER

LEADER

情况3：模式有c且仅末尾是c
移动幅度等于模式长度

$s_0 s_1$ … OR … s_{n-1}

REORDER

REORDER

情况4:模式有多'R'且末尾是'R'
模式除末尾外最右c与文本c对齐

7.2 Horspool算法

- 比起蛮力法每次只移动一个位置，该算法移动的更远
- 但如果为了移动的更远就需要每次都检查模式中的每个字符，它的优势也会丧失
  - 时空权衡：预先算出每次移动的距离并把它们存在表中，将距离填入表中的单元格中
  - 这个表是以文本中所有可能遇到的字符为索引的
  - 对于每个字符c可用公式算出移动距离：

$$t(c)=\begin{cases}\text{模式的长度m(如果c不包含在模式前m-1个字符中)}\\ \text{模式前m-1个字符中最右边的c到模式最后一个字符的距离}\end{cases}$$

7.2 Horspool算法

- 例如模式为“BARBER”，那么文本中除了E,B,R, A的单元格分别为1,2,3,4外，其他的都为6
- 一个简单的算法用来计算移动表中每个单元格的值：
  - 初始时，把所有的单元格都置为模式的长度m
  - 然后从左到右扫描模式，将下列步骤重复m-1次
    - 对于模式中的第j个字符，将他在表中的单元格改写为m-1-j，这是该字符到模式右端的距离

7.2 Horspool算法

- 第一步：对于给定的长度为m的模式和在模式及文本中用到的字母表，按照上面的描述构造移动表
- 第二步：将模式与文本的开始处对齐
- 第三步：重复下面的过程，直到发现了一个匹配子串或者模式到达了文本的最后一个字符以外。
  - 从模式的最后一个字符开始，比较模式和文本中的相应字符，
  - 直到：要么所有m个字符都匹配（然后停止），要么遇到了一对不匹配的字符。
  - 后者，如果c是当前文本中的和模式的最后一个字符相对齐的字符，从移动表的第c列中取出单元格t(c)的值，然后将模式沿着文本向右移动t(c)个字符的距离

7.2 Horspool算法

```
算法  HorspoolMatching (P[0.. m – 1], T[0..n – 1])
    //实现 Horspool 串匹配算法
    //输入：模式 P[0..m – 1]和文本 T[0..n – 1]
    //输出：第一个匹配子串最左端字符的下标，但如果没有匹配子串，则返回-1
    ShiftTable(P[o..m]−1)                    // 生成移动表
    i ← m−1                                  // 模式最右端的位置
    while i ≤ n−1 do
        k ← 0                                // 匹配字符的个数
        while k ≤ m−1 and P[m−1−k] = T[i−k]
            k ← k+1
        if k = m
            return i−m+1
        else i ← i+Table[T[i]]
    return −1
```

```
算法 ShiftTable(P[0..m-1])
//用Horspool算法和Boyer-Moore算法填充移动表
//输入：模式p[0..m-1]以及一个可能出现字符的字符表
//输出：以字母表中字符为索引的数组table[0..size-1]
把Table中的所有元素初始化为m；
for(j ← 0 to m-2 ) do
    Table[P[j]] ← m-1-j;
return Table;
```

7.2 Horspool算法

字符 *c*	A	B	C	D	E	F	…	R	…	Z	_
移动距离 $t(c)$	4	2	6	6	1	6	6	3	6	6	6

在特定文本中的实际查找是像下面这样的：

```
J I M _ S A W _ M E _ I N _ A _ B A R B E R S H O P
B A R B E R                 B A R B E R
            B A R B E R           B A R B E R
               B A R B E R              B A R B E R
```

- Horspool算法的最差效率Θ(mn)　why? 习题7.2-4
- 对于随机文本，它的效率为Θ(n)

P202 习题7.2-4

4. 用Horspool算法在一个长度为n的文本中查找一个长度为m的模式,请分别给出下面两种例子.

a.最差输入　　b.最优输入

a. 在n个"0"组成的文本中查找"100…0"(长度为m),

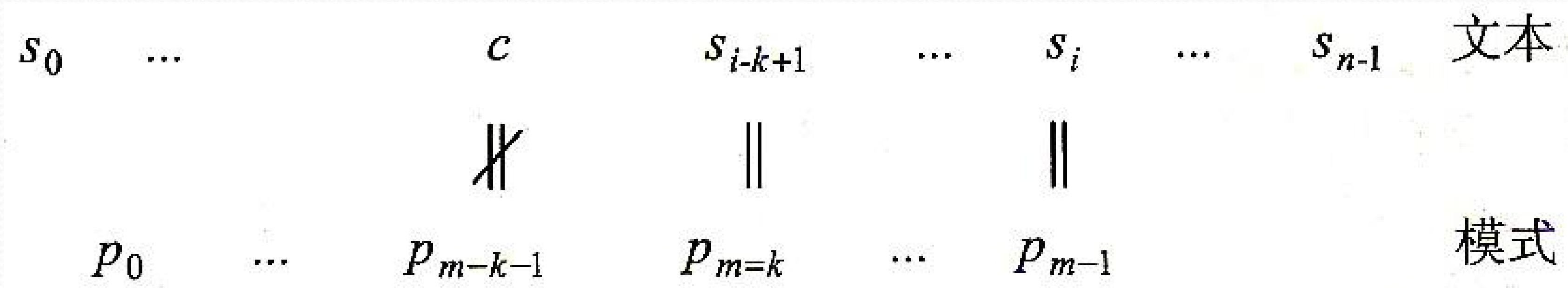
查找次数C(worst)=m(n-m+1)

b. 在n个"0"组成的文本中查找由m个"0"组成的模式,

查找次数C(best)=m

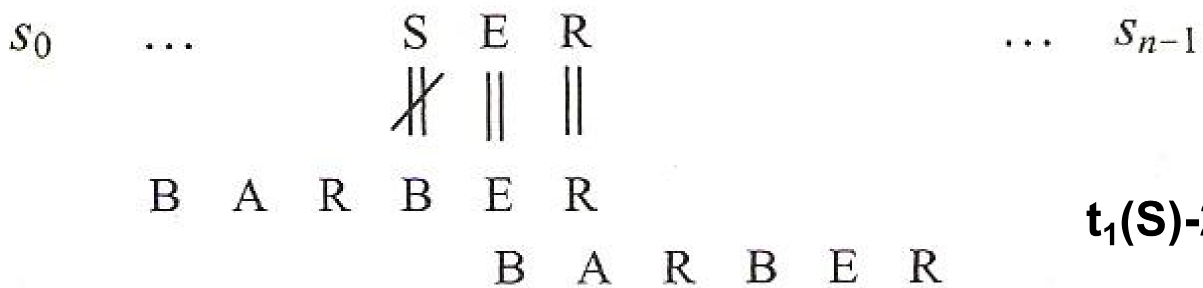
7.2 Boyer-Moore算法

- 如果在遇到一个不匹配字符之前，如果已经有k(0<k<m)个字符匹配成功，则Boyer-Moore算法与Horspool算法处理不同。

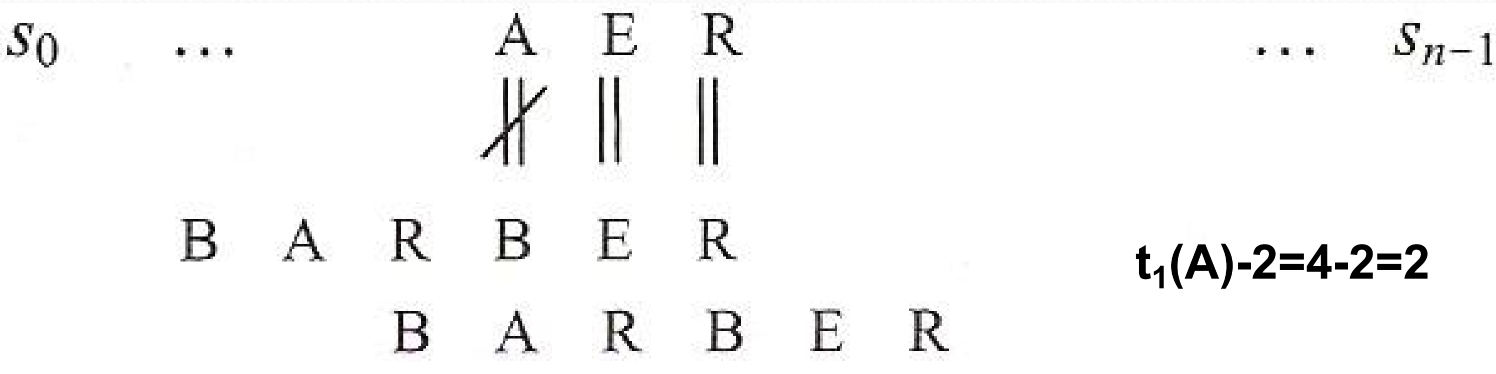


在这种情况下，Boyer-Moore算法参考两个数值来确定移动距离。第一个数值是有文本中的第一个坏字符c所确定，用公式$t_1(c)-k$来计算其中$t_1(c)$是Horspool算法用到的预先算好的值，k是成功匹配的字符个数

7.2 Boyer-Moore算法



$t_1(S)-2=6-2=4$



$t_1(A)-2=4-2=2$

$d_1=\max\{t_1(c)-k,1\}$ 坏符号移动

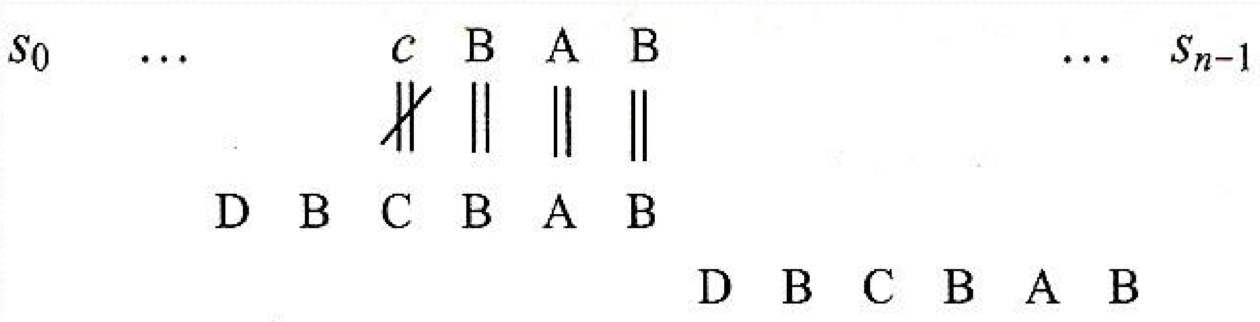
Boyer-Moore算法

- 第二个数值是由模式中最后k>0个成功匹配的字符所确定。称为***<u>好后缀移动</u>***
- 把模式的结尾部分叫做模式的长度为k的后缀，记作suff(k)
- 情况1：当模式中存在两个以上suff(k)的情况时，移动距离d_2就是从右数第二个suff(k)到最右边的suff(k)之间的距离。

k	模式	d_2
1	ABC$\overline{\text{B}}$A$\underline{\text{B}}$	2
2	$\overline{\text{AB}}$CD$\underline{\text{AB}}$	4

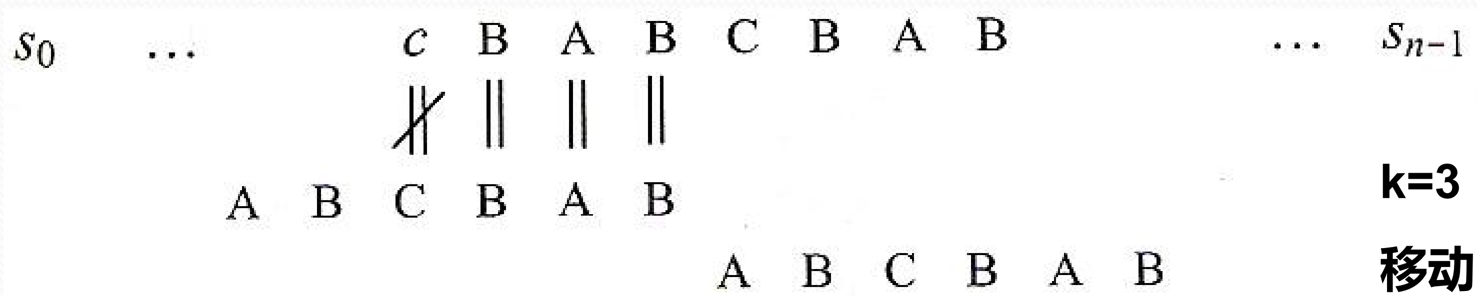
7.2 Boyer-Moore算法

- 情况2：当模式中存在1个suff(k)的情况时：



k=3

移动6



A B C B A B

k=3

移动? 次

6次 or 4次

7.2 Boyer-Moore算法

- 为了避免情况2的出现，我们需要找出长度为l<k的最长前缀，它能够和长度同样为l的后缀完全匹配。
- 如果存在这样的前缀，我们通过求出这样的前缀和后缀之间的距离来作为移动距离d_2的值，否则移动距离就是m

k	模式	d_2
1	$\mathrm{ABC\overline{B}A\underline{B}}$	2
2	$\mathrm{\overline{AB}CB\underline{AB}}$	4
3	$\mathrm{\overline{AB}C\underline{BAB}}$	4
4	$\mathrm{\overline{AB}\underline{CBAB}}$	4
5	$\mathrm{\overline{A}\overline{B}\underline{CBAB}}$	4

7.2 Boyer-Moore算法

Boyer-Moore 算法

第一步：对于给定的模式和在模式及文本中用到的字母表，按照给出的描述构造坏符号移动表。

第二步：按照给出的描述，利用模式来构造好后缀移动表。

第三步：将模式与文本的开始处对齐。

第四步：重复下面的过程，直到发现了一个匹配子串或者模式到达了文本的最后一个字符以外。从模式的最后一个字符开始，比较模式和文本中的相应字符，直到：要么所有 m 个字符都匹配（然后停止），要么在 $k\geq 0$ 对字符成功匹配以后，遇到了一对不匹配的字符。在第二种情况下，如果 c 是文本中的不匹配字符，我们从坏符号移动表的第 c 列中取出单元格 $t_1(c)$的值。如果 $k>0$，还要从好后缀移动表中取出相应的 d_2 的值。然后将模式沿着文本向右移动 d 个字符的距离，d 是按照这个公式计算出来的：

$$d=\begin{cases} d_1 & \text{如果}k=0 \\ \max\{d_1,d_2\} & \text{如果}k>0 \end{cases} \qquad (7.3)$$

其中，$d_1=\max\{t_1(c)-k,1\}$。

7.2 Boyer-Moore算法

- 在一个由英文字母和空格构成的文本中查找BAOBAB

坏符号移动表

c	A	B	C	D	...	O	...	Z	-
$t_1(c)$	1	2	6	6	6	3	6	6	6

好后缀移动表

k	模式	d_2
1	BAOBAB	2
2	BAOBAB	5
3	BAOBAB	5
4	BAOBAB	5
5	BAOBAB	5

B E S S _ K N E W _ A B O U T _ B A O B A B S

B A O B A B

$d_1 = t_1(K) - 0 = 6$ B A O B A B

$d_1 = t_1(\_) - 2 = 4$ B A O B A B

$d_2 = 5$ $d_1 = t_1(\_) - 1 = 5$

$d = \max\{4, 5\} = 5$ $d_2 = 2$

$d = \max\{5, 2\} = 5$

B A O B A B

时空权衡

- 7.1 计数排序
- 7.2 串匹配中的输入增强技术
- **7.3 散列法**
- 7.4 B树

7.3 散列法

- 考虑一种非常高效的实现字典的方法
  - 字典是一种抽象数据类型，即一个在其元素上定义了查找、插入和删除操作的元素集合
  - 集合的元素可以是任意类型的，一般为记录
- 散列法的基本思想是：把键分布在一个称为散列表的一维数组H[0，…，m-1]中。
  - 可以通过对每个键计算某些被称为“散列函数”的预定义函数h的值，来完成这种发布
  - 该函数为每个键指定一个称为“散列地址”的位于0到m-1之间的整数

7.3 散列法

- 散列函数需要满足两个要求:
  - 散列函数需要把键在散列表的单元格中尽可能均匀地分布（所以m常被选定为质数，甚至必须考虑键的所有比特位）
  - 散列函数必须容易计算
- 散列的主要版本:
  - 开散列（分离链）
  - 闭散列（开式寻址）

7.3 散列法——开散列（分离链）

- 键被存储在附着于散列表单元格上的链表中，散列地址相同的记录存放于同一单链表中
- 查找时：首先根据键值求出散列地址，然后在该地址所在的单链表中搜索；
- 例：

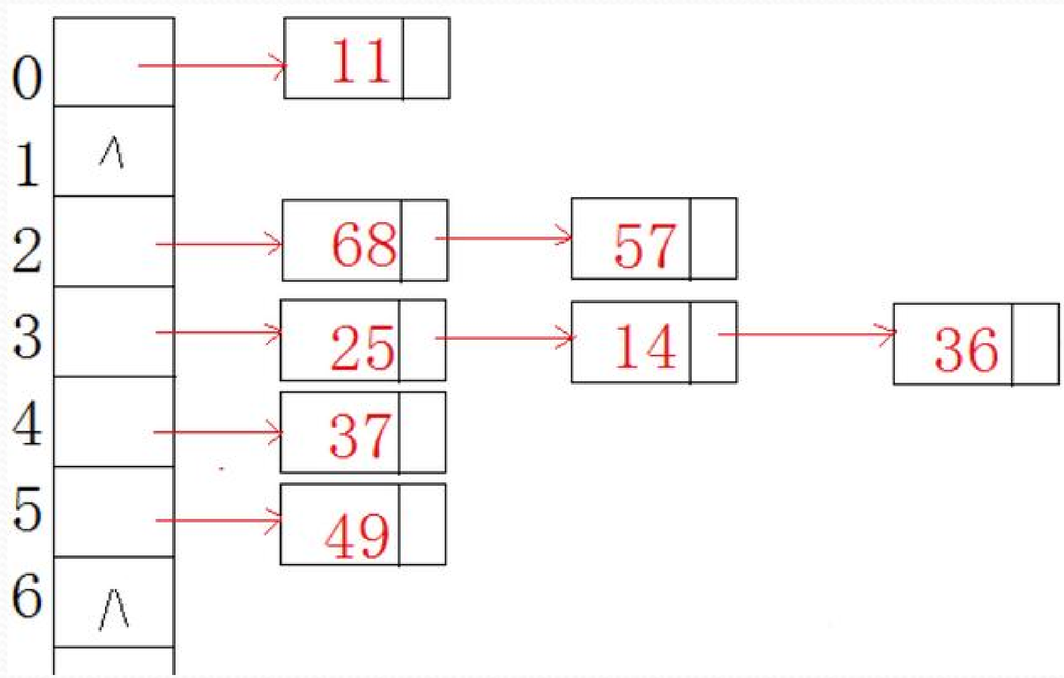
  元素键值为：

  37、25、14、36、49、68、57、11

  散列表为HT[11]

  散列函数为：

  Hash(x) = x % 11



7.3 散列法——开散列（分离链）

- 查找效率取决于链表的长度，而这个长度又取决于字典和散列表的长度以及散列函数的质量

➢成功查找和不成功查找中平均需检查的个数S和U：

$$S \approx 1 + \frac{\alpha}{2} \qquad U = \alpha$$

➢之所以能得到这样卓越的效率，不仅是因为这个方法本身就非常精巧，而且也是以额外的空间为代价的

➢插入和删除在平均情况下都是属于Θ(1)

7.3 散列法——闭散列（开式寻址）

- 所有的键值都存储在散列表本身中，而没有使用链表（这表示表的长度m至少必须和键的数量一样大）
- 解决碰撞：有多种方法，例如线性探测
- 插入和查找：简单而直接
- 删除操作： “延迟删除”，用一个特殊的符号来标记曾被占用过的位置，以把它们和那些从未被用过的位置区别开来

7.3 散列法——闭散列（开式寻址）

- 所有键都存储在散列表本身，采用线性探查解决冲突，即碰撞发生时，如果下一个单元格空，则放下一个单元格，如果不空，则继续找到下一个空的单元格，如果到了表尾，则返回到表首继续。

键	A	FOOL	AND	HIS	MONEY	ARE	SOON	PARTED
散列地址	1	9	6	10	7	11	11	12

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	A								FOOL			
	A								FOOL			
	A					AND			FOOL	HIS		
	A					AND			FOOL	HIS		
	A					AND	MONEY		FOOL	HIS		
	A					AND	MONEY		FOOL	HIS	ARE	
	A					AND	MONEY		FOOL	HIS	ARE	SOON
PAETED	A					AND	MONEY		FOOL	HIS	ARE	SOON

闭散列（开式寻址）

- 闭散列的查找和插入操作是简单而直接的，但是删除操作则会带来不利的后果。
- 比起分离链，现行探查的数学分析是一复杂的多的问题。
- 对于复杂因子为α的散列表，成功查找和不成功查找必须要访问的次数分别为：
  - $S \approx \frac{1}{2}(1+\frac{1}{1-\alpha})$ $U \approx \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right]$
  - 散列表的规模越大，该近似值越精确

时空权衡

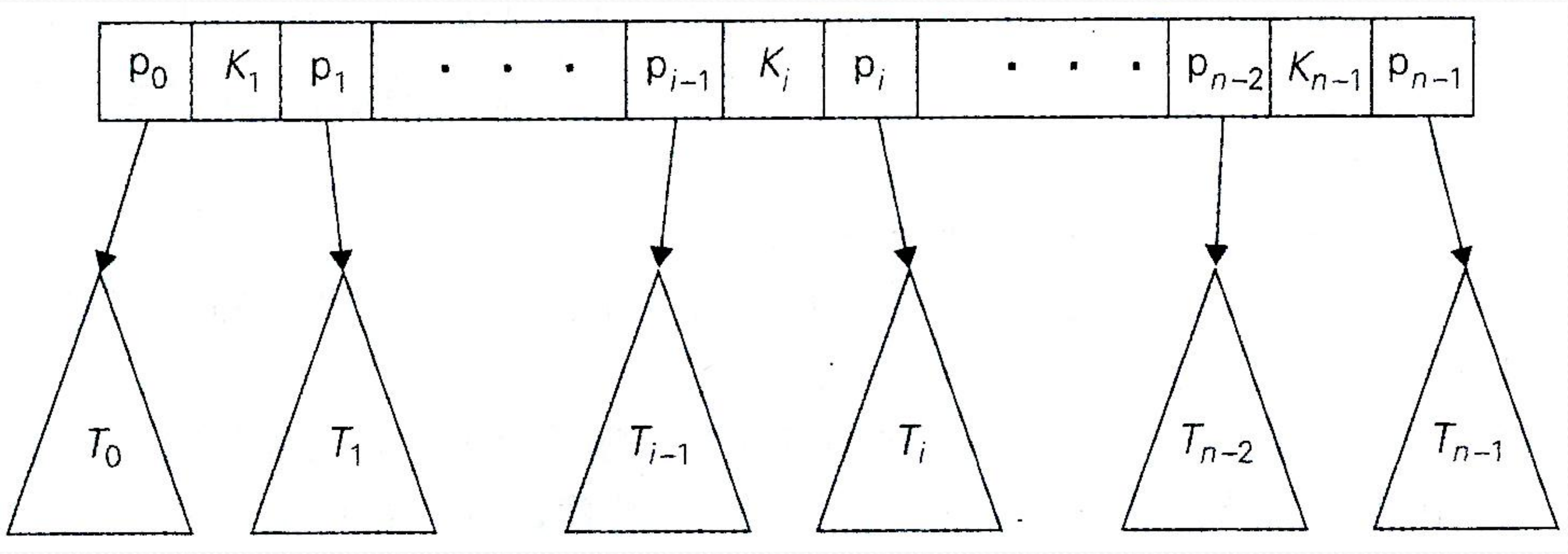
- 7.1 计数排序
- 7.2 串匹配中的输入增强技术
- 7.3 散列法
- **7.4 B树**

7.4 B树

- B树：所有的数据记录（或者键）都按照键的升序存储在叶子中；它们的父母节点作为索引
  - 每个父母节点包含n-1个有序的键$K_1<\ldots<K_{n-1}$
  - 这些键之间有n个指向子女的指针，使得子树T_0中的所有键都小于K_1，子树T_1中的大于等于K_1小于K_2，以此类推

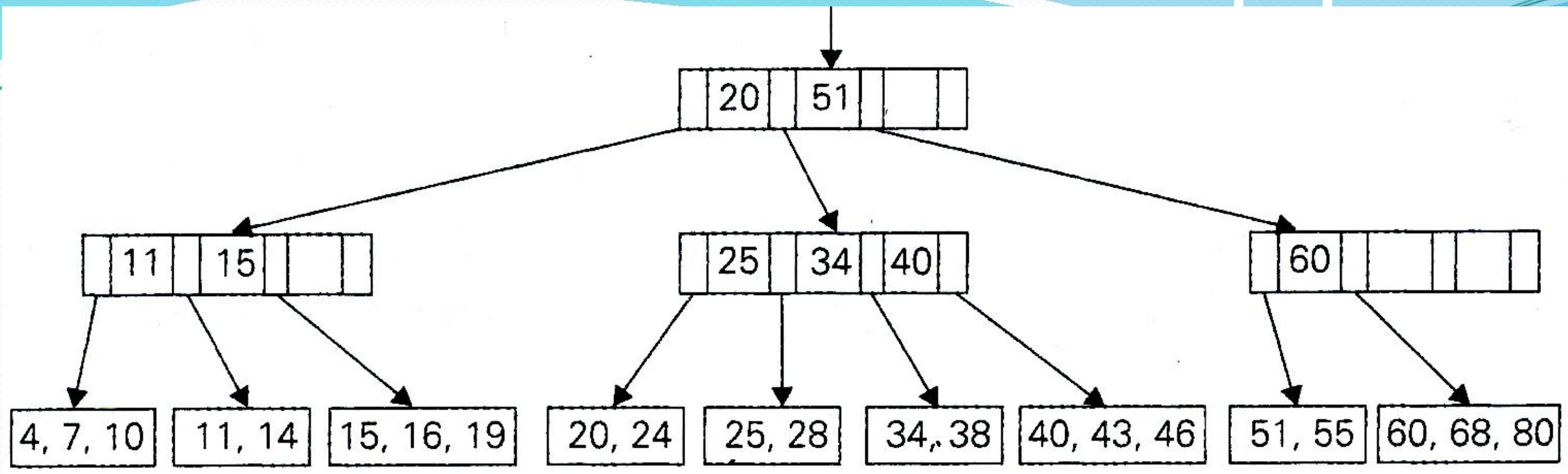
7.4 B树

- 在B树中，所有的数据记录都按照键的增序存储在叶子中，它们的父节点作为索引。



7.4 B树

- 一棵次数为m≥2的B树必须满足下面这些特性：
  - 它的根要么是一个叶子，要么具有2到m个子女
  - 除了根和叶子以外的每个节点，具有m/2到m个子女
  - 这棵树是（完美）平衡的，也就是说，它的所有叶子都是在同一层上



次数为4的B树

- 在查找键给定的某条记录中，需要访问多少个B树的节点?

对于任何包含n个key值、次数为m、高度为h>0的B树来说，有：

$$n \geq 1 + \sum_{i=1}^{h-1} 2\lceil m/2 \rceil^{i-1}(\lceil m/2 \rceil - 1) + 2\lceil m/2 \rceil^{h-1}$$

$$n \geq 4\lceil m/2 \rceil^{h-1} - 1$$

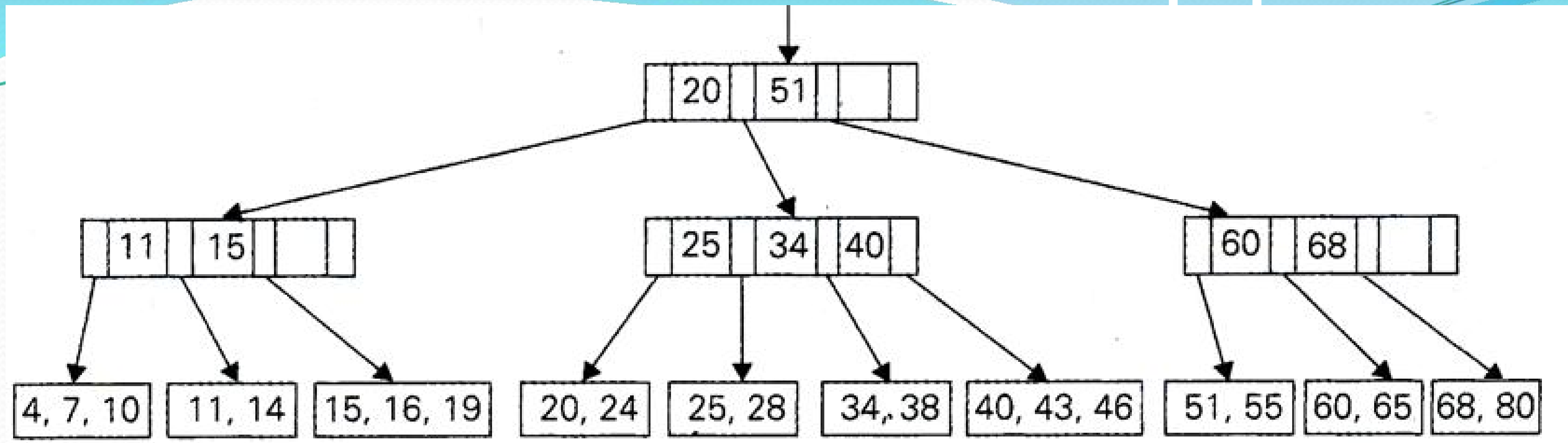
$$h \leq \left\lfloor \log_{\lceil m/2 \rceil} \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 1$$

7.4 B树

应用B树：磁盘访问

- 当一个文件包含 1亿条记录时：

次数	50	100	250
h 上界	6	5	4



- 插入数据
  - 查找到叶节点。
  - 如果叶节点有空隙，插入数据。
  - 如果叶节点没有空隙，叶子分裂。后面叶子的最小key值插入父节点。
  - 向上回溯，分裂树枝，直到树根，如果也满了，树根分裂。

本章小结

- 空间换时间技术有两种主要的类型：**输入增强**和**预构造**。
- **分布计数**是一种特殊方法，用来对元素取值来自于一个小集合的列表排序。
- 串匹配的**Horspool算法**是**Boyer-Moore算法**的简化，都以**输入增强**技术为基础，且从右向左比较模式中的字符。
- **散列**是一种非常高效的实现字典的方法，分为开散列和闭散列，其中必须采用碰撞解决机制。
- **B树**是一棵平衡查找树。