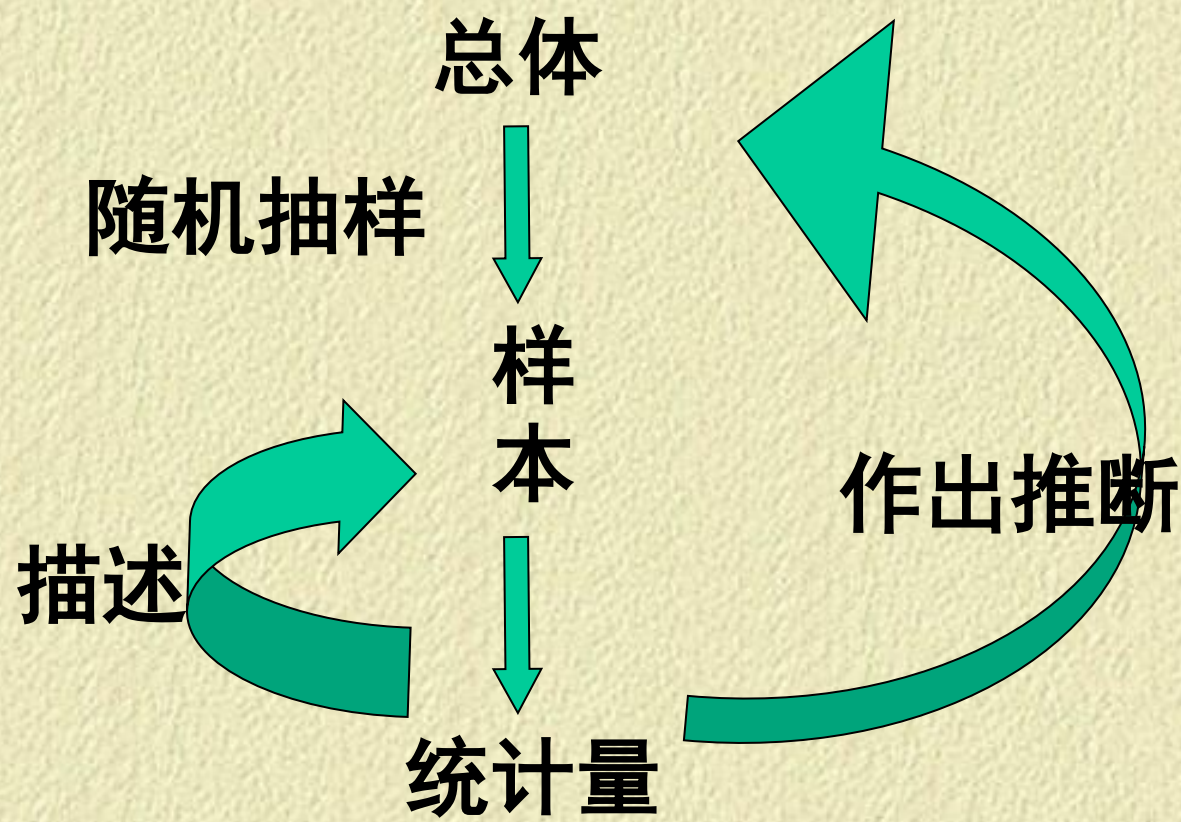


第七章 参数估计

- 矩估计
- 最大似然估计
- 正态总体的区间估计



参数估计

在参数估计问题中，假定总体的分布形式已知，未知的仅仅是一个或几个参数。

参数估计问题是利用从总体抽样得到的样本来估计总体的某些参数或者参数的函数.

例如:从北京理工大学全体学生中抽取 n 个学生
测量身高,估计理工大学学生的平均身高

总体:理工大学全体学生的身高

X :任意一名学生的身高

假定身高 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

其中 μ 表示理工大学学生的平均身高

假设 n 个学生身高为 X_1, X_2, \dots, X_n

由 X_1, X_2, \dots, X_n 估计 μ

上页

下页

返回

参数估计问题的一般提法

设有一个总体 X ，总体的分布函数为 $F(x, \theta)$ ，其中 θ 为未知参数 (θ 可以是向量)。现从该总体抽样，得样本

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

要依据该样本对参数 θ 作出估计，或估计 θ 的某个函数 $g(\theta)$

这类问题称为参数估计。

参数估计

{ 点估计
区间估计

点估计 —— 估计未知参数的值

区间估计 —— 根据样本构造出适当的区间，使他以一定的概率包含未知参数或未知参数的已知函数的真值

上页

下页

返回

假如我们要估计某队男生的平均身高.

(假定身高服从正态分布 $N(\mu, 0.1^2)$)

现从该总体选取容量为5的样本, 我们的任务是要根据选出的样本 (5个数) 求出总体均值 μ 的估计. 而全部信息就由这5个数组成.

设这5个数是: 1.65 1.67 1.68 1.71 1.69

估计 μ 为1.68, 这是点估计.

估计 μ 在区间[1.57, 1.84]内, 这是区间估计.

点估计

定义(估计): 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 X 的简单随机样本, θ 是总体 X 的未知参数. 如果 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是已知函数, 称

$$\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

是 θ 的**估计量**, 简称为**估计**. (*estimator*)
计算后得到的值称为**估计值**.

注意：被估计的参数 θ 是一个未知常数，而**估计量** $\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是一个随机变量，是样本的函数，当样本值取定后，**估计值**是个已知的数值。对于不同的样本值， θ 的估计值一般不同。

矩估计法

矩估计法是英国统计学家**K.皮尔逊**最早提出的



其基本思想是

用样本矩估计总体矩

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 X 的简单随机样本，
已知 X 的分布函数为 $F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$
其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ 是未知参数。

设总体的 k 阶原点矩为 $\mu_k = E(X^k)$,

它们一般均为参数 θ 的函数。另外，

由大数定律

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k - \mu_k\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

自然想到用**样本的 k 阶原点矩**作为
总体 k 阶原点矩的一个估计, 即用

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \text{ 估计 } \mu_k,$$

由此进一步估计未知参数 θ , 这就是
矩估计法.

记总体 k 阶矩为 $\mu_k = E(X^k)$

样本 k 阶矩为 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$

用相应的样本矩去估计总体矩的估计方法就称为矩估计法.

矩估计的具体做法：设

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(\theta_1, \dots, \theta_k) \\ \mu_2 = \mu_2(\theta_1, \dots, \theta_k) \\ \vdots \\ \mu_k = \mu_k(\theta_1, \dots, \theta_k) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \\ \theta_2 = \theta_2(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \\ \vdots \\ \theta_k = \theta_k(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \end{cases}$$

用样本矩 A_1, A_2, \dots, A_k 分别代替上式中的总体矩 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ 得到

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \theta_1(A_1, A_2, \dots, A_k) \\ \hat{\theta}_2 = \theta_2(A_1, A_2, \dots, A_k) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_k = \theta_k(A_1, A_2, \dots, A_k) \end{cases}$$

作为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 的估计量，这种估计量称为矩估计量，矩估计量的观察值称为矩估计值。

例如 若总体只有一个参数

$$\mu = E(X) = \mu(\theta)$$

解得

$$\theta = \theta(\mu)$$

$$\hat{\theta} = \theta(\bar{X})$$

例如 若总体有两个参数

$$\mu_1 = E(X) = \mu_1(\theta_1, \theta_2)$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \mu_2(\theta_1, \theta_2)$$

解得 $\theta_1 = \theta_1(\mu_1, \mu_2)$

$$\theta_2 = \theta_2(\mu_1, \mu_2)$$

$$\hat{\theta}_1 = \theta_1(A_1, A_2) \quad \hat{\theta}_2 = \theta_2(A_1, A_2)$$

$$A_1 = \bar{X}$$

$$A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

例1. 设总体 $X \sim \pi(\lambda)$, X_1, \dots, X_n 是总体 X 的一个样本.

求: λ 的矩估计.

解: 由 $\mu = E(X) = \lambda$

以 $A_1 = \bar{X}$ 代替 μ 得 λ 的矩估计为

$$\hat{\lambda} = \bar{X}$$

例2. 设总体 $X \sim b(m, p)$, 其中 m 已知,

X_1, \dots, X_n 是总体 X 的一个样本.

求: p 的矩估计.

解: 由 $\mu = E(X) = mp$

得到
$$p = \frac{\mu}{m}$$

以 $A_1 = \bar{X}$ 代替 μ 得 p 的矩估计为

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$$

例3. 设总体 $X \sim U[a, b]$, a, b 未知, X_1, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本.

求: a, b 的矩估计量.

解: $\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2},$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + (EX)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4}$$

即

$$\begin{cases} a+b = 2\mu_1 \\ b-a = \sqrt{12(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} a = \mu_1 - \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \\ b = \mu_1 + \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases}$$

分别以 A_1, A_2 代替 μ_1, μ_2 得到 a, b 的矩估计量分别为

$$\hat{a} = A_1 - \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{X} - \sqrt{3\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2\right)}$$

$$= \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{b} = A_1 + \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

例4. 设总体 X 的均值 μ , 方差 σ^2 都存在, 且 $\sigma^2 > 0$,
但 μ , σ^2 未知, 又设 X_1, \dots, X_n 是一个样本.

求: μ, σ^2 的矩估计量.

解:
$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \mu, \\ \mu_2 = E(X^2) = D(X) + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} \mu = \mu_1 \\ \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \end{cases}$$

54页

分别以 A_1, A_2 代替 μ_1, μ_2 , 得 μ 和 σ^2 的矩估计量分别为

$$\hat{\mu} = A_1 = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

特别, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 未知

$$\text{则 } \hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

例5 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha + 1)x^\alpha, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $\alpha > -1$
是未知参数,

X_1, X_2, \dots, X_n 是取自 X 的样本, 求参数 α 的矩估计.

解: $\mu_1 = E(X) = \int_0^1 x(\alpha + 1)x^\alpha dx$
 $= (\alpha + 1) \int_0^1 x^{\alpha+1} dx = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}$

得

$$\alpha = \frac{2\mu_1 - 1}{1 - \mu_1},$$

以 $A_1 = \bar{X}$ 代替 μ_1 得 α 的矩估计为

$$\hat{\alpha} = \frac{2\bar{X} - 1}{1 - \bar{X}}$$

例6. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2} x, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数

- (1) 设 X_1, X_2, X_3 为来自总体的样本，求参数 θ 的矩估计
- (2) 设 0.5, 1, 1.5 是总体 X 的三个样本的观测值，求参数 θ 的矩估计值

解: (1) $\mu_1 = E(X) = \int_0^\theta \frac{2}{\theta^2} x^2 dx = \frac{2}{3}\theta$

$$\theta = \frac{3}{2}\mu_1$$

解得 θ 的矩估 $\hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + X_3)$

(2) θ 的矩估计值为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}(0.5 + 1 + 1.5) = \frac{3}{2}$$

矩估计

优点：直观、简单

缺点：（1）不唯一，如例5

例5. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^\alpha, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

其中 $\alpha > -1$ 是未知参数， X_1, X_2, \dots, X_n 是取自 X 的样本，求(1)参数 α 的矩估计；

可以求总体的二阶矩 μ_2 ，用 A_2 代替 μ_2 得到矩估计。

$$\mu_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = (\alpha+1) \int_0^1 x^{\alpha+2} dx = \frac{\alpha+1}{\alpha+3}$$