

2020 级概率与数理统计试题

(本试卷共 2 页, 八大题, 请将每道题的答案写在答题纸对应的位置上, 并在答题纸上的对应位置写上序号、姓名、学号等信息, 答题纸共 5 页)

附表: $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.64)=0.95$, $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(0.32)=0.6255$, $\Phi(0.8)=0.7881$, $\Phi(1.2)=0.8849$, $\Phi(0.4)=0.6554$, $\Phi(1.8)=0.9641$, $\Phi(8)=1$, $t_{0.05}(8)=1.8595$, $t_{0.05}(9)=1.8331$, $t_{0.025}(8)=2.3060$, $t_{0.025}(9)=2.2622$, $\chi_{0.05}^2(8)=15.507$, $\chi_{0.05}^2(9)=16.919$, $\chi_{0.95}^2(8)=2.733$, $\chi_{0.95}^2(9)=3.325$, $\chi_{0.025}^2(8)=17.535$, $\chi_{0.025}^2(9)=19.023$, $\chi_{0.975}^2(8)=2.180$, $\chi_{0.975}^2(9)=2.700$, $1/\sqrt{10}=0.32$

一、(14 分)

1. 已知 A 、 B 为随机事件, 且 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.6$, $P(AB)=0.4$, 求 $P(\bar{A} \cup B)$.
2. 乒乓球盒中有 10 个球, 其中 8 个新球, 2 个旧球. 第一次比赛时任取 3 个使用, 用后放回 (新球使用一次就成为旧球), 第二次使用时任取 1 个球. (1) 求第二次取到新球的概率; (2) 若已知第二次取到的是新球, 求第一次比赛取到 2 个新球的概率.

二、(14 分)

1. 设一袋子中有 3 个白球 3 个黑球, 连续不放回的从袋子中取球, 每次取 1 个, 直到取到黑球为止, 设此时取到白球的个数为随机变量 X . 求 (1) X 的分布律; (2) X 的数学期望 EX .
2. 随机变量 X 服从数学期望为 $1/2$ 的指数分布, 令 $Y=1-e^{-2X}$. (1) 写出 X 的概率密度函数 $f_X(x)$; (2) 求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

三、(16 分)

1. 命题 A: 若二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 则 X 和 Y 都服从正态分布.

命题 B: 若 X 和 Y 都服从正态分布, 则 (X, Y) 服从二维正态分布.

问: 命题 A 和命题 B 是否成立? 若不成立, 请加一个条件, 使得该命题成立.

2. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 < x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $c > 0$ 为常数. (1) 求常数 c 的值; (2) 求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$; (3) 判断 X 与 Y 是否相互独立? 说明理由; (4) 令 $Z=X+Y$, 求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$.

四、(14 分)

1. 叙述两个随机变量相关系数 ρ 的含义.
2. 命题 A: 若随机变量 X 和 Y 相互独立, 则 X 和 Y 不相关; 命题 B: 若随机变量 X 和 Y 不相关, 则 X 和 Y 相互独立. 问: 命题 A 和命题 B 是否成立? 若不成立, 请举出一个反例.
3. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 1)$, Y 服从方差为 4 的 χ^2 分布. 令 $U = X + Y$, $V = X - Y$. (1) 求 $E(X-2Y)$ 和 $D(X-2Y)$; (2) 求 $E(XY)$ 和 $D(XY)$; (3) 求 U, V 的相关系数 ρ_{UV} ; (4) 判断 U 和 V 是否独立, 说明理由.

五、(8分)

某零件的质量是随机变量,其数学期望为 0.5kg,标准差为 0.1kg,现采用有放回的抽取方式,从一批该零件中随机抽取 100 只.求这 100 只零件的总质量超过 51kg 的概率.

六、(8分)

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 从中抽取一样本 $X_1, X_2, \dots, X_5, X_6$, 记 $\bar{X} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i$, $S^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2$, 令 $T = \frac{X_6 - \bar{X}}{S}$. 求 a 的值, 使得 aT 服从自由度为 4 的 t 分布 (写出求解过程).

七、(14分)

1. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 其中 $\lambda > 0$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 为取自该总体的样本, 现测得样本观测值为

2, 1, 3, 1, 1, 5, 1, 1, 0, 1, 3, 2

求参数 λ 的矩估计值.

2. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为取自概率密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的总体的样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为相应的样本观测值, θ 未知. 求参数 θ 及 $\beta = e^{-1/\theta}$ 的最大似然估计.

3. 设 X_1, X_2, X_3 为取自总体 X 的样本, 总体 X 均值 μ 、方差 σ^2 均存在, 定义两个统计量

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \frac{1}{3} X_3, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2}{3} X_1 - \frac{5}{9} X_2 + \frac{8}{9} X_3. \quad (1) \text{ 证明 } \hat{\mu}_1 \text{ 和 } \hat{\mu}_2 \text{ 都是 } \mu \text{ 的无偏估计; } (2)$$

比较估计量 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 的有效性.

八、(12分)

1. 假设检验中, (1) 若检验的结果是接受了原假设, 则可能犯第几类错误; (2) 若检验的结果是接受了备择假设, 则可能犯第几类错误.

2. 某饮料厂生产罐装饮料, 每罐的重量服从正态分布, 要求其平均重量为 500 毫升, 且已知标准差为 1.2 毫升. 某日开工后, 随机抽取 9 罐装饮料, 测得样本均值 $\bar{x} = 499.5$ 毫升. 设方差不变, 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 问这天罐装饮料是否符合要求?