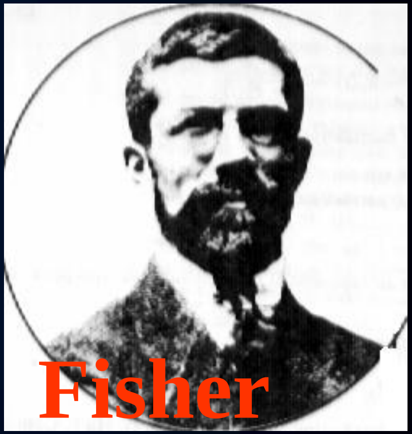
第七章　　参数估计

极大似然法

它首先是由德国数学家高斯在1821年提出的，

然而，这个方法常归功于英国统计学家费歇．

费歇在1922年重新发现了这一方法，并首先研究了这种方法的一些性质．



极大似然法的基本思想

先看一个简单例子：

某位同学与一位猎人一起外出打猎．

一只野兔从前方窜过．

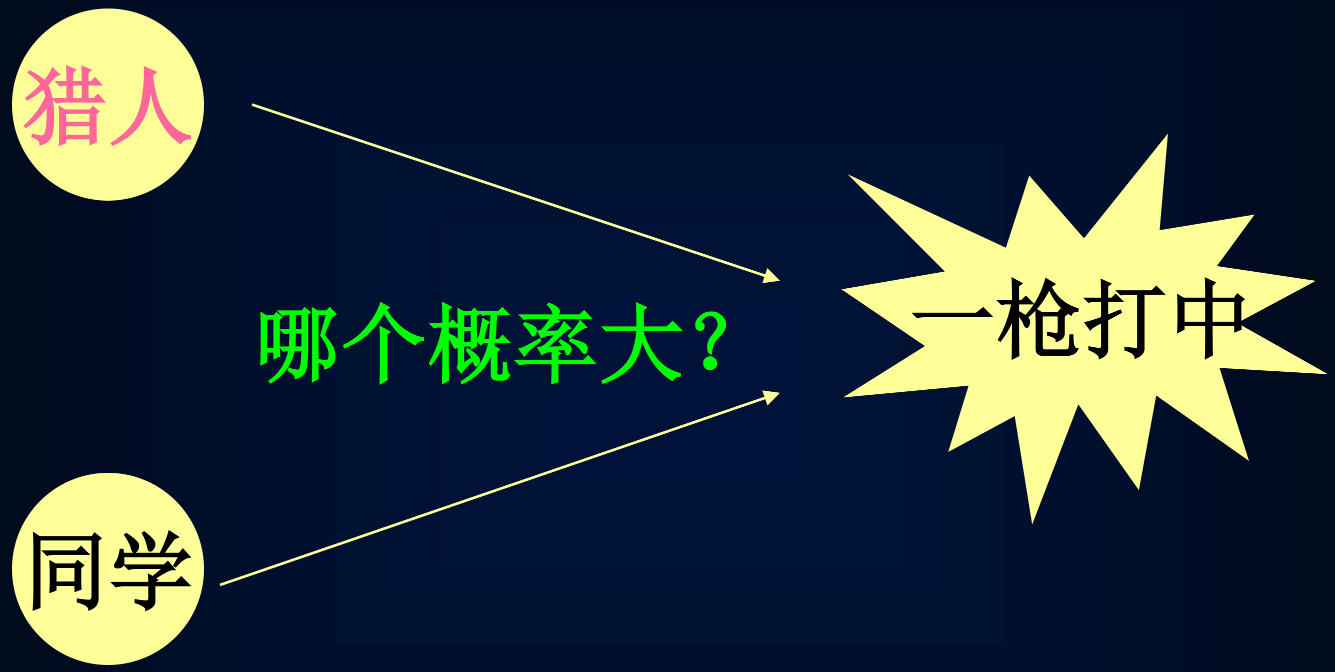
只听一声枪响，野兔应声倒下．

如果要你推测，

是谁打中的呢？

你会如何想呢?

思想方法：一次试验就出现的
事件有较大的概率



猎人命中的概率一般大于这位同学命中的概率. 看来这一枪是猎人射中的 .

其数学模型为

令X为打一枪的中弹数，则$X\sim B(1,p)$, p未知.

设想我们事先知道p只有两种可能:

$$p=0.9 \quad 或 \quad p=0.1$$

要估计总体X的参数p的值

当兔子中弹，即$\{X=1\}$发生了。

若$p=0.9$，则$P\{X=1\}=0.9$;

若$p=0.1$，则$P\{X=1\}=0.1$

当兔子不中弹，即$\{X=0\}$发生了。

若$p=0.9$，则$P\{X=0\}=0.1$;

若$p=0.1$，则$P\{X=0\}=0.9$

现有样本观测值$x=1$, 什么样的参数使该样本值出现的可能性最大呢？

总体的分布函数为 $F(x, \theta)$，其中 θ为未知参数, 现从该总体抽样，得样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 要依据该样本对参数 θ 作出估计，

最大似然估计法的基本思想：

一般地，对于给定的样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 选择参数θ的估计，使得样本在 样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 附近出现 的可能性最大

(1).若总体X属离散型，其分布律$P\{X=x\}=p(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$的形式为已知，θ为待估参数，Θ是θ可能取值的范围。

设$X_1,\cdots,X_n$是来自X的样本, 则$X_1,\cdots,X_n$的联合分布律

$$\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

事件$\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}$发生的概率为:

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta),\ \theta\in\Theta.$$

它是θ的函数, $L(\theta)$称为样本的似然函数.

(2).若总体X属连续型，其概率密度$f(x;\theta),\theta\in\Theta$的形式已知，$\theta$为待估参数;

设$X_1,\cdots,X_n$是来自X的样本, 则$X_1,\cdots,X_n$的联合密度:

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

设$x_1,\cdots,x_n$是相应$X_1,\cdots,X_n$的一个样本值，则随机点$(X_1,\cdots,X_n)$落在$(x_1,\cdots,x_n)$的附近概率

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

考虑函数

$$L(\theta) = L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta),$$

$\boldsymbol{L(\theta)}$称为样本的似然函数.

似然函数

设总体X的概率密度（或概率函数 ）为 $f(x;\theta)$，$\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_m)\in\Theta\subset R^m$，$X_1,\ldots,X_n$为来自总体的样本，则（$X_1,\ldots,X_n$）的密度函数（或概率函数）为

$$f(x_1,x_2\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

若已知样本观测值($x_1,\ldots,x_n$)，则令

$$L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

称其为样本值($x_1,\ldots,x_n$)的似然函数

注意

1　$L(\theta; x_1, \cdots, x_n)$中 θ是自变量，$x_1, \cdots, x_n$是参变量..

2 似然函数

$$L(\theta; x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

表示在参数 θ 下　样本在$x_1, x_2, \cdots, x_n$

附近出现的可能性大小

最大似然估计

如果似然函数 $L(\theta; x_1, \cdots, x_n)$

在 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_m)$ 达到最大值，即

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, \cdots, x_n) = L(\hat{\theta}; x_1, \cdots, x_n)$$

则称 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_m)$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的最大似然估计。

求极大似然估计(MLE)的一般步骤是:

(1) 由总体分布导出样本的似然函数;

(2) 求似然函数$L(\theta)$ 的最大值点(常常转化为求$\ln L(\theta)$的最大值点)，即θ的MLE;

(3) 在最大值点的表达式中, 用样本值代入就得参数的极大似然估计值 .

若 Θ是开集，L 是θ 的可微函数,

解似然方程组

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \qquad r = 1,2,\cdots,k$$

可求得未知参数的极大似然估计 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k)$

例1　设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体 $X\sim B(1,p)$ 的一个样本，求参数p的极大似然估 计.

解:$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$，$x=0,1$

$x_1,x_2,\ldots,x_n$似然函数为:

$$X_i\sim\begin{Bmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{Bmatrix}$$

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$x_i\in\{0,1\},\ i=1,2,\cdots n$$

$$L(p)=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

对数似然函数为:

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln(p)+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)$$

对数似然方程为

$$\boxed{\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)}=0$$

得 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}_n$

容易验证 $\hat{p}=\bar{x}$ 为 $L(p)$ 的最大值点 即为 p 的MLE .

例2设$X_1,X_2,\ldots,X_n$独立同分布，都服从Poisson分布$P(\lambda)$，给定观测数据$x_1,x_2,\ldots,x_n$，试求参数λ的最大似然估计.

解： X的分布列为

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},x=0,1,\cdots$$

因此似然函数为

$$L(\lambda)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$

$$=\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}\cdots\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}e^{-\lambda}$$

对数似然函数为：

$$l(\lambda)=\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln(\lambda)-n\lambda-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i!)$$

令

$$\frac{dl(\lambda)}{dp}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\ =0$$

得 λ 的最大似然估计为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}_n$$

上页 下页 返回

例3. 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2为未知参数，

$x_1,\cdots,x_n$是来自X的一个样本值，

求：μ,σ^2的最大似然估计.

解：X的概率密度为：

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

似然函数为：

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\}$$

对数似然函数为：

$$l(\mu,\sigma^2)=\ln L(\mu,\sigma^2)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial l}{\partial \mu}=0\\[2ex]\dfrac{\partial l}{\partial \sigma^2}=0\end{cases}$

上页 下页 返回

即：$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu] = 0 \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

解得μ和σ^2的最大似然估计为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}_n$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$$

例4 设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体X的一个样本

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ 其中$\theta>0$,

求θ的极大似然估计.

解: $x_1,x_2,\ldots,x_n$似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}$$

$$=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1} \quad (0<x_i<1) \quad 1\le i\le n$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

似然函数为

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

从中解得

$$\hat{\theta} = -n \Big/ \sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

即为θ的MLE .

例5 设总体X的概率分布为

X	0	1	2
P	θ	$1-2\theta$	θ

其中$0<\theta<\frac{1}{2}$为未知参数。今对X进行观 测，得如下样本值

0，1，2，0，2，1

求θ的最大似然估计值。

X	0	1	2
P	θ	$1\text{-}2\theta$	θ

解：样本值 0，1，2，0，2，1似然函数为

$$L(\theta)=P(X_1=0)P(X_2=1)P(X_3=2)$$

$$P(X_4=0)P(X_5=2)P(X_6=1)$$

$$=\theta^4(1-2\theta)^2,$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=4\ln\theta+2\ln(1-2\theta)$$

似然方程为

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{4}{\theta}-\frac{4}{1-2\theta}=0$$

从中解得 $\hat{\theta}=\frac{1}{3}$ 即为$\boldsymbol{\theta}$的**MLE**.

若 L 不是θ 的可微函数, 需用其它方法求极大似然估计.

例6 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自总体 $X \sim U(a, b)$ 的一个样本，求参数a, b的最大似然估计.

解 X 的密度函数为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

似然函数为

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a<x_i<b,\quad i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

上页 下页 返回

$$\ln L(a,b)=\ln\frac{1}{(b-a)^n}=-\ln(b-a)^n$$

$$=-n\ln(b-a)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(a,b)}{\partial a}=\dfrac{n}{b-a}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\ln L(a,b)}{\partial b}=-\dfrac{n}{b-a}=0\end{cases}$$

不能求解。

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_i\le b,\\ & i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令 $x_{(1)}=\min\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$

$x_{(n)}=\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$

因为 $a\le x_1,\cdots,x_n\le b$, 等价于 $a\le x_{(1)},x_{(n)}\le b$,

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, a\le x_{(1)}, b\ge x_{(n)};\\ 0 \quad\quad ,\text{其它}\end{cases}$$

似然函数a 越大, b 越小, L 越大.

取 $\hat{a} = x_{(1)}, \hat{b} = x_{(n)}$

则对满足 $a \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le b$ 的一切a，b，都有

$$\frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{(n)} - x_{(1)})^n}$$

故 $\hat{a} = x_{(1)}, \hat{b} = x_{(n)}$

是 a, b 的最大似然估计值.

练习

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自总体 $X \sim U(0, \theta)$ 的一个样本，求参数θ的最大似然估计.

上页 下页 返回

最大似然估计的不变性

设θ的函数$u=u(\theta),\theta\in\Theta$.假设$\hat{\theta}$是$X$的概率分布中参数$\theta$的最大似然估计. 则$\hat{u}=u(\hat{\theta})$是$u(\theta)$的最大似然估计。

例：正态总体X服从N(μ, σ^2)，

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$ 是σ^2的最大似然估计

故 $$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

是标准差σ的最大似然估计

练习：求$\theta = \dfrac{\sigma}{\mu}$最大似然估计

故 $$\hat{\theta} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\mu}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \,/\, \bar{X}$$

三 估计量的评选标准

对于同一个未知参数，不同的方法得到的估计量可能不同, 于是提出问题

- 应该选用哪一种估计量?
- 用什么标准来评价一个估计量的好坏?

常用标准

(1) 无偏性

(2) 有效性

(3) 一致性

1. 无偏性

定义 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体X 的样本 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体参数θ 的估计量 $E(\hat{\theta})$ 存在, 且对于任意$\theta \in \Theta$ 都有

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$是θ 的无偏估计量.

无偏估计量仅在多次重复使用时才显示其优越性.

关于无偏性的常用结论

设总体 X 的期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$ 存在,

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 X 的一个样本, $n > 1$

(1)样本均值 $\overline{X}$ 是总体期望 $E(X)$ 的无偏估计量

(2) $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是 $D(X)$ 的无偏估计量.

例1 设$X_1, X_2,\ldots, X_n$是来自总体X的样本，且$E(X)=\mu$。以下两个估计是否为μ的无偏估计

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{3}{8}X_2+\frac{1}{8}X_3$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{3}{4}X_2-\frac{1}{12}X_3$$

例2 设总体$X\sim N(\mu, \sigma^2)$，其中参数μ，σ^2未知，试用极大似然估计法求μ，σ^2的估计量，并问是否是无偏估计？若不是，请修正它成为无偏估计。

解 $L(\mu,\sigma^2)$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L=-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)$$

$\boxed{\text{似然方程组为}}$ $\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial \mu}\ln L\right) = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial (\sigma^2)}\ln L\right) = \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - \dfrac{n}{2(\sigma^2)} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$

μ, σ^2 的极大似然估计分别为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

显然 $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{n-1}{n}S^2,$$

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{n-1}{n}E(S^2)\ =\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

将 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 修正为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=S^2$$

例3 设总体X 服从参数为$1/\theta$的指数分布, 概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中, 参数$\theta > 0$ 为未知, $X_1, \ldots, X_n$为来自总体的样本. 试证, $\overline{X}$ 和$nZ=n\{\min(X_1, \ldots, X_n)\}$都是$\theta$的无偏估计.

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

证

故 $E(\overline{X})=E(X)=\theta$

$\overline{\boldsymbol{X}}$ 是θ 的无偏估计量.

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

令 $Z=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

$$F_Z(z)=1-(1-F_X(z))^n=\begin{cases}0 & z<0\\ 1-e^{-\frac{nz}{\theta}} & z\ge 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{nz}{\theta}} & z\ge 0\end{cases}$$

即 $E(nZ)=\theta$

故 nZ 是 θ 的无偏估计量.

back

一个参数往往有不止一个无偏估计，若 $\hat{\theta}_1$和 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，我们可以比较 $D(\hat{\theta}_1)$ 和 $D(\hat{\theta}_2)$ 的大小来决定二者谁更优.

无偏估计以方差小者为好，这就引进了有效性这一概念.

2．有效性

设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, \cdots, X_n)$

都是参数 θ 的无偏估计量，若有

$$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$$

且存在 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ 的情形

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

例4 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为 X 的一个样本密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad \theta>0 \text{ 为常数}$$

由前面例2 可知, $\overline{X}$ 与 $n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 都是 θ 的无偏估计量,问哪个估计量更有效?

解 $D(\overline{X})=\dfrac{\theta^2}{n},$

$$D(Z)=\frac{\theta^2}{n^2}\qquad D(nZ)=\theta^2$$

所以, $\overline{X}$ 比$n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$更有效.

back

3. 一致性 (相合性)

设 $\hat{\theta}$ 为未知参数 θ 的估计量，若对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

则称 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的一致(相合)估计量

一致性估计量仅在样本容量 n 足够大时, 才显示其优越性.

关于一致性的常用结论

设总体的k阶矩存在，则样本的k阶矩是总体k阶矩的一致估计量

back

练习：

设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中α >–1为未知参数。设$x_1,\ldots, x_n$为来自该总体的样本，试求

（1）参数α 的极大似然估计；

（2）参数α 的矩估计。

作业

1，2，4，5，7, 9, 10, 11

请休息片刻

马远　踏歌图