第四章　数 字 特 征

讨论原因:

(1)实际中，有的随机变量的概率分布难确定，有的不可能知道，而它的一些数字特征较易确定。

（2）实际应用中，人们更关心概率分布的数字特征。

（3）一些常用的重要分布，如二项分布、泊松分布、指数分布、正态分布等，只要知道了它们的某些数字特征，就能完全确定其具体的分布。

本章内容

- 随机变量的平均取值 —— 数学期望
- 随机变量取值平均偏离平均值的情况 —— 方差
- 描述两个随机变量之间的某种关系的数 —— 协方差与相关系数

§1 数学期望

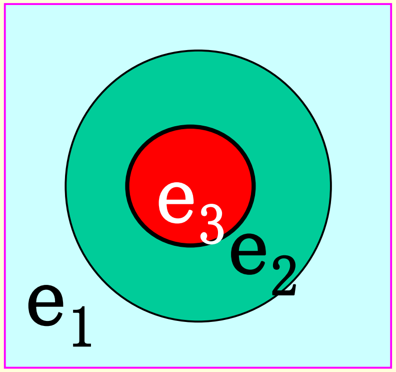
- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量函数的数学期望
- 数学期望的性质　应用

1. 离散性随机变量的数学期望

引例：射手打靶练习

射手每次射击得分数X是随机变量，射击N次，

得1分a_1次，得2分a_2次，得3分a_3次。



总得分sum$=1*a_1+2*a_2+3*a_3$，

每次平均得分

$=sum/N=1*a_1/N+2*a_2/N+3*a_3/N.$

每次平均得分

$=sum/N=1*a_1/N+2*a_2/N+3*a_3/N$

$=\sum k* a_k/N.$

$\{X=k\}$的频率

N充分大

$\sum k*P\{X=k\}$

X取值的平均

定义 1　设离散型随机变量X的分布律为

$$P(X=x_k)=p_k\ ,\ k=1,2,\ldots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ **绝对收敛**，则称它为X的**数学期望**或**均值**，记作 $E(X)$，

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k}$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ 发散，则称X的数学期望不存在.

说明：

（1）随机变量的数学期望是一个**实数**，它体现了**随机变量取值的平均**；

(2)要注意数学期望存在的条件：**绝对收敛**；

(3)当X服从某一分布时，也称某**分布的数学期望**为E(X)．

例1： 设X服从参数为p的0-1分布，求E(X)

例2：设X~B(n, p)，求E(X)

解：$E(X)=\sum_{k=0}^{n}kP(x=k)$

$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$n\binom{n-1}{k-1}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$=np$$

例3： 设X服从参数为λ的泊松分布，求EX。

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots,$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda$$

注意：不是所有的随机变量都有数学期望

例如 $P(X = (-1)^k \frac{2^k}{k}) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1,2,\ldots,$

$E(X)$不存在

例 4

按规定，火车站每天 8:00~9:00，9:00~10:00 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间相互独立，其规律为：

到站时间	8:10,9:10	8:30,9:30	8:50,9:50
概率	1/6	3/6	2/6

(1) 旅客 8:00 到站，求他候车时间的数学期望。
(2) 旅客 8:20 到站，求他候车时间的数学期望。

解：设旅客的候车时间为 X（以分记）

(1) X 的分布律：

X	10	30	50
P	1/6	3/6	2/6

EX=10*(1/6)+30*(3/6)+50*(2/6)=33.33(分)

（2）旅客8：20分到达

X的分布率为

X	10	30	50	70	90
P	3/6	2/6	(1/6)*(1/6)	(3/6)*(1/6)	(2/6)*(1/6)

EX=10*(3/6)+30*(2/6)+50*(1/36) +70*(3/36) +90*(2/36)
=27.22(分)

到站时间	8:10,9:10	8:30,9:30	8:50,9:50
概率	1/6	3/6	2/6

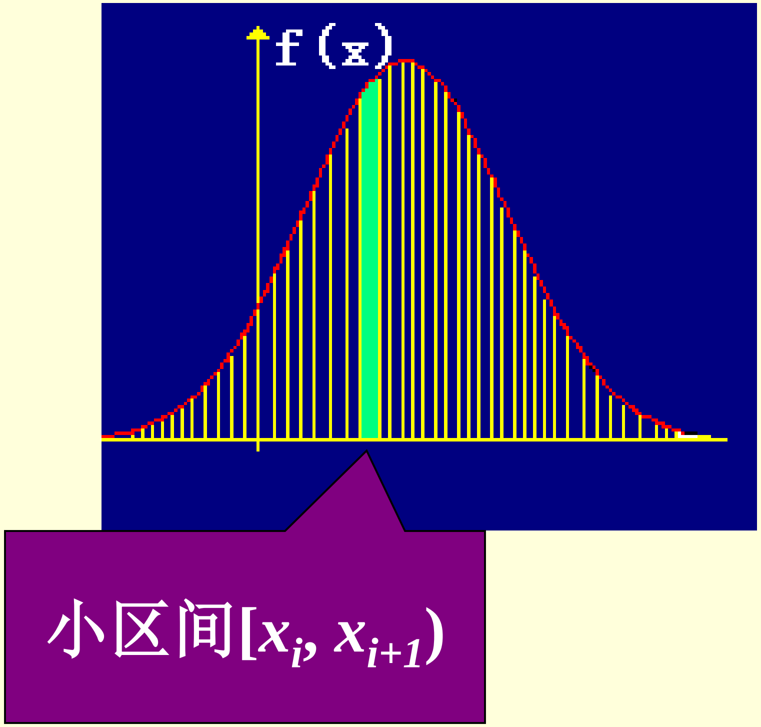
2. 连续型随机变量的数学期望

设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$，在数轴上取很密的分点$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$，则X落在小区间$[x_i, x_{i+1})$的概率是

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= f(x_i)\Delta x_i$$



由于x_i与x_{i+1}很接近, 所以区间$[x_i, x_{i+1})$中的值可以用x_i来近似代替.

因此X与以概率 $f(x_i)\Delta x_i$ 取值x_i的离散型$r.v$近似，该离散型$r.v$ 的数学期望是

$$\sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i$$

这正是 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ 的渐近和式.

定义2　设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$,如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

绝对收敛, 定义X的数学期望为

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}$$

例5：设X服从U[a, b]，求E(X)。

例6：设X服从参数为λ的指数分布，求E(X)

例7：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求E(X).

解：$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})dx$$

设 $\frac{x-\mu}{\sigma}=y$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})dy$$

$$=\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})dy$$

$$+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y\exp(-\frac{y^2}{2})dy$$

$$=\mu$$

注意：不是所有的随机变量都有数学期望

例如：**Cauchy分布**的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\qquad -\infty<x<+\infty$$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$ 发散

它的数学期望不存在

常见随机变量的数学期望

分布	概率分布	期望
参数为*p* 的 0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	$\boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{B(n,p)}$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	$\boldsymbol{np}$
$\boldsymbol{\pi(\lambda)}$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	$\boldsymbol{\lambda}$

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$1/\lambda$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

3　随机变量函数的数学期望

问题:　求Y=g(X)的数学期望

方法一:　**根据定义**

根据$g(X)$的分布，求出对应的期望$E[g(X)]$.

方法二： **直接求**

设Y =g(X),若离散型随机变量X的分布律为

P(X=x_k)=p_k , k=1,2,..., 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

绝对收敛， 则Y的数学期望存在，且为此级数.

例8. 设离散型随机向量X的概率分布如下表所示，求：$Z=X^2$的期望.

X	0	−1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

解： $E(Z)=\ g(0)\times 0.5\ +\ g(-1)\times 0.25\ +$
$g(1)\times\quad 0.25$

$=0.5$

注：这里的 $g(x)=x^2$.

设Y =g(X),若连续型随机变量X的概率密度为f(x),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

绝对收敛， 则Y的数学期望存在，且为此积分。

例9. 设$X \sim U[0, \pi]$，$Y = \sin X$，求 $E(Y)$。

解： X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & 0 \le x \le \pi\,; \\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

所以

$$EY = E[\sin X]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \cdot f(x)dx = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \frac{1}{\pi} dx$$

$$= \frac{-1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

例10.在随机服务系统中，等待时间可以认为服从指数分布。现已知人们在某银行办理业务的等待时间X（单位：分钟）服从期望为15的指数分布。某人到银行办理业务，由于办理银行业务后还需要去办另外一件事情，故此人先等待，如果20分钟后没有等到自己办理业务就离开银行。设此人在银行的实际等待时间为Y，求此人实际等待时间的平均值。

解：易知Y和X的关系为$Y=min(X,20)$。

X的密度函数为
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$Y=min(X,20)$。

由定理2知

$$E(Y)=E(\min(X,20))=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,20)f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\min(x,20)\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}dx$$

$$=\int_{0}^{20}x\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}dx+\int_{20}^{+\infty}20\times\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}dx=15(1-e^{-\frac{4}{3}})\approx 11.04$$

注意：可以证明实际等待时间Y不是连续型随机变量，从而Y没有密度函数，故不能先求分布函数，然后用分布函数的导数的积分的方法求EY。

设二维随机变量（X ,Y)的函数Z=g(X,Y)，若二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$P(X=x_i, Y=y_j)=P_{ij}$， i,j=1,2,... 且有级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

绝对收敛，则Z的数学期望存在，且为此级数.

注意： $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}$$

例11. 设二维离散型随机向量(X, Y)的概率分布如下表所示，求：$Z=X^2+Y$的期望.

Y / X	1	2
1	1/8	1/4
2	1/2	1/8

解：

$$E(Z)= g(1,1)\times 0.125 + g(1,2)\times 0.25 + g(2,1)\times 0.5 + g(2,2)\times 0.125 = 4.25$$

注：这里的 $g(x,y)=x^2+y.$

若二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为 f (x,y)，并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

绝对收敛，则Z的数学期望存在，且为此积分

注意：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$$

例12 某水果商店，冬季每周购进一批苹果。已知该店一周苹果销售量X(单位:kg)服从U[1000,2000]。购进的苹果在一周内售出，1kg获纯利1.5元；一周内没售出，1kg需付耗损、储藏等费用0.3元。问一周应购进多少千克苹果，商店才能获得最大的平均利润。

设购进y(kg)苹果，获利数为$Q_y(X)$,

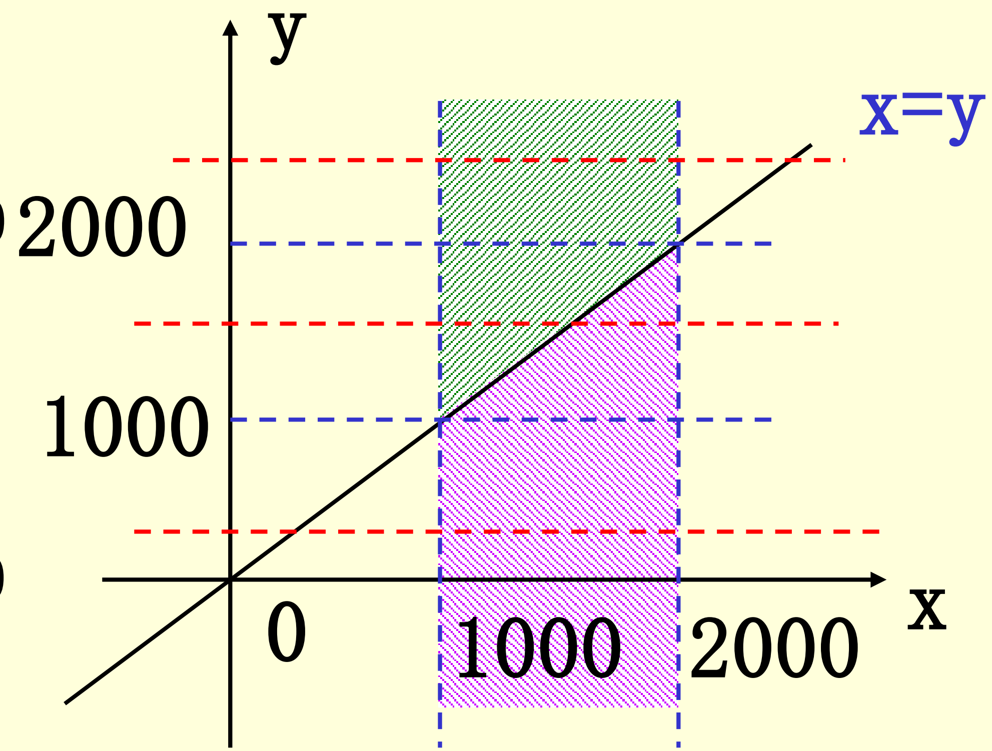
$$Q_y(X)=\begin{cases}1.5X-0.3(y-X) & y>X\\ 1.5y & y\le X\end{cases}$$

解　设购进y(kg)苹果，获利数为$Q_y(X)$,

$$Q_y(X)=\begin{cases}1.5X-0.3(y-X) & y>X\\ 1.5y & y\le X\end{cases}\qquad Q_y(x)=\begin{cases}1.8x-0.3y & y>x\\ 1.5y & y\le x\end{cases}$$

$$EQ_y(X)=\int_{-\infty}^{\infty}Q_y(x)f(x)dx$$

$$Q_y(x)f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1000}[1.8x-0.3y] & y>x \quad 1000<x<2000\\ \dfrac{1.5y}{1000} & y\le x \quad 1000<x<2000\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



$$
=\begin{cases}
\int_{1000}^{2000} 1.5y \cdot \frac{1}{1000}\,dx = 1.5y & y \le 1000 \\
\int_{1000}^{y} [1.5x - 0.3(y-x)] \frac{1}{1000}\,dx + \int_{y}^{2000} 1.5y \cdot \frac{1}{1000}\,dx & \\
= \frac{-0.9y^2 + 3300y - 900000}{1000} & 1000 < y < 2000 \\
\int_{1000}^{2000} [1.5x - 0.3(y-x)] \frac{1}{1000}\,dx = 2700 - 0.3y & y \ge 2000
\end{cases}
$$

$$
y = -\frac{3300}{2 \cdot (-0.9)} \approx 1833
$$

例13 设二维连续随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2,0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X), E(Y), E(X+Y), E(XY)$

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}xdx\int_0^1(1+3y^2)dy=\frac{4}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\frac{1}{4}xdx\int_0^1 y(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}$$

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

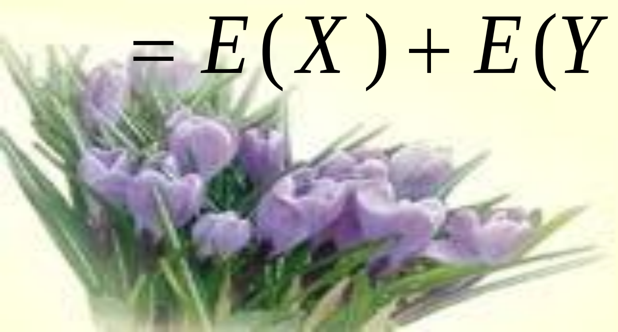
$$=\int_0^2[\int_0^1(x+y)\frac{1}{4}x(1+3y^2)dy]dx$$

$$=\int_0^2[\int_0^1 x\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)dy]dx$$

$$+\int_0^2[\int_0^1 y\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)dy]dx$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{5}{8}=\frac{47}{24}$$

$$=E(X)+E(Y)$$



$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(xy)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}xdx\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}(1+3y^2)dy$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{6}$$

$$=E(X)\cdot E(Y)$$

第四章

作业1： 2,8,12,18,21,26

4　数学期望的性质

(1)　设C为常数，则有E(C)=C

(2) 设C为常数，X为随机变量，则有

E(CX)=CE(X)

(3) 设X, Y为任意两个随机变量，则有

E(X+Y)=E(X)+E(Y)

推广

$$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n).$$

$$E(a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n)$$

$$=a_1E(X_1)+a_2E(X_2)+\ldots+a_nE(X_n).$$

(4) 设X, Y为相互独立的随机变量，则有

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

推广

设$X_1,\ldots,X_n$为相互独立的随机变量，则有

$$E(X_1X_2\ldots X_n)=E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n).$$

(5) 若随机变量几乎处处只取非负值，即

$$X \geq 0, \quad \text{a.e.}$$

又$E(X)$存在，则$E(X) \geq 0$。

推论：若$X \leq Y$，a.e., $E(X)$，$E(Y)$都存在，则

$$E(X) \leq E(Y)$$

特别地，若$a \leq X \leq b$，a.e., a，b为常数，则$E(X)$存在，且

$$a \leq E(X) \leq b$$

注 **性质 4 的逆命题不成立，即**

若$E(XY) = E(X)E(Y)$，X,Y不一定相互独立

反例

$Y \backslash X$ (p_{ij})	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
0	$1/8$	0	$1/8$	$2/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
$p_{i\cdot}$	$3/8$	$2/8$	$3/8$	

XY	-1	0	1
P	$2/8$	$4/8$	$2/8$

$$E(X)=E(Y)=0; \qquad E(XY)=0;$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

但 $$P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}$$

$$\neq P(X=-1)P(Y=-1)=\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

5 数学期望性质的应用

例11 设X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

其中a, b为常数，且E（X）=3/5。求a, b的值。

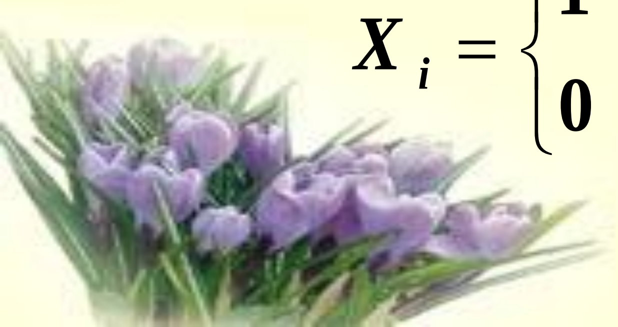
例14 求二项分布的数学期望

若 $X\sim B(n, p)$,

则 X 表示n重贝努里试验中的“成功”次数.

若设

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次试验成功}\\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败}\end{cases}\qquad i=1,2,\ \dots,\ n$$



则 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

因为 $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

所以 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

例 15

一民航送客载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以 X 表示停车的次数。

求 EX（设每个旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）。

解：设 $X_i=\begin{cases}0, \text{第}i\text{站没人下车}\\1, \text{第}i\text{站有人下车}\end{cases}$，$i=1,2,\cdots,10$，

易见 $X=X_1+\cdots+X_{10}$，$EX=\sum_{i=1}^{10}EX_i$，

$P\{X_i=0\}=(9/10)^{20}$，$P\{X_i=1\}=1-(9/10)^{20}$，$i=1,\cdots,10$，

$EX_i=1-(9/10)^{20}$，$i=1,\cdots,10$，

$EX=10[1-(9/10)^{20}]=8.784(\text{次})$。

例16 设一批同类型的产品共有N件，其中次品有M件。今从中任取n(假定$n \le N-M$)件，记这n件中所含的次品数为X，求E(X)

解：若设

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次抽到次品}\\ 0 & \text{如第}i\text{次抽到合格品}\end{cases} \quad i=1,2，\ldots，n$$

则 $X= X_1+X_2+\ldots+X_n$

$$P(X_i=1)=\frac{M}{N} \qquad P(X_i=0)=1-\frac{M}{N}$$

$$E(X_i)=1\cdot P(X_i=1)+0\cdot P(X_i=0)=\frac{M}{N}$$

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{nM}{N}$

例17. 验血方案的选择

为普查某种疾病，n个人需验血。有如下两种验血方案：

（1）分别化验每个人的血，共需化验n次；

（2）分组化验。每k个人分为1组，k个人的血混在一起化验，若结果为阴性，则只需化验一次；若为阳性，则对k个人的血逐个化验，找出有病者，此时k个人的血需化验$k+1$次。

设：每个人血液化验呈阳性的概率为p，且每个人化验结果是相互独立的。试说明选择哪一方案较经济。

解：只需计算方案（2）所需化验次数X的期望。

为简单计，不妨设n是k的倍数，共分成 $j=n/k$组。

设第i 组需化验的次数为X_i，则其分布律为

X_i	1	$k+1$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

$$E(X_i)=1\times(1-p)^k+(k+1)\times[1-(1-p)^k]\quad=(k+1)-k(1-p)^k$$

方案2需要化验的总次数为 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_j$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{j}E(X_i)=\frac{n}{k}[(k+1)-k(1-p)^k] = n[1-((1-p)^k-\frac{1}{k})]$$

若 $(1-p)^k-\frac{1}{k}>0,$ 则$E(X)<n$，即方案2优于方案1

如：$n=1000$, $p=0.001$, $k=10$

$$E(X)=1000[1-(0.999^{10}-\frac{1}{10})]\approx 110 << 1000.$$