二维分布函数： $F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$.

1° $F(x_1,y)\le F(x_2,y)$ $\quad x_1<x_2$

$F(x,y_1)\le F(x,y_2)$ $\quad y_1<y_2$

2° $0\le F(x,y)\le 1$

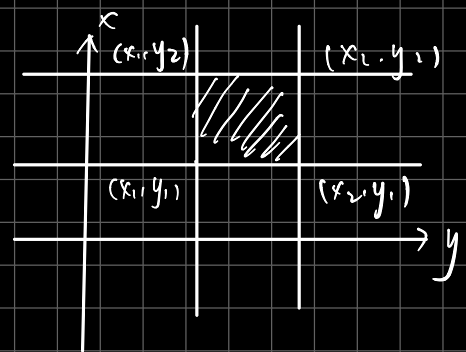
$F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x,y)=0$.

$F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to\infty}F(x,y)=0$

$F(-\infty,-\infty)=0 \quad F(+\infty,+\infty)=1$

3° $F(x+0,y)=F(x,y) \quad F(x,y+0)=F(x,y)$

4°



边缘分布: $F_X(x)=F(x,+\infty)$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)$

离散型: Σ

连续型: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \quad F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)dx$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx. \quad F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)dy$

常见二维随机变量: • 二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_G}, & (x,y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases}$$

• 二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]}$$

$-1<\rho<1$

若 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

则 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$　$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布

且不依赖参数 ρ.

二维随机变量独立性:　$P\{X\le x, Y\le y\} = P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$ 　充要.

$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ ★

边缘分布.

- 针对离散型　$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$

  $i,j=1,2,\dots$

- 针对连续型　$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$　几乎处处成立.

$\rho=0 \Leftrightarrow$ 二维正态随机变量 (X,Y) 独立.

- 若 $(X_1,X_2,\dots,X_m)$ 与 $(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$ 相互独立.

  则 X_i $(i=1,2,\dots,m)$ 与 Y_j $(j=1,2,\dots,n)$ 相互独立.

  若 h,g 是连续函数, 则 $h(X_1,X_2,\dots,X_m)$ 与 $g(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$ 相互独立

  常数与任何随机变量独立.

联合分布 & 边缘分布:　联合分布 $\xrightarrow[\text{确定}]{\text{唯一}}$ 边缘分布

若 X,Y 独立, 则 边缘分布 $\xrightarrow[\text{确定}]{\text{唯一}}$ 联合分布.

$Z = X+Y$:

- $X\sim P(\lambda_1)$　$Y\sim P(\lambda_2)$　$X\ Y$ 相互独立

  $Z = X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

  $$P\{Z=n\} = \sum_{k=0}^{n} P\{X=k\}P\{Y=n-k\}$$

  $$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

  $$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}$$

  $$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$$ (二项式定理)

- $X\sim B(n_1,p)$　$Y\sim B(n_2,p)$　$X\ Y$ 相互独立

$Z=X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$

- 连续型计算步骤

(1) 求 $Z=\varphi(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}$$
$$=P\{\varphi(X,Y)\le z\}$$
$$=\iint\limits_{\varphi(x,y)\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

(2) 求 $Z=\varphi(X,Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$

$Z=X+Y$ 公式：

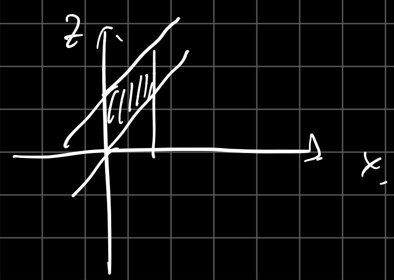
$$F_Z=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$
$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$u=x+y$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z} f(x,u-x)\,du\right)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\,dx\right)du$$

$$\rightarrow f_Z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\,dx$$
$$\rightarrow F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\,du$$

结论：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$

$0\le z-x\le 10 \quad z-10\le x\le z$



☆ 注意定义域

$Z = \max\{X, Y\}$: $\quad P\{\max\{X,Y\} \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\}$.

$= P\{X \le z\} \cdot P\{Y \le z\}$ （X, Y 相互独立）.

$Z = \min\{X, Y\}$: $\quad P\{\min\{X,Y\} \le z\} = 1 - P\{\min\{X,Y\} > z\}$

$= 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\}$. （$X$, Y 相互独立）.

$= 1 - (1 - P\{X \le z\}) \cdot (1 - P\{Y \le z\})$.

$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \beta \cdot e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$Z = X + Y$.

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx$.

$f_Y(z-x) = \begin{cases} \beta \cdot e^{-\beta(z-x)}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$f(x, z-x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha x} \cdot \beta \cdot e^{-\beta(z-x)}, & x > 0,\ z > x. \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$f_Z(z) = \int_0^z e^{-\beta z} \alpha\beta \cdot e^{-(\alpha-\beta)x}\,dx$

$= e^{-\beta z} \cdot \alpha\beta \cdot -\frac{1}{\alpha-\beta} \cdot e^{-(\alpha-\beta)x} \Big|_0^z$

$= e^{-\beta z} \cdot \alpha\beta \cdot -\frac{1}{\alpha-\beta} (e^{-(\alpha-\beta)z} - 1)$

$= \alpha\beta(-\frac{1}{\alpha-\beta}) \cdot (e^{-\alpha z} - e^{-\beta z})$.

$= -\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \cdot (e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}$