第二章　随机变量及其分布

- 随机变量
- 离散型随机变量的概率分布
- 随机变量的分布函数
- 连续型随机变量的概率密度
- 随机变量的函数的分布

§2.1 随机变量

- 随机变量产生
- 随机变量意义
- 随机变量分类

随机变量概念的产生

在实际问题中，随机试验的结果可以用数量来表示，由此就产生了随机变量的概念.

例1 对于某型电子元件，任抽一件，观测其寿命。

样本空间，$S=\{ t; t\geq 0)$

定义映射

$$X: \quad S \to R$$

$$t \to t$$

也称X为任抽该型一电子元件，该电子元件的寿命。

例2掷一枚硬币，观察其正面朝上的情况

样本空间，S={正面，反面）

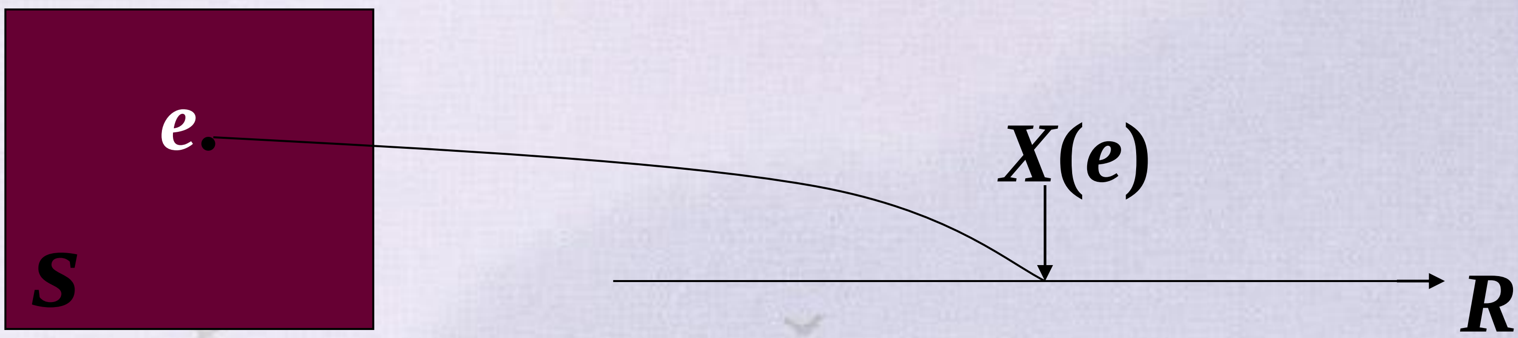
定义映射

X： $S \to R$

满足 X(正面）=1，X（反面）=0

也称X为掷一枚硬币，其正面朝上的次数。

这种对应关系在数学上理解为定义了一种实值函数.



随机变量

设(S，$\mathfrak{I}$，P)是一概率空间，若X为样本空间

S上的函数：　　X：$S \to R^1$

$$\omega \to X(\omega)$$

满足：$\forall x \in R^1$,有

$$\{\omega: X(\omega) \le x\} \in \mathfrak{I}$$

则称$X(\omega)$为(S, $\mathfrak{I}$, P)上的一个随机变量。

随机变量与一般实函数的差别：

1 X 取值具有随机性。我们可以求它取某一值或取值落入某一集合的概率。如

$$P(\omega: X(\omega)=1)=P(X=1),$$

$$P(\omega: X(\omega)\in L)=P(X\in L)。$$

2 定义域不同

随机变量通常用大写字母X,Y,Z或希腊字母ζ,η等表示

而表示随机变量所取的值时,一般采用小写字母x,y,z等.

引入随机变量的意义

- 有了随机变量,随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来.

例如，若用X 表示电话总机在9:00~10:00接到的电话次数，X=0,1,2,…

则 $\{X > 100\}$

—— 表示“某天9:00 ~ 10:00 接到的电话次数超过100次”这一事件

注意 X 的取值是可列无穷个！

随机事件是从静态的观点来研究随机现象，而随机变量则是一种动态的观点

例如 从某一学校随机选一学生，测量他的身高.

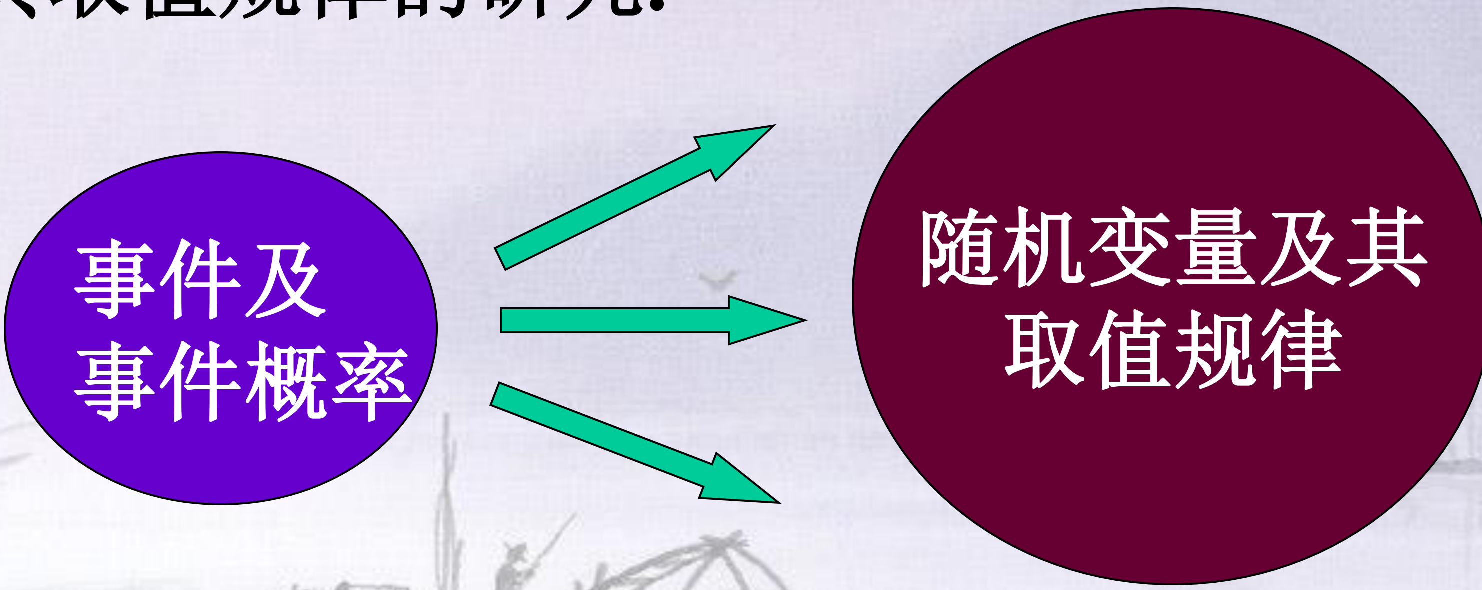
我们可以把可能的身高看作随机变量X,

然后我们可以提出关于X的各种问题.

如 $P(X\geq 1.7)=?$ $P(X\leq 1.5)=?$

$P(1.5<X<1.7)=?$ …

随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件．引入随机变量后，对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究扩大为对随机变量及其取值规律的研究.



随机变量的分类

通常分为两类：

随机变量

- 离散型随机变量：所有取值可以逐个一一列举
- 连续型随机变量：全部可能取值不仅无穷多，而且还不能一一列举，而是充满一个区间.

§2.2 离散型随机变量 及其分布律

定义

若随机变量型 X 所有可能的取值为有限个或可列个，则称X为离散型随机变量。

离散型随机变量的分布

定义：

若随机变量X所有可能的取值为x_1, x_2， …，x_n， …， 且X 取这些值的概率为

$$P(X=x_i)= p_i\ , i=1, 2, \ldots \quad (2.1)$$

则称（2.1）式为离散型随机变量X 的概率分布, 称 $\left\{p_k\right\}$ 是概率分布律(列)， 简称为分布律(列)

分布列的三种表示方法

公式法 $P(X=x_i)=p_i\ ,\ i=1, 2, \ldots$

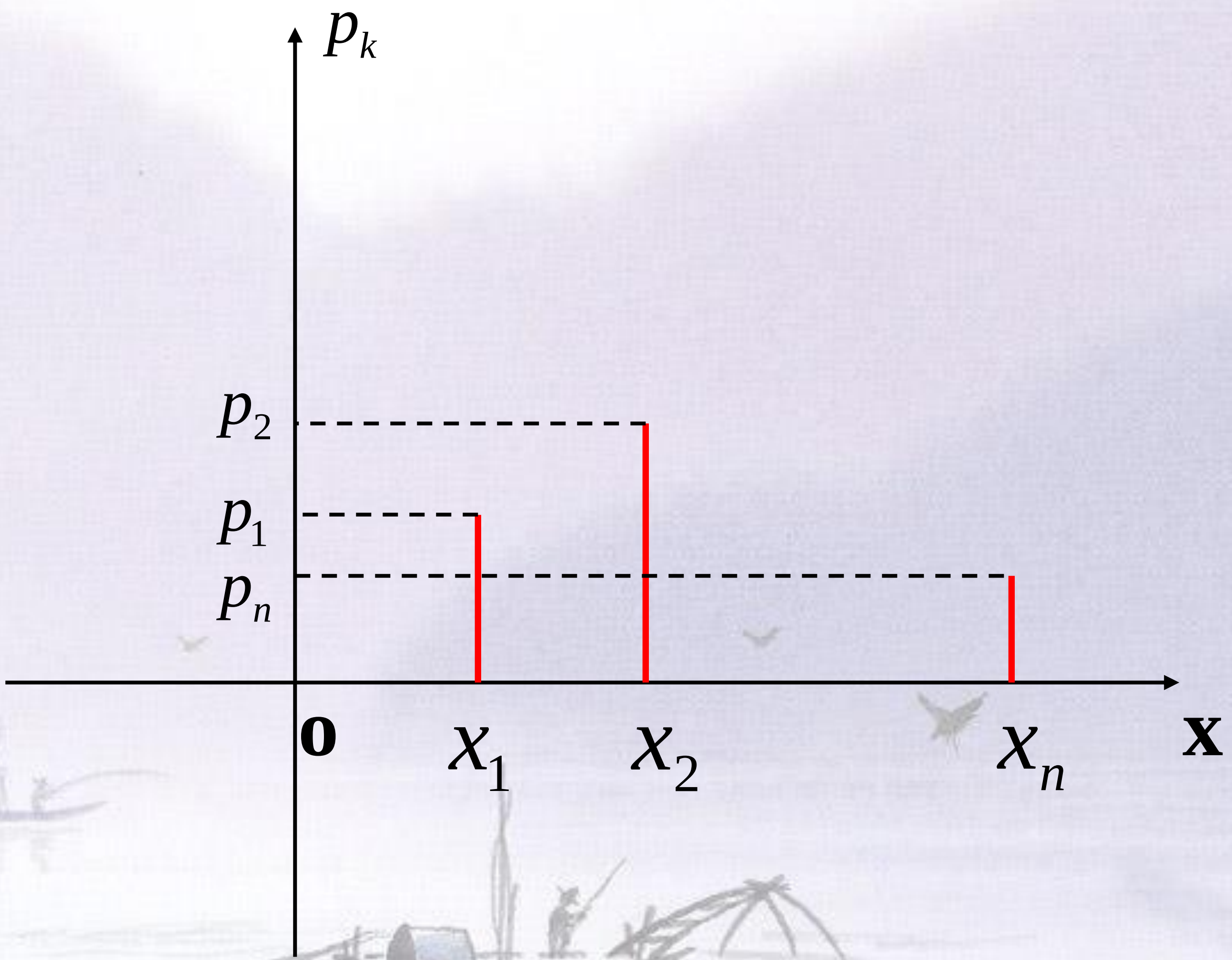
表格法

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

上述表格称为离散型随机变量 X 的分布列，分布列也可以表示成下列矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}$$

图示法



性质

(1) $p_i \geq 0$, i=1， 2， ...

(2) $\sum_i p_i = 1$

例 1

从1～10这10个数字中随机取出5个数字，令：

X：取出的5个数字中的最大值.

试求 X 的分布列.

解：　X 的取值为5，6，7，8，9，10.　并且

$$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^{4}}{C_{10}^{5}}\qquad (k=5,\ 6,\ \cdots,\ 10)$$

具体写出，即可得 X 的分布列：

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

例2

设随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \quad \text{试求常数} c.$$

解：由随机变量的性质，得

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

该级数为等比级数，故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n=c\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

所以 $c=3.$

例3 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
P	1/4	1/2	1/4

求

$P(X\leq 1/2)$, $P(3/2 < X \leq 5/2)$, $P(2 \leq X\leq 3)$,

例4 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有信号灯的路口，每个信号灯以1/2的概率允许或禁止汽车通过，设各信号灯的工作是相互独立的。以X表示该汽车首次停下时，它已通过的路口的个数，求X的分布列.

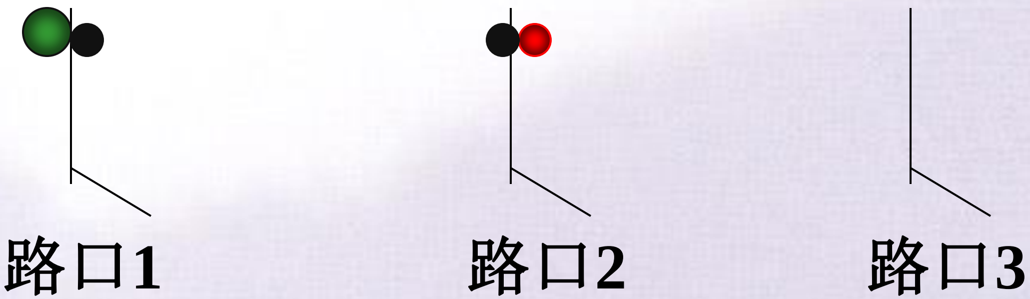
解: 依题意, X可取值0, 1, 2, 3.

设 A_i={第i个路口遇红灯}, i=1,2,3

$$P(X=0)=P(A_1)=1/2,$$

X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

设 A_i={第i个路口遇红灯}, i=1,2,3

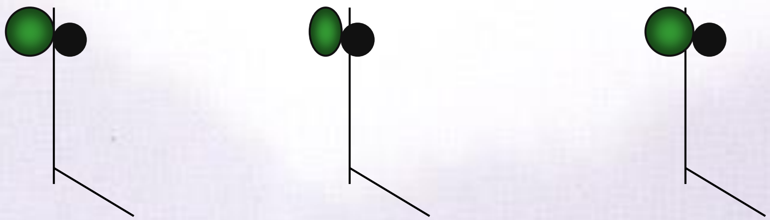


$$P(X=1)=P(\overline{A_1}A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/4$$

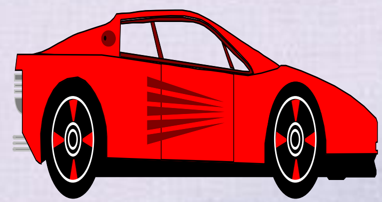
$$P(X=2)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

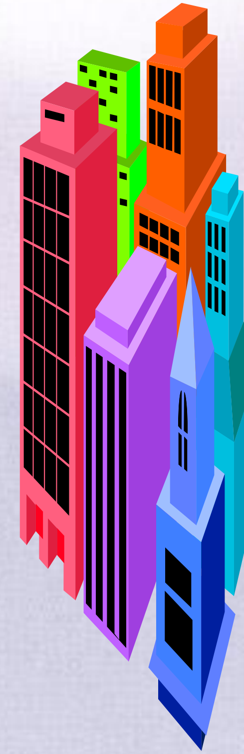
X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数

设 A_i={第i个路口遇红灯}，i=1,2,3



路口1 路口2 路口3





$$P(X=3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1/8$$

即 $$X\sim\begin{Bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{Bmatrix}$$

不难看到 $$\sum_{i=0}^{3}P(X=i)=1$$

放松休息
片刻

几种常见的离散型随机变量

单点分布　　0-1分布

几何分布　　超几何分布

★　二项分布

★　泊松分布

单点分布

若随机变量 X 只取一个常数值 C，即 $P(X=C)=1$，则称 X 服从单点分布。

引例1

一射手每次打靶射击一发子弹，
打中的概率为$p(0<p<1)$, 不中的概率为$q=1-p$。

$$设X=\begin{cases}1 & 打中\\ 0 & 没打中\end{cases}$$

X	0	1
P	q	p

0-1分布

若随机变量 X 只取两个数值0或1，其分布为

X	0	1
P	q	p

$0<p<1,\ q=1-p$，

或记为

$$P(X=k)=p^k q^{1-k}\text{，}\ k=0,1$$

则称X 服从参数为p 的两点分布或参数为 p 的0-1分布。

应用场合

凡是随机试验只有两个可能的结果，常用0－1分布描述，

如产品是否格、
人口性别统计、
系统是否正常、
电力消耗是否超负荷等等.

引例2一射手每次打靶射击一发子弹，打中的概率为$p(0<p<1)$，不中的概率为$q=1-p$。今向靶作**独立重复射击**n次, 设

X:射中次数

求X的分布.

二项分布

若X的分布为

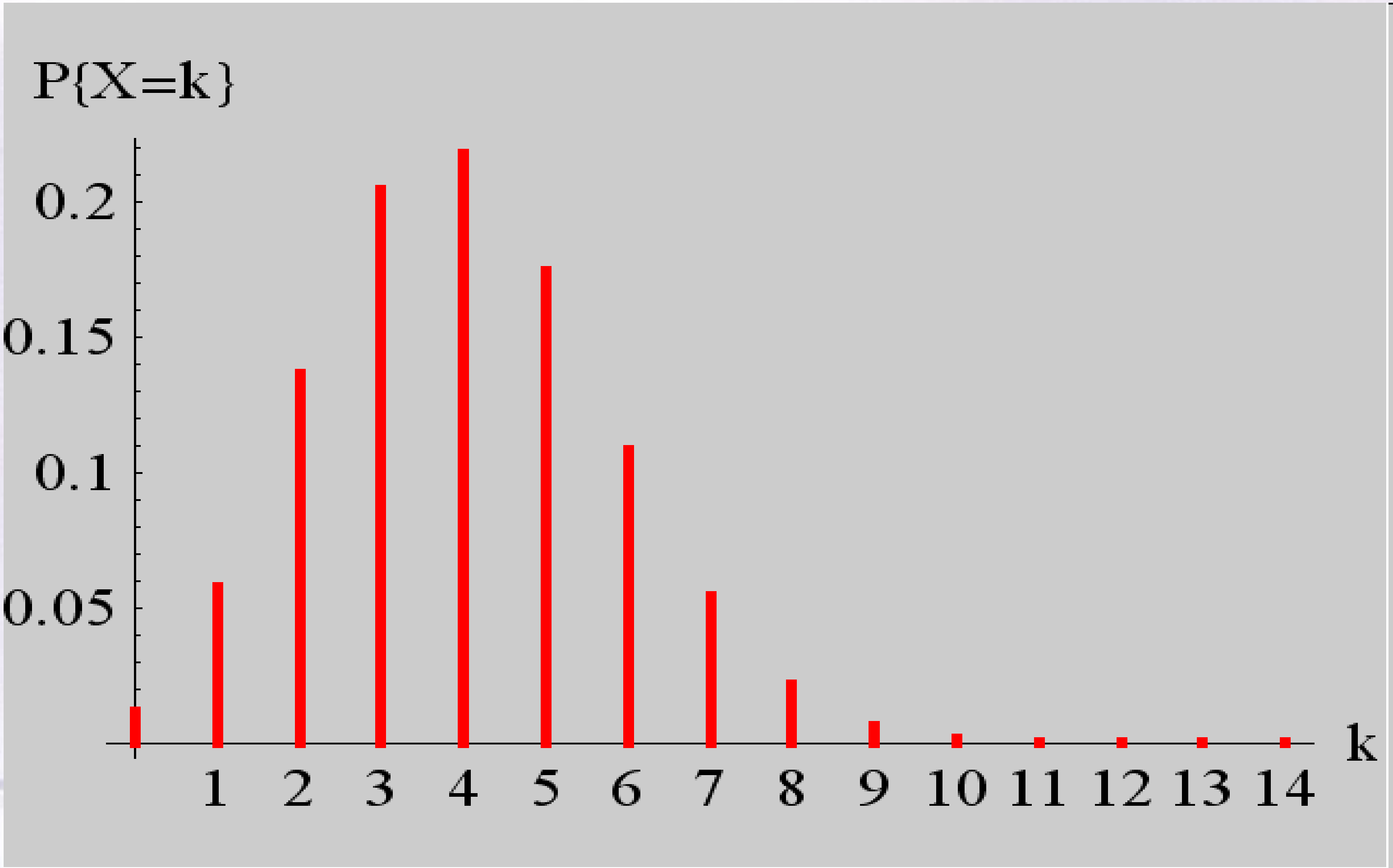
$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

k =0, 1, 2 ,…, n,

称X 服从参数为n，p的二项分布，记为

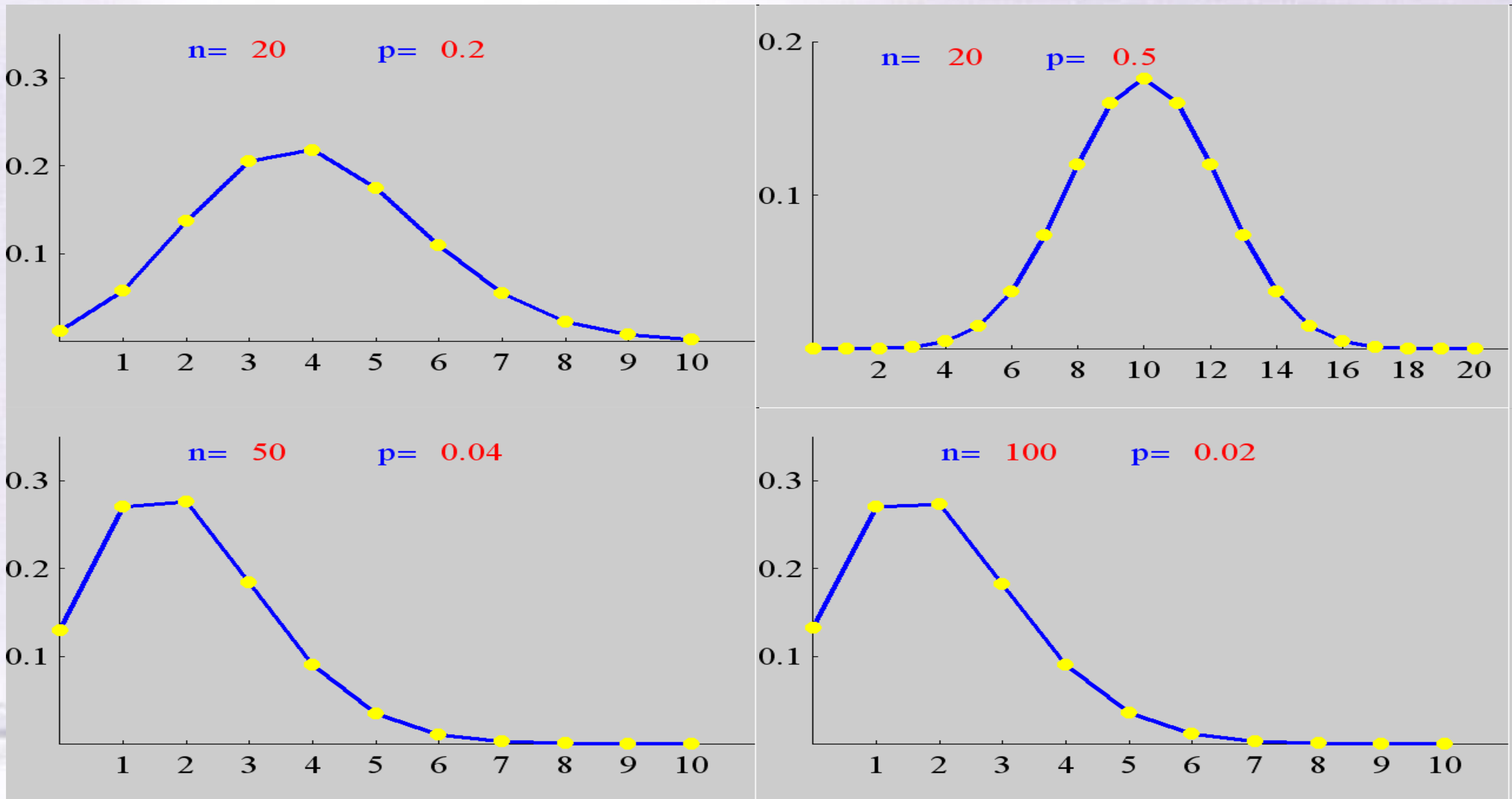
$$X \sim B(n, p)$$

二项分布的概率分布示意图



二项分布的性质

二项分布随机数演示



说 明

1. 显然，当 $n=1$ 时

$$X \sim B(1,\ p)$$

此时，X 服从两点分布

这说明，两点分布是二项分布的一个特例

2. 称为二项分布的原因是 $C_n^k p^k q^{n-k}$ 为二项展开式

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

第k+1项

二项分布的应用

观察下列随机试验特点：

E_1:投掷一枚硬币，观察正反面出现情况

E_2:某人打靶，观察命中情况

E_3:从一批产品中抽取一只，检查是否为合格品

伯努利概型

若随机试验E只有两个可能结果A和$\overline{A}$，

且$P(A)=p(0<p<1)$，则称E为伯努利概型.

n重伯努利试验

将**伯努利试验**E，在相同条件下，

独立重复进行n次，作为一个试验，

则这个试验为n重伯努利概型。记为E^n

一般的,设在一次伯努利试验中$P(A)=p(0<p<1)$。设

X： n重伯努利试验中事件A发生(成功)的次数

其分布为

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

$k=0, 1, 2, \ldots, n,$

应用场合

n个孩子的家庭中男孩(女孩)个数

n个电子元件中失效个数

一大批产品中废品个数

例5 为保证设备正常工作，需要配备适量的维修工人，现有同类型设备300台，各台工作是相互独立的，且各台发生故障的概率都是0.01。在通常情况下，一台设备的故障可由一人来处理，问至少需要配备多少工人，才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01。

分析：设至少需配备**k**名工人

X：300台设备中发生故障的设备数

$$X \sim B(300,0.01)$$

$$\text{求}k,\text{使得}P(X>k)<0.01$$

为保证设备正常工作，需要配备适量的维修工人，现有同类型设备300台，各台工作是相互独立的，且各台发生故障的概率都是0.01。在通常情况下，一台设备的故障可由一人来处理，问至少需要配备多少工人，才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01。

解：设至少需配备k名工人

设300台设备中X台发生故障

则 $X \sim B(300,0.01)$

k需满足

$$P(X>k)=\sum_{i=k+1}^{300} C_{300}^{i}\cdot 0.01^{i}\cdot 0.99^{300-i}<0.01$$

$$k=7, P(X>k)=0.0115,\quad k=8, P(X>k)=0.0036$$

例6 某人进行射击，设每次射击的命中率为0.001，他独立射击了5000次，试求他至少命中两次的概率。

设X为命中次数　　X~B(5000,0.001)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - C_{5000}^{0}(1-0.001)^{5000} - C_{5000}^{1}0.001(1-0.001)^{4999}$$

Possion定理

设有一列二项分布

$X_n \sim B(n, p_n)$，$n=1, 2, \ldots,$

如果

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$$

λ是与n无关的正常数，则对任意固定的非负整数k，均有

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = k\} = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Poisson定理说明：若$X \sim B(n, p)$，则当 n 较大，p 较小，而 $np = \lambda$ 适中，则可以用近似公式

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$k = 0,1,2,\cdots$$

当$n \geq 100$, $np \leq 10$时，精度较好

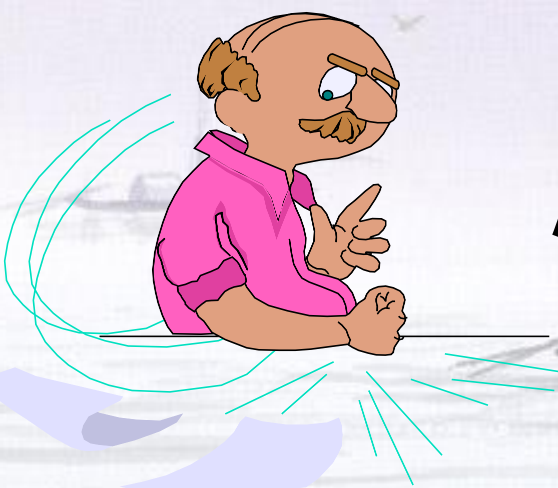
例7续 某人进行射击，设每次射击的命中率为0.001，他独立射击了5000次，试求他至少命中两次的概率。

解：设X为命中次数　　X~B(5000,0.001)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$\approx 1 - \frac{5^0}{0!}e^{-5} - \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 0.9596$$

$$P(X=k) \approx \frac{5^k}{k!}e^{-5}, k=0,1,\ldots$$



小概率事件虽不易发生，但重复次数多了，就成大概率事件.

在Poisson 定理中，

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} > 0, k = 0,1,2,3\ldots$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots\right) \\ &= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1\end{aligned}$$

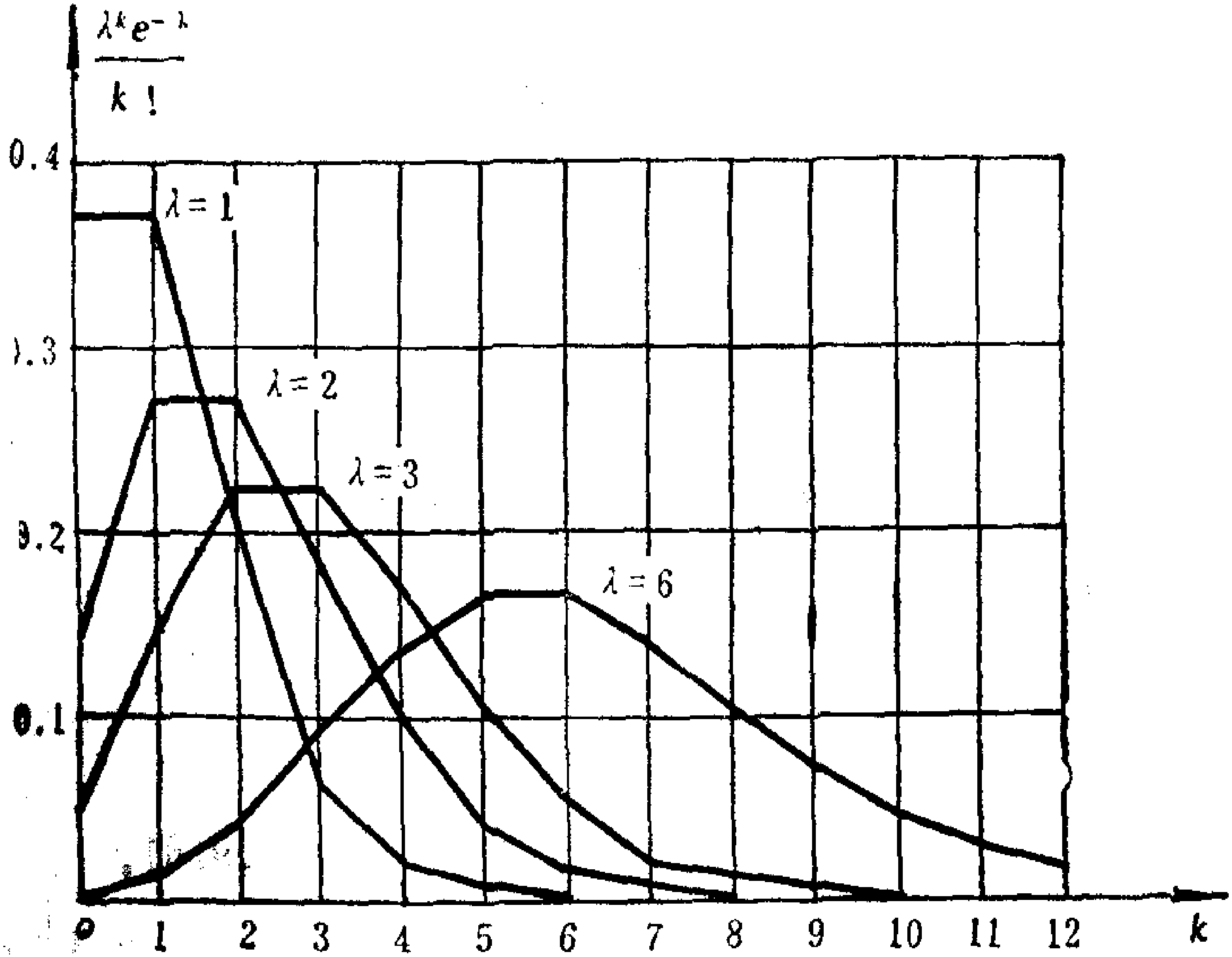
泊松分布

若离散型随机变量X 的分布为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k =0，1，2，… 其中常数$\lambda > 0$,

则称 X 服从参数为λ的泊松分布, 记为$X \sim P(\lambda)$.



$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
0.4
0.3
0.2
0.1
$\lambda = 1$
$\lambda = 2$
$\lambda = 3$
$\lambda = 6$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
k

二项分布与泊松分布

历史上，泊松分布是作为二项分布的近似，于1837年由法国数学家泊松引入的.

泊松，S.-D.

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$k=0,1,2,\cdots$$

我们把在每次试验中出现概率很小的事件称作**稀有事件**.

由泊松定理，***n*重贝努里试验中稀有事件出现的次数**近似地服从泊松分布.

应用场合

在一段时间内

一放射性源放射出的 α 粒子数；

某电话交换台收到的电话呼叫数；

到某机场降落的飞机数;

一个售货员接待的顾客数;

一台纺纱机的断头数;

在一定条件下，都是服从Poisson分布的.

例8

假设电话交换台每小时接到的呼叫次数服从参数$\lambda=3$的泊松分布，求

(1) 每小时恰有4次呼叫的概率

(2) 一小时内呼叫不超过5次的概率

引例3

一射手每次打靶射击一发子弹，打中的概率为$p(0<p<1)$，不中的概率为$q=1-p$。今向靶作独立重复射击，直到中靶为止，则求

X:消耗的子弹数

的分布.

一般的,设在一次伯努利试验中$P(A)=p$,试验进行到 A 首次出现为止.

X:第一次出现事件A时的试验次数

$$P(X=k)=q^{k-1}p,\qquad k=1, 2, \ldots$$

几何分布

若X的分布为

$$P(X=k)=q^{k-1}p, \qquad k=1, 2, \ldots$$

称 X服从参数为p的几何分布。

了解一下

几何分布的无记忆性

设X服从几何分布,则

$$P(X=m+k \mid X>m)=P(X=k)$$

$$k=1,2,\cdots$$

可以理解为：若已经进行了n次试验，事件A没有发生，则又进行m次试验A依然没有发生的概率与已知的信息（前n次试验A没有发生）无关，这就是说，并不因为已经进行了n次试验A没有发生，而会使得在第$n+1, n+2, \cdots, n+m$次试验中A首次发生的概率提高。

例9 对同一目标进行射击，设每次射击时的命中率为0.64，射击进行到击中目标时为止，X 表示所需射击次数。试求随机变量 X 的分布列，并求至少进行2次射击才能击中目标的概率。

X 的分布列为

$$P(X=n)=0.36^{n-1}\times 0.64 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$P\{至少射击2次才命中\}=P\{X\geq 2\}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}0.36^{k-1}\times 0.64$$

$$=0.64\times\frac{0.36}{1-0.36}$$

$$=0.36$$

引例4

设一批同类型的产品共有 N 件，其中次品有M件。今从中任取n（假定$n \le N\text{-}M$）件，设

X：n件中所含的次品数

其分布为

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$m = 0,1\ldots, l,\ \ l=\min(M, n)$

超几何分布

若X的分布为

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$m=0,1\ldots,l,\ \ l=\min(M,n)$

称 X 服从超几何分布

第2章　作业1

3,5,8,9,10,16

休息一会儿