概率与数理统计试题

（本试卷共八个大题，满分 100 分；将每道题的答案写在答题卡对应的位置上，答题卡共 8 页，需要分别在第 1 页和第 5 页上方填写座号、姓名、学号、班级等信息，并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号；本试卷最后一页空白纸为草稿纸，可撕下；考试结束后试卷及草稿纸不用上交，答案写在草稿纸及试卷上无效）

附表：$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2.33)=0.99$，$\Phi(-2.33)=0.01$，$t_{0.05}(8)=1.8595$，$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.025}(8)=2.3060$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$

一、填空题

1. 设随机事件 A 和 B 满足 $P(A)=0.5,\quad P(B)=0.6,\quad P(B\,|\,\bar{A})=0.8$，则 $P(\bar{A}\,|\,\bar{B})=$_________.

2. 若随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x\le 1 \\ 2-bx, & 1<x\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 a,b 为常数，且 $E(X)=1$，则 a=____，b=____.

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,1)$, $Y\sim N(2,2)$，则 $X-Y$ 服从的分布为________.

4. 设矩形的长为 X，宽为 Y，且 $X\sim U(0,2)$，已知该矩形的周长为 20，则该矩形的面积的数学期望为________.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立都服从 $\chi^2(2)$ 分布，则 $X+Y$ 服从的分布为________.

6. 设 $X_1,X_2,\ldots$ 是独立同分布的随机变量序列，且都服从泊松分布 $P(\lambda)$，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛到________.

7. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，令 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $DT=$________.

8. 已知儿童每 100ml 血中含钙量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。今抽取 9 名儿童进行含钙量的测试，经计算得均值为 59.14，标准差为 8.61。则儿童的平均含钙量 μ 的置信水平为 90%的置信区间为________________________________.

二、

设某地区成年居民中肥胖者占 10%，不胖不瘦者占 82%，瘦者占 8%，又知肥胖者患高血压病的概率为 20%，不胖不瘦者患高血压病的概率为 10%，瘦者患高血压病的概率为 5%。求

（1）该地区居民患高血压病的概率.

（2）若已知某人患高血压，求他属于肥胖者的概率.

三、

设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta-1)x^{-\theta}, & x>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>1$ 为常数。随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且都与 X 有相同的密度函数。令

$Y=2(\theta-1)\ln X$ ，$Z=2(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ 。1. 求随机变量 Y 的密度函数。2. 证明：$Z\sim\chi^2(2n)$.

（$\chi^2(n)$ 分布的密度函数为 $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$）

四、

若二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}ae^{-x-y}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $a>0$ 为常数，令 $Z=X+Y$。（1）求常数 a 的值；（2）求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$；（3）判断 X 与 Y 是否相互独立？说明理由;（4）求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

五、

一公寓楼有 100 户住户，设一户住户拥有汽车辆数为随机变量 X，其分布律为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

利用中心极限定理求解需要多少车位，才能使车位充足的概率至少为 0.95?

六、

1. 某企业每天生产线上产品的合格品率为 0.96。已知每件合格品可获利 80 元，每件不合格亏损 20 元。为保证该企业每天平均利润不低于 1 万元，问该企业每天至少应生产多少件产品？

2. 设二维随机变量（X, Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y & 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 1. $E(X), E(Y), D(X), D(Y)$；2. $E(XY), Cov(X, Y), \rho_{XY}$.

七、

1. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f\left(x\,;\theta\right)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数。$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自总体 X 的样本， $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为相应的样本观测值.（1）求参数 θ 的矩估计量；（2）求参数 θ 的最大似然估计量。

2. 设总体 $X\sim N(\mu_1, \sigma^2)$，总体 $Y\sim N(\mu_2, \sigma^2)$，且两总体相互独立。今从总体 X 和 Y 中分别抽取容量为 n_1，n_2 的两组样本，样本方差分别记为 S_1^2 和 S_2^2. 令 $Z=aS_1^2+bS_2^2$，其中 a, b 为常数且 $a+b=1$。（1）证明：Z 是 σ^2 的无偏估计；（2）确定 a，b 的值，使得对应的 Z 最有效.

八、

1. 叙述假设检验两类错误的定义。

2. 某炼钢厂的铁水含碳量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，已知在生产正常的情况下平均含碳量应为4.55. 现抽测了9炉铁水，测得含碳量的均值为4.46，标准差为0.12. 问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，铁水含碳量是否正常。