

# 复杂事件的概率如何求？

**引例** 有三个箱子，分别编号为1,2,3，  
1号箱装有1个红球4个白球，2  
号箱装有2红3白球，3号箱装  
有3红球. 某人从三箱中任取  
一箱，从中任意摸出一球，  
求取得红球的概率.

已知原因求结果

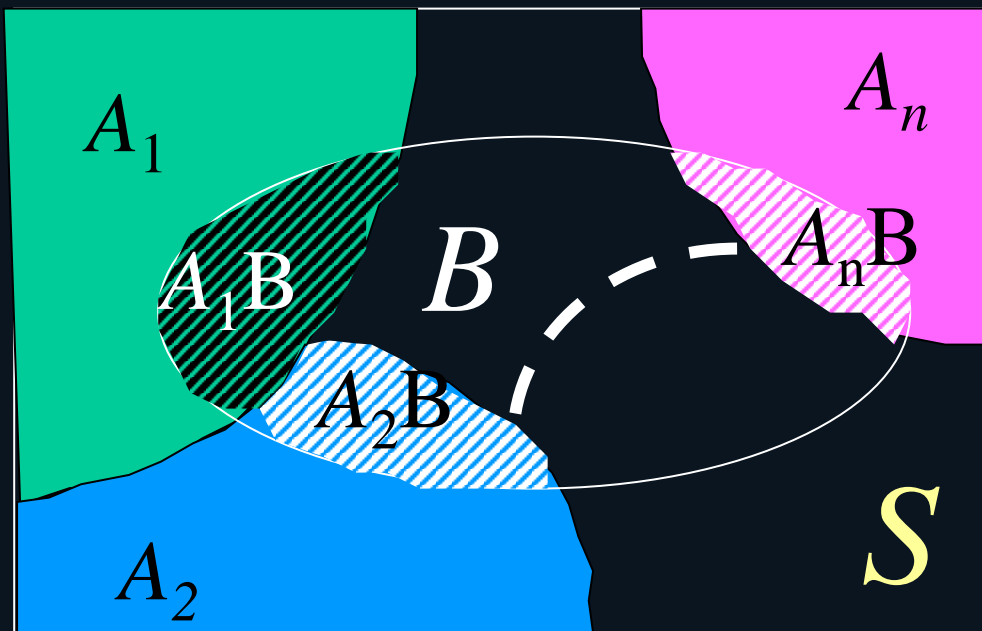


# 全概率公式      Bays公式

● 全概率公式

● Bays公式





首先构造完备事件组，  
将一个复杂事件分解  
为若干个互斥简单事件  
的并

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足

(1)  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容,  $P(A_i) > 0, i = 1, \dots, n$

(2)  $S = \bigcup_{i=1}^n A_i$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ 称为完备事件组

$$B = BS = \bigcup_{i=1}^n BA_i$$

然后利用加法公式及乘法公式

$$B = \bigcup_{i=1}^n BA_i$$

又由

$$(A_i B)(A_j B) = \Phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

知

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n BA_i\right) = \sum_{i=1}^n P(BA_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(B | A_i) P(A_i)$$



# 全概率公式

若事件组 $A_1, \dots, A_n$ , 满足:

(1)  $A_1, \dots, A_n$  互不相容,  $P(A_i) > 0, i=1, \dots, n$

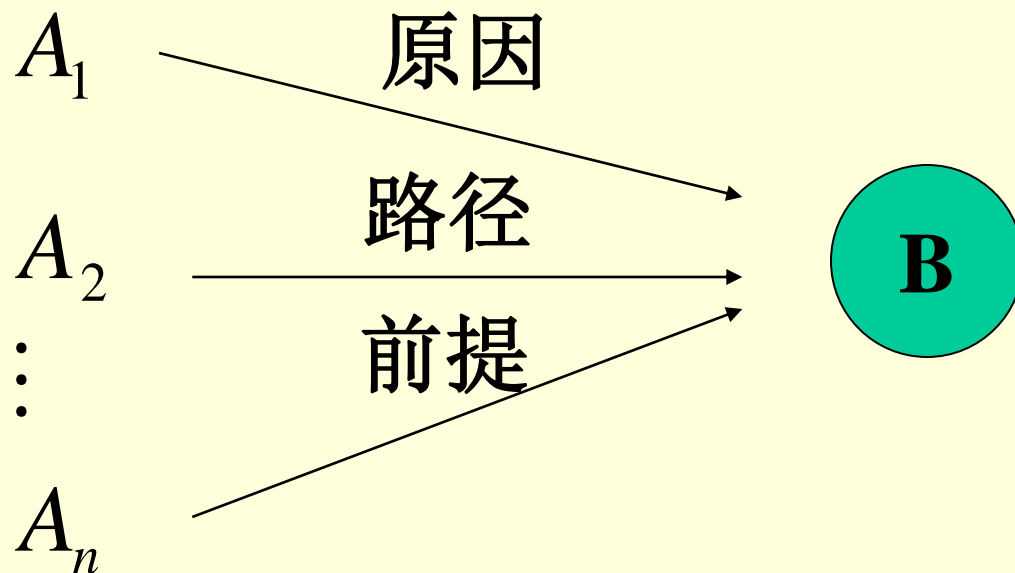
(2)  $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$

则对任何事件 $B$ , 均有

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

称满足(1)、(2)的事件组为**完备事件组**。上式称为**全概率公式**



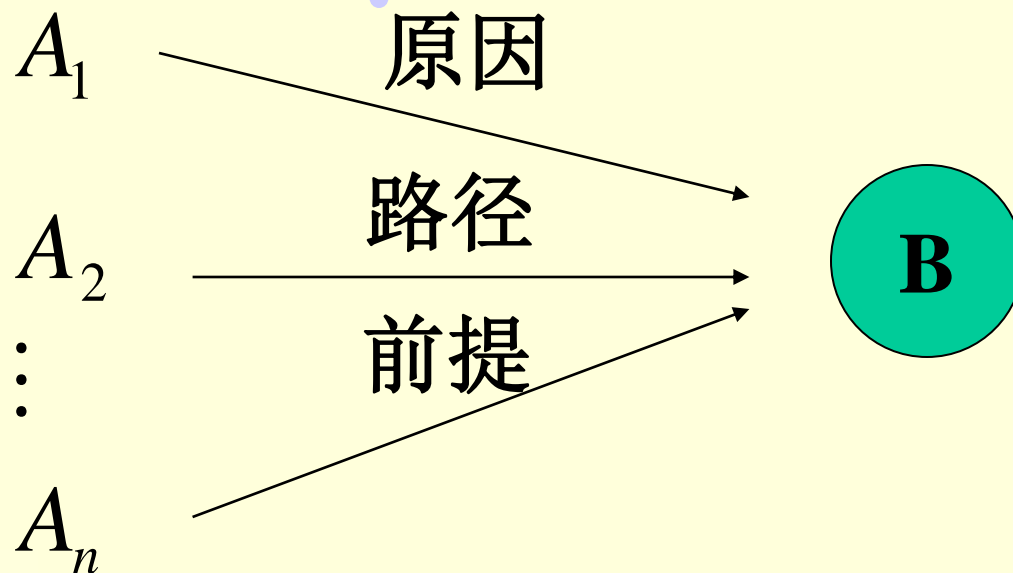


### 全概率公式应用条件：

- (1) 问题是求一个复杂事件（如设为 $B$ ）的概率 $P(B)$ ；
- (2)  $B$  的发生可能有“多种原因( $A_k$ )”或“多种条件”或“多种情况下发生”。
- (3) 由题中条件易求出  $P(A_k)$ ,  $P(B|A_k)$ 。

关键

如何寻找完备  
事件组



## 用全概率公式求解问题步骤

- (1) 判断问题是否满足应用全概率公式的条件
- (2) 由题目找出 B 发生的各种“可能的原因( $A_k$ )”或“可能的前提条件”，且检查  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是否为完备事件组,

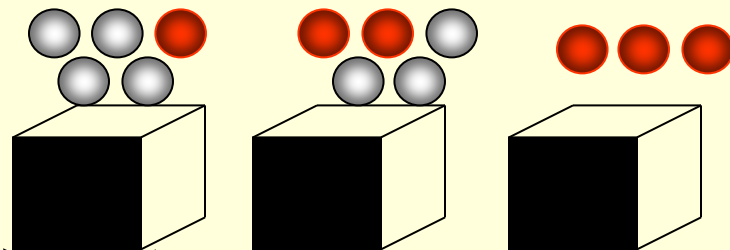
- (3) 
$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B | A_k)$$





## 续引例

解：记  $A_i = \{\text{球取自} i \text{号箱}\}$ ,  
 $i = 1, 2, 3$ ;  
 $B = \{\text{取得红球}\}$



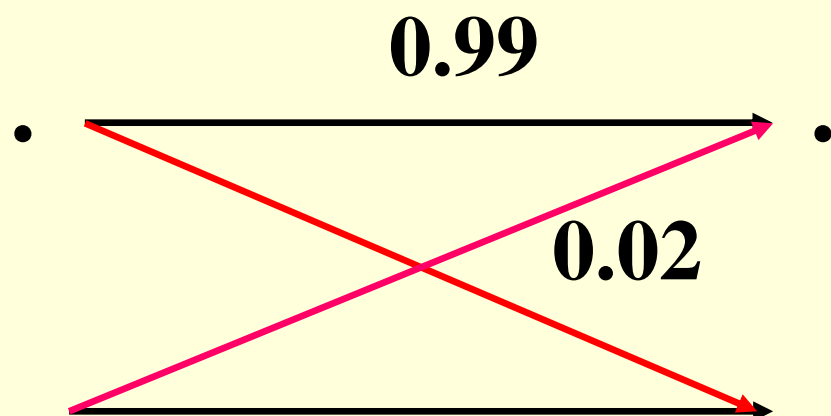
则  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  构成完备事件组  
由全概率公式

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B | A_i)$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + 1 \right) = 8/15$$



**例1** 发报机发出 “.” 的概率是0.6,发出 “\_” 的概率是0.4,将 “.” 收为 “.” 的概率是0.99, 将 “\_” 收为 “.” 的概率是0.02,  
**(1)求发报机将任一信号收为 “.” 的概率.**



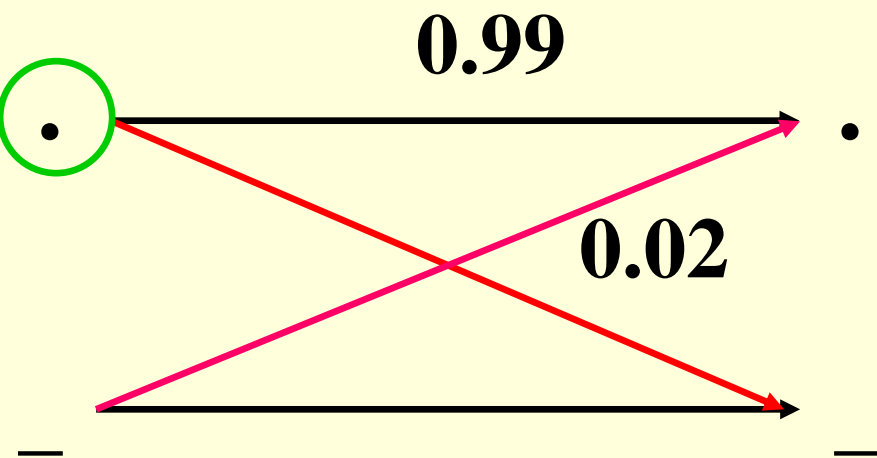
记  $A_1 = \{\text{发报机发出信号 “.”}\}$ ,  
 $A_2 = \{\text{发报机发出信号 “_”}\}$ ,  
 $B = \{\text{发报机将一信号收$   
 “.”}\}

— 则  $A_1$ 、 $A_2$  构成完备事件组  
 由全概率公式

$$P(B) = \sum_{k=1}^2 P(A_k)P(B | A_k)$$



(2)求发报机将一信号收为 “.”时,  
发报机发出的信号是 “.”的概率



记  $A_1 = \{\text{发报机发出信号 “.”}\}$ ,  
 $A_2 = \{\text{发报机发出信号 “_”}\}$ ,  
 $B = \{\text{发报机将一信号收$   
“.”}\}

求  $P(A_1|B)$



## 已知结果求原因

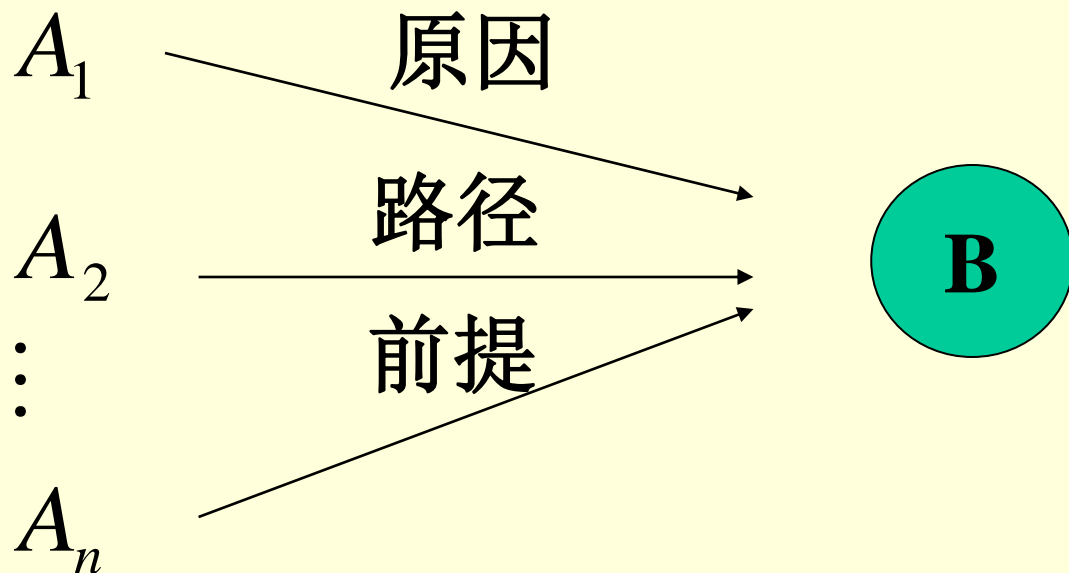


## 贝叶斯公式

若 $A_1, \dots, A_n$ 是一完备事件组，则对任意的事件 $B$  ( $P(B) > 0$ ,  $P(A_i) > 0, i = 1, \dots, n$ ), 均有

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B | A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)},$$
$$j = 1, 2, \dots, n$$





## Bayes公式应用条件

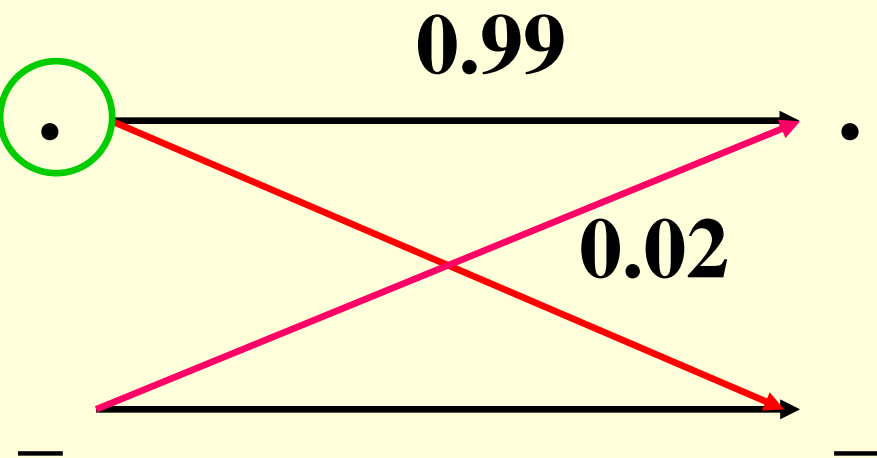
- (1) 复杂事件  $B$  的发生可能有“多种原因( $A_k$ )”.
- (2) 由题中条件易求出  $P(A_k)$ ,  $P(B|A_k)$ .
- (3) 问题是已知  $B$  发生的条件下, 求某个原因  $A_k$  发生的概率  $P(A_k|B)$ .



贝叶斯公式在实际中有很多应用，它可以帮助人们确定某结果（事件  $B$ ）发生的最可能原因。



**例1 (2)求发报机将一信号收为 “.”时,  
发报机发出的信号是 “.”的概率**



记  $A_1 = \{\text{发报机发出信号 “.”}\}$ ,  
 $A_2 = \{\text{发报机发出信号 “_”}\}$ ,  
 $B = \{\text{发报机将一信号收  
“.”}\}$

求  $P(A_1|B)$

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{\sum_{k=1}^2 P(A_k)P(B | A_k)}$$

运用全概率公式  
计算  $P(B)$



**例2** 某厂产品96%是（真）合格品。有一验收方法，把（真）合格品判为“合格品”的概率为0.98，把非合格品判为“合格品”的概率为0.05。求**此验收方法判为“合格品”的一产品为（真）合格品的概率**

解：设 $A = \{\text{产品为合格品}\}$ ,  $\bar{A} = \{\text{产品为不合格品}\}$   
 $B = \{\text{产品判为合格品}\}$  求 $P(A|B)$

由Bayes公式

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.96 \cdot 0.98}{0.96 \cdot 0.98 + 0.04 \cdot 0.05} \end{aligned}$$



**例3** 据调查某地区居民的肝癌发病率为0.0004,

若记“该地区一居民患肝癌”为事件 $B_1$ ,并记 $B_2 = \bar{B}_1$

有 $P(B_1)=0.0004$ ,  $P(B_2)=0.9996$ 。现用甲胎蛋白法检查肝癌, 若呈阴性, 表明不患肝癌; 若呈阳性, 表明患肝癌。由于技术和操作不完善等原因, 是肝癌者未必检出阳性, 不是肝癌者也有可能呈阳性反应。设事件A表示“一居民检验出阳性”, 根据经验, 已知肝癌患者检出阳性的概率为 $P(A|B_1)=0.99$ , 非肝癌患者错检为阳性的概率为 $P(A|B_2)=0.05$ 。现设某人已检出阳性, 问他患肝癌的概率是多少?



$$P(B_1) = 0.0004, P(B_2) = 0.9996$$

$$P(A | B_1) = 0.99, P(A | B_2) = 0.05,$$

求  $P(B_1 | A)$

$$\begin{aligned} P(B_1 | A) &= \frac{P(B_1 A)}{P(A)} = \frac{P(A | B_1) P(B_1)}{P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2)} \\ &= \frac{0.99 * 0.0004}{0.99 * 0.0004 + 0.05 * 0.9996} \\ &= 0.00786 \end{aligned}$$



现在来分析一下结果的意义.

1. 这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义?

2. 检出阳性是否一定患有癌症?



先验信息+样本信息=后验信息

统计

贝叶斯公式

贝叶斯风险

贝叶斯决策

贝叶斯统计

贝叶斯估计



人工智能

朴素贝叶斯

贝叶斯网

贝叶斯神经网络

真的吗？



## 第一章作业4：

**37, 43, 46, 47, 49, 53, 56**

