

引例

从同一型号同一批次的反坦克弹中任抽一发反坦克弹射击目标，观测命中情况。设 A 代表“命中”这一事件，求 $P(A)$ ？



频率的定义

在相同条件下，进行了 n 次试验，
在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为
事件 A 发生的**频数**。

比值 n_A / n 称为事件 A 发生的**频率**，
记为 $f_n(A)$



频率的性质

□ $0 \leq f_n(A) \leq 1$ ————— 非负性

□ $f_n(S) = 1$ ————— 规范性

□ 事件 A, B 互斥, 则

$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ ————— 可加性

可推广到有限个两两互斥事件的和事件

下面我们从几个试验入手，揭示随机事件一个极其重要的特征：

频率稳定性

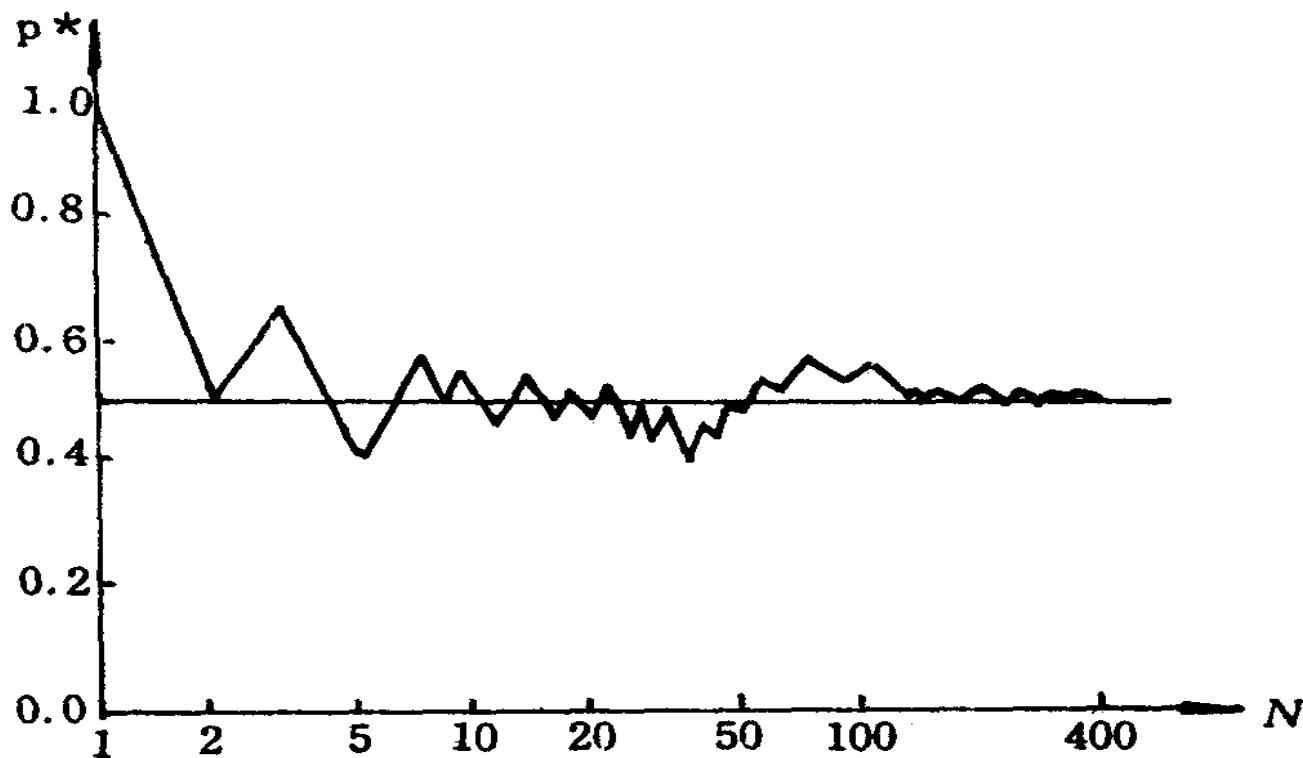


例1

掷硬币试验

掷一枚均匀硬币，记录前400次掷硬币试验中频率 P^* 的波动情况。

掷一枚硬币，正面出现频率的趋势（横轴为对数尺度）



例2

Dewey G. 统计了约438023个英语单词
中各字母出现的频率, 发现各字母出现的
频率不同:

A: 0.0788	B: 0.0156	C: 0.0268	D: 0.0389
E: 0.1268	F: 0.0256	G: 0.0187	H: 0.0573
I: 0.0707	J: 0.0010	K: 0.0060	L: 0.0394
M: 0.0244	N: 0.0706	O: 0.0776	P: 0.0186
Q: 0.0009	R: 0.0594	S: 0.0634	T: 0.0987
U: 0.0280	V: 0.0102	W: 0.0214	X: 0.0016
Y: 0.0202	Z: 0.0006		



频率稳定性

在充分多次试验中，事件的频率总在一个定值附近摆动，而且，试验次数越多，一般来说摆动越小。这个性质叫做频率的稳定性。



概率的频率定义

在一组不变的条件下，重复作 n 次试验，记 m 是 n 次试验中事件 A 发生的次数。

当试验次数 n 很大时，如果频率 m/n 稳定地在某数值 p 附近摆动，而且一般地说，随着试验次数的增加，这种摆动的幅度越来越小，

称数值 p 为事件 A 在这一组不变的条件下发生的概率，记作 $P(A)=p$.



对概率的频率定义评价

缺点



不可能对每一个事件都做大量试验，以求得频率



无法给出确切的概率值

意义



提供了估计事件发生可能性大小的方法；



提供了一种检验理论正确与否的准则.



频率的性质

□ $0 \leq f_n(A) \leq 1$ ————— 非负性

□ $f_n(S) = 1$ ————— 规范性

□ 事件 A, B 互斥, 则

$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ ————— 可加性

可推广到有限个两两互斥事件的和事件

由频率稳定性和频率性质得到启发

概率的公理化定义

设试验E的样本空间为 Ω ，事件域为 \mathfrak{F} ，P为定义在事件域 \mathfrak{F} 上的一维实函数

$$P: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$A \rightarrow P(A)$$

该一维实函数满足下面条件

非负性：对任一事件A，有 $P(A) \geq 0$ ；

规范性：对必然事件 Ω ，有 $P(\Omega) = 1$ ；

可列可加性：若事件 $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ 互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$



那么称 $P(A)$ 为事件 A 的概率,
称 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 为一概率空间

概率的公理化理论由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(А.Н.Колмогоров)1933年建立.



思考

概率的公理化定义是否给出了概率的计算方法



概率的性质

$$(1) \quad P(\phi) = 0$$

(2) 有限可加性:

若 A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容,

则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$



证明

1. $P(\phi) = 0$

证明：令 $A_n = \phi$ ($n=1, 2, \dots$) 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$

$$A_i A_j = \phi \cap \phi = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$$

由可列可加性知：
$$P(\phi) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\phi)$$

$$\therefore P(\phi) = 0$$



证明

2. 有限可加性 若 A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容, 则 $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$

证明 : 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \phi$ 则有 $A_i A_j = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$

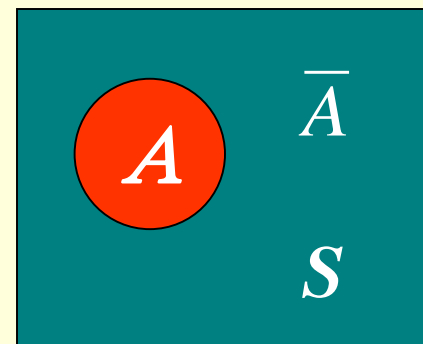
$$\begin{aligned} \text{由可列可加性知 : } P(\bigcup_{i=1}^n A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + 0 = \sum_{i=1}^n P(A_i) \end{aligned}$$



(3) 逆事件的概率

对事件 A , 有

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

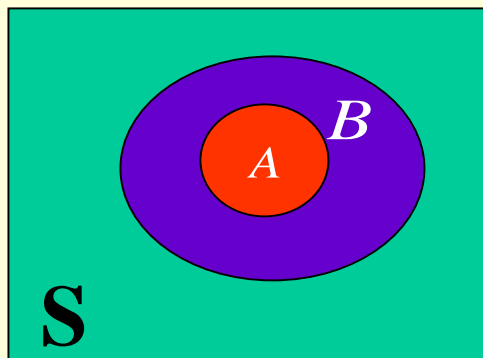


(4) 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

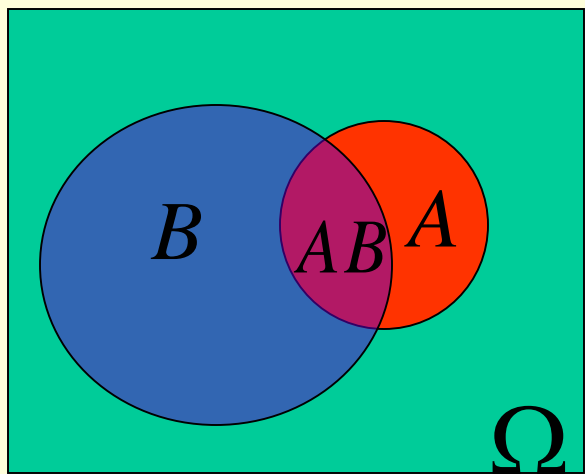
$$P(A) \leq P(B)$$

特别地, 对任何事件 A , 都有 $P(A) \leq 1$;



(5) (加法公式)对任何两个事件A, B, 都有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



$$A \cap (B - AB) = \phi$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup (B - AB)) \\ &= P(A) + P(B - AB) \end{aligned}$$

又因 $AB \subset B$

再由性质 3 便得

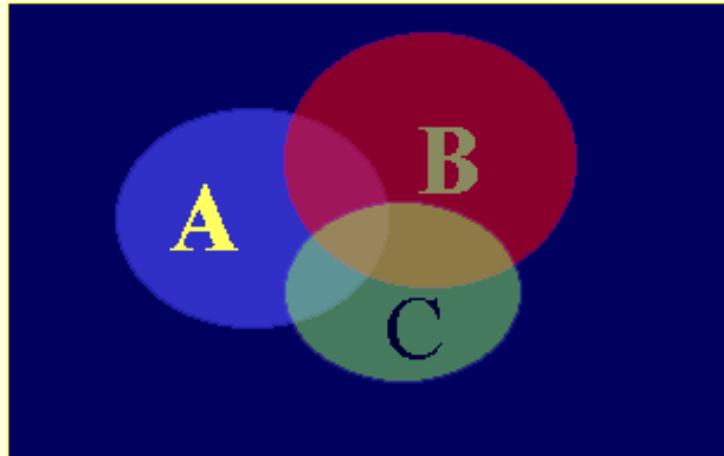
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



推广到多个事件

三个事件和的概率为

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$



(6) 对任何n个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 都有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2}) + \cdots + \\ &+ (-1)^{m-1} \sum_{1 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_m \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_m}) + \\ &+ \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \end{aligned}$$



例1

设 $P(A)=1/3$, $P(B)=1/2$

(1) 若事件A与B互不相容, 求 $P(B\bar{A})$

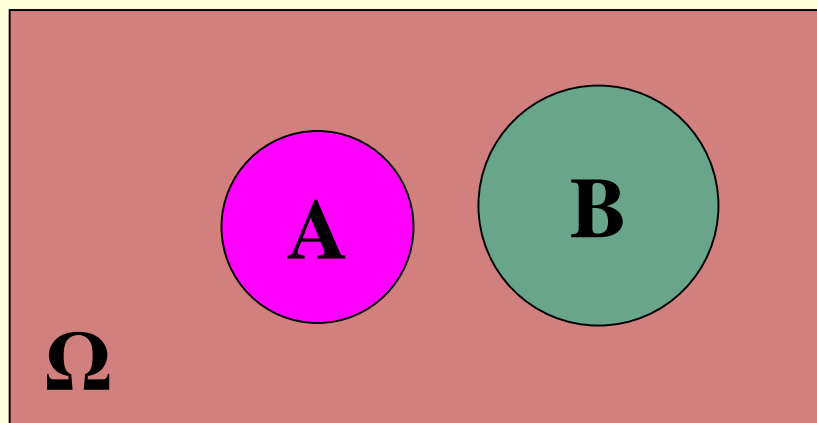
(2) 若 $A \subset B$, 求 $P(B\bar{A})$

(3) 若 $P(AB)=1/8$, 求 $P(B\bar{A})$



设 $P(A)=1/3$, $P(B)=1/2$

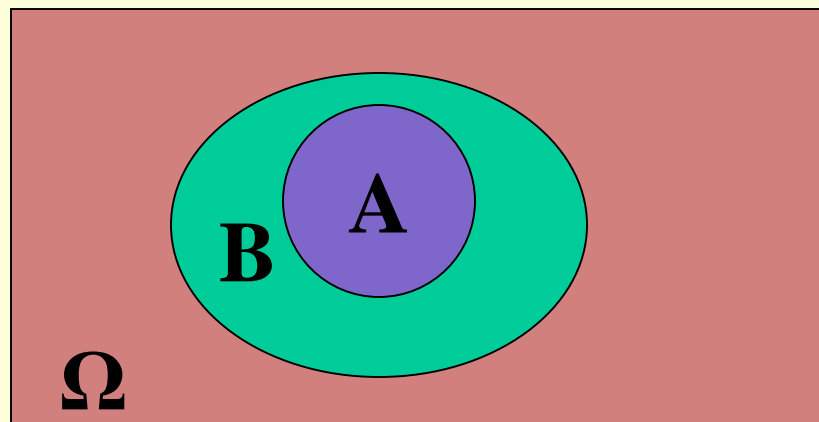
(1) 若事件A与B互不相容, 求 $P(B\bar{A})$



$$B\bar{A} = B$$



(2) 若 $A \subset B$, 求 $P(B\bar{A})$

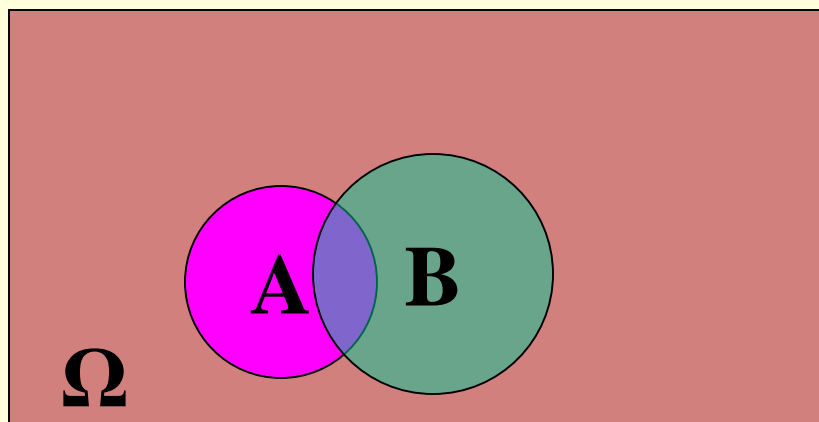


$$B\bar{A} = B - A$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$



(3) 若 $P(AB)=1/8$, 求 $P(B\bar{A})$



$$B\bar{A} = B - AB$$

$$P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$$



例2

设元件盒中装有50个电阻，20个电感，30个电容，从盒中任取30个元件，求所取元件中至少有一个电阻同时至少有一个电感的概率。

解：设 A ={所取元件中至少有一电阻}

B ={所取元件中至少有一电感}

所求概率为 $P(AB)$

$$\begin{aligned}\because P(AB) &= 1 - P(\overline{AB}) \\ &= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - [P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \overline{B})]\end{aligned}$$



$$P(AB) = 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \bar{B})]$$

$$= 1 - \frac{\binom{50}{30} + \binom{80}{30} - 1}{\binom{100}{30}}$$



例3 甲、乙两人先后从52张牌中各抽取13张，求甲或乙拿到4张A的概率.

- 1) 甲抽后不放回，乙再抽；
- 2) 甲抽后将牌放回，乙再抽.



解：设 $A=\{\text{甲拿到4张A}\}$ ， $B=\{\text{乙拿到4张A}\}$

所求为 $P(A \cup B)$

1) A 、 B 互斥

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

计算 $P(A)$ 和 $P(B)$
时用古典概型

$$= \frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}} + \frac{C_{48}^{13} C_{35}^9}{C_{52}^{13} C_{39}^{13}}$$

解： 设 $A=\{\text{甲拿到4张A}\}$, $B=\{\text{乙拿到4张A}\}$

所求为 $P(A \cup B)$

2) A 、 B 相容

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{2C_{48}^9}{C_{52}^{13}} - \frac{C_{48}^9 C_{48}^9}{C_{52}^{13} C_{52}^{13}}$$



休息片刻继续



例4

配 对 问 题

某人将三封写好的信随机装入三个写好地址的信封中，问没有一封信装对地址的概率是多少？

设 $A=\{\text{没有一封信装对地址}\}$

则 $\bar{A}=\{\text{至少有一封信装对地址}\}$

设 $A_i=\{\text{第}i\text{封信装入第}i\text{个信封}\}$, $i=1,2,3$

$$\bar{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$



$$\bar{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

应用加法公式

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) \\ &\quad - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \end{aligned}$$

其中 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

代入计算 $P(\bar{A})$ 的公式中



$$P(\bar{A}) = P(A_1 + A_2 + A_3)$$

$$= 3 \cdot \frac{2!}{3!} - 3 \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3}$$

于是

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$$



推广到 n 封信,用类似的方法可得:
把 n 封信随机地装入 n 个写好地址的信封中,没有一封信配对的概率为:

$$\begin{aligned} & 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$



实际中的各种配对问题

学生和学习证配对；

人和自己的帽子配对；

两副扑克牌配对；

球箱号码配对...

你还可以举出其它配对问题，并提出其中要回答的概率问题，留作课下练习。

