前面我们介绍了随机变量的数学期望和方差，对于多维随机变量，反映分量之间关系的数字特征中，最重要的，就是本讲要讨论的

协方差和相关系数

若$Var(X)$, $Var\ Y$ 存在，则

$$Var(X\pm Y)= Var(X)+ Var(Y) \pm 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

若随机变量X, Y相互独立，它们的方差都存在，则$X\pm Y$的方差也存在，且

$$Var(X\pm Y)= Var(X)+ Var(Y)$$

§3　协方差、相关系数

协方差

设二维随机变量(X,Y),它的分量的数学期望为$E(X)$, $E(Y)$, 若$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$存在，则称它为X,Y的协方差，记为$Cov(X,Y)$, 即

$$Cov(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

计算

(1) 若二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad i,j=1,2,\ldots$$

且$Cov(X,Y)$存在，则

$$Cov(X,Y)=\sum_{i,j}(x_i-E(X))(y_j-E(Y))p_{ij}$$

若二维**连续型**随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$, 且$Cov(X,Y)$存在，则

$$Cov(X,Y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))(y-E(Y))f(x,y)dxdy$$

(2) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E\{XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

即

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

可见，若X与Y独立， $Cov(X,Y)=0$.

例1 已知 X, Y 的联合分布为

$Y \backslash X$ (p_{ij})	1	0
1	p	0
0	0	q

$0 < p < 1$

$p + q = 1$

求 $\operatorname{cov}(X, Y)$

解

X	1	0
P	p	q

Y	1	0
P	p	q

XY	1	0
P	p	q

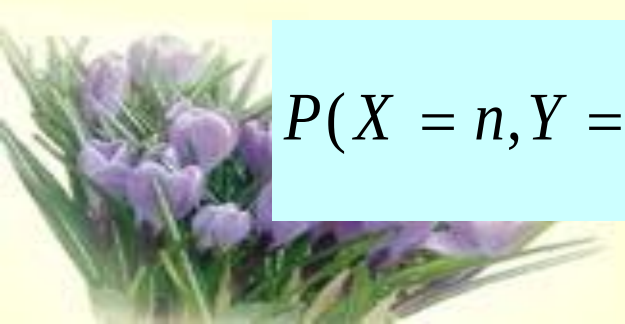
例2　设(X,Y)的联合分布律为

$$P(X=n,Y=m)=\frac{\lambda^{n}p^{m}(1-p)^{n-m}}{m!\,(n-m)!}e^{-\lambda}$$

其中

$$\lambda>0,0<p<1,n=0,1,2\cdots,m=0,1,2,\cdots,n$$

求 $Cov(X,Y)$.



$$P(X=n,Y=m)=\frac{\lambda^{n}}{n!}e^{-\lambda}\cdot\binom{n}{m}p^{m}(1-p)^{n-m}$$

$$E(g(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

解： $$P(X = n, Y = m) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

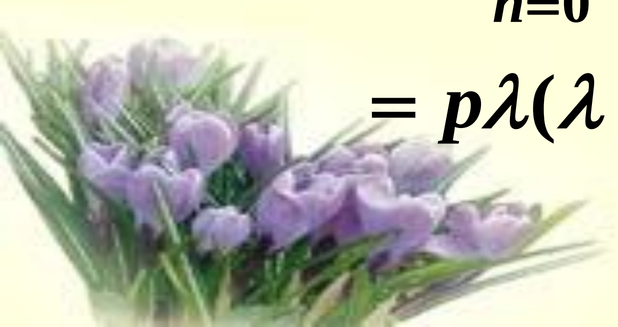
$$E(XY) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} mn \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \underline{\sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}}$$

$$= p\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= p\lambda(\lambda + 1)$$

二项分布
B(n, p)期望



$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}$$

$$E(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\underline{\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}}=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\lambda$$

$$E(Y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}m\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\underline{\sum_{m=0}^{n}m\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}}=p\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=p\lambda$$

$$E(XY)=p\lambda(\lambda+1),\quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=p\lambda(\lambda+1)-p\lambda^2=p\lambda$$

简单性质

(1) $Cov(X, a) = 0$

(2) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

(3) $Cov(X, X) = Var(X)$

(4) $\boxed{Cov(aX, bY) = ab\, Cov(X, Y)}$ a,b是常数

(5) $\boxed{Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)}$

（6） 随机变量和的方差与协方差的关系

$$Var(X+Y)= Var(X)+ Var(Y)+ 2Cov(X,Y)$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum Cov(X_i, X_j)$$

若X_1, X_2, …, X_n两两独立,，上式化为

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

性质7. 设随机变量X和Y的期望和方差都存在，且$DX>0$，$DY>0$，则

$$[Cov(X,Y)]^2 \le D(X)D(Y)$$

其中等号成立当且仅当X与Y有严格的线性关系（即存在常数a和b，使得$P\{Y=aX+b\}=1$成立）

证明：对任意的实数t，有

$$D(tX+Y)=t^2D(X)+D(Y)+2tCov(X,Y)$$

令 $g(t)=t^2D(X)+2Cov(X,Y)t+D(Y)$ 为关于t的二次三项式。

由方差的性质知$g(t)\ge 0$，故判别式小于或等于零，即有

$$\Delta=[2Cov(X,Y)]^2-4D(X)D(Y)\le 0$$

$$\therefore [Cov(X,Y)]^2 \le D(X)D(Y)$$

若 $[Cov(X,Y)]^2 = D(X)D(Y)$

此时 $t^2 D(X) + 2Cov(X,Y)t + D(Y) = 0$

有唯一的根，记为t_0，即 $g(t_0)=0$

所以有 $D(t_0 X + Y) = 0$

所以有 $P\{t_0 X + Y = E(t_0 X + Y)\} = 1$ 即 $P\{Y = -t_0 X + E(t_0 X + Y)\} = 1$

取 $a = -t_0, b = E(t_0 X + Y)$ 有 $P\{Y = aX + b\} = 1$ 成立。

$$g(t)=D(tX+Y)=t^2D(X)+D(Y)+2tCov(X,Y)$$

反之，若存在常数a和b，使得$P\{Y=aX+b\}=1$ 成立

则有 $P\{-aX+Y=b\}=1$

由方差的性质知 $D(-aX+Y)=0$ 即 $g(-a)=0$

所以有 $\Delta=[2Cov(X,Y)]^2-4D(X)D(Y)=0$

即 $[Cov(X,Y)]^2=D(X)D(Y)$

例3 设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

求$Cov(X+Y, X-Y)$

解：由已知条件有

$X\sim N(0,\sigma^2)$, $Y\sim N(0,\sigma^2)$ 且(X,Y)相互独立

$$Cov(X+Y, X-Y)= Cov(X,X)- Cov(X,Y) + Cov(Y,X)- Cov(Y,Y)$$

$$= Var(X)- Var(Y) =0$$

例4（配对问题）。将n只球(编号为1~n号)随机放进n个盒子(编号为1~n号)中去，一个盒子只装一只球。若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对。记X为总配对数，求EX，DX。

解：设 $X_i=\begin{cases}1, & 第\,i\,号球放入第\,i\,号盒子\\ 0, & 第\,i\,号球未放入第\,i\,号盒子\end{cases}, i=1,2,\cdots,n$

则配对总数 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$

且对任意i有 $P\{X_i=1\}=\dfrac{1\times(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$ $\quad P\{X_i=0\}=1-\dfrac{1}{n}$

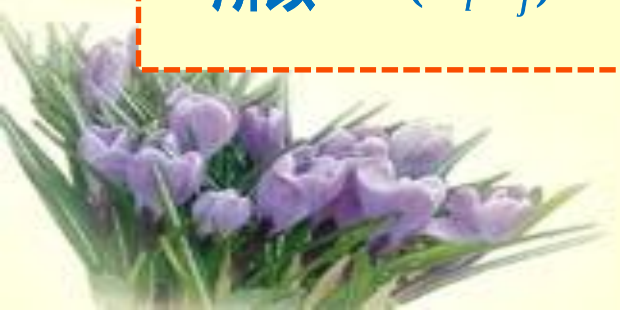
所以由0—1分布的性质得 $EX_i=\dfrac{1}{n},\quad DX_i=\dfrac{1}{n}(1-\dfrac{1}{n})=\dfrac{n-1}{n^2}$

于是有 $EX = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n = n \cdot \dfrac{1}{n} = 1$

另外，当$i \neq j$时，$P\{X_i X_j = 1\} = P\{X_i = 1,\ X_j = 1\} = \dfrac{1 \times (n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

$$P\{X_i X_j = 0\} = 1 - P\{X_i X_j = 1\} = 1 - \frac{1}{n(n-1)}$$

所以 $E(X_i X_j) = 1 \times P\{X_i X_j = 1\} = \dfrac{1}{n(n-1)}$



从而可得

$$Cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-EX_iEX_j=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2(n-1)}$$

所以 $$DX=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,X_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n^2}+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{n^2(n-1)}=n\frac{n-1}{n^2}+2C_n^2\frac{1}{n^2(n-1)}=1$$

例5设随机变量$X_1, X_2,\ldots, X_n(n>1)$独立同分布，且它们共同的方差为$\sigma^2>0$，令 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, Y_1=X_1-\bar{X}, Y_n=X_n-\bar{X}$. 求$D(Y_1)$以及$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$。

解：由方差的性质可得：

$$D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i \quad =\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

又易知

$$Cov(X_1,\bar{X})=Cov(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=Cov(X_1,\frac{1}{n}X_1)=\frac{1}{n}D(X_1)=\frac{\sigma^2}{n}$$

同理有 $Cov(X_n, \bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

所以

$$D(Y_1) = D(X_1 - \bar{X})$$

$$= D(X_1) + D(\bar{X}) - 2Cov(X_1, \bar{X})$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

由协方差的性质可得

$$Cov(Y_1,Y_n)=Cov(X_1-\bar{X},X_n-\bar{X})=Cov(X_1,X_n)-Cov(X_1,\bar{X})-Cov(X_n,\bar{X})+Cov(\bar{X},\bar{X})$$

$$=0-Cov(X_1,\bar{X})-Cov(X_n,\bar{X})+D(\bar{X})=0-\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}=-\frac{\sigma^2}{n}$$

协方差的大小在一定程度上反映了X和Y相互间的关系，但它还受X与Y本身度量单位的影响.例如：

$$Cov(kX, kY)=k^2Cov(X,Y)$$

为了克服这一缺点，对协方差进行标准化，这就引入了相关系数 .

休息片刻继续下一讲

相关系数

若二维随机变量(X, Y)的分量的方差

$Var(X)$, $Var(Y)$都存在，且$Var(X)>0$, $Var(Y)>0$,

则称

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

为随机变量X和Y的相关系数.

在不致引起混淆时，记ρ_{XY}为 ρ .

若$\rho_{XY}=0$ 则称X, Y不相关；

若$\rho_{XY}>0$ 称X, Y 正相关；

若$\rho_{XY}<0$ 则称X, Y负相关

例6 设 $X \sim N(0,4)$，$Y \sim \pi（2）$，$\rho_{XY}=1/2$，$E(X+Y)^2$

解： 由已知条件有

$$E(X)=0, D(X)=4, \quad E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=4$$

$$E(Y)=D(Y)=2, \quad E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=6$$

$$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{Var(X)Var(Y)}=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{2}$$

$$E(XY)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)=\sqrt{2}$$

所以 $$E[(X+Y)^2]=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)$$

$$=4+2\sqrt{2}+6=10+2\sqrt{2}$$

例7　设$X \sim U[0,2\pi]$, $Y=cos(X)$, 求ρ_{XY}

例8 设(X,Y)在圆域

$$D=\{(x,y);x^2+y^2\le r^2\}\ (r>0)$$

上服从均匀分布，**判断X,Y是否不相关,是否独立**。

解： 由题意 (X,Y)的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le r^2}x\frac{1}{\pi r^2}dxdy=0$$

同理$E(Y)=0$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le r^2}xy\frac{1}{\pi r^2}dxdy=0$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

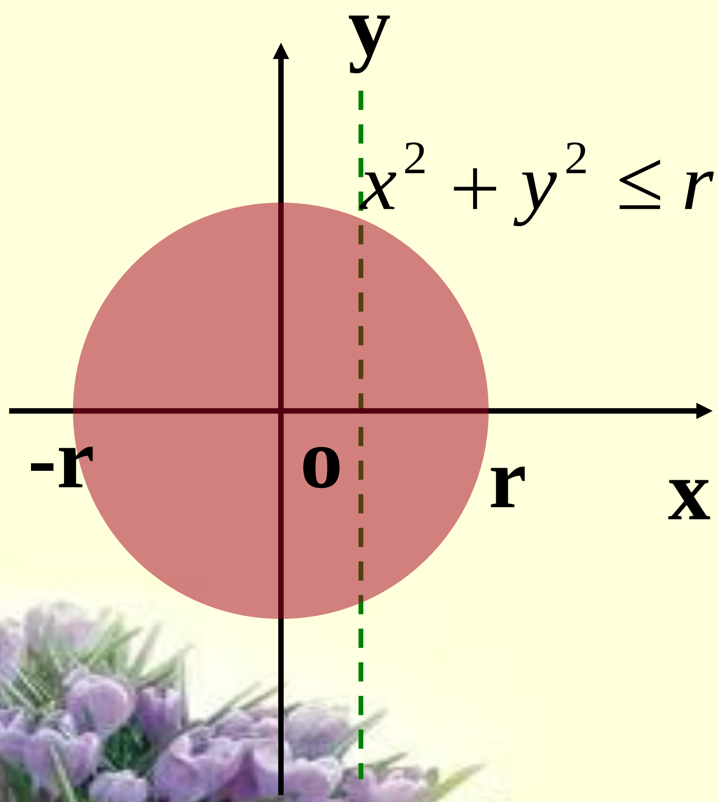
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

若 $|x|\le r$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$\boldsymbol{f_X(x)=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}\,dy}$$

$$=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}$$



$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2} & |x|\le r\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2} & |y|\le r\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le r^2\}$$

$$f(x, y) \ne f_X(x) f_Y(y), \qquad (x, y) \in D$$

X, Y不独立

例9 设(X, Y)服从二维正态分布

$$N(\mu_{1,}\sigma_1^2;\mu_{2,},\sigma_2^2,\rho)$$

求X和Y的相关系数

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}$$

$$[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}dxdy$$

令$u = \dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}uv\cdot\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)\}dv\,du$$

$$u^2-2\rho uv+v^2$$

$$=(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}uv\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot$$

$$[(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2]\}dv\,du$$

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} uv\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2]\}dvdu$$

$$令 t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(v-\rho u), \quad u = u$$

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(\rho u+\sqrt{1-\rho^2}\,t)\exp(-\frac{1}{2}t^2)\exp(-\frac{1}{2}u^2)dtdu$$

$$= \rho\sigma_1\sigma_2(\int_{-\infty}^{\infty} u^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}u^2)du)(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}t^2)dt)$$

$$+\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2(\int_{-\infty}^{\infty} u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}u^2)du)(\int_{-\infty}^{\infty} t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}t^2)dt)$$

$$= \rho\sigma_1\sigma_2$$

独立与相关的关系

(1) X,Y相互独立 $\Longrightarrow$ X,Y不相关

$\not\Longleftarrow$

X,Y不相关 $\Longleftrightarrow$ $\rho_{XY}=0$

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{cov}(X,Y)=0$

$\Longleftrightarrow$ $E(XY)=E(X)E(Y)$

$\Longleftrightarrow$ $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$

(2) 若 X,Y服从二维正态分布，

X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ X,Y不相关

相关系数的性质

$$(1)\ |\rho| \le 1$$

$$(2)\ |\rho| = 1 \Longleftrightarrow$$ 存在常数$a, b(b\neq0)$，使$P\{Y=a+bX\}=1.$

$\rho_{XY}=1$ 的充要条件是，$P(Y=a+bX)=1(b>0)$

这时称X与Y完全正相关；

$\rho_{XY}=-1$的充要条件是，$P(Y=a+bX)=1(b<0)$

这时称X与Y完全负相关。

相关系数的意义

它是用来刻 画X, Y线性相关程度的一个量。

若$|\rho|$的值越接近于1， X与Y的线性相关程度越高。

若$|\rho|$的值越接近于0, X与Y的线性相关程度越弱。

矩

设二维随机变量(X,Y), k , l 为非负整数。

若$E(X^k)$存在，则称它为X的**k阶原点矩**,记作m_k, 即

$$m_k = E(X^k)$$

若$E(X-E(X))^k$存在,则称它为X的**k阶中心矩**,记作c_k,

即 $c_k = E(X-E(X))^k$

若$E(X^kY^l)$存在，则称它为X和Y的**(k,l)阶混合矩**,

记作m_{kl}, 即$m_k=E(X^kY^l)$

若$E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]$存在,

则称它为X和Y的 **(k,l)阶混合中心矩**，记作c_{kl} , 即

$$c_{kl} = E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]。$$

关于矩有下述结论：设k为正整数。

(1)　若$E(X^k)$存在，则对小于k的一切非负整数l，$E(X^l)$存在.

(2)　原点矩与中心矩可相互表示。

例10 **求标准正态分布的各阶矩.**

设X~N(0,1), $m_k = c_k = E(X^k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

若k为奇数， $c_k = 0$

若k为偶数，

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2) \quad 2^{-(n-1)/2}\sqrt{\pi}$$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\frac{x^2}{2}=t}{=} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k-1}{2}} \int_0^{\infty} t^{\frac{k-1}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

$$= 1\cdot 3\cdot 5\cdots(k-1)$$

第四章

作业3：36,40,42,44,45


稍事休息