概率与数理统计试题答案

一、填空题

1. 0.1； 2. 1，1 3. $N(-1, 3)$ 4. $\frac{26}{3}$ 5. $\chi^2(4)$ 6. λ 7. $\frac{2}{n}$ 8. [53.8，64.48]

二、

解：设 B={该地区居民患高血压病}，

A_1={肥胖者居民}，A_2={不胖不瘦居民}，A_3={瘦者居民 }.

则由题意知 $P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.82, P(A_3)=0.08$，

$$P(B\mid A_1)=0.2, P(B\mid A_2)=0.1, P(B\mid A_3)=0.05$$

（1）利用全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=0.1\times0.2+0.82\times0.1+0.08\times0.05=0.106\end{aligned}$$

（2）利用 Bayes 公式得

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{0.1\times0.2}{0.106}=\frac{10}{53}$$

三、

解：1. 由于 $y=2(\theta-1)\ln x$ 是 x 的严格单调递增函数

且反函数为 $x=e^{\frac{1}{2(\theta-1)}y}$， $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2(\theta-1)}e^{\frac{1}{2(\theta-1)}x}$，

由此得到 $Y=2(\theta-1)\ln X$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2. 易知 $2(\theta-1)\ln X_i$ ： $\chi^2(2)$，且相互独立，由可加性知

$$Z=2(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i ： \chi^2(2n)$$

四、

解：1. 由

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}ae^{-x-y}dx=a$$

得

$$a=1$$

2. X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}dy, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x}dx, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

3. 由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，因此 X 和 Y 相互独立.

4. $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\begin{cases} \int_0^{z} e^{-z}dx, & z>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} ze^{-z}, & z>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

五、

解：设需要车位数位 x，设 X_i 为第 i 户住户拥有的车辆数，由已知

$EX_i=0\times0.1+1\times0.6+2\times0.3=1.2,\quad E(X_i^2)=0^2\times0.1+1^2\times0.6+2^2\times0.3=1.8$

$DX_i=E(X_i^2)-(EX_i)^2=0.36$

由中心极限定理可知

$\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i-100\times1.2}{\sqrt{100\times0.36}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i-120}{6}$ 近似服从 $N(0,1)$分布，

因此 $P(\sum_{i=1}^{100} X_i\le x)=P(\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i-120}{6}\le\dfrac{x-120}{6})\approx\Phi(\dfrac{x-120}{6})\ge0.95$

已知 $\Phi(1.645)=0.95$，因此有

$$\frac{x-120}{6}\ge1.645$$

解得 $x\ge129.87$，即至少需要 130 个车位。

六、

1. 解：设每天生产的产品数为 n，X 为 n 件产品中的合格品数，Y 为企业每天的获利。

由题意可知，X： $B(n,0.96)$， 因此 $EX=0.96n$ 。

另一方面每天的获利 $Y=80X-20(n-X)=100X-20n$，因此

$EY=E(100X-20n)=100EX-20n=100\times0.96\times n-20n=76n$

由此可得

$$76n\ge10000$$

解得 $n>131.6$，即企业每天至少生产 132 件产品。

2. 解： $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^1 x(2-x-y)dy=\frac{5}{12},E(Y)=\int_0^1 dy\int_0^1 y(2-x-y)dx=\frac{5}{12}$

$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2(2-x-y)dy=\frac{1}{4},E(Y^2)=\int_0^1 dy\int_0^1 y^2(2-x-y)dx=\frac{1}{4}$

$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{11}{144},D(Y)=E(Y^2)-(EY)^2=\frac{11}{144}$

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^1 xy(2-x-y)dy=\frac{1}{6},Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=-\frac{1}{144}$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=-\frac{1}{11}$

七、

1. 解：（1）由于 $\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$

解得 $\theta=\frac{2\mu_1-1}{1-\mu_1}$

用 $\bar{X}$ 代替 μ_1,得θ的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$ +5

（2）似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{-\theta}=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta}$

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

对 θ 求导并令其为零，得 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$

最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$。

2. （1）证明：易知 $ES_1^2=DX=\sigma^2$， $ES_2^2=DY=\sigma^2$

所以 $EZ=E(aS_1^2+bS_2^2)=aES_1^2+bES_2^2=(a+b)\sigma^2=\sigma^2$

即 $Z=S_1^2+S_2^2$ 是 σ^2 的无偏估计

（2）解：由抽样分布定理知 $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1)$， $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$

所以 $D[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}]=2(n_1-1)$ 故有 $DS_1^2=\frac{2\sigma^4}{n_1-1}$，同理 $DS_2^2=\frac{2\sigma^4}{n_2-1}$

又由 S_1^2 和 S_2^2 的独立性，以及方差的性质知.

$$DZ = D(aS_1^2 + bS_2^2) = a^2 DS_1^2 + b^2 DS_2^2 = 2\sigma^4\left(\frac{a^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-a)^2}{n_2 - 1}\right)$$

令 $g(a) = \frac{a^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-a)^2}{n_2 - 1}$ 得 $g'(a) = \frac{2a}{n_1 - 1} - \frac{2(1-a)}{n_2 - 1} = 0$

解得 $a = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$， $b = \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$

即当 a, b 为以上两个值时，对应的 Z 最有效.

八、

1、第一类错误：原假设成立时拒绝原假设

第二类错误：原假设不成立时，接受原假设

2、解： H_0： $\mu = \mu_0 = 4.55$ H_1： $\mu \neq \mu_0 = 4.55$

检验统计量 $T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} t(n-1)$

拒绝域 $|t| = \left|\frac{x - \mu_0}{s / \sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$

计算得 $|t| = \left|\frac{4.46 - 4.55}{0.12 / 3}\right| = 2.25 < 2.306$

未落入拒绝域，不拒绝原假设，认为铁水含碳量正常。