

# 多维随机变量及其分布

## 第三章

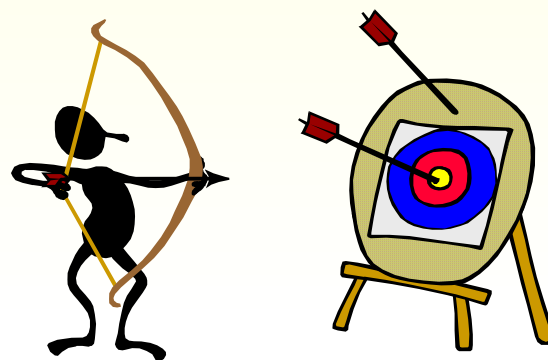
## § 3.1 二维随机变量及其分布

到现在为止，我们只讨论了一维随机变量及其分布. 但有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述.

**例：**在研究四岁至六岁儿童的生长发育中，每个儿童的身高 $X_1$ ，体重 $X_2$ 是两个重要的指标，此时 $(X_1, X_2)$  为二维随机变量。



**例：**在打靶试验中，我们要考察弹着点是上下偏离目标还是左右偏离目标，这时需要考虑弹着点的位置坐标  $(X, Y)$  。



例



在三维空间中，飞机的重心在空中的位置是由三个随机变量（三个坐标 $X, Y, Z$ ）来确定的。

$X, Y, Z$  都是随机变量，则称 $(X, Y, Z)$ 是三维随机向量。

## 说明

**二维随机变量  $(X, Y)$  的性质不仅与  $X$ 、 $Y$  有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.**

## 定义

给定概率空间  $(S, \mathfrak{F}, P)$ , 若  $X_1, \dots, X_n$  是定义在样本空间  $S$  上的  $n$  个随机变量, 则称

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

为  $n$  维随机变量, 或称  $n$  维随机向量

## 本章主要研究下列问题

- (1)  $(X, Y)$ 的联合分布与边缘分布
- (2)  $(X, Y)$ 的分量 $X$ 与 $Y$ 的关系
- (3)  $(X, Y)$ 的一些简单函数的分布



## 本节主要内容

二维随机变量  
(X,Y)

离散型

联合分布律  
边缘分布律

连续型

联合密度函数  
边缘密度函数

联合分布函数  $F(x,y)$   
边缘分布函数  $F_X(x)$   $F_Y(y)$

# 联合分布函数

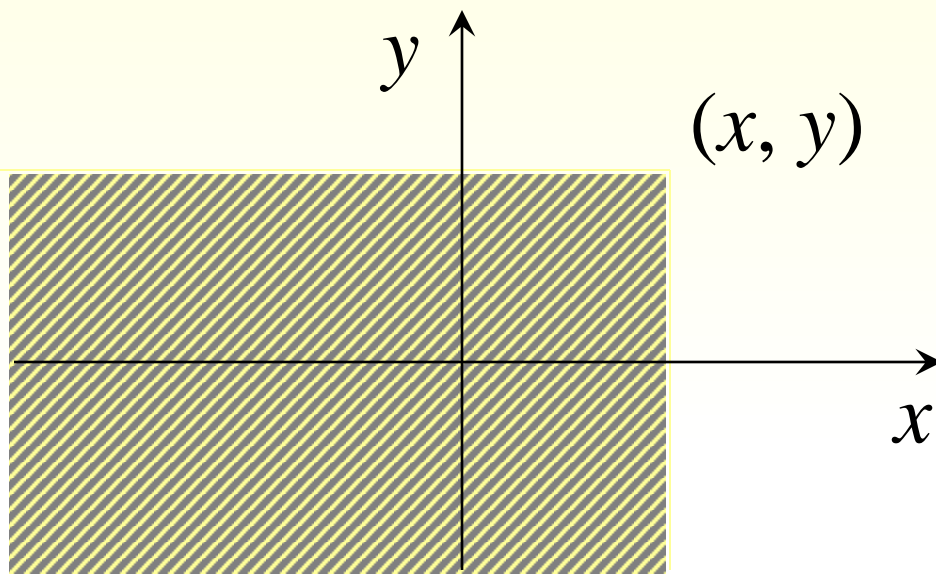
设  $(X, Y)$  是二维随机变量，对任意的实数  $x, y$  令

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

则称  $F(x, y)$  为  $(X, Y)$  的联合分布函数。

# 分布函数的几何意义

如果用平面上的点 $(x, y)$ 表示二维随机变量 $(X, Y)$ 的一组可能的取值, 则 $F(x, y)$ 表示 $(X, Y)$ 的取值落入下图所示的角形区域的概率



# $F(x, y)$ 的性质

## 性质1(单调性)

对于 $x$  和 $y$ ,  $F(x, y)$ 都是**单调不减**函数,

即若 $x_1 < x_2$ , 对任意的实数 $y$ , 则有

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y);$$

若 $y_1 < y_2$ , 对任意的实数 $x$ , 则有

$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$$

## 性质2 (规范性)

对于任意 $x$  和 $y$ ,有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$$

$$\lim_{x, y \rightarrow +\infty} F(x, y) = 1$$

### 性质3 (右连续性)

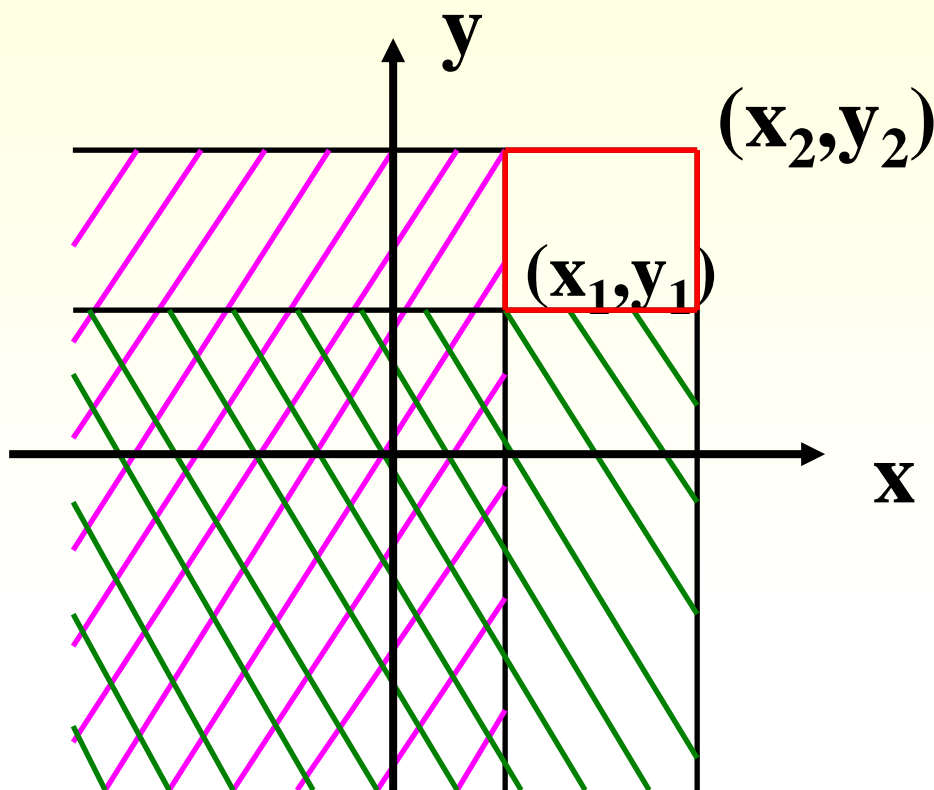
对于 $x$  和 $y$ ,  $F(x, y)$ 都是右连续的, 即对任意的实数 $x_0$ 和 $y_0$ , 均有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x, y) = F(x_0, y),$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0)$$

## 性质4(单调性)

若  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ , 则  $P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$



## 说明

上述四条性质是二维随机变量分布函数的最基本的性质，即任何二维随机变量的分布函数都具有这四条性质；

更进一步地，我们还可以证明：如果某一二元函数具有这四条性质，那么，它一定是某一二维随机变量的分布函数（证明略）。



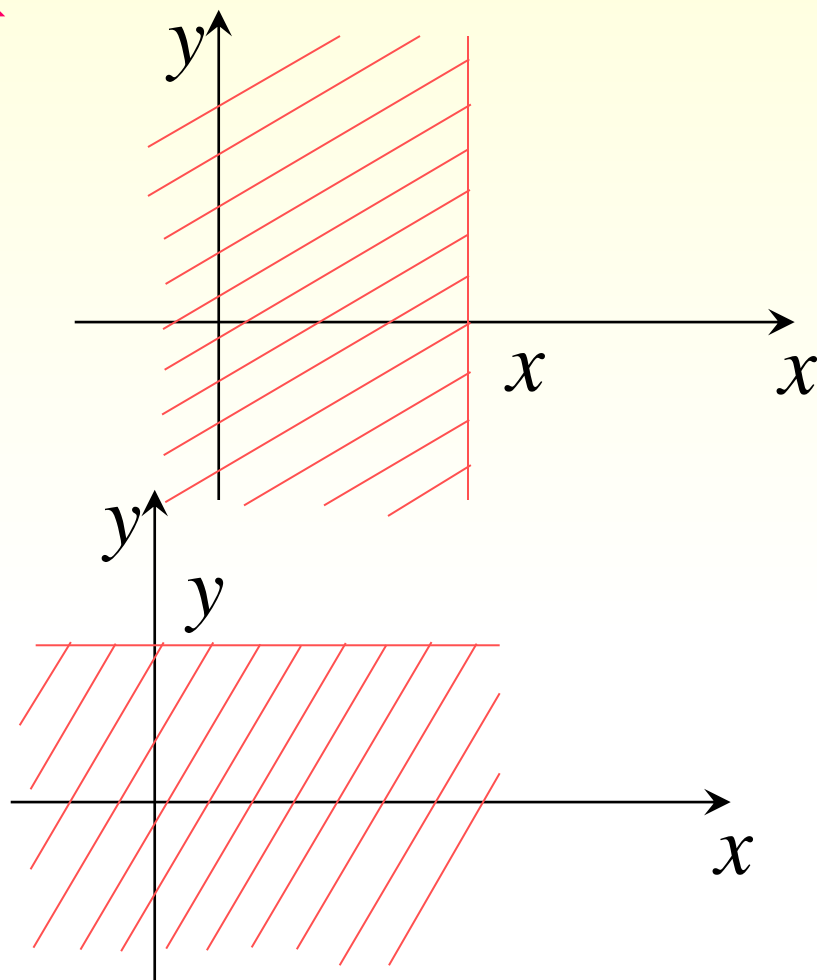
# 边缘分布函数

记 $(X, Y)$ 的分量 $X$ ,  $Y$ 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$   
称它们为 $(X, Y)$ 的边缘分布函数

## 联合分布函数与边缘分布

$$\begin{aligned}F_X(x) &= P(X \leq x) \\&= P(X \leq x, Y < +\infty) \\&= F(x, +\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\&= P(X < +\infty, Y \leq y) \\&= F(+\infty, y)\end{aligned}$$



**例1： 设**

$$(X, Y) \sim F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y-\lambda xy} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\lambda > 0$

**求  $(X, Y)$  的边缘分布函数。**

**例2** 设二维随机变量 $(X, Y)$ 的联合分布函数为

$$F(x, y) = A \left( B + \arctan \frac{x}{2} \right) \left( C + \arctan \frac{y}{2} \right)$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

**其中** $A, B, C$  **为常数.**

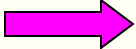
**(1) 确定** $A, B, C$ ;

**(2) 求** $(X, Y)$  **的边缘分布函数;**

**(3) 求** $P(X > 2)$

**解** (1)  $F(+\infty, +\infty) = A \left( B + \frac{\pi}{2} \right) \left( C + \frac{\pi}{2} \right) = 1$

$$F(-\infty, +\infty) = A \left( B - \frac{\pi}{2} \right) \left( C + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$
$$F(+\infty, -\infty) = A \left( B + \frac{\pi}{2} \right) \left( C - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

  $B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{2}, A = \frac{1}{\pi^2}$

(2)  $F_X(x) = F(x, +\infty)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= F(+\infty, y) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{2}, \quad -\infty < y < +\infty,
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\
 &= 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

## 3.2.1 离散型随机向量及其分布

**定义:** 若二维随机变量 $(X, Y)$ 可能取的值(向量)是有限多个或可列无穷多个, 则称 $(X, Y)$ 为二维离散型随机变量。

# 联合分布律

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 所有可能的取值为

$$(x_i, y_j), \quad i, j=1,2,\dots,$$

取这些值的概率为

$$p_{ij} = P\{X=x_i, Y=y_j\} \quad i, j=1,2,\dots \quad (1)$$

称 (1) 式为 $(X,Y)$ 的联合分布律.

$(X, Y)$ 的联合分布律可以用表格的形式表示如下

$Y$ $X$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_j$	$\cdots$
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\cdots$	$p_{1j}$	$\cdots$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\cdots$	$p_{2j}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$x_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$\cdots$	$p_{ij}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		



## 性质

$$(1) \ p_{ij} \geq 0, \ i, j=1, 2, \dots$$

$$(2) \ \sum_{i, j} p_{ij} = 1$$

## 边缘分布律

若 $(X,Y)$ 为离散型随机变量, 则 $X,Y$ 均为离散型随机变量。记分量 $X$ 和 $Y$ 的分布律分别为

$$p_{i.} = P\{X = x_i\}, \quad i=1, 2, \dots \quad (2)$$

$$p_{.j} = P\{Y = y_j\}, \quad j=1, 2, \dots \quad (3)$$

称(2)和(3)分别为 $(X,Y)$ 关于 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布律,  
简称为 $(X,Y)$ 的边缘分布律。

# 联合分布律与边缘分布律的关系

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$  的联合分布律为

$$p_{ij} = \mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\} \quad i, j=1,2,\dots$$

则

$$p_{i.} = \sum_j p_{ij}$$

$$p_{.j} = \sum_i p_{ij}$$

### 例3 (二维两点分布)

袋中有2只白球与3只黑球,现进行无放回的摸球,定义下列随机变量

$$X = \begin{cases} 1 & \text{第一次摸白球} \\ 0 & \text{第一次摸黑球} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{第二次摸白球} \\ 0 & \text{第二次摸黑球} \end{cases}$$

求  $(X, Y)$  的联合分布律与边缘分布律。

<b>Y \ X</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>P(Y=i)</b>
<b>0</b>	<b>3/10</b>	<b>3/10</b>	<b>3/5</b>
<b>1</b>	<b>3/10</b>	<b>1/10</b>	<b>2/5</b>
<b>P(X=i)</b>	<b>3/5</b>	<b>2/5</b>	

例4.设随机变量 $X$ 在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 $Y$ 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一个整数值。

试求 (1)  $(X,Y)$ 的分布律; (2)  $P\{X \leq 2, Y \leq 3\}$ 。

解: (1)  $X, Y$ 所有可能的取值为: 1, 2, 3, 4

易知, 当 $j > i$ 时,  $P\{X = i, Y = j\} = 0$

当 $j \leq i$ 时,  $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j | X = i\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{i}$

$i = 1, 2, 3, 4, j \leq i$

于是 $(X,Y)$ 的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

$$(2) P\{X \leq 2, Y \leq 3\}$$

$$\begin{aligned} &= P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} + P\{X=1, Y=3\} \\ &\quad + P\{X=2, Y=1\} + P\{X=2, Y=2\} + P\{X=2, Y=3\} \\ &= 1/4 + 0 + 0 + 1/8 + 1/8 + 0 = 1/2 \end{aligned}$$

**例5.** 设试验 $E$ 只有3种可能的结果 $A_1, A_2, A_3$ , 对试验 $E$ 进行 $n$ 次独立重复试验, 用 $X_i$ 表示这 $n$ 次试验中事件 $A_i$ 发生的次数,  $P(A_i)=p_i, i=1,2,3$ . 求  $(X_1, X_2)$  的联合分布律和边缘分布律。

$$\begin{aligned} & P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2\} \\ &= C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2} \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! (n-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2} \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! (n-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} (1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2} \\ & \qquad \qquad \qquad k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, n, \quad k_1 + k_2 \leq n. \end{aligned}$$

上式即为 $(X_1, X_2)$  的联合分布律。

$$\begin{aligned}
P\{X_1 = k_1\} &= \sum_{k_2=0}^{n-k_1} P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2\} \\
&= \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \frac{n!}{k_1! k_2! (n-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} (1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2} \\
&= \frac{n!}{k_1! (n-k_1)!} p_1^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \frac{(n-k_1)!}{k_2! (n-k_1-k_2)!} p_2^{k_2} (1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2} \\
&= C_n^{k_1} p_1^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} C_{n-k_1}^{k_2} p_2^{k_2} (1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2} = C_n^{k_1} p_1^{k_1} [p_2 + (1-p_1-p_2)]^{n-k_1} \\
&= C_n^{k_1} p_1^{k_1} (1-p_1)^{n-k_1}
\end{aligned}$$

即  $X_1 \sim b(n, p_1)$

同样的方法可以求得  $X_2 \sim b(n, p_2)$



## 3.2.2 连续型随机向量及其联合密度

**定义** 设二维随机变量 $(X, Y)$ 的分布函数为 $F(x, y)$ 。  
若存在**非负可积**函数 $f(x, y)$ , 对任意实数 $x, y$  有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

则称 $(X, Y)$ 为**连续型**二维随机变量, 且称函数 $f(x, y)$ 为二维随机变量 $(X, Y)$ 的**联合密度函数**, 简称为联合密度或概率密度。

性质:

(1)  $f(x, y) \geq 0;$

(2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = 1$

充要  
条件

(3) 若  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处连续, 则

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

性质:

(4) 设 $G$ 是 $xOy$ 平面上的一个区域, 则有

$$P((X, Y) \in G) = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

步骤:

- 1 在坐标系中画出 $f(x, y)$ 非零区域
- 2 画出区域 $G$
- 3 找到 $f(x, y)$ 非零区域和 $G$ 相交区域
- 4 找到积分限    5 计算积分

**例6** 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  具有**密度函数**

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求分布函数  $F(x, y)$ .

解: 
$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$$

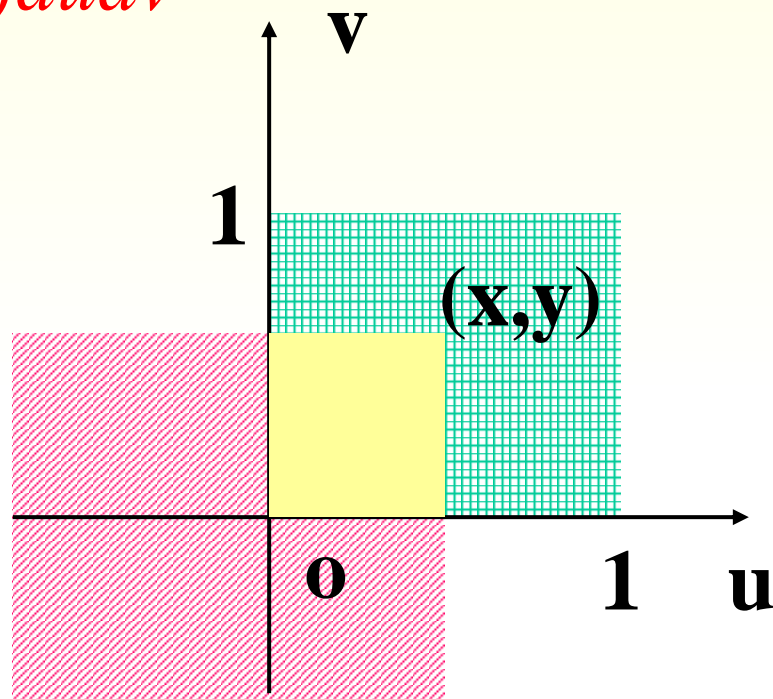
若  $x > 0, y < 0$  或  $x < 0, y > 0$

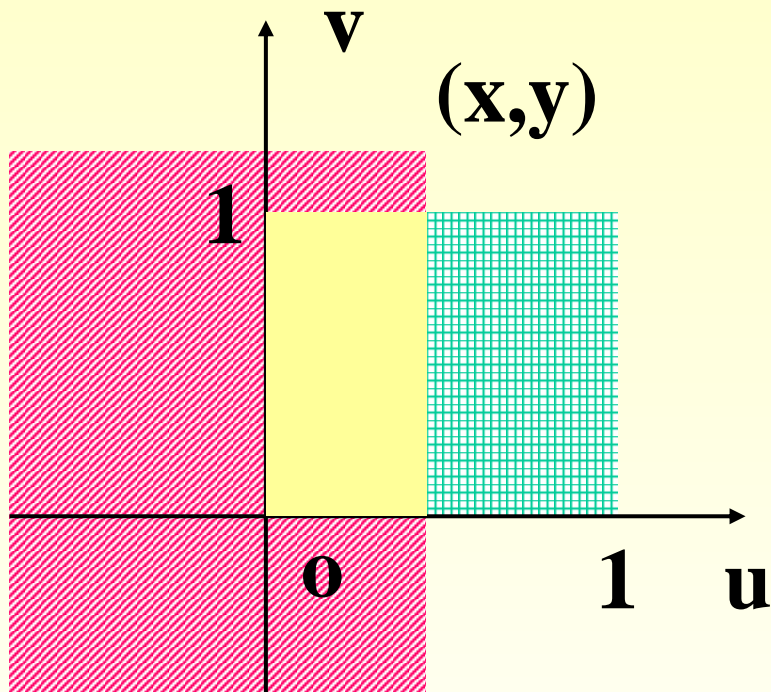
或  $x < 0, y < 0$

$$F(x, y) = 0$$

若  $0 < x < 1, 0 < y < 1$

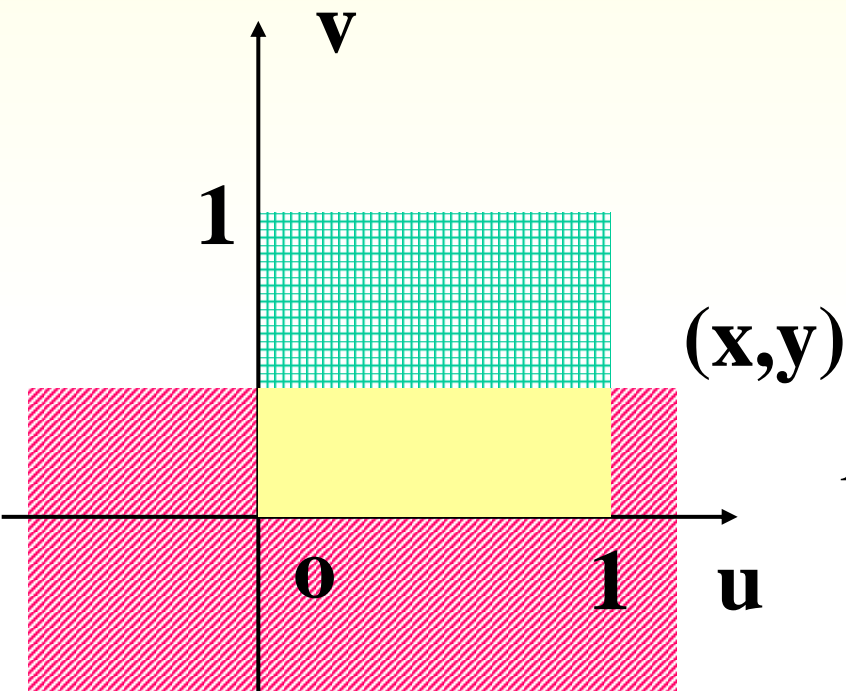
$$F(x, y) = \int_0^y \left[ \int_0^x 4uv du \right] dv = x^2 y^2$$





若  $0 < x < 1, y > 1$

$$F(x, y) = \int_0^1 \left[ \int_0^x 4uv du \right] dv = x^2$$

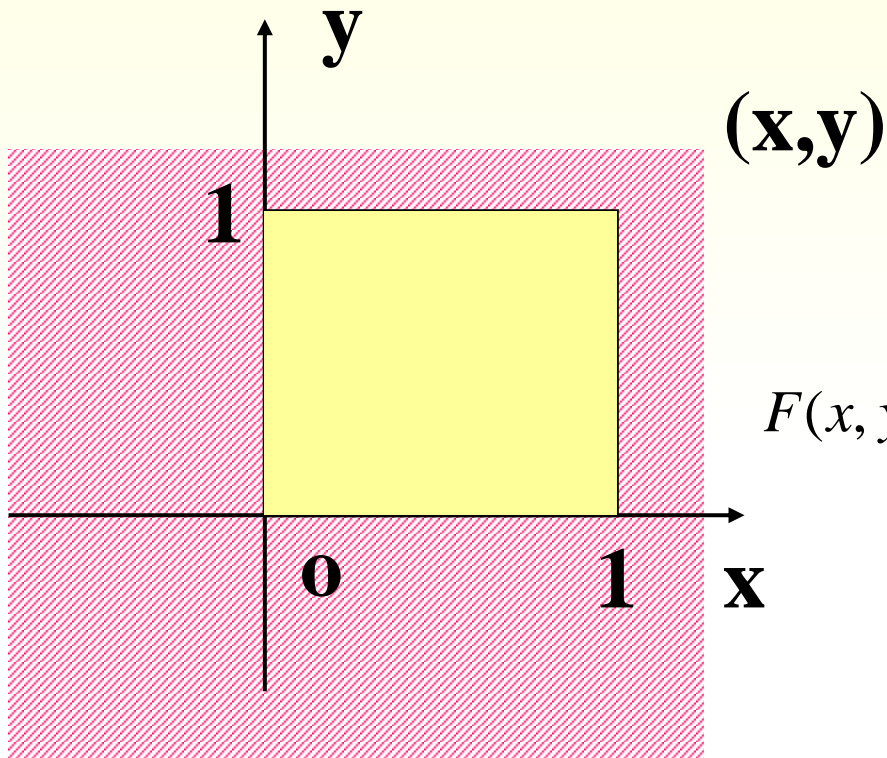


若  $x > 1, 0 < y < 1$

$$F(x, y) = \int_0^y \left[ \int_0^1 4uv du \right] dv = y^2$$

若  $x > 1, y > 1$

$$F(x, y) = \int_0^1 \left[ \int_0^1 4uv du \right] dv = 1$$



$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \\ x^2 y^2 & \\ x^2 & \\ y^2 & \\ 1 & \end{cases}$$

其他

$$\begin{array}{ll} 0 \leq x \leq 1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 < x < 1 & y > 1 \\ x > 1 & 0 < y < 1 \\ & x \geq 1, y \geq 1 \end{array},$$

**例7** 设 $(X,Y)$ 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求(1)  $(X,Y)$ 的联合分布函数 $F(x,y)$ ;

(2)  $P(X > 1)$ ;

(3)  $P\{(X,Y) \in D\}$ , 其中 $D = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ ;

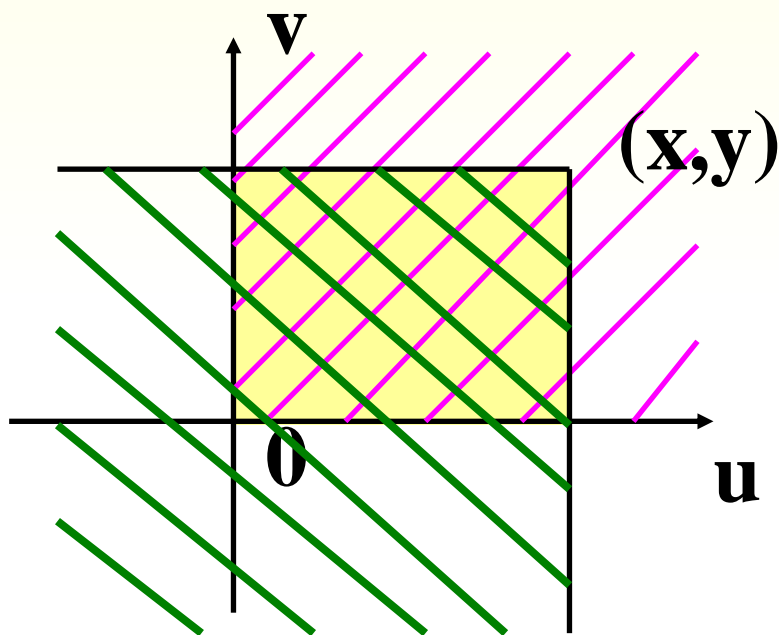
$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(1) \quad F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

若  $x > 0, y > 0$

$$F(x, y) = \int_0^x \left[ \int_0^y e^{-(u+v)} dv \right] du$$

$$= (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$$

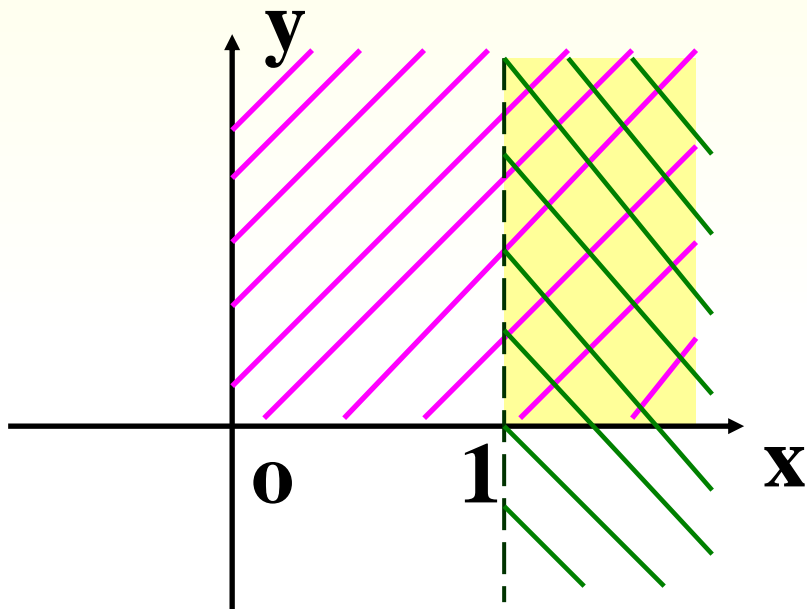


$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



(2)  $P(X > 1)$

$$P(X > 1) = \iint_{x>1} f(x, y) dy dx$$



$$= \int_1^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy \right] dx$$

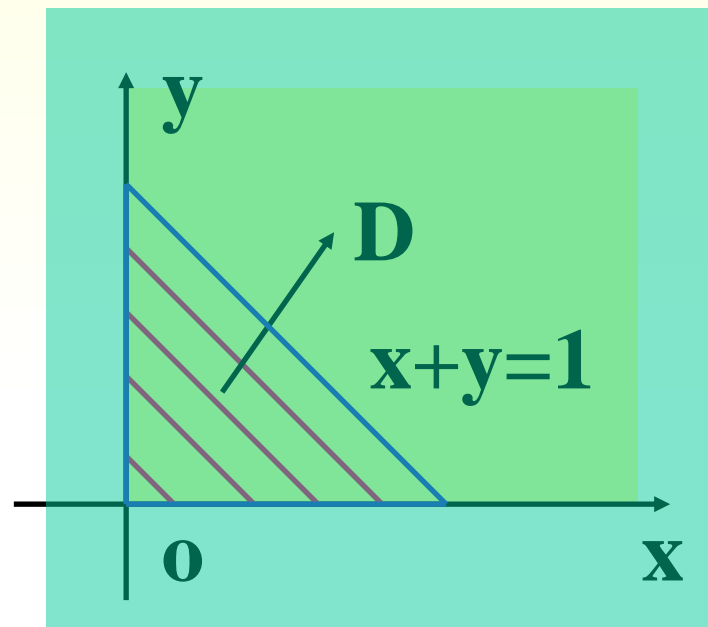
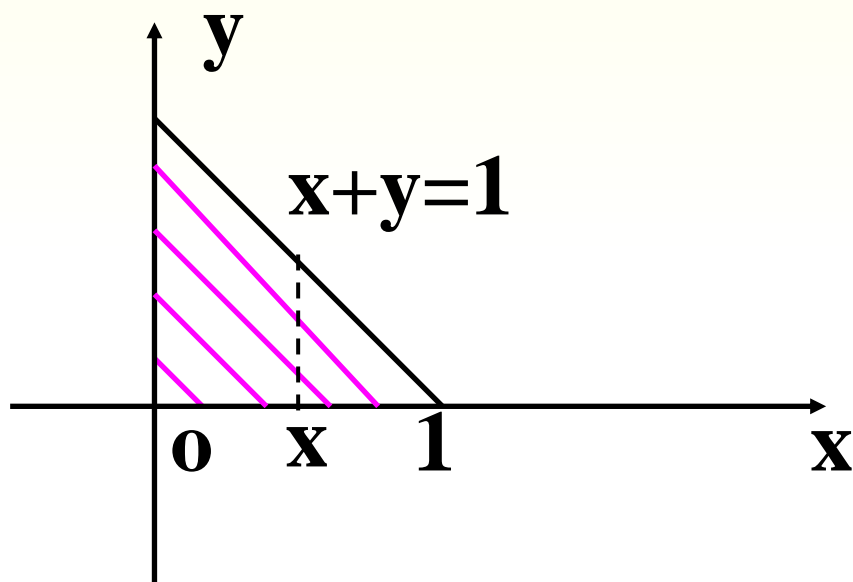
$$= e^{-1}$$

$P\{(X,Y) \in D\}$ , 其中  $D = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ ;

$$(3) \quad P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} e^{-(x+y)} dy \right] dx$$

$$= 1 - 2e^{-1}$$



# 边缘密度函数

若 $(X, Y)$ 为连续型随机变量, 则 $X, Y$ 均为连续型随机变量, 称 $X$  和 $Y$  的概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 为 $(X, Y)$ 关于 $X$ 和 $Y$  的边缘密度函数, 简称为边缘密度。

---

$f(x, y)$ 与 $f_X(x), f_Y(y)$ 之间的关系

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

## 步骤

- 1 画出 $f(x,y)$ 非零区域
- 2 在非零区域内找到 $x$ 的范围
- 3 在上述范围内固定 $x$ ,找到 $y$ 的积分限
- 4 计算积分

**例8** 设 $(X,Y)$ 的概率密度是

$$f(x, y) = \begin{cases} cy(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

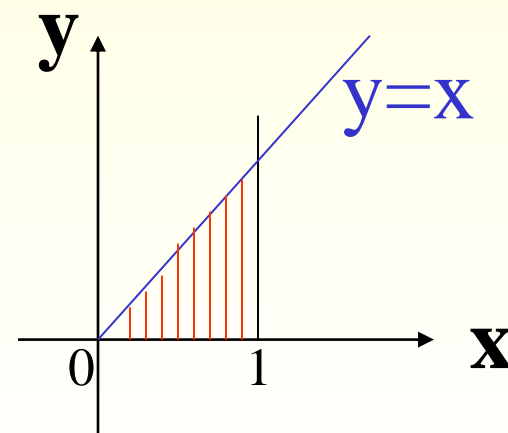
求 (1)  $c$  的值; (2) 两个边缘密度。

解: (1)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$

$$= \int_0^1 \left[ \int_0^x cy(2-x) dy \right] dx$$

$$= c \int_0^1 [x^2(2-x)/2] dx = 5c/24 = 1,$$

$$\Rightarrow c = 24/5$$



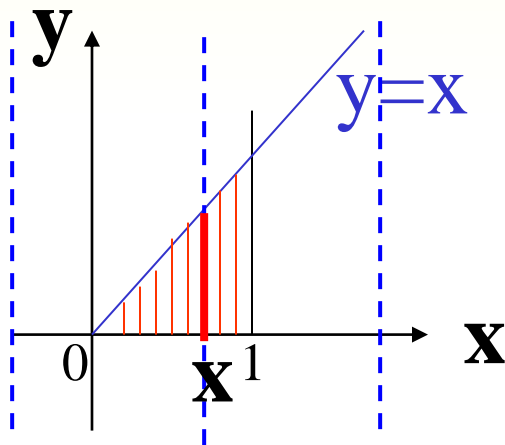
$$f(x, y) = \begin{cases} cy(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (2) 两个边缘密度 .

解: (2)  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

若  $x < 0$  或  $x > 1$   $f_X(x) = 0$

若  $0 \leq x \leq 1$   $f_X(x) = \int_0^x \frac{24}{5} y(2-x) dy$   
 $= \frac{12}{5} x^2 (2-x),$



即

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{12}{5}x^2(2-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

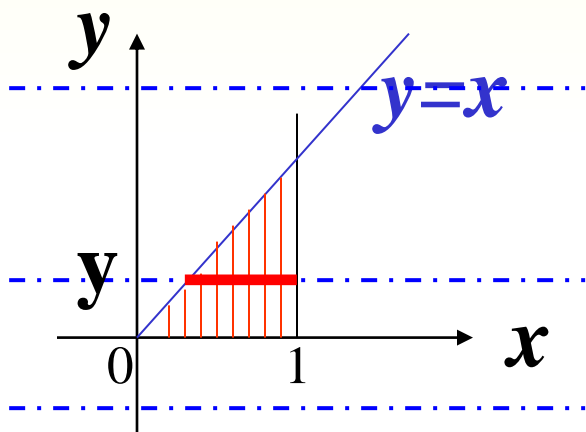
$$f(x, y) = \begin{cases} cy(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (2) 两个边缘密度 .

解: (2)  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$

若  $0 \leq y \leq 1$   $f_Y(y) = \int_y^1 \frac{24}{5} y(2-x) dx$

$$= \frac{24}{5} y \left( \frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2} \right),$$





即

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{24}{5} y \left( \frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2} \right), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

**例9** 设随机变量 $X$  和 $Y$  具有联合分布

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

**求 $X$  和 $Y$  边缘密度**

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

若  $0 < x < 1$

$$f_X(x) = \int_{x^2}^x 6 dy$$

$$= 6(x - x^2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

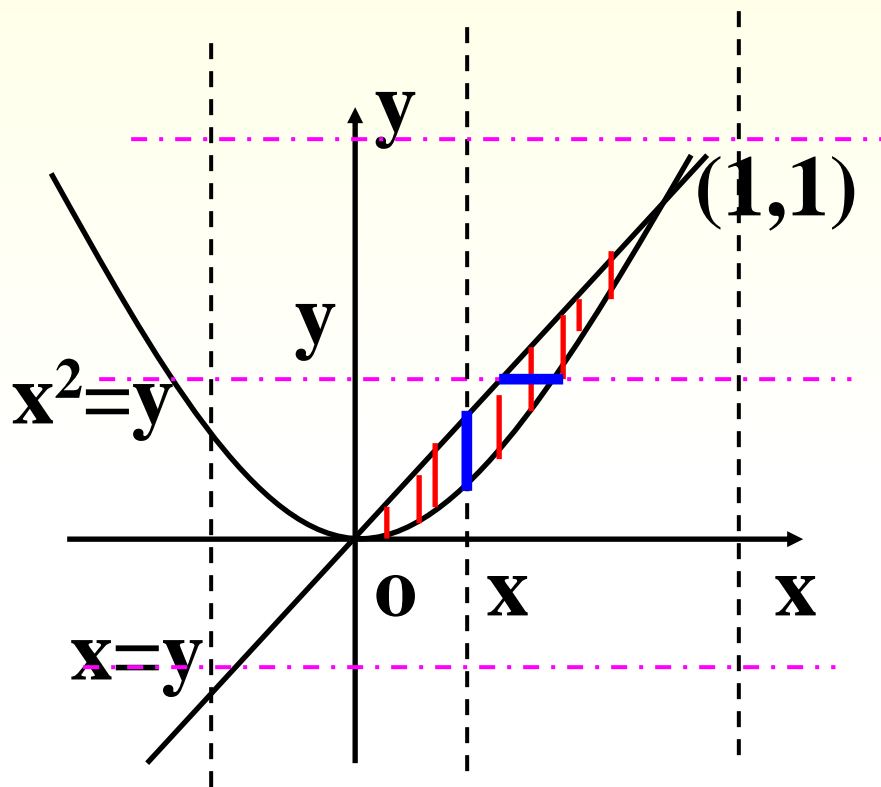
$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

若  $0 < y < 1$

$$f_Y(y) = \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx$$

$$= 6(\sqrt{y} - y)$$



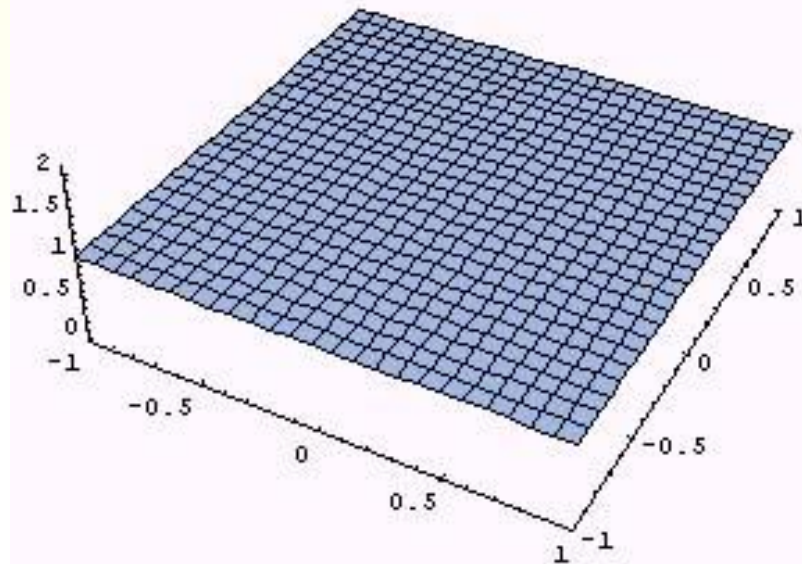
## 二维均匀分布

设 $D$ 为平面上的有界区域, $D$ 的面积大于零.  
若二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/D \text{ 的面积}, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

则称 $(X,Y)$ 在上服从**均匀分布**

向平面上有界区域 $D$ 上任投一质点，若质点落在 $D$ 内任一小区域 $B$ 的概率与小区域的面积成正比，而与 $B$ 的形状及位置无关. 则质点的坐标  $(X,Y)$  在 $D$ 上服从均匀分布.



**例10** 设 $(X, Y) \sim G$  上的均匀分布, 其中

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$$

- (1) 求 $f(x, y)$ ;
- (2) 求 $P(Y > X^2)$ ;

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$$

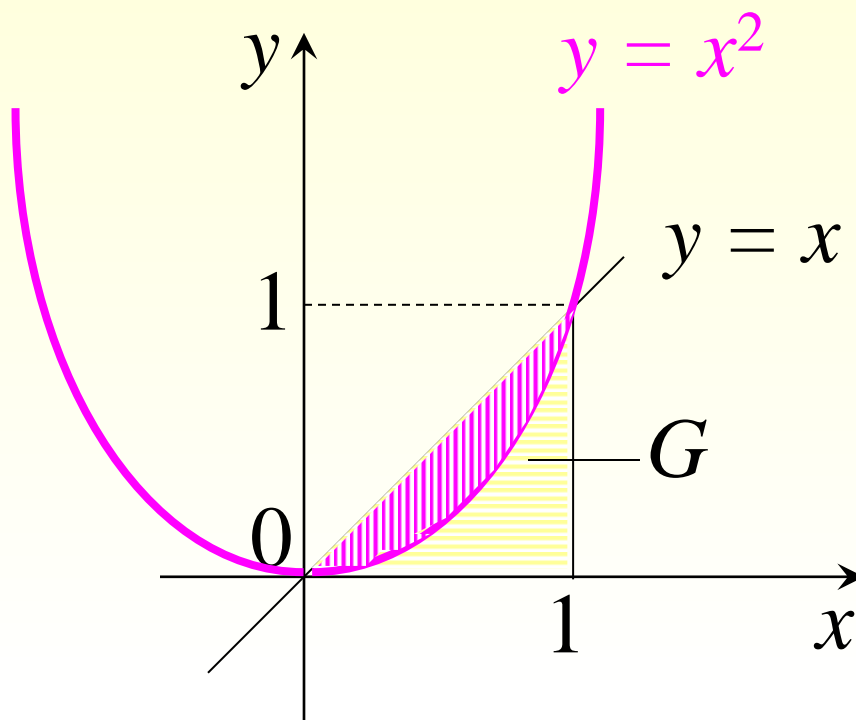
**解** (1)  $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2)  $P(Y > X^2)$

$$= \iint_{y > x^2} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 2 dy$$

$$= \frac{1}{3}$$



## 二维正态分布

若二维随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

其中  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$  均为常数, 且

$$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$$

则称  $(X, Y)$  服从参数为  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$  的二维正态分布.

记作  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$

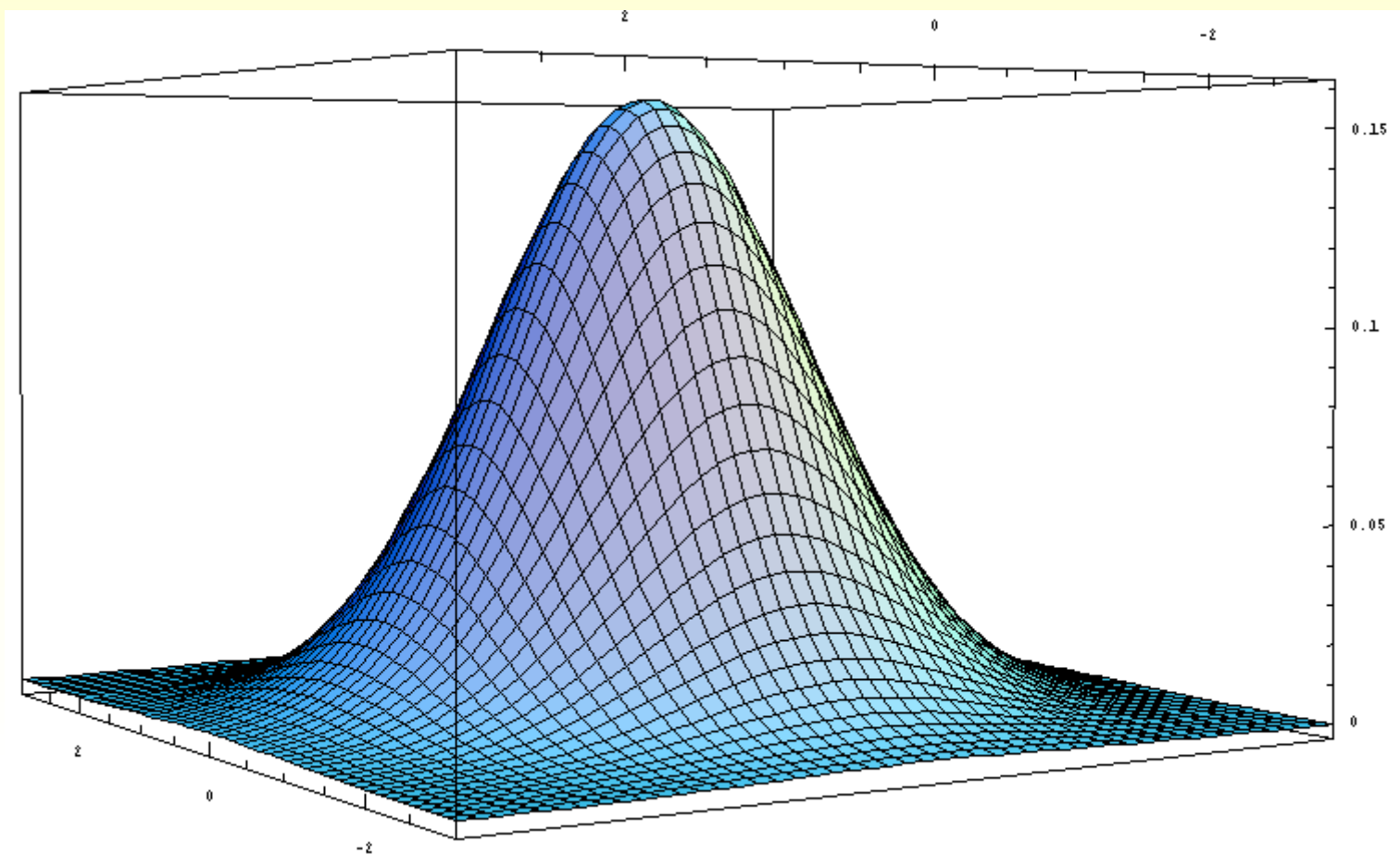


令

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix}$$

则**二维正态**联合密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 |B|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}u^T B^{-1}u}$$



性质:二维正态分布的两个边缘密度仍是正态分布.即

$$\text{若 } (X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$$

$$\text{则 } X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \underbrace{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}_{\text{red underline}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] \right\} dy \end{aligned}$$

$$\text{令 } u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$$

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$

$$\left. (u^2 - 2\rho uv + v^2)\right\} dv$$

$$u^2 - 2\rho uv + v^2$$

$$= (v - \rho u)^2 + (1 - \rho^2)u^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(v - \rho u)^2 + (1 - \rho^2)u^2]\right\} dv$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right. \\
&\quad \left.[(v-\rho u)^2 + (1-\rho^2)u^2]\right\} dv \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v-\rho u)^2\right\} dv \\
&\quad \text{令 } t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(v-\rho u) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}
\end{aligned}$$

# 第三章 作业1：

1,4,5,7,8,9



