

概率论与数理统计

数学与统计学院

董岩

概率论与数理统计

成绩计算

成绩：平时成绩30分+考试成绩70分

平时成绩：包含慕课10分+考勤、作业、随堂测等20分

考试成绩：卷面成绩 $\times 70\%$ ，卷面总分100分。

慕课成绩：包含完成视频观看(根据自身情况自愿选择)；完成每周一次的单元测试（3个选择题，2个判断题）；完成最终的考试（选择题和判断题）

2022秋概率与数理统计（董岩-1）

<https://www.icourse163.org/spoc/course/BIT-1467537176>

密码：dy202201

2022秋概率与数理统计（董岩-2）

<https://www.icourse163.org/spoc/course/BIT-1467555177>

密码：dy202202



讲解内容：第1—8章

目 录

前言

第 1 章 随机事件与概率	1	2.5 一维随机变量函数的分布	83
1.1 样本空间和随机事件	2	2.5.1 离散型随机变量函数的分布	83
1.1.1 随机试验	2	2.5.2 连续型随机变量函数的分布	85
1.1.2 样本空间	3	习题 2	90
1.1.3 随机事件	5	第 3 章 多维随机变量及其分布	94
1.1.4 事件的关系与运算	5	3.1 二维随机变量及其联合分布	94
1.2 事件的概率	10	3.1.1 二维随机变量的联合分布函数	95
1.2.1 古典概率	10	3.1.2 二维离散型随机变量及其分布	97
1.2.2 几何概率	16	3.1.3 二维连续型随机变量及其分布	99
1.2.3 频率	19	3.1.4 重要的二维随机变量及其分布	102
1.2.4 概率的公理化定义	23	3.2 边缘分布	105
1.2.5 概率的性质	24	3.2.1 边缘分布函数	105
1.3 条件概率与乘法定理	29	3.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布律	106
1.3.1 条件概率	29	3.2.3 二维连续型随机变量的边缘密度函数	108
1.3.2 乘法定理	32	3.3 随机变量的独立性	111
1.4 独立性	34	3.4 条件分布	119
1.4.1 两个事件的独立性	34	3.4.1 二维离散型随机变量的条件分布	119
1.4.2 多个事件的独立性	37	3.4.2 二维连续型随机变量的条件分布	121
1.5 全概率公式和贝叶斯公式	41	3.5 二维随机变量函数的分布	125
1.5.1 全概率公式	41	3.5.1 二维离散型随机变量函数的分布	125
1.5.2 贝叶斯公式	44	3.5.2 二维连续型随机变量函数的分布	128
习题 1	47	习题 3	137
第 2 章 随机变量及其分布	51	第 4 章 随机变量的数字特征	141
2.1 随机变量	51	4.1 数学期望	141
2.2 离散型随机变量及其分布律	53	4.1.1 离散型随机变量的数学期望	141
2.2.1 离散型随机变量	53		
2.2.2 几种重要的离散型随机变量	56		
2.3 随机变量的分布函数	67		
2.4 连续型随机变量及其分布	73		
2.4.1 连续型随机变量及其密度函数	73		
2.4.2 几种重要的连续型随机变量	76		

目 录 V

4.1.2 连续型随机变量的数学期望	146	7.2.2 有效性	248
4.1.3 随机变量函数的数学期望	149	7.2.3 相容性	249
4.1.4 数学期望的性质	155	7.3 区间估计	250
4.2 方差	158	7.3.1 区间估计的基本概念和术语	250
4.2.1 方差的概念	159	7.3.2 单个正态总体均值与方差的区间估计	253
4.2.2 方差的性质	164	7.3.3 两个正态总体均值和方差比的估计	257
4.3 协方差和相关系数	167	7.3.4 置信区间	261
4.3.1 协方差的定义	167	7.3.4 非正态总体参数的区间估计	262
4.3.2 协方差的性质	171	习题 7	262
4.3.3 相关系数	174	第 8 章 假设检验	265
4.3.4 例	180	8.1 假设检验	265
*4.4 多维随机变量的数字特征	181	8.1.1 假设检验的基本概念	265
4.4.1 多维随机变量的期望和协方差矩阵	181	8.1.2 假设检验的基本步骤	270
4.4.2 多维正态随机变量	182	8.2 单个正态总体均值与方差的假设检验	270
习题 4	184	8.2.1 单个正态总体方差已知, 均值的假设检验	271
第 5 章 大数定律和中心极限定理	187	8.2.2 单个正态总体方差未知, 均值的假设检验	274
5.1 大数定律	187	8.2.3 单个正态总体均值未知, 方差的假设检验	278
5.1.1 切比雪夫不等式	187	8.2.4 单个正态总体均值已知, 方差的假设检验	280
5.1.2 依概率收敛	189	8.3 两个正态总体均值差与方差比的假设检验	282
5.1.3 大数定律	190	8.3.1 两个正态总体均值差的假设检验	282
5.2 中心极限定理	195	8.3.2 两个正态总体方差比的假设检验	285
习题 5	203	*8.4 非正态总体参数的假设检验	289
第 6 章 数理统计的基本概念	205	8.4.1 指数分布参数的假设检验	289
6.1 一些基本概念	205	8.4.2 两点分布参数的假设检验	291
6.1.1 总体和个体	205	8.5 假设检验与置信区间的关系	292
6.1.2 样本和样本分布	207	8.6 非参数假设检验	293
*6.1.3 参数空间和分布族	209	8.6.1 拟合优度检验	294
6.2 统计量和抽样分布	210	8.6.2 独立性检验	297
6.2.1 统计量	211	8.6.3 符号检验	300
6.2.2 抽样分布	214		
习题 6	230		
第 7 章 参数估计	232		
7.1 点估计	232		
7.1.1 参数的点估计问题	232		
7.1.2 矩估计	233		
7.1.3 最大似然估计	237		
7.2 估计量的评价标准	245		
7.2.1 无偏性	245		

VI 概率论与数理统计

8.6.4 秩和检验	303	10.1.1 因素与水平	340
习题 8	307	10.1.2 数学模型	341
第 9 章 回归分析	310	10.1.3 统计分析	343
9.1 回归分析概述	310	10.2 双因素方差分析	349
9.1.1 回归名称的由来	311	10.2.1 数学模型	349
9.1.2 回归分析研究的内容	310	10.2.2 统计分析	352
9.2 一元线性回归	311	习题 10	359
9.2.1 一元线性回归模型	312	附表	361
9.2.2 未知参数的估计	314	附表 1 常用的概率分布	361
9.2.3 显著性检验	321	附表 2 标准正态分布表	363
9.2.4 预测和控制	326	附表 3 χ^2 分布上分位数表	365
9.3 多元线性回归	330	附表 4 t 分布上分位数表	368
9.3.1 多元线性回归模型	331	附表 5 F 分布上分位数表	370
9.3.2 未知参数的估计	332	附表 6 符号检验表	390
9.3.3 回归方程的显著性检验	336	附表 7 秩和检验表	392
9.3.4 回归系数的显著性检验	337	附表 8 相关系数临界值表	393
习题 9	338	附表 9 泊松分布分布函数表	395
第 10 章 方差分析	340	部分习题参考答案与提示	398
10.1 单因素方差分析	340	参考文献	414

绪 论



概率论的**研究对象**



概率论的**起源 发展**



概率论的**应用**

关键词：**随机现象**

概率论

研究对象是什么？

随机现象



什么是随机现象？
你能举出随机现象的例子吗？

A 太阳从东方升起

B 明天的最高温度



C 上抛物体一定下落

D 新生婴儿的体重



决定性现象

在一定条件下**必然发生**（出现）某一结果的现象称为决定性现象.

在相同的条件下，重复进行实验或观察，它的结果总是**确定不变**的。



随机现象

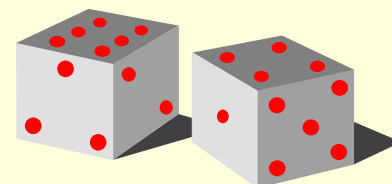
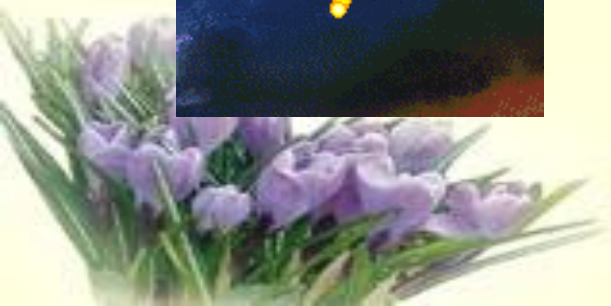
带有随机性，偶然性的现象

在一定条件下，可能出现这样的结果也可能出现那样的结果，在试验或观察前不能预知确切的结果。





在我们所生活的世界上， 充满了随机现象



随机现象是不是没有规律可言？

否！在一定条件下对随机现象
进行大量观测会发现某种规律性。

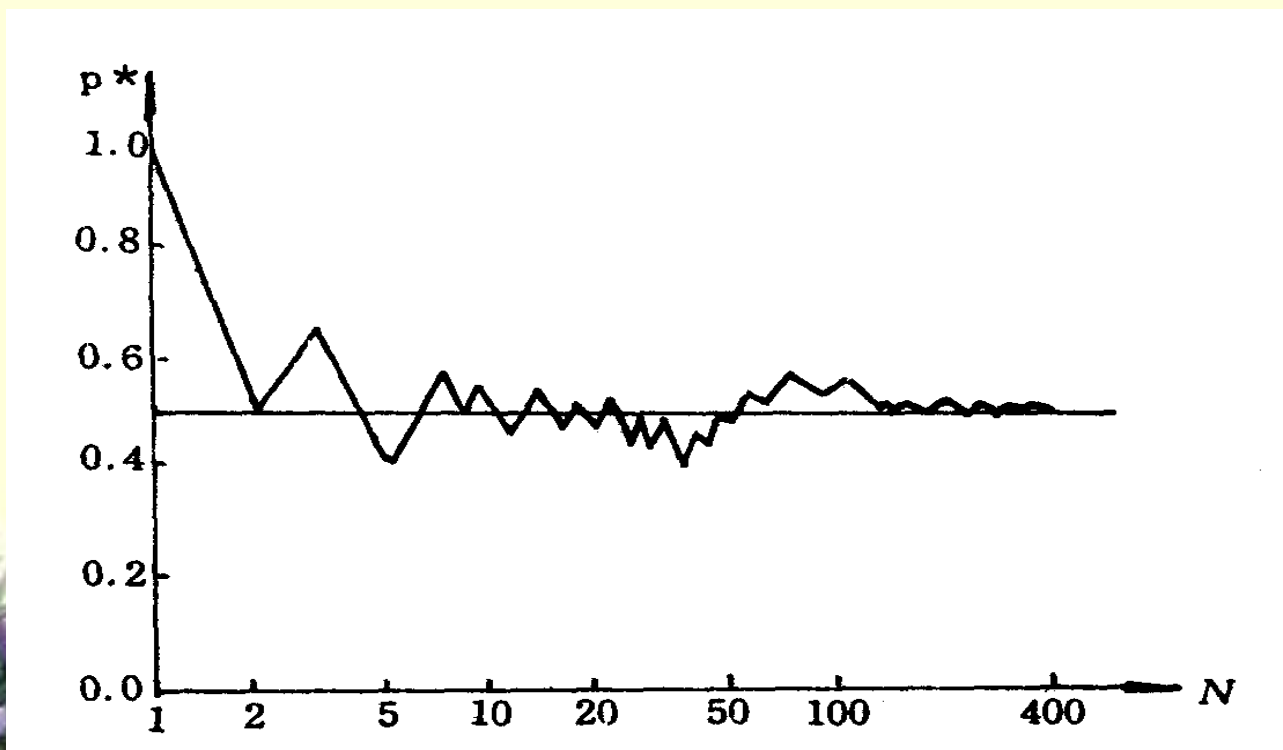


例如

掷硬币试验

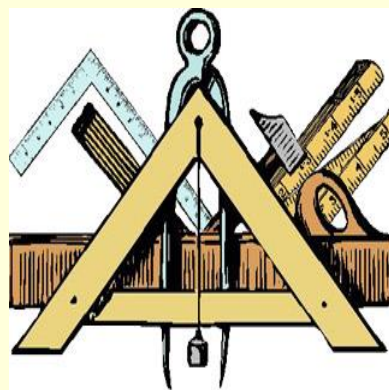
掷一枚均匀硬币，记录前400次掷硬币试验中频率 P^* 的波动情况。

掷一枚硬币，正面出现频率的趋势（横轴为对数尺度）



再如：

测量一物体的长度，由于仪器及观察受到的环境的影响，每次测量的结果可能是有差异的。但多次测量结果的平均值随着测量次数的增加逐渐稳定于一常数。



随机现象



就一次试验而言 偶然性，随机性，
不可预测性



大量试验而言 一定规律性

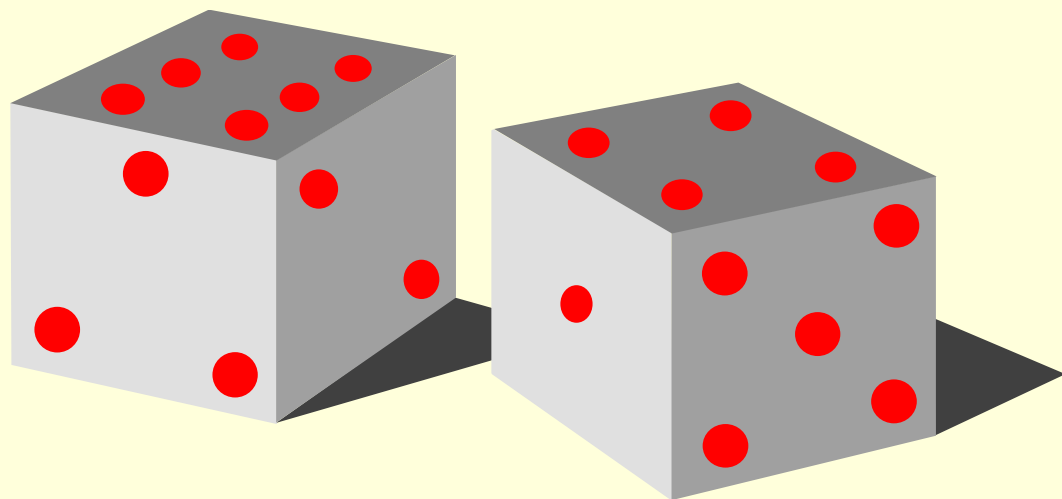


概率论

是研究**随机现象的数量规律**的数学分支



概率论 的起源



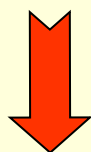
赌博



概率论的发展

16,17世纪

赌博



18世纪

Bernoulli 大数定律

(概率论的第一个极限定理)

Laplace 第二个极限定理



20世纪测度论 积分论

1933

Kolmogorov 概率的公理化体系



本学科的应用

概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中.



例如

1. 气象、水文、地震预报、人口控制及预测都与 **概率论** 紧密相关；
2. 产品的抽样验收，新研制的药品能否在临床中应用，均需要用到 **假设检验**；
3. 寻求最佳生产方案要进行 **实验设计** 和 **数据处理**；



4. 电子系统的设计, 火箭卫星的研制与发射都离不开 可靠性估计;

5. 探讨太阳黑子的变化规律时, 时间序列分析方法非常有用;

6. 研究化学反应的时变率, 要以 马尔可夫过程 来描述;

7. 在生物学中研究群体的增长问题时 提出了生灭型 随机模型, 传染病流行问题要用到多变量非线性生灭过程;

8. 许多服务系统, 如电话通信、船舶装卸、



机器维修、病人候诊、存货控制、水库调度、购物排队、红绿灯转换等，都可用一类概率模型来描述，其涉及到 的知识就是 排队论。

正如法国

数学家 拉普拉斯所说：“生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题。”



第一章 概率论的基本概念



从观察试验开始

研究随机现象，首先要对研究对象进行观察试验。这里的试验，指的是随机试验。



§ 1 样本空间与随机事件

随机试验

对随机现象进行一次观察或试验，统称为试验。

试验若具有下述特点称为随机试验，用 E 表示。

特点

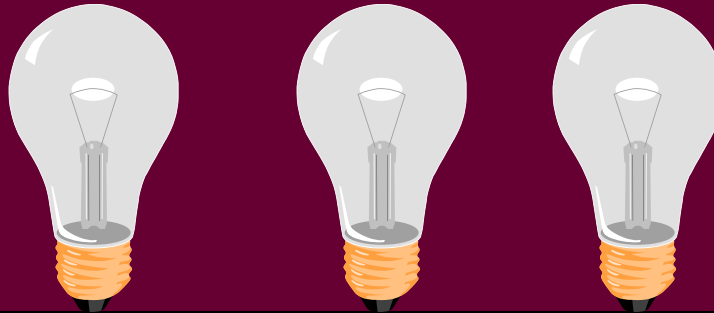
- (1) 试验可以在相同的条件下重复进行；
- (2) 试验的全部可能结果不止一个，并且在试验之前能够明确知道所有的可能结果；
- (3) 每次试验必发生全部可能结果中的一个且仅发生一个



例如

寿命试验

测试在同一工艺条件下生产出的灯泡的寿命。

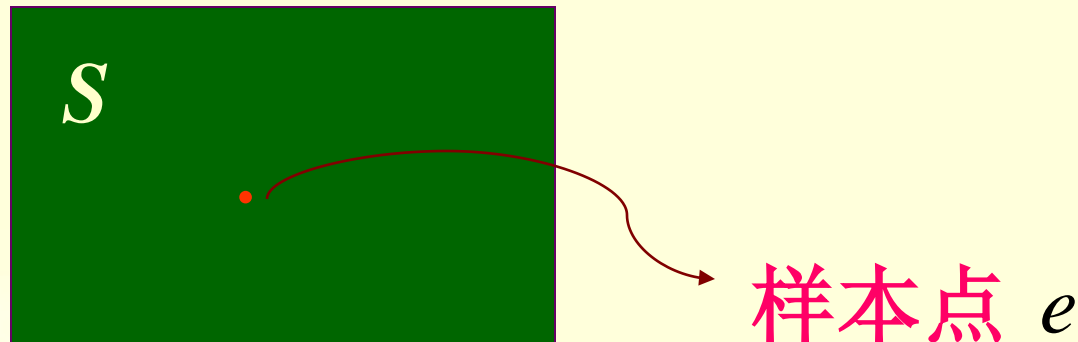


样本空间

试验 E 的所有可能基本结果组成的集合，称为 E 的样本空间，用 S 表示，记为

$$S = \{ e \mid e \text{ 为 } E \text{ 的可能结果} \}$$

样本空间的元素 e ，也称为样本点.



例1 给出一组随机试验及相应的样本空间

E_1 : 投一枚硬币3次, 观察正面出现的次数

$S_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ \longrightarrow **有限样本空间**

E_2 : 观察总机每天9:00~10:00接到的电话次数

$S_2 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

E_3 : 观察某地区每天的最高温度与最低温度

$S_3 = \{(x, y) \mid T_1 \leq x \leq y \leq T_2\}$ \longrightarrow **无限样本空间**

其中 T_1, T_2 分别是该地区的最低与最高温度

有时候，我们更关心的是试验的某个结果是否发生，发生的可能性有多大？

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数。



$$A_i = \{\text{掷出} i \text{点}\}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$



$$B = \{\text{掷出奇数点}\}$$

随机事件

随机试验的某些样本点组成的集合称为随机事件，简称为事件，它常用大写字母 A , B , C 表示. 任意随机事件都是样本空间的某一个子集.

事件的发生

在一次试验中，事件 A 发生的含义是，当且仅当 A 中一个样本点发生（或出现）。事件 A 发生也称为事件 A 出现



基本事件

事件

相对于观察目的
不可再分解的事件

由一个样本点组成的
单点集

复合事件

两个或一些基本事件并在一起，
就构成一个复合事件

由两个以上样本点
组成的点集



特殊的事件：

必 然 事 件

即在试验中必定发生的事件，常用 S 表示；

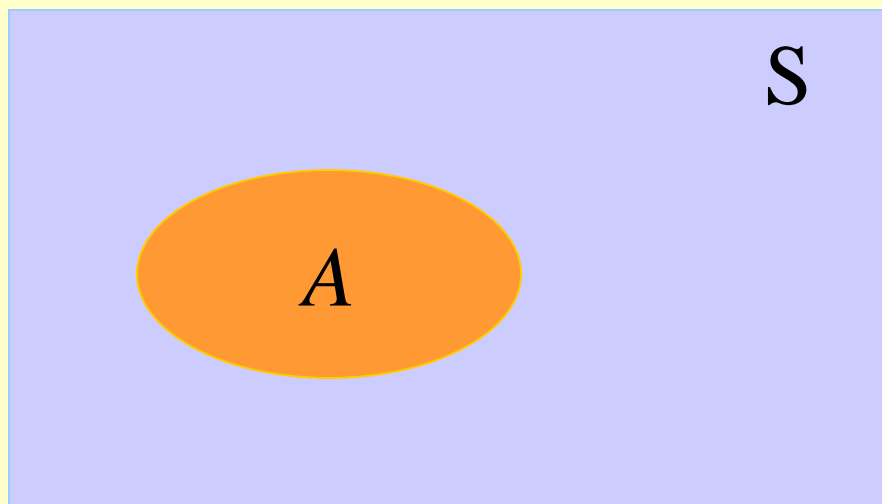
不 可 能 事 件

即在试验中不可能发生的事件，
常用 φ 表示。



事件的关系与运算

Venn图



随机事件的关系和运算
雷同集合的关系和运算

(1) 若 $A \subset B$ ，则称事件A包含于事件B，
——事件A发生必然导致B发生

$$S \supset A \supset \phi$$



$$A \subset B$$



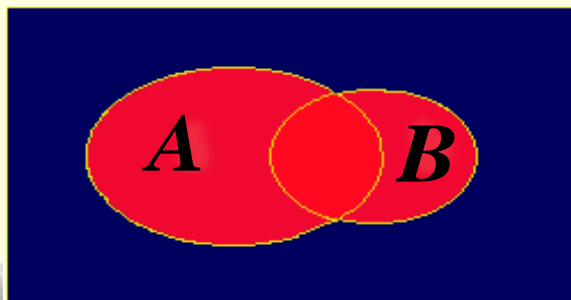
(2) 若 $A \subset B$, $B \subset A$, 即 $A=B$, 则称事件A与事件B相等。

掷两颗骰子, 令 A 表示 “两次得到的点数一次为奇数点一次为偶数点”,
 B 表示 “两次得到点数之和为奇数”



(3) 事件 $A \cup B$ 称为事件 A 与事件 B 的并（或和）事件。

—— 当且仅当 A 、 B 中至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生。



$A \cup B$

例如：甲、乙二人同时向一目标射击，设 A 表示甲命中目标， B 表示乙命中目标， C 表示目标被命中。则 $C = A \cup B$

类似地，称

$$\bigcup_{k=1}^n A_k$$

为n个事件 A_1, \dots, A_n

的和事件。

称

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

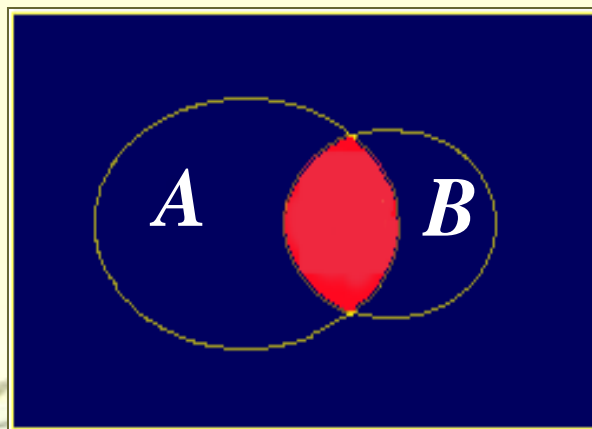
为可列个事件 A_1, \dots, A_n, \dots

的和事件。



(4) 事件 $A \cap B$ 称为事件 A 与事件 B 的交 (或积) 事件, 也记作 AB 。

—— 当且仅当 A、B 同时发生时, 事件 AB 发生。



AB



类似地，称

$$\bigcap_{k=1}^n A_k$$

为n个事件 A_1, \dots, A_n

的积事件。

称

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

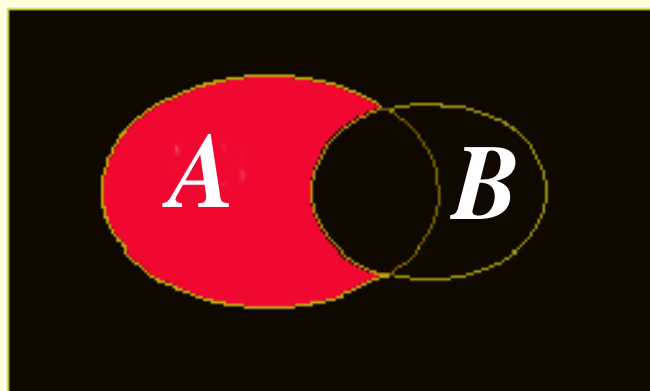
为可列个事件 A_1, \dots, A_n, \dots

的积事件。



(5) 事件 **A-B** 称为事件 A 与事件 B 的差事件。

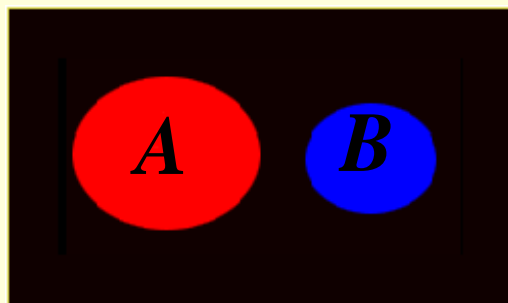
—— 当且仅当 A 发生，B 不发生时，事件 A-B 发生。



$A - B$



(6) 若 $A \cap B = \phi$ ，称为事件A与事件B互不相容，或互斥。



$$A B = \phi$$

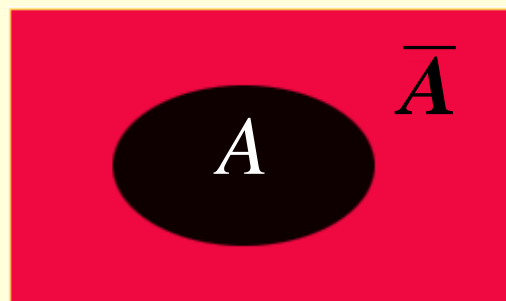


(7) 若 $A \cup B = S$, $A \cap B = \phi$, 称事件A与事件B为对立事件。

—— 在每次试验中，事件A、B中必有一个发生，且仅有一个发生。

(8) 事件 $\bar{A} = S - A$ 称为事件A的对立事件。

—— 当且仅当事件A不发生时，事件 \bar{A} 发生。



\bar{A}



事件的运算性质

交换律

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

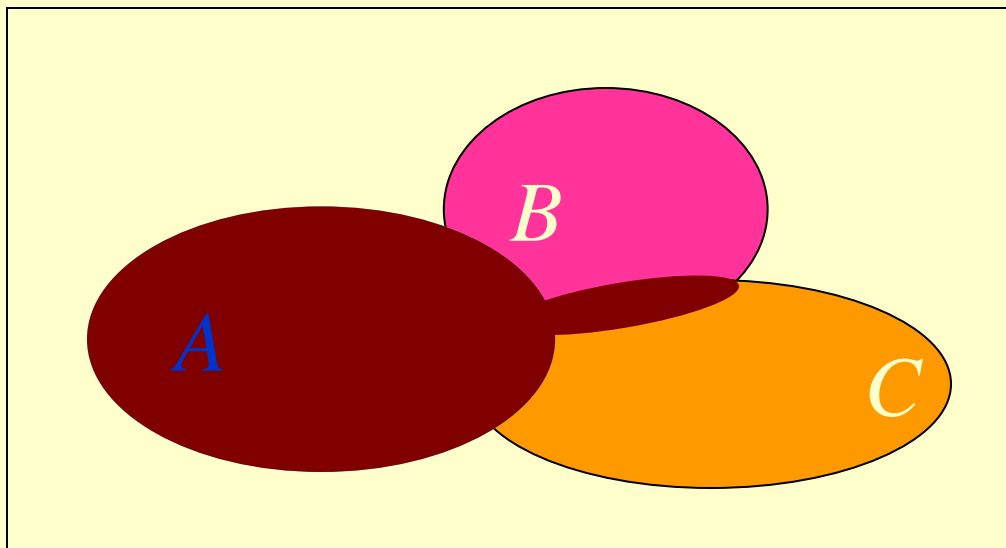
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

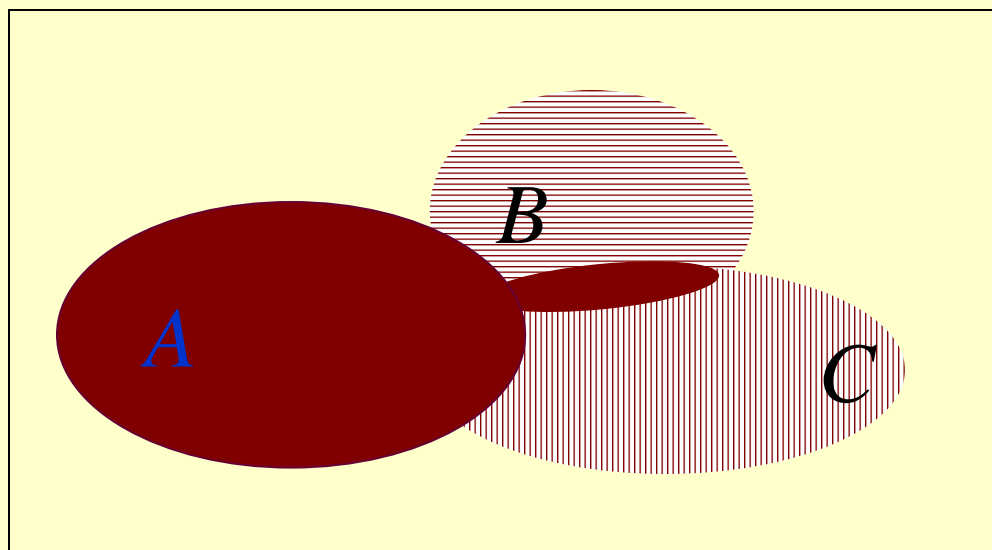




分配律

图 示

$$A \cup (B \cap C) =$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

事件的运算性质

德 • 摩根律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

差化积

$$A - B = A\bar{B} = A - (AB)$$



例2 利用事件的运算表达以下个事件

A, B, C 都不发生——

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

A, B, C 不都发生——

$$\overline{A B C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$



例3 在图书馆中随意抽取一本书，

事件 A 表示数学书，

B 表示中文书，

C 表示平装书。

则

$A B \bar{C}$ —— 抽取的是精装中文版数学书

$\bar{C} \subset B$ —— 精装书都是中文书

**$\bar{A} = B$ —— 非数学书都是中文版的，且
中文版的书都是非数学书**

例4

一射手向目标射击3发子弹， A_i 表示第*i*次射击打中目标 ($i=1, 2, 3$). 试用 A_1, A_2, A_3 及其运算表示下列事件：

(1) “三发子弹都打中目标”； $A_1 A_2 A_3$

(2) “三发子弹都未打中目标” $\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$

(3) “三发子弹至少有一发打中目标” $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

(4) “三发子弹恰好有一发打中目标”

$$A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup A_2 \overline{A_1} \overline{A_3} \cup A_3 \overline{A_1} \overline{A_2}$$

(5) “三发子弹至多有一发打中目标”

$$\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \cup A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup A_2 \overline{A_1} \overline{A_3} \cup A_3 \overline{A_1} \overline{A_2} \\ \overline{A_1} \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \overline{A_3} \cup \overline{A_2} \overline{A_3}$$



第一章作业1

1, 2, 3, 4



