概率与数理统计试题（A卷）

座号＿＿＿＿＿＿班级＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿

（本试卷共8页，八个大题，满分100分；最后一页空白纸为草稿纸，可撕下，考试结束后不交此页草稿纸）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	核分
得分										
签名										

附表：

$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(2)=0.9772$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(2.83)=0.997$，$\Phi(1.04)=0.8508$，$\Phi(4.96)=1$，

$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$\chi^2_{0.95}(24)=13.848$，

$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.95}(25)=14.611$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$

一、填空题（12分）

得分	

1. 已知事件 A, B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$，记 $P(A)=p$，则 $P(B)=$＿＿＿＿＿＿.

2. 一射手对同一目标独立重复地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手进行一次射击的命中率 $p=$＿＿＿＿＿＿.

3. 设随机变量 X 服从参数为1的指数分布，已知 $P(X>a)=P(X<a)$，则 $a=$＿＿＿＿＿＿.

4. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $P(X=0)=e^{-3}$，则 $\lambda=$＿＿＿＿＿＿.

5. 设随机变量 $X\sim N(0,3)$, $Y\sim N(1,1)$，且 X, Y 相互独立，则 $P(X-Y\le 3)=$＿＿＿＿＿＿.

6. 设 X 服从参数为1的泊松分布，Y 服从参数为2的泊松分布，而且 X 与 Y 相互独立，则 $P(\max(X,Y)\neq 0)=$＿＿＿＿，$P(\min(X,Y)\neq 0)=$＿＿＿＿.

7. 设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，且都服从 $N(1,2)$，则 $E[(X-Y)^2]=$＿＿＿＿＿＿.

8. 掷一枚均匀的骰子420次，则得到的点数之和大于1540的概率近似为＿＿＿＿＿＿.

9. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\mu\in R$，$\sigma>0$ 未知，$\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为＿＿＿＿＿＿.

10. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，其中 $\mu\in R$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 X 的样本，考虑假设检验问题 $H_0:\mu=0$；$H_1:\mu=1$，若检验的拒绝域由 $D=\{(X_1,\cdots,X_9):3|\overline{X}|\ge 1.96\}$ 确定，则该检验犯第一类错误的概率为＿＿＿＿，犯第二类错误的概率为＿＿＿＿＿＿.

扫描全能王 创建

二、（10 分）

得分	

口袋中有 1 个白球、1 个黑球。从中任取 1 个，若取出白球，则试验停止；若取出黑球，则把取出的黑球放回的同时，再加入 1 个黑球，如此下去，直到取出的是白球为止，试求下列事件的概率：

1. 取到第 n 次，试验没有结束；2. 取到第 n 次，试验恰好结束.

扫描全能王 创建

三、（**10 分**）

得分	

1. 设随机变量 X 服从二项分布 $b(3, 0.5)$，$Y=(X-1)^2$，求 Y 的分布律.

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求(1) X 的分布函数 $F(x)$；(2) $P(X>2)$.

扫描全能王 创建

四、（16 分）

得分	

1. 设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\ 0<y<x \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求: (1) X 和 Y 的边缘密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；(2) $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立而且同分布，其中随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=1\}=p,\quad P\{X=0\}=1-p,$$

其中 $0<p<1$. 再设随机变量

$$Z=\begin{cases}1 & X+Y\text{为偶数} \\ 0 & X+Y\text{为奇数}\end{cases}$$

(1) 求随机变量$(X,\ Z)$的联合分布律；(2)问 p 取什么值时，随机变量 X 与 Z 相互独立？

扫描全能王 创建

五、（18 分）

得分	

1. 设 X 服从均匀分布 $U(0, 2)$，令 $Y=|X-1|$. 求：

(1) $E(Y)$和 $D(Y)$；(2) $E(XY)$；(3) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

2. 设某种商品每周的需求量 $X\sim U(10, 30)$（单位：千克），经销商进货数量是[10,30]中的某个数。商店每销售 1 千克可获利 500 元，若供大于求，则剩余的每千克产品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时经调剂的每千克商品仅获利 300 元。问：为了使商店每周的平均利润最大，每周的进货量是多少千克？

扫描全能王 创建

六、（8 分）

得分	

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1}$ 是来自该总体的样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，试问：$\frac{(X_{n+1}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 的分布是什么？并给出证明.

扫描全能王 创建

七、（12 分）

得分	

设总体 X 在 $[\theta, 2\theta]$ 上服从均匀分布，$\theta>0$ 未知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是相应的样本值，求：1. θ 的矩估计；2. θ 的最大似然估计.

扫描全能王 创建

八、（14分）

得分	

1. 叙述自由度为 n 的 χ^2 分布上 α 分位点的定义.

2. 某种零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，按规定其方差不得超过 $\sigma_0^2=0.016$. 现从一批零件中随机抽取 25 件测量其长度，得其样本方差为 0.025. 问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，能否推断这批零件合格？

扫描全能王 创建

概率与数理统计试题（A卷）-参考答案(三)

一、填空题（12分，每空1分）

1. $1-p$; 2. 2/3; 3. ln2; 4. 3; 5. 0.9772; 6. $1-e^{-3}, 1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}$; 7. 4; 8. 0.0228;

9. $\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$; 10. 0.05, 0.1492;

二、(10分)

解：记事件A_i为“第i次取到黑球”，$i=1,2,\dots$。

（1）所求概率为$P(A_1A_2\cdots A_n)$，用乘法公式得：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

（2）所求概率为$P(A_1A_2\cdots \bar{A}_n)$，用乘法公式得：

$$P(A_1A_2\cdots \bar{A}_n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

三、(10分)

解：1.

X	0	1	2	3
$Y=(X-1)^2$	1	0	1	4
P	1/8	3/8	3/8	1/8

所以Y的分布律为

Y	0	1	4
P	3/8	1/2	1/8

2. 解：（1）X的分布函数$F_X(x)$为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(2) $P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F(2)=1-F(2)=1-(1-e^{-\frac{2^2}{2}})=e^{-2}$

四、(16分)

1. 解：(1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3xdy, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\begin{cases}3x^2, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

扫描全能王 创建

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx, 0<y<1\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), 0<y<1\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$$

(2) $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{z/2}^{z}3xdx,\ 0<z<1\\ \int_{z/2}^{1}3xdx, 1\le z<2\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}=\begin{cases}\frac{9}{8}z^2,\ 0<z<1\\ \frac{3}{2}-\frac{3}{8}z^2, 1\le z<2\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$$

2. 解：(1) $P\{X=0,\ \ Z=0\}=P\{X=0,\ \ Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=p(1-p)$；

$P\{X=0,\ \ Z=1\}=P\{X=0,\ \ Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=(1-p)^2$；

$P\{X=1,\ \ Z=0\}=P\{X=1,\ \ Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=p(1-p)$；

$P\{X=1,\ \ Z=1\}=P\{X=1,\ \ Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=p^2$；

即随机变量$(X,\ \ Z)$的联合分布律为

X \ Z	0	1
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	p^2

（2）将X和Z的边缘分布律写出：

X \ Z	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
$p_{\cdot j}$	$2p(1-p)$	$1-2p+2p^2$	

由独立性的性质可得：

$$P\{X=1,\ \ Z=0\}=p(1-p)=P\{X=1\}P\{Z=0\}=p\cdot 2p(1-p),$$

解方程 $p(1-p)=p\cdot 2p(1-p)$，得 $p=\frac{1}{2}$.

五、(18 分)

解：1. 由题设，X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, \quad 0<x<2;\\ 0, \qquad 其他\ .\end{cases}$$

扫描全能王 创建

(1) $E(Y)=E(|X-1|)=\int_{-\infty}^{\infty}|x-1|f(x)dx=\int_0^2|x-1|\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$.

$E(Y^2)=E(|X-1|^2)=\int_{-\infty}^{\infty}|x-1|^2f(x)dx=\int_0^2|x-1|^2\frac{1}{2}dx=\frac{1}{3}$.

所以 $D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1/3-(1/2)^2=1/12$.

(2) $E(XY)=E(X|X-1|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x-1|f(x)dx=\int_0^2 x|x-1|\frac{1}{2}dx=\int_{-1}^1(y+1)|y|\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}$

(3) 显然有 $E(X)=1$，$D(X)=1/3$，所以

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-1\times\frac{1}{2}=0$$

因此 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$

2. 设每周进货量为 a，每周的利润为 Y，则 Y 满足

$$Y=\begin{cases}500a+300(X-a), & a\le X\\ 500X-100(a-X), & a>X\end{cases}=\begin{cases}300X+200a, & a\le X\\ 600X-100a, & a>X\end{cases}$$

已知 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{20}, & 10\le x\le 30\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

因此

$$E(Y)=\int_{10}^{a}(600x-100a)\frac{1}{20}dx+\int_a^{30}(300x+200a)\frac{1}{20}dx=-\frac{15}{2}a^2+350a+5250$$

求导数并令其为 0 得： $-15a+350=0$，解得 $a=\frac{70}{3}$

六、(8 分)

解：由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，从而，

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)。$$

再由于 $X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，从而，$\frac{X_{n+1}-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。那么，

$$\left(\frac{X_{n+1}-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)。$$

由独立性，利用 χ^2 分布可加性，得

$$\frac{(X_{n+1}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\sim\chi^2(n)。$$

七、(12 分)

解：(1) $E(X)=\frac{3\theta}{2}$，用 $\bar{X}$ 代替 $E(X)$， 得到 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}}{3}$.

(2) 记 $x_{(1)}=\min(x_1,x_2,\dots,x_n),x_{(n)}=\max(x_1,x_2,\dots,x_n)$，$X$ 的概率密度是

扫描全能王 创建

$$f(x;\theta)=\begin{cases}1/\theta & \theta\le x\le 2\theta,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}1/\theta^{n} & \theta\le x_1,x_2,\cdots x_n\le 2\theta,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

似然函数可写成

$$L(\theta)=\begin{cases}1/\theta^{n} & \theta\le x_{(1)}\le x_{(n)}\le 2\theta,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

对于满足条件 $x_{(n)}/2\le\theta\le x_{(1)}$ 的 任意 θ 有

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}\le\frac{1}{(x_{(n)}/2)^n},$$

所以 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=x_{(n)}/2=\max_{1\le i\le n}x_i/2.$$

θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=X_{(n)}/2=\max_{1\le i\le n}X_i/2.$$

八、（14分）

解：1. 对于给定的正数 α，$0<\alpha<1$，满足条件 $P(\chi^2>\chi^2_\alpha(n))=\alpha$ 的点 $\chi^2_\alpha(n)$ 称为自由度为 n 的 χ^2 分布上 α 分位点.

2. $H_0:\sigma^2\le 0.016$ ； $H_1:\sigma^2>0.016$

检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域为 $W=\{(x_1,\cdots,x_n):\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n-1)\}$

查表得：$\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.05}(24)=36.415$

由 $n=25,s^2=0.025$ 计算得 $\chi^2=\dfrac{24S^2}{0.016}=37.5>36.415$

因此，拒绝 $H_0:\sigma^2\le 0.016$.

扫描全能王 创建