课程编号：100172003　　北京理工大学(二)

概率与数理统计试题（A卷）

座号＿＿＿＿＿＿班级＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿

（本试卷共8页，八个大题，满分100分；最后一页空白纸为草稿纸，可撕下，考试结束后不交此页草稿纸，答案写在草稿纸上无效）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	核分
得分										
签名										

附表：

$\Phi(2.5)=0.994$, $\Phi(1.5)=0.933$, $\Phi(2.33)=0.99$，$\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.64)=0.95$，$t_{0.05}(8)=1.8595$，

$t_{0.025}(8)=2.3060$，$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，

$\chi^2_{0.975}(8)=2.18$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，

$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$

一、填空题（10分）

得分	

1. 一名射手连续向一目标射击三次，事件A_i表示射手第i次击中目标(i=1,2,3)，则$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$表示的含义是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 设随机变量X的分布函数满足$F(x)=a-e^{-x}, x>0$，则$a=$＿＿＿＿＿＿.

3. 如果(X,Y)服从二维正态分布，则其边缘分布＿＿＿＿＿（一定是或不一定是）正态分布.

4. 设$X\sim N(0,0.5), Y\sim N(0,0.5)$，且$X$与$Y$相互独立，则$E|X-Y|$=＿＿＿＿＿＿.

5. 设随机变量X服从几何分布，期望为4，则$P(X=1)$=＿＿＿＿＿＿.

6. 设$X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$是独立同分布的随机变量序列，且有有限的期望$E(X_k)=\mu$与方差$D(X_k)=\sigma^2>0, k=1,2,\ldots$，则$Y=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$依概率收敛到＿＿＿＿＿＿.

7. 设随机变量$X\sim F(n,n)$且$P(X>A)=0.3$，$A>0$为常数，则$P(X>\frac{1}{A})=$＿＿＿＿＿＿.

8. 某保险公司多年统计资料表明，在索赔户中，被盗索赔户占20%，以X表示在随机抽查的100个索赔户中，因被盗向保险公司索赔的户数. 则被盗索赔户不少于14户且不多于30户的概率近似为＿＿＿＿＿＿.

9. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，其中$\mu\in R$，$\sigma>0$未知，$\bar{X},S^2$分别是样本均值和样本方差，则μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

10. 设总体$X\sim N(\mu,4^2)$，$x_1,\ldots,x_{16}$是总体X的样本值，已知假设H_0: $\mu=0$，H_1: $\mu>0$.在显著性水平$\alpha=0.01$下的拒绝域是＿＿＿＿＿＿.

二、（12 分）

得分	

1. 叙述两个事件互斥和独立的关系.

2. 为了防止意外，某矿内同时设有两种报警系统甲和乙，每种系统单独使用时，系统甲有效的概率为 0.92，系统乙有效的概率为 0.93. 在系统甲失灵的情况下，系统乙有效的概率为 0.85. 求：（1）发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；（2）在系统乙失灵的情况下，系统甲有效的概率.

三、（12分）

得分	

1.设随机变量X的分布函数如下：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 1/4, & -1\le x<2\\ 1/2, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

求（1）随机变量X的分布律；（2）$P(X>1)$.

2. 设随机变量X服从区间$(-1,1)$上的均匀分布，求

（1）$P(|X|<\frac{1}{4})$；（2）设$Y=X^2$，求Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

四、（16分）

得分	

设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（1）求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；（2）判断 X 和 Y 是否相互独立，并给出理由；

（3）求函数 $Z=\min(X,Y)$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

（4）求函数 $U=3X+4Y$ 的分布函数 $F_U(u)$ 和密度函数 $f_U(u)$.

五、（**14** 分）

得分	

1. 叙述切比雪夫不等式.

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

令 $Y=X^2$.

（1）求 $E(X)$，$D(X)$，$E(Y)$，$D(Y)$；（2）求X与Y的相关系数；

（3）判断X与Y是否相关，判断X与Y是否独立 （说明理由）.

六、（8分）

得分	

设$X_1,X_2,\cdots,X_5$是来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，令$Z=\dfrac{\sqrt{3}(X_1+X_2)}{\sqrt{2(X_3^2+X_4^2+X_5^2)}}$。

(1) 求Z的分布；(2) 求Z^2的分布.（要求写出具体过程）

七、（14分）

得分	

1、设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \sqrt{\alpha}<x<\sqrt{\alpha}+2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中，$\alpha>0$ 为未知参数。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自该总体的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本观测值. 求参数 α 的矩估计.

2. 设总体 X 服从以 p 为参数的两点分布，即其分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

其中 $0<p<1$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自该总体的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本观测值。求参数 p 及 $\beta=\frac{1-p}{p}$ 的最大似然估计.

八、（**14分**）

得分	

1. 叙述假设检验的理论依据.

2. 某卷装卫生纸净含量按标准要求为200克/卷，已知该卷装卫生纸净含量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。今抽取9卷，测得其净含量样本均值 $\bar{x}=197$ 克，样本标准差 $s=4.5$ 克。问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，该卷装卫生纸净含量是否符合要求？

概率与数理统计试题（A卷）-参考答案(二)

一、填空题（10分，每空1分）

1. 三次都没有击中目标；2. 1；3. 一定是；4. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$；5. 0.25；6. $\sigma^2+\mu^2$；

7. 0.7；8. 0.927；9. $\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$；10. $\{(x_1,x_2,\cdots,x_{16}):\overline{x}\geq 2.33\}$

二、(12分)

1. 答：设事件为 A 和 B，当 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$ 时，A 和 B 互斥可以推出 A 和 B 不独立；反之，A 和 B 独立则有 A 和 B 不互斥；

若 $P(A)$ 和 $P(B)>0$ 至少一个为 0 时，由互斥可以推出独立，独立不一定互斥.

2.解：设 A 表示系统甲单独使用时有效，

B 表示系统乙单独使用时有效

则已知条件为：$P(A)$=0.92, $P(B)$=0.3，$P(B|\overline{A})=0.85$

（1）$P(B|\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(BA)}{1-P(A)}$

$\Rightarrow P(BA)=P(B)-P(B|\overline{A})[1-P(A)]=0.93-0.85\times0.08=0.862$

$P(B\cup A)=P(B)+P(A)-P(BA)=0.92+0.93-0.862=0.988$

（2）$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(BA)}{1-P(B)}=\frac{0.92-0.862}{1-0.93}=\frac{29}{35}=0.829$

三、(12分)

解：1. 随机变量 X 的分布列为

X	-1	2	3
P	1/4	1/4	1/2

$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=3/4$

2.（1）$P(|X|<1/4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

（2）随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1/2, & x\in(-1,1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

显然，当 $y\leq 0$ 时，$P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=0$

当 $y\in(0,1)$ 时，$P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\sqrt{y}$

当 $y\geq 1$ 时，$P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=1$

因此，Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leq 0\\ \sqrt{y}, & y\in(0,1)\\ 1, & y\geq 1\end{cases}$

Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}, & y\in(0,1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

四、(16 分)

1. 解：(1) X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}3e^{-3x}\int_0^{\infty}4e^{-4y}dy, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}4e^{-4y}\int_0^{\infty}3e^{-3x}dx, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) 由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，因此 X 和 Y 相互独立

(3) X 和 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-3x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-4y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)P(Y>z)$$

$$=1\text{-}(1\text{-}F_X(z))(1\text{-}F_Y(z))=\begin{cases}1\text{-}e^{-7z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$Z=\min(X,Y)$ 的密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}7e^{-7z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(4) $U=3X+4Y$ 的分布函数为

$$F_U(u)=P(U\le u)=P(3X+4Y\le u)=\begin{cases}\iint\limits_{\substack{3x+4y\le u\\ x>0,y>0}}12e^{-(3x+4y)}dxdy, & u>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}12\int_0^{\frac{u}{3}}\int_0^{\frac{u-3x}{4}}e^{-(3x+4y)}dydx, & u>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-u}-ue^{-u}, & u>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$U=3X+4Y$ 的密度函数为 $f_U(u)=\begin{cases}ue^{-u}, & u>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

五、(14 分)

1.答：切比雪夫不等式为：

设随机变量 X 的期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2>0$，

则对于任意 $\varepsilon>0$，成立不等式：

$$P\{|X-\mu|\ge\varepsilon\}\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \text{或者} P\{|X-\mu|\le\varepsilon\}\ge 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

2.解：（1）

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}x\ e^{-x}dx=1.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\ e^{-x}dx=2.$$

$$D(X)=\ E(X^2)-[E(X)]^2=2-1=1.$$

$$E(Y)=E(X^2)=2.$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^4f(x)dx=\int_0^{\infty}x^4\ e^{-x}dx=24.$$

$$D(Y)=\ E(Y^2)-[E(Y)]^2=24-4=20.$$

（2）因为

$$E(XY)=E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)dx=\int_0^{\infty}x^3\ e^{-x}dx=6.$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=6-1\times 2=4.$$

所以

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{4}{\sqrt{1}\sqrt{20}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

（3）因为 $\rho_{XY}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ne 0$

所以 X与Y相关.

因为X与Y相关，即存在线性关系，所以X与Y不独立。

六、(8分)

解：(1) $\because X_i\sim N(0,\sigma^2)$，$\therefore \frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1), i=1,2,\cdots,5,$

且有$\therefore X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)\Rightarrow\frac{X_1+X_2}{\sigma\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$$\therefore\sum_{i=3}^{5}(\frac{X_i}{\sigma})^2\sim\chi^2(3),\text{即}\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$$

由独立性和 t 分布的定义知

$$\frac{\frac{X_1+X_2}{\sigma\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3\sigma^2}}}\sim \mathrm{t}(3),\text{即}\frac{\sqrt{3}(X_1+X_2)}{\sqrt{2(X_3^2+X_4^2+X_5^2)}}\sim \mathrm{t}(3)$$

（2）由（1）知$\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$， $\frac{X_1+X_2}{\sigma\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，

所以有$\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$

由独立性和 F 分布的定义知

$$\frac{\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}}{\dfrac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3\sigma^2}}=\frac{3}{2}\frac{(X_1+X_2)^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2}\sim F(1,3)$$

七、(14 分)

解:(1) 由于 $EX=\sqrt{\alpha}+1$,

即 $\alpha=(EX-1)^2$

令 $EX=\bar{X}$, 解得α的矩估计为 $\hat{\alpha}=(\bar{X}-1)^2$

(2) 先求 p 的最大似然估计

似然函数为 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$

对数似然函数为 $\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)$

对 p 求导并令其为零,得 $\dfrac{d\ln L(p)}{dp}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}+\dfrac{n}{1-p}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$

解得 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$

最大似然估计量为 $\hat{p}=\bar{X}$

由最大似然估计的不变性知

$\beta=\dfrac{1-p}{p}$ 的最大似然估计为 $\hat{\beta}=\dfrac{1-\hat{p}}{\hat{p}}=\dfrac{1-\bar{X}}{\bar{X}}$

八、(14 分)

1. 答: 实际统计推断原理,又叫小概率原理:

即在一次试验中,概率很小的事件实际上几乎是不发生的.

2. 解: 提出假设 $H_0: \mu=200$, $H_1: \mu\neq 200$.

选取检验统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0\text{真}}{\sim}t(n\text{-}1)$

拒绝域 $|t|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$

已知 $n=9$, $\mu_0=200$, $\bar{x}=197$, $s=4.3589$, $\alpha=0.05$,

……白纸为草稿纸，可撕下，考试结束后

查表 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$

计算 $$|t|=\left|\frac{197-200}{4.5/\sqrt{9}}\right|=2<2.306$$

接受 H_0，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下认为该卷装卫生纸净含量符合要求。