

我们说，在事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率一般地不等于 A 的无条件概率。但是，会不会出现 $P(A)=P(A|B)$ 的情形呢？



先看一个例子：

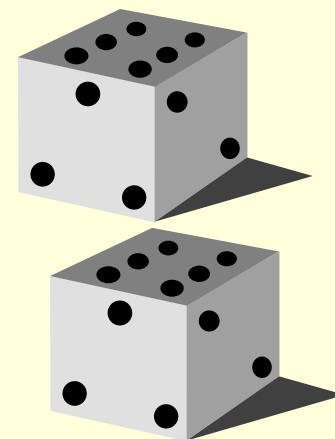
将一颗均匀骰子连掷两次，

设 $A=\{\text{第二次掷出6点}\},$
 $B=\{\text{第一次掷出6点}\},$

显然

$$P(A|B)=P(A)$$

这就是说，已知事件 B 发生，并不影响事件 A 发生的概率，这时称事件 A 、 B 独立。



§ 1.4 独立性

- 两个事件独立性
- 多个事件独立性

不难证明，当 $P(B)>0$ 时，有

$$P(A | B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$



两个事件的独立性

对任意的事件 A , B , 若 $P(AB)=P(A)P(B)$,
则称事件 A , B 是相互独立的。

注意



必然事件与任何事件独立



不可能事件与任何事件独立



例1 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 $A=\{\text{抽到}K\}$ ， $B=\{\text{抽到的牌是黑色的}\}$ 问事件 A 、 B 是否独立？

解： 由于 $P(A)=4/52=1/13$ ， $P(B)=26/52=1/2$

$$P(AB)=2/52=1/26$$

可见， $P(AB)=P(A)P(B)$

或 由于 $P(A)=1/13$ ， $P(A|B)=2/26=1/13$

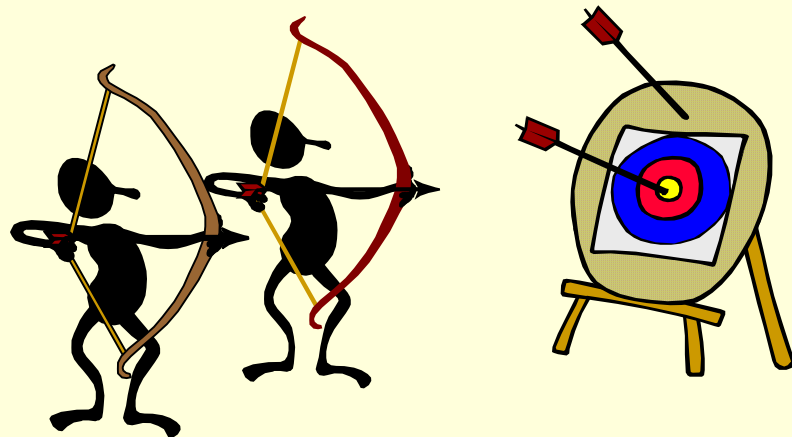
$P(A)=P(A|B)$ ，说明事件 A 、 B 独立.



在实际应用中,往往根据问题的
实际意义去判断两事件是否独立.

例如

甲、乙两人向同一目标射击, 记 $A=\{\text{甲命中}\}$,
 $B=\{\text{乙命中}\}$, A 与 B 是否独立?



再如

一批产品共 n 件，其中合格品 a 件，
从中抽取2件，设 $A_i = \{\text{第}i\text{件是合格品}\}$ $i=1,2$

若抽取是有放回的

则 A_1 与 A_2 独立.

若抽取是无放回的

则 A_1 与 A_2 不独立.



性质

若事件A与B相互独立，则下列各对事件也相互独立

$$A \text{ 与 } \bar{B}, \quad \bar{A} \text{ 与 } B, \quad \bar{A} \text{ 与 } \bar{B}$$



证明：仅证 A 与 \bar{B} 独立

A 、 B 独立

概率的性质

$$P(A \bar{B}) = P(A - A B)$$

$$= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A) P(\bar{B})$$

故 A 与 \bar{B} 独立。

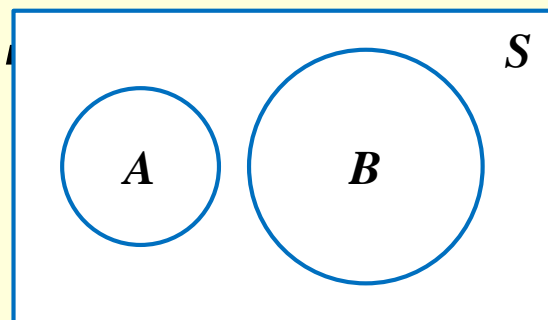




思考：如图的两个事件是独立的吗？

若 A 、 B 互斥，且 $P(A)>0$ ， $P(B)>0$ ，

由互斥性得： $P(AB)=0$ ；



由于 $P(A)>0$ ， $P(B)>0$ ，所以 $P(A)P(B)\neq 0$ ，

即： A 与 B 不独立。

反之，若 A 与 B 独立，且 $P(A)>0$ ， $P(B)>0$ ，

易知： $P(AB)=P(A)P(B)>0$ ，故 $AB\neq\emptyset$ ，

即 A 、 B 不互斥。



独立性与互斥

若 A 与 B 互斥，且 $P(A)$ 和 $P(B)$ 至少有一个为0时

由于 $P(AB)=P(\phi)=0$ ，且 $P(A)P(B)=0$ ，所以 A 与 B 独立。

若 A 、 B 独立，且 $P(A)$ 和 $P(B)$ 至少一个为0时

虽然 $P(AB)=P(A)P(B)=0$ ，但 AB 不一定为 ϕ ，所以 A 、 B 不一定互斥。



多个事件的独立性

对任意三个事件 A, B, C , 若

$$\left. \begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned} \right\}$$

则称事件 A, B, C 相互独立, 简称 A, B, C 独立



对任意 n 个事件 $A_1 \dots A_n$, 若

$$(1) \quad P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad 1 \leq i < j \leq n$$

$$(2) \quad P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

$$1 \leq i < j < k \leq n$$

$$(3) \quad P(A_1 A_2 \cdots A_n) = \bigcap_{i=1}^n P(A_i)$$

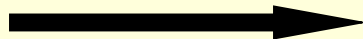
则称事件 A_1, \dots, A_n 相互独立, 简称 A_1, \dots, A_n 独立



请注意多个事件两两独立与相互独立的区别与联系

对 $n(n>2)$ 个事件

相互独立



两两独立



反例 有一均匀的四面体，各面涂有颜色如下

1	2	3	4
R			R
	W		W
		Y	Y

将四面体向上抛掷一次，观察向下一面出现的颜色。

设事件 { R — 红色
 W — 白色
 Y — 黄色



则

$$P(R) = P(W) = P(Y) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(RW) = P(WY) = P(RY) = \frac{1}{4}$$

$$P(RW) = P(R)P(W)$$

$$P(WY) = P(W)P(Y)$$

$$P(RY) = P(R)P(Y)$$

$$P(RWY) = \frac{1}{4} \neq P(R)P(W)P(Y) = \frac{1}{8}$$



性质1 若 A_1, \dots, A_n 相互独立，则

其中任意 k ($k \leq n$) 个事件也是相互独立的



性质2

若 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立,将这 n 个事件任意分成 k 组,同一个事件不能同时属于两个不同的组,则对每组的事件进行求和、积、差、对立等运算所得到的 k 个事件也相互独立.



例如

事件 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 相互独立

$$\overline{A_1 A_2 - A_3 A_4} \quad A_5$$

$$A_1 \cup A_2 A_3 \quad \overline{A_4 - A_5}$$

也相互独立



性质3 若 A_1, \dots, A_n 相互独立, 则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k))$$



设事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_n}) \end{aligned}$$

$\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$

也相互独立

也就是说, n 个独立事件至少有一个发生的概率等于1减去各自对立事件概率的乘积.



例2

甲，乙，丙三人同时独立向同一目标射击，他们射中目标的概率分别为0.4,0.5,0.7。求

(1) 至少有一人射中目标的概率

(2) 恰有一人射中目标的概率

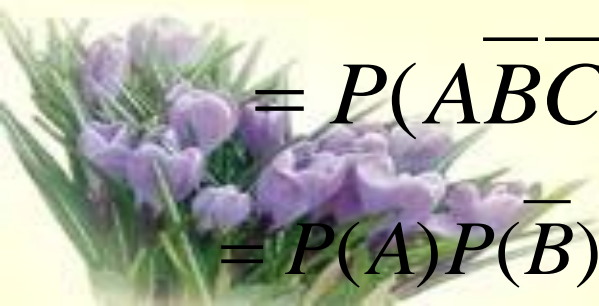
解： 设 $A = \{\text{甲射中}\}$, $B = \{\text{乙射中}\}$, $C = \{\text{丙射中}\}$

$$(1) \quad P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0.91$$

$$(2) \quad P(\overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C})$$

$$= P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C})$$

$$= P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})$$

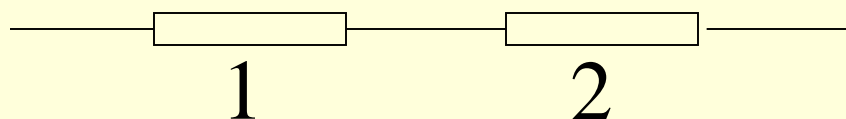


例3 系统的可靠性问题

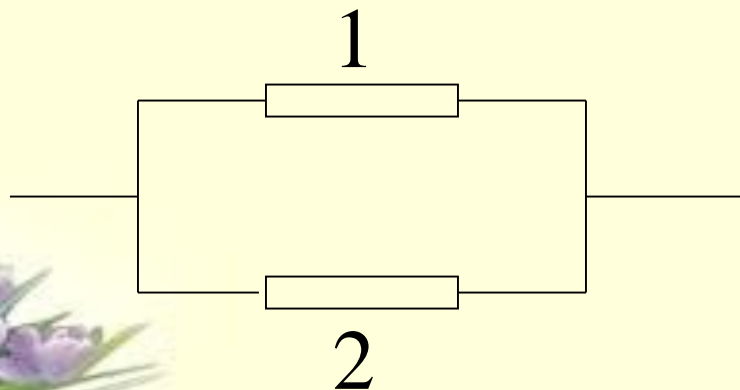
一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性

系统由元件组成, 常见的元件连接方式:

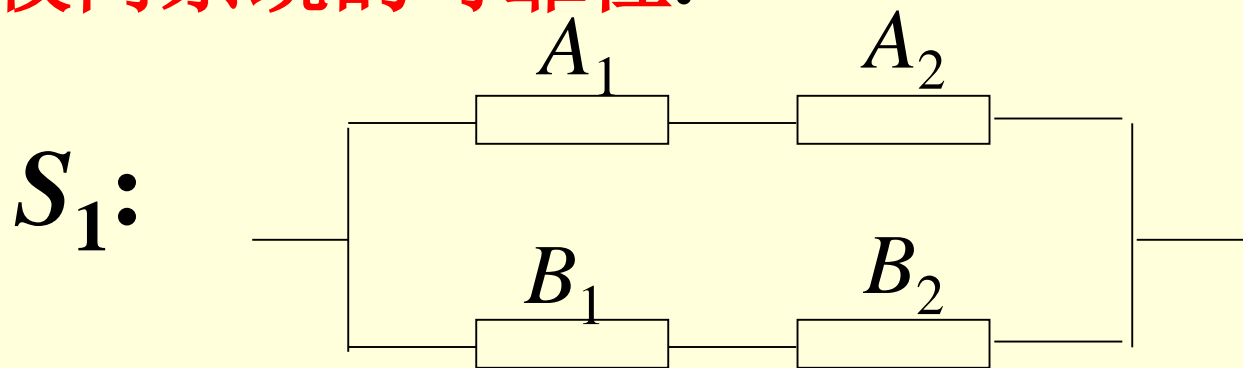
串联



并联

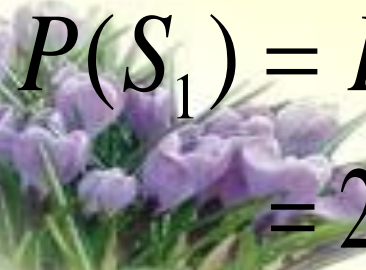


(1) 两系统都是由 4 个元件组成,每个元件正常工作的概率为 p , 每个元件是否正常工作相互独立.两系统的连接方式如下图所示,比较两系统的可靠性.

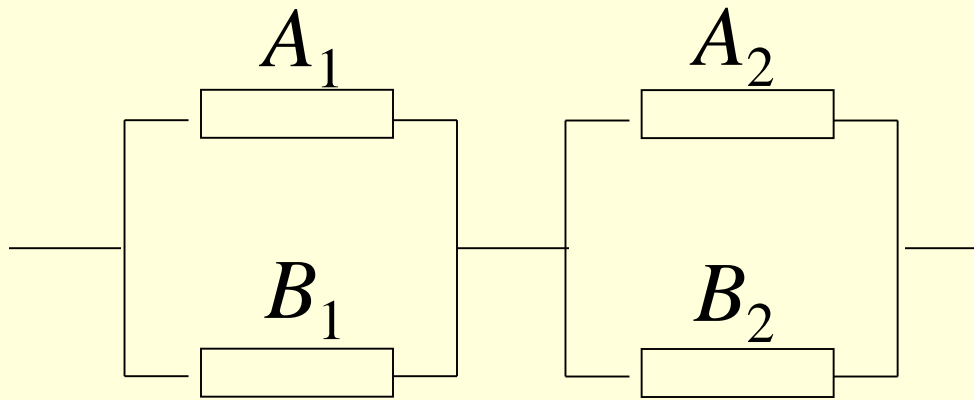


解: 设 A_1, A_2, B_1, B_2 分别表示四个元件正常工作,
 S_1 为第一个系统正常工作

由题意 $S_1 = A_1 A_2 \cup B_1 B_2$

$$\begin{aligned} P(S_1) &= P(A_1 A_2) + P(B_1 B_2) - P(A_1 A_2 B_1 B_2) \\ &= 2p^2 - p^4 = p^2(2 - p^2) \end{aligned}$$


S_2 :



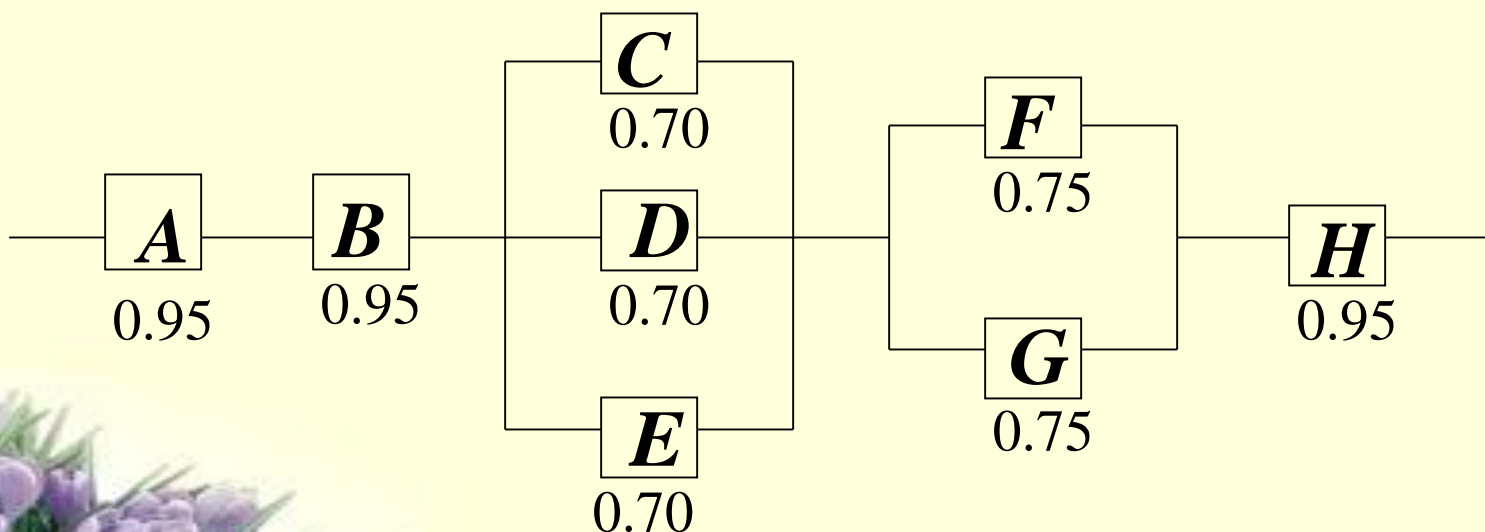
$$S_2 = (A_1 \cup B_1)(A_2 \cup B_2)$$

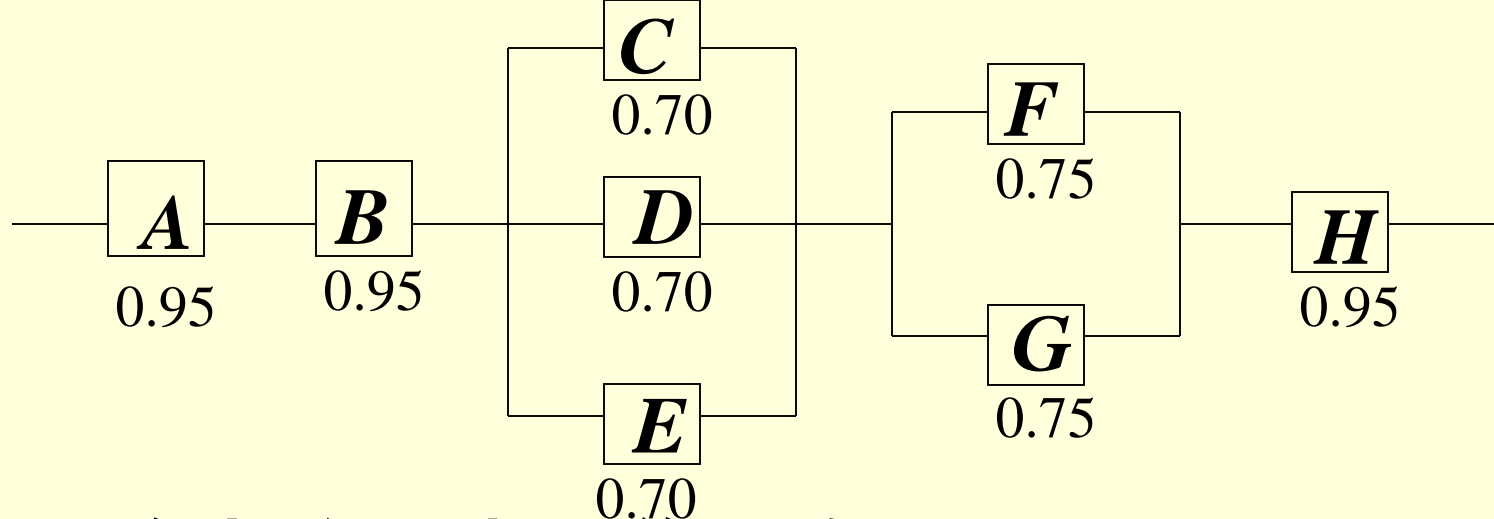
$$\begin{aligned} P(S_2) &= \prod_{i=1}^2 P(A_i \cup B_i) = (2p - p^2)^2 \\ &= p^2(2 - p)^2 \geq p^2(2 - p^2) \end{aligned}$$

$$P(S_2) \geq P(S_1)$$



(2) 下面是一个串并联电路示意图. A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 都是电路中的元件.
它们下方的数是它们各自正常工作的概率.
求电路正常工作的概率.





解：将电路正常工作记为 W ，

由题意 $W = AB(C \cup D \cup E)(F \cup G)H$

由于各元件独立工作，有

$$P(W) = P(A)P(B)P(C \cup D \cup E)P(F \cup G)P(H)$$

其中 $P(C \cup D \cup E) = 1 - P(\bar{C})P(\bar{D})P(\bar{E}) = 0.973$

$$P(F \cup G) = 1 - P(\bar{F})P(\bar{G}) = 0.9375$$

代入得 $P(W) \approx 0.782$