课程编号：100172003 北京理工大学（一）

概率与数理统计试题（A 卷）

座号＿＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿

（本试卷共 8 页，八个大题，满分 100 分；最后一页空白纸为草稿纸，可撕下，考试结束后不交此页草稿纸，答案写在草稿纸上无效）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	核分
得分										
签名										

附表：

$\Phi(2)=0.9772$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(3)=0.9987$，$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1/3)=0.6293$，

$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.05}(10)=1.8125$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$t_{0.025}(10)=1.8125$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，

$\chi^2_{0.95}(10)=3.940$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$，$\chi^2_{0.975}(10)=3.247$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.022$，$\chi^2_{0.025}(10)=20.483$，

$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.05}(10)=18.307$ ，$\sqrt{10}=3.16$

一、填空题（10 分，将答案写在下面的表格中）

得分	

序号	1	2	3	4	5
答案					

1. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=C\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}, \lambda>0, k=1,2,\cdots$，则常数 C 为＿＿＿＿.

2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,5)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(1,4)$，且 X 与 Y 相互独立，则概率 $P(X\leqslant Y+4)=$＿＿＿＿＿＿.

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从均匀分布 $U(0,\theta)$，则 $E[\min(X,Y)]=$＿＿＿＿＿＿.

4. 设总体 X 服从期望为 2 的指数分布，$X_1, X_2,\ldots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则统计量 $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 的数学期望为＿＿＿＿＿＿.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\mu\in R$，$\sigma>0$ 均未知，$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 分别表示样本均值和样本方差，则对于给定的常数 α（$0<\alpha<1$），区间 $[\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$ 包含 μ 的概率是 ＿＿＿＿＿＿＿＿ .

扫描全能王 创建

二、（12 分）

得分	

在数字通讯中，信号由 0 和 1 组成，因为有随机干扰，收到信号时，0 被误收作 1 的概率为 0.2，而 1 被误收作 0 的概率为 0.1，假定发送信号 0 与 1 的几率均等.

1. 求发送的是信号 0 且收到的也是信号 0 的概率；
2. 求收到的是信号 0 的概率；
3. 已知收到的是信号 0，求发出的是信号 0 的概率.

扫描全能王 创建

三、（10 分）

得分	

1. 叙述“事件 A 概率为零”与“事件 A 为不可能事件”的关系，并给出例子支持你的结论.

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中常数 $\theta>0$，令 $Y=-2\theta\ln X$. 求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

扫描全能王 创建

四、（16分）

得分	

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-2x}, & x>0,0<y<x, \\ 0\quad , & \text{其它}. \end{cases}$$

1. 确定常数 C 的值；2. 求 X 与 Y 边缘概率密度函数 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 是否独立；3. 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$；4. 求概率 $P(X\le Y+2)$.

扫描全能王 创建

五、（14分）

得分	

1. 叙述两个随机变量 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} 的含义.
2. 设 G 是由 x 轴、y 轴及直线 $2x+y-2=0$ 所围成的区域，二维随机变量 (X,Y) 在 G 内服从均匀分布．求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}．

扫描全能王 创建

六、（10分）

得分	

已知随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ 独立同分布且均服从 $U(0, 1)$，令 $Y = X_1 \cdot X_2 \cdots X_{100}$，求 $Y < e^{-80}$ 的概率的近似值.

扫描全能王 创建

七、（14分） | 得分 | |

设总体 X 服从参数为 p 的几何分布，其中 $0<p<1$ 为未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为取自该总体的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本观测值.

1. 求参数 p 的矩估计；2. 求 p 的最大似然估计.

扫描全能王 创建

六、（14分）

得分	

1. 在假设检验问题中

（1）若检验结果是接受原假设，则检验可能犯哪一类错误？

（2）若检验结果是拒绝原假设，则检验又有可能犯哪一类错误？

2. 某厂生产的汽车电池使用寿命服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其说明书上写明其标准差不超过 0.9 年。现随机抽取 10 个，得样本均值为 4 年，样本标准差为 1.2 年，试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验厂方说明书上所写的标准差是否可信。

扫描全能王 创建

概率与数理统计试题（A 卷）-参考答案(一)

一、填空题（10 分，每空 2 分）

1. $\underline{(e^{\lambda}-1)^{-1}}$ ； 2. $\underline{0.8413}$ ； 3. $\underline{\dfrac{\theta}{3}}$ ； 4. $\underline{4}$ ； 5. $\underline{1-\alpha}$.

二、(12 分)

解：令 $A=\{\text{收到的是信号0}\}$

$B=\{\text{发出的是信号0}\}$

$\overline{B}=\{\text{发出的是信号1}\}$

则 $B,\overline{B}$ 是样本空间的划分

由已知

$$P(B)=\frac{1}{2},\qquad P(A|B)=0.8$$

$$P(\overline{B})=\frac{1}{2},\qquad P(A|\overline{B})=0.1$$

1. 由乘法公式得

$$P(BA)=P(B)P(A|B)=\frac{1}{2}\times 0.8=0.4$$

2. 由全概率公式得

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

$$=\frac{1}{2}\times 0.8+\frac{1}{2}\times 0.1=0.45$$

3. 由条件概率的定义得

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.45}=\frac{40}{45}=\frac{8}{9}$$

三、(10 分)

1.答：若 A 为不可能事件，则一定有 A 的概率为零;

但是反过来不成立，反例如下：

设 X 服从正态分布，$A=\{X=0\}$，则 A 的概率为零，但 A 不是不可能事件。

2. 解：$Y=-2\theta\ln X$ 的可取值范围是 $(0,+\infty)$

因为 $$y'=-\frac{2\theta}{x}<0$$

其反函数为 $$x=h(y)=e^{-\frac{1}{2\theta}y}$$

扫描全能王 创建

且 $$\left|h'(y)\right|=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{2\theta}y}$$

所以 $Y=-2\theta\ln X$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\theta e^{-\frac{\theta-1}{2\theta}y}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{2\theta}y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

四、（16 分）

解：1. 由概率密度的性质得

$$1=\iint_{R^2}f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dx\int_0^x Ce^{-2x}dy$$

化简后得到 $1=\int_0^{\infty}dx\int_0^x Ce^{-2x}dy=\int_0^{\infty}Ce^{-2x}xdx=\frac{C}{2}\int_0^{\infty}2e^{-2x}xdx=\frac{C}{2}\frac{1}{2}$

所以 $C=4$

2. 由 1 知(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2x}, & x>0,0<y<x,\\ 0\ , & \text{其它.}\end{cases}$$

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 4e^{-2x}dy=4xe^{-2x}$

所以 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}4xe^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^{\infty}4e^{-2x}dx=2e^{-2y}$

所以 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因为 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=4xe^{-2x}\cdot 2e^{-2y}\neq f(x,y)$

所以 X 与 Y 不独立。

3. $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{z/2}^{z}4e^{-2x}\mathrm{d}x, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}=\begin{cases}2e^{-z}-2e^{-2z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

4. 由题设条件

扫描全能王 创建

$$P(X \le Y+2)=\iint\limits_{x\le y+2} f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_y^{y+2}4e^{-2x}dx$$

$$=\int_0^{\infty}2(e^{-2y}-e^{-2(y+2)})dy=(1-e^{-4})\int_0^{\infty}2e^{-2y}dy=1-e^{-4}.$$

五、(**14 分**)

1. 答: $|\rho_{XY}|$的大小刻画了 X 和 Y 的线性相关的程度.

若$|\rho_{XY}|$越接近于 1，说明 X 与 Y 之间越近似有线性关系；

即：X 与 Y 的线性相关的程度越高；

若$|\rho_{XY}|$越接近于 0，说明 X 与 Y 之间越不能有线性关系；

即: X 与 Y 的线性相关的程度越弱；

若$|\rho_{XY}|=1$，说明 Y 与 X 之间以概率 1 有严格线性关系；

若ρ_{XY}=0，说明 X 与 Y 之间没有线性关系，此时 X 与 Y 之间的关系较复杂，可能相互独立，也可能有其他某种非线性的函数关系.

2. 解：由于区域G 的面积为 1，因此$(X,\ Y)$的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,\ y)\in G\\ 0 & (x,\ y)\notin G\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy=\int_0^{2-2x}dy=2(1-x)$

所以 $f_X(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

当 $0<y<2$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx=\int_0^{1-\frac{y}{2}}dx=1-\frac{y}{2}$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2} & 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

又 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{3}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^2 y\cdot\left(1-\frac{y}{2}\right)dy=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy=\int_0^2 y^2\cdot\left(1-\frac{y}{2}\right)dy=\frac{2}{3}$$

扫描全能王 创建

则 $$\operatorname{var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

$$\operatorname{var}(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,\ y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}xydy=\int_0^1 x\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{2-2x}dx$$

$$=2\int_0^1 x(1-x)^2dx=2\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx=2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$$

所以 $$\operatorname{cov}(X,\ Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{18}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,\ Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Y)}}=\frac{-\frac{1}{18}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=-\frac{1}{2}$$

六、（10 分）

解：令 $Z_k=\ln(X_k),\quad k=1,2,\dots,100.$

$$E(Z_k)=\int_0^1\ln xdx=(x\ln x-x)\big|_0^1=-1$$

$$E(Z_k^2)=\int_0^1\ln^2 xdx=x\ln^2 x\big|_0^1-2\int_0^1\ln xdx=2$$

$$D(Z_k)=E(Z_k^2)-E^2(Z_k)=1$$

由独立同分布的中心极限定理得

$$\frac{\sum_{k=1}^{100}Z_k-100\times(-1)}{\sqrt{100\times 1}}\text{ 近似服从}N(0,1).$$

$$P(Y<e^{-80})=P(\sum_{k=1}^{100}Z_k<-80)$$

$$=P(\frac{\sum_{i=1}^{100}Z_i-100\times(-1)}{\sqrt{100}}<\frac{-80-100\times(-1)}{\sqrt{100}})$$

$$\approx\Phi(2)$$

$$=\ 0.9772$$

七、（14 分）

解：1. X 的概率分布律为：$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\dots$

$$\mu_1=E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}=p(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'=p(\frac{q}{1-q})'=1/p$$

扫描全能王 创建

解方程得 $p=1/\mu_1$

用 $\bar{X}$ 代替 μ_1，得参数 p 的矩估计 $\hat{p}=1/\bar{X}$

2. 易知似然函数为：

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}$$

对数似然函数为：

$$\ln L(p)=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p)$$

关于未知参数 p 求导数并令导函数为 0，得

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{1}{1-p}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)=0$$

解方程得 p 的最大似然估计为 $\hat{p}=n/\sum_{i=1}^{n}x_i=1/\bar{x}$

最大似然估计量为 $\hat{p}=1/\bar{X}$

八、（**14 分**）

1. 答:（1）若检验结果是接受原假设，则检验有可能犯第二类错误;

（2）若检验结果是拒绝原假设，则检验有可能犯第一类错误.

2. 解：提出假设 $H_0:\sigma\le 0.9$ ； $H_1:\sigma>0.9$

检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域 $W=\{(x_1,\cdots,x_n):\chi^2\ge\chi_\alpha^2(n-1)\}$

查表得 $\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(9)=16.919$

计算得 $\chi^2=\dfrac{9s^2}{0.9^2}=\dfrac{9\times1.2^2}{0.9^2}=16<16.919$

未落入拒绝域，所以接受原假设，即认为说明书上所写的标准差可信

扫描全能王 创建