一定条件　　随机试验　P(A)

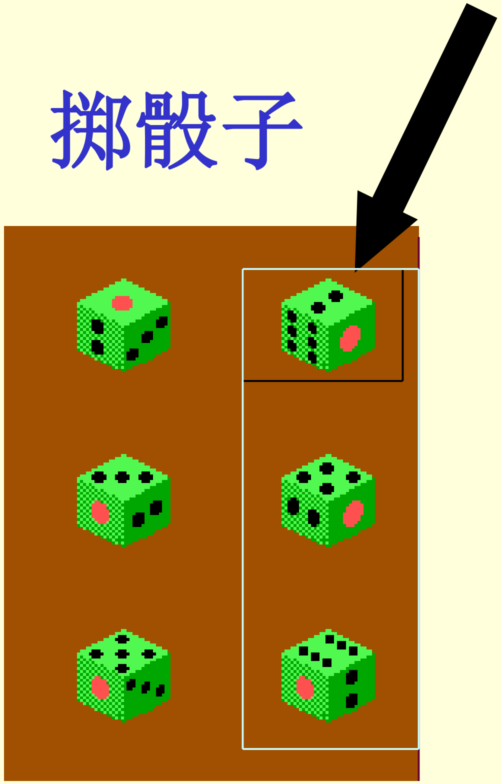
事件B已经发生

条件概率 P(A|B)

引例，掷一颗均匀骰子，A={掷出2点}，

B={掷出偶数点}，$P(A)=1/6$，$P(A|B)=?$

掷骰子



§1.3　条件概率和乘法定理

★　条件概率 (定义 性质 计算)

★　乘法定理

古典概型中的条件概率的计算

例如，掷一颗均匀骰子，A={掷出2点}，

B={掷出偶数点}，$P(A)=1/6$， $P(A|B)=?$

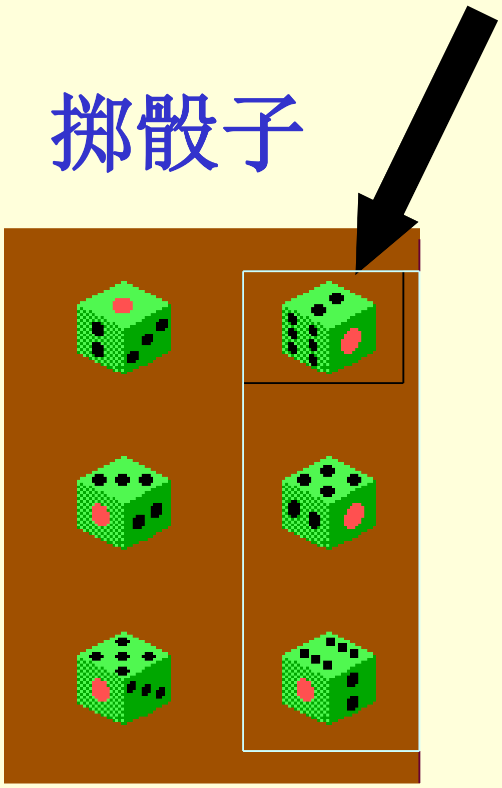
样本空间 $S_B=\{2,4,6\}$

$$P(A|B)=\frac{k_{A|B}}{n_{S|B}}=\frac{1}{3}$$

$$=\frac{k_{AB}}{k_B}=\frac{k_{AB}/n_S}{k_B/n_S}$$

$$=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

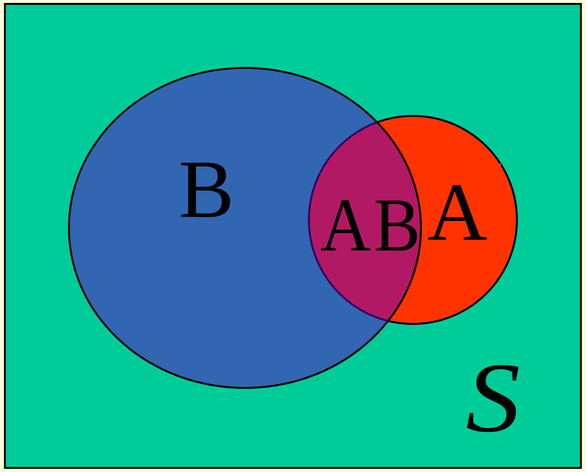
掷骰子



对于一般的古典概型问题

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

仍然成立



条件概率的定义

设A、B是两个事件，且$P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率.

同样若$P(A)>0$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

条件概率的性质

设B是一事件，且$P(B)>0$，则

（1） 对任一事件A，$P(A|B)\geqslant 0$;

（2） $P(S \mid B)=1$;

（3） 设 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

注意 条件概率也是概率!

$$P(B_1 \cup B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) - P(B_1 B_2 \mid A)$$

$$P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A)$$

条件概率的计算

（1） 用定义计算:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\qquad \boldsymbol{P(B)>0}$$

（2）　在缩减的样本空间上计算

例1

一盒子装有5只产品，其中3只一等品，2只二等品。从中取产品2次，每次任取一件，做**不放会抽样**。设事件 **A为“第一次取到的是一等品”**，事件 **B为“第二次取到的是一等品”**，试求**P(B|A)**.

应用定义

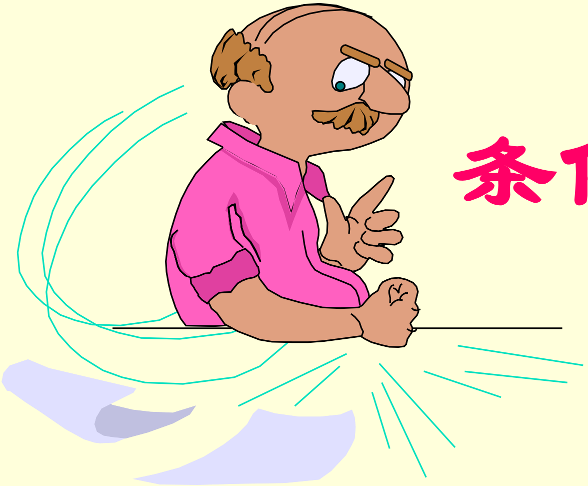
解法1:

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P_3^2/P_5^2}{3/5}=\frac{1}{2}$$

解法2:

在A发生后的缩减样本空间中计算

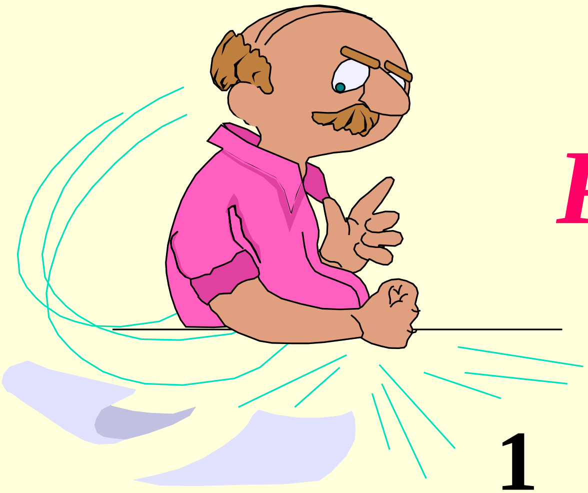
$$P(B\mid A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$



条件概率$P(A|B)$与$P(A)$的区别

$P(A)$与$P(A|B)$的区别在于两者**发生的条件**不同,它们是两个不同的概念,在数值上一般也不同.

一般 $P(A|B) \neq P(A)$



$P(A|B)$与$P(AB)$的区别

1　发生条件不同

B发生,
在$P(AB)$中作为结果;
在$P(A|B)$中作为条件

2　数值不同

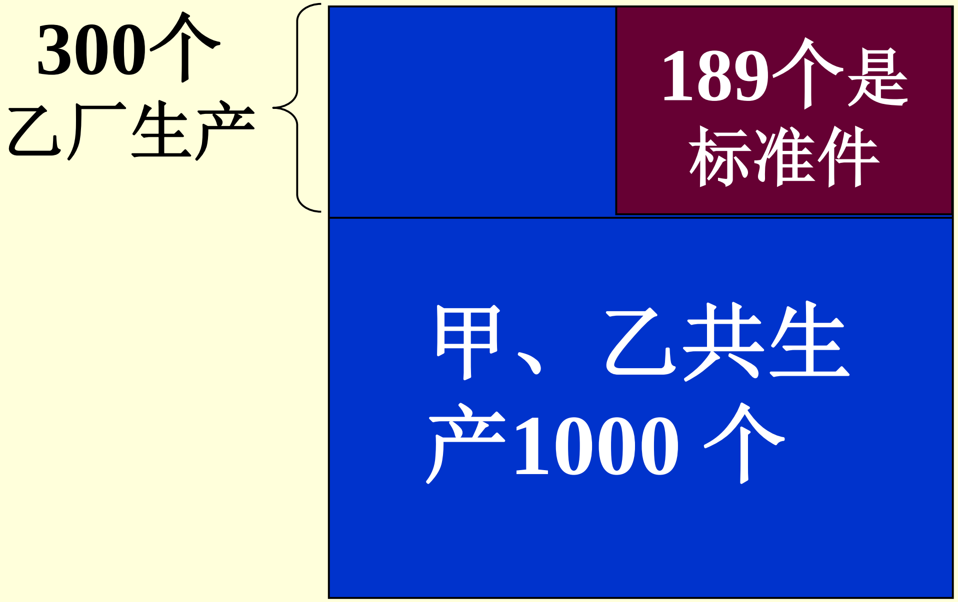
例如 甲、乙两厂共同生产1000个零件，其中300件是乙厂生产的. 而在这300个零件中，有189个是标准件，现从这1000个零件中任取一个，问

(1)这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少？

(2)发现它是乙厂生产的,问它是标准件的概率是多少?”

设B={零件是乙厂生产}

A={是标准件}



(1)所求为$P(AB)$.

(2) $P(A|B)$.

乘法公式

定义　设有两个事件A，B，如果$P(B)>0$，由条件概率公式得

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \qquad (1)$$

如果 $P(A)>0$，由条件概率公式得

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \qquad (2)$$

公式（1）和（2）均称为概率的乘法公式或称为概率的乘法定理

推广

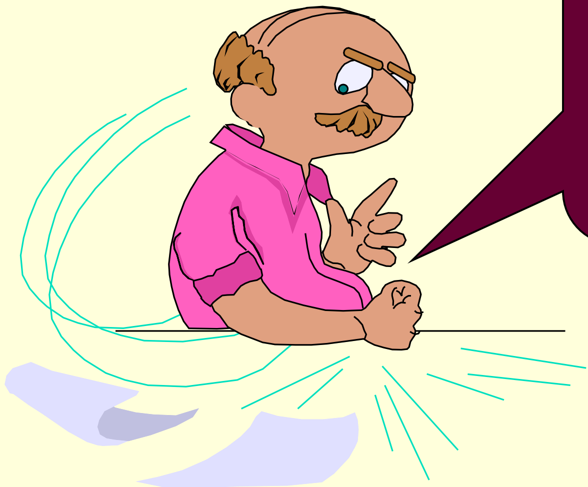
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P\left(A_2\middle|A_1\right)\cdots P\left(A_n\middle|A_1A_2\cdots A_{n-1}\right)$$

$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

例3

一场精彩的足球赛将要举行，5个球迷好不容易才搞到一张入场券. 大家都想去, 只好用抽签的方法来解决.

入场券



“大家不必争先恐后，你们一个一个按次序来，谁抽到‘入场券’的机会都一样大.”

“先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会大。”

我们用A_i表示“第i个人抽到入场券”

$i = 1,2,3,4,5.$

显然，$P(A_1)=1/5$，$P(\overline{A}_1)=4/5$

由于 $A_2 = \overline{A}_1 A_2$

由乘法公式

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)$$

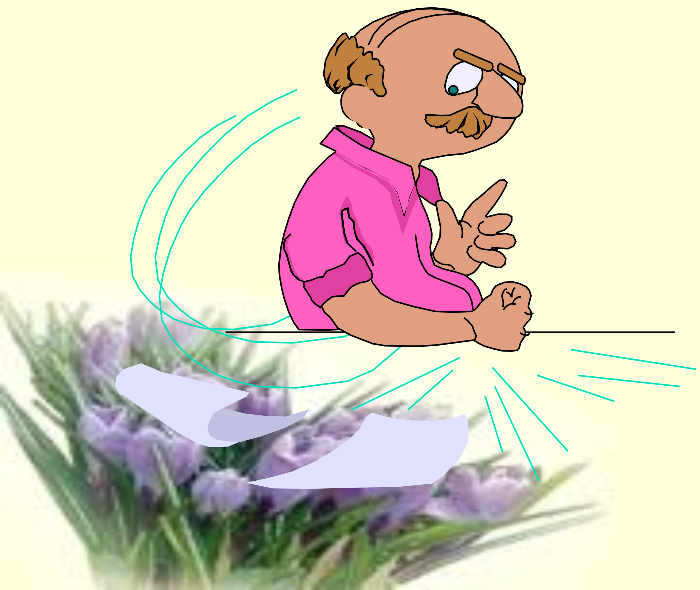
计算得：

$$P(A_2) = (4/5)(1/4) = 1/5$$

$$P(A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

＝(4/5)(3/4)(1/3)=1/5

继续做下去就会发现，每个人抽到“入场券”的概率都是1/5.



直觉不一定可靠呦

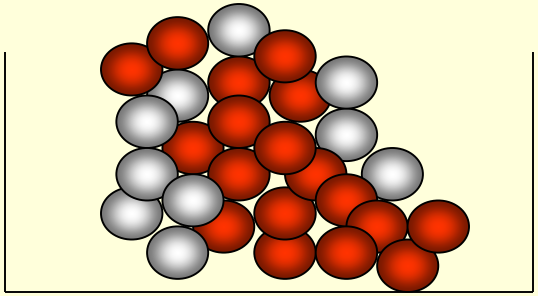
抽签问题更为一般的模型是

袋中有***a*** 只黑球，***b*** 只白球，现把球随机一只只摸出来，求第k次摸到的一只球是黑球的概率 $(1 \le k \le a+b)$

$$p = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$$

抽签与次序无关!

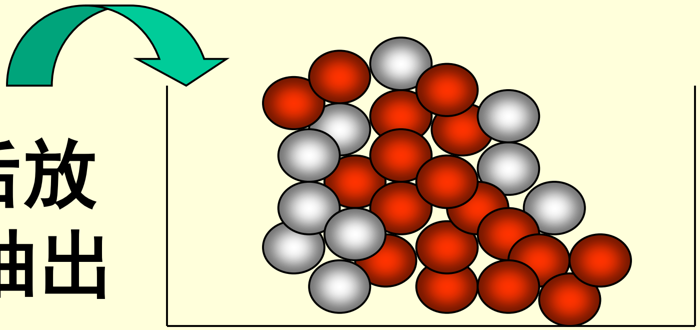
例4　波里亚罐子模型



b个白球, r个红球

一个罐子中包含 b 个白球和 r 个红球. 随机地抽取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进 c 个与所抽出的球具有相同颜色的球。这种手续进行四次，试求第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率.

随机取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进 c 个与所抽出的球具有相同颜色的球.

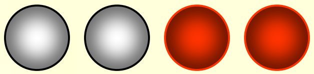


b个白球, r个红球

解：设W_i={第i次取出是白球}, $i=1,2,3,4$

R_j={第j次取出是红球}， $j=1,2,3,4$

于是$W_1W_2R_3R_4$表示事件“连续取四个球，第一、第二个是白球，第三、四个是红球.”

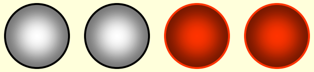


用乘法公式容易求出

$$P(W_1W_2R_3R_4)$$

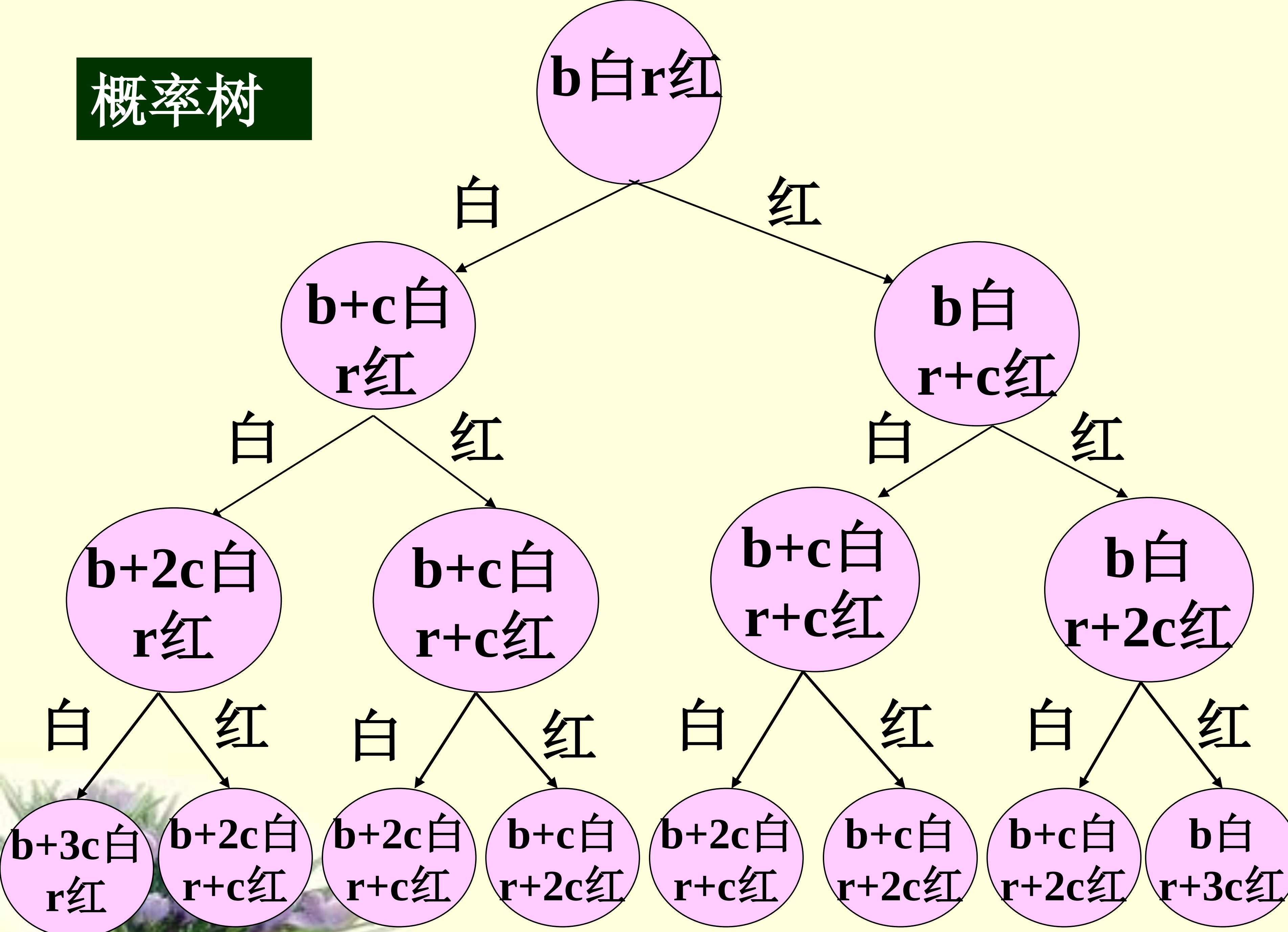
$$=P(W_1)\mathrm{P}(W_2|W_1)\mathrm{P}(R_3|W_1W_2)\mathrm{P}(R_4|W_1W_2R_3)$$

$$=\frac{b}{b+r}\,\frac{b+c}{b+r+c}\,\frac{r}{b+r+2c}\,\frac{r+c}{b+r+3c}$$



当 $c>0$ 时，由于每次取出球后会增加下一次也取到同色球的概率．这是一个传染病模型．每次发现一个传染病患者，都会增加再传染的概率．

概率树


b白r红
白
红
b+c白 r红
b白 r+c红
白
红
白
红
b+2c白 r红
b+c白 r+c红
b+c白 r+c红
b白 r+2c红
白
红
白
红
白
红
白
红
b+3c白 r红
b+2c白 r+c红
b+2c白 r+c红
b+c白 r+2c红
b+2c白 r+c红
b+c白 r+2c红
b+c白 r+2c红
b白 r+3c红

第一章作业3：

17, 23, 25, 26, 29, 30