复习

二维随机变量 (X,Y)

离散型
联合分布律
边缘分布律

连续型
联合密度函数
边缘密度函数

联合分布函数 $F(x,y)$
边缘分布函数 $F_X(x)$ $F_Y(x)$

3.3 随机变量的独立性

两事件*A*,*B*独立的定义是：

若$P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件*A*,*B*独立 .

对一切集合B_1, B_2

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2)$$

上页 下页 返回

随机变量的独立性

若二维随机变量(X, Y)对任意实数x,y,均有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

成立，则称随机变量是相互独立的.

即设 X,Y是两个$r.v$，若对任意的x,y,有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称X,Y相互独立 .

性质 若*X*,*Y*相互独立

对一切集合B_1, B_2

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2)$$

例如 若*X*,*Y*相互独立,

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= P(x_1 < X \le x_2)P(y_1 < Y \le y_2)$$

$$P(X > x, Y > y) = P(X > x)P(Y > y)$$

例1 一电子元件由两个部件构成，以X, Y分别表示两个部件的寿命(单位：千小时). 已知(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求X与 Y的边缘分布函数，并判断X与Y是否相互独立？

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

解

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-x}, x>0,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

同理

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}, y>0,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y), \forall x,y\in R.$$

所以 X 与 Y 相互独立.

上页 下页 返回

X 与 Y 相互独立. 此时，若再求两个部件的寿命都超过100小时的概率，则

$$P(X > 0.1, Y > 0.1)$$

$$= P(X > 0.1)P(Y > 0.1)$$

$$= [1 - P(X \le 0.1)][1 - P(Y \le 0.1)]$$

$$= [1 - F_X(0.1)][1 - F_Y(0.1)]$$

$$= e^{-0.1} \cdot e^{-0.1}$$

$$= e^{-0.2}.$$

定理1 若(X,Y)是离散型随机变量，则X与Y相互独立的充分必要条件是

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),$$

若(X,Y)是离散型随机变量，则X与Y不相互独立的充分必要条件是

存在x_i, y_j，使得

$$P(X=x_i, Y=y_j)\neq P(X=x_i)P(Y=y_j),$$

例2 (2002-2003试题)

设X的分布律为

X	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
P	0.2	0.5	0.3

$$Y=\cos X,\ Z=\sin X$$

(1)Y与Z是否相互独立　(2)Y+Z的分布律

解: **(1)**

X	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
Y=cosX	0	1	0
Z=sinX	-1	0	1

X	-π/2	0	π/2
Y=cosX	0	1	0
Z=sinX	-1	0	1

$$P(Y=0, Z=-1) = P(X=-\pi/2) = 0.2$$

$$P(Y=1, Z=0) = P(X=0) = 0.5$$

$$P(Y=0, Z=1) = P(X=\pi/2) = 0.3$$

Z \ Y	0	1
-1	0.2	
0		0.5
1	0.3	

上页 下页 返回

Z \ Y	0	1	P(Z=j)
-1	0.2		0.2
0		0.5	0.5
1	0.3		0.3
P(Y=i)	0.5	0.5	

由于

$$P(Y=0, Z=-1) \neq P(Y=0)P(Z=-1)$$

所以**Y**与**Z**不独立

上页 下页 返回

(2)

X	-π/2	0	π/2
Y=cosX	0	1	0
Z=sinX	-1	0	1
Y+Z	-1	1	1

$$P(Y+Z=-1) \quad = P(X=-\pi/2)=0.2$$

$$P(Y+Z=1) \qquad = P(X=0)+P(X=\pi/2)=0.8$$

Y+Z	-1	1
P	0.2	0.8

定理2 若(X, Y)是连续性随机变量，则X与Y独立充分必要条件是

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), a.e.$$

若(X, Y)是连续性随机变量，则X与Y不独立充分必要条件是

存在面积大于0的区域D，使得

$$f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y), \forall (x, y) \in D$$

上页 下页 返回

证明独立性的步骤

1求联合分布律(联合密度)

2求边缘分布律(边缘密度)

3 验证联合分布律(联合密度)等于边缘分布律(边缘密度)的乘积

上页 下页 返回

证明不独立的步骤

1求联合分布律(联合密度)

2求边缘分布律(边缘密度)

3　离散型　找到　x_i, y_j,使得

$$P(X=x_i, Y=y_j) \neq P(X=x_i)P(Y=y_j),$$

连续型

找到面积大于0的区域D,使得

$$f(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y), \forall\ (x,y) \in D$$

例3　若二维随机变量(X, Y)服从正态分布

$N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 试证X与Y 相互独立的充

必要条件是$\rho = 0$

证 $\longrightarrow$ 对任何 x,y 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取 $x=\mu_1, y=\mu_2$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

故 $\rho = 0$

将 $\rho = 0$ 代入 $f(x, y)$ 即得

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

对于正态分布 独立与不相关等价

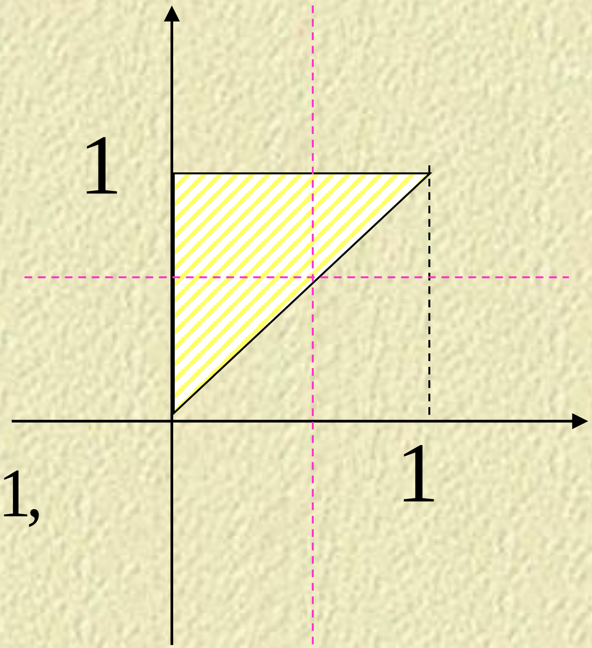
例4已知 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

讨论X,Y是否独立?

上页 下页 返回

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



由图可知边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}\int_x^1 8xy\,dy=4x(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^y 8xy\,dx=4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}16x(1-x^2)y^3, & 0<x<1,\quad 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

上页 下页 返回

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

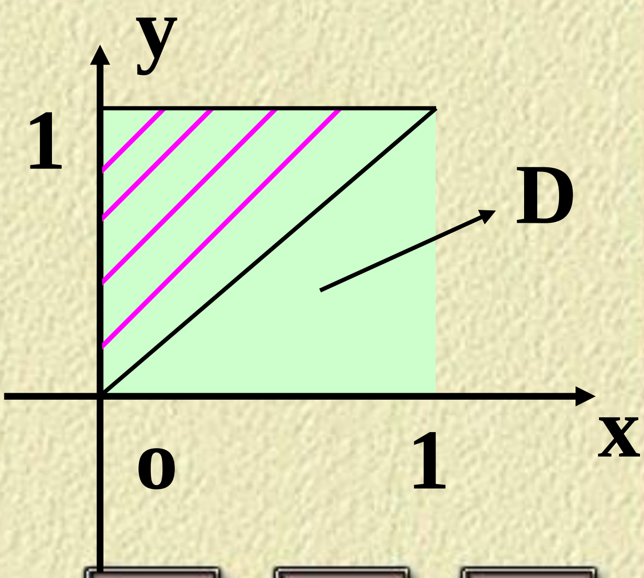
$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}16x(1-x^2)y^3, & 0<x<1,\quad 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

记$D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,\quad 0<y<1\}$

显然，

$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y),\quad (x,y)\in D$

故X,Y不独立



上页 下页 返回

例5 设X, Y**相互独立且同分布**, 有

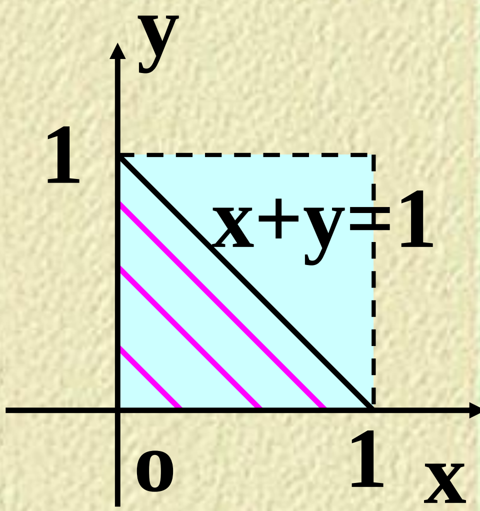
$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $\mathbf{P(X+Y\le 1)}$

解：(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}4xy & 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$P(X+Y\le 1)$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}4xy\,dy\right]dx$$

$$=1/6$$

n 维随机变量

设 n 维随机变量为（$X_1,\ldots X_n$）的分布函数定义为

$$F(x_1,\ldots,x_n)=P(X_1\le x_1,\ldots X_n\le x_n)$$

若任意实数$x_1,\ldots,x_n$有若任意实数$x_1,\ldots,x_n$有

$$P(X_1\le x_1, X_2\le x_2,\cdots, X_n\le x_n)$$
$$=P(X_1\le x_1)P(X_2\le x_2)\cdots P(X_n\le x_n),$$

则称随机变量（$X_1,\ldots,X_n$）是相互独立的。

上页 下页 返回

定理 若$X_1, \ldots, X_n$相互独立,而

$$Y_1=g_1(X_1, \ldots, X_m),\ Y_2=g_2(X_{m+1}, \ldots, X_n)$$

则Y_1与Y_2独立.这里g_1, g_2为连续函数.

例如，若 X, Y 为相互独立的随机变量

则$aX+b,\ cY+d$ 也相互独立;

X^2, Y^2 也相互独立;