概率论与数理统计

数学与统计学院

董岩

概率论与数理统计

成绩计算

成绩：平时成绩30分+考试成绩70分

平时成绩：包含慕课10分+考勤、作业、随堂测等20分

考试成绩：卷面成绩×70%，卷面总分100分。

慕课成绩：包含完成视频观看(根据自己情况自愿选择)；完成每周一次的单元测试（3个选择题，2个判断题）；完成最终的考试(选择题和判断题)

2022秋概率与数理统计（董岩-1）

https://www.icourse163.org/spoc/course/BIT-1467537176

密码：**dy202201**

2022秋概率与数理统计（董岩-2）

https://www.icourse163.org/spoc/course/BIT-1467555177

密码：**dy202202**

讲解内容：第1—8章

目　录

绪 论

- 概率论的研究对象
- 概率论的起源 发展
- 概率论的应用

关键词： 随机现象

概率论

研究对象是什么 ？

随机现象

什么是随机现象？
你能举出随机现象的例子吗？

A 太阳从东方升起

B 明天的最高温度

C上抛物体一定下落

D 新生婴儿的体重

决定性现象

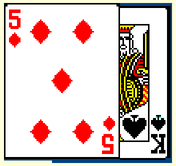
在一定条件下必然发生（出现）某一结果的现象称为决定性现象.

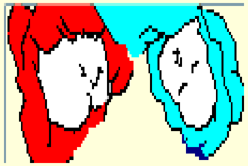
在相同的条件下，重复进行实验或观察，它的结果总是确定不变的。

随机现象

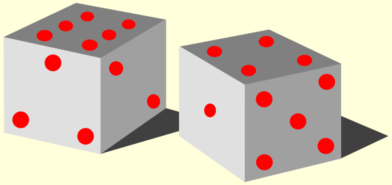
带有随机性，偶然性的现象

在一定条件下，可能出现这样的结果也可能出现那样的结果，在试验或观察前不能预知确切的结果.





在我们所生活的世界上，
充满了随机现象



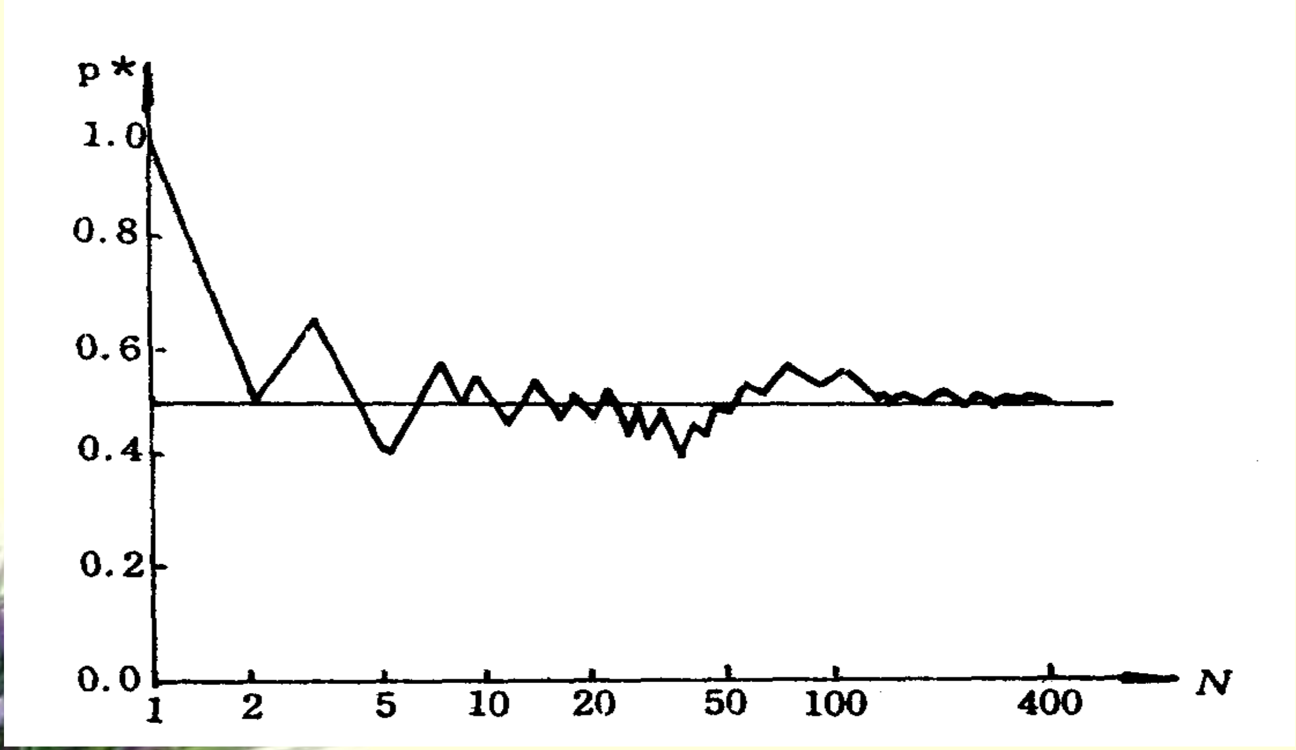
随机现象是不是没有规律可言?

否！在一定条件下对随机现象进行大量观测会发现某种规律性.

例如 [掷硬币试验]

掷一枚均匀硬币，记录前400次掷硬币试验中频率P*的波动情况。

掷一枚硬币，正面出现频率的趋势（横轴为对数尺度）



再如:

测量一物体的长度，由于仪器及观察受到的环境的影响，每次测量的结果可能是有差异的．但多次测量结果的平均值随着测量次数的增加逐渐稳定于一常数.

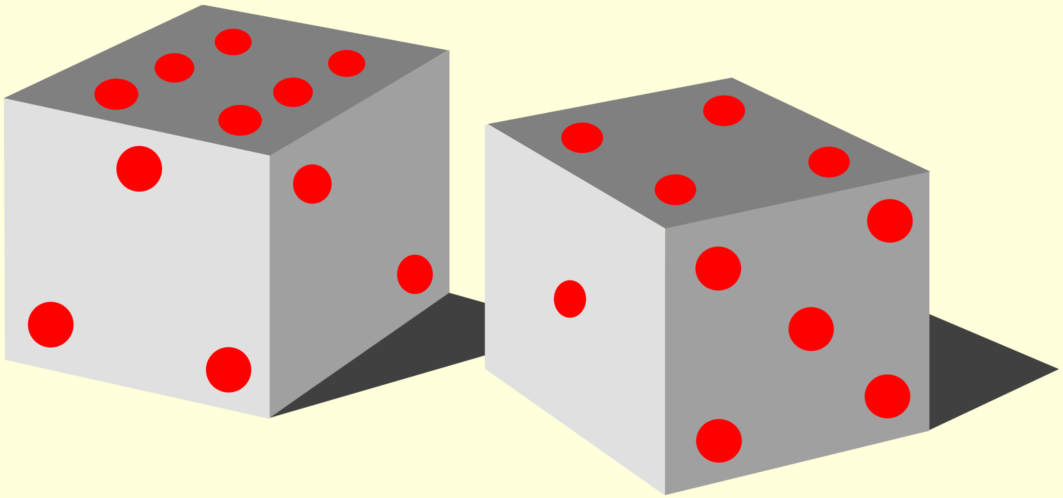
随机现象

- 就一次试验而言　　偶然性，随机性，
  不可预测性
- 大量试验而言　　一定规律性

概率论

是研究**随机现象**的**数量规律**的数学分支

概率论的起源



赌博

概率论的发展

16,17世纪　　赌博

18世纪　　Bernoulli 大数定律

（概率论的第一个极限定理）

Laplace 第二个极限定理

20世纪测度论 积分论

1933　　Kolmogorov 概率的公理化体系

本学科的应用

概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中.

例如

1. 气象、水文、地震预报、人口控制及预测都与 概率论 紧密相关；

2. 产品的抽样验收，新研制的药品能否在临床中应用，均需要用到 假设检验；

3. 寻求最佳生产方案要进行 实验设计 和 数据处理；

4. 电子系统的设计, 火箭卫星的研制与发射都离不开 可靠性估计;

5. 探讨太阳黑子的变化规律时，时间序列分析方法非常有用;

6. 研究化学反应的时变率，要以 马尔可夫过程 来描述;

7. 在生物学中研究群体的增长问题时 提出了生灭型 随机模型，传染病流行问题要用到多变量非线性生灭过程;

8. 许多服务系统，如电话通信、船舶装卸、

机器维修、病人候诊、存货控制、水库调度、购物排队、红绿灯转换等，都可用一类概率模型来描述，其涉及到 的知识就是 排队论.

正如法国

数学家 拉普拉斯所说：“ 生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题.”

第一章　概率论的基本概念

从观察试验开始

研究随机现象，首先要对研究对象进行观察试验. 这里的试验，指的是随机试验.

§1　　样本空间与随机事件

随机试验

对随机现象进行一次观察或试验，统称为试验。

试验若具有下述特点称为随机试验，用 E 表示 .

特点

（1） 试验可以在相同的条件下重复进行；

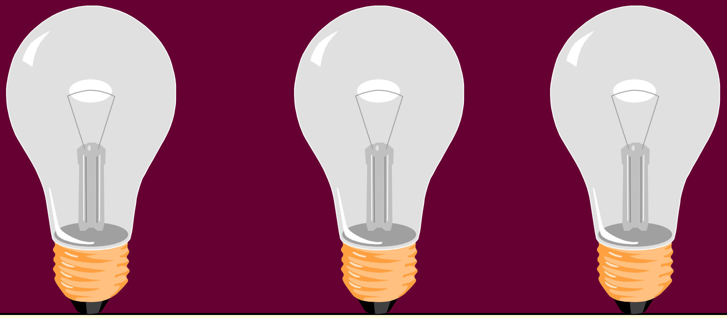
（2） 试验的全部可能结果不止一个，并且在试验之前能够明确知道所有的可能结果；

（3） 每次试验必发生全部可能结果中的一 个且仅发生一个

例如

寿命试验

测试在同一工艺条件下生产出的灯泡的寿命.



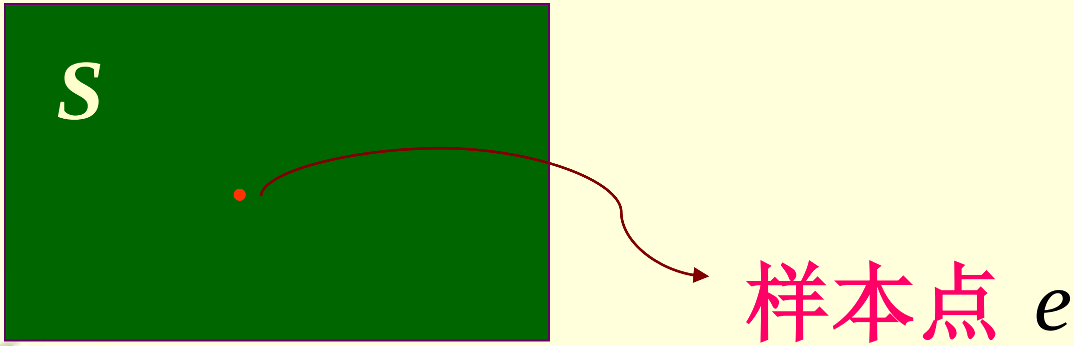
样本空间

试验 E 的所有可能基本结果组成的集合，

称为E 的样本空间，用 S 表示，记为

$$S=\{\ e \mid e\ \text{为}\ E\ \text{的可能结果}\}$$

样本空间的元素 e，也称为样本点.



例1 给出一组随机试验及相应的样本空间

E_1：投一枚硬币3次，观察正面出现的次数

$S_1=\{0,1,2,3\}$ ⟶ 有限样本空间

E_2：观察总机每天9:00~10:00接到的电话次数

$S_2=\{0,1,2,3,\cdots\}$

E_3：观察某地区每天的最高温度与最低温度

$S_3=\{(x,y)\,|\,T_1\le x\le y\le T_2\}$ ⟶ 无限样本空间

其中T_1,T_2分别是该地区的最低与最高温度

有时候，我们更关心的是试验的某个结果是否发生，发生的可能性有多大？

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数．

A_i={掷出i点}

i =1,2,3,4,5,6

B={掷出奇数点}

随机事件

随机试验的某些样本点组成的集合称为随机事件，简称为事件，它常用大写字母 A，B，C表示． 任意随机事件都是样本空间的某一个子集.

事件的发生

在一次试验中，事件*A*发生的含义是，当且仅当*A*中一个样本点发生（或出现）。事件*A*发生也称为事件*A*出现

基本事件

事件

相对于观察目的
不 可再分解的事件

由一个样本点组成
的单点集

复合事件

两个或一些基本事件并在一起，
就 构成一个复合事件

由两个以上样本点
组成的点集

特殊的事件： 必然事件

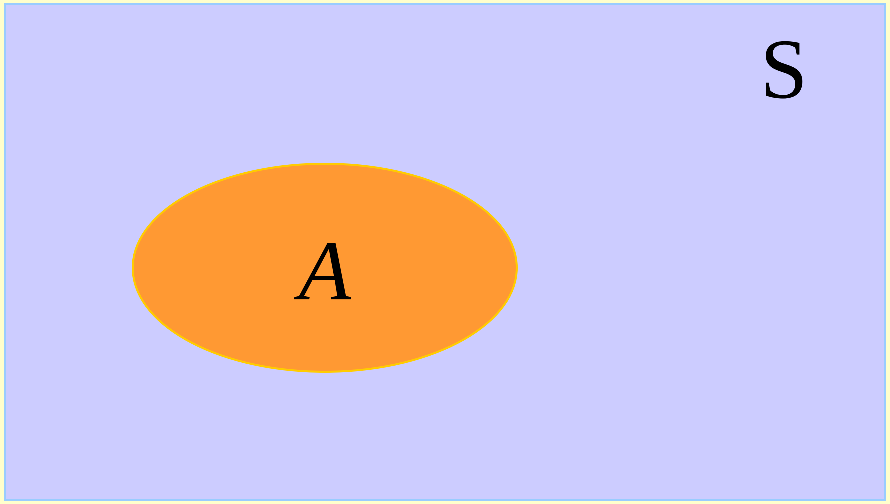
即在试验中必定发生的事件，常用*S*表示;

不可能事件

即在试验中不可能发生的事件，
常用φ表示 .

事件的关系与运算

Venn图

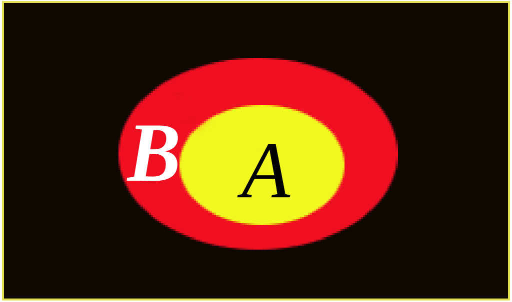


随机事件的关系和运算
雷同集合的关系和运算

（1）若A⊂B，则称事件A包含于事件B，

——事件A发生必然导致B发生

$$S \supset A \supset \phi$$



$$A \subset B$$

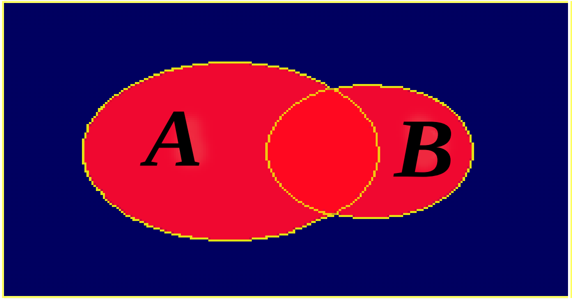
（2）若A$\subset$B，B$\subset$A，即A=B，则称事件A与事件B相等。

掷两颗骰子，令A表示“两次得到的点数一次为奇数点一次为偶数点”，

B表示“两次得到点数之和为奇数”

（3）事件A∪B称为事件A与事件B的并（或和）事件。

—— 当且仅当A、B中至少有一个发生时，事件A∪B发生。



$A \cup B$

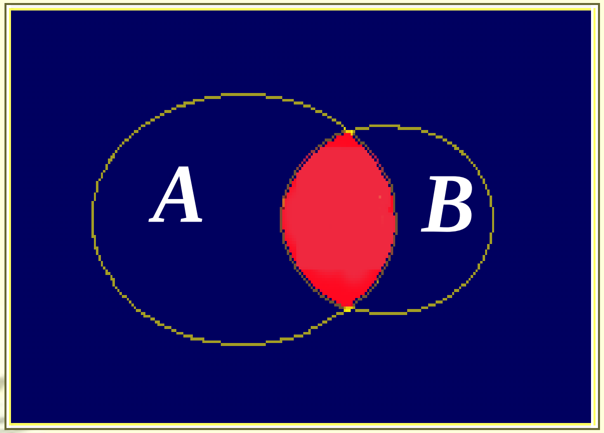
例如：甲、乙二人同时向一目标射击，设A表示甲命中目标，B表示乙命中目标，C 表示目标被命中。则 $C = A \cup B$

类似地，称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件$A_1,\ldots,A_n$的和事件。

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件$A_1,\ldots,A_n,\ldots$的和事件。

（4）事件A∩B称为事件A与事件B的交（或积）事件，也记作AB。

—— 当且仅当A、B同时发生时，事件AB发生。



AB

类似地，称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件$A_1,\ldots,A_n$

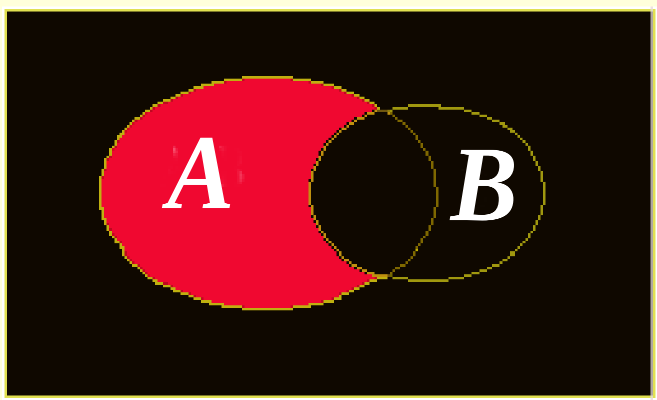
的积事件。

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件$A_1,\ldots,A_n,\ldots$

的积事件。

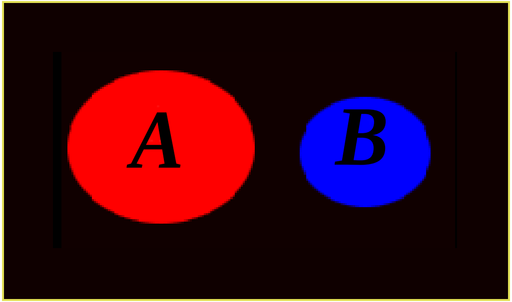
（5）事件**A–B**称为事件A与事件B的差事件。

—— 当且仅当A发生，B不发生时，事件A–B发生。



$A - B$

（6）若$A\cap B=\phi$，称为事件A与事件B互不相容，或互斥。



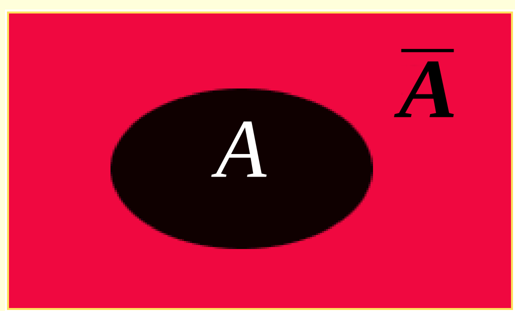
$$AB=\phi$$

（7）若$A\cup B=S$，$A\cap B=\phi$，称事件A与事件B为对立事件。

—— 在每次试验中，事件A、B中必有一个发生，且仅有一个发生。

（8）**事件** $\overline{A}=S-A$ **称为事件A的对立事件。**

—— **当且仅当事件A不发生时，事件** $\overline{A}$ **发生。**



$\overline{A}$

事件的运算性质

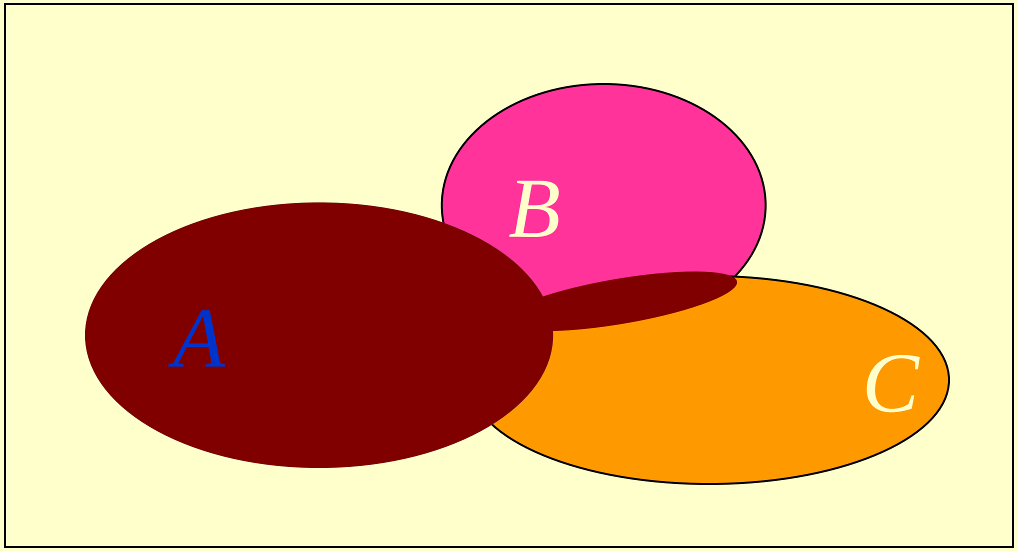
交换律　$A\cup B=B\cup A\quad A\cap B=B\cap A$

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

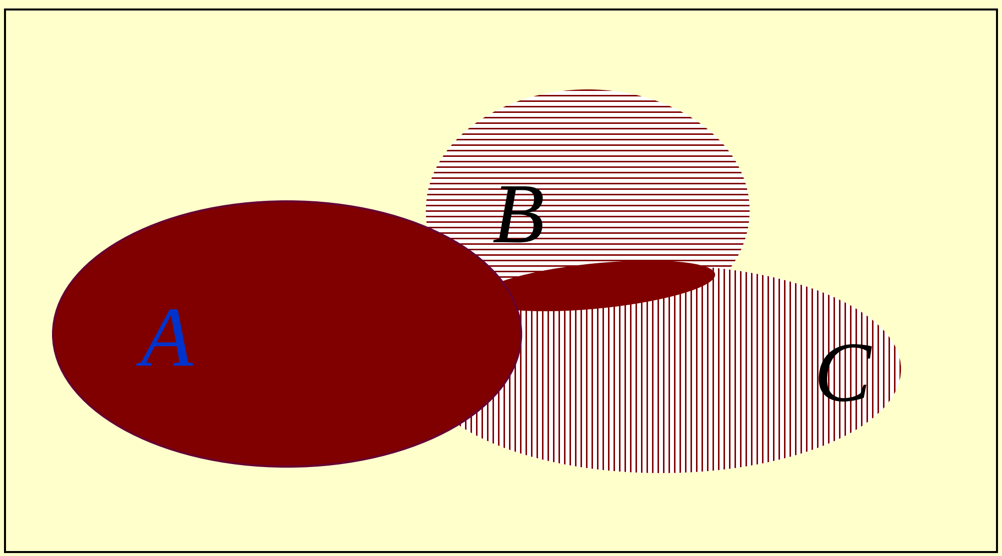


分配律

图 示

$$A \cup (BC) = $$

$$(A \cup B)(A \cup C)$$



事件的运算性质

德 •模根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

差化积 $A-B=A\overline{B}=A-(AB)$

例2 利用事件的运算表达以下个事件

A, B, C 都不发生——

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

A, B, C 不都发生——

$$\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

例3 在图书馆中随意抽取一本书，

事件 A 表示数学书，

B 表示中文书，

C 表示平装书.

则

$AB\overline{C}$ —— 抽取的是精装中文版数学书

$\overline{C} \subset B$ —— 精装书都是中文书

$\overline{A} = B$ —— 非数学书都是中文版的，且中文版的书都是非数学书

例4

一射手向目标射击3发子弹，A_i表示第i次射击打中目标(i=1, 2, 3). 试用A_1，A_2，A_3及其运算表示下列事件：

(1)“三发子弹都打中目标”； $A_1A_2A_3$

(2)“三发子弹都未打中目标” $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

(3)“三发子弹至少有一发打中目标” $A_1\cup A_2\cup A_3$

(4)“三发子弹恰好有一发打中目标”

$$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup A_2\overline{A_1}\,\overline{A_3}\cup A_3\overline{A_1}\,\overline{A_2}$$

(5)“三发子弹至多有一发打中目标”

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup A_2\overline{A_1}\,\overline{A_3}\cup A_3\overline{A_1}\,\overline{A_2}$$

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_2}\,\overline{A_3}$$

第一章作业1

1，2，3，4