

提出 假设

确定检 验统计 量

确定拒 绝域的 形式

确定

临界值

显著性 水平 α

作出 决策

 $P(T \in W) = \alpha$ α----犯第一 类错误的概率, W为拒绝域

§ 2 一个正态总体下参数的假设检验

○ 一个正态总体

设
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

样本 $(X_1, X_2, ..., X_n)$,
样本值 $(x_1, x_2, ..., x_n)$,
显著性水平 α

关于 μ 的假设检验, σ^2 已知

$$H_0: \mu = \mu_0 \Leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

检验统计量取为

拒绝域为

$$Z = \frac{X - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$W = \{(x_1, ..., x_n) : |z| = \frac{|x - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > c\}$$

 H_0 成立时

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

按照控制第一类错误的原则,有

$$H_0$$
成立时 $P\{|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}| > c\} = \alpha$

$$c = z_{\alpha/2}$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, ..., x_n) : |z| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \}$$

查表
$$u_{\alpha/2}$$
, 计算 $\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$

若其大于॥ ๙๐, 拒绝原假设。否则,接受原假设。

例1 生产流水线上的袋装糖果的重量服从正态分布 $N(\mu,0.015^2)$. 按规定袋装糖果的重量的均值应为**0.5**(克)。一批袋装糖果出厂前进行抽样检查,抽查了**9**袋,重量分别为,

0.497 0.506 0.518 0.498 0.511 0.520

0.515 0.512

问这一批袋装糖果是否合格?

(显著水平 $\alpha=0.05$)

待检验假设可设为

$$H_0: \mu = \mu_0 = 0.5 \longrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 = 0.5$$

检验统计量取为
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, ..., x_n) : |z| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \}$$

这里 $n = 9, \alpha = 0.05$, 查表得 $z_{0.025} = 1.96$,

计算得
$$|z| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} = 2.2 > 1.96$$

拒绝原假设,认为这批袋装糖果不合格

前面一例的检验,拒绝域取在两侧,称为双侧检验.

下面看关于均值的单侧检验.

原假设 H_0 : $\mu \leq \mu_0$

备择假设 H_1 : $\mu > \mu_0$

检验统计量取为

拒绝域为

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$W = \{(x_1, ..., x_n) : z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > c\}$$

若原假设Ho正确, 要求

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > c\right) = \alpha$$

当 H_0 成立时, X_1 ,…, X_n $^{\sim}$ $N(\mu, \sigma^2)$,因此

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

原假设下, Z的分布未知, 无法直接求c的值

虽然不知 μ 的真值,但知 $\mu \leq \mu_0$ 。由于

$$\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > c\} \subset \{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > c\}$$

$$P(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > c) \leq P(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > c)$$

$$\bar{X} - \mu$$

$$X - \mu$$

且

$$\frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

所以,只要取 $c = z_{\alpha}$,可得 $P(\frac{X - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{\alpha}) = \alpha$

于是

$$P(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{\alpha}) \le \alpha$$

故取拒绝域为

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{\alpha}$$

此时,犯第一类错误的概率 α 。

例2 某织物强力指标X的均值 μ_0 =21公斤. 改进工艺后生产一批织物,今从中取30件,测得 $\bar{\chi}$ =21.55公斤. 假设强力指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,且已知 σ =1.2公斤,问在显著性水平 α =0.01下,新生产织物比过去的织物强力是否有提高?

解: $H_0: \mu \le \mu_0 = 21 \Leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0 = 21$

检验统计量为

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, ..., x_n) : z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha \}$$

这里
$$n = 30, \alpha = 0.01,$$

查表得, $z_{\alpha}=2.33$,由样本值计算

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} = 2.55 > 2.33$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{30}}$$

故拒绝原假设 H_0 .

落入否定域

关于 μ 的检验(σ^2 已知)

Z检验法

原假设 H ₀	备择假设 <i>H</i> ₁	检验统计量	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{}$	$ Z \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$Z \leq -z_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$Z \geq z_{\alpha}$

关于 μ 的假设检验, σ^2 未知

$$H_0: \mu = \mu_0 \Leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

检验统计量取为

拒绝域为

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

$$W = \{(x_1, ..., x_n) : |t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{S / \sqrt{n}} > c\}$$

H。为真时

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

按照控制第一类错误的原则,有

$$H_0$$
成立时, $P\{||\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}||>c\}=\alpha$

由此

$$c = t_{\alpha/2}(n-1)$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, ..., x_n) : |t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{S / \sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

查表
$$t_{\alpha/2}(n-1)$$
, 计算 $t = \frac{|x - \mu_0|}{S/\sqrt{n}}$

若其大于 $t_{\alpha/2}(n-1)$,拒绝原假设。

否则,接受原假设。

关于 μ 的检验(σ^2 未知) T 检验法

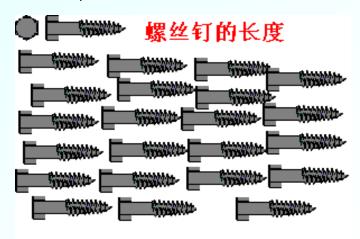
	原假设 H ₀	备择假设 <i>H</i> ₁	检验统计量	拒绝域
_	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\left t \right \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
_	$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$t = \frac{S}{\sqrt{n}}$	$t \le -t_{\alpha} (n-1)$
	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \ge t_{\alpha} (n-1)$

例3 某工厂生产的一种螺钉,标准要求长度是32.5毫米. 实际生产的产品,其长度X假定服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2),\sigma^2$ 未知,现从该厂生产的一批产品中抽取6件,得尺寸数据如下:

32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03

问这批产品是否合格?

显著性水平为0.01



$$H_0: \mu = \mu_0 = 32.5 \Leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 = 32.5$$

检验统计量取为

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{6}}$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, ..., x_n) : |t| = \frac{|x - \mu_0|}{S / \sqrt{6}} > t_{\alpha/2}(5)\}$$

对给定的显著性水平 α =0.01,查表确定临界值

$$t_{\alpha/2}(5) = t_{0.005}(5) = 4.0322$$

将样本值代入算出

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{6}}}$$
 |=2.997<4.0322

故不能拒绝 H_0 .

没有落入 拒绝域

关于 σ^2 的假设检验, μ 未知

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

取检验统计量为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

确定拒绝域的形式

$$W = \{(x_1,...,x_n): \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < c_1$$
 或 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > c_2 \}$ 当 H_0 成立时, $X_1,...,X_n \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, 因此

$$\frac{(n-1)S^{2}}{\sigma_{0}^{2}} \sim \chi^{2}(n-1)$$

按照控制第一类错误的原则,有

当 H_0 成立时

$$P\{\frac{(n-1)S^{2}}{\sigma_{0}^{2}} < c_{1}\} + P\{\frac{(n-1)S^{2}}{\sigma_{0}^{2}} > c_{2}\}$$

$$= \alpha$$

为了计算方便,习惯上取

$$P\{\frac{(n-1)S^{2}}{\sigma_{0}^{2}} < c_{1}\} = \alpha/2$$

$$P\{\frac{(n-1)S^{2}}{\sigma_{0}^{2}} > c_{2}\} = \alpha/2$$

因此有

$$c_1 = \chi_{1-\alpha/2}^2 (n-1)$$

$$c_2 = \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, ..., x_n) : \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2} \quad \text{ if } \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha/2} \}$$

关于 σ^2 的检验, μ 未知 χ^2 检验法

原假设 H ₀	备择假设 <i>H</i> ₁	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	(1) 0 2	$\chi^{2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)$ 或 $\chi^{2} \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2 (n-1)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2 (n-1)$

例4

某汽车配件厂在新工艺下对加工好的25个活塞的直径进行测量,得样本方差s²=0.00066. 己知老工艺生产的活塞直径的方差为0.00040. 问新工艺下活塞直径的稳定性是否有显著提高?

$$(\alpha = 0.05)$$

设测量值 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

解: 待检验假设可设为:

$$H_0: \sigma^2 \le 0.00040$$
; $H_1: \sigma^2 > 0.00040$.

取统计量
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$
,

拒绝域:
$$W = \{(x_1, ..., x_n) : \chi^2 \ge \chi_\alpha^2 (n-1)\}$$

n=25,
$$\alpha = 0.05$$
 $\chi_{0.05}^2(24) = 36.415$ 计算得 $\chi^2 = \frac{24 \times 0.00066}{0.00040} = 39.6 > 36.415$

落在W内,故拒绝 H_0 . 即改革后的方差显著大于改革前的方差

○ 两个正态总体

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$ 两样本 X, Y 相互独立, 样本 $(X_1, X_2, ..., X_n), (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ 样本值 $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_m),$ 显著性水平 α 1. 关于均值差的假设检验, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 已知

(1)
$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta \Leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta \Leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

从 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个无偏估计出发 $\bar{X} - \bar{Y}$,确定拒绝域的形式

$$W = \{ |(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta| > C \}$$

并控制第一类错误,

$$P\{|(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta| > C | H_0 成立\} = \alpha$$

由于当 H_0 成立时,

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} \sim N(0, 1)$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta \Leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

并控制第一类错误, $P\{|(\bar{X}-\bar{Y})-\delta|>C|H_0成立时\}=\alpha$

曲于
$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} \sim N(0, 1)$$

所以

$$P\{|(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta| > C\} = P\{\frac{|(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta|}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} > \frac{C}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}}\} = \alpha$$

$$C = \sqrt{rac{\sigma_1^2}{n} + rac{\sigma_2^2}{m}} z_{lpha/2}$$
 函数与极限

所以拒绝域为

$$W = \{ |(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta| > \sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m} \ z_{\alpha/2} \}$$

等价地,该拒绝域可写为

$$W = \left\{ \frac{\left| (\bar{X} - \bar{Y}) - \delta \right|}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} > z_{\alpha/2} \right\}$$

检验统计量

关于均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验(σ_1^2 , σ_2^2 已知)

原假设 <i>H</i> ₀	备择假设 <i>H</i> ₁	检验统计量	拒绝域
$\mu_1 - \mu_2 = 0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$\overline{X}-\overline{Y}$	$ Z \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 - \mu_2 \ge 0$	$\mu_1 - \mu_2 < 0$	$ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} $	$Z \leq -z_{\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 \le 0$	$\mu_1 - \mu_2 > 0$		$Z \ge z_{\alpha}$

σ_1^2 , σ_2^2 未知, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

原假设 H ₀	备择假设 <i>H</i> ₁	检验统计量	拒绝域		
$\mu_1 - \mu_2 = 0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$		$\left T \right \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$		
$\mu_1 - \mu_2 \ge 0$	$\mu_1 - \mu_2 < 0$	$T = \frac{X - Y}{S_w \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$	$T \le -t_{\alpha} (n+m-2)$		
$\mu_1 - \mu_2 \le 0$	$\mu_1 - \mu_2 > 0$		$T \ge t_{\alpha} (n + m - 2)$		
	- 1.1.	$(n-1)S^2 + (m-1)S^2$			

其中
$$S_w = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}$$

关于方差比的检验

(1)
$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

依据 σ_1^2/σ_2^2 的一个点估计 S_1^2/S_2^2 确定拒绝域的 形式

$$W = \{S_1^2 / S_2^2 < C_1 \text{ or } S_1^2 / S_2^2 > C_2 \}$$

并控制第一类错误,

$$P\{S_1^2 / S_2^2 < C_1 \text{ or } S_1^2 / S_2^2 > C_2 \} = \alpha$$

由于当 H_0 成立时,

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

并控制第一类错误,
$$P\{S_1^2 / S_2^2 < C_1 \text{ or } S_1^2 / S_2^2 > C_2 \} = \alpha$$

由于
$$S_1^2 / S_2^2 \sim F(n-1,m-1)$$

按照控制第一类错误的原则,为了计算方便,取

$$P\{S_1^2 / S_2^2 < C_1\} = \alpha / 2, P\{S_1^2 / S_2^2 > C_2\} = \alpha / 2$$

$$C_1 = F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1), C_2 = F_{\alpha/2}(n-1,m-1),$$

拒绝域为

$$W = \{S_1^2 / S_2^2 < C_1 \text{ or } S_1^2 / S_2^2 > C_2 \}$$

$$C_1 = F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1), C_2 = F_{\alpha/2}(n-1, m-1),$$

所以拒绝域为

$$W = \{S_1^2 / S_2^2 < F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1) \text{ or } S_1^2 / S_2^2 > F_{\alpha/2}(n-1,m-1)\}$$

(2)
$$H_0: \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

检验统计量

$$S_1^2 / S_2^2$$

确定拒绝域的形式
$$W = \{S_1^2 / S_2^2 < C\}$$

并控制第一类错误,

$$P\{S_1^2 / S_2^2 < C\} \le \alpha$$

由于当H。成立时,

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} / \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

$$H_0: \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

控制第一类错误, $P\{S_1^2 \mid S_2^2 < C \mid H_0$ 成立 $\} \le \alpha$

当
$$H_0$$
成立时,
$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n-1,m-1)$$

且

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

所以
$$\left\{ \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < C \right\} \supset \left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} < C \right\}$$

故而
$$P\{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < C\} \ge P\{\frac{S_1^2}{S_2^2} < C\}$$

要使

$$\alpha \ge P\{\frac{S_1^2}{S_2^2} < C\}$$

只要

$$\alpha = P\{\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} < C\}$$

$$\longrightarrow C = F_{1-\alpha}(n-1,m-1)$$

函数与极限

$$W = \{S_1^2 / S_2^2 < C\}$$

$$C = F_{1-\alpha}(n-1, m-1)$$

所以拒绝域为

$$W = \{S_1^2 / S_2^2 < F_{1-\alpha}(n-1,m-1)\}$$

关于方差比 σ_1^2/σ_2^2 的检验, μ_1 , μ_2 均未知

原假设 H ₀	备择假设 <i>H</i> ₁	检验统计量	拒绝域
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$ 或 $F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$
$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	S_2^2	$F \leq F_{1-\alpha}(n-1, m-1)$
$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F \ge F_{\alpha}(n-1, m-1)$

例5

假设机器 A 和机器 B 都生产钢管,要检验 A 和 B 生产的钢管的内径的稳定程度. 设它们生产的钢管内径分别为 X 和 Y,都服从正态分布

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

现从A生产的钢管中抽出18 根, 测得 $s_1^2 = 0.34$, 从B生产的钢管中抽出13 根, 测得 $s_2^2 = 0.29$,

设两样本相互独立. 问是否能认为两台机器生产的钢管内径的稳定程度相同? (取 $\alpha = 0.1$)

取检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S^2}$ 拒绝域为:

n=18, m=13, $\alpha = 0.1$ $F_{0.05}(17, 12) = 2.59,$

由给定值算得:

$$F_{0.95}(17, 12) = \frac{1}{F_{0.05}(12,17)} = \frac{1}{2.38} = 0.42$$

 $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.34}{0.29} = 1.17$ 落在拒绝域外,

故接受原假设,即认为内径的稳定程度相同.

作业2: 第八章

1,2,8,11