

## 2015 级离散数学 II 期末试题 (A 卷)

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

## 1. 选择题 (共 10 题, 每题 2 分)

- 1) 设  $\Sigma$  是由有限多字母组成的集合, 称为字母表. 由  $\Sigma$  中的字母组成的有序序列称为  $\Sigma$  上的串. 若串中的字母个数为零, 则该串叫做空串. 令  $\Sigma^*$  表示  $\Sigma$  上所有有限长的串的集合. 在  $\Sigma^*$  上定义一个连接运算“\*”, 对任意两个串  $x, y$ ,  $x*y=xy$ . 即把串  $y$  添加到串  $x$  后面. 则关于  $\langle \Sigma^*, * \rangle$  以下哪个判断正确? ( )
- A. 是代数系统, 但不是半群                      B. 是半群, 但不是独异点  
C. 是独异点, 但不是群                          D. 不是代数系统
- 2) 设  $G$  为 20 阶循环群, 其生成元有几个? ( )
- A. 6                      B. 7                      C. 8                      D. 9
- 3) 设  $\mathbf{Z}_{12}$  为模 12 整数加群. 以下哪个是子群  $\langle 4 \rangle$  在  $G$  中的右陪集? ( )
- A.  $\{1, 4, 7, 10\}$                                       B.  $\{0, 4, 8\}$   
C.  $\{3, 6, 9\}$                                         D.  $\{4, 8\}$
- 4) Klein 四元群的子群格是以下哪种格? ( )
- A. 分配格    B. 有补格  
C. 五角格    D. 布尔代数
- 5) 设  $S = \{y \mid \exists x (x \in \mathbf{Z} \wedge x \bmod 7 \neq 0 \wedge y = x^6 \bmod 7)\}$ , 则  $|S|$  是多少? ( )
- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4
- 6)  $K_{m,n}$  的边数为多少? ( )
- A.  $mn$                       B.  $m+n$                       C.  $2mn$                       D.  $2(m+n)$
- 7) 有向图  $D = \langle V, E \rangle, V = \{a, b, c, d, e, f\}, E = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle f, e \rangle\}$ . 则  $D$  的连通性与哪种图最接近? ( )

A. 不连通图 B. 弱连通图 C. 单向连通图 D. 强连通图

8) 树 $T$ 具有 5 个 4 度顶点, 其余均为 1 度顶点。则有几非同构的 $T$ ? ( )

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

9) 若无向简单图 $G$ 是一个自补图, 则 $G$ 的顶点数可能为多少? ( )

A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

10) 已知某二元前缀码中字母 e 对应的编码为 10, 则单词 pepper 可能对应的前缀码是什么? ( )

A. 11011100 B. 01000101 C. 01100101100 D. 11101111100

## 2. 判断题 (共 10 题, 每题 1 分, 真为"T", 假为"F")

1) 设  $R$  是整环. 若  $R$  中每个元素在乘法下都有逆, 则  $R$  是域. ( )

2) 若  $G$  是  $n$  阶群, 则对  $n$  的每个正因子  $d$ ,  $G$  都有一个  $d$  阶子群. ( )

3) 无限群中必有无限阶元. ( )

4) 代数系统  $A$  中若存在  $a$  使得  $a^2 = a$ , 则  $A$  上的运算满足幂律. ( )

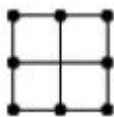
5) 设  $a$  是群  $G$  中元素. 则对任意整数  $n$ ,  $|a^n|$  是  $|a|$  的因子. ( )

6) 若图  $G$  有 50 个顶点和 49 条边, 则  $G$  是树. ( )

7) 完全图不一定是哈密顿图. ( )

8) 平面图的对偶图一定是连通图. ( )

9)  $K_{2,3}$  是欧拉图也是哈密顿图. ( )



10) 右图是二部图. ( )

## 3. 填空题 (共 10 题, 每题 2 分)

1) 设  $\mathbf{Z}_{18}$  为模 18 整数加群, 则元素 14 的阶是\_\_\_\_\_.

2) 一次同余方程  $7x \equiv 10 \pmod{29}$  的最小正整数解为\_\_\_\_\_.

3) 在域  $\mathbf{Z}_7$  中, 方程组  $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$  的解为  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4)  $56^{-1} \pmod{13} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5) 设  $n$  是正整数,  $S_n$  为  $n$  的正因子集,  $S_n$  关于整除关系构成格, 令  $n = 3, 4, 5, 6$ , 则  $n = \underline{\hspace{2cm}}$  时  $S_n$  是布尔代数.

6) 树叶带权分别为 1, 2, 3, 4, 5, 7 的最优 2 叉树的权为\_\_\_\_\_.

- 7) 轮图 $W_n(n \geq 4)$ 的对偶图为\_\_\_\_\_.
- 8) 平面图 $G$ 有 16 个连通分支, 128 个顶点, 81 个面, 则 $G$ 有\_\_\_\_\_条边.
- 9)  $n$ 阶无向简单图 $G$ 及其补图 $\bar{G}$ 都有 $n + 21$ 条边, 则 $n =$ \_\_\_\_\_.
- 10)  $K_{2,3}$ 的点色数为\_\_\_\_\_, 面色数为\_\_\_\_\_, 边色数为\_\_\_\_\_.

4. (10 分) 用 2 种颜色涂色  $3 \times 3$  的方格棋盘, 每个方格一种颜色. 如果允许棋盘任意旋转或者翻转, 则不同的着色方案数是多少?

5. (10 分) 设平面图 $G$ 的顶点数 $v \geq 11$ , 证明:  $G$ 的补图 $\bar{G}$ 不是平面图.

6. (10 分) 设有 6 个城市 $v_1, v_2, \dots, v_6$ , 各城市之间的距离如下表所示. 用 Dijkstra 标号法求解 $v_1$ 到其余城市的最短路径和距离, 写出计算过程和结果.

道路	$v_1v_2$	$v_1v_3$	$v_2v_3$	$v_2v_4$	$v_2v_5$	$v_2v_6$	$v_4v_5$	$v_4v_6$	$v_5v_6$
距离	1	4	2	7	5	1	3	2	6

7. (10 分) 证明 6 阶群中必含有 3 阶元.

8. (10 分) 设  $Z$  是整数集,  $\oplus$  是  $Z$  上如下定义的二元运算:  $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$  这里“+”是整数上的普通加法. 设  $\langle G, + \rangle$  是一个整数加群. 假设  $f: Z \times Z \rightarrow G$  是一个群同态, 其中  $f(1,2) = g_1, f(3,5) = g_2$ .

- 1) 证明:  $\langle Z \times Z, \oplus \rangle$  是一个阿贝尔群.
- 2) 请用  $g_1$  和  $g_2$  来表示  $f(5,8)$ .