1. **Исследовать на линейную зависимость:**

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x.$$

Четвертый вектор будет линейной комбинацией других:

$$f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x) = x + 1 - 1 - e^x = x - e^x$$

Следовательно эта система векторов линейно зависима.

2. **Исследовать на линейную зависимость:**

$$\boldsymbol{f_1(x) = 2,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2,\ f_4(x) = (x + 1)^2.}$$

Разложим четвертый вектор на слагаемые:

$$f_4(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

И мы можем этот вектор представить линейной комбинацией других векторов:

$$f_4(x) = f_3(x) + 2f_2(x) + 0{,}5f_1(x) = x^2 + 2x + 1$$

Следовательно эта система векторов линейно зависима.

3. **Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}) \in \mathbb{R}^3$ в базисе**
   $\boldsymbol{b}_1 = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{10}), \boldsymbol{b}_2 = (\mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \boldsymbol{b}_3 = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$**.**

Можем представить базис в виде матрицы:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Чтобы найти вектор в новом базисе решим систему уравнений:

$$\boldsymbol{B} \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$$

Где $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ – вектор в новом базисе.

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{x}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-\mathbf{1}} \cdot [2,3,5]$$

Я так понял, матричные преобразования будут на второй лекции, поэтому обратную матрицу нашел с помощью метода getI() в NumPy.

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot [2,3,5] = [1.5, \ \ 5, \ \ 0.2]$$

4. **Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$:**

а) в базисе $1,\ x,\ x^2$;

Так как мы только поменяли порядок векторов в базисе, то логично будет предположить, что новый вектор будет: (2, -2, 3)

б) в базисе $x^2,\ x-1,\ 1$.

По аналогии с третьим примером:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-\mathbf{1}} \cdot\ [3,-2,2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot\ [3,-2,2] =\ [3,-2,0]$$

5. **Установить, является ли линейным подпространством:**

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

То есть вектора имеют общий вид $(0,a,b)(a,0,b)(0,0,a)$

$$\begin{gathered} (0,a,b) + (0,c,d) = (0,a+c,b+d), \\ (a,0,b) + (c,0,d) = (a+c,0,b+d), \\ (0,0,a) + (0,0,b) = (0,0,a+b), \\ \boldsymbol{\alpha}(0,a,b) = (0,\boldsymbol{\alpha}a,\boldsymbol{\alpha}b), \\ \boldsymbol{\alpha}(a,0,b) = (\boldsymbol{\alpha}a,0,\boldsymbol{\alpha}b), \\ \boldsymbol{\alpha}(0,0,a) = (0,0,\boldsymbol{\alpha}a), \end{gathered}$$

Полученные векторы также принадлежат указанному в задании множеству всех векторов, то есть данное множество является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

<u>Не понял, какое линейное пространство в этом случае рассматривается как основное.</u>

Но при этом данное векторное пространство будет линейным по определению.

6. **Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$:**

а) $\boldsymbol{x} = (0, -3, 6),\ \boldsymbol{y} = (-4, 7, 9)$;

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0 * (-4) + (-3) * 7 + 6 * 9 = 33$$

б) $\boldsymbol{x} = (7, -4, 0, 1),\ \boldsymbol{y} = (-3, 1, 11, 2)$.

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 9 * (-3) + (-4) * 1 + 0 * 11 + 1 * 2 = -23$$

7. ***Найти нормы векторов $\boldsymbol{x} = (4,2,4)$ и $\boldsymbol{y} = (12,3,4)$ и угол между ними.***

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\cos\alpha = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|} = \frac{4 * 12 + 2 * 3 + 4 * 4}{6 * 13} \approx 0.897$$

$$\alpha \approx 0.458\, rad$$

8. **Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:**

а) произведение длин векторов;

Проверим аксиомы:

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ - верно по правилу коммутативности произведения
2. $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – верно, так как умножение на скаляр, увеличивает пропорционально и длину вектора
3. $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$

$(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2\|\|\boldsymbol{y}\| = (\|\boldsymbol{x}_1\| + \|\boldsymbol{x}_2\|)\|\boldsymbol{y}\| = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$

4. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0 <=> \|\boldsymbol{x}\|^2$всегда больше нуля

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

В следствии аксиомы 2 скалярного произведения векторов, ничего не изменится, при умножении на скаляр.

9. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$:

а) $(1,0,0), (0,0,1)$ – не является базисом в принципе, так как не все вектора с помощью этого набора можно описать.

б) $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right), e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), e_3 = (0,0,1)$

$$(e_1, e_2) = 0{,}5 - 0{,}5 + 0 = 0$$

$$(e_1, e_3) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$(e_2, e_3) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\|e_1\| = \sqrt{0{,}5 + 0{,}5} = 1$$

$$\|e_2\| = \sqrt{0{,}5 + 0{,}5} = 1$$

$$\|e_3\| = \sqrt{1} = 1$$

Система линейно независима, а значит данная система векторов – ортонормирована.

в) $e_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), e_2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), e_3 = (0,0,1)$

$$(e_1, e_2) = 0 - 0{,}25 + 0 = 0{,}25$$

$$(e_1, e_3) = 0 + 0 + 0{,}5 = 0{,}5$$

$$(e_2, e_3) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Система векторов является базисом, но не ортонормированным

г) $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ – распространённый ортонормированный базис.