1. Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(6-\lambda)+12 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Пусть $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1-3 & -6 \\ 2 & 6-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = span\left[\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right]$$

Найдём единичные вектора:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+2^2}} = 0{,}832 \\ x_2 = \dfrac{-2}{\sqrt{3^2+2^2}} = -0{,}5547 \end{cases}$$

Пусть $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1-2 & -6 \\ 2 & 6-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = span\left[\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right]$$

Найдём единичные вектора:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = 0{,}8944 \\ x_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{2^2+1^2}} = -0{,}4472 \end{cases}$$

2. Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Показать, что любой вектор является для него собственным.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Решением этой однородной СЛАУ являются все комбинации векторов.

3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ собственным вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2$$

Вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором этого линейного оператора.

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ собственным вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Такая система не имеет смысла, следовательно, вектор $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ не является собственным вектором линейного оператора, заданного матрицей.