

Производные функций нескольких переменных

1. Найти область определения функции.

$$z = \sqrt{1 - x^3} + \ln(y^2 - 1)$$

$$x \in \mathbb{R}: x \leq 1$$

$$y \in \mathbb{R}: y < -1 \mid y > 1$$

2. Найти производные 1-го порядка функции.

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \frac{1}{x \ln y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \frac{\ln x}{y \ln^2 y}$$

В последнем примере использовал преобразование:

$$\frac{\partial y}{\ln y} = -\frac{1}{\ln^2 y} \partial(\ln y) = -\frac{1}{y \ln^2 y}$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1, 1).

$$z = \sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} * \left(2 - \sin \frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}} * \left(2 + \frac{\sin\frac{x}{y}}{y^2}\right)$$

$$\partial z = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}} * \left(2 - \sin\frac{x}{y}\right) \partial x + \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}} * \left(2 + \frac{\sin\frac{x}{y}}{y^2}\right) \partial y$$

$$\partial z (1, 1) = 0.3634 \partial x + 0.8914 \partial y$$

4. Исследовать на экстремум функцию.

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x - 9$$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 2y + x - 9 = 0 \end{cases}$$

Из первого выражения получаем y и подставляем во второе, получаем:

$$-4x + 12 + x - 9 = 0$$

$$x = 1$$

$$y = -2 * 1 + 6 = 4$$

Получаем единственную стационарную точку $M_0 = (1, 4)$

Находим матрицу производных:

$$z''_{xx} = 2$$

$$z''_{xy} = 1$$

$$z''_{yy} = 2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

Значит в стационарной точке – минимум.

И равен он $z_0 = 1 + 4 + 16 - 6 - 36 = -21$