1. Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерности полученных матриц:

a) A — матрица 4×2, B — матрица 4×2;
Не определены произведения этих матриц.

b) A — матрица 2×5, B — матрица 5×3;
Определено только произведение AB, исходная матрица будет размерностью 2x3.

c) A — матрица 8×3, B — матрица 3×8;
Определено произведение BA, исходная матрица будет размерностью 3x3.

d) A — квадратная матрица 4×4, B — квадратная матрица 4×4.
Определены оба произведения, и в обоих случаях исходная матрица будет размерностью 4x4.

2. Найти сумму и произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} * \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 * 1 & (-1) * 1 + (-2) * 5 \\ 3 * 4 & (-1) * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию $3A - 2B + 4C$ для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$3A - 2B + 4C = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислить AA^{T} и $A^{\mathrm{T}}A$.

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4*4+1*1 & 4*5+1*(-2) & 4*2+1*3 \\ 5*4+(-2)*1 & 5*5+(-2)*(-2) & 5*2+(-2)*3 \\ 2*4+3*1 & 2*5+3*(-2) & 2*2+3*3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4*4+5*5+2*2 & 4*1+5*(-2)+2*3 \\ 1*4+(-2)*5+3*2 & 1*1+(-2)*(-2)+3*3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

5. Вычислить определитель:

$$\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 4*5*9 = 180$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1*5*9+2*6*7+4*8*3*-3*5*7-\ 4*2*9-1*8$$
$$*6 = 45+84+96-105-72-48 = 0$$

6. Определитель матрицы А равен 4. Найти:

$$\det(A^2) = 4*4 = 16$$

$$\det(A^T) = 4$$

$$\det(2A) = 2^{x+2}, \text{где } x - \text{ранг матрицы}$$

7. Доказать, что матрица вырожденная:

$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} *2\backslash \\ \leftarrow / \sim \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ – строка равна нулю, а значит определитель равен 0 и матрица – вырожденная.

8. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv rk(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv$$

$rk(A) = 3$