1. Исследовать функцию на условный экстремум

1)

$$U = 3 - 8x + 6y, \qquad \text{если} \quad x^2 + y^2 = 36$$

$$L(\lambda_1, x, y) = 3 - 8x + 6y + \lambda_1 \cdot (x^2 + y^2 - 36)$$

$$\begin{cases} L_x^` = -8 + 2\lambda_1 x \\ L_y^` = 6 + 2\lambda_1 y \\ L_{\lambda_1}^` = x^2 + y^2 - 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{\lambda_1} \\ y = \dfrac{-3}{\lambda_1} \\ \dfrac{16}{\lambda_1^2} + \dfrac{9}{\lambda_1^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{\lambda_1} \\ y = \dfrac{-3}{\lambda_1} \\ \lambda_1^2 = {}^{25}/_{36} \end{cases}$$

$$\left({}^{5}/_{6};\ 4{,}8;\ -3{,}6\right), \left(-{}^{5}/_{6};\ -4{,}8;\ 3{,}6\right)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda_1 & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} - 2x\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda_1 \end{vmatrix} + 2y\begin{vmatrix} 2x & 2\lambda_1 \\ 2y & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -8\lambda_1(x^2 + y^2)$$

Тогда получается, что в точке $M_1 = \left({}^{5}/_{6};\ 4{,}8;\ -3{,}6\right)$: H = -240, следовательно в этой точке – минимум.

В точке $M_1 = \left(-{}^{5}/_{6};\ -4{,}8;\ 3{,}6\right)$: H = 240, следовательно в этой точке – максимум.

2)

$$U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15, \qquad \text{если} \quad x^2 + 16y^2 = 64$$

$$L(\lambda_1, x, y) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda_1 \cdot (x^2 + 16y^2 - 64)$$

$$\begin{cases} L_x^` = 4x + 12y + 2\lambda_1 x \\ L_y^` = 64y + 12x + 32\lambda_1 y \\ L_{\lambda_1}^` = x^2 + 16y^2 - 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-6y}{2 + \lambda_1} \\ y = \dfrac{-3x}{16 + 8\lambda_1} \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

Пусть $t = \frac{-3}{2+\lambda_1}$, тогда два первых уравнения превращаются в систему:

$$\begin{cases} x = 2ty \\ y = \dfrac{xt}{8} \end{cases}$$

Подставляя первое выражение во второе, получаем:

$$y = \frac{t^2 y}{4}$$

$$t^2 = 4$$

Подставляем значение t и решаем:

$$\frac{9}{(2 + \lambda_1)^2} = 4$$

$$4\lambda^2 + 16\lambda + 7 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3.5 \\ \lambda_2 = -0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

Тогда получается, что $\begin{cases} x = 4y \\ x = -4y \end{cases}$

Подставляя эти уравнения в третье из первой системы, получаем:

$$16y^2 + 16y^2 - 64 = 0$$

$$y^2 = 2$$

$$\begin{cases} y_1 = -\sqrt{2} \\ y_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} x_1 = -4\sqrt{2} \\ x_2 = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

При проверке оказалось, что λ_2 выбрасывается, а как так получилось, не могу понять, если нашли ошибку, можете мне написать?

$$(-3{,}5;\ -4\sqrt{2};\ -\sqrt{2}), (-3{,}5;\ 4\sqrt{2};\ \sqrt{2})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda_1 & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda_1 \end{vmatrix}$$
$$= 0\begin{vmatrix} 4+2\lambda_1 & 12 \\ 12 & 64+32\lambda_1 \end{vmatrix} - 2x\begin{vmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 64+32\lambda_1 \end{vmatrix}$$
$$+ 32y\begin{vmatrix} 2x & 4+2\lambda_1 \\ 32y & 12 \end{vmatrix}$$
$$= -256x^2 - 4096y^2 - 128\lambda_1(x^2 + 16y^2) + 1536yx$$

В имеющихся точках значение детерминанта равно примерно 28315, что больше нуля, значит обе точки – максимумы.

2. Найти производную функцию $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(-9, 8, -12)$ в точку $M(8, -12{,}9)$

$$|\vec{c}| = \sqrt{81 + 64 + 144} = 17$$

$$\overrightarrow{c_0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\frac{-9}{17}, \frac{8}{17}, \frac{-12}{17}\right)$$

$$\begin{cases} U_x^{`} = 2x \\ U_y^{`} = 2y \\ U_z^{`} = 2z \end{cases}$$

$$grad\ U|_{(8,-12,9)} = (16, -24{,}18)$$

$$U_{\vec{c}}^{`}\Big|_{(8,-12,9)} = \frac{-9}{17} * 16 + \frac{8}{17} * (-24) - \frac{12}{17} * 18 = \frac{552}{17} \approx 32.47$$

3. Найти производную функцию $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{d}(4, -13, -16)$ в точку $L(-16{,}4, -13)$

$$|\vec{d}| = \sqrt{16 + 169 + 256} = 21$$

$$\overrightarrow{d_0} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \left(\frac{4}{21}, \frac{-13}{21}, \frac{-16}{21}\right)$$

$$\begin{cases} U_x^{`} = 2xe^{x^2+y^2+z^2} \\ U_y^{`} = 2ye^{x^2+y^2+z^2} \\ U_z^{`} = 2ze^{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

$$grad\ U|_{(-16,4,-1\ \ )} = (-10^{193}, 2.7 * 10^{192}, -8.7 * 10^{192})$$

$$U_{\vec{d}}^{`}\Big|_{(-16,4,-13)} \approx 3 * 10^{192}$$