Тема “Предел функции”

1. Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.

$$y = \left(\frac{1}{x} + 1\right)\cos x$$
$$\lim_{x\to 0} y(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to \infty} y(x) = \nexists$$

2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1\,, & \text{если} - \infty < x \leq 3 \\ x + 2, & \text{если } 3 < x < +\infty \end{cases}$$

3. $f(x) = x^3 - x^2$

Область задания и область значений:

dom f(x) = ℝ

E(f(x) = ℝ

Нули функции и их кратность.

$x^3 - x^2 = 0$

x_1=0
x_2=1

Первый корень обладает четной кратностью, второй – нечетной кратностью.

Отрезки знакопостоянства.

Отрицательное значение функция принимает при $x \in (-\infty;\ 1)$

Положительное значение при $x \in (1;\ +\infty)$

Интервалы монотонности.

Производная положительна при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $x \in (0;\ +\infty)$

Производная отрицательна при $x \in (0;\ 1)$

Четность функции.

Функция не имеет чётности.

Ограниченность.

Функция не ограничена.

Периодичность.

Функция не периодична.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3-2x^2}{4x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x^3}{4x^2}+\frac{2x^2}{4x^2}\right) = 0 + 0.5 = 0.5$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}{1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\sqrt[6]{x+1}}{2} = {}^{3}\!/_{2} = 1.5$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x+1} = \left\|t=\frac{x}{3}\right\| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{12} * 1$$

$$= e^{12}$$

Тема “Теоремы о пределах”

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x} = \|t = 2x\| = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x} = \|t = \arcsin x\| = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3+6}{4x-3}\right)^{6x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{4x-3}\right)^{6x} =$

$\left\|t = \frac{4x-3}{6}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{9x+4.5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{9x} * 1 = e^{9}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(\sin x+\ln x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos x+\frac{1}{x}\right) = 0$

f. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{1}{x}\right) = -\infty$