2. В первом ящике находится 8 мячей, из которых 5 - белые. Во втором ящике - 12 мячей, из которых 5 белых. Из первого ящика вытаскивают случайным образом два мяча, из второго - 4. Какова вероятность того, что 3 мяча белые?

Целевое пространство в данном примере строится по формуле:

$$T_i^j = \frac{C_{white_j}^{i} \cdot C_{black_j}^{out_j - i}}{C_{sum_j}^{out_j}}$$

где: j – номер ящика, i – количество белых шаров, которые необходимо достать из ящика, $white_j$ и $black_j$ – количество шаров определенного цвета (с учётом, что все небелые шары – черные), sum_j – количество шаров в ящике, out_j – сколько шаров вытаскивается из ящика.

Если визуализировать функцию вероятности, то получится следующая таблица:

T_2^1		x			
T_1^1			x		
T_0^1				x	
	T_0^2	T_1^2	T_2^2	T_3^2	T_4^2

В таблице уже отмечены позиции, которые удовлетворяют условиям задачи. И можно уже выписать результат, который удовлетворяет условиям задачи:

$$T_2^1 * T_1^2 + T_1^1 * T_2^2 + T_0^1 * T_3^2$$

В файле Lesson_3.ipunb я построил необходимую функцию для каждого ящика и пересчитал ответ.

3. На соревновании по биатлону один из трех спортсменов стреляет и попадает в мишень. Вероятность попадания для первого спортсмена равна 0.9, для второго — 0.8, для третьего — 0.6. Найти вероятность того, что выстрел произведен: а). первым спортсменом б). вторым спортсменом в). третьим спортсменом.

В данной задаче и в следующей воспользуемся формулой Байеса.

$$p(A|B) = \frac{p(B) * p(B|A)}{p(A)}$$

Так как спортсмены выбираются случайным образом, то вероятность, что был выбран один из трех спортсменов: $p(B_1) = p(B_2) = p(B_3) = {}^1/_3$

Апостериорная вероятность будет взята из условий задачи:

$$\begin{array}{c} p(B_1|A) \\ p(B_2|A) \\ p(B_3|A) \end{array} = \begin{array}{c} 0{,}9 \\ 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{array}$$

И общая вероятность события, что случайно выбранный стрелок попал равна:

$$p(A) = p(B_1) \cdot p(B_1|A) + p(B_2) \cdot p(B_2|A) + p(B_3) \cdot p(B_3|A)$$

Все расчеты проводятся в Lesson_3.ipynb.

4. В университет на факультеты А и В поступило равное количество студентов, а на факультет С студентов поступило столько же, сколько на А и В вместе. Вероятность того, что студент факультета А сдаст первую сессию, равна 0.8. Для студента факультета В эта вероятность равна 0.7, а для студента факультета С - 0.9. Студент сдал первую сессию. Какова вероятность, что он учится: а). на факультете А б). на факультете В в). на факультете С?

Делаем по аналогии с третьим примером, с несколькими изменениями:

Вероятность того, что студент взят из определённого факультета (для простоты, вместо А, В и С возьмём 1, 2 и 3, соответственно):

$$\begin{cases} p(B_1) = p(B_2) = {}^{1}/_{4} \\ p(B_3) = {}^{1}/_{2} \end{cases}$$

так как плотность факультетов неравномерная.

Апостериорные вероятности:

$$\begin{matrix} p(B_1|A) & & 0,8 \\ p(B_2|A) & = & 0,7 \\ p(B_3|A) & & 0,9 \end{matrix}$$

И общая вероятность события, что случайно выбранный студент сдал сессию:

$$p(A) = p(B_1) \cdot p(B_1|A) + p(B_2) \cdot p(B_2|A) + p(B_3) \cdot p(B_3|A)$$

Все расчеты также проводятся в Lesson_3.ipynb.

5. Устройство состоит из трех деталей. Для первой детали вероятность выйти из строя в первый месяц равна 0.1, для второй - 0.2, для третьей - 0.25. Какова вероятность того, что в первый месяц выйдут из строя: а). все детали б). только две детали в). хотя бы одна деталь г). от одной до двух деталей?

Задача решается по аналогии с первой задачей. Сначала находится целевое пространство вероятности, и обозначение будет:

T_i^j, где i – номер детали, а j – принимает значения 1, когда деталь сломалась, и 0 – когда деталь осталась рабочей.

$$\begin{cases} T_1^1 & 0{,}1 \\ T_2^1 = & 0{,}2 \\ T_3^1 & 0{,}25 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} T_1^0 & 0{,}9 \\ T_2^0 = & 0{,}8 \\ T_3^0 & 0{,}75 \end{cases}$$

Тогда, вероятность того, что две детали вышли из строя:

$$T_1^1 * T_2^1 * T_3^0 + T_1^0 * T_2^1 * T_3^1 + T_1^1 * T_2^0 * T_3^1$$

Вероятность того, что хотя бы одна деталь сломается обратна вероятности, что ни одна детали не сломается и равна:

$$1 - T_1^0 * T_2^0 * T_3^0$$

И вероятность, что от одной до двух деталей сломаются обратна вероятности события, когда либо все детали ломаются, либо ни одной, и равна:

$$1 - T_1^0 * T_2^0 * T_3^0 - T_1^1 * T_2^1 * T_3^1$$