Aufgabenblatt 6
Einführung in die Bildverarbeitung

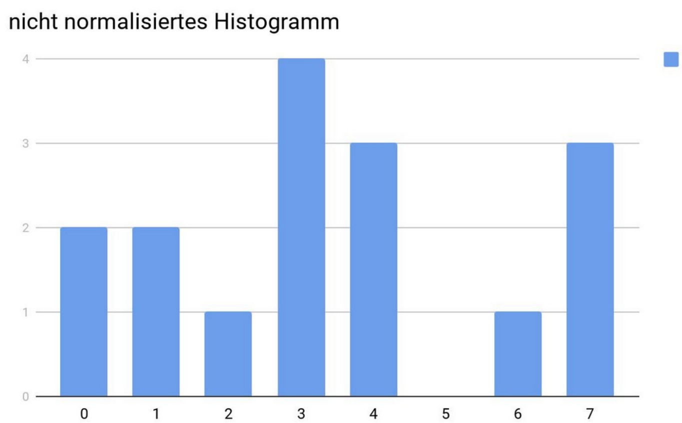
Aufgabe 1 — Histogramme berechnen

Gegeben sei das 3-bit Graustufenbild in Abbildung 1. Da es sich um ein 3-bit Graustufenbild handelt, kann das Bild Werte im Bereich 0,1,...7 beinhalten. Löst zu dem Bild die folgenden Aufgaben händisch:

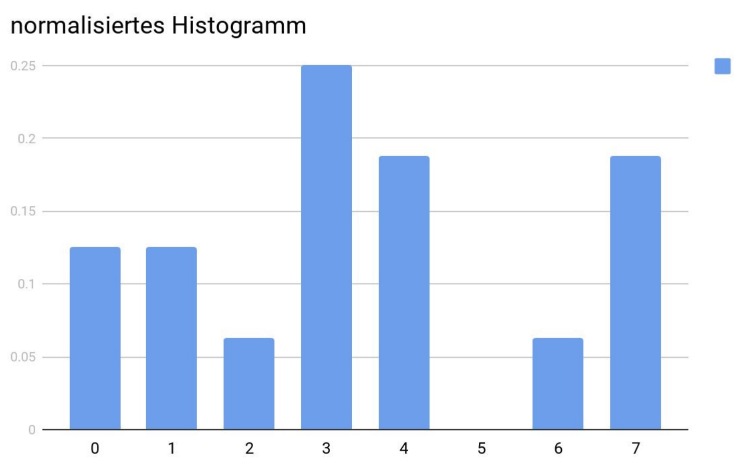
4	6	1	2
3	1	3	7
3	0	3	4
0	7	4	7

Abbildung 1: 3-bit Graustufenbild für Aufgabe 1 mit Pixelwerten als Zahlen.

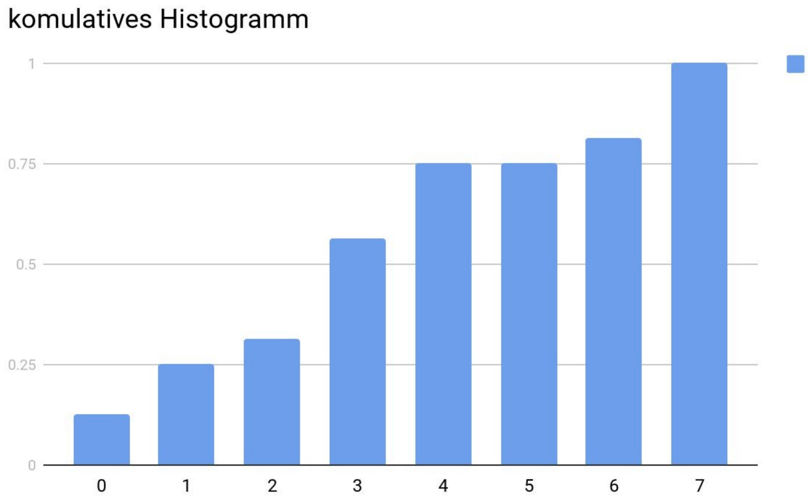
1. Ermittelt das nicht normierte Histogramm mit 8 bins (0,1,...7) und zeichnet es auf.



2. Normiert das erzeugte Histogramm nun und stellt es ebenfalls grafisch dar.



3. Berechnet auf Basis des normierten Histogramms das kumulative Histogramm und skizziert es ebenfalls.



4. Berechnet aus einem der Histogramme den Mittelwert des Bildes und notiert dabei euren Rechenweg.

   <u>Wir nehmen das normalisierte Histogramm:</u>
   M = 0*0.125 + 1*0.125 + 2*0.0625 + 3*0.25 + 4*0.1875 + 5*0 + 6*0.0625 + 7*0.1875
   = 3,4375

5. Ermittelt aus einem der Histogramme ebenso die Varianz des Bildes und haltet erneut euren Rechenweg fest
   <u>Wir nehmen das normalisierte Histogramm:</u>
   M = ((0-3.4375)*0.125)^2 + ((1-3,4375)*0.125)^2 + ((2-3.4375)*0.0625)^2 + ((3-3.4375)*0.25)^2 + ((4-3.4375) *0.1875)^2 + ((6-3.4375)*0.0625)^2 + ((7-3.4375)*0.1875)^2
   = 0.78

Aufgabe 3 — Varianz in einem Durchlauf

Beweist nun, dass die beiden Formeln 1 und 2 zur Berechnung der Varianz gleich sind. Startet dazu bei der Formel 1 und zerlegt mit Hilfe der binomischen Formeln den Summanden der Doppelsumme. Überlegt anschließend, was die drei einzelnen Teile bedeuten und wie sie vereinfacht werden können. Tipp: Schreibt nach der initialen Zerlegung des Summanden die Formel mit drei Doppelsummen, um die einzelnen Teile einfacher zu untersuchen.

1. $$\sigma^2 = \frac{1}{N_{\text{cols}} N_{\text{rows}}} \sum_{x=1}^{N_{\text{cols}}} \sum_{y=1}^{N_{\text{rows}}} [I(x,y) - \mu_I]^2$$
2. $$\sigma^2 = \left[\frac{1}{N_{\text{cols}} N_{\text{rows}}} \sum_{x=1}^{N_{\text{cols}}} \sum_{y=1}^{N_{\text{rows}}} I(x,y)^2 \right] - \mu_I^2.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{N_C N_R} \textstyle\sum_{x=1}^{N_C} \sum_{y=1}^{N_R} [I(x,y) - u_I]^2 \\
&= \tfrac{1}{N_C N_R} \textstyle\sum_{x=1}^{N_C} \sum_{y=1}^{N_R} (I(x,y) - u_I)(I(x,y) - u_I) \\
&= \tfrac{1}{N_C N_R} (\textstyle\sum_{x=1}^{N_C} \sum_{y=1}^{N_R} I(x,y)^2 - \sum_{x=1}^{N_C} \sum_{y=1}^{N_R} 2u_I I(x,y) + \sum_{x=1}^{N_C} \sum_{y=1}^{N_R} u_I^2) \\
&= \tfrac{1}{N_C N_R} \textstyle\sum_{x=1}^{N_C} \sum_{y=1}^{N_R} I(x,y)^2 - \tfrac{1}{N_C N_R} \sum_{x=1}^{N_C} \sum_{y=1}^{N_R} 2u_I I(x,y) + \tfrac{N_C N_R u_I^2}{N_C N_R} \\
&= [\tfrac{1}{N_C N_R} \textstyle\sum_{x=1}^{N_C} \sum_{y=1}^{N_R} I(x,y)^2] - 2u_I u_I + u_I^2 \\
&= [\tfrac{1}{N_C N_R} \textstyle\sum_{x=1}^{N_C} \sum_{y=1}^{N_R} I(x,y)^2] - u_I^2
\end{aligned}$$