Aufgabenblatt 7
Einführung in die Bildverarbeitung

Aufgabe 1 — Faltung und Korrelation berechnen

Gegeben seien die beiden Bilder f und g in Abbildung 1a und 1b. Führt die folgenden Faltungen ($\ast$) und Korrelationen ($\star$) der Filterkerne

0	0	0
0	1	0
0	0	0

(a) Bild f

0	0	4	0	0	0
1	3	5	0	0	0
1	2	5	0	0	0
0	0	0	1	1	0

(b) Bild g

mit den Bildern f und g händisch durch. Normiert dazu die Filterkerne zunächst so, dass die Summe über sie jeweils 1 ergibt, und umrahmt die Bilder mit einer ausreichenden Anzahl an Nullen (padding). Beschreibt zudem kurz die Wirkung des jeweiligen Filterkerns auf die Bilder. Zusammengefasst sollen also die folgenden Operationen ausgeführt werden:

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wirkung des jeweiligen Filterkerns auf die Bilder.
Auf Bild f:
K1: Übernimmt Intensitätswerte und Shape vom Kernel
K2: Übernimmt Intensitätswerte und Shape vom Kernel
K3: Verschiebt die Pixelwerte des Bildes um 1 nach links

Auf Bild g:
K1: Übernimmt Intensitätswerte und Shape vom Kernel
K2: verzieht das Bild
K3: ändert nichts am Bild

Formel:

- Correlation: $g = w \star f$

$$g(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

Note the difference!

- Convolution: $g = w \bigstar f$

$$g(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x-s, y-t)$$

- Note:
If $h(-s,-t) = h(s,t)$, then correlation ≡ convolution.

1. **k1 ★ f und k1 ★ f**

Normierter kernel k1:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehtes kernel: ist gleich

k1 ☆ f = w(-1,-1)*f(x-1,y-1) + w(-1,0)*f(x-1,y) + w(-1,1)*f(x-1,y+1) + w(0,-1)*f(x,y-1) +w(0,0)*f(x,y) +w(0,1)*f(x,y+1) + w(1,-1)*f(x+1,y-1) + w(1,0)*f(x+1,y) + w(1,1)*f(x+1,y+1) =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k1 ★ f = w(1,1)*f(x+1,y+1) + w(+1,0)*f(x+1,y) + w(1,-1)*f(x+1,y-1) + w(0,1)*f(x,y+1) + w(0,0)*f(x,y) + w(0,-1)*f(x,y-1) + w(-1,1)*f(x-1,y+1) + w(-1,0)*f(x-1,y) + w(-1,-1)*f(x-1,y-1) =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. k1 ★ g und k1 ★ g

Normierter kernel k1: umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehtes kernel: ist gleich

k1 ★ g = w(1,1)*f(x+1,y+1) + w(+1,0)*f(x+1,y) + w(1,-1)*f(x+1,y-1) + w(0,1)*f(x,y+1) + w(0,0)*f(x,y) + w(0,-1)*f(x,y-1) + w(-1,1)*f(x-1,y+1) + w(-1,0)*f(x-1,y) + w(-1,-1)*f(x-1,y-1)
=

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{17}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{11}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k1 ★ g =k1 ☆ g =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{17}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{11}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. k2★f und k2★f

Normierter kernel k2: umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehter kernel uk2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k2 ☆ f = w(-1,-1)*f(x-1,y-1) + w(-1,0)*f(x-1,y) + w(-1,1)*f(x-1,y+1) + w(0,-1)*f(x,y-1) +w(0,0)*f(x,y) +w(0,1)*f(x,y+1) + w(1,-1)*f(x+1,y-1) + w(1,0)*f(x+1,y) + w(1,1)*f(x+1,y+1) =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k2 ★ f = uk2 ☆ f =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. k2★g und k2★g

Normierter kernel k1: umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehter kernel uk2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k2 $\star$ g =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k2 $\bigstar$ g= uk2 $\star$ g =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 4 & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. k3 $\bigstar$ f und k3 $\bigstar$ f

Normierter kernel k3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehter uk3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k1 $\star$ f = w(-1,-1)*f(x-1,y-1) + w(-1,0)*f(x-1,y) + w(-1,1)*f(x-1,y+1) + w(0,-1)*f(x,y-1) +w(0,0)*f(x,y) +w(0,1)*f(x,y+1) + w(1,-1)*f(x+1,y-1) + w(1,0)*f(x+1,y) + w(1,1)*f(x+1,y+1) =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k3 $\bigstar$ f = uk3 $\star$ f =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. k3 ★ g und k3 ★ g

Normierter kernel k3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehter uk3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k3 ⋆ f =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

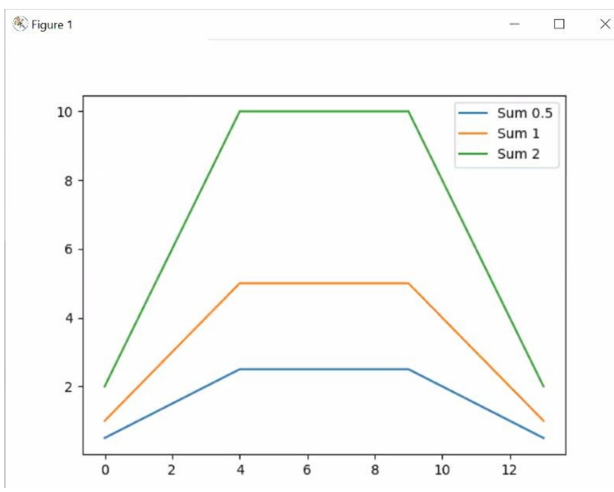
k3 ★ f = uk3 ⋆ f =

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2 — Eigenschaften von Faltung und Korrelation

1. Meist werden Glättungs-Filterkerne so normiert, dass die Summe über sie 1 ist. Welchen Hintergrund hat das? Welche Konsequenzen hat bspw. die Anwendung eines Box-Filters auf ein Bild, dessen Gewichte zusammen 0.5 oder 2 ergeben? Beantwortet diese Fragen kurz schriftlich und gebt Beispiele (auch in 1D möglich), die eure Thesen untermauern.

   Glättungs-Filterkerne sind normiert, damit sich die Farbwerte/Intensitätswerte des Bildes nicht verändern. Bei 0.5 würde sich das Bild verdunkeln und bei 2 aufhellen.
   Beispiel:
   Bildzeile: [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]
   Kern: [1, 1, 1, 1, 1]
   Normiert: [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]
   Kern auf 0.5: [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1], verdunkelt
   Kern auf 2: [0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4], hellt auf

2. Wie in der Vorlesung vorgestellt, ist die Faltung kommutativ. Beweist dies!
   Beweis mit Hilfe der Substitution

   f(x) $\star$ w(x) =

$$\int_{a=0}^{a=x} f(a) * w(x-a)da, a = x - z, z = t - a$$

$$= \int_{x-z=0}^{t-z=x} f(x-z) * w(z)(-1) * dz$$

$$= -\int_{x-z=0}^{x-z=x} f(x-z) * w(z)dz$$

$$= \int_{0}^{x} w(a) * f(x-a)da$$

= w(x) $\star$f(x)

3. **Im Gegensatz zur Faltung ist die Korrelation i.A. nicht kommutativ. Zeigt dazu ein Gegenbeispiel, gerne auch in 1D. Tipp: Berechnet die Korrelation für ein 1 × 5 Bild mit einem 1 × 3 Filterkern.**

- Correlation: $g = w \star f$

$$g(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

Note the difference!

- Convolution: $g = w \bigstar f$

$$g(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x-s, y-t)$$

- Note:
  If $h(-s,-t) = h(s,t)$, then correlation ≡ convolution.

Filterkern w:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Bild f

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

w(x) ☆ f(x)

= g(x)= w(-1)*f(x-1) + w(0)*f(x) + w(1)*f(x)

= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

f(x) ☆ w(x)