Aufgabe 3 — Abtasttheorem- 15 Punkte - Theorieaufgabe

Ihr sitzt an Bord eines Propellerflugzeugs am Fenster mit bester Sicht auf einen der Propeller und könnt dessen Rotation klar und korrekt wahrnehmen. Nun wollt ihr die Rotation des Propellers mit eurer Kamera in einem Video festhalten. Ist dies aus Sicht der Signalverarbeitung eine sinnvolle Idee? Beantwortet dazu folgende Fragen schriftlich mit kurzer Begründung. Nehmt dazu an, dass sich der Propeller pro Minute 1000 mal dreht und eure Kamera 30 vollständige Bilder pro Sekunde aufnehmen kann.

1. Ist das Abtasttheorem im Sinne der zeitlichen Abtastung der Propellerdrehung durch die Kamera erfüllt? Rechnet es nach!

   Signal:
   1000/1 Umdrehungen pro min
   => 50/3 Umdrehungen pro Sekunde
   => Zeit für eine Umdrehung: 1/(50/3) = 3/50 s
   Frequenz f vom Propeller: 1/(3/50)s = 50/3 Hz.

   Abtastrate müsste dann größer als 50/3 Hz *2 sein, also größer als 100/3 Hz.

   30/1 Bilder pro Sekunde
   => Zeit für ein Bild: 1/30 s
   Frequenz f der Kameraaufnahme: 1/(1/30) = 30 Hz

   Das Abtasttheorem besagt, dass die Abtastrate größer sein muss als zweimal die höchste Frequenz des Signals, um dieses vollständig abbilden zu können. In unserem Beispiel hier ist das Theorem nicht erfüllt, da die Frequenz der Kameraaufnahme kleiner ist als zweimal die höchste Frequenz des Signals.

2. Was wird schätzungsweise auf dem Video erkennbar sein und was nicht?

   Es wäre zwar erkennbar, dass sich der Propeller dreht, doch das Video wäre nicht flüssig. Man würde nur jedes 3. oder 4. Bild sehen.

3. Ändert sich etwas, wenn eure Kamera statt 30 Bilder nun 60 Bilder pro Sekunde aufnehmen kann?

   Ja, dann könnte nach dem Abtasttheorem das Signal vollständig abgebildet werden, dass heißt wir können die Bewegungen des Propellers vollständig erkennen.

Aufgabe 4 — Gaußsches Rauschen- 25 Punkte - Theorieaufgabe

Beweist nun, dass der Erwartungswert E des Ergebnisses $\bar{g}(x,y)$ wiederum dem Bild f (x,y) entspricht: $E\left(\bar{g}(x,y)\right) = f(x,y)$

Idee: Gesetz der großen Zahlen, je öfter es man durchführt desto näher am Erwartungswert. Da das Rauschen variiert und mit 0 schwankt, kann man je öfter man es durchführt, das Original bestimmen, nach dem Gesetz der großen Zahlen. Führt also zum Erwartungswert, welcher das Originalbild sein müsste.

$g_m(x,y) = f(x,y) + \eta_m(x,y)$

Wie aus der Formel entnommen werden kann, ist das Originalbild f(x,y) eine konstante in der Formel. Es variiert nur das Rauschen $\eta_m(x, y)$ für jedes m, denn m steht für die Anzahl der Versuche.

Die Formel, um den Durchschnitt zu berechnen, sieht wie folgt aus:

$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} g_m(x, y)$$

M ist die Anzahl der Versuche. Es wird die Summe von aller Ergebnisse der Versuche berechnet und dann durch M geteilt, d.h. wir bilden einen Mittelwert der Ergebnisse. Nach dem Gesetz der großen Zahlen, folgt, dass je häufiger wir den Versuch durchführen, desto näher sind wir an dem Erwartungswert. Es folgt demnach, dass je häufiger der Versuch durchgeführt wird, desto genauer können wir das Rauschen “entfernen”, da das Rauschen im Gegensatz zum Originalbild variiert. Der Mittelwert, der sich mit der Formel bilden lässt, wird durch häufigere Versuche näher am Wert des Originalbildes f(x,y) liegen. Deshalb folgt daraus, dass $E\left(\bar{g}(x, y)\right) = f(x, y)$ ist.