

## Aufgabenblatt 7

### Einführung in die Bildverarbeitung

#### Aufgabe 1 — Faltung und Korrelation berechnen

Gegeben seien die beiden Bilder  $f$  und  $g$  in Abbildung 1a und 1b. Führt die folgenden Faltungen (\*) und Korrelationen (\*) der Filterkerne

0	0	0
0	1	0
0	0	0

(a) Bild  $f$

0	0	4	0	0	0
1	3	5	0	0	0
1	2	5	0	0	0
0	0	0	1	1	0

(b) Bild  $g$

mit den Bildern  $f$  und  $g$  händisch durch. Normiert dazu die Filterkerne zunächst so, dass die Summe über sie jeweils 1 ergibt, und umrahmt die Bilder mit einer ausreichenden Anzahl an Nullen (padding). Beschreibt zudem kurz die Wirkung des jeweiligen Filterkerns auf die Bilder. Zusammengefasst sollen also die folgenden Operationen ausgeführt werden:

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### Wirkung des jeweiligen Filterkerns auf die Bilder.

##### Auf Bild $f$ :

- K1: Übernimmt Intensitätswerte und Shape vom Kernel
- K2: Übernimmt Intensitätswerte und Shape vom Kernel
- K3: Verschiebt die Pixelwerte des Bildes um 1 nach links

##### Auf Bild $g$ :

- K1: Übernimmt Intensitätswerte und Shape vom Kernel
- K2: verzieht das Bild
- K3: ändert nichts am Bild

## Formel:

- Correlation:  $g = w \star f$

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

- Convolution:  $g = w \star f$

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x - s, y - t)$$

Note the difference!

### 1. $k1 \star f$ und $k1 \star f$

Normierter kernel k1:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehtes kernel: ist gleich

$$\begin{aligned} k1 \star f &= w(-1, -1) \cdot f(x-1, y-1) + w(-1, 0) \cdot f(x-1, y) + w(-1, 1) \cdot f(x-1, y+1) + w(0, -1) \cdot f(x, y-1) \\ &+ w(0, 0) \cdot f(x, y) + w(0, 1) \cdot f(x, y+1) + w(1, -1) \cdot f(x+1, y-1) + w(1, 0) \cdot f(x+1, y) + w(1, 1) \cdot f(x+1, y+1) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k1 \star f &= w(1, 1) \cdot f(x+1, y+1) + w(+1, 0) \cdot f(x+1, y) + w(1, -1) \cdot f(x+1, y-1) + w(0, 1) \cdot f(x, y+1) \\ &+ w(0, 0) \cdot f(x, y) + w(0, -1) \cdot f(x, y-1) + w(-1, 1) \cdot f(x-1, y+1) + w(-1, 0) \cdot f(x-1, y) + w(-1, -1) \cdot f(x-1, y-1) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2. $k1 \star g$ und $k1 \star g$

Normierter kernel  $k1$ : umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehtes kernel: ist gleich

$$k1 \star g = w(1,1) \cdot f(x+1,y+1) + w(+1,0) \cdot f(x+1,y) + w(1,-1) \cdot f(x+1,y-1) + w(0,1) \cdot f(x,y+1) + \\ w(0,0) \cdot f(x,y) + w(0,-1) \cdot f(x,y-1) + w(-1,1) \cdot f(x-1,y+1) + w(-1,0) \cdot f(x-1,y) + w(-1,-1) \cdot f(x-1,y-1) \\ =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{17}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{11}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k1 \star g = k1 \star g =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{17}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{11}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3. $k_2 \star f$ und $k_2 \star f$

Normierter kernel  $k_2$ :      umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehter kernel  $uk_2$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_2 \star f &= w(-1,-1) \cdot f(x-1,y-1) + w(-1,0) \cdot f(x-1,y) + w(-1,1) \cdot f(x-1,y+1) + w(0,-1) \cdot f(x,y-1) \\ &+ w(0,0) \cdot f(x,y) + w(0,1) \cdot f(x,y+1) + w(1,-1) \cdot f(x+1,y-1) + w(1,0) \cdot f(x+1,y) + w(1,1) \cdot f(x+1,y+1) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 \star f = uk_2 \star f =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 4. $k_2 \star g$ und $k_2 \star g$

Normierter kernel  $k_1$ :      umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehter kernel  $uk_2$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k2 \star g =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k2 \star g = uk2 \star g =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{13}{3} & \frac{11}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 4 & \frac{11}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 5. $k3 \star f$ und $k3 \star f$

Normierter kernel  $k3$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehter  $uk3$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k1 \star f &= w(-1,-1) \cdot f(x-1,y-1) + w(-1,0) \cdot f(x-1,y) + w(-1,1) \cdot f(x-1,y+1) + w(0,-1) \cdot f(x,y-1) \\ &+ w(0,0) \cdot f(x,y) + w(0,1) \cdot f(x,y+1) + w(1,-1) \cdot f(x+1,y-1) + w(1,0) \cdot f(x+1,y) + w(1,1) \cdot f(x+1,y+1) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k3 \star f = uk3 \star f =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 6. $k_3 \star g$ und $k_3 \star g$

Normierter kernel  $k_3$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Umgedrehter  $uk_3$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

umrahmtes Bild:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k_3 \star f =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k_3 \star f = uk_3 \star f =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Aufgabe 2 — Eigenschaften von Faltung und Korrelation

1. Meist werden Glättungs-Filterkerne so normiert, dass die Summe über sie 1 ist. Welchen Hintergrund hat das? Welche Konsequenzen hat bspw. die Anwendung eines Box-Filters auf ein Bild, dessen Gewichte zusammen 0.5 oder 2 ergeben? Beantwortet diese Fragen kurz schriftlich und gebt Beispiele (auch in 1D möglich), die eure Thesen untermauern.

Glättungs-Filterkerne sind normiert, damit sich die Farbwerte/Intensitätswerte des Bildes nicht verändern. Bei 0.5 würde sich das Bild verdunkeln und bei 2 aufhellen.

Beispiel:

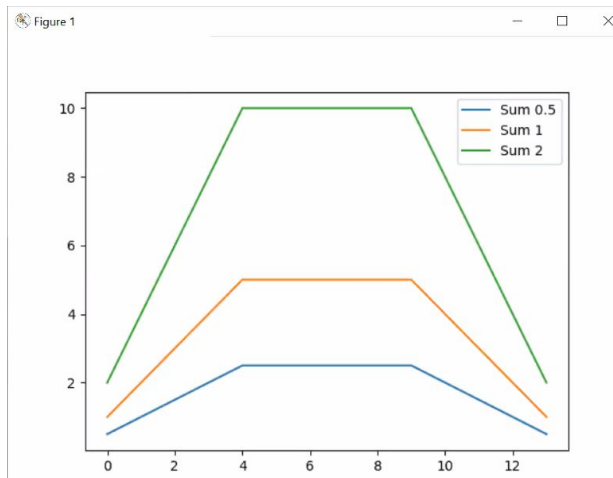
Bildzeile: [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]

Kern: [1, 1, 1, 1, 1]

Normiert: [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]

Kern auf 0.5: [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1], verdunkelt

Kern auf 2: [0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4], hellt auf



2. Wie in der Vorlesung vorgestellt, ist die Faltung kommutativ. Beweist dies!  
Beweis mit Hilfe der Substitution

$$f(x) \star w(x) =$$

$$\begin{aligned} & \int_{a=0}^{a=x} f(a) * w(x-a) da, a = x-z, z = t-a \\ &= \int_{x-z=0}^{t-z=x} f(x-z) * w(z)(-1) * dz \\ &= - \int_{x-z=0}^{x-z=x} f(x-z) * w(z) dz \\ &= \int_0^x w(a) * f(x-a) da \end{aligned}$$

$$= w(x) \star f(x)$$

3. Im Gegensatz zur Faltung ist die Korrelation i.A. nicht kommutativ. Zeigt dazu ein Gegenbeispiel, gerne auch in 1D. Tipp: Berechnet die Korrelation für ein  $1 \times 5$  Bild mit einem  $1 \times 3$  Filterkern.

• Correlation:  $g = w \star f$

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

↑

Filterkern w:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Bild f

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$w(x) \star f(x)$$

$$= g(x) = w(-1) \cdot f(x-1) + w(0) \cdot f(x) + w(1) \cdot f(x)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$f(x) \star w(x)$$