Следствие 2 (Инвариантность формы $1^{го}$ дифференциала)

$\rceil$ $y = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x) = u$.

Тогда

$$dy \overset{(5)}{=} \boxed{y'_x\, dx} \overset{T.1}{=} y'_u \cdot u'_x\, dx \overset{(5)\S 1}{=}$$

$$= \boxed{y'_u\, du} \qquad (3)$$

О.1. $\rceil$ $f: X \to Y$, взаимно-одн.

$f^{-1}: Y \to X$ наз. обратной к ф-ции f, если

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Пример. $y = \sin x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$y: [0; \frac{\pi}{2}] \to [0; 1]$

$y^{-1} = \arcsin y$

$y^{-1}: [0; 1] \to [0; \frac{\pi}{2}]$

Т.2 (О дифференцировании обратной функции)

$\rceil$ f - опр-на, непрерывна и строго монотонна на $\langle a; b \rangle$ и в т. $x_0 \in (a; b)$ $\exists$ кон. $f'(x_0) \neq 0$.

Тогда $\exists$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ где } \quad (5)$$

$y_0 = f(x_0)$

Д-во.

Из-за строгой монотонности

$\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \left[\begin{array}{l} \Delta y \to 0, \text{ т.к. } \cancel{\ } \text{-дифф-ма и} \Rightarrow \text{непр.} \\ \Delta x \to 0 \\ (\text{непр.}) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

<u>Т.3.</u> (Вывод табличных производных).

1) $y=a^x$; $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} =$$

$$= \left\{ a^{\Delta x} - 1 \underset{\Delta x \to 0}{\sim} \Delta x \ln a \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot \cancel{\Delta x} \cdot \ln a}{\cancel{\Delta x}} = a^x \ln a$$

2) $(tg x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3) $y = \log_a x \; ; \; x = a^y$

$$y' \overset{T.2}{=} \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

§3. Производные и дифференциалы высших порядков

I. Производные высших порядков

<u>О.1.</u> $\exists$ f опр-на и дифф-ма на X. Если $\exists$ производная от первой производной ф-ции f в т. x_0, то она наз.

второй производной f в т. x_0
и обозначается

$$f''(x_0),\ y'',\ \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2};\ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Зам. Механич. смысл: $a(t) = S''(t)$

О.2. Производная от производной $(n-1)$-го порядка ф-ции f наз. её n-ой производной, или производной n-го порядка.

$$f''''(x), \quad y'''', \quad y^{\overline{V}}, \quad y^{\overline{X}},$$

$$y^{(38)}, \quad \frac{d^{38}y}{dx^{38}}; \quad \frac{d^{n}y}{dx^{n}}, \quad y^{(n)}$$

О.З. Ф-я f наз. n-раз непрерывно дифференцируемой на X, если она имеет непрер. производные до порядка n включительно.

Примеры!

1) $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$; $f''(x) = e^x$; ...

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad (2)$$

2) $y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$y'' = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$

$y''' = -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$

. . . .

$$y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

3) $y = \cos x$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

4) $y = \ln(1+x)$

$$y' = \frac{1}{1+x}$$

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''' = +\frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}$$

$$y'''' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

(5)

5) $y=(1+x)^{\alpha}$

$$y'=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$y''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$$

$$y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

(6)

(II.) Дифференциалы высших порядков.

<u>О.4.</u> $\exists$ f дважды дифф-ма на X. Дифференциал от дифференциала ф-ции f наз. дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом ф-ции f.

Обозначение:

$$d^2y, \quad d^2f(x).$$

$$d^2y = d(dy) = d(y'\underbrace{dx}_{const}) =$$

$$= d(y')\cdot dx = \underbrace{y''dx}_{d(y')}dx =$$

$$= y''(dx)^2$$

$$d^2y = y''(dx)^2$$

$$\boxed{d^2y = y'' dx^2} \quad (7)$$

О.5. Дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала ф-ции f наз n-ым дифференциалом или дифференциалом n-го порядка

$$d^n y = d(d^{n-1} y)$$

$$\boxed{d^n y = y^{(n)} dx^n} \quad (8)$$

$$dx^n = (dx)^n$$

Нарушение инвариантности диф-лов высшего порядка

$$\boxed{d^2 y = y'' dx^2} \quad (\text{см. } (7))$$

$$d^2 y = d(dy) = d(y'_u \cdot \underbrace{du}_{\neq const}) = [\ldots]$$

$$= d(y'_u)\, du + y'_u\, d^2 u =$$

$$= y''_{uu}\, du^2 + y'_u\, d^2u$$

$$d^2y = y''_{uu}\, du^2 + y'_u\, d^2u$$

§4. Теоремы о дифференцируемых функциях.

Т.1 (Ферма́).

$\rceil$ f опр-на на $< a; b >$ и

в т. $c \in (a;b)$ принимает наибольшее или наименьшее значение. Если $\exists f'(c)$, то $f'(c)=0$.

Д-во. Пусть $f(c)$ – наименьшее знач.

Пусть $x \in \langle a;b \rangle$:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \left[\begin{array}{l} \frac{+}{-} = -, \ x<c \\ \frac{+}{+} = +, \ x>c \end{array} \right.$$

$$f'_-(c)=\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant 0$$

$$f'_+(c)=\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant 0,$$

но $\exists\ f'(c) \Rightarrow$

$$0\leq f'(c)\leq 0 \quad \text{и}$$

$$f'(c)=0$$

Т.2 (Ро́лля).

$\rceil f$

1) опр-на и непрер. на $[a;b]$,
2) имеет кон. $f'(x)$ по кр. мере на $(a;b)$;
3) $f(a)=f(b)$.

Тогда $\exists$ т. $c \in (a;b) : f'(c)=0$

Д-во:

по $2^й$ т. Вейерштрасса ф-я f достигает на $[a;b]$ своего наим. (m) и наиб. (M) значений.

1) $\exists$ $m = M$, т.е.

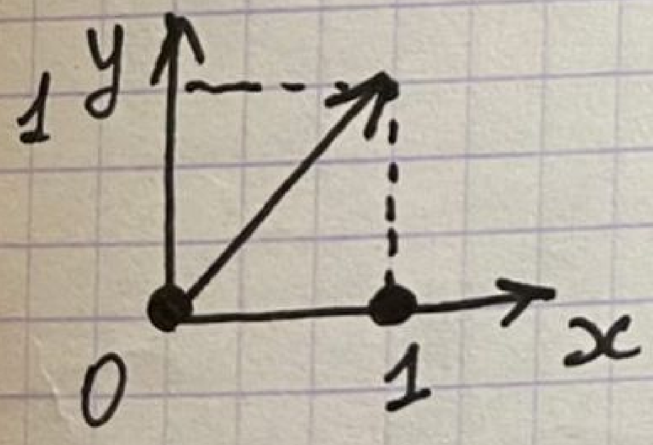
$$m \le f(x) \le M = m \Leftrightarrow$$

$$f(x) = const \Rightarrow f'(x) \equiv 0$$

и т. $c \in (a;b)$ - произв.

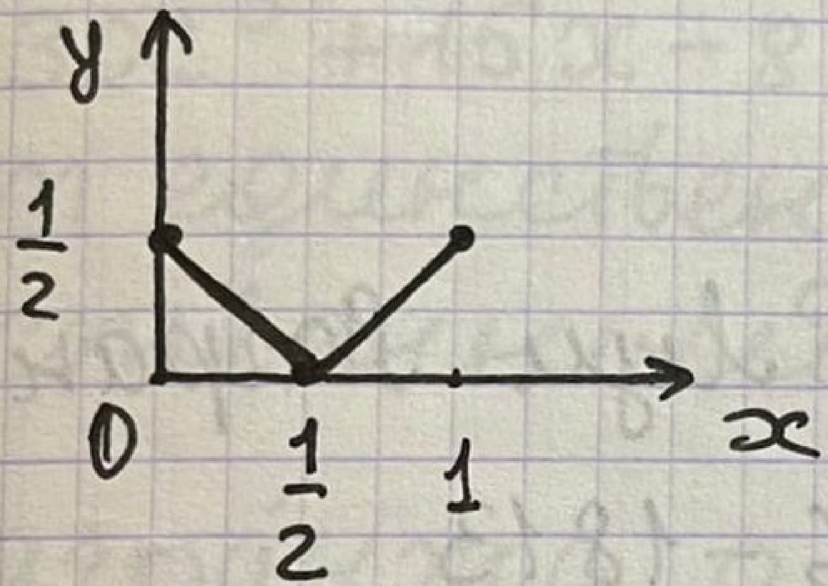
2) $\exists\ m < M$. Тогда хотя бы одно из этих значений достигается в т. $c \in (a;b)$ [т.к. $f(a) = f(b)$] $\Longrightarrow$ по т. Ферма $f'(c) = 0$.

Зам. 1) $f(x) = x - [x]$ на $[0;1]$

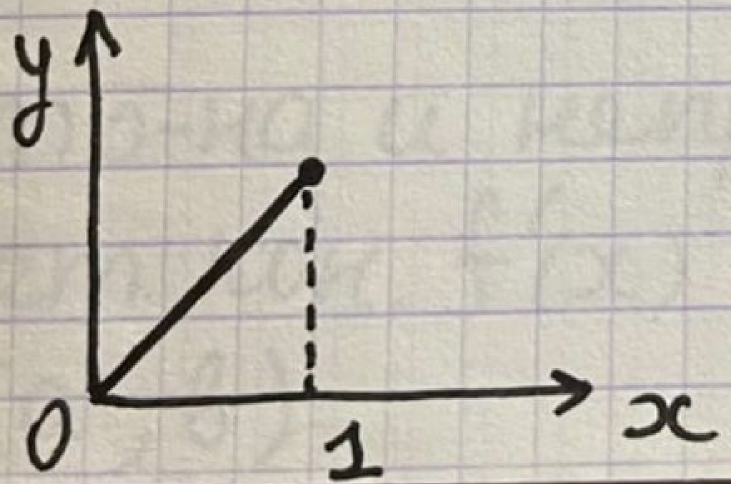


$[x]$ - целая часть x

2) $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ на $[0; 1]$



3) $f(x) = x$ на $[0; 1]$



Задача. Д-ть, что ур-е

$$3x^5+15x-8=0$$

имеет единственный вещественный корень.

Т.3 (Лагра́нжа о конечных приращениях)

] 1) f опр-на и непрер. на $[a;b]$;

2) имеет кон. $f'(x)$ по кр. мере, на $(a;b)$.

Тогда $\exists$ т. $c \in (a; b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (1)$$

Зам.

(1) - формула конечных приращений.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \quad (1^a)$$

на $[x_0; x]$ (или $[x; x_0]$)

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \quad (1^б)$$

$$x_0 < c < x \quad [\text{или } x < c < x_0]$$

$(1^в)$, $\boxed{0 < \theta < 1}$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\overbrace{(x - x_0)}^{\Delta x})\overbrace{(x - x_0)}^{\Delta x}$$

$$0 < \theta < 1 \qquad (1^в)$$

Т.4 (Коши. Обобщенная ф-ла конечных приращений)

$\exists$

1) f и g опр-ны и непрер. на $[a;b]$;

2) $\exists$ кон. $f'(x)$ и $g'(x)$ по кр. мере на $(a;b)$;

3) $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$.

Тогда $\exists$ т. $c \in (a; b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (2)$$

<u>Д-во</u>. $g(b) \neq g(a)$, т.к. иначе $\exists$ т. $c \in (a; b)$: $g'(c) = 0$.

Р-м

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

$F(x)$

1) непрер. на $[a; b]$

2) $\exists\ F'(x)$ на $(a; b)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x) \quad (*)$$

3) $$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(a)-g(a))$$

$= 0$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(b)-g(a)) =$$

$= 0$, т.е. $F(a) = F(b) = 0$

$\Rightarrow$ ф-я $F(x)$ уд-ет условиям т. Ролля $\Rightarrow$ $\exists$ т. $c \in (a; b)$:

$F'(c) = 0$. Из $(*)$ $\Rightarrow$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Зам. Т Лагранжа – ч. сл. Т. Коши.

$$g(x) = x \implies$$

$$g(b) - g(a) = b - a.$$

$$g'(x) = 1$$

Т.5. (Лопиталя).

]

1) f и g опр-ны и непрер. на $(a;b]$;

2) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$

3) $\exists$ кон. $f'(x)$ и $g'(x)$ на $(a;b)$;

4) $g'(x) \neq 0$

5) $\exists$ кон. или бескон.

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A.$

Замечания.

1) Предел м.б. двусторонним;

2) Предел м.б. в т. $\pm\infty$.

3) Неопределенность м.б. $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

4) Другие виды неопределенности надо преобразовывать к $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Примеры.

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\left\{\frac{0}{0}\right\}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1/x}{1} = 1.$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x-1} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1/x}{1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

5) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \{1^{\infty}\} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{1-x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left\{\frac{0}{0}\right\}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{1/x}{-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \text{ - не } \exists$$

§ 5. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

I. Постоянство и монотонность.

Т.1.] f опр. на $<a; b>$ и $f'(x) \equiv 0$ на $(a; b)$, а в т. a и b (если они входят в $<a; b>$) непрерывна.

Тогда $f(x) \equiv \text{const}$ на ~~$[a, b]$~~ $\langle a; b\rangle$.

<u>Д-во.</u>

] $x_0 \in \langle a; b\rangle$ и $x \in \langle a; b\rangle$.

По т. Лагранжа

$$f(x)-f(x_0)=\underbrace{f'(c)}_{=0}(x-x_0)$$

$$f(x)=f(x_0) \quad (\forall x \in \langle a; b\rangle)$$

<u>Т.2.</u> Если $f'(x)>0$ на $\langle a; b\rangle$, то $f(x)$ строго монотон-

но возрастает. Если $f'(x)<0$, то $f(x)$ строго монотонно убывает.

<u>Д-во</u>.] $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \langle a;b \rangle$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1).$$

$$\left.\begin{array}{l}]\ f'(x)>0 \\ x_2-x_1>0 \end{array}\right| \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0,$$

т.е. $f(x_2)>f(x_1)$

II. Локальные экстремумы

О.1. Пусть f опр-на на $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$ и f непрерывна в т. x_0. Если $\exists$ $U(x_0)$ такая, что

1) $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$,

то x_0 наз. т-кой локального максимума ф-ции f;

2) $f(x) \ge f(x_0)$ $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$,

то x_0 наз. т-кой локаль-
ного минимума ф-ции f;
3) локальный минимум и
локальный максимум ф-ции
f наз. локальными экстре-
мумами;
4) если нер-ва в 1) и 2)
строгие, то экстремум
наз. строгим.

Т.3. (Необходимое условие экстремума)

$\rceil$ f опр-на в $U(x_0)$ и x_0 – т-ка экстремума f. Если $\exists\, f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

__Д-во__

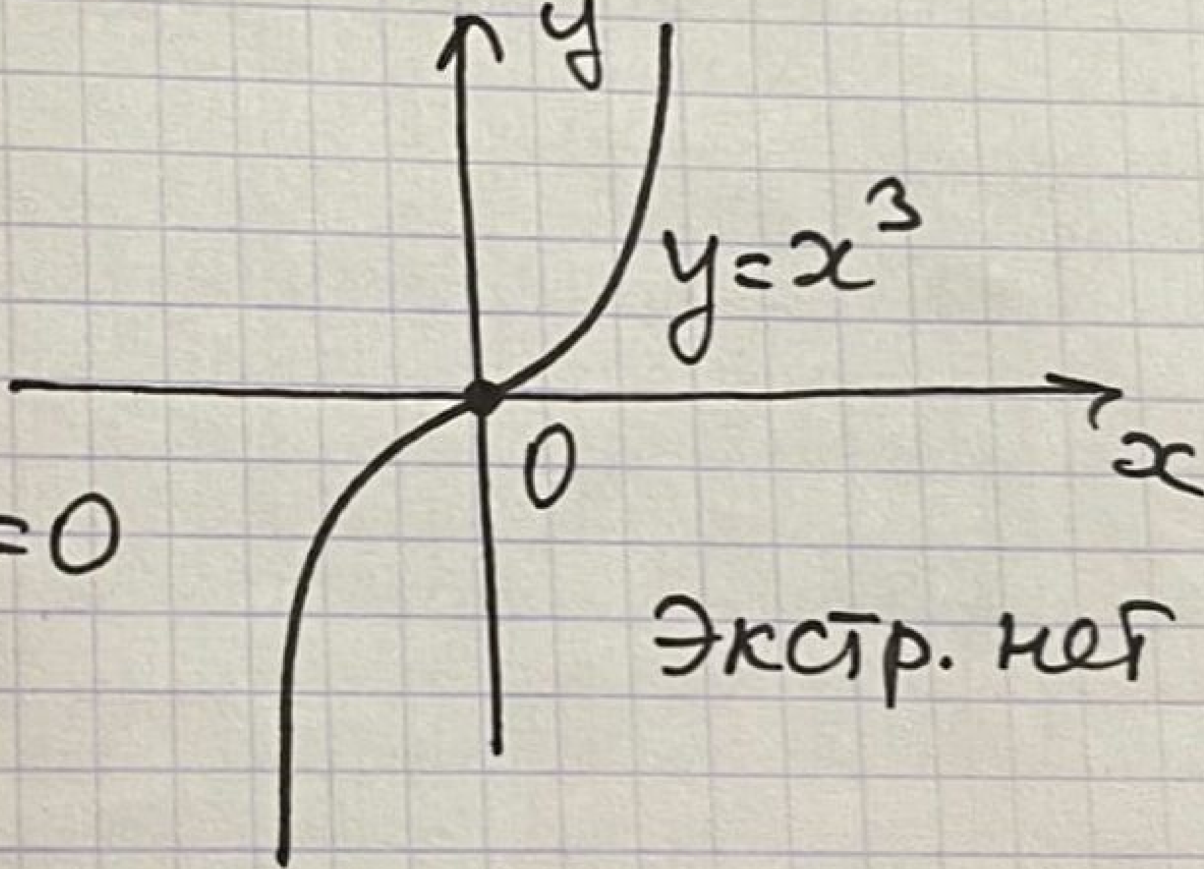
(по т. Ферма)

Замечания. 2) Условие $f'(x)=0$ не является достаточным.

$y=x^3$

$y'=3x^2$

$y'=0$ при $x=0$



Т.4. (Достаточные условия $\exists$-ния экстремума по $1^{й}$ производной).

$\exists$ f опр-на и непрер. в $U(x_0)$ и $\exists$ кон. $f'(x)$ в, м.б., $\mathring{U}(x_0)$.
Если при переходе через т. x_0 (слева направо) $f'(x)$
1) меняет знак с „+" на „−", то x_0 – т-ка строгого лок.

максимума;

г) меняет знак с „−" на „+",

то x_0 − т-ка строгого лок.

минимума;

з) не меняет знака, то

экстремума в т. x_0 нет.

<u>Д-во</u>

1) $\exists\, x \in U(x_0)$

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$$

а). Л $x < x_0 \Longrightarrow x < c < x_0$

и $\left.\begin{array}{l} x-x_0<0 \\ f'(c)>0 \end{array}\right| \Longrightarrow f(x)-f(x_0)<0$

и $\underline{f(x)<f(x_0)}$

б) $x > x_0 \Longrightarrow x_0 < c < x$

и $\left.\begin{array}{l} x-x_0>0 \\ f'(c)<0 \end{array}\right| \Longrightarrow f(x)-f(x_0)<0$, т.е.

$\underline{f(x)<f(x_0)}$

2) Аналогично

3) $\exists\ f'(x) < 0 \Longrightarrow$

$f(x) \searrow$ в $U(x_0)$ и в

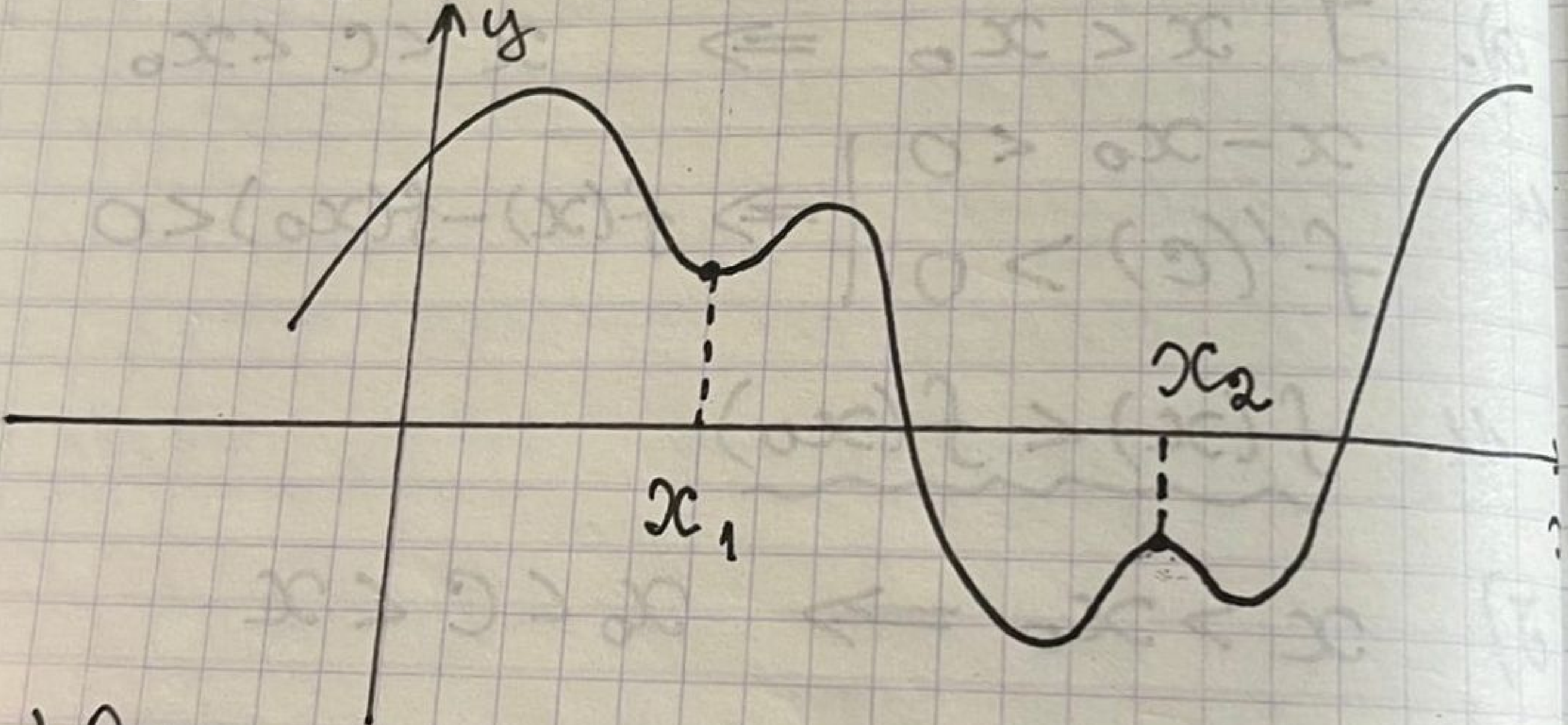
т. x_0 экстр. нет.

$f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$

$f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$

—(особые). стац. + особые — критические т-ки 1го рода

Зам. 1) . . .



2) Экстремумы надо искать среди т-к, где $f'(x)=0$ (стац.) и среди т-к, где $f'(x)$ не $\exists$ –

III. Наибольшие и наименьшие значения ф-ции на отрезке.

] f опр-на и непрер. на $[a;b]$ $\Rightarrow$ по 2-й т. Вейерштрасса она достигает наиб. и наим. значений.

<u>План</u>. 1) Ищем $f'(x)=0$, $x \in (a;b)$

2) Вычисляем $f(x)$, $f(a)$, $f(b)$

3) Выбираем....

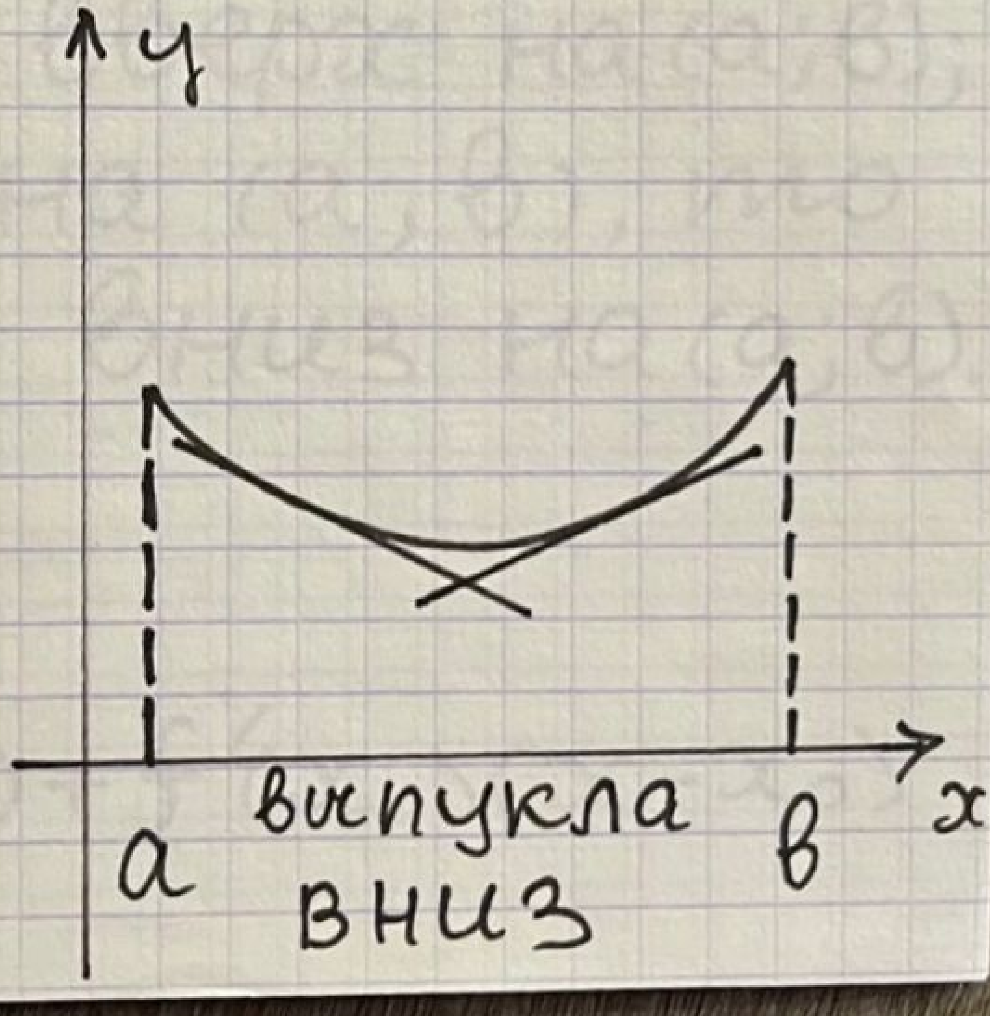
IV. Направление выпуклости и точки перегиба

О.2. ∃ f опр-на на $(a; b)$. Говорят, что

1) f выпукла вверх на $(a; b)$, если все точки её графика лежат ~~не выше~~ ниже т-к всякой её касательной на этом интервале;

2) f выпукла вниз на $(a; b)$,

если все точки её графика лежат выше точек любой её касательной на (a; в).



T.5. Пусть f дважды дифф-ма на $(a;b)$. Тогда, если

1) $f''(x) < 0$ на $(a;b)$, то f — выпукла вверх на $(a;b)$;

2) $f''(x) > 0$ на $(a;b)$, то f — выпукла вниз на $(a;b)$.

Д-во.

1. $y = f(x)$

$$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - y_{кас} = \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\text{т. Лагр}} - f'(x_0)(x - x_0) = \{\exists \text{ т. } c \text{ между } x \text{ и } x_0\}$$

$$= f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

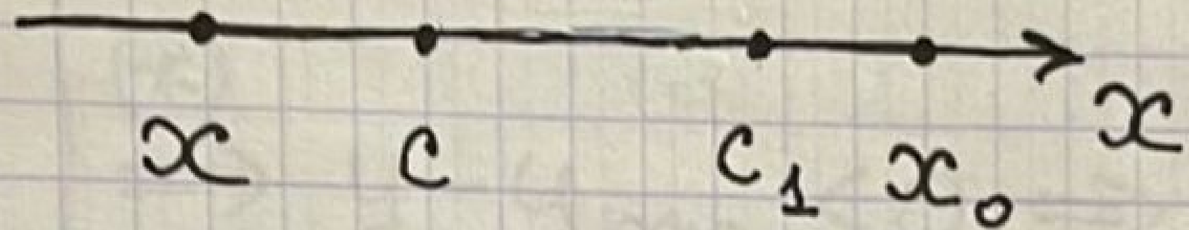
$$= (\underbrace{f'(c) - f'(x_0)}) (x - x_0) =$$

$$= \{\text{по т. Лагр. } \exists\ c_1 \text{ между } c \text{ и } x_0\} =$$

$$= f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$$

$$y - y_{кас} = f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0) \quad (*)$$

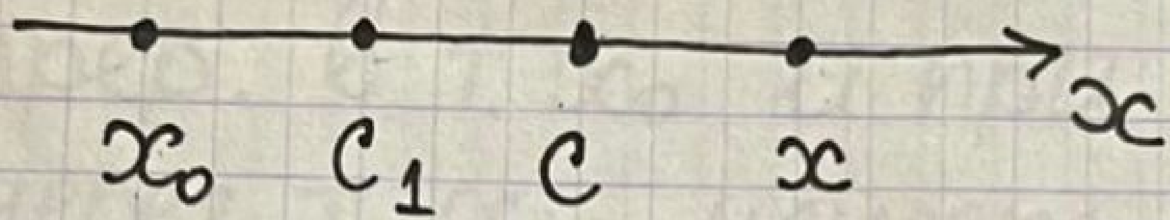
a) $x < x_0$



$$\left.\begin{array}{l} f''(c_1) < 0 \\ c - x_0 < 0 \\ x - x_0 < 0 \end{array}\right| \xRightarrow{(*)} y - y_{кас} < 0, \text{ т.е.}$$

$$y < y_{кас}$$

б) $x > x_0$



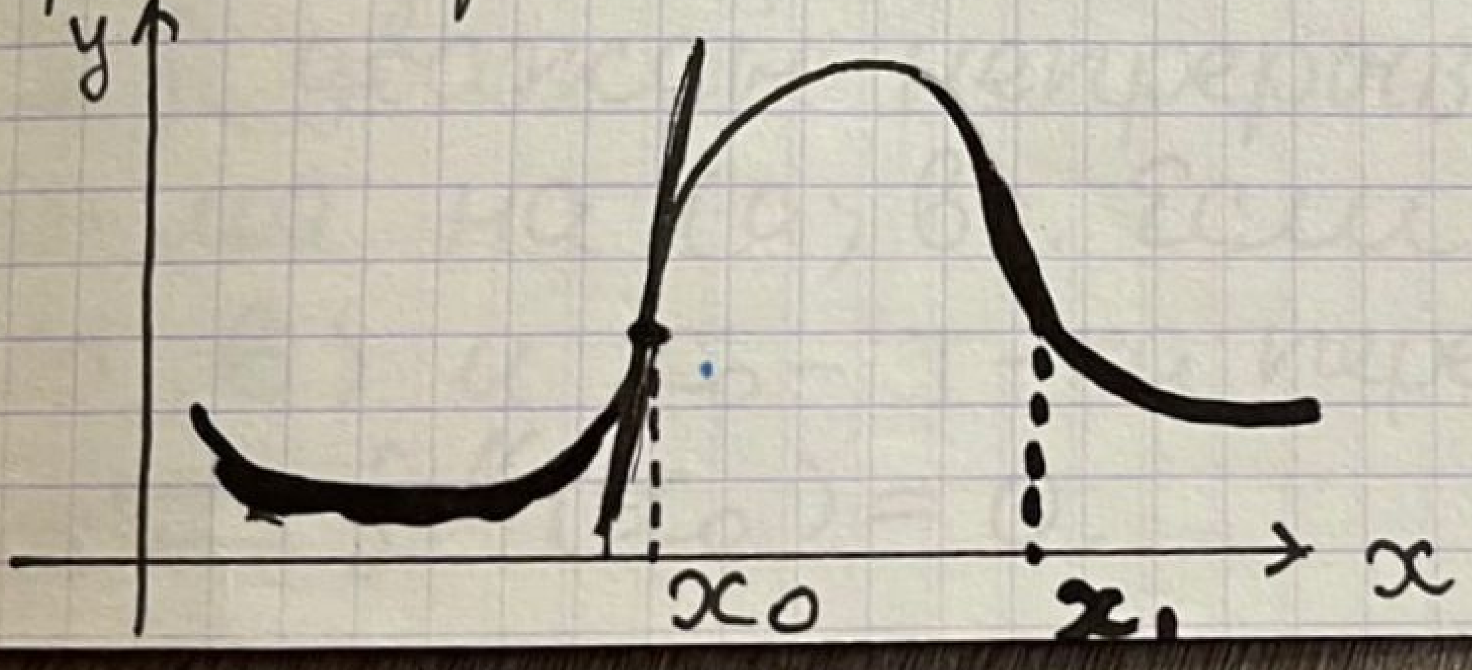
$$\left.\begin{array}{l} f''(c_1) < 0 \\ c - x_0 > 0 \\ x - x_0 > 0 \end{array}\right| \xRightarrow{(*)} y - y_{кас} < 0 \Rightarrow$$

$$y < y_{кас}$$

$\Rightarrow$ f – выпукла вверх на $(a; b)$

Зам. Условия т.5 не явл. необх.

О.2.] f непрер. в т. x_0 и при переходе через т. x_0 меняет направление выпуклости. Тогда т. x_0 наз. т-кой перегиба графика ф-ции.



Зам. При переходе через т. перегиба касательная пересекает кривую.

Т6. (Необходимое условие т-ки перегиба)

∃ f дважды непрерывно дифф-ма на $(a; b)$. Если $x_0 \in (a; b)$ и x_0 – т-ка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Д-во.

От противного.

$\exists$, напр. $f''(x_0) > 0$. Тогда по непрер. $f''(x) > 0$ в некот. $U(x_0)$ (и слева и справа от т. x_0) $\Rightarrow f(x)$ выпукла вниз и слева и справа от т. x_0, т.е. т. x_0 – не т-ка перегиба.

Т.7. (Достаточные усл. т. перегиба)

$\exists$ f опр-на и непрер. в $U(x_0)$ и дважды дифф-ма в, м.б. $\mathring{U}(x_0)$. Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через т. x_0, то x_0 - точка перегиба.

Д-во. По усл. т-мы ф-я непрер. в т. x_0, а по т.5 ф-я имеет разные направления выпуклости слева и справа от т. x_0, $\Rightarrow$ x_0 – т-ка перегиба.

<u>пример:</u>

$$y = e^{-x^2}$$

$$y' = -2x e^{-x^2}$$

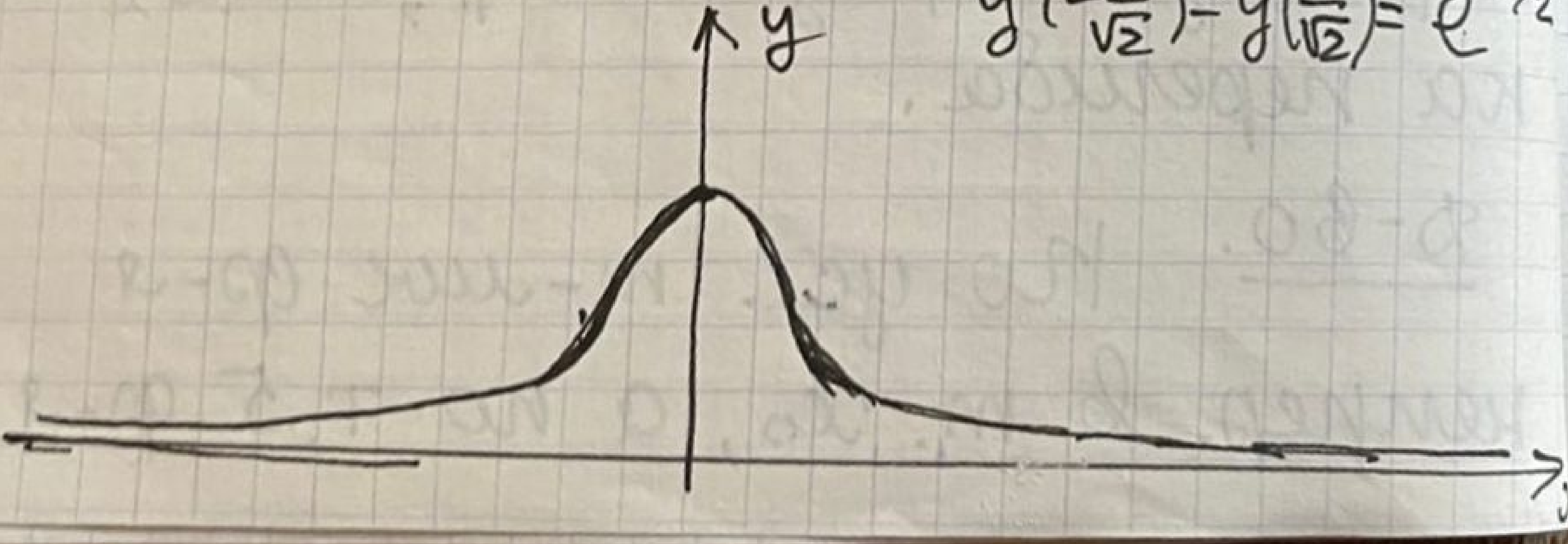
$$y'' = -2\left(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}\right) =$$

$$= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)\ ;\ y'' = 0 \text{ при}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$
y''	+	0	−	0	+
y	$\cup$	т. пер	$\cap$	т. пер	$\cup$

$$y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2}$$



Зам. Т. обр., перегиб м.б. в т-ках, где $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не $\exists$ (критические т-ки $2^{\text{го}}$ рода).