0.3 Квадратная м-ца С наз. ортогональной, если $C^T = C^{-1}$.

<u>Св-ва ортогональной м-цы.</u>

$C^{-1}C = CC^{-1} = E$, но для ортогональной матрицы $C^{-1} = C^T \Rightarrow$

$C^T C = CC^T = E$, т.е.

сумма произведений эл-ов одной строки (столбца) ортогональной м-цы на соответствующие элементы другой строки равна 0, а сумма квадратов элементов одной строки (столбца) = 1.

Примеры.

1) $$C = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix};$$ 2) $$S = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \neq 0$$

$A_{11} = -4$; $A_{21} = 2$

$A_{12} = -5$; $A_{22} = 3$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2,5 & -1,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6-5 & -3+3 \\ 10-10 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

§16. Ранг матриц

I. Базисный минор и ранг м-цы.

О.1.] $A[m\times n]$, $0<k\le \min(m;n)$.
Выберем произвольные k строк и k столбцов м-цы A и составим из эл-ов, стоящих на их пересечении, м-цу порядка k. Опр-ль этой м-цы наз.

Минором к-го порядка м-цы A.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Миноры $1^{\text{го}}$ пор.: $3; 0; -1; \ldots$

2) Миноры $2^{\text{го}}$ пор.:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \ldots$$

3) Миноры $3^{го}$ пор.:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \ldots$$

<u>О.2.</u> Минор r-го порядка м-цы A наз. её <u>базисным минором</u>, если он не равен 0, а все

миноры порядка $(r+1)$ равные 0 или не м.б. составлены.

<u>О.3.</u> Порядок базисного минора наз. <u>рангом</u> матрицы.

<u>Зам.</u> Базисных миноров м.б. несколько, но их порядки равные.

Т.1. (О базисном миноре).

Любой столбец м-цы есть линейная комбинация базисных столбцов (то же для строк). Ранг м-цы равен <u>максимальному числу</u> линейно-независимых столбцов м-цы A.

(строк)

II. Элементарные преобразования матриц.

О.5. Элементарными преобразованиями матриц наз. следующие:

1) умножение всех эл-ов строки на число $\lambda \neq 0$;

2) прибавление к эл-ам

одной строки соответствую-
щих эл-ов другой строки;
3) перестановка двух строк;
5) 1–3 для столбцов.

Т.2. Элементарные пре-
образования не изменя-
ют ранга матрицы.

Д-во:

4) Исключение нулевой строки.

О.6. Если одна матрица м.б. получена из другой путем элементарных преобразований, то такие матрицы наз. **эквивалентными**, или **подобными**.

$$A \sim B$$

Если $\mathrm{rg}\, A = r$, то используя 1-3 для строк и, м.б., перестановку столбцов, м-цу A можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{rr+1} & \dots & b_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

базисний мінор:

$$M_r = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{rr} \neq 0 .$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{\sim} \qquad (-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\sim} \qquad (-2)$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\operatorname{rg} A = 2$$

§17. Системы линейных алгебраических ур-й.

I. Матричная запись

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

система m лин. алг. ур-й с n неизв.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – основная матрица системы

$(A|B)$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (A|B)$$

Расширенная матрица системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов

$$AX = B \quad (1^a)$$ – матричная

запись системы (1).

О.9. Упорядоченный набор чисел $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, который при подстановке в систему (1) обращает её ур-я в тождества, наз. решением системы (1).

Если система имеет хотя бы одно решение,

то она наз. совместной.
Если система (1) не имеет решений, то она наз. несовместной.

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

II. Теорема Крамера

Т. 1 (Крамера).

] в системе n ур-й с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2)$$

определитель основной м-цы системы $\det A = \Delta \neq 0$.

Тогда система (2) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}, \quad (3)$$

где

$$\Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

<u>Д-во.</u>

$\Delta \neq 0$, т.е. A – имеет обратную матрицу A^{-1}.

$$AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$\underline{X = A^{-1} B} \quad (4)$$

$$X = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ - & - & - & - \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ni} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\, b_k = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta_{x_i}$$ (разло-

женной по эл-ам i-го столбца) $\cdot \frac{1}{\Delta} = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$.

Зам. . . . . $XA = B$

Пример. $AX = B$

$$X \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$XA = B \; ; \; (XA)A^{-1} = BA^{-1}$$

$$X(\underbrace{AA^{-1}}_{E}) = B \cdot A^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

$$= \overset{B}{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}} \overset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}}^{X}$$

$X = A$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

III. Теорема Кронекера и Капелли.

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Т.2. (Кронекера-Капелли).

Система m линейных алгебраических ур-й с n неизвестными совместна т.и т.т., когда ранг основной м-цы системы равен рангу расширенной м-цы системы.

(1) совм. $\Longleftrightarrow$ $rg\, A = rg(A|B)$

Н.) $\rceil$ (1) совместна, т.е.

$\exists\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + \ldots + a_{1n}x_n^* = b_1, \\ a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + \ldots + a_{2n}x_n^* = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1^* + a_{m2}x_2^* + \ldots + a_{mn}x_n^* = b_m, \end{cases}$$

т.е.

$$x_1^*\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix} + x_2^*\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots \\ a_{m2}\end{pmatrix} + \dots + x_n^*\begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}$$, т.е. столбец B – это лин. комб. столбцов м-цы A

и $\Rightarrow \dots\dots$ $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|B)$

(Д.)] $rg\,A = rg(A|B) = r$,

$\Rightarrow$ они имеют один базисный минор.] это M_r в левом верхнем углу A. Тогда, по т. о базисном миноре, B — это лин. комб. первых r столбцов м-цы A, т.е.

$\exists$ числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\exists \; x_1^* = \lambda_1,\; x_2^* = \lambda_2, \dots, x_r^* = \lambda_r,$$

$$_{r+1} = x_{r+1}^* = 0, \dots, \underbrace{x_n^* = 0}_{=\lambda_n}$$

Torga

$$\underbrace{x_1^*}_{\lambda_1}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \underbrace{x_r^*}_{\lambda_r}\begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix} +$$

$$+ \underbrace{x_{r+1}^*}_{\overset{\shortparallel}{0}}\begin{pmatrix} a_{1\,r+1} \\ a_{2\,r+1} \\ \vdots \\ a_{m\,r+1} \end{pmatrix} + \ldots + \underbrace{x_n^*}_{\overset{\shortparallel}{0}}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

верно (см. „+"), $\Longrightarrow$

$x_1^*, \ldots, x_r^*, \ldots, x_n^*$ – реш-е (1),

т.е. (1) совместна.

Т.3. Если $\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}(A|B) = r < n$, то система (1) лин. алг. ур-й неопределенна (имеет бесконечно много решений), при этом можно выбрать $n-r$ переменных (параметров) таких, что для каждого конкретного набора их значений остальные r переменных (базисных) определяются однозначно.

<u>Д-во</u>. $\exists$ M_r (базисный минор) м-цы A расположен в верхнем левом углу (т.е. первые r столб. — базисные).

Запишем сист. (1) в виде

с

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r = b_m - a_{mr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{mn}x_n \end{cases}$$

И $\exists\ x_{r+1}, \ldots, x_n$ – принимают какие-то конкретные числ. значения. Тогда мы получаем систему m $(m \geqslant r)$ ур-й с ч неизв., причем по т. о базисном миноре последние т-ч ур-й есть линейная комбинация первых ч., т.е. эти ур-я можно исключить. Тогда останется система ч ур-й с ч неизвестными, главный определитель которой равен

$M_r \neq 0$

$\Rightarrow$ система имеет ед. реш-е, которое можно найти по ф-лам Крамера.

IV. Исследование и решение систем лин. алг. ур-й

Из т-м 2 и 3 $\Rightarrow$

1) Если $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|B) = n$, то система (1) имеет ед. реш-е.

2) Если $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|B) = r < n$, то система имеет бесконечно много решений, причем $(n-r)$ переменных

принимают произволь-
ные значения, а остальные
и неизвестных выражаются
через них однозначно.
3) Если $rg\, A < rg(A|B)$, то
система несовместна.

Замечание. При $m<n$
система заведомо либо
неопределенна, либо несов-
местна