§22. Многочлены и рациональные дроби.

① Многочлены.

О.1. Отображение

$$P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \quad (1)$$

$a_0 \neq 0;\ a_i, z \in \mathbb{C}$

наз. многочленом степ. n.

примеры.

1) $P_0(z) = a_0 = \text{const}.$

2) $P_1(z) = a_0 z + a_1$

3) $P_2(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$

Свойства мн-ов

$P_n(x) \equiv Q_m(x) \Leftrightarrow m = n,\ a_i = b_i,\ i = 1, \dots, n$

2. $P_n(z)+Q_m(z)$ - мн-н степени $\leq \{m; n\}$

3. $P_n(z)\cdot Q_m(z)$ - м-н ст. $n+m$.

4. $P_n(Q_m(z))$ - мн-н ст. mn.

4. $P_n(z)\equiv Q_m(z) \Leftrightarrow$ $n=m$; $a_i=b_i$, $i=1,\dots,n$

О.2. К.ч. z_0 наз. корнем мн-а P_n, если

$$P_n(z_0)=0 \quad (2)$$

Зам. Т. обр., корень мн-а – это корень алгебр. ур-я n-ой степени

$$P_n(z)=0 \quad (3)$$

Т.1. (Основная Т. высшей алгебры).

Всякое алгебраическое ур-е степени $n \geq 1$ имеет по кр. мере один, в общем случае - комплексный, корень.

Зам.

$$e^{z} = 0$$

не имеет корней, т.к.

$$e^{x+iy} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{e^{x}}_{>0}\underbrace{(\cos y + i\sin y)}_{\neq 0} = 0$$

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4-3x+15 & 2x^2+2x+5 \\
\cline{2-2}
-\;\underline{4x^4+4x^3+10x^2} & 2x^2-2x-3 \\
\quad -4x^3-10x^2-3x+15 & \\
-\;\underline{-4x^3-4x^2-10x} & \\
\qquad\quad -6x^2+7x+15 & \\
\qquad -\;\underline{-6x^2-6x-15} & \\
\qquad\qquad\quad 13x+30 &
\end{array}
$$

$4x^4 - 3x + 15 =$

делимое

$= (2x^2 + 2x + 5)(2x^2 - 2x - 3) +$

делитель неполное частное

$+ 13x + 30$

остаток

Т.2. $\exists$ P_n, Q_m - мн-ы и $n \geq m > 0$. Тогда $\exists$ мн-ны S_{n-m} (неполное частное) и R_k $(k<m)$ (остаток) такие, что

$$P_n(z) = Q_m(z) S_{n-m}(z) + R_k(z) \quad (4)$$

Если $R_k(z) \equiv 0$, то говорят, что ....

Т.3 (Безу).

Остаток от деления произв. мн-а $P_n(z)$ на двучлен $(z-z_0)$ равен $P_n(z_0)$.

Д-во. Из (4) $\Rightarrow$

$$P_n(z) = (z - z_0) S_{n-1}(z) + \underbrace{R_0}_{\text{const}}$$

] $z = z_0$:

$$P_n(z_0) = (z_0 - z_0) S_{n-1}(z_0) + R_0$$

$$P_n(z_0) = R_0,$$

ч. т. д.

Следствие (признак делимости на двучлен)

Для того, чтобы мн-н делился на двучлен $z - z_0$ без остатка н. и д., чтобы z_0 было корнем мн-а $P_n(z)$.

Д-во.

$$R_0 = P_n(z_0)$$

$$R_0 = 0 \Longleftrightarrow P_n(z_0) = 0,$$

ч.т.д.

Т. 4. (О разложении мн-а на линейные множ.)

Мн-н P_n при $n \geq 1$ всегда разлагается на произведение n линейных множит.

по ф-ле

$$P_n(z) = a_0(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_n) \quad (5)$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – все корни мн-а $P_n(z)$,

a_0 – старший к-т.

1) $P_n(z)$ имеет хотя бы 1 корень z_1 (т. 1) $\Rightarrow$ посл.

$P_n(z) = (z - z_1) P_{n-1}(z), \ldots$

2. Если $n - 1 \geq 1$, то . . .

$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) P_{n-2}(z)$

. . . . . .

Разложение вида (5) получено.

2) $\exists z^* \neq z_i,\ i = 1, \dots, n,$

$$\underbrace{P_n(z^*)}_{=0} = \underset{\neq 0}{a_0}\underset{\neq 0}{(z^* - z_1)} \cdot \ldots \cdot \underset{\neq 0}{(z^* - z_n)}$$

$$P_n(z^*) \neq 0 \Rightarrow \ldots$$

<u>Зам.</u> Любой мн-н $P_n(z)$ имеет не более n разл. корней.

О.3. Если м-н $P_n(z)$ делится на $(z-z_0)^k$ и не делится на $(z-z_0)^{k+1}$, то число z_0 наз. корнем кратности **k** мн-а $P_n(z)$.

Если $k=1$, то корень наз. простым.

<u>Зам.</u>

1) $\exists$ z_0 - корень кр. к. $\Rightarrow$

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z)$$

и $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

2) Мн-н $P_n(z)$ имеет ровно n корней, если

...

Т.5. (признак кратности корня).

Для того, чтобы к.ч. z_0 было корнем кр. $\underline{k}$ мн-а $P_n(z)$ н.и д., чтобы

$$P_n(z_0)=P_n'(z_0)=\ldots=P_n^{(k-1)}(z_0)=0,$$

а $P_n^{(k)}(z_0)\neq 0$.

Р-м мн-н

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

~~Т.6. (О разложении мн-а с вещественными коэфф на вещественные множители).~~

Если к.ч. $z_0 = \alpha + \beta i$ является корнем кр. к мна $P_n(x)$, то сопряженное ему число $\overline{z}_0 = \alpha - \beta i$ тоже будет корнем кр. к этого мн-а.

Зам. $(x-z)(x-\bar{z}) =$

$= x^2 - (z+\bar{z})x + z\bar{z} =$ [...]

$= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$,

причем

$$D = \underline{4\alpha^2 - 4\alpha^2 - 4\beta^2} = -4\beta^2 < 0$$

<u>Т.7</u> (О разложении мн-а с вещ. коэфф. на вещ. мн-ли)

1.4

Мн-н $P_n(x)$ степени $n \geqslant 1$ всегда разлагается на линейные и квадратные множители с вещественными коэффициентами

Д-во.

по т. 4

$P_n(x) =$

$= a_0 (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_m)^{k_m},$

$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$

сгруппируем попарно компл.-сопр. $\therefore$.

$$P_n(x)=$$

$$=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot$$

$$\cdot\left((x^{\cancel{2}}-z_1)(x-\overline{z}_1)\right)^{l_1}\cdot\ldots\cdot\left((x-z_s)(x-\overline{z}_s)\right)^{l_s}=$$

$$=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot$$

$$\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

$$(6)$$

$k_1+\ldots+k_r+$

(II.) Рациональные функции.

0.4. Отображение $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемое ф-лой

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (7)$$

наз. вещественной рац. ф-ей (или рац. дробью).

Р. др. наз. <u>правильной</u>, если $\underline{\underline{n < m}}$

и <u>неправильной</u>, если $\underline{n \geq m}$.

∃ дробь неправ.,
т.е. $n \geq m$. Тогда (т.2)

$$P_n(x) = Q_m(x)\, S_{n-m}(x) + R_k(x), \text{ где } k < m$$

$\Rightarrow$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \underbrace{S_{n-m}(x)}_{\text{целая часть}} + \underbrace{\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}}_{\text{правильная дробь.}} \qquad (8)$$

Простейшие вещественные дроби:

1) $\dfrac{A}{(x-x_0)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $A = const$

2) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$, $l \in \mathbb{N}$,
$M, N - const$

$\boxed{D<0}$!

Т.8 (О разложении правильной рац. др.)

] $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – прав. р. др., причем ст. коэфф-т мн-а $Q_m = 1$. Если $Q_m(x) = (x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r}$:

$\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{e_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{e_s}$,

где x_i - попарно разл. вещ. корни кр. k_i, а

$x^2+p_jx+q_j=(x-z_j)(x-\bar{z}_j)$,

где z_j и $\bar{z}_j$ - компл.-сопр. корни кр. e_j.

Тогда $\exists$ вещ. числа

A_{ik}, $i=1,\dots r$; $k=1,\dots,k_i$

M_{jl} и N_{jl}, $j=1,\dots,s$;

$l=1,\dots,l_j$

Такие, что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{x-x_2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}} +$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_{1l_1}x+N_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}$$

$$+\ldots+\frac{M_{s1}x+N_{s1}}{x^2+p_sx+q_s}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{sl_s}x+N_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} \qquad (9)$$