

Минобрнауки России

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)

Кафедра инженерного проектирования

И.И. Гнилуша, В.А. Люторович,
Д.Л. Кириллов

**АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ
ТИПОВЫХ ЗАДАЧ
НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Часть I. ТОЧКА. ПРЯМАЯ. ПЛОСКОСТЬ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2016

Гнилуша, И.И. Алгоритмы решения типовых задач начертательной геометрии. Часть I. Точка. Прямая. Плоскость: учебное пособие / И.И. Гнилуша, В.А. Люторович, Д.Л. Кириллов. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2016. – 77 с.

Рассмотрены принципы решения задач графическими методами курса начертательной геометрии. Приведены примеры оформления заданий, выполнение которых требуется для сдачи итогового экзамена.

Предназначено для студентов 1–5 факультетов и соответствует рабочим программам по дисциплине «Инженерная графика», раздел «Начертательная геометрия».

Учебное пособие предназначено для студентов I курса следующих направлений подготовки: 08.03.01, 09.03.01, 15.03.02, 15.03.04, 18.03.01, 18.03.02, 18.05.01, 18.05.02, 19.03.01, 20.03.01, 22.03.01, 27.03.04, 27.03.03.

Учебное пособие формирует у студентов следующие профессиональные компетенции (ПК):

- владение основными законами проецирования и построения изображений (ОПК-1);
- умение контролировать соответствие выполняемых работ нормативным документам (ОПК-3).

Рис. 56, табл. 12, библиогр. назв.4

- Рецензенты:
1. Балтийский государственный технический университет («Военмех»).
Д.Е. Тихонов-Бугров, канд. техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Инженерная и машинная геометрия и графика».
 2. М.В. Александров, канд. техн. наук, доцент кафедры инженерного проектирования СПбГТИ(ТУ).

Полученные результаты были достигнуты в рамках государственного задания Минобрнауки России

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии механического факультета 26 ноября 2015 г.

Рекомендовано к изданию РИС СПбГТИ(ТУ)

Введение

В пособии дается необходимая краткая теоретическая справка по вопросам курса начертательной геометрии. Основное его содержание составляют алгоритмы решения задач, входящих в альбомы домашних заданий, а также выносящихся на контрольные мероприятия.

Первая часть пособия ограничивается алгоритмами решения задач, связанных с понятиями точки, прямой, плоскости, взаимного положения прямых и прямой и плоскости. Вопросы преобразования эпюра, построения поверхностей, определения линий их пересечения плоскостями и точек, получающихся при встрече прямой с поверхностью, а также некоторые метрические задачи будут рассмотрены во второй части пособия.

Каждый алгоритм в пособии снабжен графическими примерами, для которых приведен подробный разбор решения. Ряд иллюстраций предназначается в качестве образца оформления заданий, представляемых студентами на проверку.

Самостоятельное изучение предмета начертательной геометрии студентами затрудняется, кроме прочих объективных и субъективных причин, различием обозначений проецируемых объектов в многочисленных учебных пособиях и задачниках. В данном издании авторы используют систему обозначений, достаточно распространенную в настоящее время и применяющуюся не только рядом авторов учебных материалов, но и на веб-сайтах, предназначенных для контрольного тестирования студентов.

В основном, настоящее пособие предназначено для студентов, обучающихся на 3 и 4 факультетах Технологического института. Им в ходе обучения понадобятся все алгоритмы, рассматривающиеся в пособии. Часть материала подходит для студентов технологических специальностей. Он поможет им в решении трех из пяти обязательных задач раздела начертательной геометрии в объеме изучаемого ими курса инженерной графики.

1 Построение проекций точки, заданной аналитически, в ортогональных проекциях

1.1 Точка общего положения

Аналитическое задание точки – это представление ее положения в пространстве с помощью трех числовых значений, ее координат. Пусть нужно построить положение точки A с координатами (x_A, y_A, z_A) . Предлагается следующий порядок действий:

- 1.1.1 Произвести градуировку осей, при необходимости, выполнив масштабирование. (Как правило, при выполнении заданий, предполагается построение в натуральную величину, т.е. 1 единица = 1 мм)
- 1.1.2 Отложить значения координат по соответствующим осям. При этом на осях помечают проекции точки на соответствующие оси: A_x, A_y, A_z . Следует помнить, что на комплексном чертеже координата y используется дважды: для определения горизонтальной и профильной проекций точки. Поэтому ординату точки, как правило, откладывают по оси Oy , предназначенной для горизонтальной плоскости проекций (для определенности ее можно обозначить y_{π_1}), а затем переносят на ось Oy профильной плоскости проекций – y_{π_3} . **Будьте внимательны и производите перенос ординаты только в направлении ветви оси, имеющей тот же знак координат.** При положительной ординате перенос выполняется в нижней правой четверти системы координат комплексного чертежа, при отрицательной – в верхней левой. Две остальные четверти в этой операции не используются.
- 1.1.3 Определить проекции заданной точки на плоскости проекций. Каждая из этих трех проекций связана с парой проекций точки на оси: горизонтальная проекция A' – с A_x и $A_{y_{\pi_1}}$, фронтальная A'' – с A_x и A_z , а профильная A''' – с $A_{y_{\pi_3}}$ и A_z .
Проекционная связь прочерчивается тонкой сплошной линией от проекции точки на соответствующую ось параллельно той оси, по которой отсчитывается вторая координата, определяющая положение проекции точки. Проекция располагается в месте пересечения двух линий проекционной связи и отмечается зачерненной окружностью с диаметром около 1 мм. Характерное расположение проекций точек, принадлежащих каждой из частей пространства, проиллюстрировано на рисунке 1.
- 1.1.4 Выяснить принадлежность точки частям пространства. Рассуждения основываются на расположении проекций точки в четвертях комплексного чертежа (см. рисунок 1) или же на знании знаков координат в том или ином октанте. Знаки координат по частям пространства приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Координаты точки, расположенной в различных октантах

Номер октанта Координата	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	+	+	+	-	-	-	-
y	+	-	-	+	+	-	-	+
z	+	+	-	-	+	+	-	-

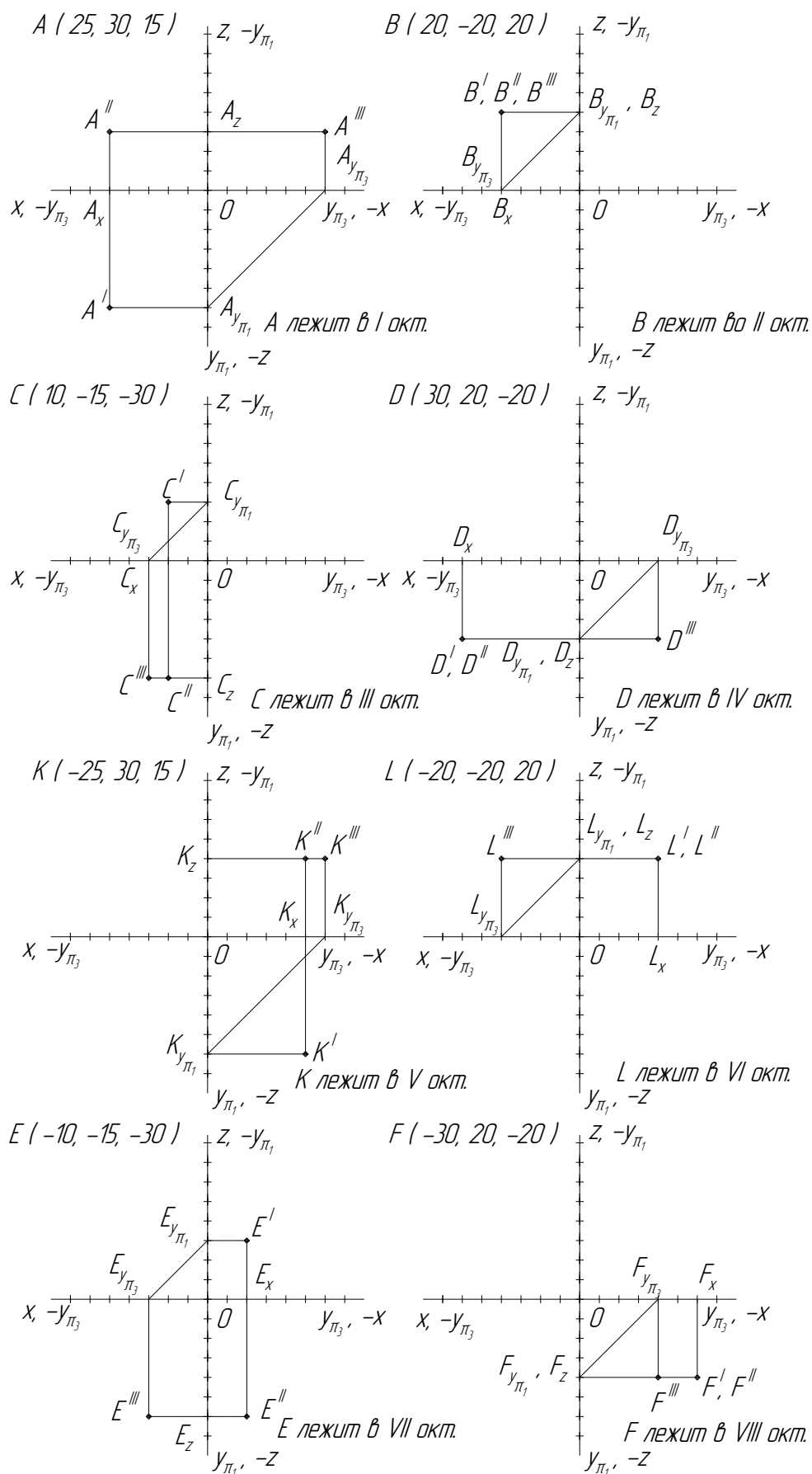


Рисунок 1 - Проекции точки общего положения на комплексном чертеже

1.2 Точка частного положения

Особенность точки частного положения состоит в том, что хотя бы одна из ее координат имеет нулевое значение. Алгоритм построения проекций точки частного положения – тот же, что и для точки общего положения, однако имеются некоторые особенности:

- 1.2.1 Действия те же, что и в пп. 1.1.1, 1.1.2. Координата с нулевым значением отмечается в начале координат.
- 1.2.2 Проекционные связи строятся так же, как описано в п. 1.1.3. Линия проекционной связи от координаты с нулевым значением проводится по одной из координатных осей в направлении второй, ненулевой координаты, определяющей положение проекции: сама искомая проекция точки в этом случае совпадает с указанной значимой координатой. Если же обе координаты проекции точки имеют нулевое значение, такая проекция лежит в начале координат. Примеры ортогональных проекций точек частного положения приводятся на рисунке 2.
- 1.2.3 Определить положение точки в пространстве. Если точка принадлежит плоскости проекций, то она лежит одновременно в двух октантах, разделенных этой плоскостью. Если она находится на оси, то можно говорить о принадлежности четырём октантам. Определить, в какой плоскости или на какой оси лежит точка, помогают нулевые координаты точки (таблица 2). Между какими октантами находится заданная точка частного положения, позволят определить знаки координат (см. таблицу 1).

Таблица 2 - Координаты точки частного положения

Координата	Точка принадлежит					
	плоскости			оси		
	π_1	π_2	π_3	Ox	Oy	Oz
x	$\pm/-$	$\pm/-$	0	$\pm/-$	0	0
y	$\pm/-$	0	$\pm/-$	0	$\pm/-$	0
z	0	$\pm/-$	$\pm/-$	0	0	$\pm/-$

2 Построение аксонометрических проекций точки, заданной аналитически

2.1 Точка общего положения

Алгоритм определения положения точки и ее проекций в аксонометрии выглядит следующим образом:

- 2.1.1 Отградуировать оси с учетом масштабного коэффициента и коэффициентов искажения по осям, свойственных для выбранной аксонометрической проекции (например, для прямоугольной изометрии коэффициенты искажения составляют $K_x=K_y=K_z=1,0$, тогда как в косоугольной фронтальной диметрии $K_x=K_z=1,0$, а $K_y=0,5$).
- 2.1.2 Отложить координаты точки по соответствующим осям. В отличие от комплексного чертежа, ось ординат в аксонометрии не «раздваивается», поэтому координата y откладывается единожды.
- 2.1.3 Установить проекционные связи между проекциями на оси по тем же правилам, что были изложены в п. 1.1.3 для ортогональных проекций. Следует тщательно соблюдать параллельность линий проекционной связи соответствующим координатным осям.

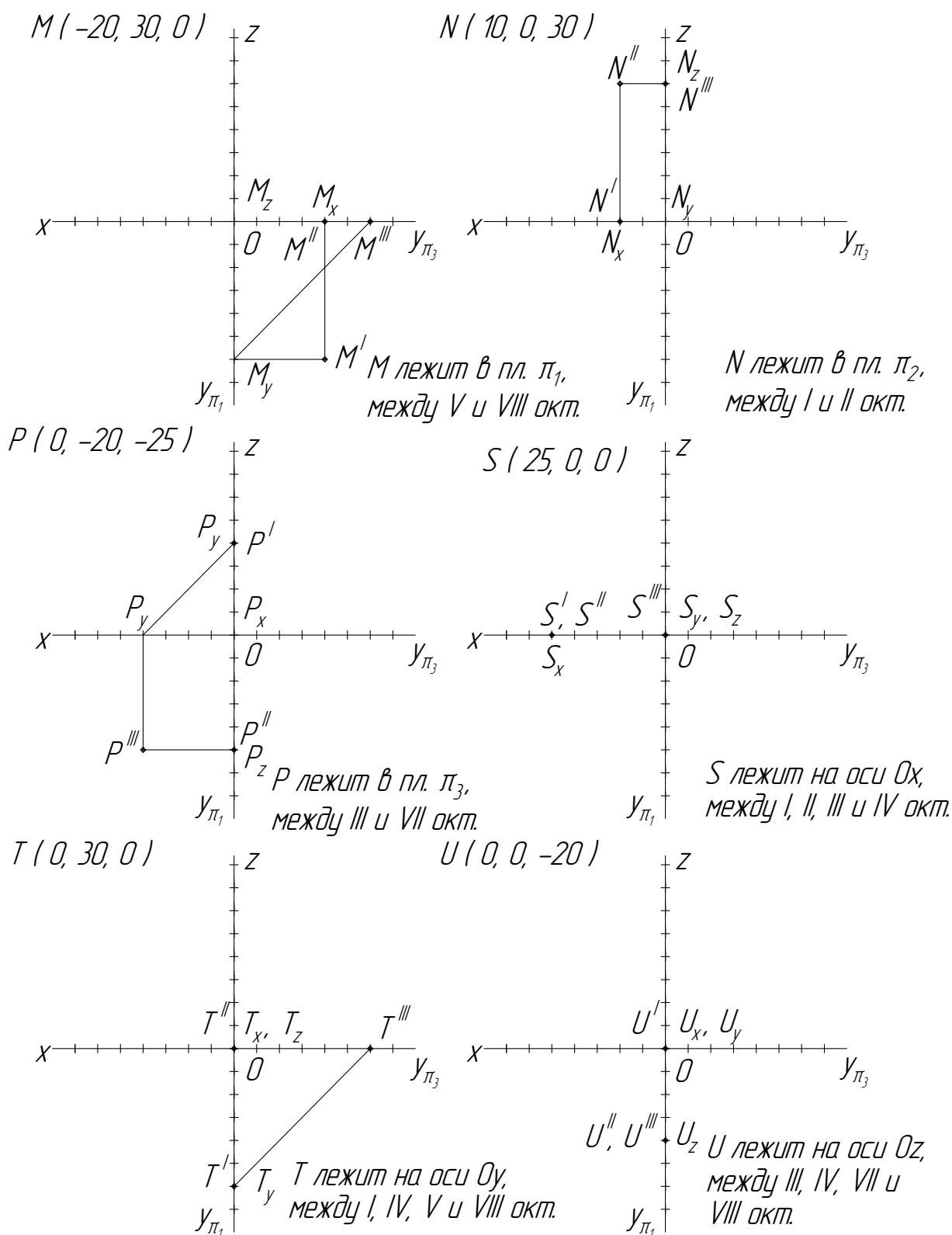


Рисунок 2 - Проекции точки частного положения на комплексном чертеже

- 2.1.4 Построить недостающие линии проекционной связи и замкнуть каркас параллелепипеда проекций. В результате этого вершина, лежащая на диагонали, выходящей из начала координат, окажется образом точки в аксонометрической проекции. Пример проекций точки общего положения в косоугольной фронтальной диметрии дан на рисунке 3, а.

2.1.5 Проверить соответствие положения точки на аксонометрической проекции утверждению о ее принадлежности октанту, сделанному по эпюру.

2.2 Точка частного положения

Аксонометрические проекции точки частного положения строятся по той же методике, что была описана для точки общего положения. При этом следует учитывать замечания, приведенные в п. 1.2.2, для построения линий проекционной связи от нулевых координат.

Для определения положения самой точки не придется проводить дополнительных линий проекционной связи, так как описанный параллелепипед в случае точки частного положения вырождается в одну грань (точка в плоскости) или всего в одно ребро (точка на оси). Аксонометрическая проекция точки, естественно, совпадает с одной из ее проекций, лежащих в том элементе системы координат, которому она принадлежит.

Примеры косоугольной фронтальной диметрии точек частного положения даны на рисунках 3, б и в.

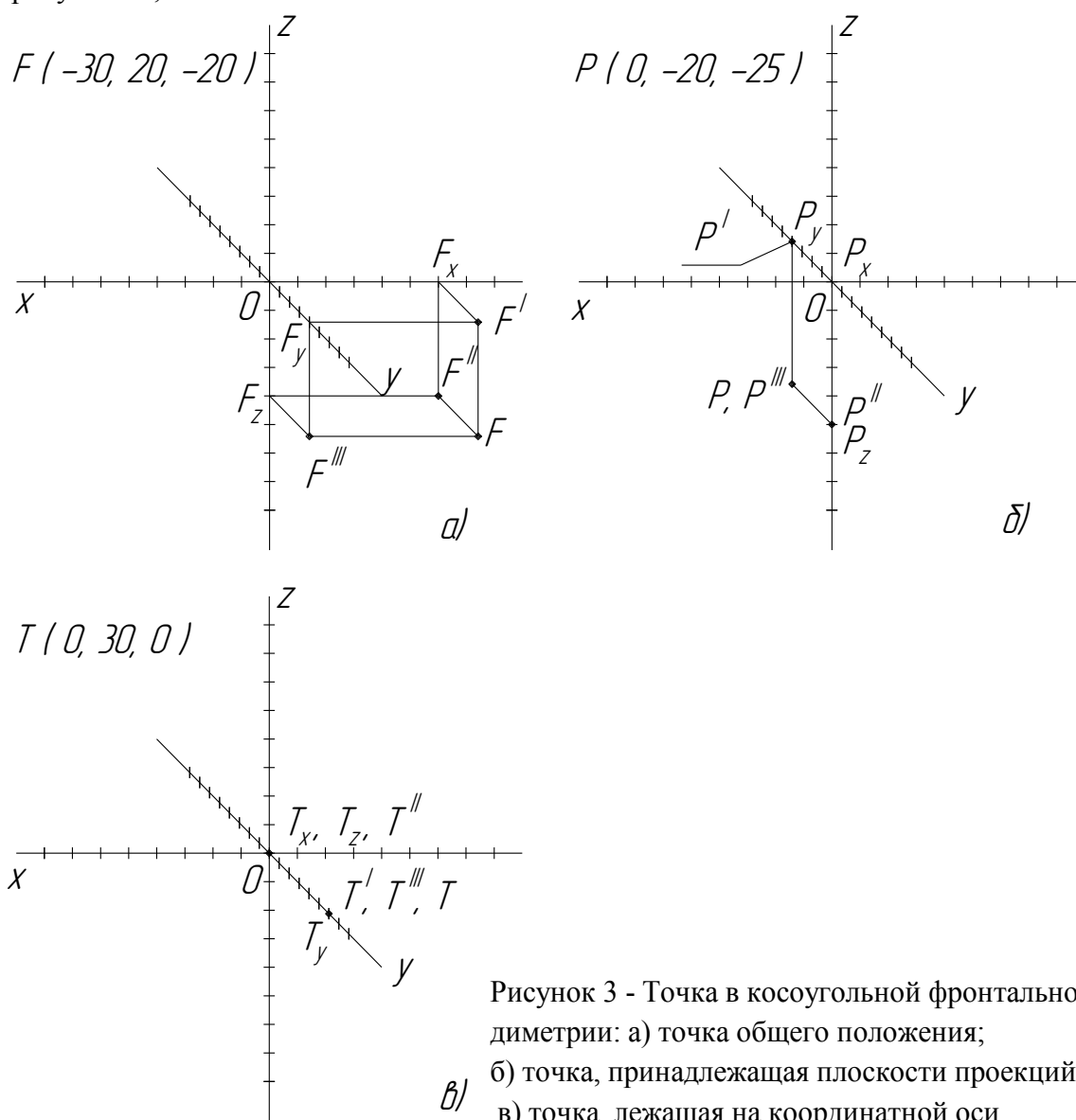


Рисунок 3 - Точка в косоугольной фронтальной диметрии: а) точка общего положения; б) точка, принадлежащая плоскости проекций; в) точка, лежащая на координатной оси

На рисунке 4 приведен пример оформления Задачи № 1 из альбомов обязательных заданий.

Перв. примен.																													
Справ. №																													
Подп. и дата																													
Инв. № докл.	<p>Точка A лежит в III октанте.</p> <p>Точка B лежит в плоскости π_2, между V и VI октантами.</p> <p>Точка C лежит на оси y между II, III, VI и VII октантами.</p>																												
	<p>По заданным координатам точек A (30, -15, -25), B (-20, 0, 10), C (0, -30, 0) построить их прямоугольные и косоугольные проекции. Дать шесть чертежей. Указать октанты, в которых находятся заданные точки.</p>																												
Взам. инв. №	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%;">Изм.</td> <td style="width: 25%;">Лист</td> <td style="width: 25%;">№ докум.</td> <td style="width: 25%;">Подп.</td> <td style="width: 25%;">Дата</td> </tr> <tr> <td>Разраб.</td> <td>Гнилицы</td> <td></td> <td></td> <td>01.05.14</td> </tr> <tr> <td>Пров.</td> <td>Лютарович</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Н.контр.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Утв.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>				Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Разраб.	Гнилицы			01.05.14	Пров.	Лютарович				Н.контр.					Утв.				
	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата																								
Разраб.	Гнилицы			01.05.14																									
Пров.	Лютарович																												
Н.контр.																													
Утв.																													
Подп. и дата	<div style="text-align: center; font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Задача №1</div> <div style="text-align: center; font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Вариант 31</div>																												
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Лит.</td> <td style="width: 33%;">Лист</td> <td style="width: 33%;">Листов</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center;">СПбГТИ(ТУ), гр. 300</td> </tr> </table>				Лит.	Лист	Листов			1	СПбГТИ(ТУ), гр. 300																		
Лит.	Лист	Листов																											
		1																											
СПбГТИ(ТУ), гр. 300																													
Инв. № подл.	<div style="text-align: center;">Копировал</div>																												
	<div style="text-align: center;">Формат A4</div>																												

Рисунок 4 - Пример оформления задания, в решении которого реализуются Алгоритмы 1 и 2

3 Построение проекций точки, заданной графическим способом

3.1 В ортогональных проекциях

Положение точки в пространстве может быть задано графическим способом, путем указания двух ее проекций. В ходе решения остается определить положение третьей проекции точки и ее принадлежность к какой-либо части пространства, координатной оси или плоскости проекций.

- 3.1.1 По заданным проекциям обозначить три проекции точки на координатные оси (см. п. 1.1.3). Если какая-либо из проекций точки на плоскости проекций лежит на одной из координатных осей, следовательно, задана точка частного положения, и при определении ее координат следует руководствоваться замечаниями, высказанными в п. 1.2.2.
- 3.1.2 Выполнить перенос координаты y так, как это было описано в п. 1.1.2.
- 3.1.3 Построить недостающую проекцию точки так, как это было описано в пп. 1.1.3 и 1.2.2.
- 3.1.4 Описать принадлежность точки, согласно указанному в пп. 1.1.4 и 1.2.3.

3.2 В аксонометрических проекциях

Точку задают графическим способом, как правило, на комплексном чертеже. Поэтому аксонометрия точки в этом случае строится уже на основании имеющихся трех координат. Алгоритмы построения практически не отличаются от описанных в параграфах 2.1 и 2.2. В изометрических проекциях при переносе координат с эпюра не требуется никаких дополнительных перестроений, во фронтальных диметрических проекциях нужно учесть коэффициент искажения по оси ординат.

На рисунке 5 приведена прямоугольная изометрия тех же точек, проекции которых были построены на рисунке 3 в косоугольной фронтальной диметрии.

Рисунок 6 иллюстрирует оформление Задачи № 2 из альбома заданий.

Пусть заданы фронтальная и профильная проекции точки A (верхний эпюр на рисунке 6). Проекция A'' и A''' связаны общей координатой z (ставим точку A_z), кроме того, A'' задает координату x (A_x), а A''' – координату y (A_y) на оси Oy профильной плоскости проекций. Переносим эту координату на ось Oy горизонтальной плоскости проекций (перенос между отрицательными ветвями оси производится в верхней левой четверти системы координат). Проводим отрезки проекционных связей от осей Ox и Oy горизонтальной плоскости проекций. Их пересечение определяет положение горизонтальной проекции A_1 . Все координаты точки A отрицательны, это характерно для VII октанта.

Для построения изометрической проекции точки A переносим все координаты без искажений на оси системы координат прямоугольной изометрии. Строим параллелепипед проекционных связей. Построение позволяет получить образ точки A , принадлежащей VII октанту.

4 Построение точки, симметричной заданной относительно одного из элементов системы координат

4.1 В ортогональных проекциях

Симметричные построения находят свое приложение в широком круге задач: от инженерной графики до вопросов молекулярных структур. Приводимый далее Алгоритм можно использовать для построения симметричных образов относительно точек, осей и плоскостей произвольного положения, после предварительного переноса начала координат в более удобную точку.

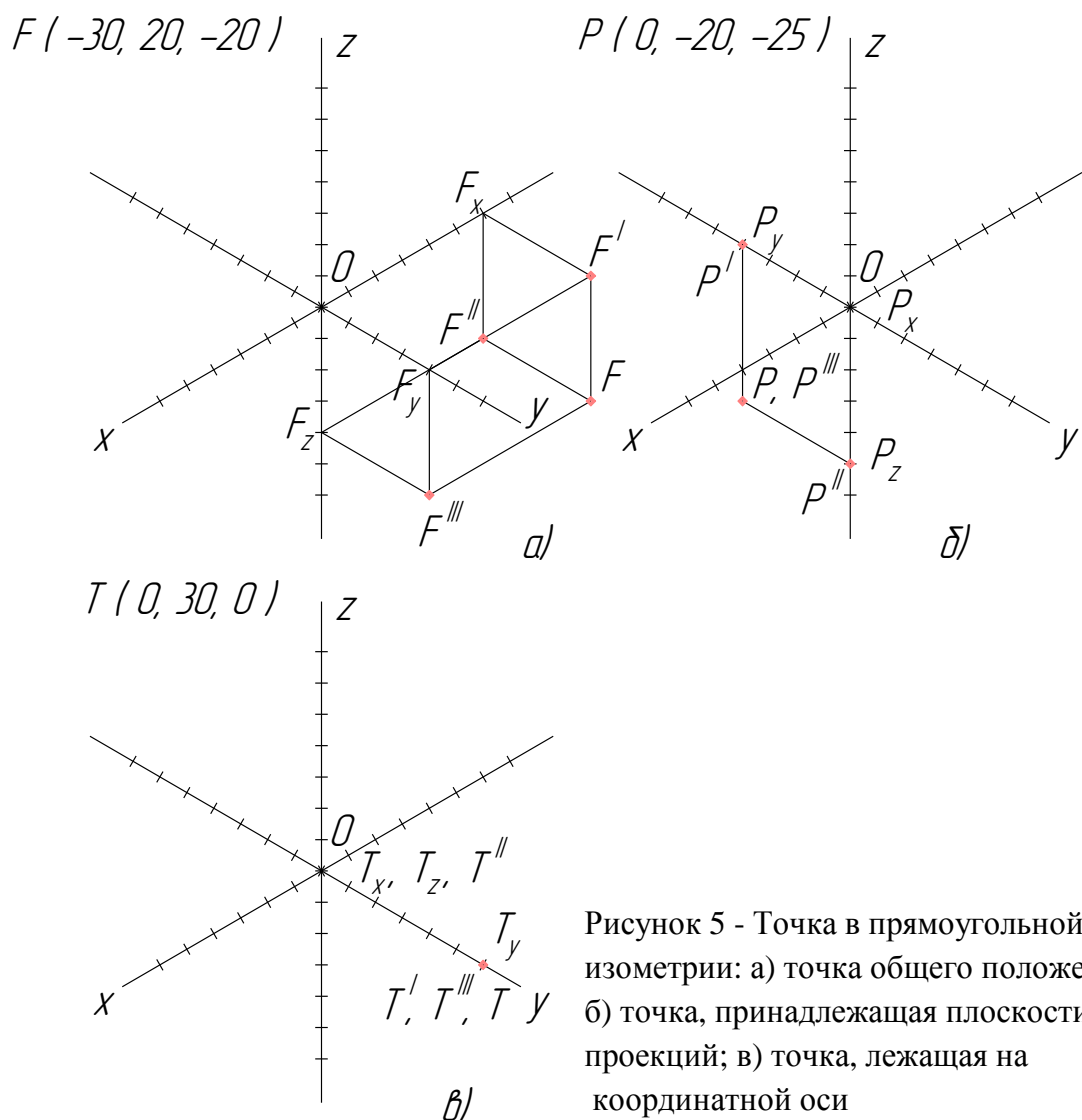


Рисунок 5 - Точка в прямоугольной изометрии: а) точка общего положения; б) точка, принадлежащая плоскости проекций; в) точка, лежащая на координатной оси

Определение положения проекций точки, симметричной заданной относительно одного из элементов системы координат, может быть выполнено следующим образом:

- 4.1.1 Построить три проекции исходной точки, в зависимости от способа ее задания (см. Алгоритмы 1, 3.1).
- 4.1.2 Отложить координаты симметричной точки, учитывая то, что при симметрии относительно элементов координатной системы, абсолютное значение координат не изменяется, а могут измениться лишь их знаки. При этой операции можно воспользоваться информацией, приведенной в таблице 3. Обозначение «+» в ячейках таблицы означает сохранение знака координаты, а «-» - его изменение на противоположный.

Таблица 3 - Изменение знаков координат точки при симметрии относительно элементов координатной системы

Изменение знака координаты	Симметрия относительно						
	плоскости			оси			начала координат
	π_1	π_2	π_3	Ox	Oy	Oz	
x	+	+	-	+	-	-	-
y	+	-	+	-	+	-	-
z	-	+	+	-	-	+	-

Перв. примен.				
Справ. №				
Взам. инв. №				
Подп. и дата	<p>По двум заданным проекциям точек A, B, и C построить их третьи проекции. Построить изометрические проекции проекции точек. Дать шесть чертежей. Указать октанты, в которых находятся точки.</p>			
Инв. № подл.	Изм./Лист	№ докум.	Подп.	Дата
	Разраб.	Гнилуша		01.05.14
	Пров.	Лютарович		
	Н.контр.			
	Утв.			
<p align="center">Задача № 2 Вариант 31</p>				
Лит.			Лист	Листов
				1
СПбГТИ(ТУ), группа ХХХ				
Формат			А4	

Рисунок 6 - Пример оформления задания, решенного по Алгоритму 3

4.1.3 Построить проекции симметричной точки так, как это было описано в пп. 1.1.3 и 1.2.2.

4.1.4 Описать принадлежность точки октанту, согласно указаниям по пп. 1.1.4 и 1.2.3.

На рисунке 7 проиллюстрировано построение точек, симметричных одной и той же точке A относительно различных элементов системы координат.

Пусть задана точка A своими горизонтальной и фронтальной проекциями. Горизонтальная проекция A' определяет положение A_x и A_y , а фронтальная A'' позволяет найти и A_z . Перенесем проекцию A_y на ось Oy профильной плоскости проекций и, построив проекционные связи от нее и от A_z , найдем профильную проекцию точки A''' . Точка A принадлежит I октанту.

Если необходимо построить точку B , симметричную A относительно плоскости π_3 (рисунок 7, а), то изменяем знак только одной из ее координат, не содержащейся в плоскости симметрии, т.е. $x_B = -x_A$. Поэтому B_x следует отложить в сторону, противоположную положению A_x . Две оставшиеся координаты остаются неизменными, как следствие: $B_y = A_y$ и $B_z = A_z$. Полученные таким образом проекции точки на оси позволяют построить проекционные связи и найти проекции точки B , лежащей в V октанте.

У точки C , симметричной A относительно оси Oz (рисунок 7, б), меняется знак двух координат, не принадлежащих оси симметрии: $x_C = -x_A$ и $y_C = -y_A$. Вновь полученные координаты и $z_C = z_A$ дают возможность построить проекции точки C , принадлежащей VI октанту.

Для точки D , симметричной A относительно точки O (рисунок 7, в), следует изменить знак на противоположный у всех координат: $x_D = -x_A$, $y_D = -y_A$ и $z_D = -z_A$. Построенная на основании этих координат точка будет лежать в VII октанте.

4.2 В аксонометрии

4.2.1 Аксонометрическая проекция исходной точки строится на основании Алгоритма 2 или 3.2, в зависимости от способа задания точки.

4.2.2 Если симметричная точка была предварительно построена на комплексном чертеже, то ее аксонометрическая проекция может быть построена с помощью уже полученных трех координат по Алгоритму 2 или 3.2.

Координаты симметричной точки могут быть отложены заново, непосредственно в аксонометрических осях, согласно п. 4.1.2, после чего проекции и образ точки строятся в соответствии с Алгоритмом 2 или 3.2.

4.2.3 Описать принадлежность точки, согласно указаниям пп. 1.1.4 и 1.2.3.

На рисунке 8 проиллюстрировано построение точек в прямоугольной изометрии, симметричных одной и той же точке A относительно различных элементов системы координат. Показаны также линии симметричных построений.

4.2.4 Пусть заданы координаты точки, лежащей в I октанте. Точка C , симметричная A относительно оси Oz (рисунок 8, б), может быть получена после нанесения соответствующих координат: $x_C = -x_A$, $y_C = -y_A$ и $z_C = z_A$, – т.е. C_x и C_y откладываются в от O в сторону, противоположную A_x и A_y , а C_z совпадает с A_z .

4.2.5 Может быть избран альтернативный путь построения аксонометрической проекции точки: от A до проекции на ось симметрии A_z прочерчивается связь и на ее продолжении отмечается равный отрезок. В результате получаем образ точки C . Построения завершаем прочерчиванием отрезков проекционной связи до плоскостей проекций и координатных осей, равных по величине соответствующим отрезкам у исходной точки.

4.2.6 Аналогичным образом могут быть получены аксонометрические проекции точек B и D , симметричных относительно плоскости π_3 и точки O (рисунок 8, а и в, соответственно). Следует отметить, что при альтернативных построениях точки B откладывают симметричную связь, равную отрезку AA''' , а для точки D – равную отрезку AO .

Рисунок 9 иллюстрирует оформление Задачи № 3 из альбома домашних заданий.

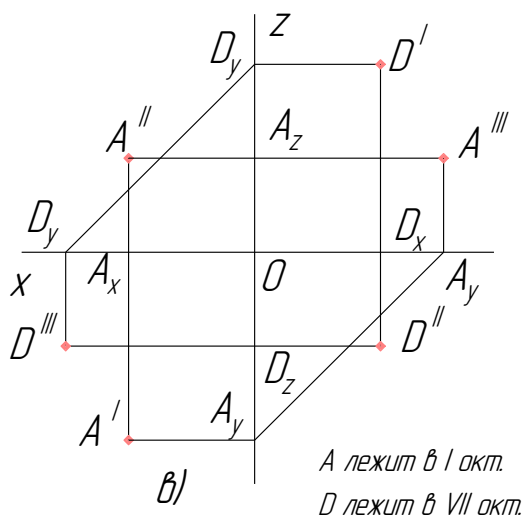
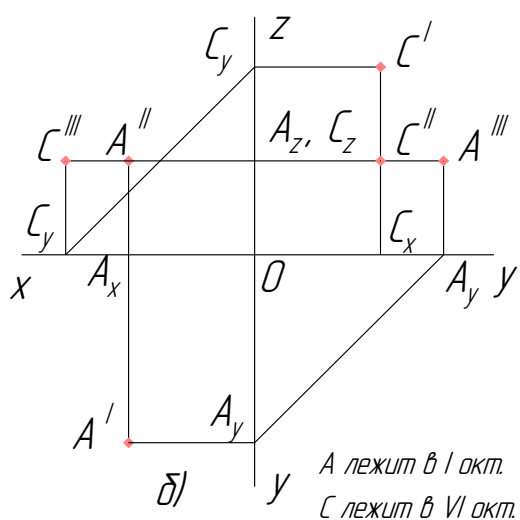
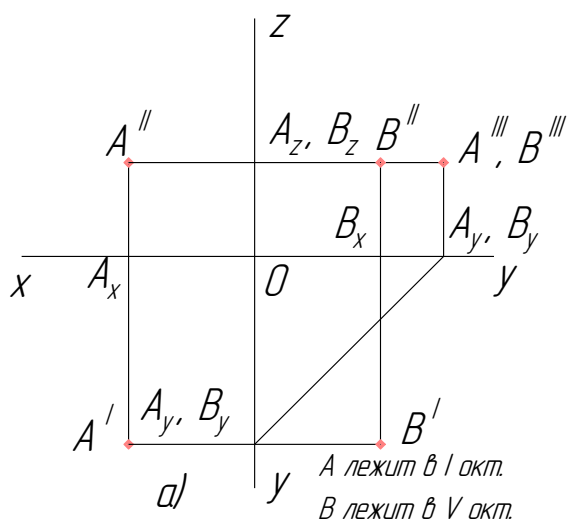


Рисунок 7 - Проекции в ортогональной системе координат точки общего положения и точек, симметричных ей относительно: а) профильной плоскости проекций; б) оси аппликат; в) начала координат.

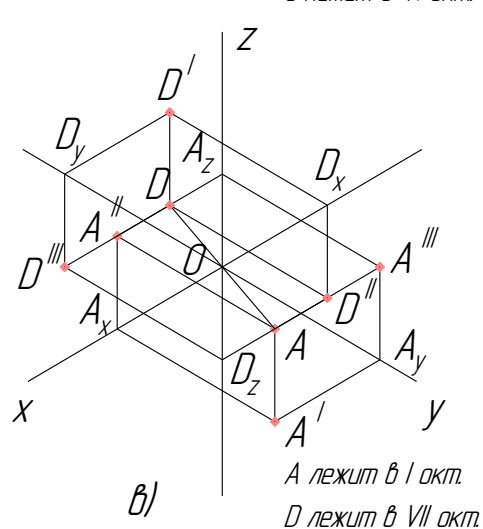
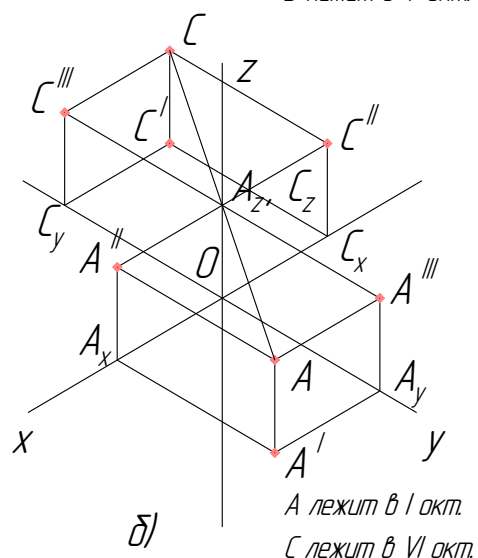
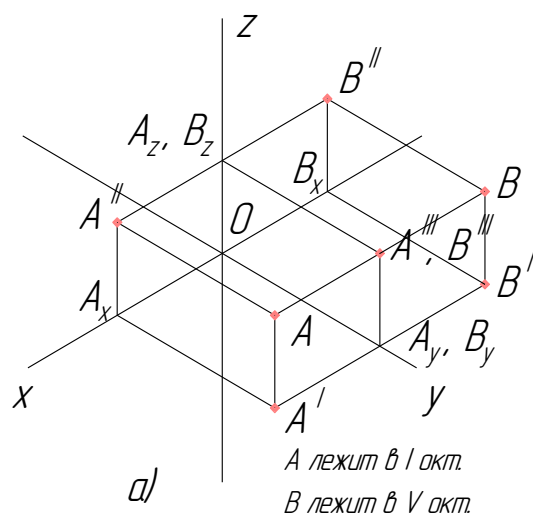


Рисунок 8 - Проекции в прямоугольной изометрической системе координат точки общего положения и точек, симметричных ей относительно: а) профильной плоскости проекций; б) оси аппликат; в) начала координат.

Перв. примен.				
Справ. №				
Подп. и дата				
Инв. № дубл.				
Взам. инв. №				
Подп. и дата				
Инв. № подл.				

Точка А расположена в V октанте. Точка К расположена во II октанте.

Построить три проекции точки К, симметричной данной точке А относительно оси Oz. Построить недостающую проекцию точки А и указать октанты, в которых находятся точки А и К. Задачу решить в прямоугольной и диметрической проекциях. Дать два чертежа.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
Разраб.	Гнилуша			02.05.14
Проб.	Лютарович			
Н.контр.				
Утв.				

Задача № 3

Вариант 31

Лит.	Лист	Листов
		1

Копировал

СПбГТИ(ТУ),
группа 300

Формат А4

Рисунок 9 - Пример оформления задания, решенного по Алгоритму 4

5 Вращение точки относительно координатной оси

Данный Алгоритм не используется напрямую при решении обязательных заданий курса начертательной геометрии, однако является компонентом некоторых Алгоритмов для решения метрических задач с использованием метода вращения. Также он может служить частью решения задач на построение элементов, симметричных заданным, относительно произвольно расположенных в пространстве осей и плоскостей.

Для работы в ортогональных проекциях предлагается следующий порядок действий:

5. 1 Построить три проекции исходной точки, в соответствии со способом ее задания (см. Алгоритм 1 или 3.1).
5. 2 Вычертить траекторию перемещения проекции точки в той плоскости проекций, к которой перпендикулярна координатная ось, служащая осью вращения (см. таблицу 4).
Траекторией перемещения является дуга окружности с центром в начале координат и радиусом, равным расстоянию от точки O до проекции исходной точки на данную плоскость.

Таблица 4 - Характер изменения координат точки при ее вращении относительно координатной оси

Вращение относительно оси	Траектория – дуга окружности в плоскости	Изменяющиеся координаты	Неизменная координата
Ox	π_3	y, z	x
Oy	π_2	x, z	y
Oz	π_1	x, y	z

5. 3 Отметить на траектории вращения заданный угол и определить новое положение проекции точки в этой плоскости. Данная проекция точки в ее новом положении позволит определить новые значения двух изменяющихся координат (см. таблицу 4) и положение проекций на соответствующие оси.
5. 4 Обозначить проекцию точки на ось вращения, координата по которой не меняется. (В связи с этим траектория перемещения точки в двух остальных плоскостях проекций представляет собой прямую линию, перпендикулярную оси, вокруг которой происходит вращение).
5. 5 После того как получены три проекции точки на оси в ее новом положении, построить ее проекции на плоскости проекций по Алгоритму 1 или 3.1.
5. 6 Описать принадлежность точки, согласно указанному в пп. 1.1.4 и 1.2.3.

Рисунок 10 иллюстрирует решение следующей задачи: построить точку K , полученную при вращении точки A , заданной графическим способом, на угол $+90^\circ$ (против часовой стрелки) относительно оси Oz .

Так как ось Oz перпендикулярна плоскости π_1 , ее траектория будет проецироваться в истинную величину именно в этой плоскости. Вычертим дугу окружности с центром в точке O и радиусом, равным OA' , по которой будет перемещаться горизонтальная проекция точки A' . Заданный угол, отложенный на траектории, определит новое положение горизонтальной проекции точки – K' . Эта проекция определяет положение K_x и K_y . Третья координата неизменна, и K_z совпадает с A_z . Найденные проекции точки K на оси позволяют получить K'' и K''' .

Можно отметить, что вращение точки на угол 180° относительно некоторой оси эквивалентно операции осевой симметрии относительно той же оси.

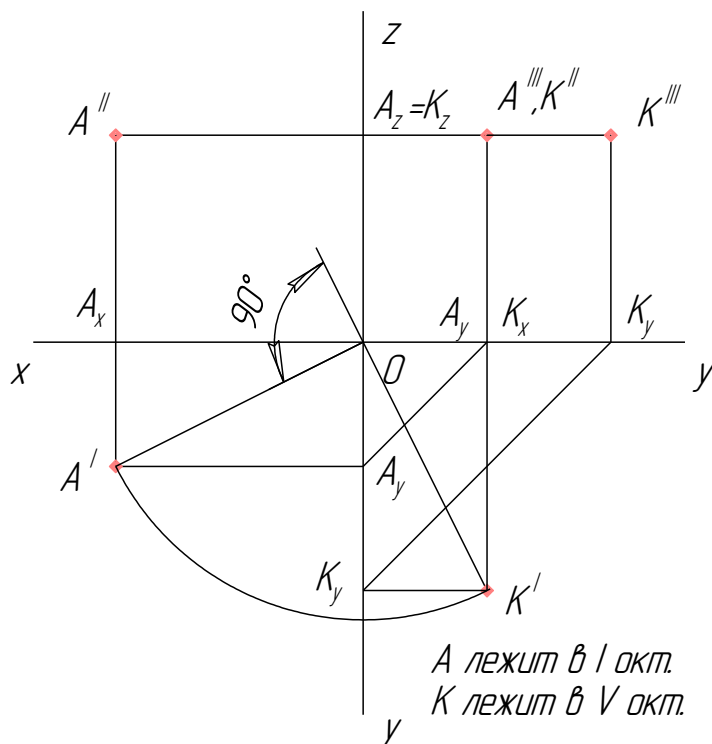


Рисунок 10 - Пример решения задачи по Алгоритму 5

6 Построение проекций отрезка прямой линии

Отрезок прямой однозначно задается двумя ограничивающими его точками. Поэтому построение проекций прямой линии сводится к прочерчиванию отрезков между одноименными проекциями ограничивающих точек.

6.1 В ортогональных проекциях

- 6.1.1 Построить проекции заданных точек отрезка, действуя в зависимости от способа их задания (см. Алгоритмы 1, 3.1).
- 6.1.2 Проекции точек, лежащие в одной и той же плоскости проекций, соединить отрезком основной сплошной линии.

Построение проекций отрезка прямой линии в ортогональных проекциях показано на рисунке 11.

Прямая AB задана координатами конечных точек (рисунок 11, а). Отложим на осях координаты точки A и найдем три ее проекции: A' , A'' и A''' . Так же получим фронтальную, горизонтальную и профильную проекцию точки B – B' , B'' и B''' . Соединим одноименные проекции точек и получим проекции отрезка прямой: горизонтальную $A'B''$, фронтальную $A'B'$ и профильную $A'''B'''$.

На рисунке 11, б прямая CD задана горизонтальной и фронтальной проекциями отрезка: $C'D'$ и $C''D''$. Находим профильную проекцию точки C . Горизонтальная проекция C' определяет положение C_x и C_y , фронтальная C'' дает еще и C_z . Переносим C_y на ось ординат профильной плоскости. Построив проекционные связи от нее и от C_z , получаем C''' . Аналогично находим D''' . Соединив C''' и D''' , получаем профильную проекцию отрезка прямой CD .

6.2 В аксонометрии

- 6.2.1 Построить проекции заданных точек отрезка, действуя в зависимости от способа их задания (см. Алгоритмы 2, 3.2).
- 6.2.2 Одноименные проекции и сами крайние точки отрезка прямой соединить отрезками основной сплошной линии.

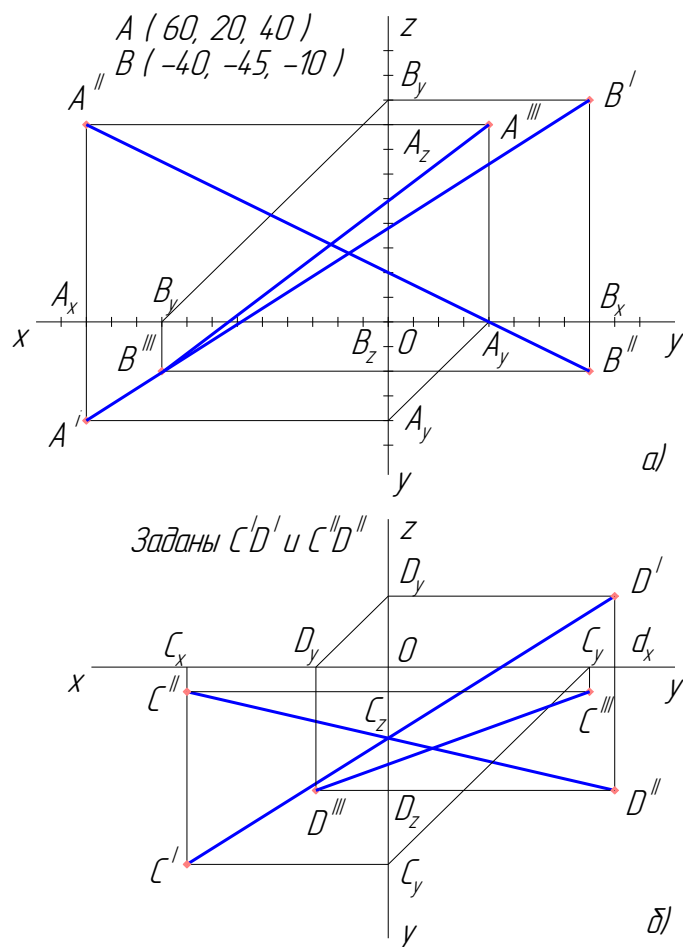


Рисунок 11 - Отрезок прямой линии на комплексном чертеже: а) заданный аналитически; б) заданный графическим способом

На рисунке 12 показаны различные аксонометрические проекции отрезков прямых, эпюры которых изображены на рисунке 11.

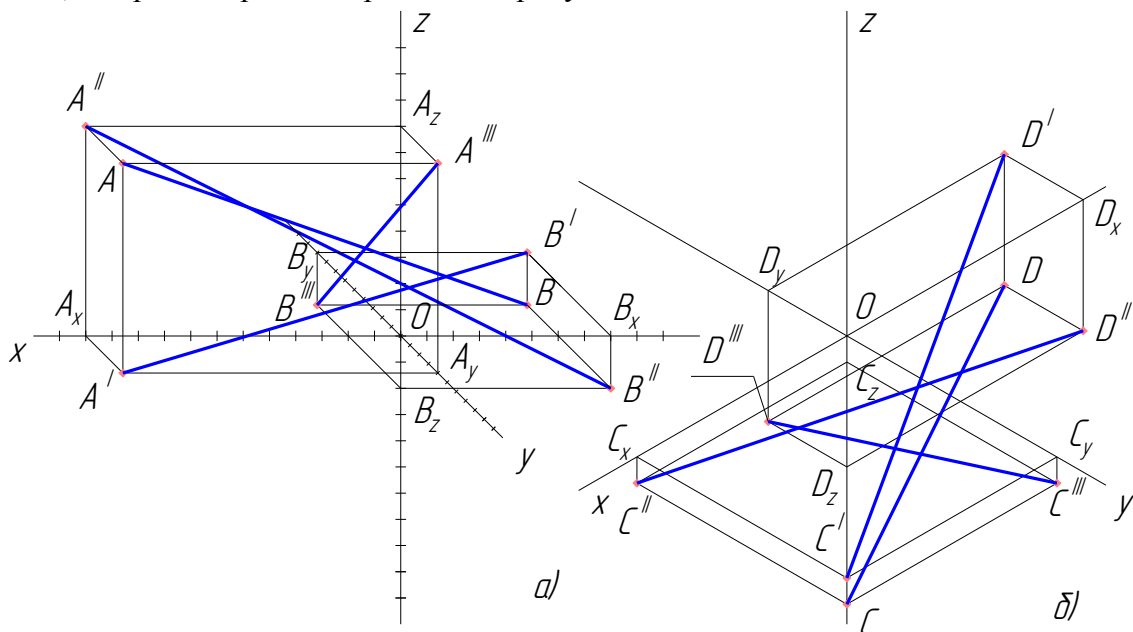


Рисунок 12 - Отрезок прямой линии в аксонометрических проекциях: а) в косоугольной фронтальной диметрии; б) в прямоугольной изометрии

7 Определение истинной длины отрезка прямой

Этот Алгоритм – первый в группе методов, применяющихся при решении так называемых метрических задач. Выяснение истинной длины отрезка прямой может входить в состав алгоритмов решения более сложных, комплексных задач.

7.1 В ортогональных проекциях

7.1.1 Метод трапеций

- 7.1.1.1 Построить проекции отрезка прямой (см. Алгоритм 6.1). Для выяснения истинной длины достаточно всего двух проекций отрезка, как правило, фронтальной и горизонтальной, хотя построение по этому методу может быть выполнено на любой из проекций, в том числе и профильной.
- 7.1.1.2 Выбрать в качестве базы для построений одну из проекций. Определить, какая координата не участвовала в построении данной проекции отрезка. Такую координату принято называть «недостающей» (см. Таблицу 5).

Таблица 5 - «Недостающие координаты» при построении истинной длины отрезка прямой по методам трапеций и треугольника

Базовая проекция	<i>горизонтальная</i>	<i>фронтальная</i>	<i>профильная</i>
«Недостающая координата»	z	y	x

- 7.1.1.3 В одной из крайних точек базовой проекции восстановить к ней перпендикуляр. На нем от крайней точки отложить расстояние, равное «недостающей координате» данной точки.
- 7.1.1.4 Восстановить перпендикуляр во второй крайней точке базовой проекции. Перпендикуляр откладывать в ту же сторону, если знаки «недостающих координат» крайних точек отрезка одинаковы, или в противоположную, если знаки различны. На луче отложить расстояние, равное «недостающей координате» данной крайней точки.
- 7.1.1.5 Соединить точки, полученные при построениях по пп. 7.1.1.3 и 7.1.1.4. Вычерченный отрезок и является искомой истинной длиной.

Рисунок 13 иллюстрирует определение истинной длины по методу трапеций для тех же отрезков, что были вычерчены на Рис. 11.

Выберем в качестве базовой фронтальную проекцию отрезка прямой **AB** (рисунок 13, а). На построенном из точки **A** в произвольном направлении перпендикуляре к **A'B'** откладываем «недостающую координату» - y_A . Этот отрезок определяет положение точки **A***. Так как y_A и y_B имеют различные знаки, перпендикуляр к фронтальной проекции отрезка **AB** в точке **B'** строим в противоположную сторону. На нем откладываем расстояние, равное y_B . Получаем **B***. Соединяем **A*** и **B***: это – истинная длина отрезка **AB**.

Истинная длина отрезка **CD** (рисунок 13, б) определяется тем же методом. Имеются два отличия. Первое: базовой выбрана горизонтальная проекция (**C'D'**), поэтому на перпендикулярах откладываются координаты z_C и z_D . Второе: координаты z_C и z_D имеют один знак, поэтому они отложены в одну и ту же сторону.

7.1.2 Метод треугольника

- 7.1.2.1 Построить проекции отрезка прямой; выбрать базу для построений перпендикуляра (пп. 7.1.1.1 и 7.1.1.2).

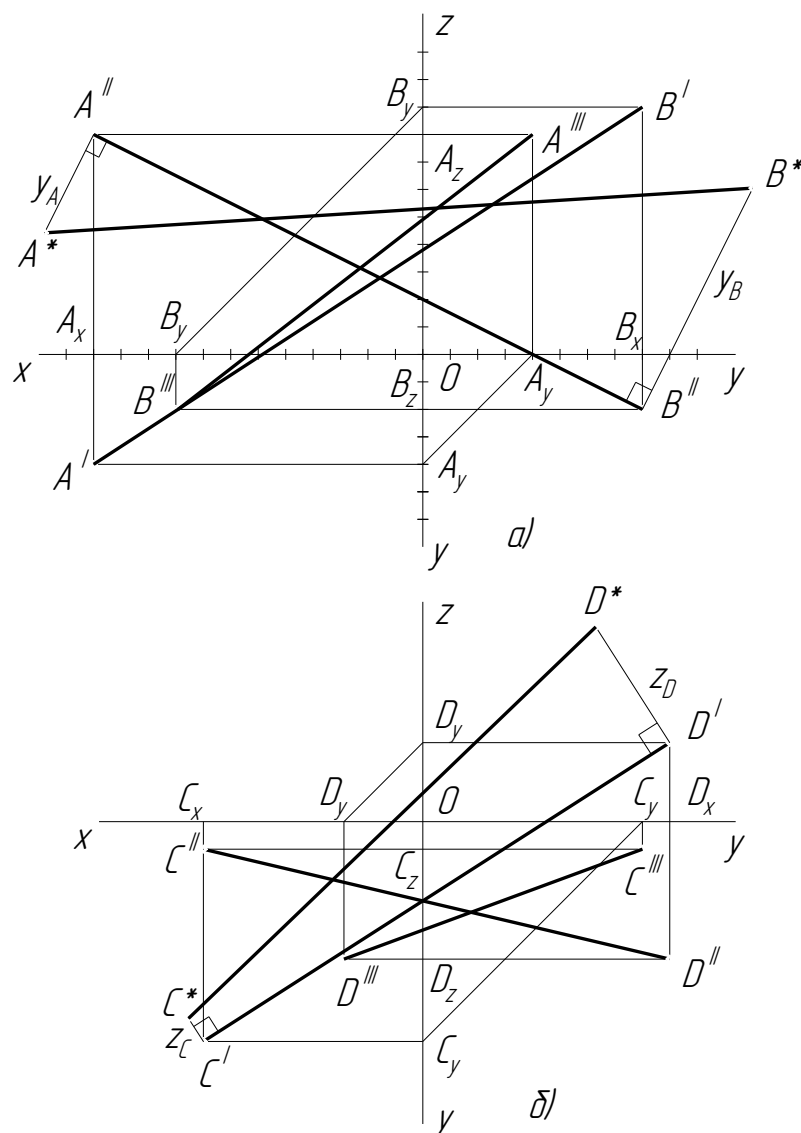


Рисунок 13 - Определение истинной длины отрезка прямой на комплексном чертеже методом трапеций: а) на основании фронтальной проекции; б) на основании горизонтальной проекции

- 7.1.2.2 В одной из крайних точек базовой проекции восстановить в произвольном направлении перпендикуляр. На нем отложить расстояние, равное алгебраической разности «недостающих координат» точек, ограничивающих отрезок. Выражение «алгебраическая разность» означает учет знаков координат: если координаты имеют одинаковый знак, то выполняется вычитание значений, если же разный, их необходимо сложить.¹
- 7.1.2.3 Полученную в результате описанного построения точку соединить с другой крайней точкой отрезка прямой, не затронутой построениями. Построенный отрезок будет соответствовать истинной длине.

Рисунок 14 иллюстрирует определение истинной длины по методу треугольника для тех же отрезков, что были представлены на рисунке 11.

¹ Результат алгебраической разности может быть получен построением, если отложить на построенном перпендикуляре расстояние, равное «недостающей координате» одной из крайних точек отрезка, а потом из полученной точки отложить вторую «недостающую координату»: в том же направлении - при различных знаках координат концов отрезка или в противоположном при их совпадении.

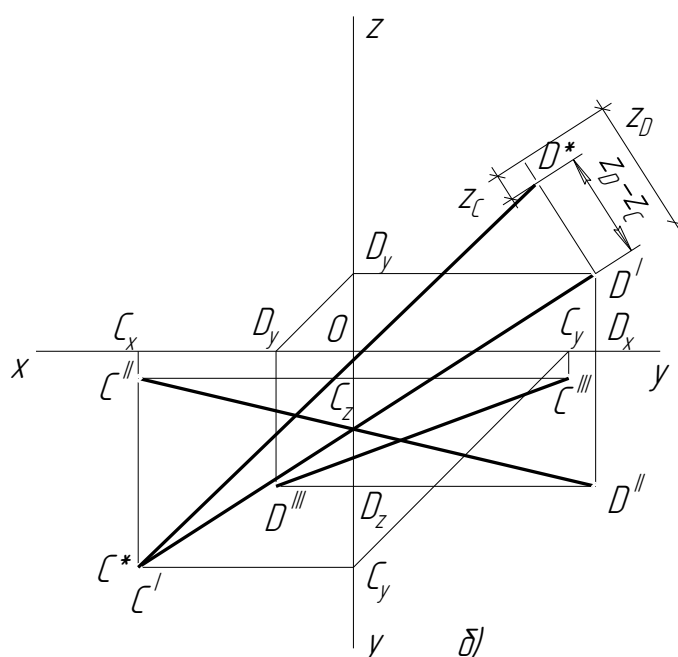
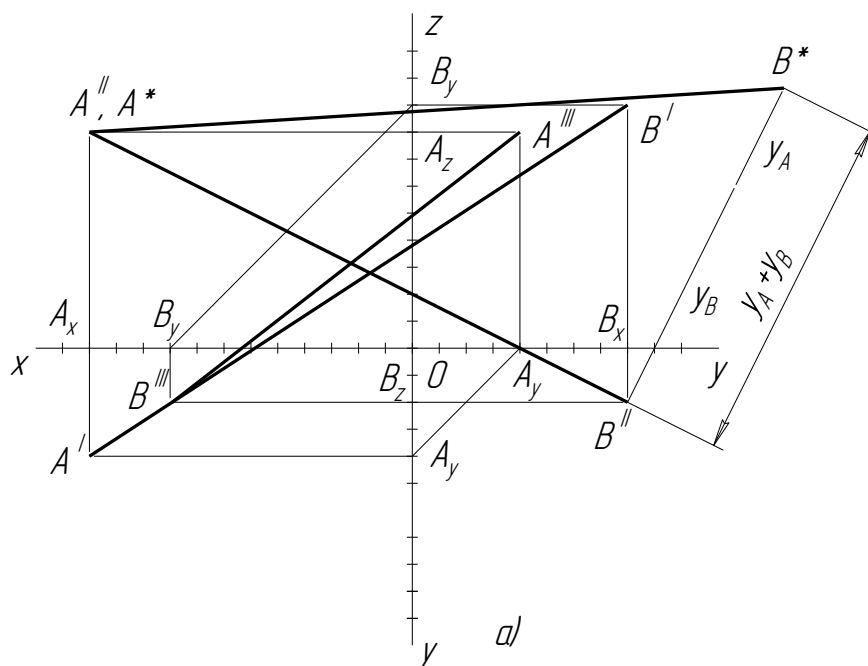


Рисунок 14 - Определение истинной длины отрезка прямой на комплексном чертеже методом треугольника: а) на основании фронтальной проекции; б) на основании горизонтальной проекции

Истинная длина отрезка AB (рисунок 14, а) строится на его фронтальной проекции $A''B''$. На перпендикуляр, восстановленный в точке B'' , откладываем алгебраическую разность координат y концов отрезка: так как знаки их противоположны, это $-|y_A| + |y_B|$. Получаем точку B^* . Точка A^* совпадает с A_2 . Соединяем A^* и B^* : это – истинная длина отрезка AB .

Истинная длина отрезка CD (рисунок 14, б) построена на его горизонтальной проекции $C'D'$. Перпендикуляр построен в точке D' . На нем отложена z_D . К концу этого отрезка в противоположном направлении отложена z_C . Таким способом получена разность координат ($z_D - z_C$), в результате получена точка D^* . C^* находится в точке C' . Соединив C^* и D^* , получим истинную длину отрезка CD .

7.1.3 Прямая частного положения

Поиск истинной длины отрезка прямой с помощью дополнительных построений имеет смысл в том случае, если прямая наклонена ко всем плоскостям проекций, т.е. занимает общее положение. У прямой, параллельной какой-либо плоскости проекций (прямой частного положения), отрезок прямой проецируется в истинную длину на ту плоскость проекций, которой прямая параллельна (см. таблицу 6 и рисунок 15).

Таблица 6 - Истинная длина отрезка прямой частного положения

Прямая параллельна плоскости	π_1	π_2	π_3
Наименование прямой	горизонтальная	фронтальная	профильная
Истинная длина отрезка прямой равна	горизонтальной проекции	фронтальной проекции	профильной проекции

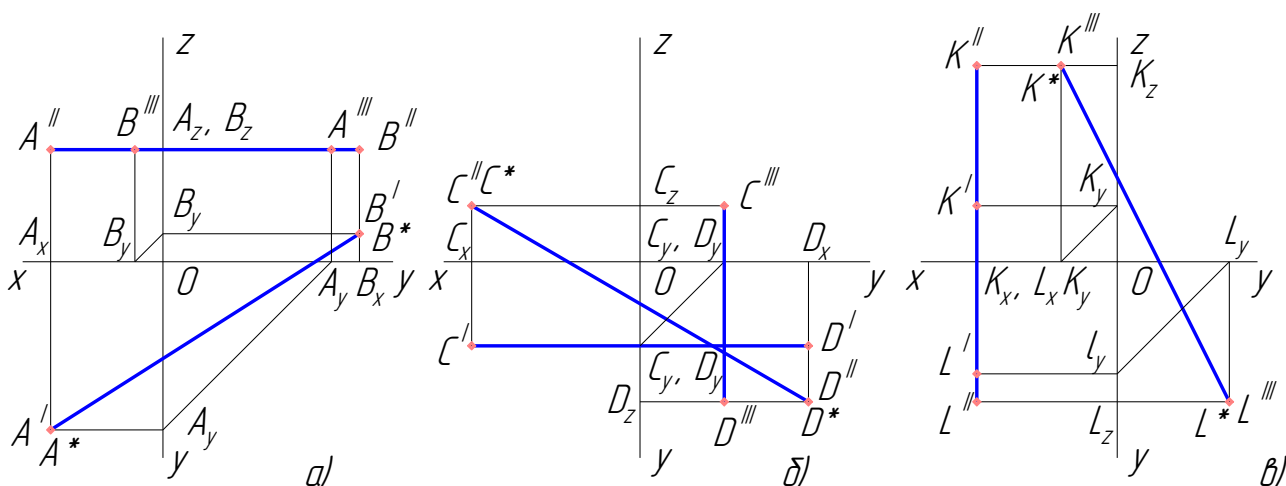


Рисунок 15 - Примеры отрезков прямых частного положения: а) горизонтальной; б) фронтальной; в) профильной

7.1.4 Определение истинной длины отрезка методом вращения

Суть этого Алгоритма состоит в повороте прямой из общего положения в частное относительно оси, перпендикулярной одной из плоскостей проекций, проходящей через одну из крайних точек отрезка прямой. После такого преобразования истинная длина может быть получена на одной из проекций прямой в ее новом положении (см. параграф 7.1.3).

Так как одна из точек отрезка находится на оси вращения, то ее положение остается неизменным. Вторая же точка, ограничивающая отрезок прямой, движется по дуге окружности с радиусом, равным расстоянию от этой точки до оси вращения. Таким образом, действия при решении окажутся аналогичными предпринимаемым при вращении точки относительно оси координат (см. Алгоритм 5), параллельной выбранной оси вращения.

7.1.4.1 Построить проекции отрезка прямой (см. Алгоритм 6.1). Для выяснения истинной длины достаточно всего двух проекций отрезка, как правило, фронтальной и горизонтальной. (Построение по этому методу может быть выполнено и на профильной проекции. Тем не менее, ею стараются не

пользоваться, чтобы не усложнять решение необходимостью переноса координаты y при новом положении отрезка прямой.)

- 7.1.4.2 Выбрать положение оси вращения: она может проходить через один из концов отрезка и должна быть перпендикулярна какой-либо плоскости проекций.
- 7.1.4.3 Построить траекторию перемещения второй крайней точки отрезка в плоскости проекций, к которой ось вращения перпендикулярна. Это – дуга окружности с радиусом, равным проекции отрезка прямой на данную плоскость проекций. В результате вращения проекция переходит в положение, параллельное оси Ox . Действия при построении можно уточнить по схеме, изложенной в таблице 7.

Таблица 7 - Элементы построений при определении истинной длины отрезка прямой методом вращения

Ось вращения перпендикулярна плоскости	π_1	π_2
Ось вращения проецируется в точку, совпадающую с проекцией выбранной крайней точки...	...горизонтальной проекции отрезка	...фронтальной проекции отрезка
Ось вращения параллельна оси (см. Алгоритм 5)	Oz	Oy
Траектория перемещения второй крайней точки отрезка проецируется в дугу окружности с радиусом, равным одноименной проекции отрезка...	...на горизонтальной плоскости проекций	...на фронтальной плоскости проекций
При этом повороте остается неизменной координата	z	y
Параллельно оси Ox перемещается вторая крайняя точка отрезка...	...во фронтальной плоскости проекций	...в горизонтальной плоскости проекций
Истинная длина отрезка прямой определяется по проекции отрезка в его новом положении...	...на фронтальной плоскости проекций	...на горизонтальной плоскости проекций

- 7.1.4.4 Построить траекторию перемещения второй точки, ограничивающей отрезок, на плоскости проекций, которой ось вращения параллельна. Она проецируется в отрезок прямой, параллельный оси Ox (см. Алгоритм 5 и таблицу 7). Определить новое положение проекции этой крайней точки в проекционной связи с проекцией, построенной в п. 7.1.4.3.
- 7.1.4.5 Соединить полученную в п. 7.1.4.4 проекцию вращающегося конца отрезка с одноименной проекцией его второго конца, положение которого не изменилось. Вычерченный отрезок и будет соответствовать искомой истинной длине.

Рисунок 16 иллюстрирует определение истинной длины методом вращения для тех же отрезков, что были вычерчены на рисунке 11.

Для построения истинной длины отрезка AB (рисунок 16, а) выберем ось вращения i , проходящую через точку B перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций. В этом случае на плоскость π_1 она будет проецироваться в точку, совпадающую с B' . Следовательно, B' не изменит своего положения.

Точка A' будет двигаться по дуге окружности с центром в B' и радиусом, равным $A'B'$. Проекция $A'B'$ переходит в положение горизонтальной проекции фронтали A'_1B' , параллельной оси Ox . На фронтальной плоскости проекций точка B'' также неподвижна, а A'' движется перпендикулярно оси вращения, т.е. параллельно оси Ox . На этой линии находим точку A''_1 в

проекционной связи с A'_1 . Соединяем полученную точку A''_1 с B'' : полученный отрезок отображается в натуральную величину.

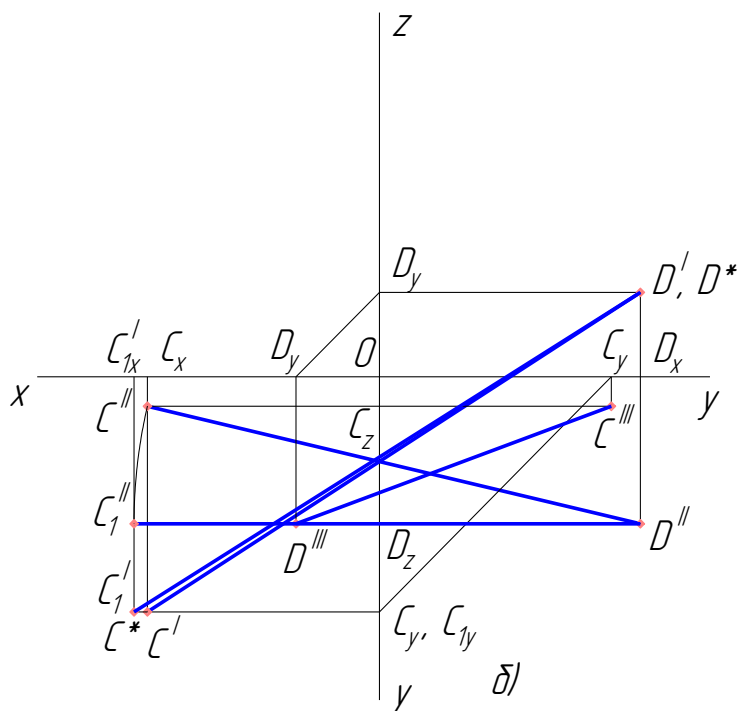
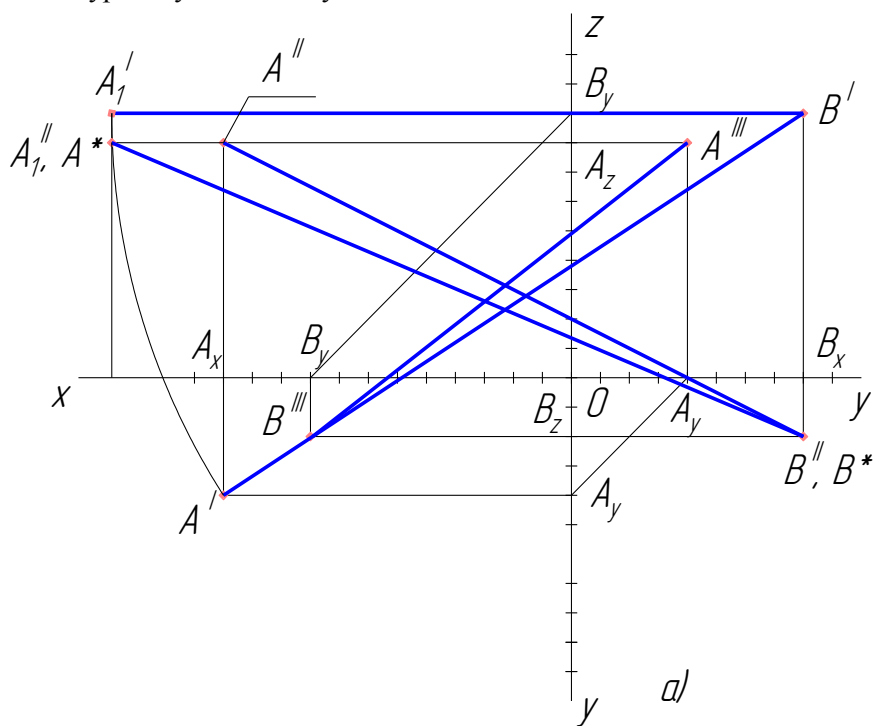


Рисунок 16 - Определение истинной длины отрезка прямой на комплексном чертеже методом вращения с осью вращения, перпендикулярной: а) горизонтальной плоскости проекций; б) фронтальной плоскости проекций

Истинная длина отрезка CD (рисунок 16, б) найдена аналогичным образом. В этом случае ось вращения, проходившая через точку D , была перпендикулярна фронтальной плоскости проекций. Поэтому траектория вращения отображалась в виде дуги окружности на плоскости π_2 , а отрезком прямой, параллельной оси Ox , - на плоскости π_1 . Истинная длина получается на горизонтальной проекции отрезка, это $C'D'$.

7.2 В аксонометрии

Для построения истинной длины отрезка прямой можно использовать только ту его проекцию, которая не имеет ни линейных, ни угловых искажений. Следовательно, в косоугольной фронтальной диметрии построение может быть выполнено только на основе фронтальной проекции, а в прямоугольной изометрии его вообще провести нельзя.

Пример определения истинной длины в косоугольной фронтальной диметрии для того же отрезка, что был изображен на Рис. 12, а, показан на Рисунке 17.

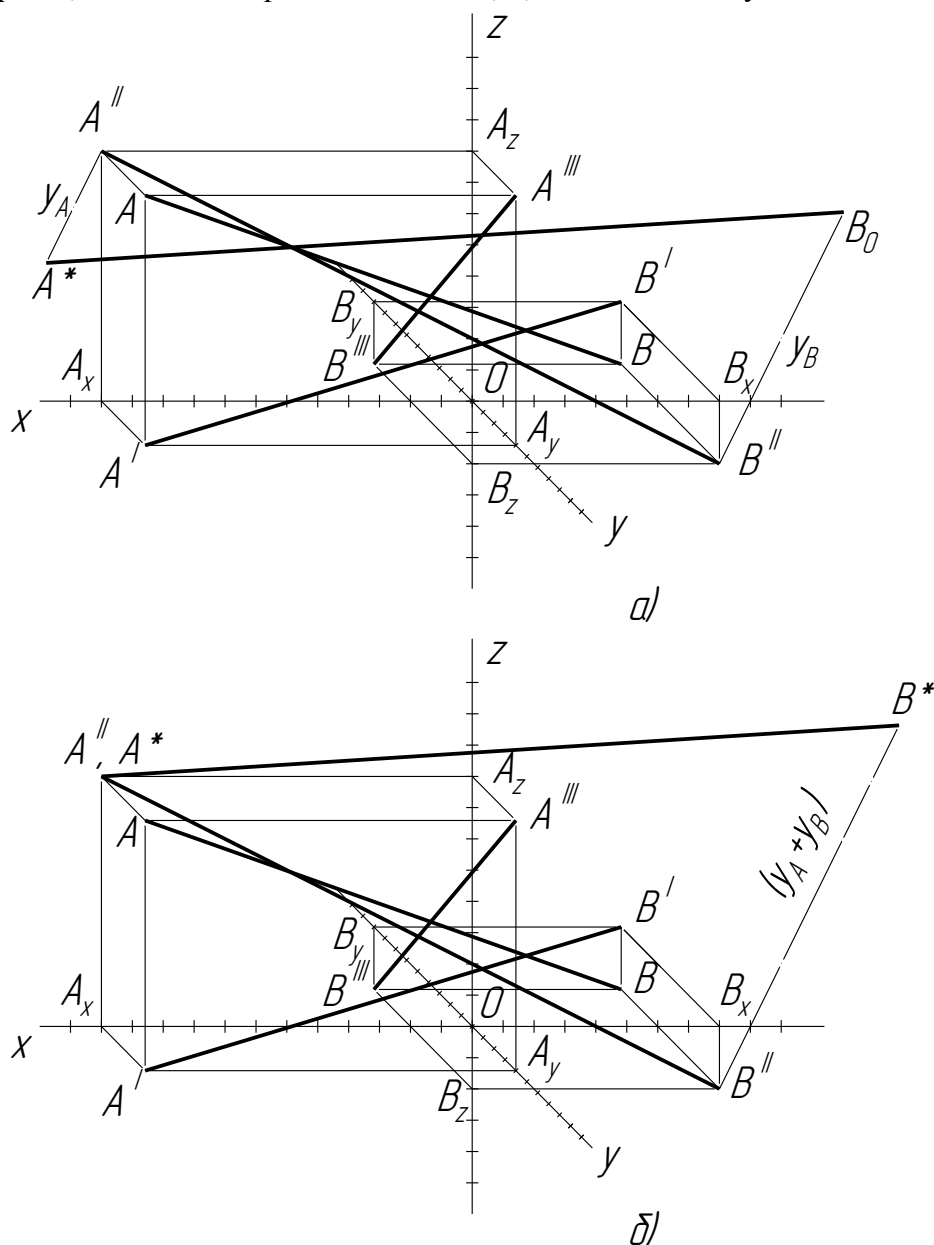


Рисунок 17 - Определение истинной длины отрезка прямой в косоугольной фронтальной диметрии: а) методом трапеций; б) методом треугольника

Построение выполняется методом трапеций или треугольника и практически ничем не отличается от выполняемого на эюре (Алгоритмы 7.1.1 и 7.1.2). Различие состоит лишь в том, что, откладывая «недостающие координаты», измеренные не на комплексном чертеже, а здесь же, в аксонометрической системе координат, не следует забывать о корректировке их с учетом коэффициента искажения. Как следствие этого,

ординаты крайних точек отрезка при построениях в косоугольной фронтальной диметрии, измеренные на том же чертеже, следует увеличить в 2 раза.

Метод вращения в аксонометрии применить нельзя, так как в соответствии с ним следует использовать две проекции, не имеющие каких-либо искажений.

Если рассматривается отрезок прямой, занимающей частное положение, то без построений его истинная длина может быть получена лишь в том случае, если он параллелен плоскости проекций, которая в аксонометрии не имеет искажений: например, в косоугольной фронтальной диметрии, при параллельности плоскости π_2 , - по его фронтальной проекции или по образу отрезка.

В иных случаях истинная длина отрезка прямой в аксонометрических проекциях определяется построением, проводимым точно так же, как для прямой общего положения.

8 Определение следов прямой

8.1 В ортогональных проекциях

8.1.1 Прямая общего положения

Следами прямой называют точки ее пересечения с плоскостями проекций. За ними закреплены определенные обозначения: горизонтальный след $M(x_M, y_M, 0)$, фронтальный след $N(x_N, 0, z_N)$ и профильный след $P(0, y_P, z_P)$. Умение правильно их находить очень важно для решения позиционных и метрических задач.

Следы прямой – точки частного положения. Следовательно, некоторые их проекции лежат на координатных осях.

8.1.1.1 Обозначить проекции следов прямой в соответствующих точках пересечения проекций прямой с осями координат. При этом можно воспользоваться информацией, приведенной в Таблице 8. Как правило, для этой операции используют только горизонтальную и фронтальную проекции прямой, профильная же служит для установления проекционных связей и для проверки правильности построений.

Таблица 8 - Положение проекций следов прямой на соответствующих проекциях прямой

Пересечение с осью	Проекция прямой		
	горизонтальная	фронтальная	профильная
x	N'	M''	-
y_{π_1}	P'	-	-
y_{π_3}	-	-	M'''
z	-	P''	N'''

8.1.1.2 На фронтальной и горизонтальной проекции прямой, как следует из приведенной выше таблицы, удастся обозначить N' , P' , M'' и P'' . Фронтальная проекция фронтального следа N'' и горизонтальная проекция горизонтального следа M' должны быть найдены на соответствующих проекциях за счет построения проекционных связей.

8.1.1.3 Найти профильные проекции следов прямой на профильной проекции прямой, устанавливая проекционные связи, как это обычно делают при построении проекций точек частного положения (см. Алгоритм 3.1).

На рисунке 18 найдены следы прямых, отрезки которых были построены ранее на рисунке 11.

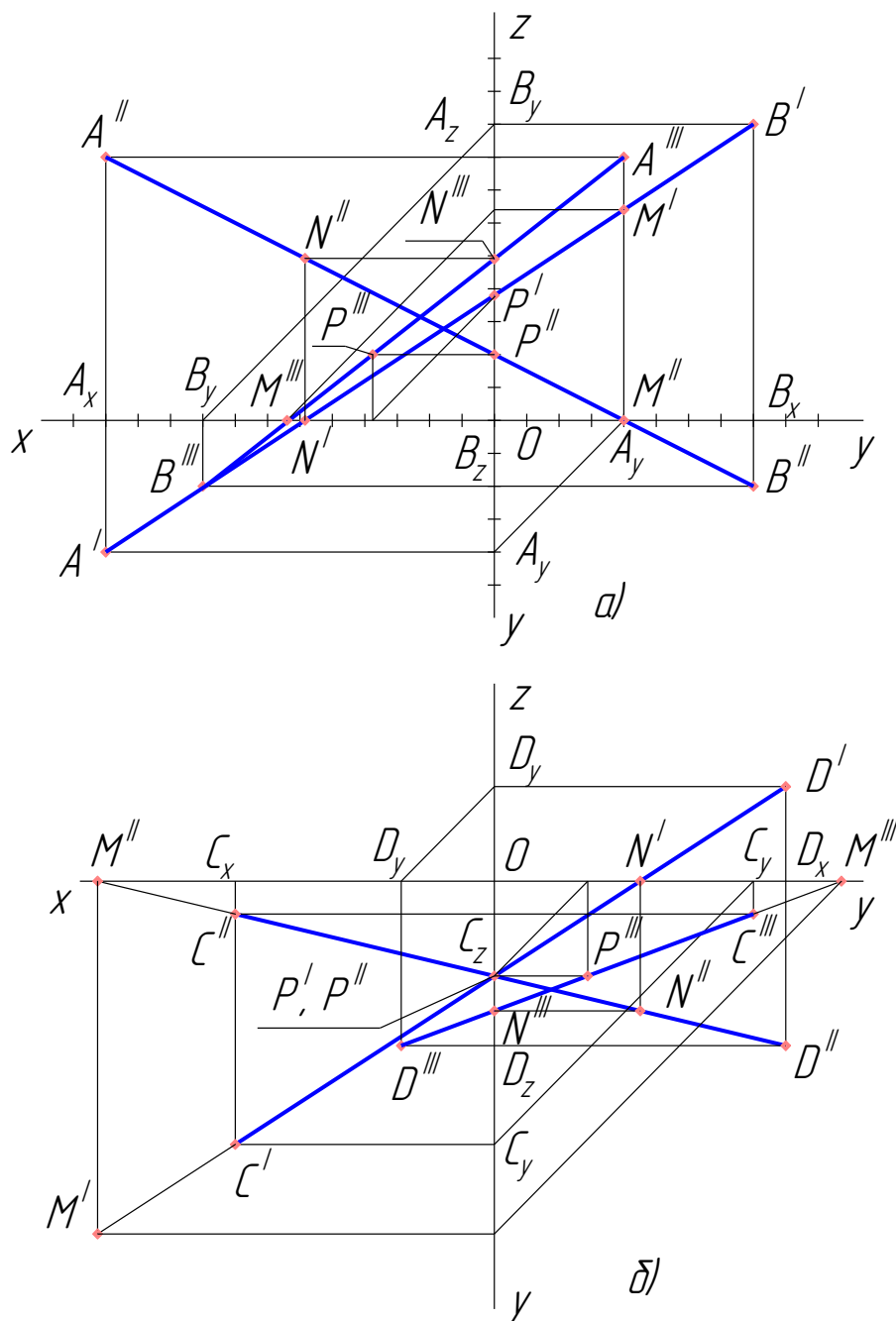


Рисунок 18 - Примеры построения следов прямой общего положения

Пусть построены проекции отрезка прямой AB (рисунок 18, а). Пересечения его горизонтальной проекции позволяют обозначить проекции следующих следов: N' – на пересечении с Ox и P' – на пересечении с Oy . На фронтальной проекции обозначаем P'' на пересечении с Oz и M'' на пересечении с Ox . За счет проекционных связей между $A'B'$ и $A''B''$ находим фронтальную проекцию фронтального следа N'' и горизонтальную проекцию горизонтального следа M' . Профильные проекции следов M''' , N''' и P''' находим на $A'''B'''$ с помощью проекционных связей.

Проекции следов прямой CD (рисунок 18, б) найдены аналогичным способом. Отличие состоит лишь в том, что горизонтальный след лежит за пределами заданного отрезка прямой, на его продолжении.

8.1.2 Прямая частного положения

Алгоритм определения следов прямой частного положения, в общем, не отличается от уже описанного в параграфе 8.1.1. Следует только помнить о том, что если прямая занимает частное положение, то она не пересекается с одной (прямые, параллельные плоскостям проекций) или с двумя плоскостями проекций (проецирующие прямые, т.е. перпендикулярные к плоскостям проекций). Информация об этом сведена в таблицу 9.

Таблица 9 - Отсутствие следов у прямых частного положения

Положение прямой относительно плоскостей проекций	$\parallel \pi_1$	$\parallel \pi_2$	$\parallel \pi_3$	$\perp \pi_1$	$\perp \pi_2$	$\perp \pi_3$
Отсутствуют следы	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>P</i>	<i>N, P</i>	<i>M, P</i>	<i>M, N</i>

На рисунке 19 найдены следы прямых частного положения, отрезки которых были построены ранее на рисунке 15.

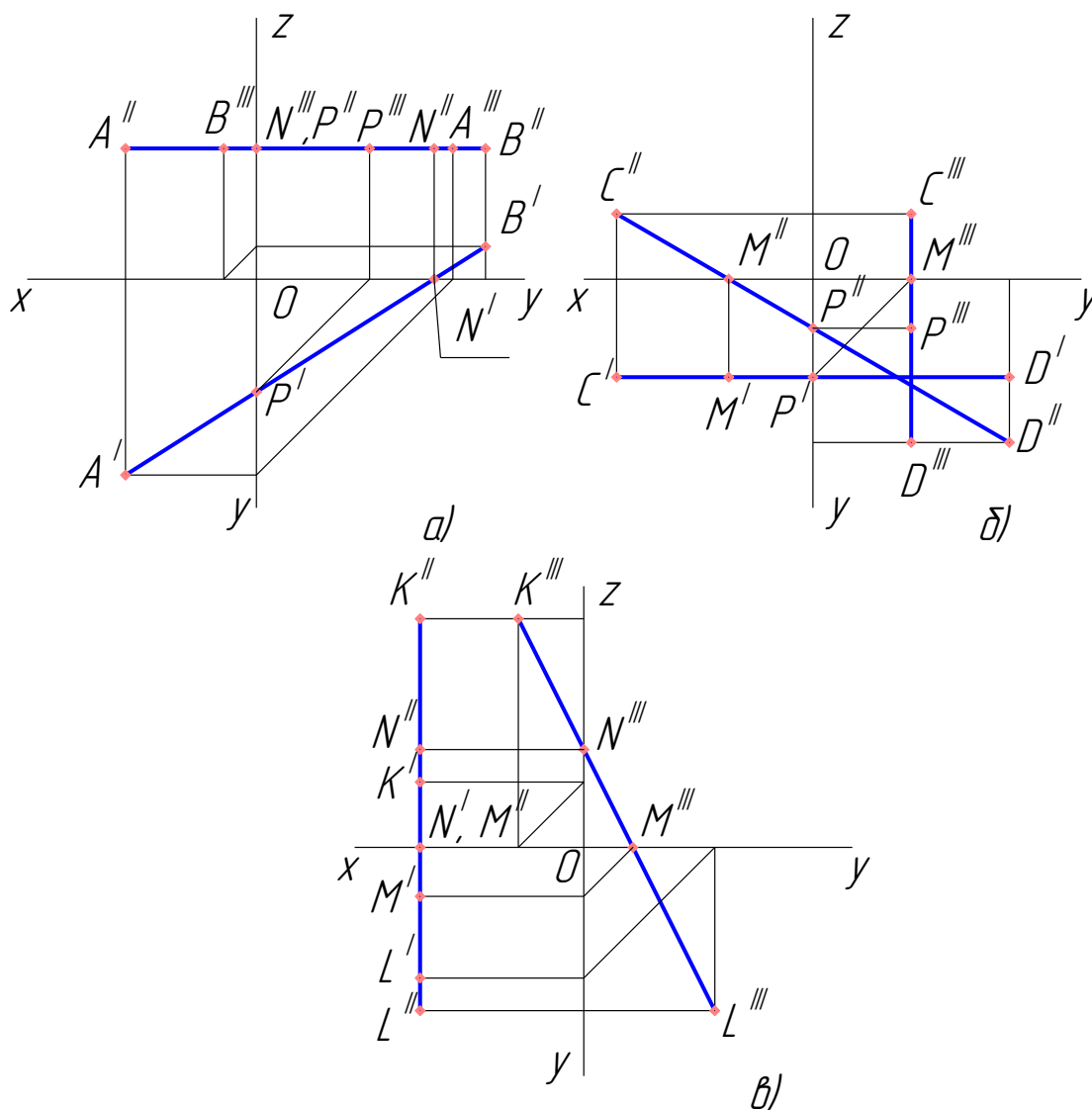


Рисунок 19 - Примеры построения следов прямой частного положения

8.2 В аксонометрии

Определение следов прямой в аксонометрической проекции проходит по тому же алгоритму, что и в ортогональных проекциях. Однако после того как построены три проекции каждого из следов, необходимо еще перенести их на аксонометрическую проекцию прямой.

- 8.2.1 Найти проекции следов на соответствующих проекциях прямой (см. Алгоритм 8.1.1) с учетом направления проекционных связей в соответствующей аксонометрической проекции (см. Алгоритм 2, п. 2.1.3).
- 8.2.2 Найти следы на аксонометрической проекции прямой. След прямой должен совпадать с одноименной его проекцией. Эта информация конкретизирована в Таблице 10. Соответствие следов прямой и указанных в Таблице 10 пересечений позволяет оценить правильность построения Вами проекций прямой и ее самой в аксонометрии.

Таблица 10 - Положение следов прямой на ее аксонометрической проекции

След прямой	M	N	P
совпадает с его одноименной проекцией	M'	N''	P'''
и находится на пересечении самой прямой и одноименной проекции прямой, т.е.	<i>горизонтальной</i>	<i>фронтальной</i>	<i>профильной</i>

На рисунке 20 приведен пример построения следов тех же прямых, отрезки которых были построены на рисунке 12.

Построены три проекции и сам отрезок прямой AB в косоугольной фронтальной диметрии (рисунок 20, а).

Отмечаем на пересечении $A'B'$ с осью Ox горизонтальную проекцию фронтального следа N' . Проводим от нее проекционную связь, параллельную оси Oz , до пересечения с $A''B''$. В этом месте окажется не только фронтальная проекция фронтального следа прямой (N''), но и точка пересечения фронтальной проекции прямой $A''B''$ с ее аксонометрической проекцией AB . Следовательно, в этой же точке находится N . Проекционная связь от этой точки, параллельная оси Ox , до пересечения с $A'''B'''$ позволяет найти N''' на пересечении профильной проекции с осью Oz .

Пересечение $A'B'$ с осью Oy дает горизонтальную проекцию профильного следа P' . Проводим от нее линию проекционной связи параллельно оси Oz до пересечения с $A'''B'''$. В этой точке находим P''' , пересечение с AB и, следовательно, P . Проекционная связь, параллельная оси Oy , от этой точки к $A''B''$ позволяет отметить фронтальную проекцию профильного следа P'' на пересечении с осью Oz .

Наконец, для построения фронтальной проекции горизонтального следа M'' воспользуемся пересечением $A''B''$ с осью Ox . Проводим проекционную связь, параллельную оси Oy , к $A'B'$. Находим M' и M (пересечение с AB). В проекционной связи (параллельной оси Ox) с этой точкой на $A'''B'''$ лежит M''' . Это – точка пересечения профильной проекции прямой с осью Oy .

Следы прямой CD (рисунок 20, б) найдены аналогично. Проекции горизонтального следа находятся на продолжениях соответствующих проекций отрезка прямой.

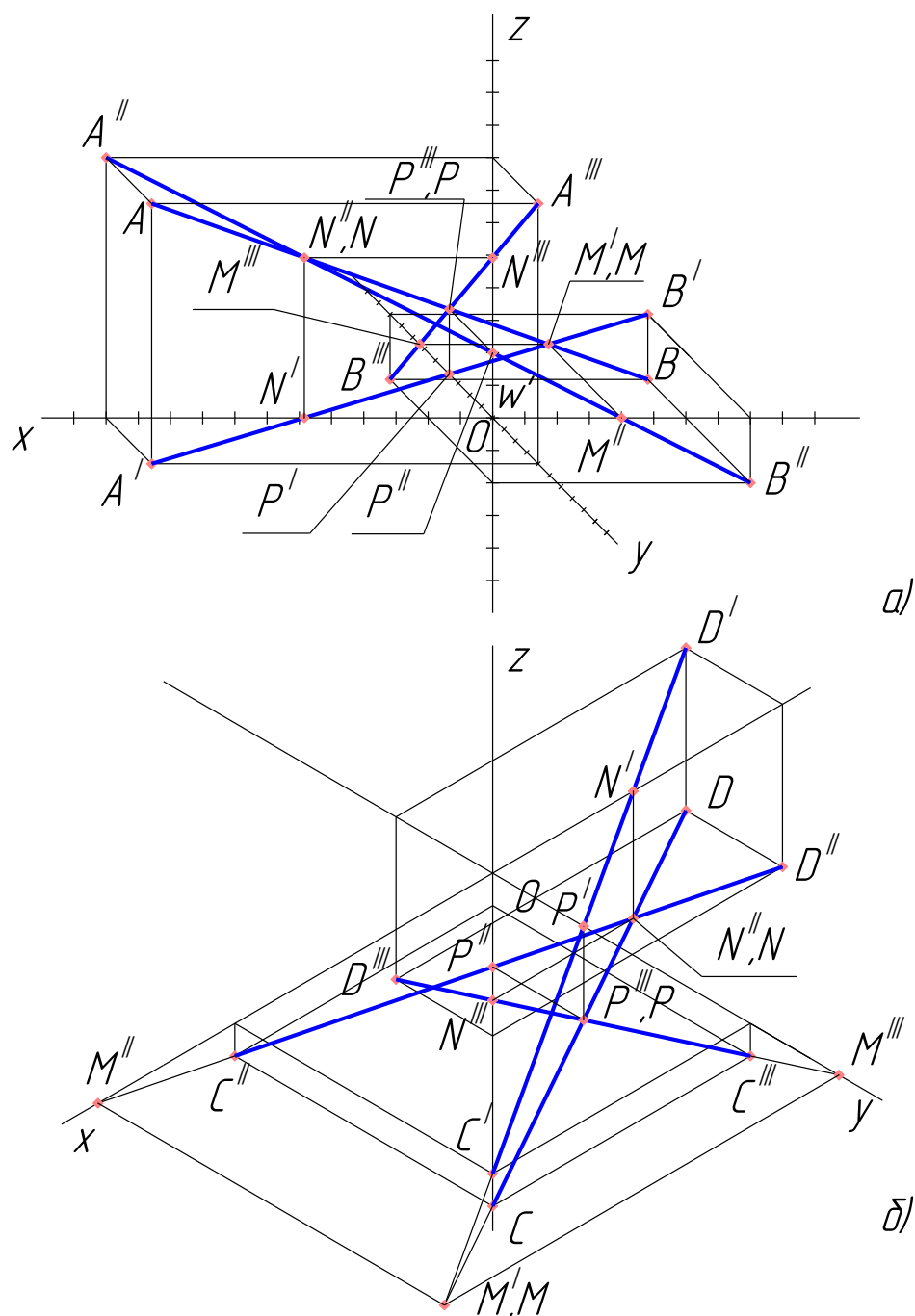


Рисунок 20 - Следы прямой линии в аксонометрических проекциях: а) в косоугольной фронтальной диметрии; б) в прямоугольной изометрии

9 Определение истинной длины отрезка прямой в соответствующих частях пространства

Переход прямой из одного октанта в другой происходит в точке пересечения с плоскостью проекций (в частных случаях – с координатной осью или началом координат). Следовательно, для решения поставленной задачи нам необходимо просто перенести построенные проекции следов прямой с одной из ее проекций на отрезок прямой, построенный в истинную длину. Последняя операция производится аналогично делению отрезка прямой в заданном отношении частей.

9.1 Пропорциональное деление отрезка

Пусть заданный отрезок прямой необходимо разделить в отношении $n:k$.

- 9.1.1 Под произвольным углом к одной из проекций отрезка (базовой) вычертить луч, начинающийся в одной из ее крайних точек.
- 9.1.2 На этом луче отложить $(n+k)$ произвольных равновеликих отрезков.
- 9.1.3 Конечную точку последнего из отложенных отрезков соединить со второй крайней точкой базовой проекции заданного отрезка. Построенный отрезок задает направление переноса.
- 9.1.4 Из конца n -ного отрезка провести прямую линию, параллельную построенному в п. 9.1.3 направлению переноса. Ее пересечение с проекцией отрезка и даст искомую точку.
- 9.1.5 Точку разбиения на остальных проекциях отрезка прямой построить в проекционной связи.

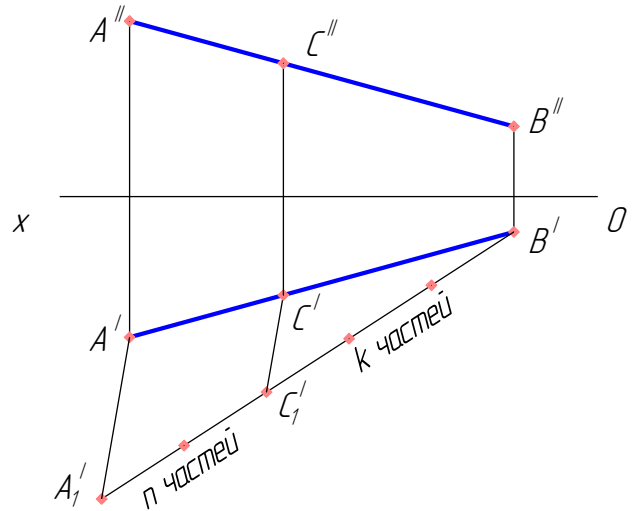


Рисунок 21 - Пример деления отрезка в заданном отношении

Рисунок 21 иллюстрирует описанный Алгоритм для разбиения отрезка в отношении 2:3.

9.2 Истинная длина отрезка по частям пространства

Работая в ортогональных проекциях, следует действовать так:

- 9.2.1 Построить отрезок прямой в трех (или в двух) проекциях (см. Алгоритм 6.1).
- 9.2.2 Определить следы прямой (Алгоритм 8.1).
- 9.2.3 Построить истинную длину отрезка прямой, в соответствии с Алгоритмом 7.1.1 или 7.1.2, или отметить ее на одной из проекций, если прямая занимает частное положение (Алгоритм 7.1.3).
- 9.2.4 Проекция прямой, на которой выполнялись построения истинной длины, служит для отрезка истинной длины базовой линией разбиения, как в Алгоритме 9.1 для пропорционального деления отрезка. Направлением переноса служит перпендикуляр к этой проекции. Для разбиения истинной длины отрезка по частям пространства необходимо перенести проекции следов прямой с базовой проекции отрезка на отрезок истинной длины параллельно направлению переноса. Построенные на истинной длине следы служат точками перехода прямой из одного октанта в другой.
- 9.2.5 Определить положение в пространстве одной из крайних точек отрезка (см. Алгоритм 1.1). В найденном октанте отрезок будет лежать от крайней точки до ближайшего следа прямой.
- 9.2.6 Определить, в какую часть пространства переходит прямая. Изменение координат точек, лежащих на ней, происходит таким же образом, как при симметрии точки относительно одноименной со следом плоскости проекций. Поэтому, если Вы затрудняетесь с решением, в какой октант перешла прямая, то можно воспользоваться данными таблицы 3 (см. параграф 4.1). Зная знаки координат точек на следующем участке прямой, Вы определите октант для очередного ее отрезка от одного следа до другого.

9.2.7 Повторять действия, описанные в п. 9.2.6, пока не достигнете второй крайней точки отрезка.

Рисунок 22 приводит пример реализации Алгоритма 9.2 для тех же отрезков прямых, что были построены на рисунках 11, а и 15, а.

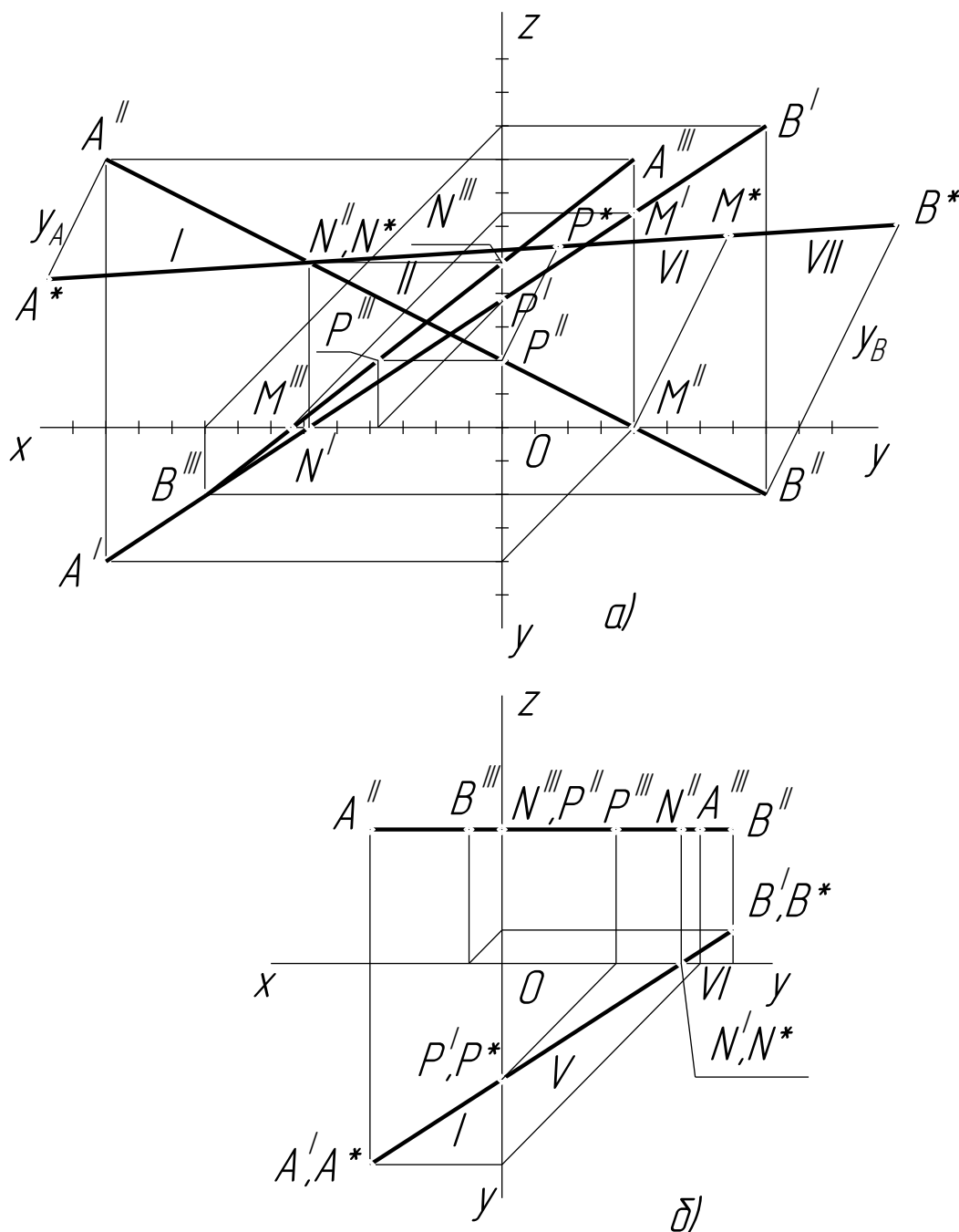


Рисунок 22 - Определение истинной длины отрезка прямой по частям пространства: а) для прямой общего положения; б) для прямой частного положения

Прямая AB на рисунке 22, а была задана аналитическим способом. На основании координат концов отрезка были построены три его проекции (см. пояснение к рисунку 11, а). Прямая занимает общее положение, поэтому, в точках пересечений проекций прямой с осями координат, были построены проекции трех следов (см. пояснение к рисунку 18, а). Истинная величина отрезка AB была определена методом трапеций (см. пояснение к рисунку 13, а). Отметим, что найденная истинная величина пересекает базовую проекцию $A''B''$ в точке

одноименной проекции одноименного следа N'' – за счет этого можно проверить точность построений методом трапеций.

Положение фронтального следа прямой на отрезке истинной длины совпадает с его проекцией: $N^*=N''$. Два оставшихся следа переносим с базовой, фронтальной проекции, вычертив связи, параллельные направлению переноса ($A''A^*$ или $B''B^*$). Находим P^* и M^* .

Определяем последовательность прохождения прямой по частям пространства. Точка A лежит в I октанте (все три координаты положительны). При пересечении фронтальной плоскости проекций (точка N) прямая переходит во II октант. Очередная точка смены октанта – профильный след (точка P): следующий отрезок прямой (P^*M^*) находится в VI октанте. За горизонтальным следом (точка M) прямая окажется в VII части пространства. Проверяем координаты точки B – все они отрицательные, это характерно для VII октанта.

На рисунке 22, б выполнены построения для отрезка прямой AB частного положения. Действия при этом, в целом, аналогичны уже описанным. Отличие состоит в том, что прямая параллельна плоскости π_1 , поэтому истинная величина отрезка равна его горизонтальной проекции ($A^*B^*=A'B'$). Поэтому разбиение отрезка прямой по частям пространства выполнено именно на этой проекции: $P'=P^*$, $N'=N^*$.

Во фронтальной косоугольной диметрии построения выполняются по той же схеме, т.е.: Алгоритм 6.2; Алгоритм 8.2; Алгоритм 7.2, а затем действия, описанные в пп. 9.2.4 – 9.2.7 (рисунок 23).

Прямая AB на рисунке 23, а занимает общее положение. Построение следов в аксонометрии описано в пояснениях к рисунку 20, а. Истинная величина отрезка методом треугольника построена на рисунке 17, б.

Перенос следов на отрезок истинной величины выполняется с базовой, фронтальной проекции ($A''B''$). Направление переноса задает отрезок $B''B^*$, перпендикулярный $A''B''$. Параллельно ему строим $N''N^*$, $P''P^*$ и $M''M^*$. Определение прохождения прямой по частям пространства было описано выше, в пояснении к рисунку 22, а.

Прямая AB на рисунке 23, б находится в частном положении: она параллельна горизонтальной плоскости. В косоугольной фронтальной диметрии ее горизонтальная проекция искажена. Следовательно, истинная величина отрезка должна быть построена общим способом, на основе фронтальной проекции прямой.

Выполняем построение методом трапеций. Под прямым углом к $A''B''$ откладываем ординаты концов отрезка с учетом коэффициента искажения по оси OY в противоположных направлениях (y_A и y_B имеют противоположные знаки). Параллельно $A''A^*$ или $B''B^*$ строим связь $P''P^*$. Точка N^* совпадает с N'' .

Точка B находится в VI октанте: координаты x_B и y_B отрицательны, а z_B – положительна. Проходя через фронтальную плоскость проекций (точка N), прямая переходит в V октант. За точкой P прямая будет лежать в I октанте. Проверим: у точки A все координаты положительны, это соответствует I октанту.

Рисунок 24 приводит пример оформления Задачи № 4 из альбома домашних заданий.

10 Построение следов плоскости

Как известно, плоскость, в общем случае, задается тремя точками, не принадлежащими одной прямой. Точки эти могут быть заданы аналитически или графически, занимать общее или частное положение, быть отдельно стоящими или принадлежать некоторым отрезкам прямых линий. Все эти возможности порождают разнообразие способов задания плоскости. Среди них особое место занимает определение положения плоскости ее следами, т.е. линиями пересечения плоскости с плоскостями проекций.

Умение переходить от одного способа задания плоскости к другому играет очень важную роль при решении позиционных и метрических задач.

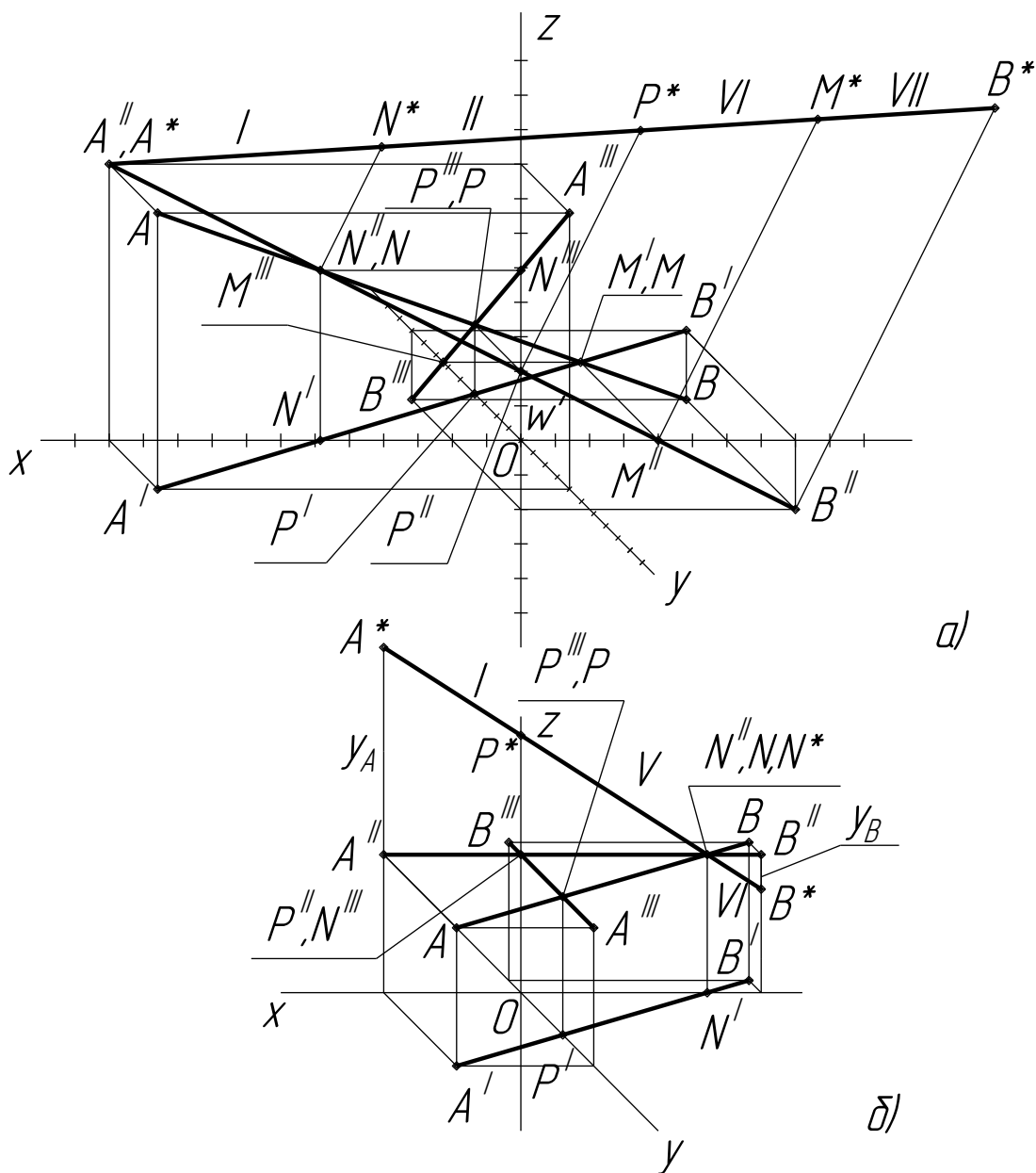


Рисунок 23 - Истинная длина отрезка прямой с разбиением по частям пространства в косоугольной фронтальной диметрии - для тех же прямых, что на рисунке 22

10.1 Задание координат плоскости

Задание плоскости с помощью координат – это тот же способ задания с помощью трех точек, только точки эти занимают частное положение: каждая из них принадлежит одной из координатных осей. Таким образом, у каждой из них всего одна координата, отличная от нуля, что позволяет записывать положение плоскости аналитически в виде $\alpha(x_\alpha; y_\alpha; z_\alpha)$, по аналогии с координатами точек.

Если координаты плоскости, или *точки схода следов*, заданы аналитически, то следы можно вычертить по следующему алгоритму:

10.1.1 Обозначить координаты плоскости на осях координат точно так же, как это делается для координат точек (см. Алгоритм 1). Если координата плоскости по некоторой оси равна бесконечности, то она на чертеже не обозначается – это характерно для плоскостей частного положения. Информация о координатах плоскостей частного положения представлена в Таблице 11.

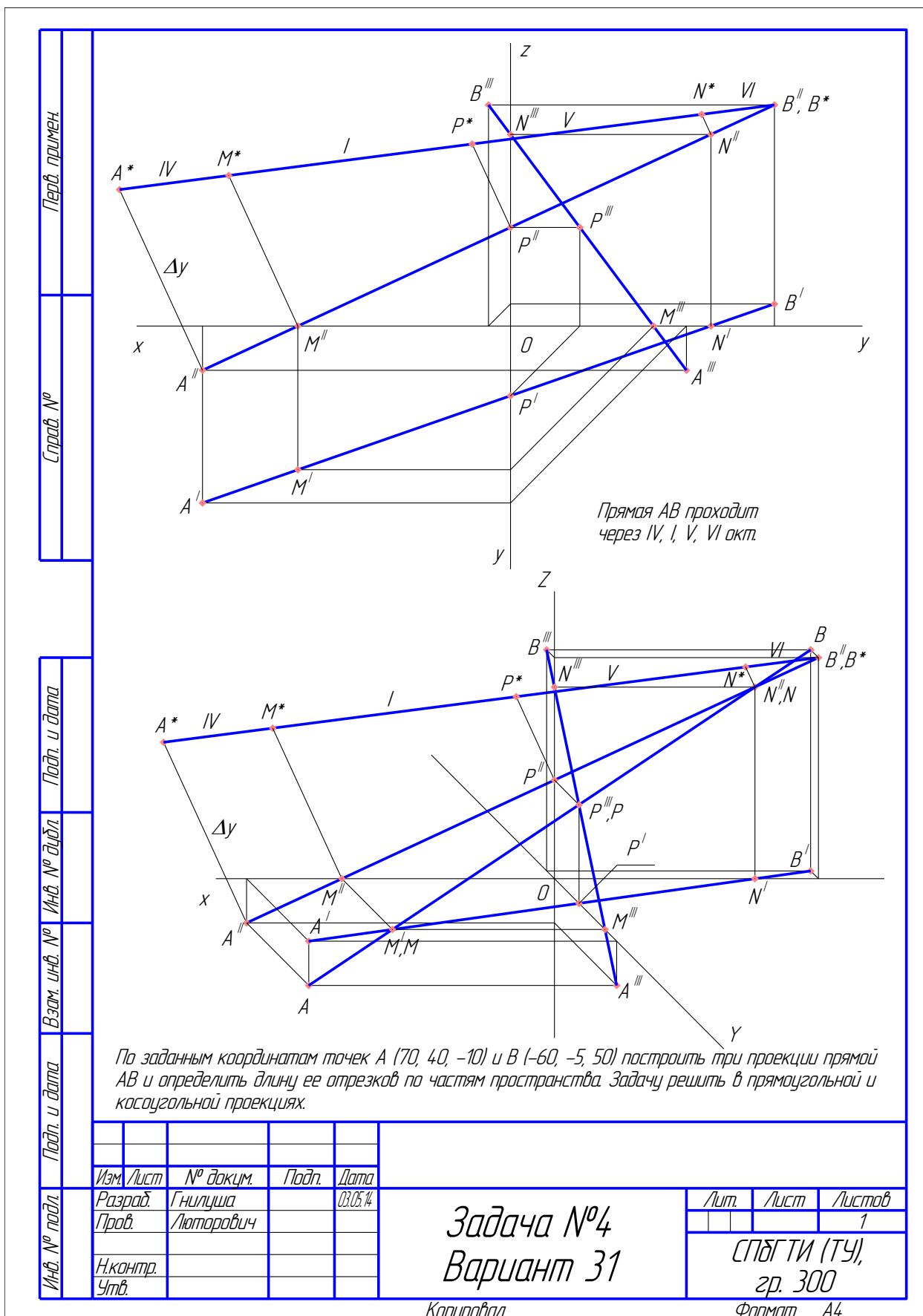


Рисунок 24 - Пример оформления задания, решенного по Алгоритмам 6 – 9

Таблица 11 - Координаты плоскостей частного положения

Координата	Плоскость					
	перпендикулярна			параллельна		
	π_1	π_2	π_3	π_1	π_2	π_3
x	+/-	+/-	∞	+/-	∞	∞
y	+/-	∞	+/-	∞	+/-	∞
z	∞	+/-	+/-	∞	∞	+/-

10.1.2 Соединить отрезками прямых линий точки, принадлежащие одной и той же плоскости проекций: точки X_α и Y_α определяют горизонтальный след плоскости $h'_{0\alpha}$; X_α и Z_α – фронтальный, $f''_{0\alpha}$, и, наконец, Z_α и Y_α на оси y профильной плоскости проекций – профильный след $p'''_{0\alpha}$. (Такие обозначения следов связаны с тем, что они представляют собой проекции прямых частного положения, лежащих в плоскости, см. Алгоритм 10). При прочерчивании следов нужно учесть тип линии: основной сплошной линией след прочерчивается только в том случае, если обе соединяемые координаты имеют положительное значение. В противном случае точки схода следов соединяют штриховой линией.

10.1.3 Если одна из координат плоскости, определяющих след, равна бесконечности, то такой след проводится от имеющейся точки схода следов параллельно той оси проекций, значения координаты для которой не существует. Если равны бесконечности обе координаты для некоторого следа, это значит, что плоскость параллельна данной плоскости проекций и, следовательно, следа на ней не образует.

Построение следов для плоскостей, имеющих различные координаты, проиллюстрировано на рисунке 25.

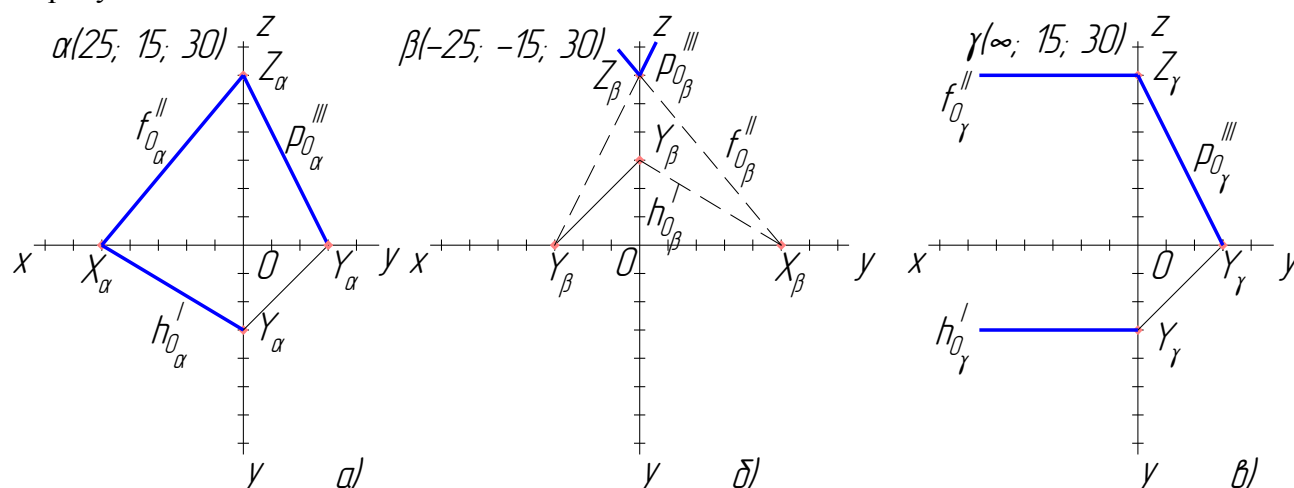


Рисунок 25 - Построение следов плоскости, заданной координатами: а) плоскость общего положения с положительными координатами; б) плоскость общего положения с координатами разного знака; в) плоскость частного положения

10.2 Вычерчивание третьего следа плоскости по двум заданным

Эта задача решается при графическом задании плоскости двумя следами. Само построение сходно с определением третьей проекции точки по двум заданным (см. Алгоритм 3).

10.2.1 Довести заданные следы до пересечения с соответствующими координатными осями.

- 10.2.2 Обозначить полученные точки схода следов, определяющие координаты плоскости.
- 10.2.3 Произвести перенос точки схода следов Y_α , как это делается при построении проекций точки (см. Алгоритмы 1 и 3).
- 10.2.4 Прочертить третий след плоскости в соответствии с указаниями, данными в пп. 10.1.2, 10.1.3.

Порядок построений проиллюстрирован на рисунке 26.

Пусть задана плоскость δ со сливающимися (т.е. проецирующимися в одну линию) следами $h'_{0\delta}$ и $f''_{0\delta}$ (рисунок 26, а). Пересечение заданных следов с осью Ox дает точку X_δ , пересечение $f''_{0\delta}$ с осью Oz определяет точку Z_δ , а продолжение $h'_{0\delta}$ с осью Oy – Y_δ , причем две последние точки схода следов на эюре совпадают. Переносим Y_δ на ось Oy профильной плоскости проекций. Через Y_δ и Z_δ проводим третий, профильный след $p'''_{0\delta}$.

На рисунке 26, б заданы следы $f''_{0\epsilon}$ и $p'''_{0\epsilon}$. Эти два следа плоскости определяют на оси Oz точку Z_ϵ . Продолжение фронтального следа $f''_{0\epsilon}$ дает точку схода следов X_ϵ . Так как профильный след проходит параллельно оси Oy , то координата y_ϵ равна бесконечности, следовательно, задана фронтально-проецирующая плоскость. Искомый горизонтальный след $h'_{0\epsilon}$ проходит от найденной точки схода X_ϵ параллельно оси Oy горизонтальной плоскости проекций.

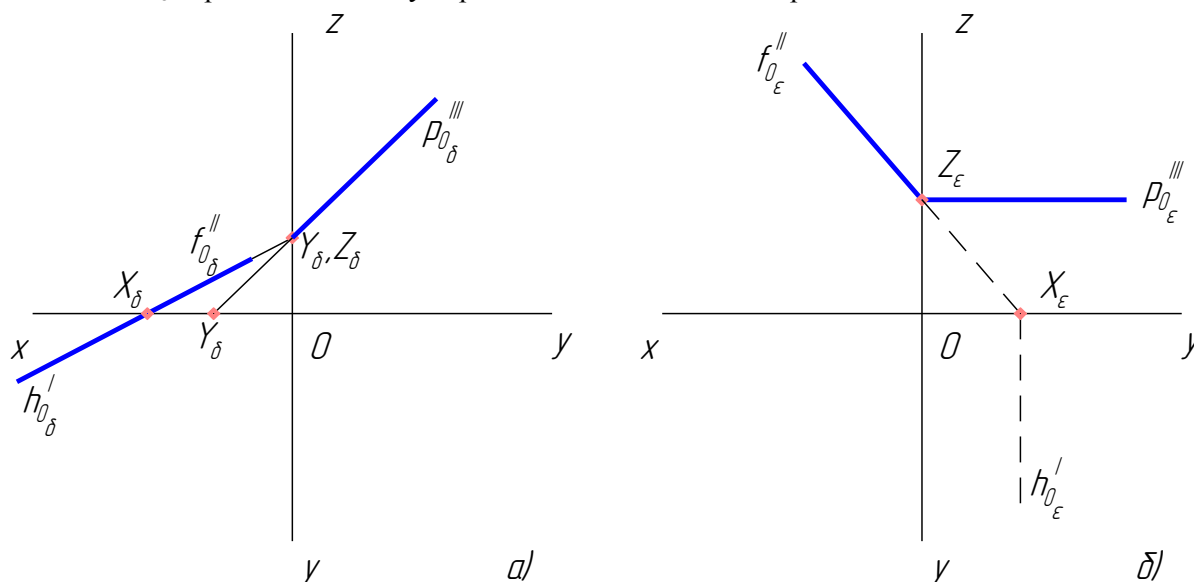


Рисунок 26 - Построение третьего следа: а) плоскости общего положения со сливающимися следами; б) плоскости частного положения

10.3 Плоскость задана отрезками прямых

10.3.1 Прямые занимают общее положение

Построение базируется на следующем положении: если прямая принадлежит плоскости, то ее следы лежат на соответствующих следах этой плоскости.

- 10.3.1.1 Если в некоторой плоскости проекций заданные отрезки различных прямых проецируются в одну линию, это означает, что плоскость занимает частное, проецирующее положение: она перпендикулярна к этой плоскости проекции, а ее координата, не содержащаяся в данной плоскости проекций, равна бесконечности. Тогда, без дополнительных построений, положение одного следа (т.е. две координаты) плоскости определяются этой линией, а два остальных следа строятся на основании имеющихся координат плоскости, как в Алгоритме 10.1 (рисунок 27, а).

В ином случае необходимо выполнить описанные ниже построения (рисунок 27, б):

- 10.3.1.2 Горизонтальные и фронтальные проекции заданных отрезков продлить до пересечения с осью Ox .
- 10.3.1.3 На основании полученных точек построить фронтальные и горизонтальные следы прямых, принадлежащих плоскости (Алгоритм 8.1).
- 10.3.1.4 В одной из плоскостей проекций по одноименным следам двух прямых вычертить соответствующий след плоскости.
- 10.3.1.5 Если этот след пересекает ось абсцисс в пределах чертежа, отметить точку схода следов на оси Ox .
- 10.3.1.6 Если получена точка схода следов, провести второй след плоскости через нее и след одной из прямых во второй плоскости проекций (построенный след другой прямой может служить проверкой правильности и точности построений). Если же точка схода следов не достижима в пределах чертежа, то и второй след плоскости строят, как в п. 10.3.1.4.
- 10.3.1.7 Если требуется, вычертить третий след плоскости по его координатам (см. Алгоритм 10.2).

На рисунке 27, а плоскость α задана отрезками AB и BC , фронтальные проекции которых проецируются в одну линию. Следовательно, это – фронтально-проецирующая плоскость. Через $A''B''$ и $B''C''$ проводим фронтальный след $f''_{0\alpha}$. Его пересечение с осью Ox дает координату X_α , от которой перпендикулярно Ox (параллельно не показанной здесь оси Oy) проводим горизонтальный след плоскости $h'_{0\alpha}$.

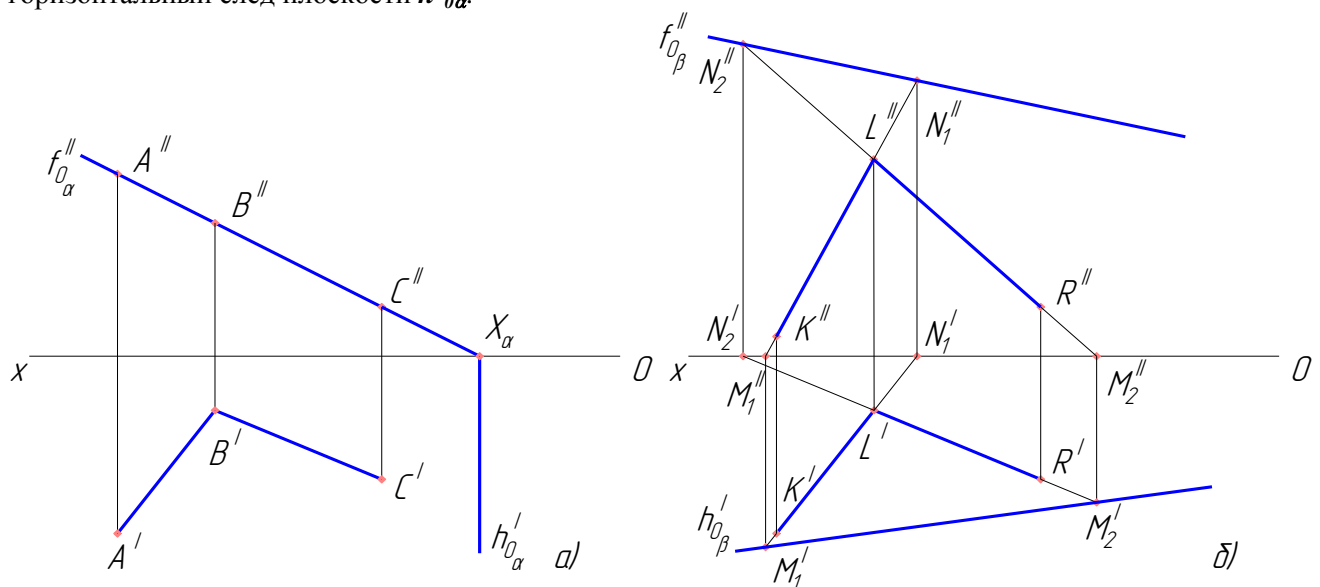


Рисунок 27 - Построение следов плоскости по заданным отрезкам прямых общего положения: а) для фронтально проецирующей плоскости; б) для плоскости общего положения

Плоскость β (рисунок 27, б) задана отрезками KL и LR . Продолжим горизонтальную проекцию $K'L'$ до пересечения с осью Ox , получим горизонтальную проекцию фронтального следа этой прямой N'_1 . Фронтальная проекция фронтального следа N''_1 лежит в проекционной связи на продолжении фронтальной проекции отрезка $K''L''$. Аналогично, продлив $K''L''$ до пересечения с осью абсцисс, найдем фронтальную проекцию горизонтального следа этой прямой, M''_1 . Его горизонтальная проекция M'_1 лежит в проекционной связи на продолжении $K'L'$. Те же действия для прямой LR позволят получить проекции ее фронтального и горизонтального следов, N''_2, N'_2, M''_2 и M'_2 , соответственно.

Горизонтальные проекции горизонтальных следов прямых, лежащих в плоскости, определяют положение ее горизонтального следа – проводим $h'_{0\beta}$ через M'_1 и M'_2 . След $h'_{0\beta}$ не

пересекает ось Ox в пределах чертежа, поэтому строим $f''_{об}$ на основании фронтальных проекций фронтальных следов KL и LR , проводя его через N''_1 и N''_2 .

10.3.2 Прямые занимают частное положение

Плоскость может быть задана отрезками двух фронтальных, горизонтальных или профильных прямых. В этом случае их проекции на ту плоскость, которой они параллельны, должны быть параллельны также искомому следу плоскости.

10.3.2.1 Если отрезки прямых задают плоскость частного положения, то построение выполняется, как описано в п. 10.3.1.1, иначе:

10.3.2.2 Проекции отрезков прямых, не параллельные оси абсцисс, продлить до пересечения с ней. Найти проекции следов прямых в другой плоскости проекций, на проекциях, параллельных оси OX (Алгоритм 8.1).

10.3.2.3 По двум полученным проекциям следов построить след плоскости и найти точку схода следов (см. пп. 10.3.1.4, 10.3.1.5).

10.3.2.4 Второй след плоскости провести от точки схода следов параллельно одноименным проекциям отрезков прямых.

10.3.2.5 Если требуется, вычертить третий след плоскости по его координатам (см. Алгоритм 10.2).

Пример построений показан на рисунке 28.

Пусть плоскость α задана двумя фронталями AB (f_1) и CD (f_2) (рисунок 28). Продлим фронтальные проекции отрезков прямых $A''B''$ и $C''D''$ до пересечения с осью Ox , получим фронтальные проекции горизонтальных следов каждой из прямых, M''_1 и M''_2 , соответственно. Их горизонтальные проекции, M'_1 и M'_2 , лежат на горизонтальных проекциях соответствующих прямых. Через эти две точки проводим горизонтальный след плоскости $h'_{0\alpha}$. На пересечении с осью Ox находим точку схода следов X_α . От точки схода следов фронтальный след плоскости $f''_{0\alpha}$ проводим параллельно фронтальной проекции фронтали ($A''B''$ или $C''D''$).

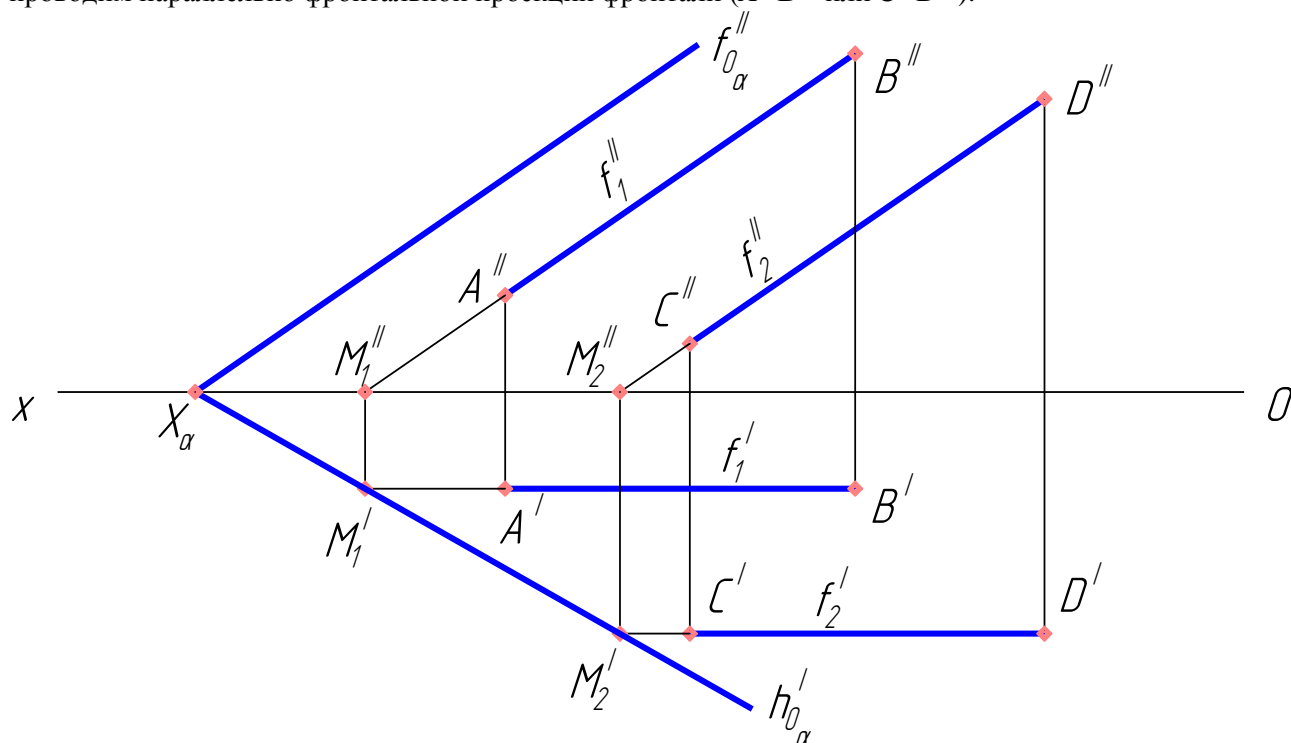


Рисунок 28 - Построение следов плоскости общего положения, заданной параллельными прямыми частного положения

10.4 Плоскость задана линией наибольшего наклона к плоскости проекций

Линия наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций также задает направление одного из следов плоскости: ее проекция в той плоскости проекций, к которой она определяет угол наклона, перпендикулярна одноименному следу содержащей ее плоскости. Такое ее свойство позволяет выполнять, казалось бы, неразрешимую задачу – строить плоскость, заданную единственной линией.

10.4.1 Продлить проекции линии наибольшего наклона до пересечения с осью абсцисс и определить фронтальный и горизонтальный следы этой прямой (Алгоритм 8.1).

10.4.2 В плоскости проекций, к которой задан наибольший наклон, через одноименную проекцию одноименного следа линии наибольшего наклона прочертить след плоскости под прямым углом к ее проекции.

10.4.3 Пересечение этого следа плоскости с осью Ox задает положение точки схода следов. Из нее через след прямой на втором следе плоскости провести недостающий след.

10.4.4 Если требуется, вычертить третий след плоскости по ее координатам (см. Алгоритм 10.2).

Рисунок 29 иллюстрирует построение следов плоскости, заданной линией наибольшего ската – так называют линию наибольшего наклона к горизонтальной плоскости проекций.

Продлив проекции отрезка KL , находим проекции следов прямой, горизонтального (M' и M'') и фронтального (N' и N''). Через M' , перпендикулярно $K'L'$ проводим горизонтальный след плоскости $h'_{0\alpha}$. На пересечении с осью Ox находим точку схода следов X_α . Через X_α и N'' проводим фронтальный след плоскости $f''_{0\alpha}$.

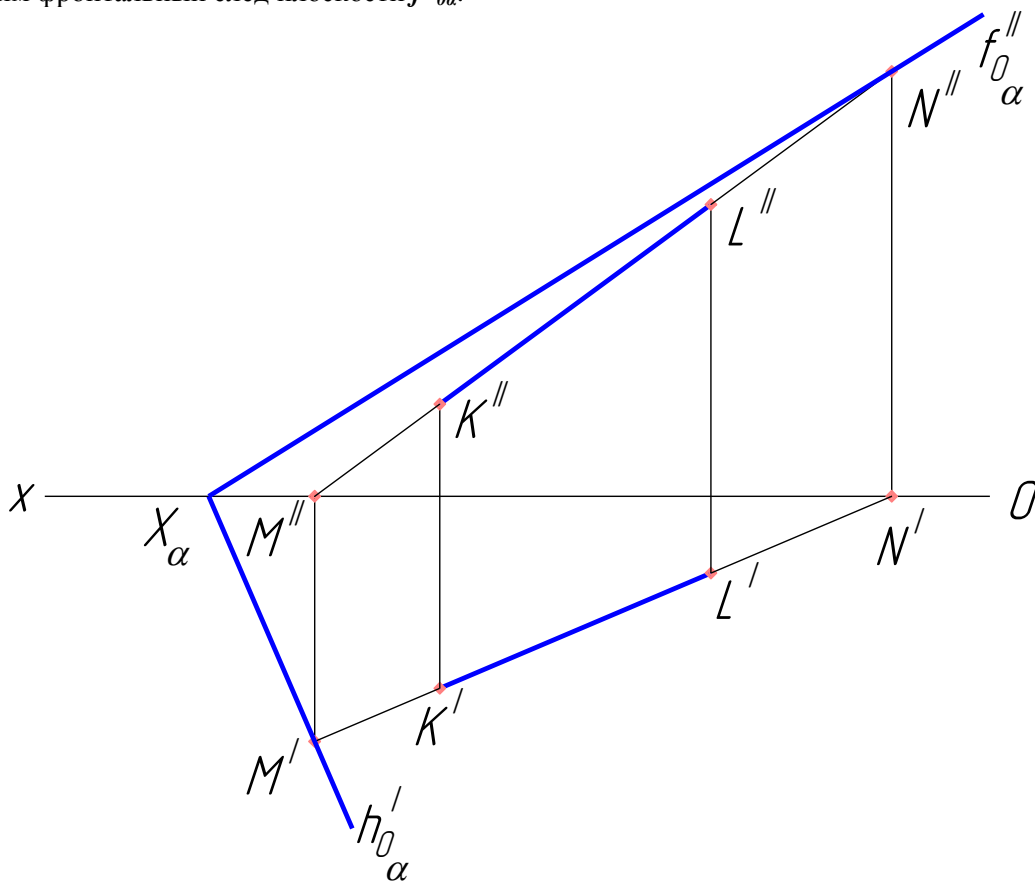


Рисунок 29 - Построение следов плоскости общего положения, заданной линией наибольшего ската

11 Построение проекций геометрических элементов, принадлежащих плоскости

11.1 Прямая линия в плоскости, заданной следами

11.1.1 Линия общего положения

Обычно постановка задачи такова: дана одна проекция отрезка прямой, лежащей в заданной плоскости; необходимо построить вторую или обе недостающие проекции. Порядок построений, в общем, состоит из действий, обратных Алгоритму 10.3.1, и опирается на то же положение о взаимосвязи следов плоскости и принадлежащей ей прямой.

11.1.1.1 Если плоскость занимает проецирующее положение и задана проекция прямой, не лежащая на проецирующем следе, решение не требует дополнительных построений, так как в этом случае вторая проекция лежит на проецирующем следе плоскости (рисунок 30, а). Если же задана проекция, совпадающая с проецирующим следом, задача имеет бесконечное множество решений, так как любой отрезок, находящийся в проекционной связи с заданной проекцией, будет отвечать условию задачи.

Для плоскости общего положения требуется выполнить ряд построений:

- 11.1.1.2 Пересечь заданную проекцию отрезка прямой с одноименным следом содержащей его плоскости, затем с осью абсцисс. Полученные точки пересечения – проекции соответствующих следов прямой (см. Алгоритм 8.1).
- 11.1.1.3 Найти вторые проекции следов прямой: вторая проекция точки, принадлежащей следу плоскости, лежит на оси Ox , и, наоборот, вторая проекция точки на оси абсцисс принадлежит второму следу заданной плоскости.
- 11.1.1.4 По двум полученным во второй плоскости проекций точкам провести вторую проекцию прямой, а на ней отметить ограничивающие отрезок точки.
- 11.1.1.5 При необходимости, третью проекцию прямой (отрезка прямой) построить по двум имеющимся (см. Алгоритм 6.1).

Рисунок 30, б иллюстрирует построение второй проекции прямой общего положения в плоскости общего положения, заданной следами.

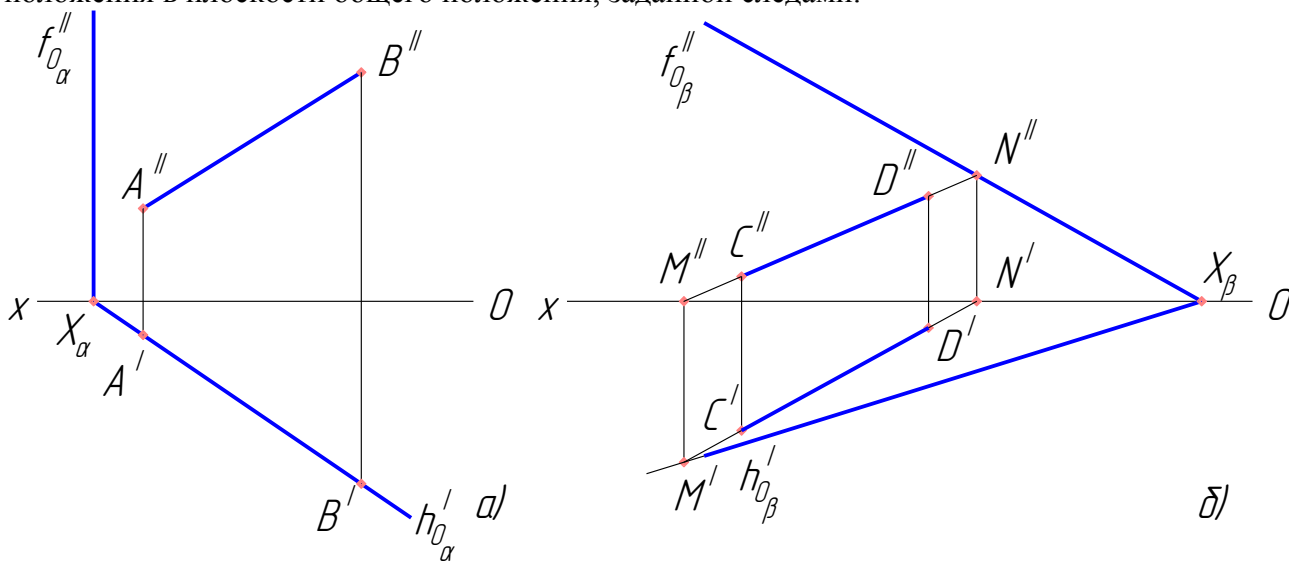


Рисунок 30 - Отрезок прямой линии, принадлежащей заданной следами плоскости:
а) горизонтально проецирующей; б) общего положения

Пусть задана плоскость β и горизонтальная проекция прямой $C'D'$, лежащей в этой плоскости (рисунок 30, б). Продлим $C'D'$, и на пересечении с горизонтальным следом плоскости $h'_{\text{ор}}$ найдем горизонтальную проекцию горизонтального следа прямой M' , а на пересечении с Ox – проекцию фронтального следа N' . Точка M'' лежит на оси Ox , а N'' – на фронтальном следе плоскости $f''_{\text{ор}}$. Проекции концов отрезка C'' и D'' находим в проекционной связи на прямой $M''N''$.

11.1.2 Линия, параллельная плоскости проекций

Построение опирается на свойства, изложенные в п. 10.3.2. Кроме задания направления следа содержащей ее плоскости, такая линия обладает еще одним свойством: ее удаленность от плоскости проекций, к которой она параллельна, в двух других плоскостях проекций видна в натуральную величину. Это качество позволяет называть такие прямые *линиями уровня*. Их свойства сведены в таблицу 12.

Таблица 12 - Особенности линий уровня плоскости

Прямая, параллельная	π_1	π_2	π_3
Наименование	<i>горизонталь (h)</i>	<i>фронталь (f)</i>	<i>профильная прямая (p)</i>
Параллельность проекции следу плоскости	<i>горизонтальная – горизонтальному следу</i>	<i>фронтальная – фронтальному следу</i>	<i>профильная – профильному следу</i>
Постоянная координата	<i>z</i>	<i>y</i>	<i>x</i>
строится в плоскостях проекций	π_2, π_3	π_1, π_3	π_1, π_2

В связи с этим свойством задание, как правило, оговаривается дополнительным условием: требуется вычертить линию уровня с определенным удалением от параллельной ей плоскости проекций. Если заданная плоскость не относится к проецирующим (см. п. 11.1.1.1), порядок построений таков:

- 11.1.2.1 На требуемом расстоянии от плоскости проекций вычертить проекцию линии уровня, сохраняющую неизменную координату (см. таблицу 12).
- 11.1.2.2 Пересечь этой проекцией одноименный след заданной плоскости. В точке пересечения находится соответствующая проекция одноименного следа прямой. Вторая его проекция находится на координатной оси (см. Алгоритмы 11.1.1 и 8.1).
- 11.1.2.3 От полученного на оси следа вторая проекция прямой проводится параллельно следу плоскости, направление которого она задает.
- 11.1.2.4 При необходимости, третья проекция прямой (отрезка прямой) может быть построена по двум имеющимся (см. Алгоритм 6.1).

Рисунок 31 иллюстрирует положение линий уровня в плоскостях общего положения.

Если в плоскости α необходимо построить горизонталь на заданном удалении от плоскости π_1 (рисунок 31, а), это расстояние в качестве постоянной координаты z может быть отображено фронтальной проекцией горизонтали $N''I''$, параллельной оси Ox . Точка N'' на пересечении с фронтальным следом плоскости $f''_{\text{ор}\alpha}$ – фронтальная проекция фронтального следа горизонтали, ее вторая проекция N' лежит на оси Ox . Горизонтальная проекция горизонтали $N'I'$ параллельна горизонтальному следу плоскости $h'_{\text{ор}\alpha}$.

Действия при построении фронтали (рисунок 31, б) аналогичны. Только в этом случае требуемое удаление от плоскости π_2 задают горизонтальной проекцией фронтали $M'2'$, а фронтальная проекция фронтали $M'2''$ параллельна следу $f'_{\text{ор}\alpha}$.

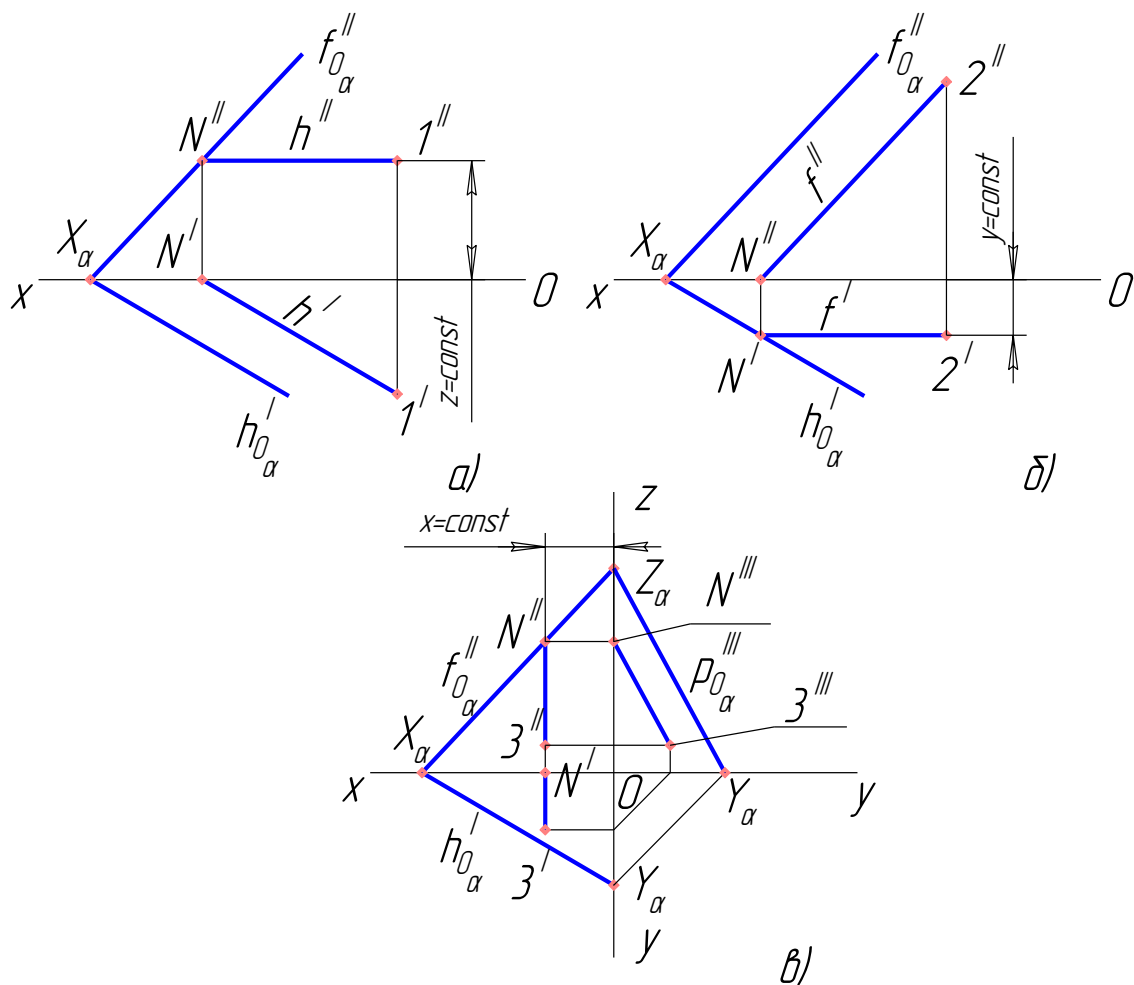


Рисунок 31 - Построение линий уровня в плоскости общего положения, заданной следами:
а) горизонтали; б) фронтали; в) профильной прямой

Если требуется построить профильную прямую плоскости α на заданном расстоянии от π_3 (рисунок 31, в), то может быть построена ее фронтальная проекция $N''Z''$ с постоянной координатой x . Профильная проекция фронтального следа прямой N''' лежит на оси Oz . Проекция $N'''Z'''$ проходит параллельно профильному следу плоскости p'''_{α} . Горизонтальная проекция $N'Z'$ строится в проекционной связи.

11.1.3 Линия наибольшего наклона к плоскости проекций

Порядок построения определяется свойствами этой особой линии плоскости, описанными в п. 10.4.

- 11.1.3.1 В плоскости проекций, к которой линия задает угол наклона, вычертить ее проекцию перпендикулярно одноименному следу плоскости.
- 11.1.3.2 Продолжить построенную проекцию до пересечения с одноименным следом и осью абсцисс.
- 11.1.3.3 Провести построения так же, как для прямой общего положения, т.е., описанные в пп. 11.1.1.3 – 11.1.1.5.

На рисунке 32 показано построение линии наибольшего наклона к фронтальной плоскости проекций.

Пусть плоскость δ задана следами. Фронтальную проекцию линии наибольшего наклона к π_2 проводим перпендикулярно к f''_{δ} . Находим фронтальные проекции следов этой прямой: горизонтального M'' – на пересечении с осью Ox , а фронтального N'' – на пересечении с фронтальным следом плоскости f''_{δ} . Строим горизонтальные проекции следов прямой: M' – на

горизонтальном следе $h'_{0\delta}$, а N' – на Ox . По горизонтальной проекции $M'N'$ можно определить угол наклона δ к π_2 (φ_{π_2}), только спроецирован он пока не в натуральную величину.

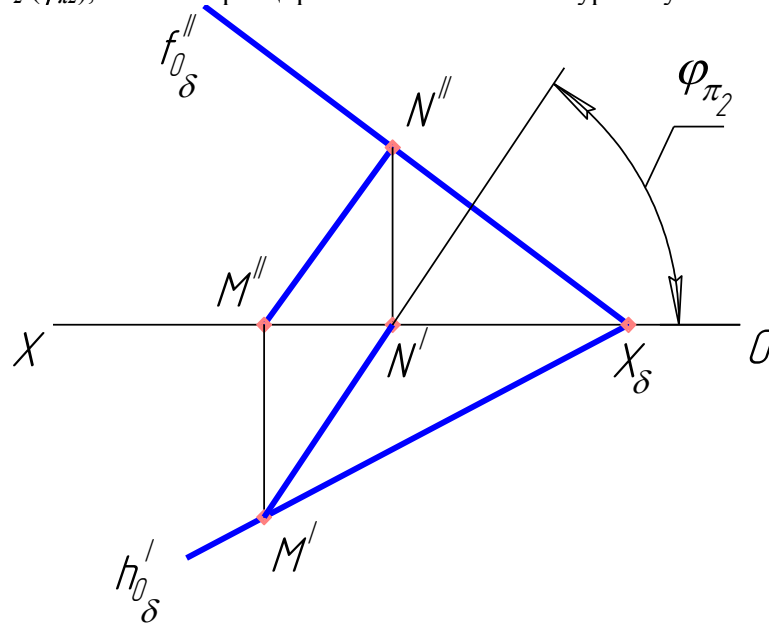


Рисунок 32 - Линия наибольшего подъема в плоскости общего положения, заданной следами

11.2 Прямая линия в плоскости, заданной точками, отрезками или плоскими фигурами

Если плоскость задана не следами, а какими-либо иными геометрическими элементами, нет необходимости строить следы плоскости, чтобы построить недостающую проекцию прямой. Можно воспользоваться утверждением: прямая принадлежит плоскости, если принадлежат плоскости две произвольные ее точки.

- 11.2.1 Продлить заданную проекцию отрезка прямой так, чтобы она пересекла две различных прямых из набора геометрических элементов, задающих плоскость.
- 11.2.2 Если точки пересечения не достижимы в плоскости чертежа, нужно провести в этой же плоскости проекций вспомогательные прямые, позволяющие найти необходимые точки пересечения. В проекционной связи построить вторые проекции этих прямых.
- 11.2.3 Получить вторые проекции точек пересечения линии, принадлежащей плоскости, с задающими плоскость геометрическими элементами (и/или вспомогательными прямыми).
- 11.2.4 Через полученные проекции точек пересечения построить искомую вторую проекцию отрезка прямой линии.
- 11.2.5 При необходимости, третья проекция прямой (отрезка прямой) может быть построена по двум имеющимся (см. Алгоритм 6.1).

Этот Алгоритм подходит для построения как прямой общего положения, так и особых линий плоскости (рисунок 33).

Плоскость на рисунке 33, а задана точкой A и отрезком BC . Задана фронтальная проекция отрезка $K''L''$, принадлежащего плоскости. Требуется построить его горизонтальную проекцию.

Продлим $K''L''$. Она пересекает принадлежащие плоскости отрезки $B''C''$ и $A''C''$ в точках I'' и $2''$ соответственно. Найдем в проекционной связи точки I' и $2'$ на горизонтальных проекциях тех же отрезков. Построим горизонтальную проекцию прямой $I'2'$ и на ней в проекционной связи отметим точки K' и L' .

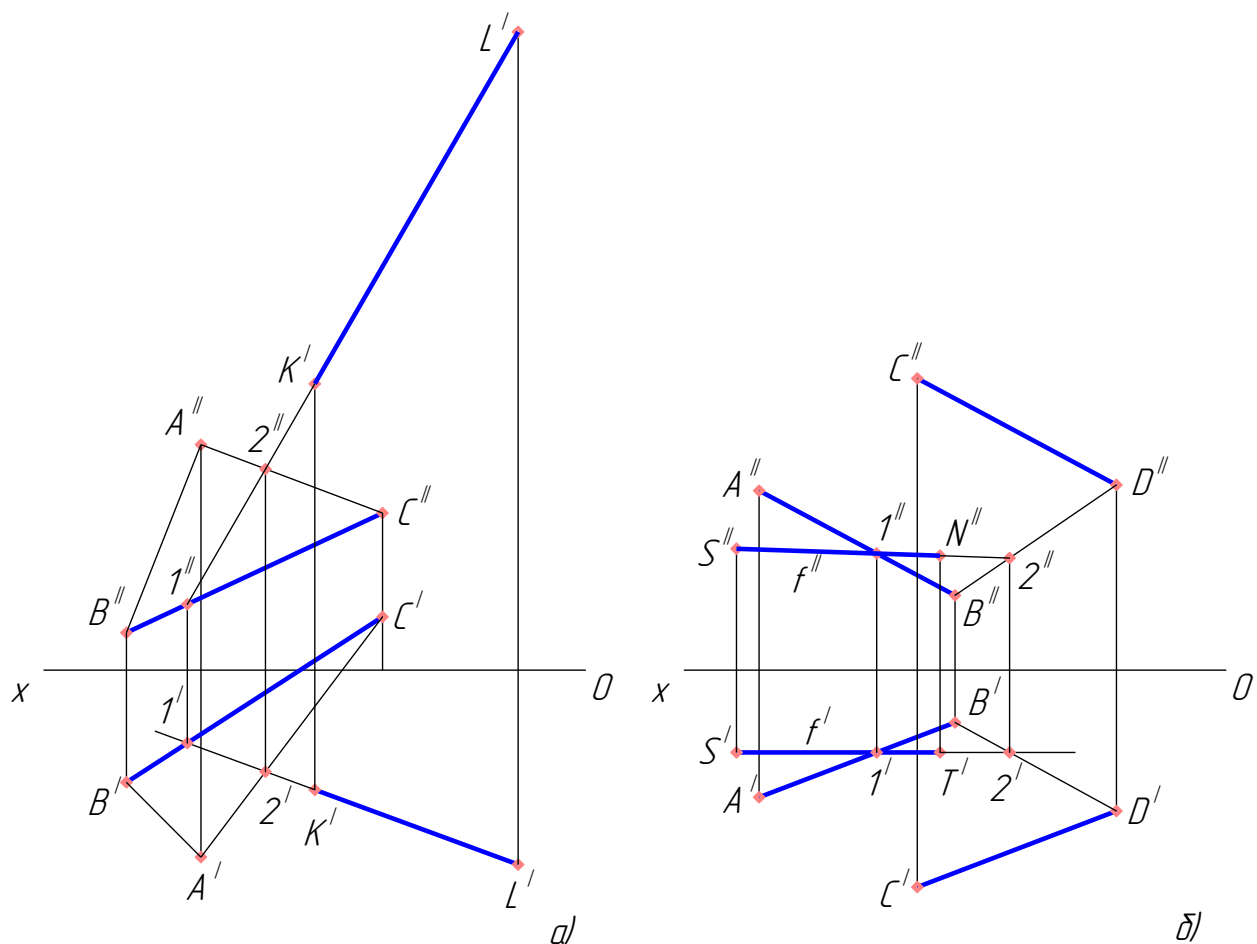


Рисунок 33 - Прямая линия в плоскостях, не заданных следами: а) отрезок прямой общего положения; б) отрезок фронтали

На рисунке 33, б требуется построить фронталь плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD , проходящую через точку S (дана горизонтальная проекция точки S'). Горизонтальная проекция фронтали $S'T'$ параллельна оси Ox . Она пересекает проекции прямых $A'B'$ и $B'D'$ в точках $1'$ и $2'$, соответственно. Строим в проекционной связи точки $1''$ и $2''$ и проводим через них фронтальную проекцию фронтали $S''T''$, задающую направление фронтального следа плоскости.

11.3 Точка в плоскости

Построение опирается на следующее положение: точка принадлежит плоскости, если лежит на линии, содержащейся в плоскости.

- 11.3.1 Заданную проекцию точки заключить в произвольную линию, принадлежащую заданной плоскости. Построенная проекция может относиться к линии как частного (рисунок 34, а), так и общего положения (рисунок 34, б).
- 11.3.2 Построить вторую проекцию этой вспомогательной линии в соответствии с Алгоритмом 11.1 или 11.2 в зависимости от способа задания плоскости.
- 11.3.3 Искомую вторую проекцию точки найти в проекционной связи на второй проекции вспомогательной прямой.

По этому же алгоритму достраивают вторую проекцию плоской фигуры, если плоскость задана многоугольником (рисунок 34, б).

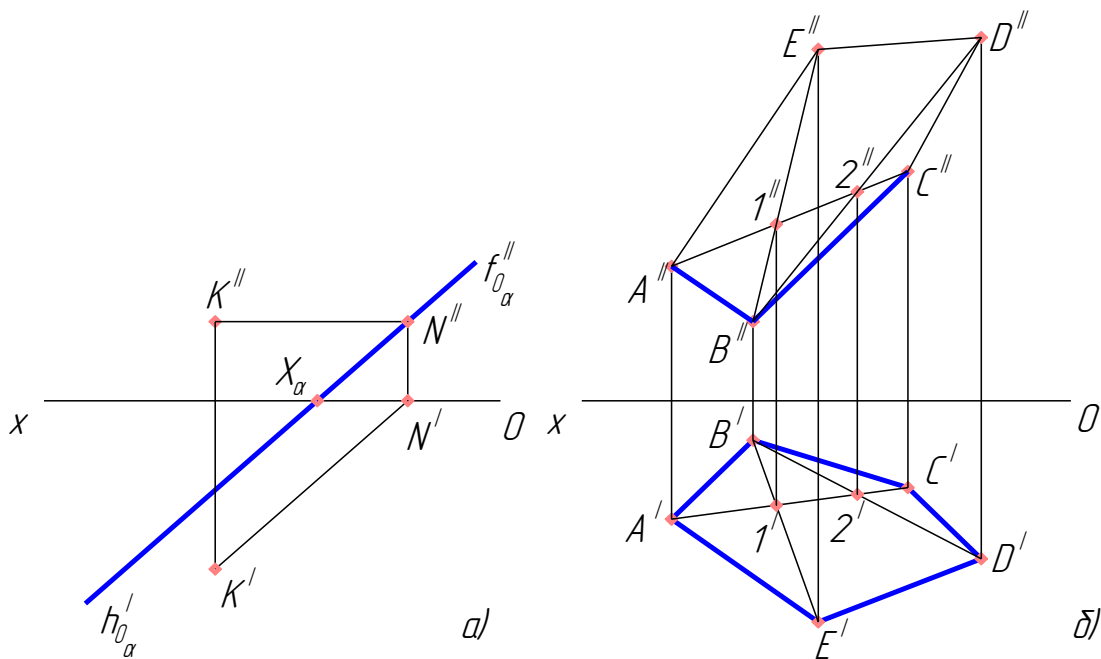


Рисунок 34 - Построение вторых проекций точек, принадлежащих плоскости: а) в плоскости, заданной следами; б) в плоскости, заданной многоугольником

В плоскости α ($h_{0\alpha}', f_{0\alpha}''$) лежит точка K , для которой задана горизонтальная проекция K' (рисунок 34, а). Необходимо построить K'' . Проведем через K' горизонтальную проекцию горизонтали плоскости α параллельно следу $h_{0\alpha}'$. В точке пересечения ею оси Ox находится горизонтальная проекция ее фронтального следа N' . Точка N'' лежит в проекционной связи на фронтальном следе плоскости $f_{0\alpha}''$. Через нее проходит параллельная оси Ox фронтальная проекция горизонтали, на которой в проекционной связи находится проекция K'' .

Фронтальная проекция пятиугольника $ABCDE$ задана только двумя отрезками $A''B''$ и $B''C''$. Остальные отрезки требуется достроить с учетом их принадлежности плоскости (рисунок 28, б). Проводим на горизонтальной проекции диагонали $A'C'$, $B'E'$ и $B'D'$. Парно они дают точки пересечения $1'$ и $2'$. Находим в проекционной связи фронтальные проекции этих точек $1''$ и $2''$ на $A''C''$. Через эти точки проводим вторые проекции диагоналей $B''1''$ и $B''2''$. На них в проекционной связи отмечаем точки E'' и D'' , соответственно.

Описанные в параграфах 10 и 11 Алгоритмы, как правило, входят в виде компонентов в более сложные задания (рисунки 35, 36).

Рисунок 35 приводит пример оформления Задачи № 5 из альбома домашних заданий, решение которой проводится с применением Алгоритмов 10.3 и 11.1.2 или 11.2, в зависимости от выбранного порядка построений.

Рисунок 36 – это пример решенной в соответствии с Алгоритмами 10.2 и 11.1 и оформленной Задачи № 6 из альбома заданий.

12 Прямая, параллельная плоскости

Типовое условие выглядит так: заданы плоскость, одна из проекций прямой (отрезка прямой) и точка, принадлежащая второй проекции прямой – необходимо построить вторую проекцию прямой, параллельной заданной плоскости. Решение базируется на положении: прямая параллельна плоскости, если она параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости.

12.1 В пределах заданных элементов плоскости построить проекцию вспомогательной прямой, лежащей в плоскости, параллельную заданной проекции прямой (отрезка прямой).

Перв. примен.																																			
Справ. №																																			
Подп. и дата	<p>Построить следы плоскости. В плоскости провести горизонталь KL на расстоянии 15 мм от плоскости π_1 и фронталь FR на расстоянии 20 мм от плоскости π_2.</p>																																		
Инв. № докл.																																			
Взам. инв. №	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;">Изм.</td> <td style="width: 10%;">Лист</td> <td style="width: 20%;">№ докум.</td> <td style="width: 10%;">Подп.</td> <td style="width: 10%;">Дата</td> </tr> <tr> <td>Разраб.</td> <td>Гнилуша</td> <td></td> <td></td> <td>03.05.14</td> </tr> <tr> <td>Пров.</td> <td>Лютарович</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Н.контр.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Утв.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <h2 style="margin: 0;">Задача № 5</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3> </div> <table border="1" style="width: 150px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Лит.</td> <td style="width: 33%;">Лист</td> <td style="width: 33%;">Листов</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 10px;"> Копировал Формат A4 </div>				Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Разраб.	Гнилуша			03.05.14	Пров.	Лютарович				Н.контр.					Утв.					Лит.	Лист	Листов			1
Изм.					Лист	№ докум.	Подп.	Дата																											
Разраб.	Гнилуша			03.05.14																															
Пров.	Лютарович																																		
Н.контр.																																			
Утв.																																			
Лит.	Лист	Листов																																	
		1																																	
Подп. и дата																																			
Инв. № подл.	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <h2 style="margin: 0;">Задача № 5</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3> </div> <table border="1" style="width: 150px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Лит.</td> <td style="width: 33%;">Лист</td> <td style="width: 33%;">Листов</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 10px;"> Копировал Формат A4 </div>				Лит.	Лист	Листов			1																									
Лит.	Лист	Листов																																	
		1																																	

Рисунок 35 - Пример оформления задания, выполненного по Алгоритмам 10.3 и 11.1.2 (11.2)

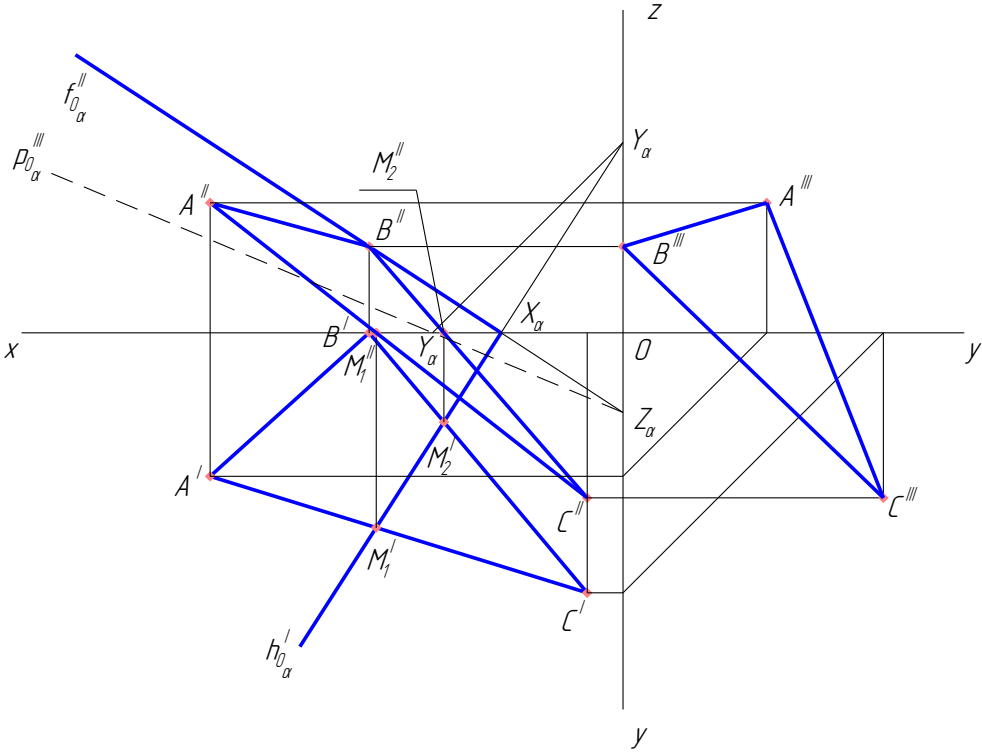
Перв. примен.							
Справ. №							
Подп. и дата		<p>Построить третий след плоскости и две недостающие проекции лежащей в ней фигуры.</p>					
Инв. № докл.							
Взам. инв. №		<p>Задача № 6 Вариант 31</p>					
Подп. и дата							
Инв. № подл.		Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	<p>СПбГТИ(ТУ) группа 300</p>
		Разраб.	Гнилуша			03.05.14	
		Пров.	Лютарович				
		Н.контр.					
		Утв.					Копировал
						Формат A4	

Рисунок 36 - Задание, при решении которого применяются Алгоритмы 10.2 и 11.1

- 12.2 Построить вторую проекцию вспомогательной прямой, лежащей в плоскости (см. Алгоритм 11.1 или 11.2).
- 12.3 Провести через заданную точку вторую проекцию прямой параллельно полученной второй проекции прямой в плоскости.
- 12.4 Ограничить вторую проекцию отрезка заданной прямой, используя проекционные связи.

На рисунке 37 показано построение второй проекции прямой, параллельной заданной плоскости, для различных способов ее задания. Отметим, что в случае проецирующего положения плоскости (рисунок 37, б) дополнительных построений не требуется (см. п. 11.1.1.1).

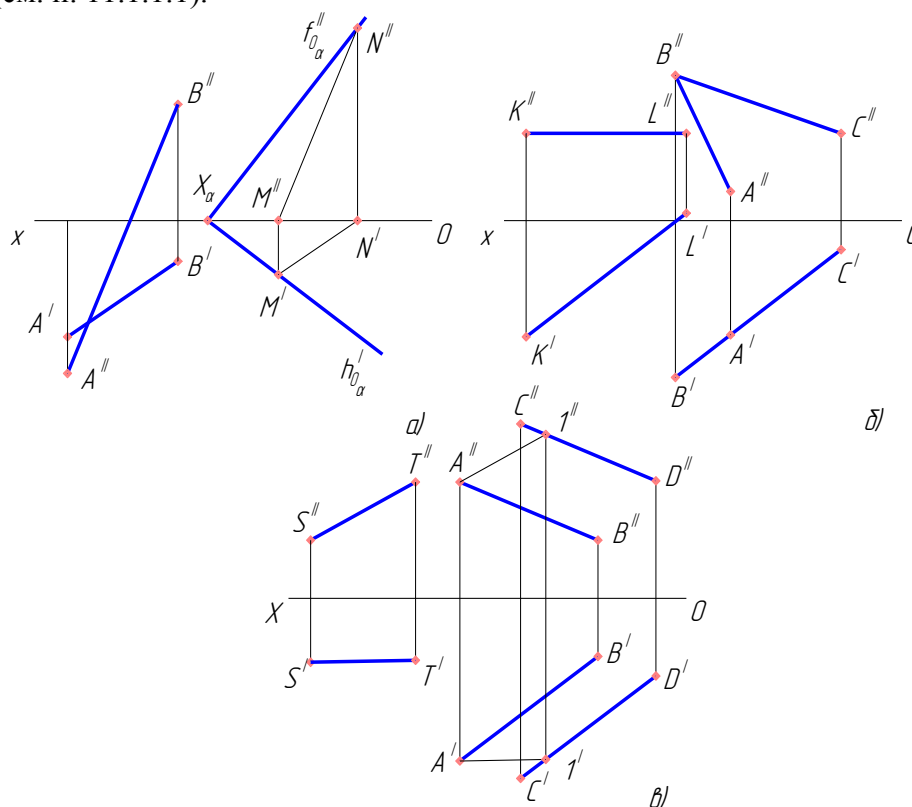


Рисунок 37 - Прямая, параллельная заданной плоскости: а) плоскости общего положения, заданной следами; б) горизонтально проецирующей плоскости; в) плоскости, заданной параллельными прямыми

Пусть задана следами плоскость α , горизонтальная проекция прямой $A'B'$, параллельной этой плоскости, и точка B'' , принадлежащая фронтальной проекции этой прямой (рисунок 37, а). Построим принадлежащую α горизонтальную проекцию прямой $M'N'$, параллельную $A'B'$. Вторая проекция M'' , лежащей на $h'_{0\alpha}$, находится на оси Ox , а фронтальная проекция N'' , принадлежащей Ox , лежит на $f'_{0\alpha}$. Через B'' проводим искомую проекцию прямой параллельно $M''N''$. Проекцию A'' находим в проекционной связи с A' .

На рисунке 37, в требуется построить T'' при заданных $S''T''$ и S' , учитывая то, что прямая ST параллельна плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD . Построим фронтальную проекцию прямой $A'I''$ параллельно $S''T''$. Найдем в проекционной связи точку I' на отрезке $C'D'$. Проводим $S'T'$ параллельно $A'I'$.

Плоскость на рисунке 37, б задана отрезками AB и BC , причем $A'B'$ и $B'C'$ лежат на одной прямой. Следовательно, это – горизонтально-проецирующая плоскость. Горизонтальная проекция любой прямой, параллельной этой плоскости, должна быть параллельна ее горизонтальному следу. Проводим $K'L'$ параллельно $B'C'$.

Рисунок 38 приводит пример оформления Задачи № 7 из альбома домашних заданий.

Перв. примен.				
Справ. №				
Подп. и дата				
Взам. инв. №				
Инв. № дудл.				
Подп. и дата				
Инв. № подл.				

Построить недостающую проекцию прямой AB , параллельной заданной плоскости.
 Следов заданной плоскости не находить.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	<h2 style="margin: 0;">Задача № 7</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3>	Лит.	Лист	Листов
Разраб.	Гнилуша			03.05.14				
Проб.	Лютарович							
Н.контр.						<h2 style="margin: 0;">группа 300</h2>		
Утв.								

Копировал
Формат A4

Рисунок 38 - Задание, выполненное по Алгоритму 12

13 Параллельные плоскости

Если требуется через заданную точку построить плоскость, параллельную другой, заданной плоскости, то решение основывают на следующем положении: одноименные следы параллельных плоскостей параллельны друг другу.

13.1 Плоскость задана следами

- 13.1.1 Через заданную точку провести проекции линии уровня (горизонталь или фронталь) искомой плоскости: ее соответствующая проекция должна быть параллельна одноименному следу заданной плоскости (см. таблицу 12).
- 13.1.2 Точка пересечения этой проекции с осью абсцисс определит положение одного из следов прямой (Алгоритм 8.1), а следовательно, даст точку на следе плоскости (Алгоритм 10.3).
- 13.1.3 Через точку на следе плоскости (вторую проекцию следа прямой) провести след искомой плоскости параллельно соответствующему следу заданной плоскости до пересечения с осью Ox .
- 13.1.4 От точки пересечения – точки схода следов – вычертить второй след искомой плоскости параллельно одноименному следу заданной плоскости.

13.2 Плоскость задана иными геометрическими элементами

- 13.2.1 Для определения направления следов заданной плоскости в пределах геометрических элементов построить горизонталь и фронталь заданной плоскости (см. Табл. 12 и Алгоритм 11.2).
- 13.2.2 Далее действовать так же, как в Алгоритме 13.1 (пп. 13.1.1 – 13.1.4).

Примеры построений для различных способов задания плоскости даны на рисунке 39.

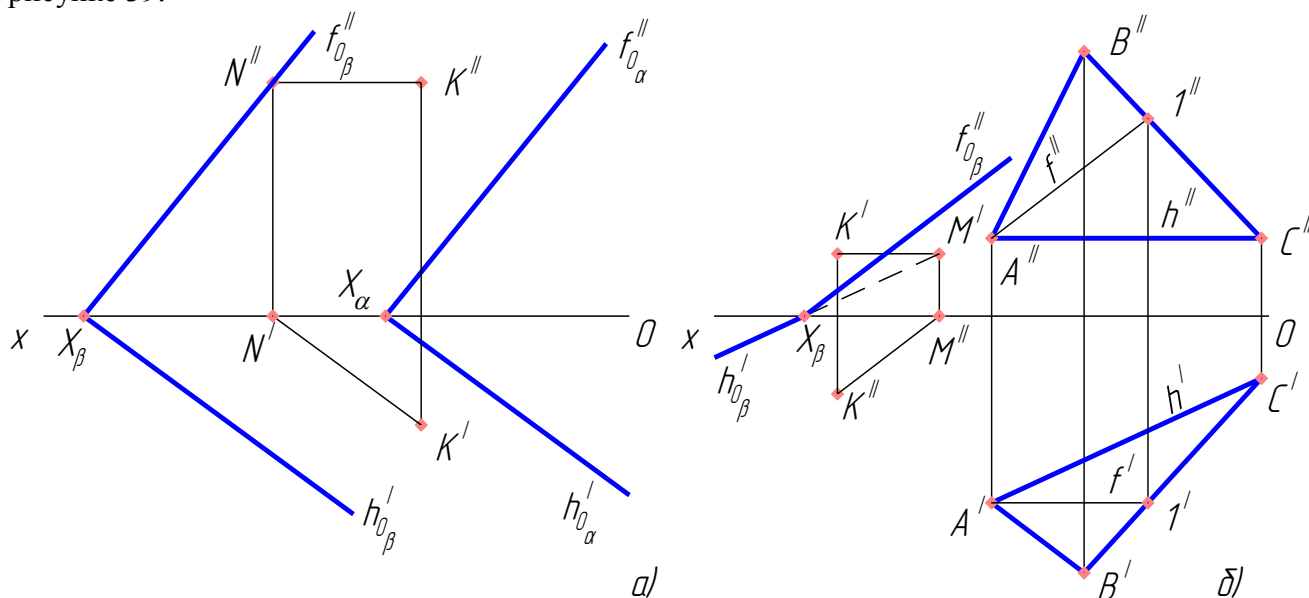


Рисунок 39 - Построение плоскости, параллельной заданной: а) следами; б) треугольником

Пусть требуется через точку K построить плоскость β , параллельную заданной следами плоскости α (рисунок 39, а). Проведем через K' горизонтальную проекцию горизонтали искомой плоскости параллельно следу $h'_{0\alpha}$. На пересечении с осью Ox находится горизонтальная проекция фронтального следа этой прямой, точка N' . Точка N'' находится в проекционной связи на

фронтальной проекции горизонтали – прямой, параллельной Ox , проведенной через K'' . Через N'' проводим фронтальный след искомой плоскости $f''_{0\beta}$ до пересечения с Ox – точки схода следов X_p . Из этой точки проводим горизонтальный след $h'_{0\beta}$ параллельно $h'_{0\alpha}$.

Перед аналогичными построениями на рисунке 39, б в треугольнике ABC построены (отмечены) горизонталь $AC (h)$ и фронталь $AI (f)$. Следы β найдены с помощью фронтали KM .

На рисунке 40 приводится пример оформления задачи №8 из альбома домашних заданий.

14 Прямая, перпендикулярная к плоскости

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она составляет прямой угол с любой прямой, принадлежащей этой плоскости. Прямой угол проецируется в истинную величину в том случае, когда одна из его сторон лежит на прямой частного положения. Следовательно, проекции перпендикуляра к плоскости составляют прямой угол с соответствующими ее следами.

14.1 Восстановление перпендикуляра заданной длины к плоскости

Само построение перпендикуляра к плоскости оказывается задачей в одно действие, однако этот элемент часто входит в различные комбинированные задачи. Например, требуется восстановить отрезок перпендикуляра заданной длины из точки, принадлежащей плоскости. Решение задачи состоит из следующих этапов:

- 14.1.1 Построить вторую проекцию точки, принадлежащей плоскости (основания перпендикуляра), проведя через нее прямую, принадлежащую плоскости (см. Алгоритм 11.3).
- 14.1.2 Если плоскость задана не следами, определить направления ее следов, построив горизонталь и фронталь плоскости. Если плоскость задана следами, сразу перейти к следующему этапу.
- 14.1.3 Из точки в плоскости построить отрезок перпендикуляра произвольной длины: его горизонтальная проекция должна быть перпендикулярна направлению горизонтального следа плоскости, а фронтальная – направлению фронтального следа.
- 14.1.4 Определить истинную длину этого отрезка любым известным способом (наиболее удобным оказывается построение методом треугольника).
- 14.1.5 На направлении истинной длины отложить заданную длину перпендикуляра.
- 14.1.6 Методом пропорционального деления отрезка (см. Алгоритм 9.1) перенести полученную точку окончания перпендикуляра на проекцию прямой, выбранную в качестве базы для построения истинной длины. Вторая проекция перпендикуляра заданной длины строится в проекционной связи.

Пусть заданы плоскость $\alpha (h'_{0\alpha} f''_{0\alpha})$ и одна из проекций точки, принадлежащей этой плоскости (A''). Необходимо восстановить перпендикуляр AK к α заданной длины L (рисунок 41, а).

Для определения второй проекции точки A проводим через нее горизонталь плоскости α : проекция $A''N''$ параллельна оси Ox ; точка N'' принадлежит следу $f''_{0\alpha}$; точка N' лежит на оси Ox ; проекция $A'N'$ параллельна следу $h'_{0\alpha}$; горизонтальная проекция точки A' находится в проекционной связи с фронтальной проекцией A'' .

Строим отрезок произвольной длины AI , перпендикулярный плоскости α : для этого $A'I'$ проводим под прямым углом к $h'_{0\alpha}$, $A''I''$ – перпендикулярно $f''_{0\alpha}$.

Методом треугольника определяем истинную длину отрезка AI : под прямым углом к $A''I''$ откладываем отрезок $I'I^*$, равный $(y_A - y_I)$. Луч $A'I^*$ задает направление истинных длин для прямой, перпендикулярной к α , проведенной через точку A .

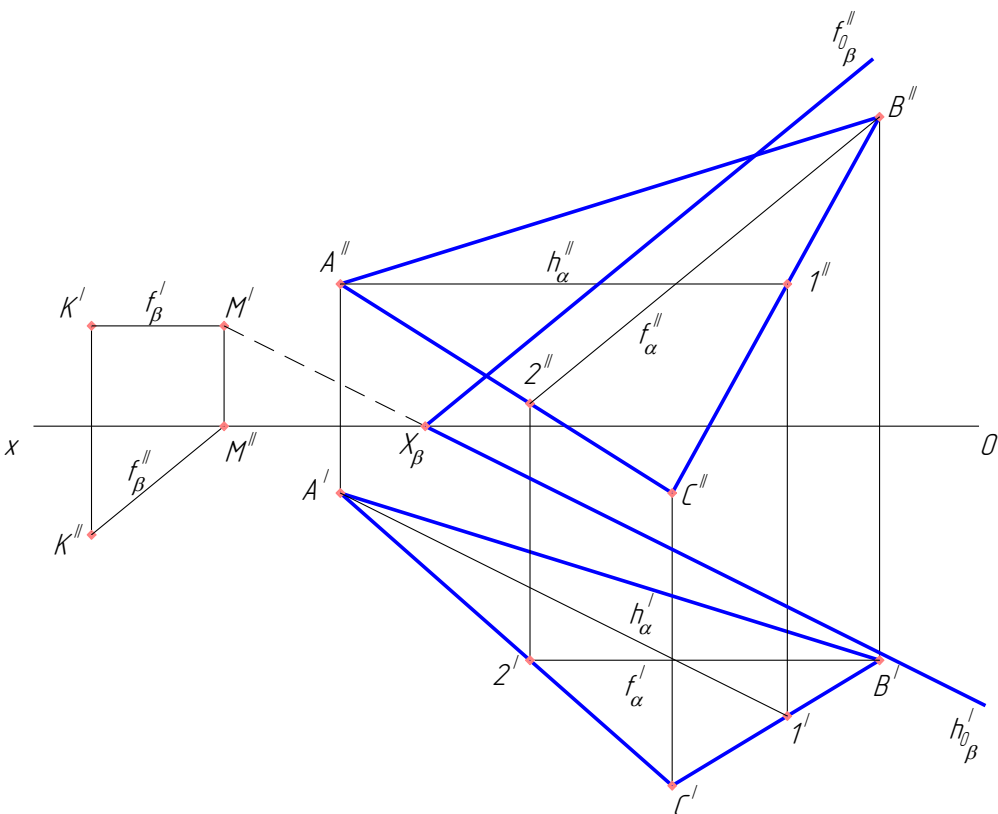
Перв. примен.								
Справ. №								
Подп. и дата	Инв. № докл.	Взам. инв. №	<p>Через точку K провести плоскость β, параллельную плоскости α. Плоскость β определить следами.</p>					
Подп. и дата	Инв. № подл.							
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	<h2 style="margin: 0;">Задача №8</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3>	Лит.	Лист	Листов
Разраб.	Гнилуша	03.05.14						
Пров.	Лютарович							
Н.контр.								
Утв.								
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> Копировал Формат A4 </div>						<h2 style="margin: 0;">группа 300</h2>		

Рисунок 40 - Задача, решенная по Алгоритму 13

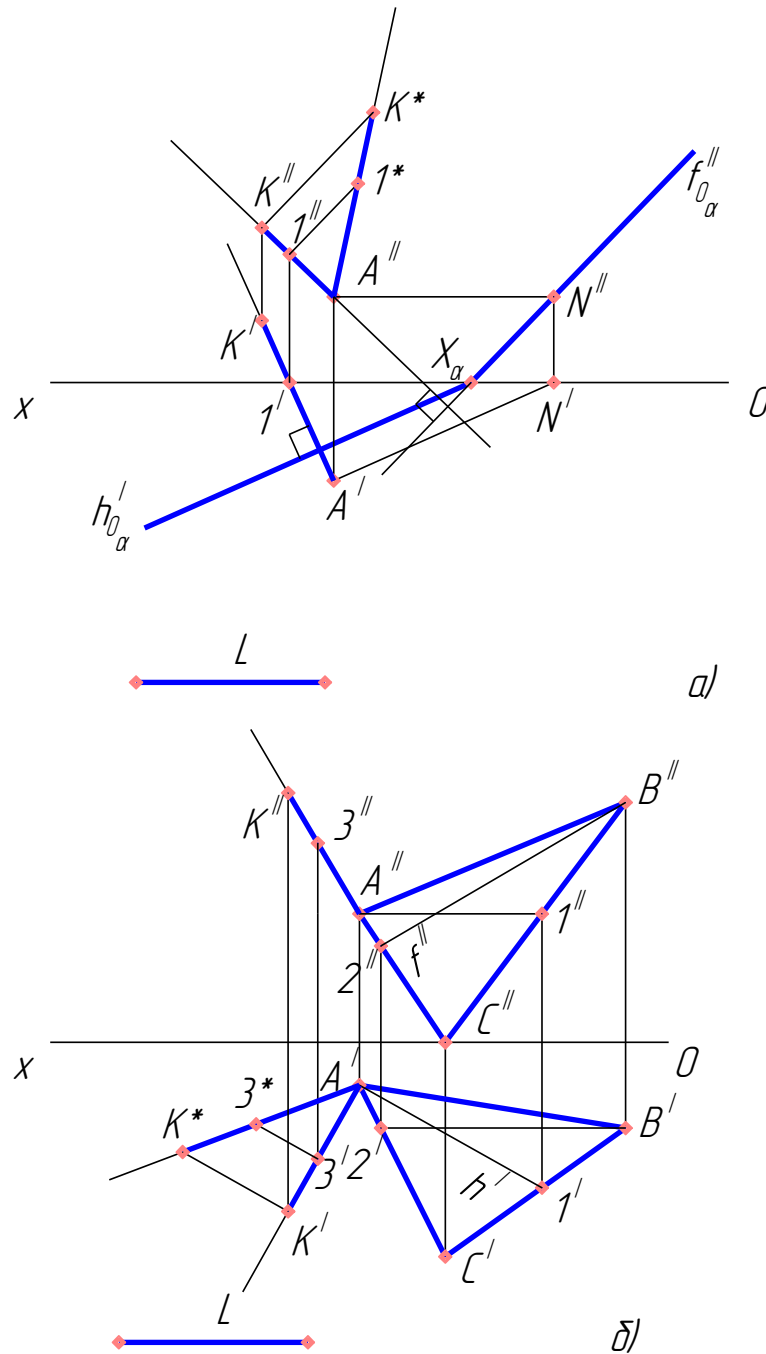


Рисунок 41 - Построение перпендикуляра заданной длины к заданной плоскости: а) плоскость задана следами; б) плоскость задана треугольником

На этом направлении откладываем заданную длину перпендикуляра к плоскости α : длина $A''K^*$ равна L . Переносим полученную конечную точку перпендикуляра на фронтальную проекцию: K^*K'' проводим параллельно $I'I''$. Горизонтальную проекцию K' находим в проекционной связи. Задача решена.

В задаче на рисунке 41, б требуется построить перпендикуляр AK к плоскости, заданной треугольником ABC .

Решение проводится аналогично, однако прежде чем строить перпендикуляр, необходимо определить направление следов плоскости. Для этого строим горизонталь $A'I$ и фронталь $B'2$. Горизонтальная проекция горизонтали (h') $A'I'$ задает направление горизонтального следа, а фронтальная проекция фронтали (f'') $B''2''$ – направление фронтального следа плоскости. Проекция перпендикуляра строятся под прямым углом к этим направлениям, соответственно.

14.2 Плоскость, перпендикулярная к прямой

Если требуется решить обратную задачу, т.е. через точку заданной прямой построить перпендикулярную ей плоскость, следует действовать так:

- 14.2.1 Через заданную точку провести фронталь или горизонталь искомой плоскости таким образом, чтобы ФПФ или ГПГ была перпендикулярна соответствующей проекции прямой.
- 14.2.2 Найти один из следов этой прямой.
- 14.2.3 Через соответствующую проекцию следа прямой частного положения под прямым углом к одноименной проекции прямой провести след плоскости до пересечения с координатной осью.
- 14.2.4 Из точки схода следов построить второй след плоскости перпендикулярно одноименной проекции заданной прямой.

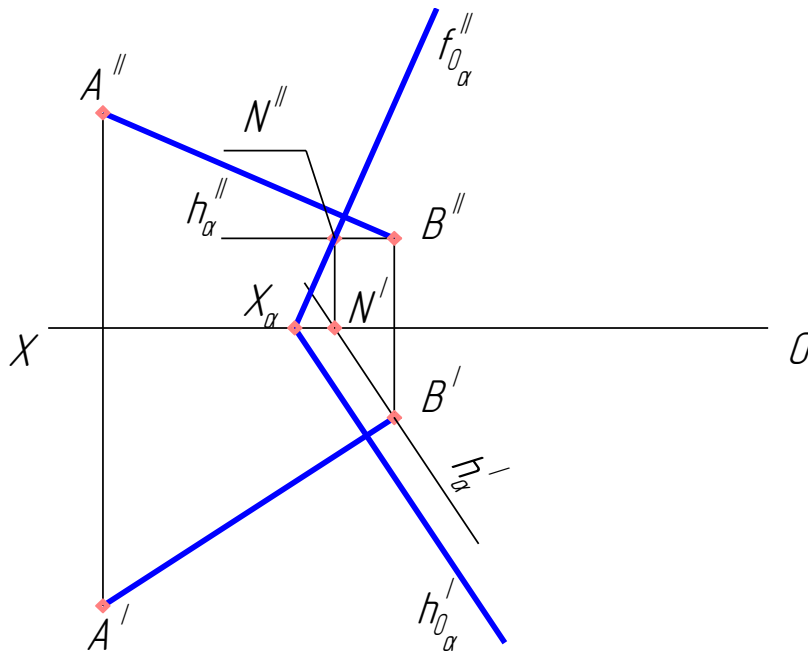


Рисунок 42 - Построение плоскости, перпендикулярной заданной прямой

Пусть через точку **B** заданной прямой **AB** необходимо построить перпендикулярную ей плоскость α (рисунок 42).

Построим через точку **B** горизонталь искомой плоскости: **B'N'** перпендикулярна горизонтальной проекции прямой **A'B'**; фронтальная проекция горизонтали параллельна оси **Ox**.

На пересечении горизонтальной проекции горизонтали **B'N'** с **Ox** отмечаем точку **N'** – горизонтальную проекцию фронтального следа этой прямой. Точку **N''** находим на фронтальной проекции горизонтали в проекционной связи.

Через **N''** проводим f''_{α} перпендикулярно **A''B''**. На пересечении фронтального следа плоскости с осью **Ox** находим точку схода следов **X $_{\alpha}$** .

Горизонтальный след искомой плоскости h'_{α} вычерчиваем из **X $_{\alpha}$** под прямым углом к **A'B'**. Задача решена.

15 Взаимно перпендикулярные плоскости

Известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

Через точку в пространстве можно провести бесконечное множество плоскостей, находящихся под прямым углом к заданной плоскости. Для того чтобы решение было однозначным, задают дополнительное условие: например, можно потребовать построить плоскость, перпендикулярную заданной, проходящую через заданную прямую. В этом случае решение является совокупностью уже рассмотренных алгоритмов:

- 15.1 Через одну из точек заданной прямой (как правило, один из концов отрезка прямой) построить перпендикуляр к заданной плоскости (см. Алгоритм 14.1, п. 14.1.2, 14.1.3).

- 15.2 Заданная прямая и построенный перпендикуляр определяют искомую плоскость. Если эту плоскость требуется определить следами, выполнить переход от плоскости, заданной пересекающимися прямыми, к заданию следами (Алгоритм 10.3).

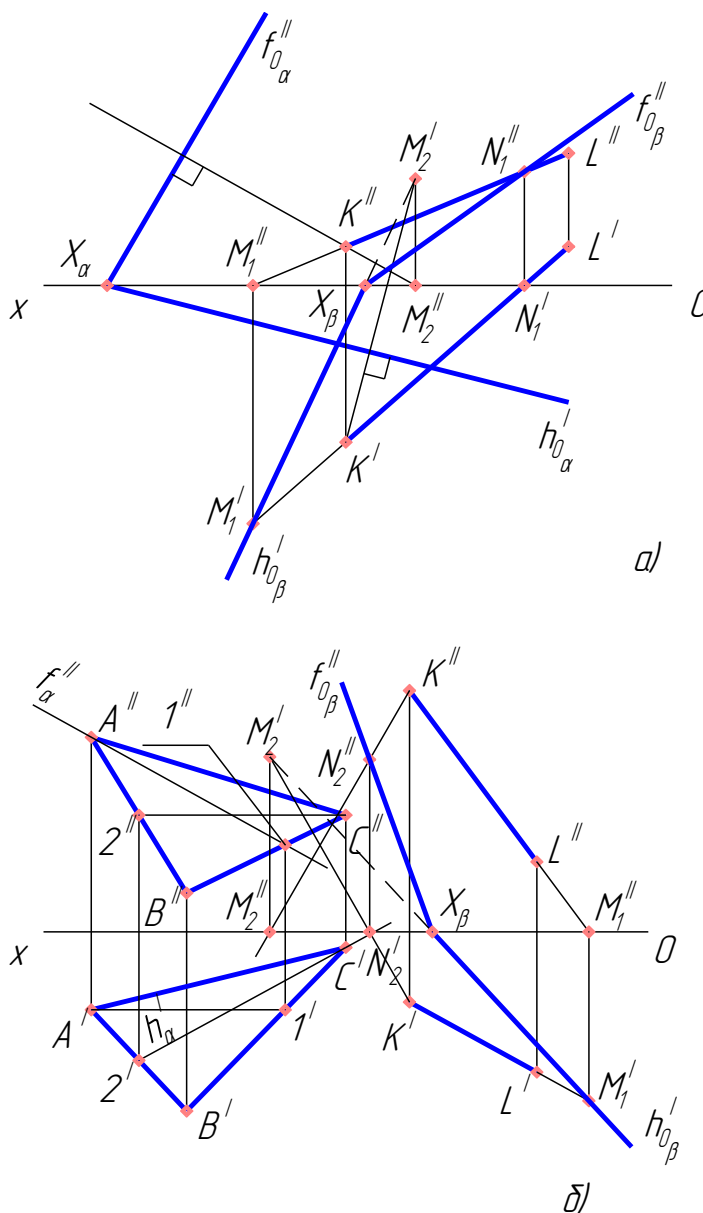


Рисунок 43 - Построение плоскости, перпендикулярной заданной: а) плоскость задана следами;
б) плоскость задана треугольником

Пусть необходимо построить плоскость β , перпендикулярную к плоскости α , заданной треугольником ABC , и проходящую через прямую KL (рисунок 43, б).

Определяем направления следов заданной плоскости: проводим горизонтальную проекцию фронтали $A'I'$ ($f_{0\alpha}'$) параллельно оси Ox , построенная в проекционной связи фронтальная проекция фронтали $A''I''$ задает направление $f_{0\alpha}''$; проводим фронтальную проекцию горизонтали $C'2'$ ($h_{0\alpha}'$) параллельно оси Ox , при этом $C'2'$ задает направление горизонтального следа плоскости $h_{0\alpha}'$.

Из точки K прямой KL опускаем перпендикуляр на плоскость α : его горизонтальная проекция $K'N_2'$ проходит перпендикулярно к $C'2'$, а фронтальная проекция $K''N_2''$ – под прямым углом к $A'I'$.

Строим следы плоскости, определяемой пересекающимися прямыми KL и KN_2 .

Находим следы прямой, перпендикулярной к плоскости α : пересечение ее горизонтальной проекции с осью Ox дает горизонтальную проекцию фронтального следа N'_2 ; точка N''_2 определяется в проекционной связи; на пересечении $K''N''_2$ с Ox отмечаем фронтальную проекцию горизонтального следа M''_2 , горизонтальная проекция горизонтального следа M'_2 строится в проекционной связи.

Аналогично находим горизонтальный след заданной прямой KL : на пересечении продолжения фронтальной проекции отрезка $K''L''$ с Ox отмечаем M''_1 , горизонтальная проекция M'_1 находится в проекционной связи.

Две полученные горизонтальные проекции горизонтальных следов пересекающихся прямых позволяют провести горизонтальный след искомой плоскости: $h'_{\text{ор}}$ строится через M'_1 и M'_2 .

Пересечение $h'_{\text{ор}}$ с осью Ox позволяет получить точку схода следов X_β . Через нее и N''_2 проводим фронтальный след искомой плоскости – $f''_{\text{ор}}$. Задача решена.

Если плоскость задана следами (рисунок 43, а), задача решается аналогично. В этапе определения направлений следов заданной плоскости нет необходимости.

На рисунке 44 представлена одна из задач №9 из альбома домашних заданий.

16 Пересечение плоскостей

Плоскости пересекаются по прямой линии. Следовательно, для того чтобы определить линию пересечения плоскостей, в общем случае необходимо найти две различные точки, лежащие на этой прямой.

16.1 Обе плоскости заданы следами

16.1.1 Плоскости общего положения, следы которых пересекаются в пределах чертежа

Одноименные следы плоскостей лежат в одной плоскости – плоскости проекций. Поэтому точка пересечения одноименных следов является проекцией точки, лежащей на линии пересечения плоскостей. Порядок действий таков:

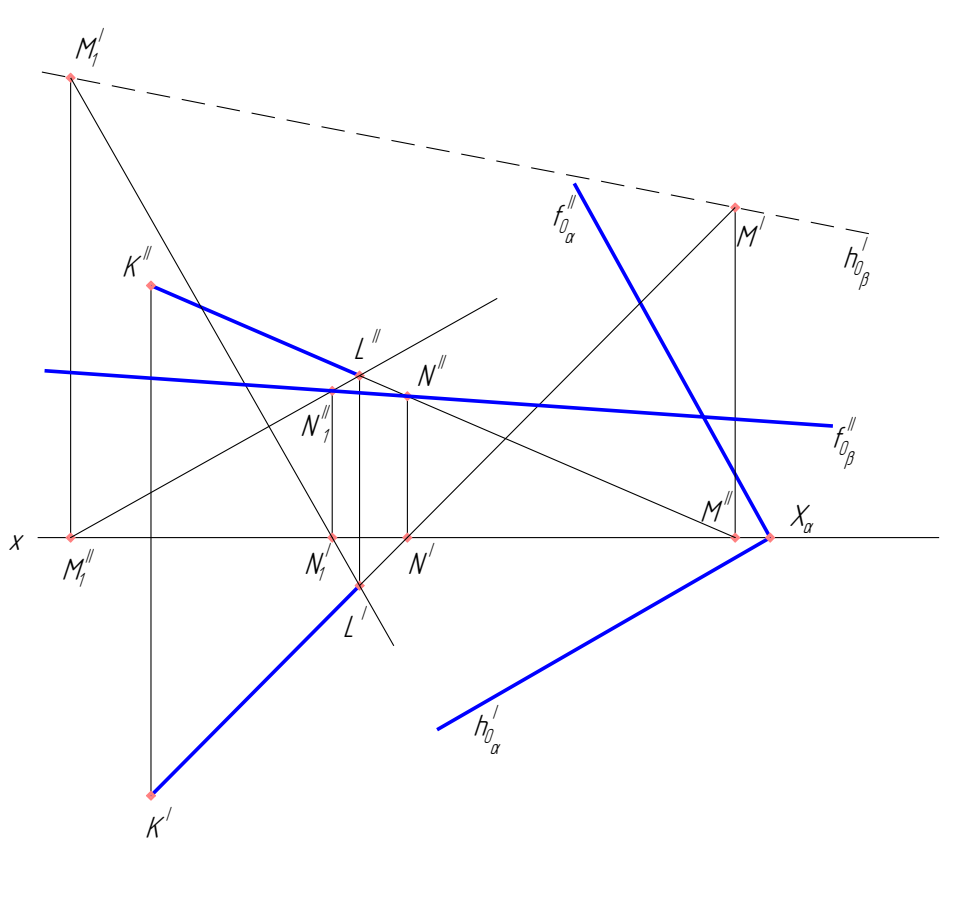
- 16.1.1.1 Обозначить точку пересечения одноименных следов плоскостей. Это точка частного положения, так как она лежит в плоскости проекций. Найти вторую проекцию этой точки: она лежит на координатной оси.
- 16.1.1.2 Повторить описанные в п. 16.1.1.1 действия для второй пары одноименных следов.
- 16.1.1.3 Соединить одноименные проекции точек, полученных при построениях по пп. 16.1.1.1 и 16.1.1.2.

Пример определения линии пересечения двух плоскостей, следы которых пересекаются в пределах чертежа, приведен на рисунке 45, а.

Пересечение фронтальных следов f''_{α} и f''_{β} позволяет обозначить фронтальную проекцию фронтального следа линии пересечения плоскостей N'' . Ее горизонтальная проекция N' лежит в проекционной связи на оси Ox . Пересечение горизонтальных следов h'_{α} и h'_{β} дает горизонтальную проекцию горизонтального следа линии пересечения – точку M' . Ее фронтальная проекция находится в проекционной связи на оси Ox . Соединяем одноименные проекции точек M и N : линия пересечения плоскостей α и β определена двумя проекциями – $M'N'$ и $M''N''$.

16.1.2 Пересечение с плоскостью уровня

Если задача решается в двух проекциях и одна из заданных плоскостей является горизонтальной или фронтальной плоскостью, т.е. дважды проецирующей, то в плоскости чертежа можно найти пересечение только одной пары следов. Плоскость уровня не дает следа на той плоскости проекций, которой она параллельна.

Перв. примен.																																			
Справ. №																																			
Подп. и дата	<p>Через прямую KL провести плоскость β, перпендикулярную плоскости α. Плоскость β определить следами (следов заданной плоскости не находить).</p>																																		
Взам. инв. №																																			
Инв. № дудл.	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;">Изм.</td> <td style="width: 10%;">Лист</td> <td style="width: 20%;">№ докум.</td> <td style="width: 10%;">Подп.</td> <td style="width: 10%;">Дата</td> </tr> <tr> <td>Разраб.</td> <td>Гнилуша</td> <td></td> <td></td> <td>03.05.14</td> </tr> <tr> <td>Проб.</td> <td>Лютарович</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Н.контр.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Утв.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <h2 style="margin: 0;">Задача №9</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3> </div> <table border="1" style="width: 30%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">Лит.</td> <td style="width: 33%;">Лист</td> <td style="width: 33%;">Листов</td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table> <div style="text-align: center; font-size: 1.2em;"> группа 300 </div> </div>				Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Разраб.	Гнилуша			03.05.14	Проб.	Лютарович				Н.контр.					Утв.					Лит.	Лист	Листов			
Изм.					Лист	№ докум.	Подп.	Дата																											
Разраб.	Гнилуша			03.05.14																															
Проб.	Лютарович																																		
Н.контр.																																			
Утв.																																			
Лит.	Лист	Листов																																	
Инв. № подл.																																			

Копировал
Формат A4

Рисунок 44 – Пример оформленного задания, решенного по Алгоритму 15

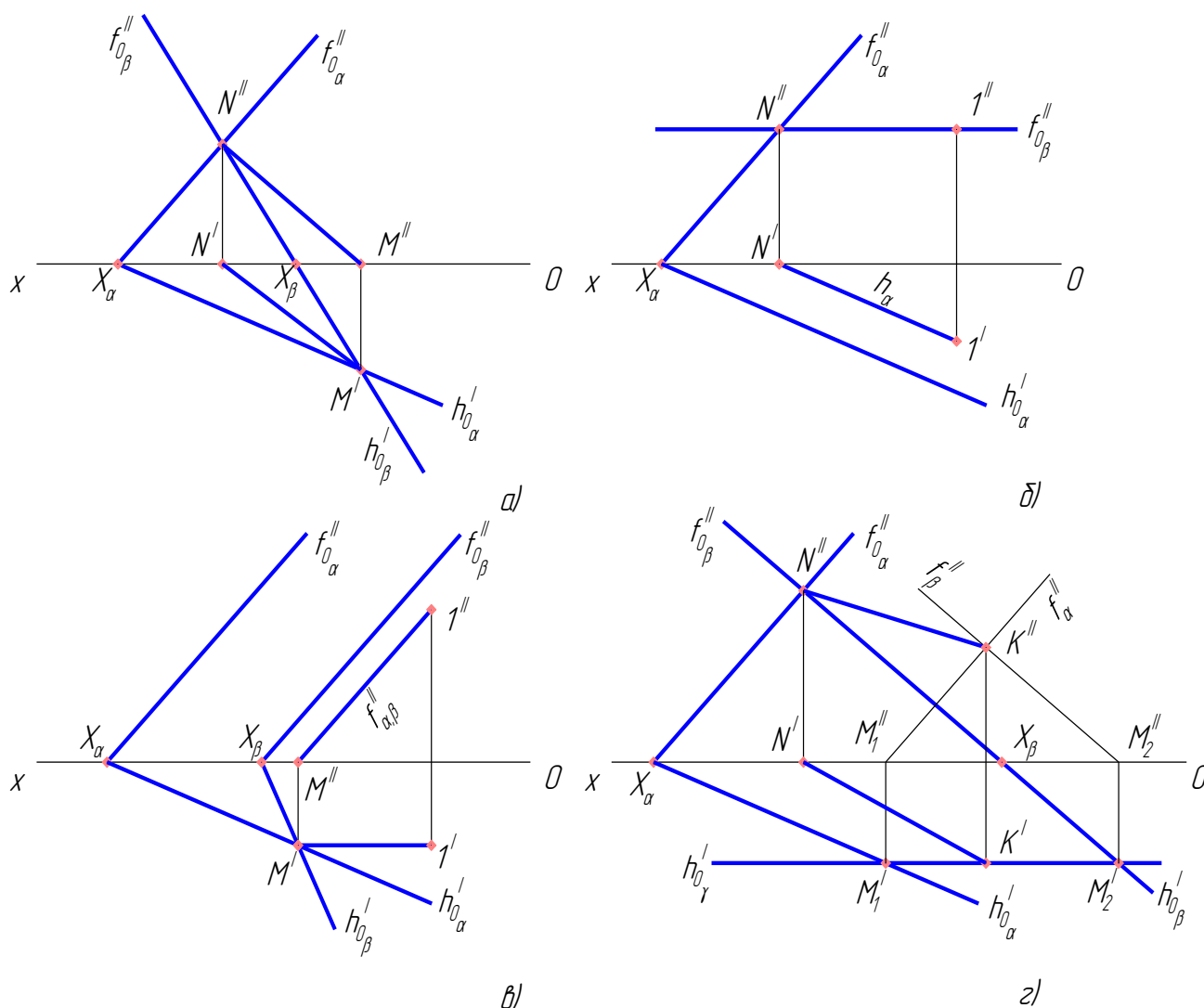


Рисунок 45 - Пересечение плоскостей, заданных следами: а) плоскости общего положения, следы которых пересекаются в пределах чертежа; б) одна из плоскостей – дважды проецирующая; в) плоскости с парой параллельных следов; г) плоскости общего положения, следы которых не пересекаются в пределах чертежа

- 16.1.2.1 Обозначить точку пересечения следа плоскости уровня и одноименного следа второй заданной плоскости. Найти вторую проекцию этой точки частного положения.
- 16.1.2.2 Линия пересечения принадлежит плоскости уровня, поэтому является горизонталью или фронталью второй из заданных плоскостей. Следовательно, одна из ее проекций должна быть обозначена на следе плоскости уровня, а вторая проводится параллельно одноименному следу второй плоскости.

На рисунке 45, б приведен пример пересечения плоскости общего положения α с горизонтальной плоскостью β .

Пересечение фронтальных следов $f''_{\alpha\alpha}$ и $f''_{\alpha\beta}$ позволяет обозначить фронтальную проекцию фронтального следа линии пересечения плоскостей N'' . Ее горизонтальная проекция N' лежит в проекционной связи на оси Ox . Плоскость β – фронтально-проецирующая, поэтому фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом $f''_{\alpha\beta}$, обозначим ее как $N''I''$ (точка I взята произвольно). Линия пересечения NI является горизонталью плоскости α , поэтому ее горизонтальную проекцию $N'I'$ проводим из точки N' параллельно $h'_{\alpha\alpha}$.

16.1.3 Плоскости, пара одноименных следов которых параллельна

В этом случае также невозможно обозначить точку пересечения одной из пары следов. Однако, параллельные следы можно рассматривать как пересекающиеся на бесконечном удалении, в т.н. *несобственной точке пространства*.

16.1.3.1 Обозначить точку пересечения одноименных пересекающихся следов. Найти вторую проекцию этой точки частного положения.

16.1.3.2 Проекция линии пересечения плоскостей в той плоскости проекций, которая дает параллельные следы, проходит через найденную в п. 16.1.3.1 точку на оси координат параллельно следам, что характерно для линии уровня плоскости. Другая проекция линии пересечения должна быть параллельна координатной оси.

На рисунке 45, в показан случай пересечения двух плоскостей общего положения с параллельными фронтальными следами.

Пересечение горизонтальных следов h'_{α} и h'_{β} позволяет обозначить горизонтальную проекцию горизонтального следа линии пересечения плоскостей M' . Ее фронтальная проекция M'' лежит в проекционной связи на оси Ox . От этой точки фронтальная проекция линии пересечения плоскостей $M''I''$ проходит параллельно взаимно параллельным следам f''_{α} и f''_{β} . Таким образом, $M'I'$ является общей фронталью этих двух плоскостей и ее горизонтальная проекция $M'I'$ параллельна оси Ox .

16.1.4 Плоскости общего положения, следы которых не пересекаются в пределах чертежа

Если заданы плоскости, одна или обе пары следов которых не пересекаются в пределах чертежа, следует воспользоваться одной или двумя вспомогательными плоскостями общего или частного положения, которые позволят легко найти линии пересечения с заданными плоскостями.

16.1.4.1 Пересечь непересекающиеся следы заданных плоскостей следом третьей, вспомогательной плоскости. В качестве вспомогательной плоскости может быть выбрана плоскость общего положения или проецирующая, которые бы пересекали оба следа каждой из плоскостей в пределах чертежа, или плоскость уровня.

16.1.4.2 Построить линии пересечения вспомогательной плоскости с каждой из заданных плоскостей (по Алгоритму 16.1.1 или 16.1.2, в зависимости от типа вычерченной вспомогательной плоскости).

16.1.4.3 Найти общую точку линий пересечения вспомогательной плоскости с заданными плоскостями. Это одна из точек, принадлежащих линии пересечения заданных плоскостей.

16.1.4.4 Если вторая пара следов заданных плоскостей пересекается в пределах чертежа, то вторую точку на искомой линии пересечения найти по п. 16.1.1.1. Если же и для второй пары следов пересечения в пределах чертежа не найти, то для них следует повторить действия, описанные в пп. 16.1.4.1-16.1.4.3.

На рисунке 45, г приведен случай пересечения двух плоскостей общего положения, горизонтальные следы которых не пересекаются в пределах чертежа.

Пересечение фронтальных следов f''_{α} и f''_{β} позволяет обозначить фронтальную проекцию фронтального следа линии пересечения плоскостей N'' . Ее горизонтальная проекция N' лежит в проекционной связи на оси Ox .

Для определения второй точки на линии пересечения воспользуемся вспомогательной фронтальной плоскостью γ , ее след h'_{γ} проходит параллельно оси Ox . Плоскость γ пересекается с плоскостью α по фронту этой плоскости, фронтальная проекция которой проходит от M''_1 параллельно следу f''_{α} . Аналогично, линия пересечения плоскостей γ и β – фронталь плоскости β , ее фронтальная проекция идет от M''_2 параллельно f''_{β} . Фронтальные проекции найденных линий

пересечения пересекаются в точке K'' . Ее горизонтальная проекция K' лежит в проекционной связи на следе дважды проецирующей плоскости $h'_{\alpha\gamma}$.

Точка K является общей для трех плоскостей – α , β и γ . Линия пересечения плоскостей α и β определена двумя проекциями – $N'K'$ и $N''K''$.

16.1.5 Пересечение двух профильно проецирующих плоскостей

Линия пересечения профильно проецирующих плоскостей может быть найдена с помощью вспомогательной плоскости общего положения, согласно Алгоритму, изложенному в параграфе 16.1.4 (рисунок 46, а). Однако более рационально эта задача решается с использованием профильной плоскости проекций:

16.1.5.1 Произвольно обозначить в пределах чертежа начало координат и ввести оси Oy и Oz .

16.1.5.2 Найти координаты заданных плоскостей и построить их профильные следы (см. Алгоритм 10.2).

16.1.5.3 Обозначить точку пересечения профильных следов: в эту точку проецируется вся линия пересечения, поэтому она должна иметь обозначение профильной проекции линии пересечения. В эту же точку проецируется и профильная проекция профильного следа линии пересечения.

16.1.5.4 Найти фронтальную и горизонтальную проекцию профильного следа линии пересечения заданных плоскостей (см. Алгоритмы 3.1, 8.1).

16.1.5.5 Вычертить фронтальную и горизонтальную проекцию линии пересечения: они идут от найденных в п. 16.1.5.4 следов параллельно оси Ox .

Линия пересечения двух профильно проецирующих плоскостей α и β с использованием профильной плоскости проекций построена на рисунке 46, б.

Введем координатные оси Oy и Oz . Пересечение следов $h'_{\alpha\alpha}$ и $f''_{\alpha\alpha}$ с координатными осями Oy и Oz , соответственно, позволяет обозначить точки схода следов Y_α и Z_α . Перенесем Y_α на ось Oy профильной плоскости проекций и через нее и Z_α проведем след $p'''_{\alpha\alpha}$.

Построение следа $p'''_{\alpha\beta}$ проведем аналогично. Следует отметить только то, что координата y_β отрицательна, поэтому перенос Y_β в этом случае производится между отрицательными ветвями осей ординат. Части следов, не принадлежащие I октанту, отмечаем штриховой линией.

Следы $p'''_{\alpha\alpha}$ и $p'''_{\alpha\beta}$ пересекаются в точке, которую мы обозначили как I''' . В эту точку проецируется вся профильная проекция линии пересечения $P'''I'''$, где P''' – профильная проекция профильного следа линии пересечения. Находим горизонтальную и фронтальную проекции P'' и P' на соответствующих координатных осях. Проекции $P'I'$ и $P''I''$ проводим параллельно оси Ox , абсцисса точки I выбрана произвольно.

Альтернативный способ построения – с помощью вспомогательной плоскости (рисунок 46, а). Пересечем профильно-проецирующие плоскости α и β плоскостью общего положения γ так, чтобы одноименные их следы попарно пересекались в пределах чертежа.

Отметим точки пересечения одноименных следов M'_1 и N''_1 (для плоскостей α и β) и M'_2 и N''_2 (для плоскостей β и γ). Найдем их вторые проекции на оси Ox . Вычертим проекции линий пересечения плоскостей α и β , отрезки $M'_1N'_1$ и $M''_1N''_1$, а также плоскостей β и γ – $M'_2N'_2$ и $M''_2N''_2$.

Одноименные проекции линий пересечения пересекаются в точке K (K' , K''), лежащей на линии пересечения плоскостей α и β .

Во второй вспомогательной плоскости нет необходимости, так как очевидно, что две профильно-проецирующие плоскости пересекаются по прямой, перпендикулярной плоскости π_3 . Следовательно, горизонтальную и фронтальную проекции линии пересечения $K'I'$ и $K''I''$, соответственно, проводим параллельно оси Ox . Точка I выбрана произвольно.

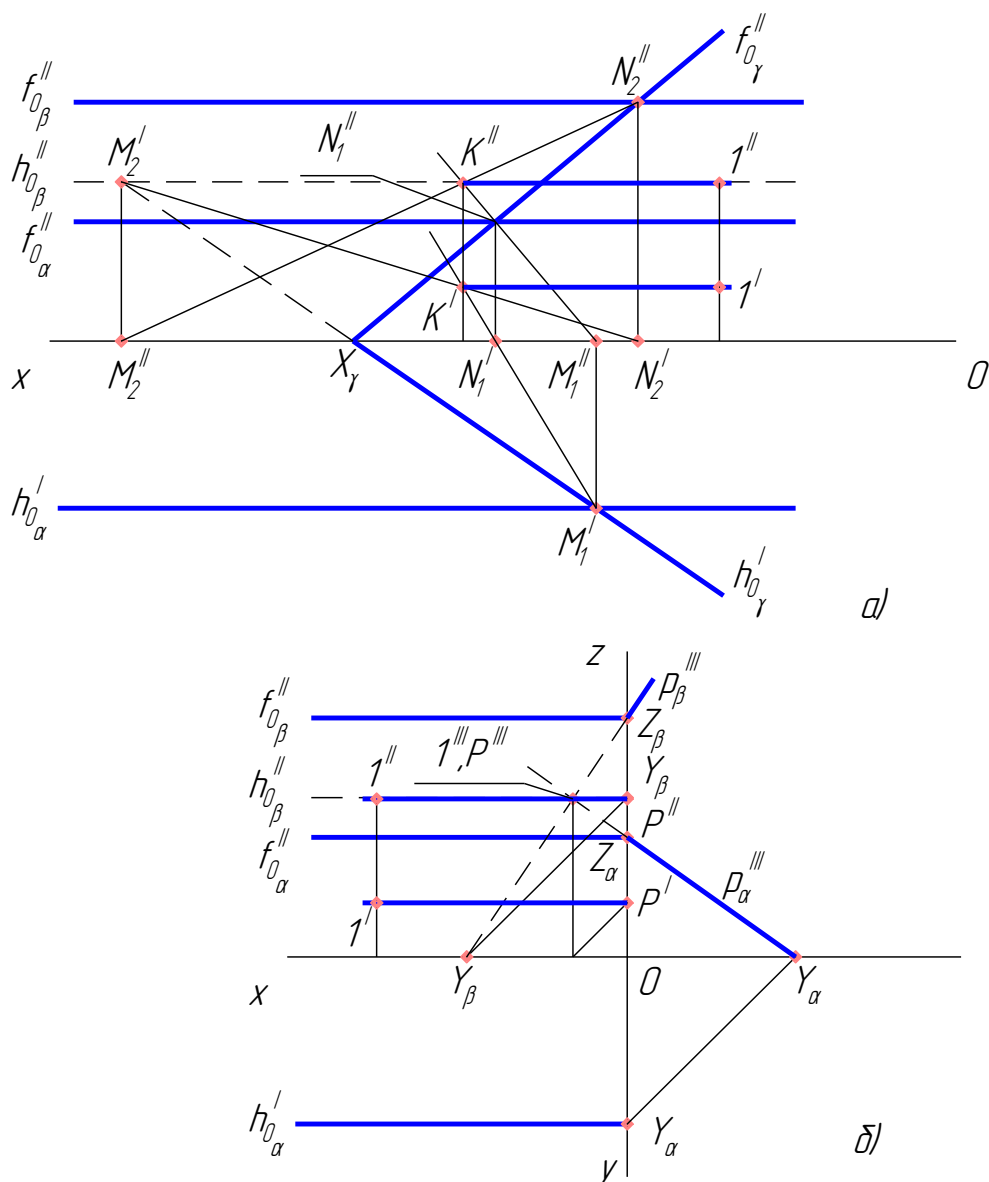


Рисунок 46 – Построение линии пересечения двух профильно проецирующих плоскостей: а) с помощью вспомогательной плоскости общего положения; б) с помощью профильной плоскости проекций

16.2 Плоскости, заданные параллельными или пересекающимися прямыми

Одним из способов определения линии пересечения плоскостей, заданных различными геометрическими элементами, является применение вспомогательных секущих плоскостей. В качестве таких плоскостей, как правило, применяются проецирующие плоскости или плоскости уровня. При решении используется свойство проецирующей плоскости, состоящее в том, что все принадлежащие ей линии в одной из плоскостей проекций отображаются на проецирующем следе.

16.2.1 Провести вспомогательную плоскость, проецирующий след которой пересекает две линии каждой из заданных плоскостей.

16.2.2 Обозначить точки, задающие проекции линий пересечения вспомогательной плоскости с заданными плоскостями. Эти точки находятся в местах пересечения проецирующим следом элементов, принадлежащих заданным плоскостям.

- 16.2.3 Найти вторые проекции этих точек на соответствующих проекциях элементов заданных плоскостей.
- 16.2.4 Вычертить вторые проекции линий пересечения вспомогательной плоскости с заданными и найти проекцию точки их пересечения. Это – проекция одной из точек на линии пересечения заданных плоскостей.
- 16.2.5 Найти другую проекцию точки, принадлежащей искомой линии пересечения, в проекционной связи на проецирующем следе вспомогательной плоскости.
- 16.2.6 Повторить действия, описанные в пп. 16.2.1 – 16.2.5, для определения проекций второй точки линии пересечения заданных плоскостей.
- 16.2.7 Соединить одноименные проекции двух точек искомой линии пересечения.

На рисунке 47, а приведен пример использования вспомогательных секущих плоскостей для нахождения линии пересечения плоскости α , заданной треугольником FRS , и плоскости β , определяемой параллельными прямыми AB и CD .

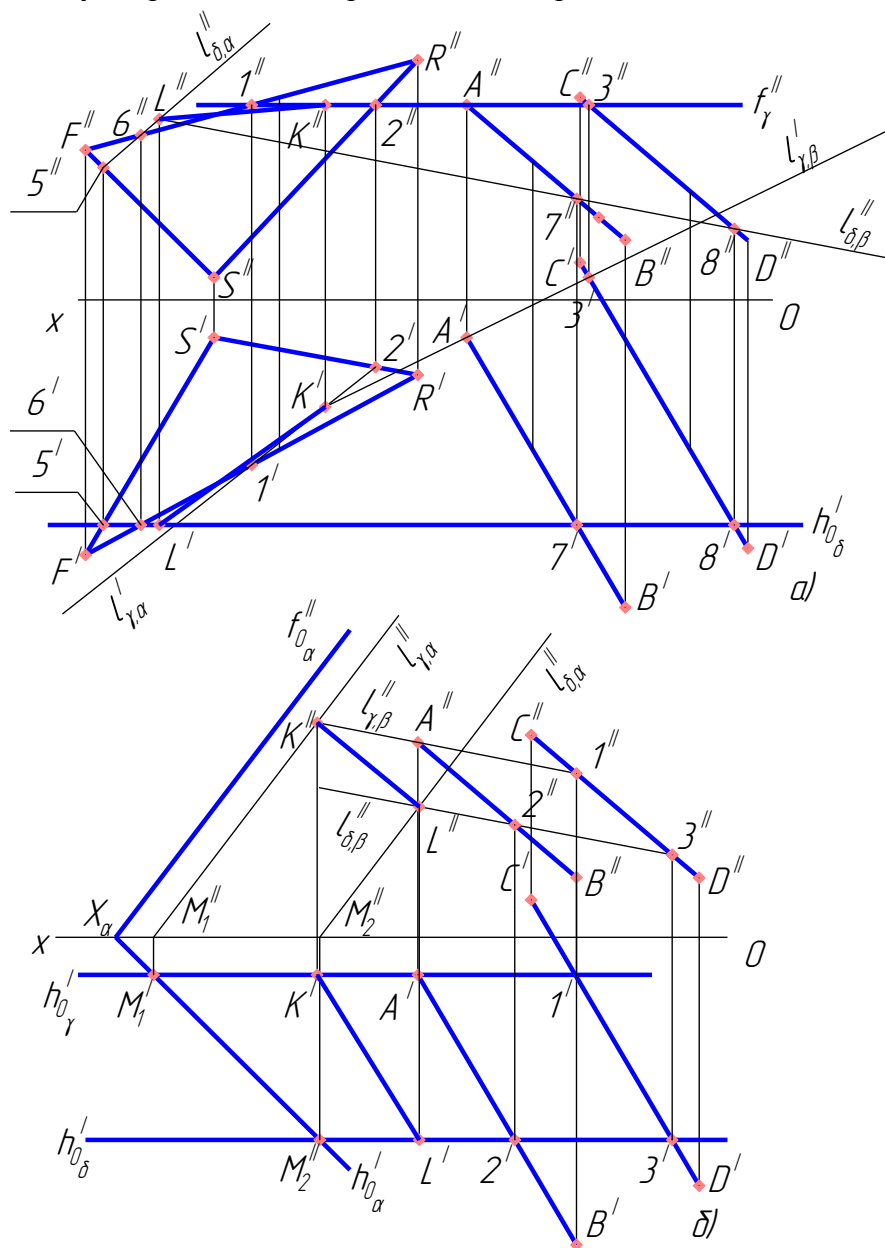


Рисунок 47 – Определение линии пересечения плоскостей с помощью вспомогательных секущих плоскостей: а) обе плоскости заданы отрезками пересекающихся или параллельных прямых; б) одна из плоскостей задана следами.

Построим плоскость γ , параллельную горизонтальной плоскости проекций. Фронтальный след $f''_{0\gamma}$ рассекает проекции сторон треугольника FRS в точках $1''$ и $2''$, соответственно, проходит через A'' и рассекает $C''D''$ в точке $3''$. Находим вторые проекции полученных точек в проекционной связи: $1'$ – на $F'R'$, $2'$ – на $S'R'$ и $3'$ – на $C'D'$. Построим горизонтальные проекции линий пересечения вспомогательной плоскости γ : с α (FRS) – $1'2'$ и с β ($ABDC$) – $A'3'$. Проекция $1'2'$ и $A'3'$ пересекаются в точке K' . Фронтальную проекцию K'' находим в проекционной связи на следе $f''_{0\gamma}$. Точка K принадлежит искомой линии пересечения плоскостей α и β .

Для определения второй точки на искомой линии пересечения используем фронтальную плоскость δ . Ее след $h'_{0\delta}$ рассекает горизонтальные проекции элементов плоскости α в точках $5'$ и $6'$, а плоскости β – в точках $7'$ и $8'$. Построенные с использованием проекционной связи фронтальные проекции прямых $5''6''$ и $7''8''$ являются проекциями линий пересечения γ с плоскостями α и β , соответственно. Они пересекаются в точке L'' , горизонтальная проекция которой, точка L' лежит на проецирующем следе $h'_{0\delta}$.

KL , линия пересечения плоскостей α и β , определена проекциями $K'L'$ и $K''L''$.

В том случае, если одна из плоскостей задана следами, также используют вспомогательные секущие плоскости. Линию пересечения вспомогательной плоскости с плоскостью, заданной отрезками прямых, находят по описанному выше Алгоритму. При построении линии пересечения вспомогательной проецирующей плоскости и плоскости, заданной следами, действуют в соответствии с Алгоритмами 16.1.1 или 16.1.2.

Решение задачи для такого случая показано на рисунке 47, б.

Плоскость α задана следами, а β – параллельными прямыми AB и CD . Для решения использованы две фронтальные плоскости – γ и δ . Первая из них проходит через точку A и пересекает горизонтальную проекцию $C'D'$ в точке $1'$. Фронтальная проекция $1''$ на $C''D''$ найдена в проекционной связи. Плоскость α фронтальной плоскостью γ рассекается по фронтали: M'_1 лежит на пересечении $h'_{0\gamma}$ и $h'_{0\alpha}$; M''_1 – в проекционной связи на оси Ox ; фронтальная проекция линии пересечения α и γ от M''_1 проходит параллельно $f''_{0\alpha}$. Эта прямая пересекает фронтальную проекцию линии пересечения γ и β в точке K'' . Горизонтальная проекция K' лежит на следе $h'_{0\gamma}$ в проекционной связи. Точка K принадлежит искомой линии пересечения плоскостей α и β .

Построения с использованием фронтальной плоскости δ проводим аналогично. При использовании взаимно параллельных секущих плоскостей необходимо следить за точностью построений: $2''3''$ должна быть параллельна $A'1'$, а M''_2L'' – параллельна M''_1K'' .

KL , линия пересечения плоскостей α и β , определена проекциями $K'L'$ и $K''L''$.

16.3 Плоскости, заданные линиями наибольшего наклона

Как уже было отмечено выше, линия наибольшего наклона к какой-либо плоскости проекций позволяет определить направление следов содержащей ее плоскости.

16.3.1 Определение линии пересечения с помощью следов

16.3.1.1 От задания плоскостей линиями наибольшего наклона перейти к следам (см. Алгоритм 10.4).

16.3.1.2 Найти линию пересечения плоскостей, определяемых следами (по одному из Алгоритмов 16.1, в зависимости от характера полученных следов).

Пример построений по этому Алгоритму для плоскостей α и β , заданных линиями наибольшего ската, приведен на рисунке 48, а.

Для плоскости α задана линия наибольшего ската AB (рисунок 48, а). Продлим ее проекции до пересечения с осью Ox и найдем фронтальную проекцию горизонтального следа этой прямой M'_1 и горизонтальную проекцию фронтального следа N'_1 . Вторые проекции этих точек находим на соответствующих проекциях прямой с использованием проекционных связей. Горизонтальный след $h'_{0\alpha}$ проходит через M'_1 под прямым углом к $A'B'$. На пересечении $h'_{0\alpha}$ с Ox находим точку схода следов X_α . От X_α фронтальный след плоскости $f''_{0\alpha}$ идет через точку N''_1 .

Следы плоскости β находим аналогично, используя следы прямой CD и ее свойство линии наибольшего ската.

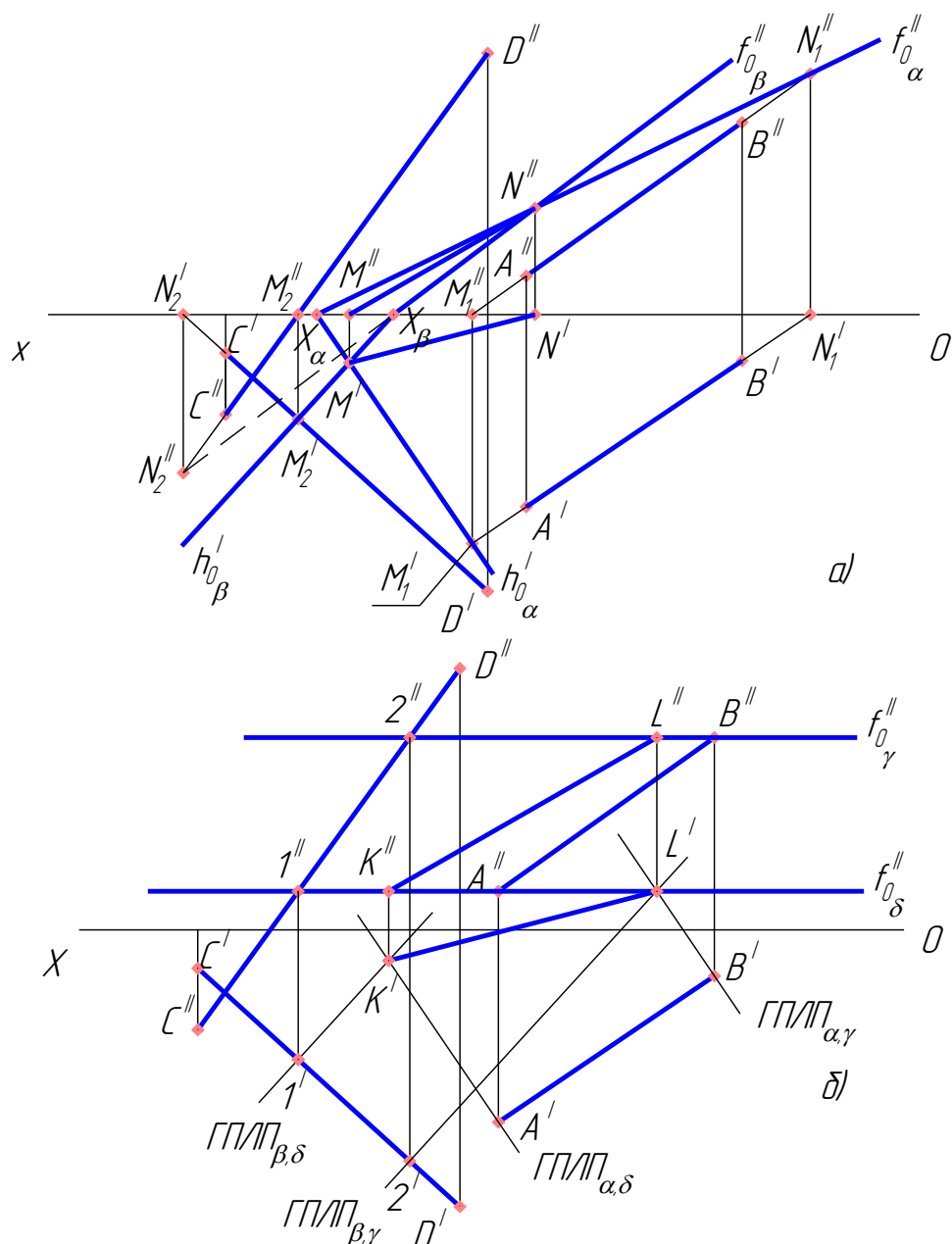


Рисунок 48 – Определение линии пересечения плоскостей, заданных линиями наибольшего ската: а) с построением их следов; б) с использованием вспомогательных секущих плоскостей

Одноименные следы плоскостей α и β пересекаются в пределах чертежа. В местах их пересечения отмечаем проекции точек, принадлежащих линии их пересечения: M' – на пересечении $h'_{0\alpha}$ и $h'_{0\beta}$, N'' – на пересечении $f''_{0\alpha}$ и $f''_{0\beta}$. Вторые проекции этих точек лежат в проекционной связи на оси Ox . Прямая MN – искомая линия пересечения плоскостей α и β .

16.3.2 Использование вспомогательных секущих плоскостей

Если обе плоскости заданы линиями наибольшего наклона к одной и той же плоскости проекций, не обязательно искать их следы. Для построения линии пересечения плоскостей можно воспользоваться Алгоритмом 16.2, наложив на него определенные ограничения.

16.3.2.1 Провести след вспомогательной дважды проецирующей плоскости, параллельной той плоскости проекций, к которой задан наибольший наклон.

- 16.3.2.2 Обозначить точки, лежащие на линиях пересечения вспомогательной плоскости с заданными плоскостями. Эти точки лежат в местах пересечения проецирующим следом проекций линий наибольшего наклона.
- 16.3.2.3 Найти вторые проекции точек линий пересечения на соответствующих проекциях линий наибольшего наклона.
- 16.3.2.4 Вспомогательная плоскость пересекает заданные плоскости по их линиям уровня. Поэтому в плоскости проекций, к которой задан наибольший наклон, проекции линий пересечения вспомогательной плоскости с заданными плоскостями следует провести перпендикулярно к одноименным проекциям линий наибольшего наклона через точки, найденные в п. 16.3.2.3.
- 16.3.2.5 Найти проекцию точки их пересечения. Это – проекция одной из точек на линии пересечения заданных плоскостей.
- 16.3.2.6 Найти другую проекцию точки, принадлежащей искомой линии пересечения, в проекционной связи на следе вспомогательной плоскости.
- 16.3.2.7 Проведя вторую вспомогательную плоскость, повторить действия, описанные в пп. 16.3.2.2 – 16.3.2.6, для определения проекций второй точки линии пересечения заданных плоскостей.
- 16.3.2.8 Соединить одноименные проекции полученных точек искомой линии пересечения.

На рисунке 48, б линия пересечения тех же плоскостей, что были заданы и на рисунке 48, а, построена с использованием двух вспомогательных горизонтальных плоскостей.

Проведем след $f''_{\delta\delta}$ через точку A'' . Проекцию $C''D''$ он пересекает в точке I'' . Проекцию I' находим на горизонтальной проекции $C'D'$ в проекционной связи. Плоскость δ пересекает α и β по их горизонталям, поэтому горизонтальную проекцию линии пересечения δ и α проводим через A' перпендикулярно к $A'B'$ (свойство линии наибольшего ската), а горизонтальную проекцию линии пересечения δ и β – через I' перпендикулярно к $C'D'$. Эти проекции пересекаются в точке K' , принадлежащей горизонтальной проекции линии пересечения α и β . Ее вторая проекция K'' лежит в проекционной связи на следе вспомогательной плоскости $f''_{\delta\delta}$.

Проекции второй точки на искомой линии пересечения L находим аналогично, с помощью вспомогательной горизонтальной плоскости γ . Для сокращения объема построений она проведена через точку B .

Прямая KL – искомая линия пересечения плоскостей α и β .

Пример оформления Задания № 10, содержащего три задачи на построение линии пересечения плоскостей, из альбома домашних заданий приведен на рисунке 49.

17 Точка встречи прямой и плоскости

17.1 Пересечение прямой и плоскости общего положения

Вне зависимости от способа задания плоскости, определение точки встречи прямой и плоскости производится по одному и тому же алгоритму:

- 17.1.1 ЗаклЮчить прямую во вспомогательную проецирующую плоскость, т.е. провести проецирующий след через одну из проекций заданной прямой.
- 17.1.2 Найти линию пересечения вспомогательной плоскости с заданной (по одному из Алгоритмов, описанных в разделе 16, в зависимости от способа ее задания).
- 17.1.3 Найти точку пересечения проекции заданной прямой и полученной в п. 17.1.2 линии пересечения плоскостей. Это – проекция искомой точки встречи.
- 17.1.4 Построить вторую проекцию точки встречи на другой проекции прямой (следе вспомогательной проецирующей плоскости) в проекционной связи.

Перв. примен.							
Справ. №							
Подп. и дата	Инв. № дудл.	Взам. инв. №	Подп. и дата	<p>Построить линию пересечения двух плоскостей. Если плоскость задана геометрическими элементами, следов её не находить.</p>			
Инв. № подл.	Изм./лист	№ докум.	Подп.			Дата	
Разраб.	Гнилицы	Лютарович	10.05.14			<h2 style="margin: 0;">Задача № 10</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3>	
Проб.	Лютарович	Лютарович	10.05.14				
Н.контр.	Утв.	Утв.	Утв.	Утв.	Утв.		

Копировал
Формат A4

Рисунок 49 – Пример оформления задания, решенного по Алгоритмам 16.1 и 16.2

17.1.5 Определить видимость прямой относительно заданной плоскости (см. параграф 17.2).

Рисунок 50 показывает примеры нахождения точки встречи прямой и плоскости для различных способов задания плоскостей общего положения.

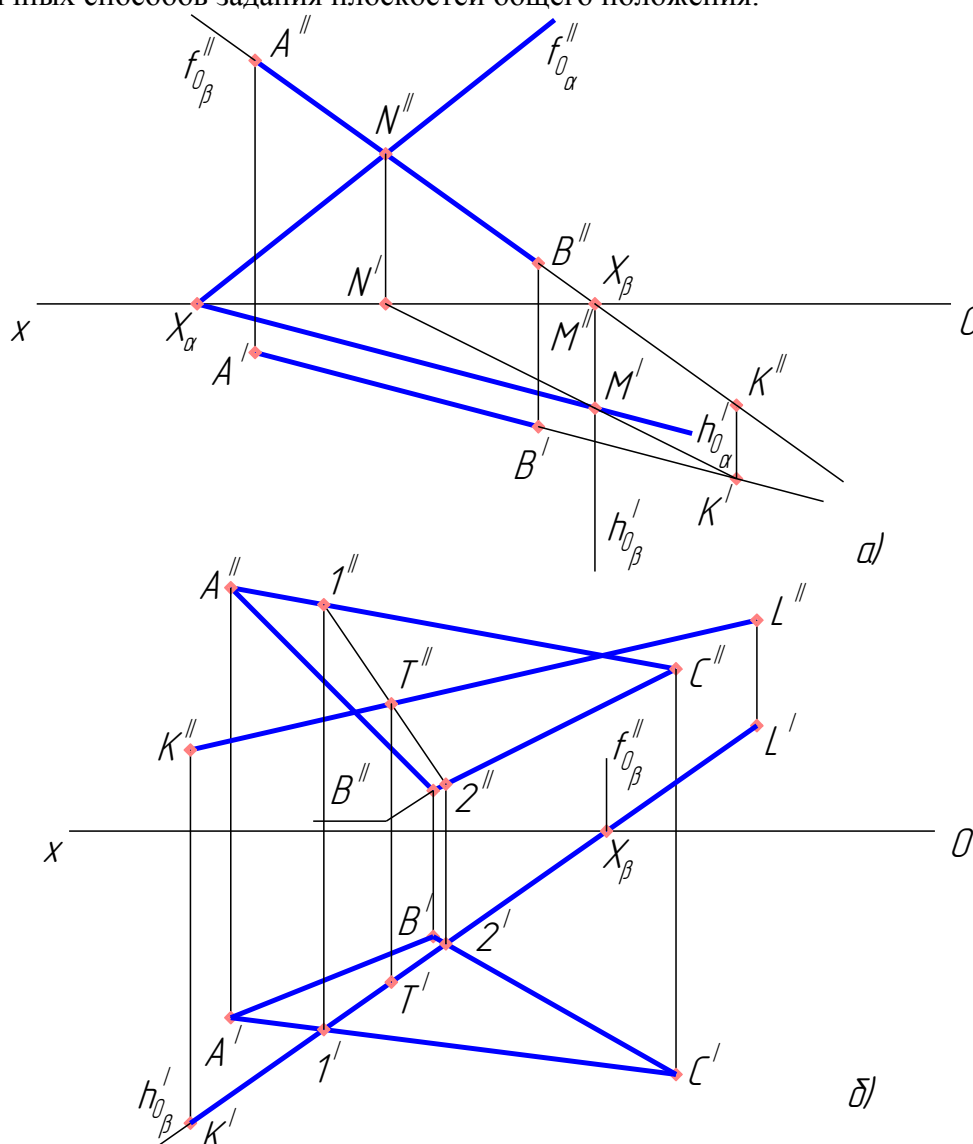


Рисунок 50 – Определение точки встречи прямой с плоскостью общего положения, заданной: а) следами; б) треугольником

Плоскость α на рисунке 50, а задана следами. Проводим через прямую AB фронтально-проецирующую плоскость: след $f''_{0\beta}$ проходит через $A''B''$. Находим линию пересечения плоскостей α и β : отмечаем точки пересечения одноименных следов – горизонтальную проекцию горизонтального следа линии пересечения M' и фронтальную проекцию фронтального следа N'' . Точки M'' и N' находим в проекционной связи на оси Ox . Соединяем одноименные проекции точек M и N : фронтальная проекция линии пересечения вспомогательной и заданной плоскости $M''N''$ совпадает с фронтально-проецирующим следом $f''_{0\beta}$, а горизонтальная проекция $M'N'$ пересекает продолжение горизонтальной проекции отрезка $A'B'$ в точке K' . Прямые AB и MN лежат в одной плоскости – вспомогательной плоскости β . Следовательно, если пересекаются проекции, то пересекаются и сами прямые. С другой стороны, прямая MN принадлежит и заданной плоскости α , следовательно, найденная точка K – точка встречи прямой AB и плоскости α . Ее фронтальную проекцию K'' находим в проекционной связи на продолжении фронтальной проекции отрезка $A''B''$.

На рисунке 50, б плоскость α задана треугольником ABC . Заключим прямую KL во вспомогательную, горизонтально-проецирующую плоскость β : горизонтальный след $h'_{ор}$ проходит через горизонтальную проекцию $K'L'$. Горизонтальная проекция линии пересечения плоскостей α и β совпадает с проецирующим следом $h'_{ор}$. Чтобы найти ее фронтальную проекцию, отметим точки, в которых $h'_{ор}$ пересекает элементы плоскости α : $1'$ – на горизонтальной проекции $A'C'$ и $2'$ – на $B'C'$. Их фронтальные проекции $1''$ и $2''$ находим на $A''C''$ и $B''C''$ в проекционной связи. Проекция $1''2''$ и $K''L''$ пересекаются в точке T'' . Так как прямые 12 и KL лежат в одной плоскости β , то T – точка их пересечения. С другой стороны, прямая 12 лежит и в плоскости треугольника ABC , поэтому в точке T пересекаются прямая KL и плоскость α . Ее горизонтальную проекцию T' находим в проекционной связи на $K'L'$ (на следе $h'_{ор}$).

17.2 Определение видимости прямой относительно плоскости с помощью конкурирующих точек

Конкурирующими называют точки, принадлежащие скрещивающимся прямым, которые на одной из плоскостей проекций отображаются одной точкой. Их различное расположение на другой или других плоскостях проекций позволяет судить о взаимном положении прямых относительно наблюдателя. Как определить положение одной прямой относительно другой, помогает разобрать пример на рисунке 51.

Пусть даны две скрещивающиеся прямые AB и CD . Фронтальные проекции этих прямых пересекаются в конкурирующей точке $1''$ и $2''$. Найдем их горизонтальные проекции в проекционной связи: проекция точки $1'$ пусть принадлежит $A'B'$, а точки $2'$ – проекции прямой $C'D'$. Удаленность от фронтальной плоскости проекций определяется координатой y для каждой из точек. Чем больше координата y , тем ближе данная точка находится к наблюдателю. Значение координаты y для точек 1 и 2 определяется по горизонтальной проекции прямых $A'B'$ и $C'D'$. Следовательно, на фронтальной плоскости проекций в месте выбора конкурирующих точек прямая AB перекрывает прямую CD , т.е. точка находится ближе к наблюдателю.

Чтобы для прямых AB и CD определить их взаимное положение относительно горизонтальной плоскости проекций, нужно выбрать конкурирующие точки в месте пересечения $A'B'$ и $C'D'$, на продолжении горизонтальных проекций заданных отрезков.

При пересечении прямой с плоскостью видимость прямой относительно плоскости меняется в точке встречи. Для того чтобы выяснить взаимное расположение прямой и плоскости, можно также воспользоваться конкурирующими точками. Алгоритм работы в каждой из плоскостей проекций таков:

- 17.2.1 Оценить, можно ли обозначить конкурирующие точки на заданных проекциях прямой и элементов плоскости. Если проекции скрещивающихся прямой и элементов плоскости не пересекаются в пределах чертежа, провести проекцию вспомогательной прямой, принадлежащей заданной плоскости, которая обеспечит конкурирующие точки. Найти вторую проекцию вспомогательной прямой (см. Алгоритмы 11.1 или 11.2, в зависимости от положения вспомогательной прямой и способа задания плоскости).
- 17.2.2 Обозначить конкурирующие точки в месте пересечения проекций прямой и элемента плоскости.

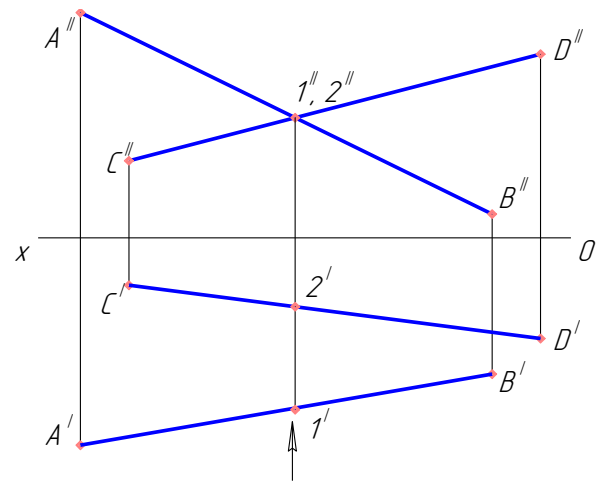


Рисунок 51 – К понятию конкурирующих точек

- 17.2.3 Найти проекции конкурирующих точек в другой плоскости проекций в проекционной связи на соответствующих геометрических элементах.
- 17.2.4 Определить направление проецирования на исходную плоскость проекций и взаимное положение конкурирующих точек на проецирующем луче.
- 17.2.5 Обозначить видимость прямой в месте выбора конкурирующих точек: если первой на проецирующем луче находится точка, принадлежащая прямой, то прямая видима относительно плоскости; если первой проецируется точка элемента плоскости, значит, плоскость закрывает прямую.
- 17.2.6 Указать обратную видимость прямой относительно плоскости с другой стороны от точки встречи.

На рисунке 52 указана видимость относительно плоскостей для тех же прямых, точки встречи которых были найдены на примерах рисунка 50.

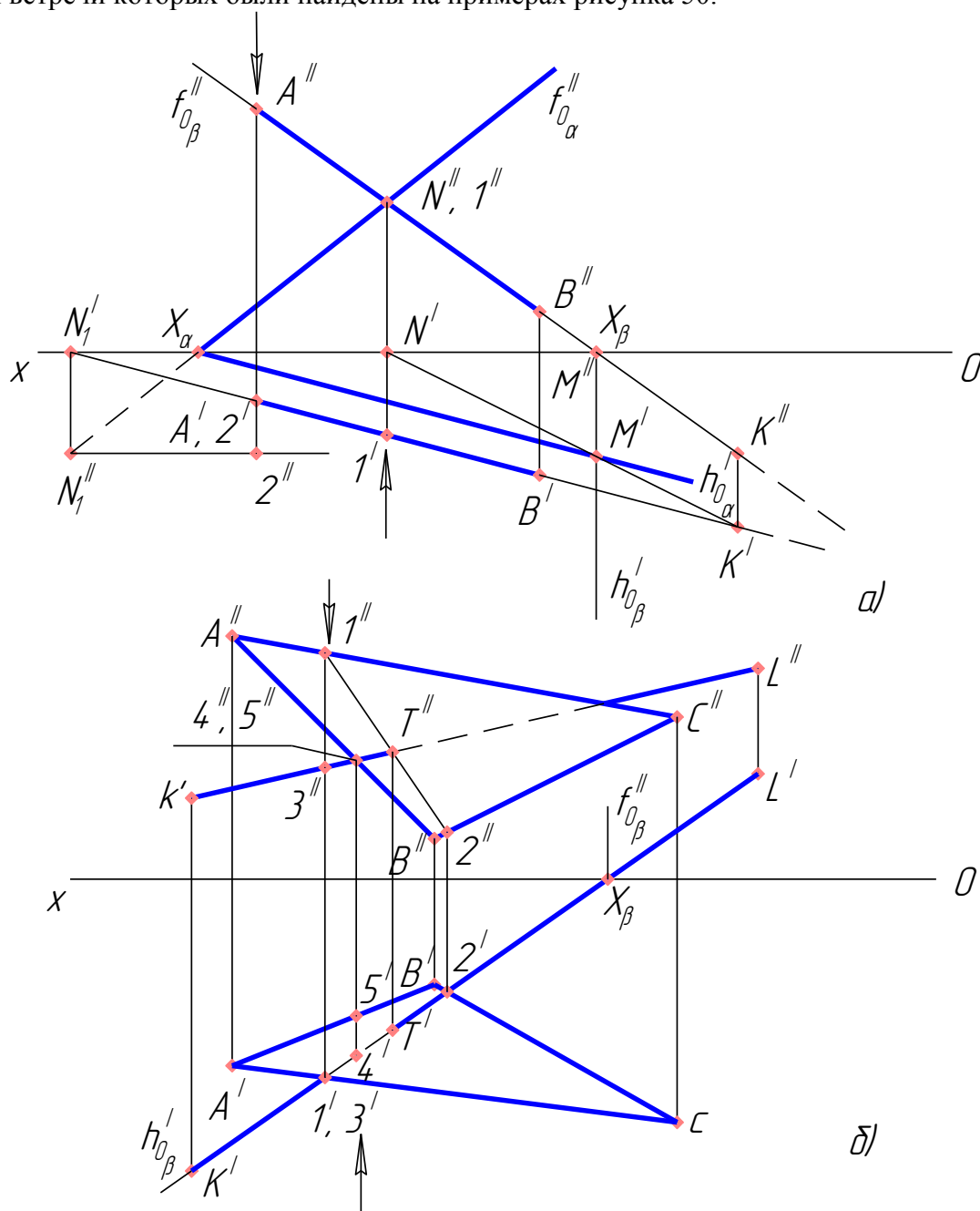


Рисунок 52 – Определение видимости прямой относительно плоскости, заданной:
а) следами; б) треугольником

При построении точки встречи прямой AB с плоскостью α точка N'' была обозначена на пересечении фронтальных следов $f''_{0\alpha}$ и $f''_{0\beta}$ (рисунок 52, а). В эту же точку проецируется точка, принадлежащая прямой; обозначим ее I'' . Находим ее горизонтальную проекцию I' в проекционной связи. Направление проецирования на плоскость π_2 – снизу вверх. Первой видим точку I' , принадлежащую $A'B'$; следовательно, на выбранном участке, т.е. слева от K'' , прямая находится перед плоскостью; справа от K'' прямая на фронтальной плоскости проекций будет перекрыта плоскостью.

Горизонтальная проекция прямой $A'B'$ параллельна $h'_{0\alpha}$, поэтому для того чтобы выбрать конкурирующие точки, проведем горизонтальную проекцию горизонтали плоскости α , совпадающую с $A'B'$. В одной точке с проекцией A' находится принадлежащая ГПГ точка $2'$. Продлим ГПГ до пересечения с осью Ox , обозначим на ней проекцию фронтального следа N'_1 , его фронтальная проекция N''_1 лежит на следе $f''_{0\alpha}$. Фронтальная проекция горизонтали (ФПГ) от этой точки проходит параллельно оси Ox , на ней находим в проекционной связи точку $2''$. Направление проецирования на горизонтальную плоскость проекций – сверху вниз. Первой на проецирующем луче лежит A'' , поэтому видимость на горизонтальной плоскости проекций такая же, как и на фронтальной.

При построении точки встречи прямой KL с плоскостью треугольника ABC (рисунок 52, б) была обозначена точка I' на горизонтальной проекции $A'C'$. Сюда же проецируется точка, принадлежащая прямой; обозначим ее горизонтальную проекцию $3'$. Находим фронтальные проекции I'' и $3''$ в проекционной связи. При проецировании на горизонтальную плоскость проекций первой на проецирующем луче находится I'' , принадлежащая плоскости. Поэтому в месте выбора конкурирующих точек плоскость перекрывает прямую. На участке слева от T'' прямая перекрыта плоскостью, однако при задании плоскости фигурой видимость обозначают относительно фигуры, поэтому штриховой линией обозначен участок $3'T''$. На участке $T''L'$ отрезок прямой виден относительно ABC .

Аналогичное использование конкурирующих точек 4 и 5 с совпадающими фронтальными проекциями позволило выявить видимость на фронтальной плоскости проекций. Линией невидимого контура обозначен участок от T'' до проекции стороны треугольника $A''C''$.

17.3 Пересечение прямой с проецирующими плоскостями

В случае определения точки встречи с горизонтально или фронтально проецирующей плоскостью для решения не требуется дополнительных построений. Порядок действий таков:

- 17.3.1 Обозначить пересечение проецирующего следа плоскости с соответствующей проекцией прямой. Это – проекция точки встречи.
- 17.3.2 Найти вторую проекцию точки пересечения прямой с плоскостью на другой проекции прямой в проекционной связи.
- 17.3.3 В той плоскости проекций, в которой лежит проецирующий след плоскости, видимость прямой искать не следует, так как невидимой оказывается только проекция точки встречи. Определить видимость прямой относительно плоскости методом конкурирующих точек или на основании взаимного положения проецирующего следа и одноименной проекции прямой.

Примеры определения точек встречи прямых с проецирующими плоскостями, заданными различным способом, представлены на рисунке 53.

Плоскость α , изображенная на рисунке 53, а, – фронтально-проецирующая. Поэтому проекция точки встречи находится в месте пересечения фронтального следа $f''_{0\alpha}$ с проекцией прямой $A''B''$ – это точка K'' . Горизонтальную проекцию K' находим на $A'B'$ в проекционной связи. Видимость на горизонтальной плоскости проекций находим без помощи конкурирующих точек. В направлении проецирования (отмечено стрелкой) участок прямой $A'K'$ находится выше линии следа $f'_{0\alpha}$. Следовательно, $A'K'$ будет виден относительно плоскости α , а участок $K'B'$ будет закрыт.

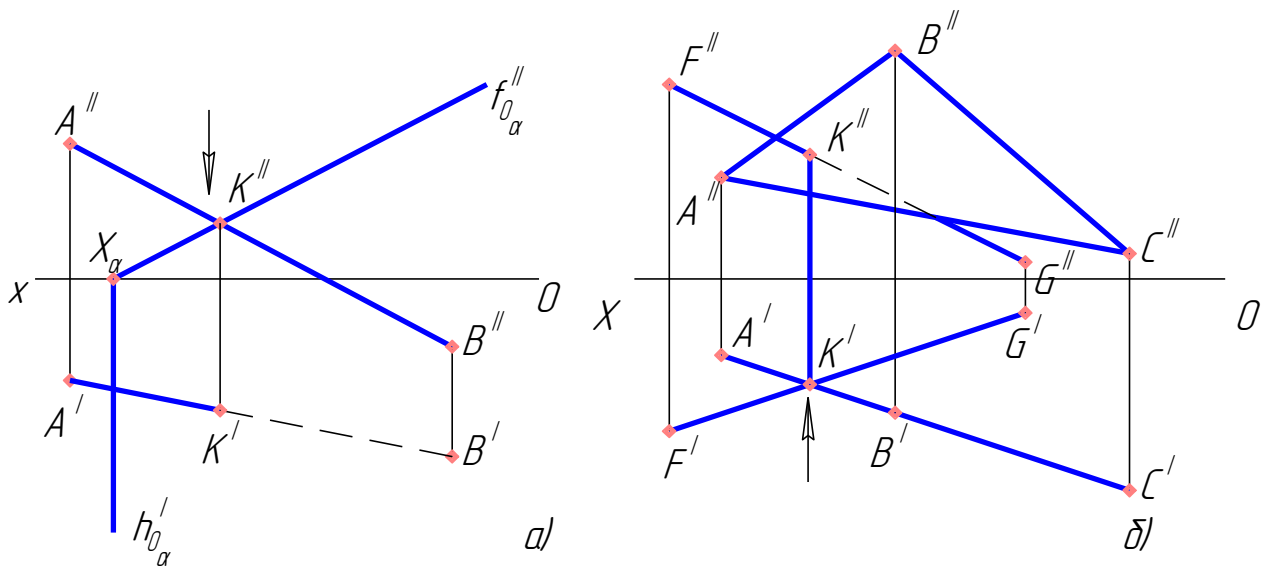


Рисунок 53 – Точки встречи прямых с плоскостями частного положения: а) фронтально проецирующей, заданной следами; б) горизонтально проецирующей, заданной плоской фигурой

На рисунке 53, б плоскость задана горизонтально проецирующим треугольником ABC , так как на горизонтальную плоскость проекций стороны треугольника проецируются в одну линию. Поэтому в месте пересечения $F'G'$ с $A'B'C'$ (горизонтальным следом плоскости) находится горизонтальная проекция точки встречи K' . Ее фронтальную проекцию K'' получаем на $F''G''$ в проекционной связи. В направлении проецирования на плоскость π_2 участок $F'K'$ находится перед следом плоскости. Таким образом, $F''K''$ виден относительно ABC , а участок $K''N''$ перекрыт плоскостью.

Если задана профильно проецирующая плоскость, то действия по предложенному Алгоритму заставляют решать задачу с использованием профильной плоскости проекций. Это связано с выполнением некоторого объема дополнительных построений, поэтому определение точки встречи с профильно проецирующей плоскостью можно проводить по общему алгоритму, т.е. действуя согласно изложенному в параграфах 17.1 и 17.2 (рисунок 54, а). Если же заданная профильно проецирующая плоскость имеет сливающиеся следы, совпадающие с осью OX (рисунок 54, б), задача более рационально решается в трех плоскостях проекций.

Плоскость δ задана следами, совпадающими с Ox , и лежащей в ней точкой S (рисунок 54, б). Введем оси Oy и Oz . Построим профильную проекцию точки – S''' . Профильный след плоскости p'''_{δ} проходит через начало координат и S''' . Находим профильную проекцию заданной прямой – $C'''D'''$. В месте ее пересечения с p'''_{δ} находится профильная проекция точки встречи K''' . Проекция K'' и K' находим в проекционной связи. В направлении проецирования на фронтальную плоскость проекций следом p'''_{δ} перекрывается участок $K'''D'''$, а в направлении проецирования на горизонтальную плоскость – $K'''C'''$. Следовательно, линией невидимого контура обозначаем участки $K'C'$ и $K'D'$.

На рисунке 55 представлено оформленное задание № 11 из альбома, решение которого проводится по Алгоритмам 17.1 и 17.2 или 17.3.

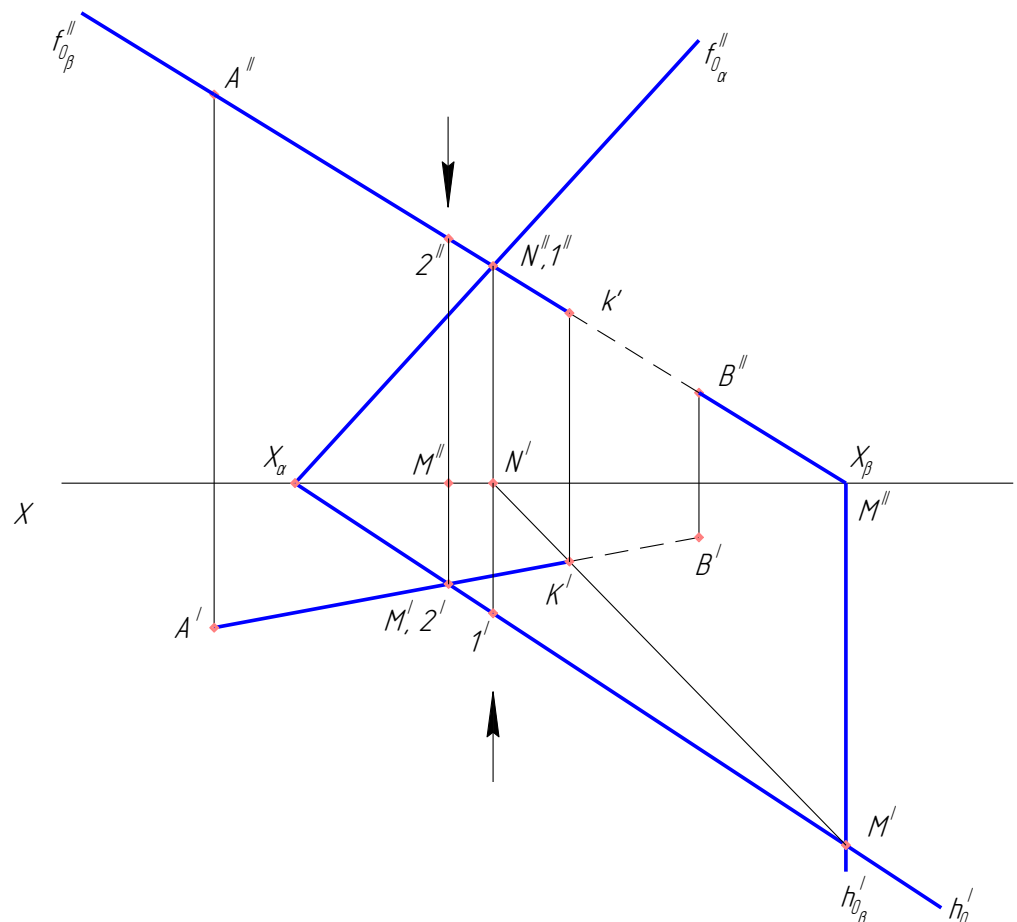


проекций

фигурами, по алгоритму определения точки встречи

действий таков:

второй плоскостью (по Алгоритму 17.1 или 17.3).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Перв. примен.				
<p>Найти точку встречи прямой AB с плоскостью α. Определить видимость прямой относительно плоскости α.</p>									

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	<h2 style="margin: 0;">Задача № 11</h2> <h3 style="margin: 0;">Вариант 31</h3>	Лит.	Лист	Листов
Разраб.	Гнилуша			01.04.08				1
Проб.	Лютарович					<h2 style="margin: 0;">группа 300</h2>		
Н.контр.								
Утв.					Копировал _____ Формат A4			

Рисунок 55 – Задание, выполняемое с применением Алгоритмов 17.1 и 17.2 (или 17.3).

- 17.4.2 Аналогичным образом найти точку встречи другой прямой, задающей одну из плоскостей, с плоскостью, которой она не принадлежит. (Обе прямые, для которых определяют точку встречи, не обязательно должны лежать в одной и той же плоскости).
- 17.4.3 Соединить одноименные проекции точек, найденных в пп. 17.4.1 и 17.4.2. Это – проекции линии пересечения.
- 17.4.4 Выделить проекции участка линии пересечения, принадлежащего обоим плоским фигурам, задающим плоскости.
- 17.4.5 Определить видимость элементов плоскостей друг относительно друга с использованием конкурирующих точек (см. Алгоритм 17.2).

На рисунке 56 приведены примеры определения линии пересечения по этому алгоритму для двух пар плоскостей, заданных различными геометрическими элементами.

На рисунке 56, а выполнены построения для тех же плоскостей, которые были заданы на рисунке 47, а, при рассмотрении метода вспомогательных секущих плоскостей.

Для решения воспользуемся двумя горизонтально проецирующими плоскостями. Первую из них, α , проведем таким образом, чтобы проецирующий след h'_{α} заключал в себе $F'R'$. Он пересекает проекции $A'B'$ и $C'D'$ в точках $1'$ и $2'$, соответственно. Фронтальные проекции $1''$ и $2''$ находим в проекционной связи на соответствующих проекциях $A''B''$ и $C''D''$. Прямая $1''2''$ – фронтальная проекция линии пересечения вспомогательной плоскости α с плоскостью, заданной прямыми AB и CD . Она пересекается с одноименной проекцией прямой FR , через которую была проведена α , в точке K'' . Это – проекция точки встречи FR с $ABCD$ и, следовательно, одной из точек на линии пересечения заданных плоскостей. Ее горизонтальная проекция K' находится на $P'R'$ в проекционной связи.

Аналогично находим вторую точку искомой линии пересечения. Вторая плоскость β проводится через сторону SR . Она пересекает $ABCD$ по линии 34 . На фронтальной плоскости проекций, на пересечении $3''4''$ с $S''R''$ находим L'' – фронтальную проекцию точки встречи SR с $ABCD$. Горизонтальная проекция L' лежит на $S'R'$ в проекционной связи.

Так как заданные проекции геометрических элементов не накладываются друг на друга, соединяем проекции линии пересечения плоскостей $ABCD$ и FRS $K'L'$ и $K''L''$ тонкой линией.

Для определения взаимной видимости элементов, задающих плоскости, воспользуемся конкурирующими точками. На горизонтальной плоскости проекций, вместе с проекцией точки $2'$ на $C'D'$ содержится проекция точки $5'$ прямой $F'R'$. Находим $5''$ в проекционной связи на продолжении $F''R''$. В направлении проецирования на горизонтальную плоскость проекций выше находится $5''$. Следовательно, в месте выбора конкурирующих точек, т.е. ниже проекции линии пересечения $K'L'$, плоскость FRS перекрывает плоскость $ABCD$. Поэтому проекции отрезков $A'B'$ и $C'D'$ обозначены линией невидимого контура. Выше проекции линии пересечения видимость обратная: не видны участки $P'K'$, $S'L'$ и сторона $P'S'$.

Выбранные на продолжениях $S''R''$ и $C''D''$ конкурирующие точки $6''$, $7''$ аналогичным образом позволили заключить, что выше $K''L''$ видны элементы плоскости FRS . Штриховой линией обозначены участки $F''K''$, $S''L''$ и сторона $F''S''$.

Рисунок 56, б иллюстрирует определение линии пересечения для плоскостей, заданных взаимно перекрывающимися плоскими фигурами ABC и DEF . Здесь для построения точек на линии пересечения были выбраны вначале фронтально проецирующая плоскость α , проходящая через DF , а затем горизонтально проецирующая плоскость β , включающая в себя BC .

Линия пересечения α и ABC (12) позволила на горизонтальной плоскости проекций найти проекцию точки на линии пересечения ABC и DEF , K' . Аналогично, на фронтальной плоскости в пересечении $3''4''$ (проекция линии пересечения β и DEF) и $B''C''$ была найдена проекция точки L'' .

Проекция $K'L'$ и $K''L''$ были прочерчены линией основного контура, так как они лежат в пределах обеих заданных фигур.

Конкурирующие точки $4'$ и $5'$, выбранные на горизонтальной плоскости проекций, позволили сделать вывод о том, что в месте их выбора, ниже линии пересечения видны элементы плоскости ABC . Выше проекции линии пересечения $K'L'$ видимость обратная: участок $C'L'$ и участок стороны $C'A'$ до перекрытия проекцией отрезка $K'D'$ не видны. На фронтальной

плоскости проекций с помощью конкурирующих точек $1''$, $6''$ установлено, что выше $K''L''$ видны элементы плоскости ABC , а ниже проекции линии пересечения – элементы DEF .

Видимые части проекций треугольника ABC выделены штриховкой.

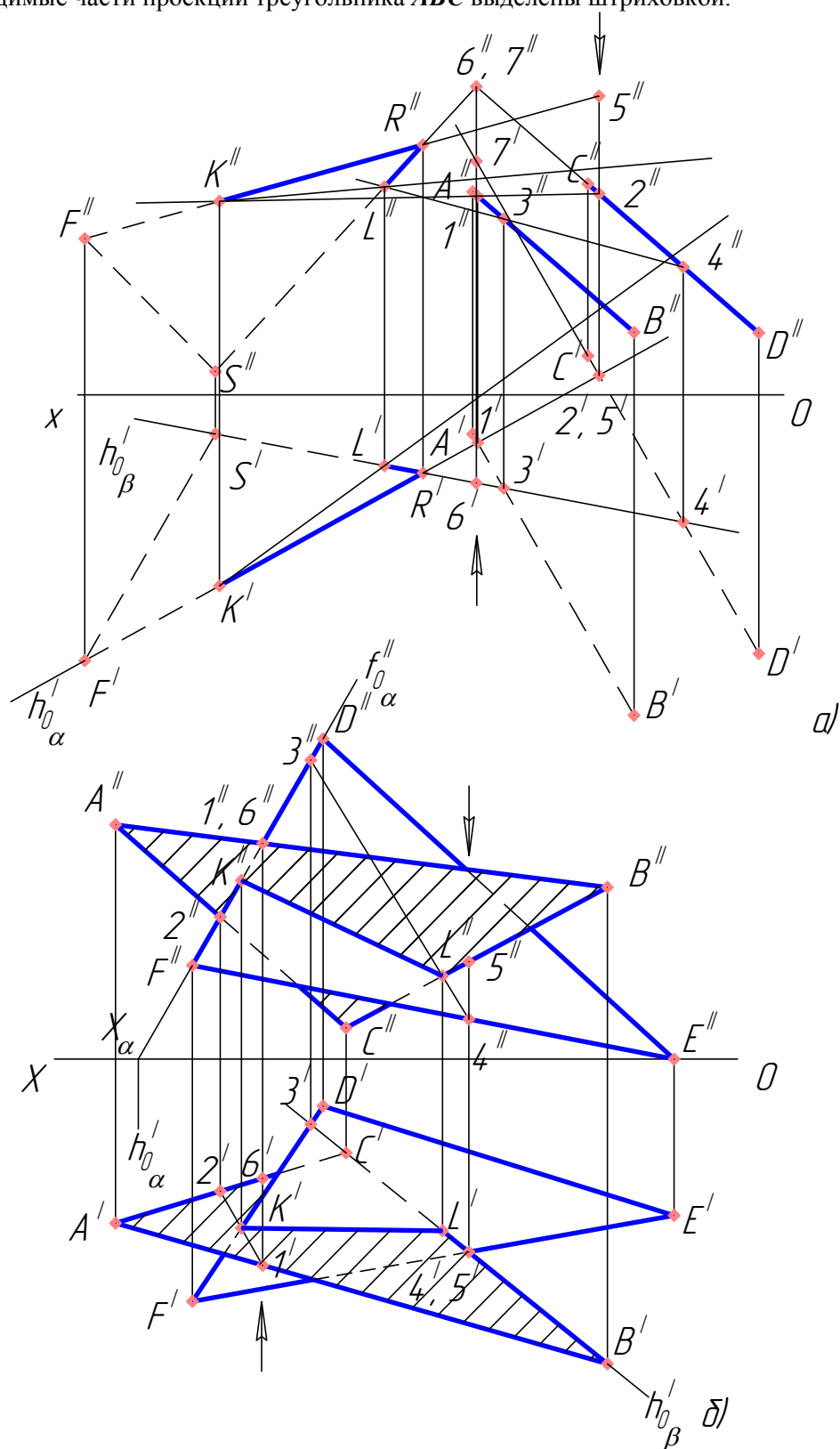


Рисунок 56 – Построение линии пересечения плоскостей по алгоритму определения точки встречи: а) одна из плоскостей задана параллельными прямыми; б) обе плоскости заданы плоскими фигурами

Литература

1. Гордон, В.О.. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие/ В.О.Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – 27-е изд, стер. -М.: Высш. шк., 2008. -272с.
2. Елкин,В.В. Инженерная графика: учеб. пособие для студ. высш. учеб.заведений /В.В. Елкин, В.Т. Тозик. - М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 304 с.
3. Попова, Г.Н. Машиностроительное черчение: Справочник/Г.Н.Попова, С.Ю. Алексеев.-5-е изд.- СПб.:Политехника, 2008. -474с.
4. Талалай, П.Г. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний: Учеб. пособие/ П.Г. Талалай. – 2010. – 256с.

Оглавление

Введение	3
1 Построение проекций точки, заданной аналитически, в ортогональных проекциях	4
1.1 Точка общего положения	4
1.2 Точка частного положения	6
2 Построение проекций точки, заданной аналитически, в аксонометрии	6
2.1 Точка общего положения	6
2.2 Точка частного положения	8
3 Построение проекций точки, заданной графическим способом	10
3.1 В ортогональных проекциях	10
3.2 В аксонометрических проекциях	10
4 Построение точки, симметричной заданной относительно одного из элемента системы координат	10
4.1 В ортогональных проекциях	10
4.2 В аксонометрии	13
5 Вращение точки относительно координатной оси	15
6 Построение проекций отрезка прямой линии	17
6.1 В ортогональных проекциях	17
6.2 В аксонометрии	17
7 Определение истинной длины отрезка прямой	19
7.1 В ортогональных проекциях	19
7.1.1 Метод трапеций	19
7.1.2 Метод треугольника	19
7.1.3 Прямая частного положения	22
7.1.4 Определение истинной длины отрезка методом вращения	22
7.2 В аксонометрии	25
8 Определение следов прямой	26
8.1 В ортогональных проекциях	26
8.1.1 Прямая общего положения	26
8.1.2 Прямая частного положения	28
8.2 В аксонометрии	29
9 Определение истинной длины отрезка прямой в соответствующих частях пространства	30
9.1 Пропорциональное деление отрезка	31
9.2 Истинная длина отрезка по частям пространства	31
10 Построение следов плоскости	33
10.1 При задании координат плоскости	34
10.2 Вычерчивание третьего следа плоскости по двум заданным	36
10.3 Плоскость задана отрезками прямых	37
10.3.1 Прямые занимают общее положение	37
10.3.2 Прямые занимают частное положение	39
10.4 Плоскость задана линией наибольшего наклона к плоскости проекций	40
11 Построение проекций геометрических элементов, принадлежащих плоскости ...	40
11.1 Прямая линия в плоскости, заданной следами	41
11.1.1 Линия общего положения	41
11.1.2 Линия, параллельная плоскости проекций	42
11.1.3 Линия наибольшего наклона к плоскости проекций	43

11.2	Прямая линия в плоскости, заданной точками, отрезками или плоскими фигурами	44
11.3	Точка в плоскости.....	45
12	Прямая, параллельная плоскости	46
13	Параллельные плоскости.....	51
13.1	Плоскость задана следами	51
13.2	Плоскость задана иными геометрическими элементами	51
14	Прямая, перпендикулярная к плоскости.....	52
14.1	Восстановление перпендикуляра заданной длины к плоскости	52
14.2	Плоскость, перпендикулярная к прямой	55
15	Взаимно перпендикулярные плоскости	55
16	Пересечение плоскостей.....	57
16.1	Обе плоскости заданы следами	57
16.1.1	<i>Плоскости общего положения, следы которых пересекаются в пределах чертежа</i>	<i>57</i>
16.1.2	<i>Пересечение с плоскостью уровня</i>	<i>57</i>
16.1.3	<i>Плоскости, пара одноименных следов которых параллельна.....</i>	<i>60</i>
16.1.4	<i>Плоскости общего положения, следы которых не пересекаются в пределах чертежа</i>	<i>60</i>
16.1.5	<i>Пересечение двух профильно проецирующих плоскостей</i>	<i>61</i>
16.2	Плоскости, заданные параллельными или пересекающимися прямыми	62
16.3	Плоскости, заданные линиями наибольшего наклона	64
16.3.1	<i>Определение линии пересечения с помощью следов</i>	<i>64</i>
16.3.2	<i>Использование вспомогательных секущих плоскостей</i>	<i>65</i>
17	Точка встречи прямой и плоскости	66
17.1	Пересечение прямой и плоскости общего положения	66
17.2	Определение видимости прямой относительно плоскости с помощью конкурирующих точек.....	69
17.3	Пересечение прямой с проецирующими плоскостями	71
17.4	Нахождение линии пересечения плоскостей, заданных прямыми или плоскими фигурами, по алгоритму определения точки встречи	73
	Литература	77

Кафедра инженерного проектирования

Учебное пособие

Алгоритмы решения типовых задач начертательной геометрии
Часть I. Точка. Прямая. Плоскость

Игорь Иванович Гнилуша
Владимир Александрович Люторович
Дмитрий Леонидович Кириллов

Отпечатано с оригинал-макета. Формат 60х90 $\frac{1}{16}$
Печ.л. 4,9. Тираж 100 экз.

Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет), ИК

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26
Типография издательства СПбГТИ(ТУ), тел.49-49-365