ГЛАВА III.

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

§1. Определение и свойства неопределенного и-ла.

I. Первообразная функция

0.1.] $f: X \to \mathbb{R}$, где X – произв. промежуток. Ф-я $F: X \to \mathbb{R}$ наз.

первообразной
ф-ей функции f
на X, если
$$F'(x)=f(x)$$
$$\forall x \in X.$$

Примеры.

1. $F(x) = x^4$ – первообр. для $f(x) = 4x^3$ на $\mathbb{R}$.

2. $F(x) = \operatorname{tg} x$ - первообр. для $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Свойства первообразной.

1). $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$d(F(x)) = f(x)\,dx$.

2). Если $F(x)$ – первообразная ф-ции $f(x)$,

то всякая ф-я
$\Phi(x) = F(x) + C$ есть
первообр. для $f(x)$.
<u>Д-во</u>: $\Phi'(x) =$
$= F'(x) + C' = f(x)$,
ч.т.д.

3) Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ первообразные для f на X, то $\Phi(x) = F(x) + C$.

Д-во. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) =$

$= f(x) - f(x) \equiv 0$ на ~~X~~

на $X \Rightarrow \Phi(x) - F(x) = C \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C.$

<u>О.2.</u> Совокупность всех первообразных ф-ции f на промежутке X наз. неопределенным интегралом и обозн.

$\int f(x)\,dx$

f наз. подынтегральной ф-ей, а $f(x)\,dx$ – подынт. выражением.

Зам.

1. Б-м писать

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

2. . . . .

$$\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + C$$

$$\int xy\,dy = \frac{xy^2}{2} + C$$

II. Основные св-ва неопределенного интеграла.

Б-м считать, что все ф-ции опр. на X.

!1). $\int d(F(x)) = F(x) + C$

2). $d\left(\int f(x)\,dx\right) =$

$= f(x)\,dx$

3). Аддитивность и-ла относительно ф-й.

] f_1 и f_2 имеют первообразные. Тогда f_1+f_2 тоже имеет первообр., причем

$$\int (f_1(x)+f_2(x))dx \overset{(*)}{=} \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$$

Д-60.

] $\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1$,

$\int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C_2$.

обозначим

$F = F_1 + F_2$. Тогда

$F'(x) = F_1'(x) + F_2'(x) =$

$= f_1(x) + f_2(x)$, т.е. F — это

первообр. $(f_1 + f_2) \Rightarrow$

$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx =$

$= F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C$

(лев. ч. *)

пр. ч. :

$F_1(x) + F_2(x) + C_1 + C_2$

(мн-ва совпадают.)

4)] f имеет первобр,

а $\lambda = const \in \mathbb{R}$. Тогда

при $\boxed{\lambda \neq 0}$ ф-я

λf имеет первообр. и

$$\int(\lambda f(x))\,dx =$$

$$= \lambda \int f(x)\,dx.$$

5) $\exists$ $f_1, \dots, f_n$ имеют первообр., а $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 > 0$. Тогда

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ имеет перв.

и

$$\int\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)dx\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int f_i(x)dx.$$

⑥ Независимость первообразной от ха-

!!!!!!!

рактера переменной интегрирования.

] $\varphi : X \to T$, а

$f : T \to \mathbb{R}$, где

X и T – промежутки

и $\exists$ сложная ф-я

$y = f(\underline{\varphi(x)}).\ (\varphi(x) = t)$

] φ – непрерывно дифференцируема, а f имеет первообр. F, т.е.

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C.$$

Тогда $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ имеет первообр. $F(\varphi(x))$, т.е.

$$\int f(\underbrace{\varphi(x)}_{t})\overbrace{\varphi'(x)\,dx}^{d(\overbrace{\varphi(x)}^{t})} =$$

$$= F(\underbrace{\varphi(x)}_{t}) + C$$

$$(1)$$

Д-во.

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = [\ldots\ldots] =$$

$$= F'_{\varphi} \cdot \varphi'_{x} = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

ч.т.д.

Зам.

III. Табличные и-лы

1. $\int \Box^{\alpha} d\Box = \dfrac{\Box^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$(\Box > 0,\ \alpha \neq -1)$.

$\alpha \neq 0$

2. $\int \dfrac{d\Box}{\Box} = \ln|\Box| + C$

$\Box \neq 0$

3. $\int a^{\square} d\square = \dfrac{a^{\square}}{\ln a} + C.$

3^{a}. $\int e^{\square} d\square = e^{\square} + C.$

4. $\int \sin\square \, d\square = -\cos\square + C$

5. $\int \cos \square \, d\square = \sin \square + c$

6. $\int \frac{d\square}{\sin^2 \square} = -\operatorname{ctg} \square + c$

7. $\int \frac{d\square}{\cos^2 \square} = \operatorname{tg} \square + c$

8. $$\int \frac{d\square}{a^2+\square^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\square}{a} + c$$
$$= \frac{-1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{\square}{a} + c$$

9. $$\int \frac{d\square}{a^2-\square^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+\square}{a-\square}\right| + c$$

$$9^a \int \frac{d\square}{\square^2 - a^2} =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\square - a}{\square + a} \right| + c$$

10. $\int \frac{d\square}{\sqrt{a^2-\square^2}} =$

$= \arcsin \frac{\square}{a} + C =$

$= -\arccos \frac{\square}{a} + C.$

$(|\square| \leq |a|)$

$$11.\ \int \frac{d\square}{\sqrt{\square^2 \pm a^2}} =$$

$$= \ln\left|\square + \sqrt{\square^2 \pm a^2}\right| + C$$

12*. $\int \operatorname{tg} \square \, d\square =$

$= -\ln|\cos \square| + c$

13*. $\int \operatorname{ctg} \square \, d\square =$

$= \ln|\sin \square| + c$

14*. $\int \frac{d\square}{\sin\square} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\square}{2}\right| + C$

15*. $\int \frac{d\square}{\cos\square} =$

$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\square}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

IV Интегрирование посредством замены переменной (подстановкой)

Способ 1 (подстановка)

$$\int f(\varphi(x))\cdot\underbrace{\varphi'(x)\,dx} =$$

$$= \int f(\varphi(x))\,d(\varphi(x)),$$

т.е. $\varphi(x) = t$

Примеры

1) $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx = \int tg^3 x \cdot (tg x)' dx =$

$= \int tg^3 x \, d(tg x) = \left[\begin{array}{l} t = tg x \\ \int t^3 dt \end{array} \right]$

$= \frac{tg^4 x}{4} + C$

2) $$\int \cos 5x \, dx =$$

$$= \frac{1}{5}\int \cos 5x \cdot \underbrace{5\,dx} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \cos \underbrace{5x}_{t} \, d(\underbrace{5x}_{t}) =$$

$$= \frac{1}{5} \sin \underbrace{5x}_{t} + C$$

3) $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$\Rightarrow \int f(\lambda x)\,dx =$

$= \dfrac{1}{\lambda} F(\lambda x) + C$

4) $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$\Rightarrow \underline{\int f(\lambda x + \beta)\,dx} =$

$= \underline{\frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \beta) + C}$

5) $\int \frac{(3\ln x-2)^4}{x}dx = \int (3\ln x - 2)^4 \, d(\ln x) =$ $\quad \frac{dx}{x} = d(\ln x)$

$= \int (3\ln x-2)^4 d(\ln x) =$

$= \frac{1}{3}\int (\overbrace{3\ln x-2}^{t})^4 d(\overbrace{3\ln x-2}^{t}) =$

$= \frac{(3\ln x-2)^5}{15} + C$

Способ 2. Замена переменной.

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t);\ t = \varphi^{-1}(x) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, \cancel{dt}\, dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = a\sin t; \\ dx = a\cos t\,dt; \\ t = \arcsin\dfrac{x}{a} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \cos t \, dt =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t \, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) \, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\, dt\right) =$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} +$$

$$+ \frac{a^2}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C$$

V. Интегрирование „по частям"

T. Если ф-ции u и v дифференцируемы на X и $\int v\,du$ существует, то $\exists \int u\,dv$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (2)$$

<u>Д-во.</u>

$$d(uv) = v\,du + u\,dv$$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ч.т.д.

Зам.

__Примеры.__

1) $\int x^2 \ln x\, dx =$

$= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x\ ;\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx ;\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right\}$

$= \dfrac{x^3 \ln x}{3} - \dfrac{1}{3} \int x^2 dx =$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

2) $\int \ln x \, dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \; du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx; \; v = x \end{array} \right\} =$$

$$= x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C$$

3) $\int \ln^2 x \, dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln^2 x \, ; & du = \dfrac{2\ln x}{x} dx \\ dv = dx \, ; & v = x \end{array} \right\}$$

$$= x\ln^2 x - \int \frac{x \cdot 2\ln x}{x}\,dx =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx; & v = x \end{matrix} \right\} =$$

$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int dx\right) =$$