§6. Векторное пр-е векторов

<u>О.1.</u> Векторным пр-ем в-ра $\vec{a}$ на в-р $\vec{b}$ наз. $\boxed{\text{вектор } \vec{c}}$: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

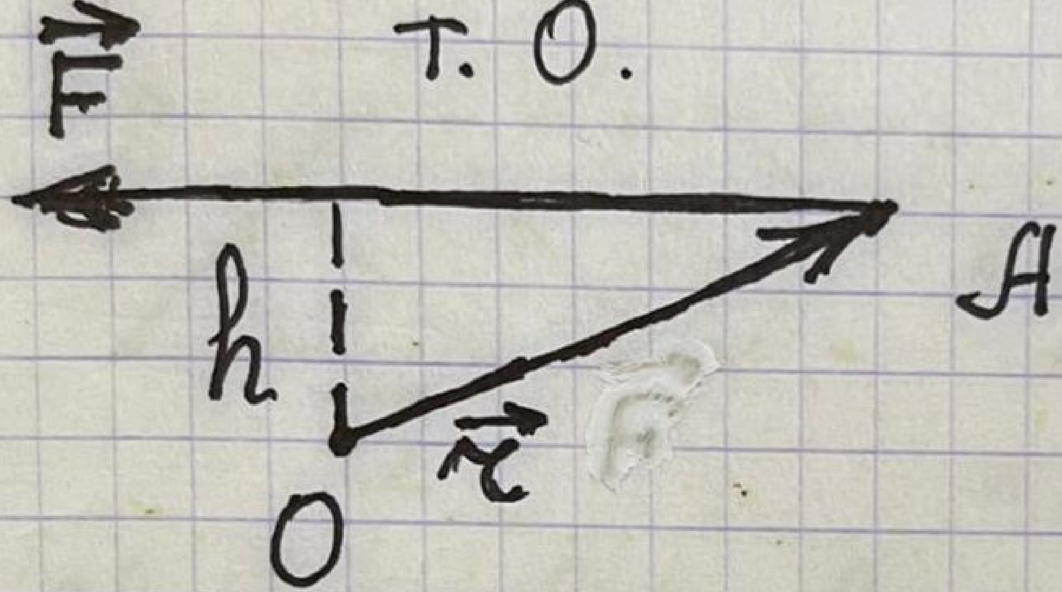
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$, (1)

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка в-ров.

Зам.

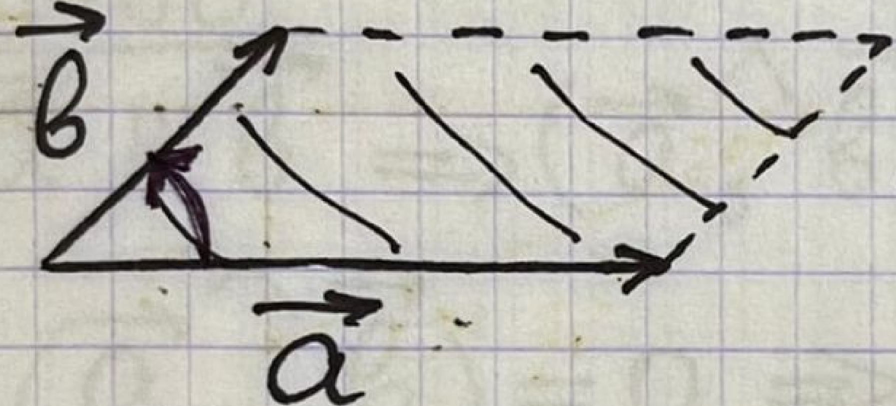
1) Момент силы $\vec{F}$ относ. т. O.



$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot h$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (2)

2) $|\vec{a}\times\vec{b}| = S_{\square}(\vec{a},\vec{b})$ (3)



$S_{\square}(\vec{a};\vec{b}) =$

$= |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

Свойства вект. пр-я

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

$\boxed{4)}$ $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

<u>Д-во</u>

Н. $\vec{a}\parallel\vec{b}\Rightarrow(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\left[\begin{array}{l}0\\ \pi\end{array}\right.\Rightarrow$

$\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=0$

$\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Д. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|\vec{a}|=0\ (\vec{a}=\vec{0})\\ |\vec{b}|=0\ (\vec{b}=\vec{0})\\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$

Зам. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

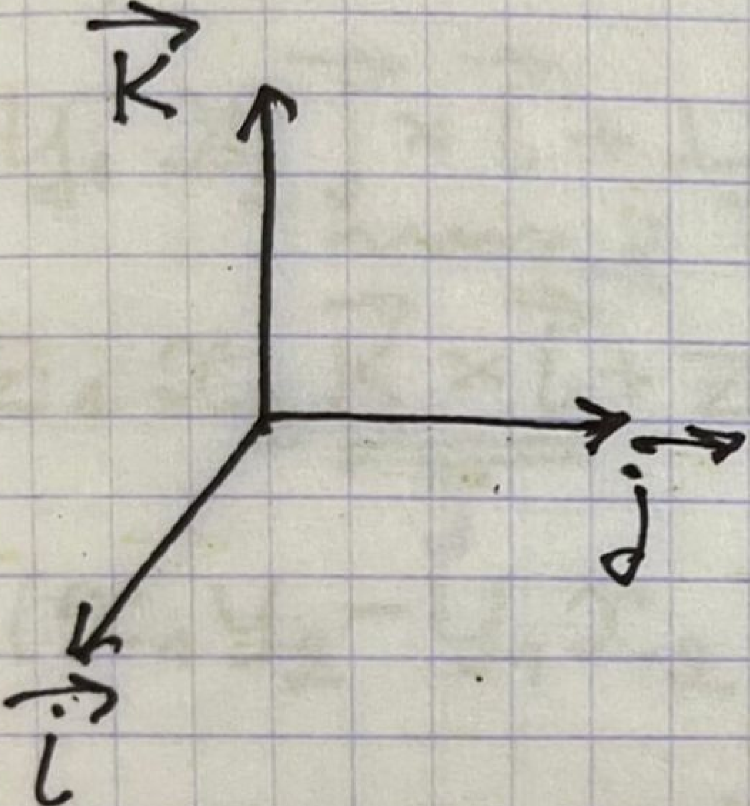
<u>Т.</u>] $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$,

$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k} \quad (4)$$

Д-во.



$$\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} = \vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} = \vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i} = -\vec{i}\times\vec{k} = \vec{j}$$
$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = [\ \ldots\ ] =$$

$$= x_1x_2\,\vec{i}\times\vec{i} + x_1y_2\,\underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{=\vec{k}} + x_1z_2\,\underbrace{\vec{i}\times\vec{k}}_{-\vec{j}} +$$

$$+ y_1x_2\,\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}} + y_1y_2\,\vec{j}\times\vec{j} + y_1z_2\,\vec{j}\times\vec{k} +$$

$$+ z_1x_2\,\underbrace{\vec{k}\times\vec{i}}_{\vec{j}} + z_1y_2\,\vec{k}\times\vec{j} + z_1z_2\,\vec{k}\times\vec{k} =$$

$$= (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} +$$

$$+ (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

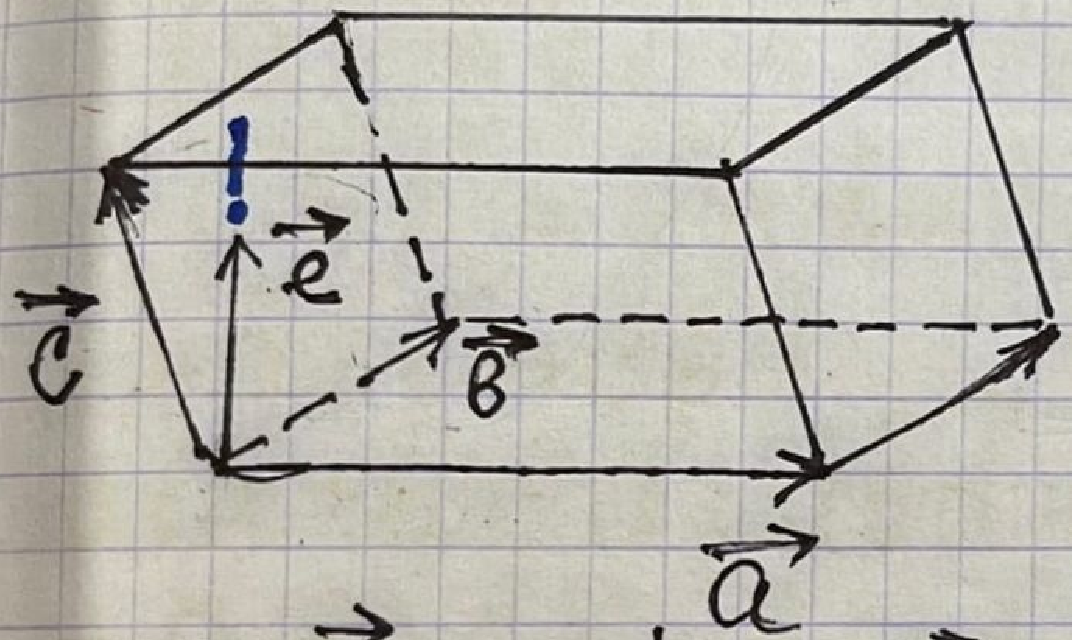
Зам. $[\vec{a}, \vec{b}]$

§7. Смешанное произведение векторов

<u>О.1.</u> Смешанным произведением трех в-ров наз. **число**, равное скалярному произведению третьего вектора на векторное произведение первых двух векторов

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} \quad (1)$$

Т.1. Смешанное $\quad V^{op}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} \quad (2)$



$$|\vec{a}\times\vec{b}| = S(\vec{a},\vec{b})$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = S(\vec{a},\vec{b})\vec{e} \Rightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} =$$

$$= S(\vec{a},\vec{b})\vec{e}\vec{c} = S(\vec{a},\vec{b})|\vec{e}|\,\text{пр}_{\vec{e}}\vec{c} =$$

$$= S(\vec{a},\vec{b})(\pm h) = V^{op}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

Св-ва смешанного пр-я

1) $(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c})$

2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} =$
$= -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\,\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$

4) $(\lambda\vec{a})\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\,(\lambda\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,(\lambda\vec{c}) =$
$= \lambda\,(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

$\boxed{5)}$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$
$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$

Д-во

Н. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компл. $\Rightarrow V^{op} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$

Д $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Rightarrow \overbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}\vec{c} = 0 \Rightarrow$

$\vec{c} \perp \vec{a} \times \vec{b}$, но и

$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — компл.

T.2. $\exists$ $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$

$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$

$\vec{c} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}$

Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$$\underline{\text{Д-во}}: \ \overrightarrow{\vec{a}\vec{b}\vec{c}} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} (x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \overset{\downarrow}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Сл. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ компл. $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4).$$

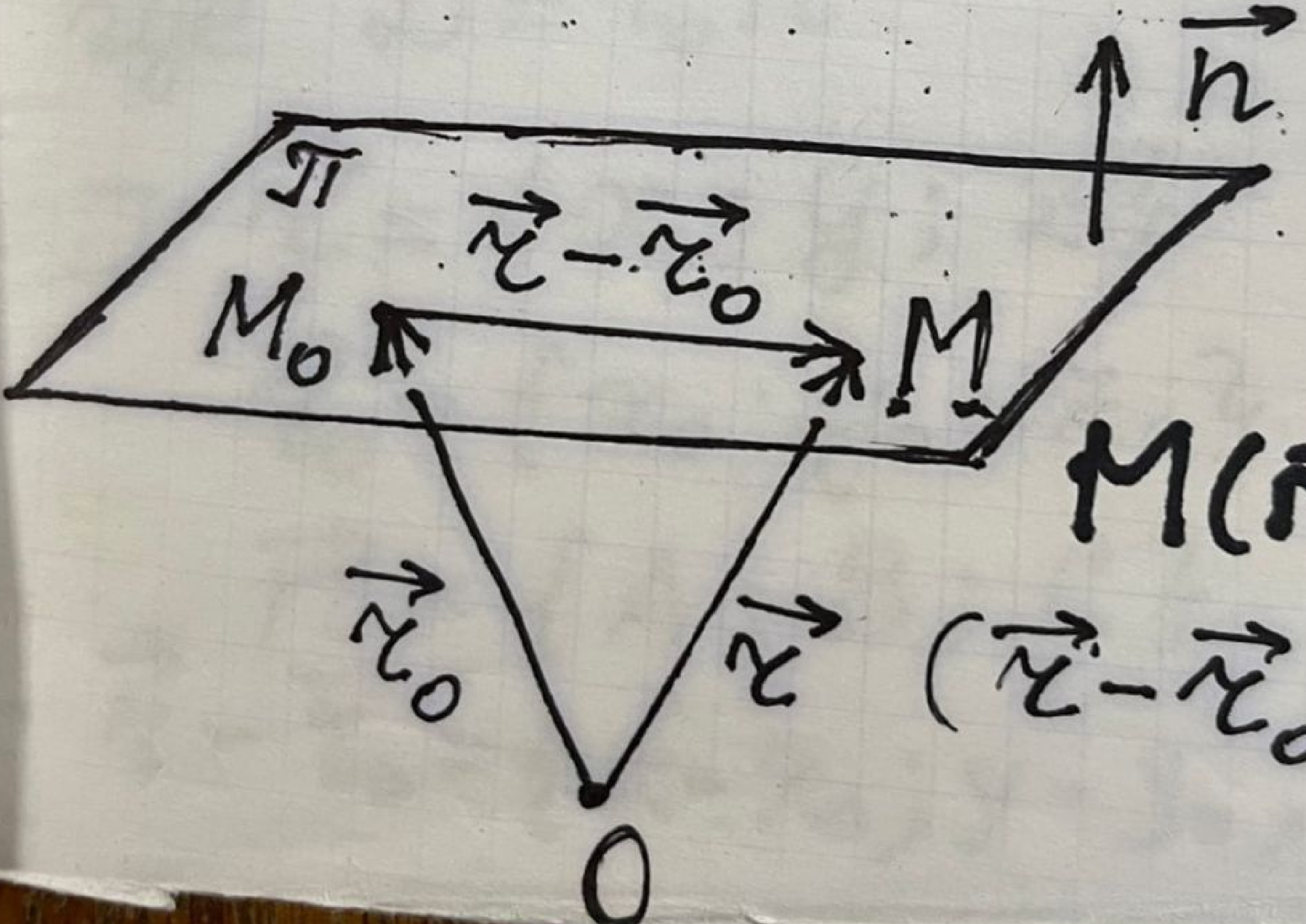
Зам. 1. простейшее пр-е

$$\underbrace{(\vec{a}\,\vec{b})}_{\text{число}}\vec{c}$$

3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}\bar{c})$

$\bar{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b})$

§ 8. Плоскость



$M(\vec{r}) \in \pi \Leftrightarrow$

$(\vec{r}-\vec{r}_0) \perp \vec{n} \Leftrightarrow$

$\pi : (\vec{r} - \vec{r_0})\vec{n} = 0 \quad (1)$

$\pi : \quad \vec{r}\vec{n} = D, \quad (2)$

где $D = \vec{r_0}\vec{n}$

$\exists \quad \vec{r} = \{x; y; z\}$

$\vec{r_0} = \{x_0; y_0; z_0\}$

$\vec{n} = \{A; B; C\}$

$\vec{r} - \vec{r_0} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$

$(1) \Longleftrightarrow$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

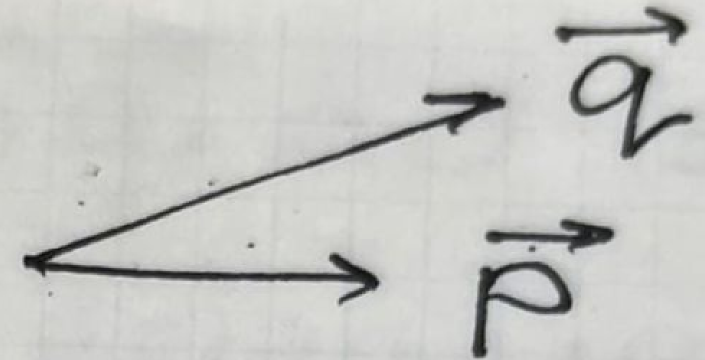
(3)

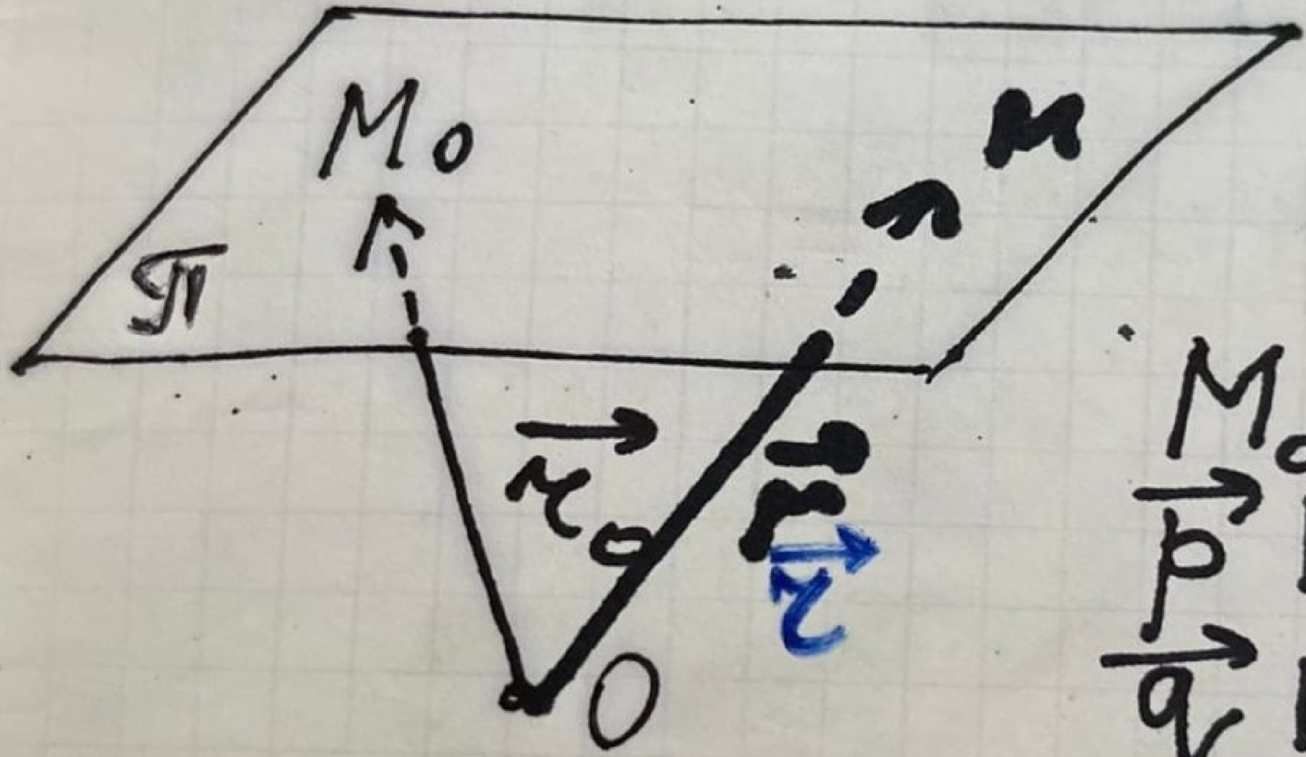
$(2) \Longleftrightarrow$ $$\boxed{D = Ax_0+By_0+Cz_0}$$

$$Ax+By+Cz=D \quad (4)$$

<u>Т.</u> Всякое линейное ур-е (4) задает плоскость и всякая плоскость м.б. задана лин. ур-ем (4).

Задача 1.





$\vec{p} \nparallel \vec{q}$

$M_0 \in \pi$

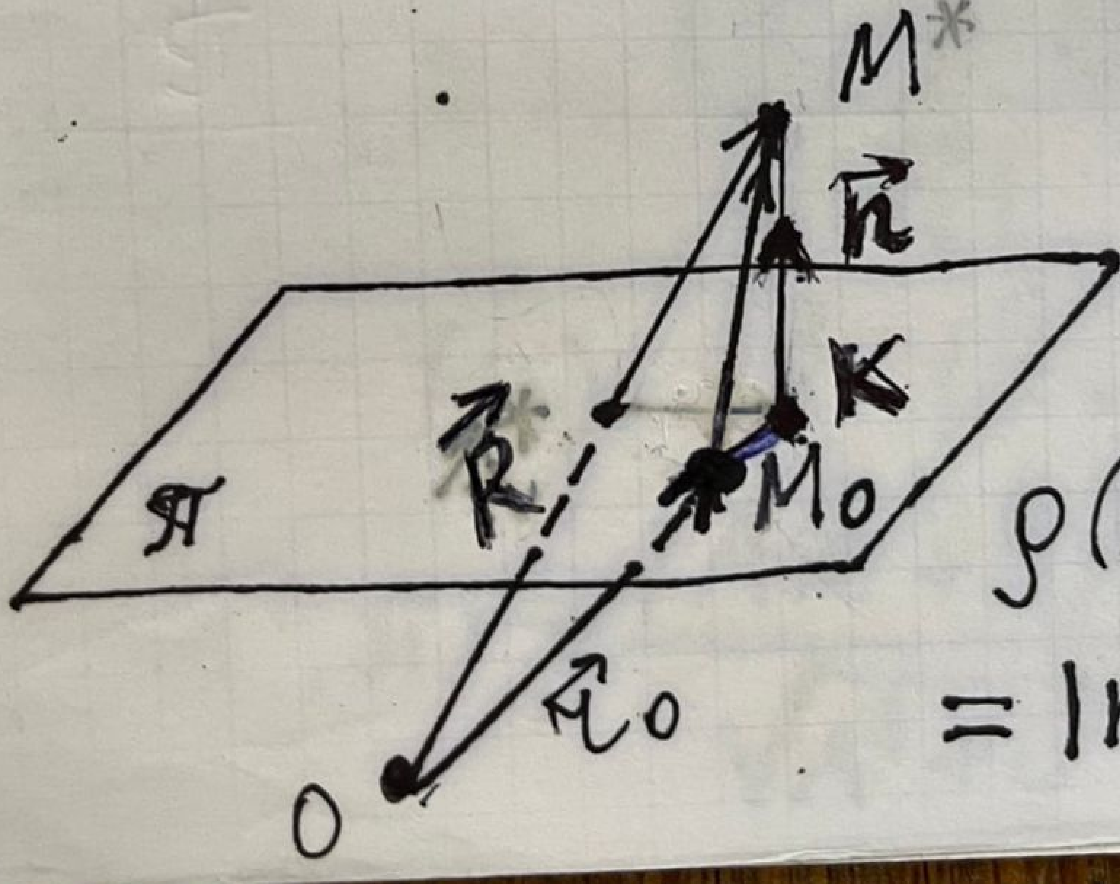
$\vec{p} \parallel \pi$

$\vec{q} \parallel \pi$

$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q}$ подст. в (1)

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{p}\vec{q}=0 \quad (5)$$

Задача 2. Вычислить $\rho(M^*, \pi)$.



$$\rho(M^*, \pi) = \overrightarrow{M_0M^*} = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overbrace{(\vec{R}^* - \vec{r}_0)}^{\overrightarrow{M_0M^*}}\right|$$

$$\rho(M^*, \pi) = \frac{|(\vec{R}^* - \vec{r}_0)\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$ (см. (2) §5)

(6)

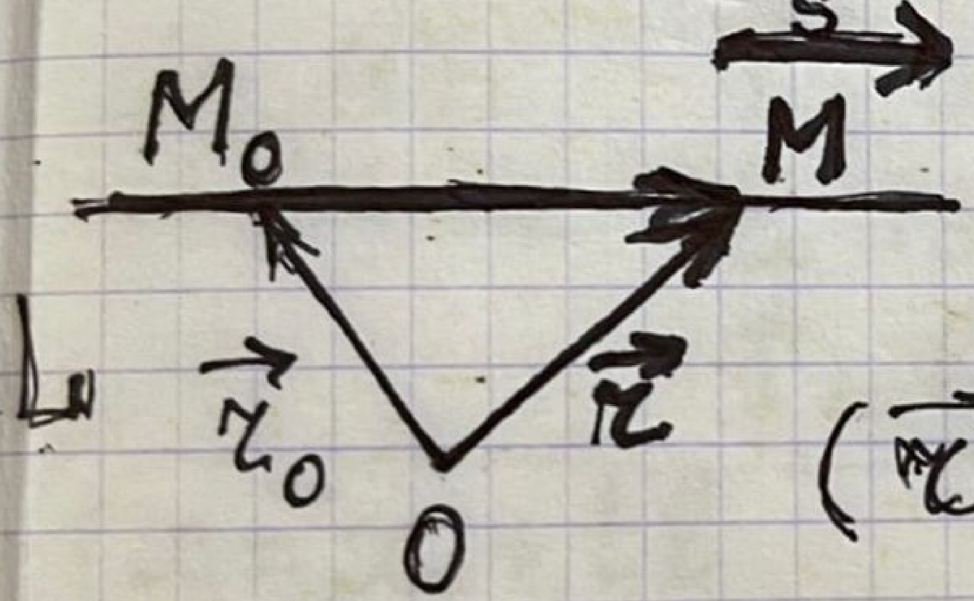
$$\rho(M^*, \pi) = \frac{|\vec{R}^* \vec{n} - D|}{|\vec{n}|}$$

(7) $\vec{R} = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$

$$\rho(M^*, \pi) = \frac{|A\hat{x} + B\hat{y} + C\hat{z} - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ (7A)

§9. Прямая линия в пространстве

§10.



$M_0 \in L$

$\vec{s} \parallel L$, $\vec{s} \neq \vec{0}$

$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$

$(\vec{r} - \vec{r}_0) \parallel \vec{s} \Leftrightarrow$

$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}$ или

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}} \quad (1)$$

векторно-параметрическое

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{s} = \vec{0} \quad (2)}$$

векторное ур-е

$$\boxed{\vec{r} \times \vec{s} = \vec{a}, \quad (3) \\ \text{где } \vec{a} = \vec{r_0} \times \vec{s}}$$

Из (1):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

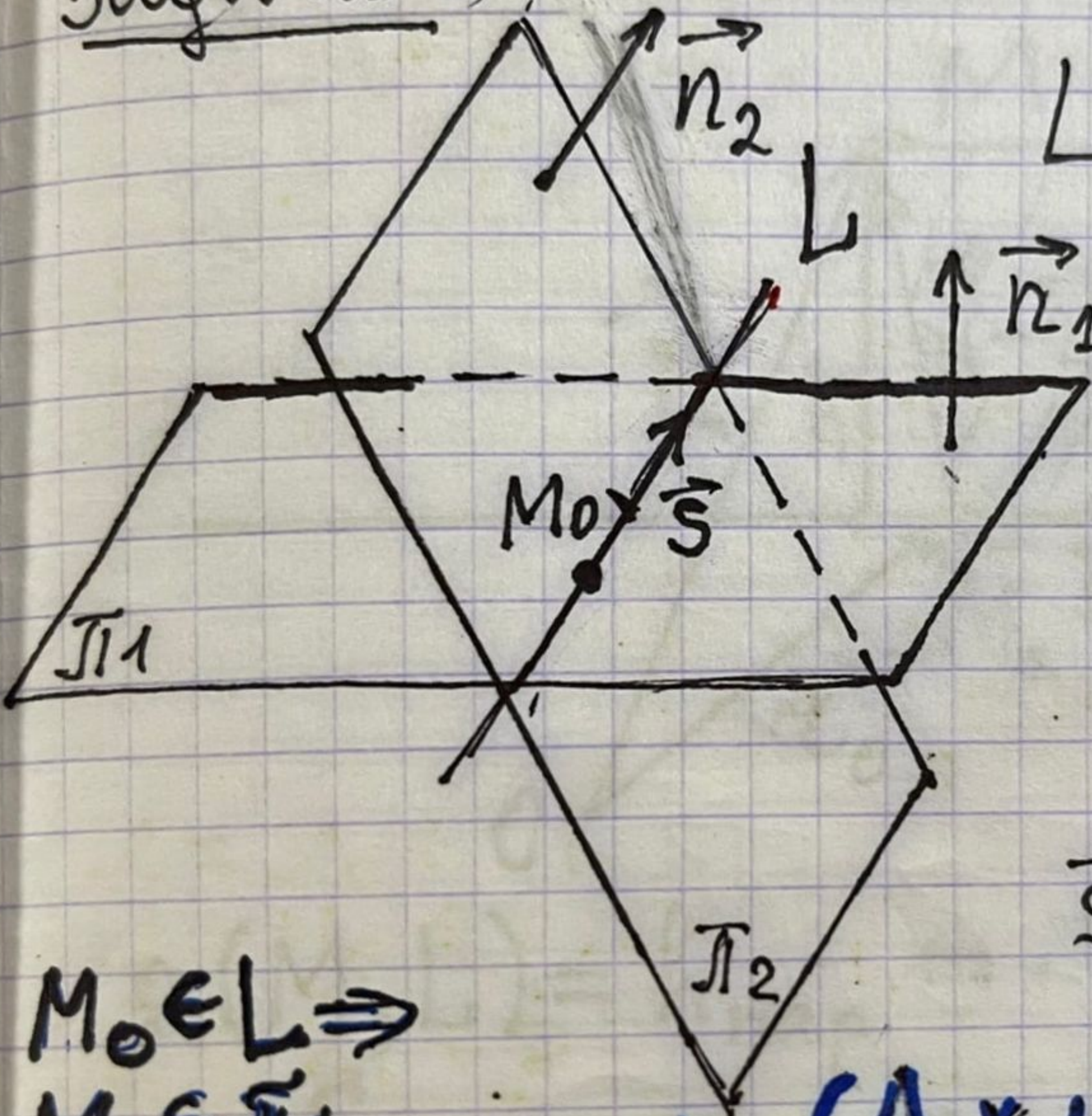
$$\vec{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + p\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tp \end{cases} \quad (4)}$$

Из (4) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}} \quad (5)$$

задача 1



$$L: \begin{cases} \vec{r}\vec{n}_1 = D_1, \\ \vec{r}\vec{n}_2 = D_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{s} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{s} \perp \vec{n}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

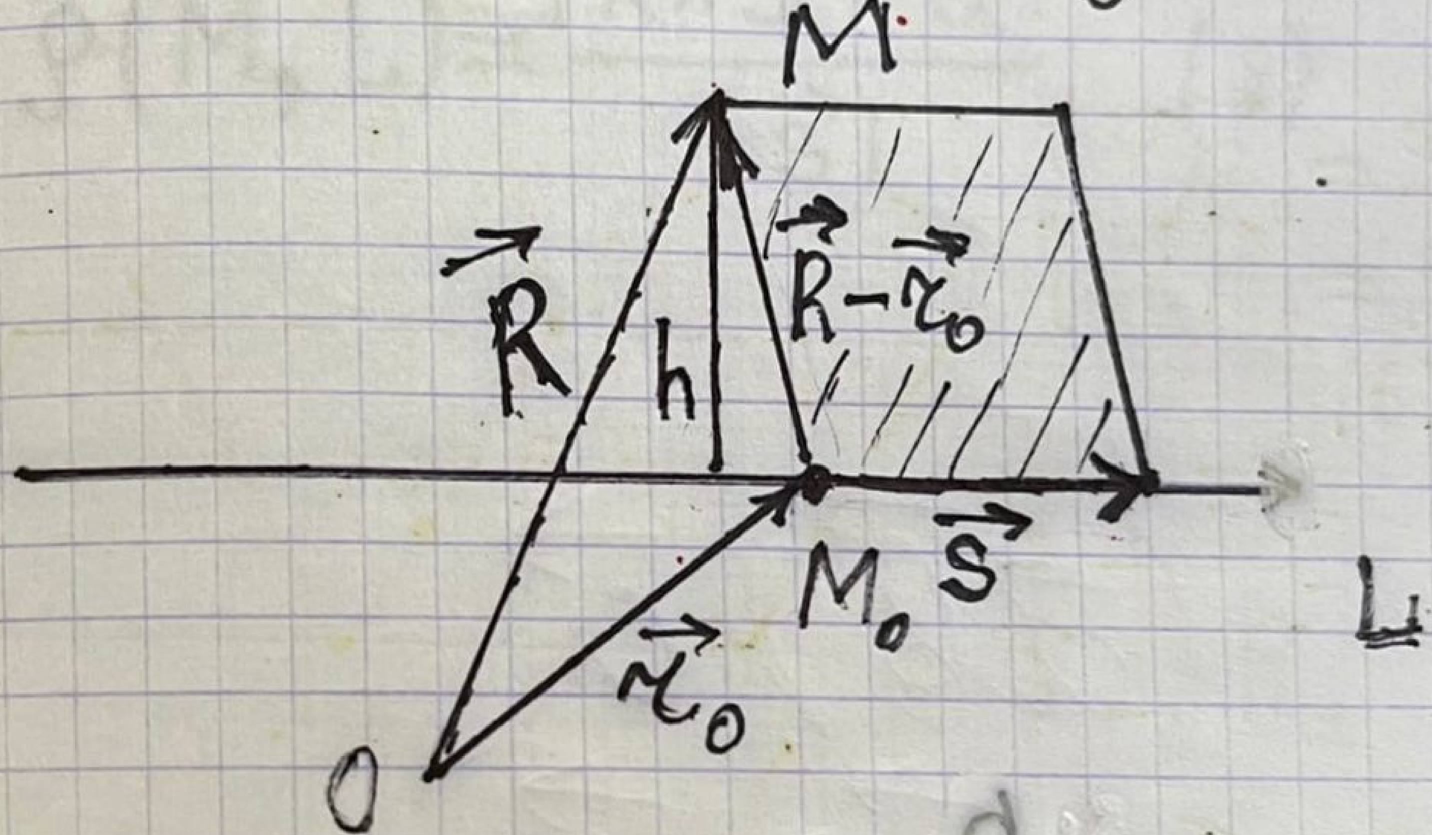
$M_0 \in L \Rightarrow$

$M_0 \in \pi_1$

$M_0 \in \pi_2$

$$(6^a) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

Задача 2. Найти $\rho(M, L)$



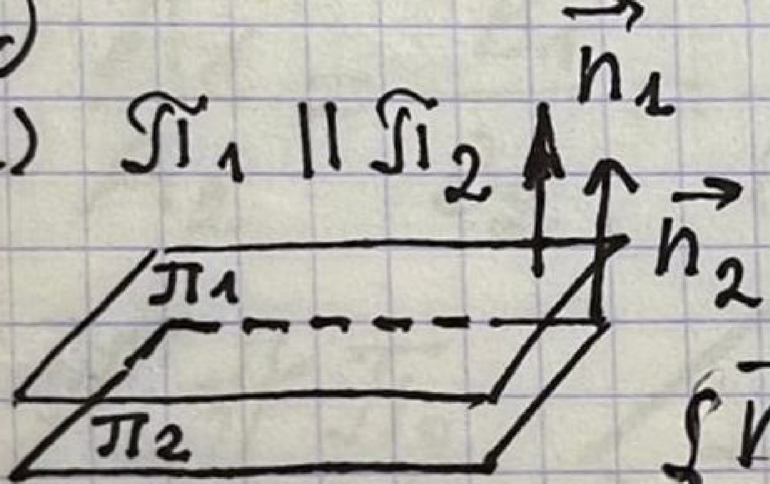
$$\rho(M,L) = h_{пар} = \frac{S_{пар}}{дл.осн} \Rightarrow \rho(M,L) = \frac{|(\vec{R}-\vec{r}_0)\times\vec{S}|}{|\vec{S}|} \quad (7)$$

$$\rho(M, L) = \frac{|\vec{R} \times \vec{s} - \vec{a}|}{|\vec{s}|} \quad (8)$$

§10 Взаимное расположение прямых и плоскостей

I.

1) $\pi_1 \parallel \pi_2$

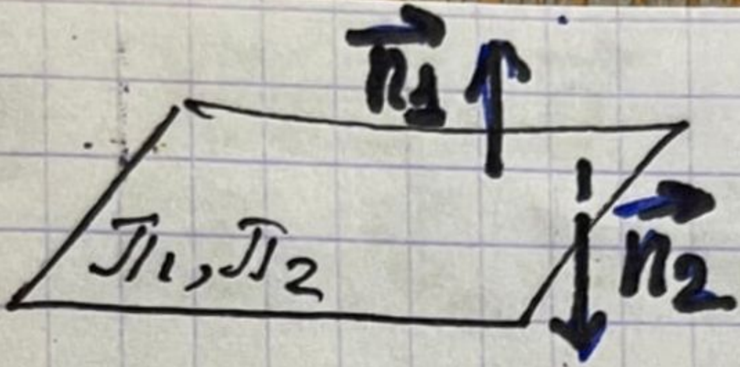


$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \\ D_1 \neq \lambda D_2 \end{cases} \Rightarrow \quad (1)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \quad (1a)$$

$\pi_1: \vec{r}\vec{n}_1 = D_1$; $\pi_2: \vec{r}\vec{n}_2 = D_2$

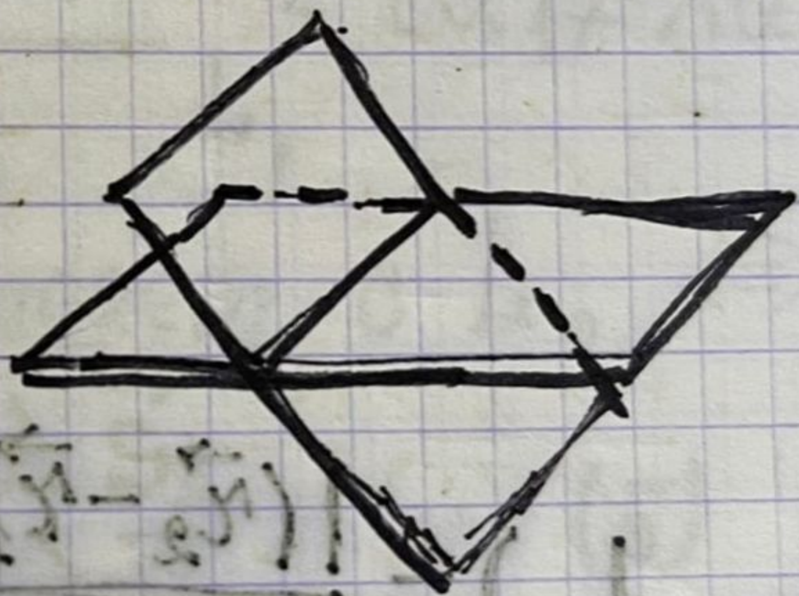
2) 

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \\ D_1 = \lambda D_2 \end{cases} (2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (2')$$

3) $\pi_1 \nparallel \pi_2$

$\vec{n}_1 \neq \lambda \vec{n}_2$

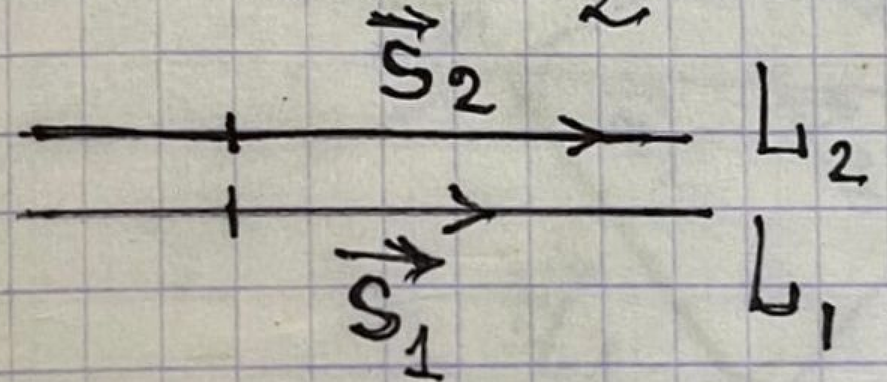


II

$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{a}$ или

$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{s} = \vec{0}$

1) $L_1 \parallel L_2$



$$\begin{cases} \vec{s}_1 = \lambda \vec{s}_2, \\ \vec{a}_1 \neq \lambda \vec{a}_2. \end{cases} \quad (3)$$

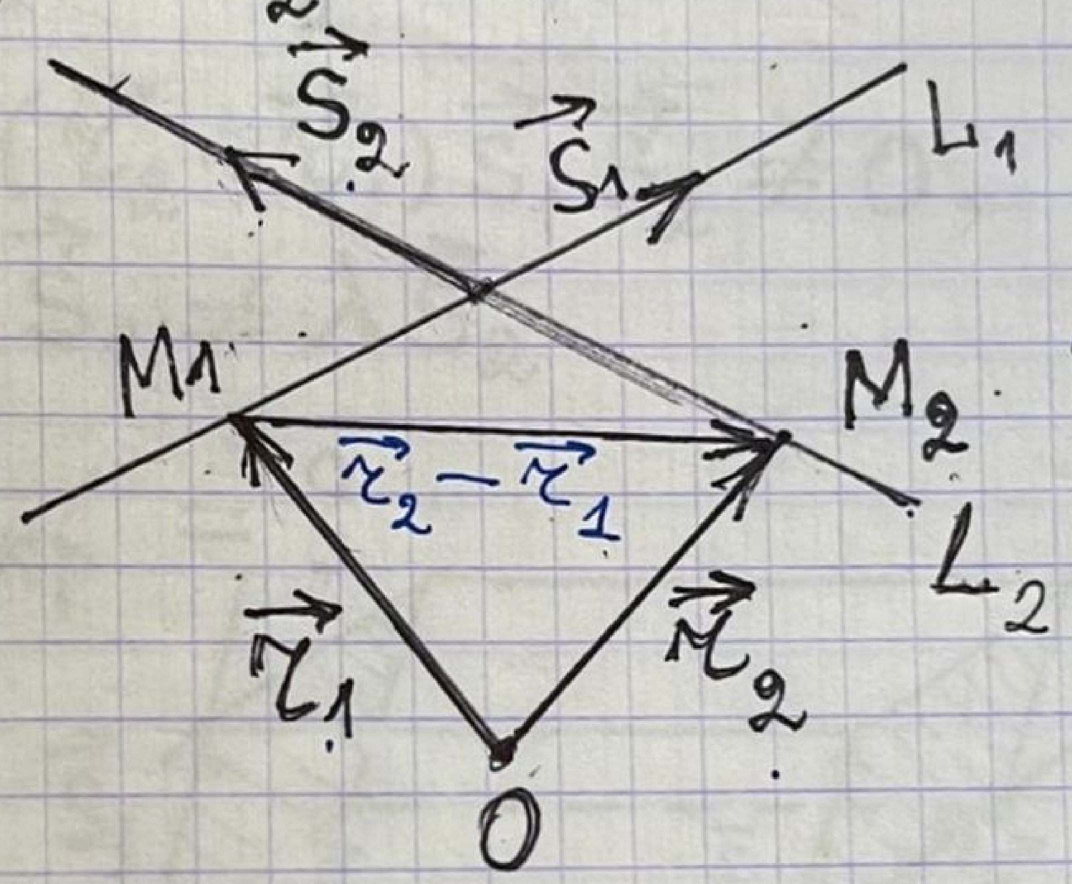
2) L_1 совпадает с L_2 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \vec{s}_1 = \lambda \vec{s}_2 \\ \vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2 \end{cases} \quad (5)$$

3) L_1 и L_2 пересекаются $\Rightarrow$ $\vec{s}_1 \neq \lambda \vec{s}_2$

или

$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \neq \vec{0}$



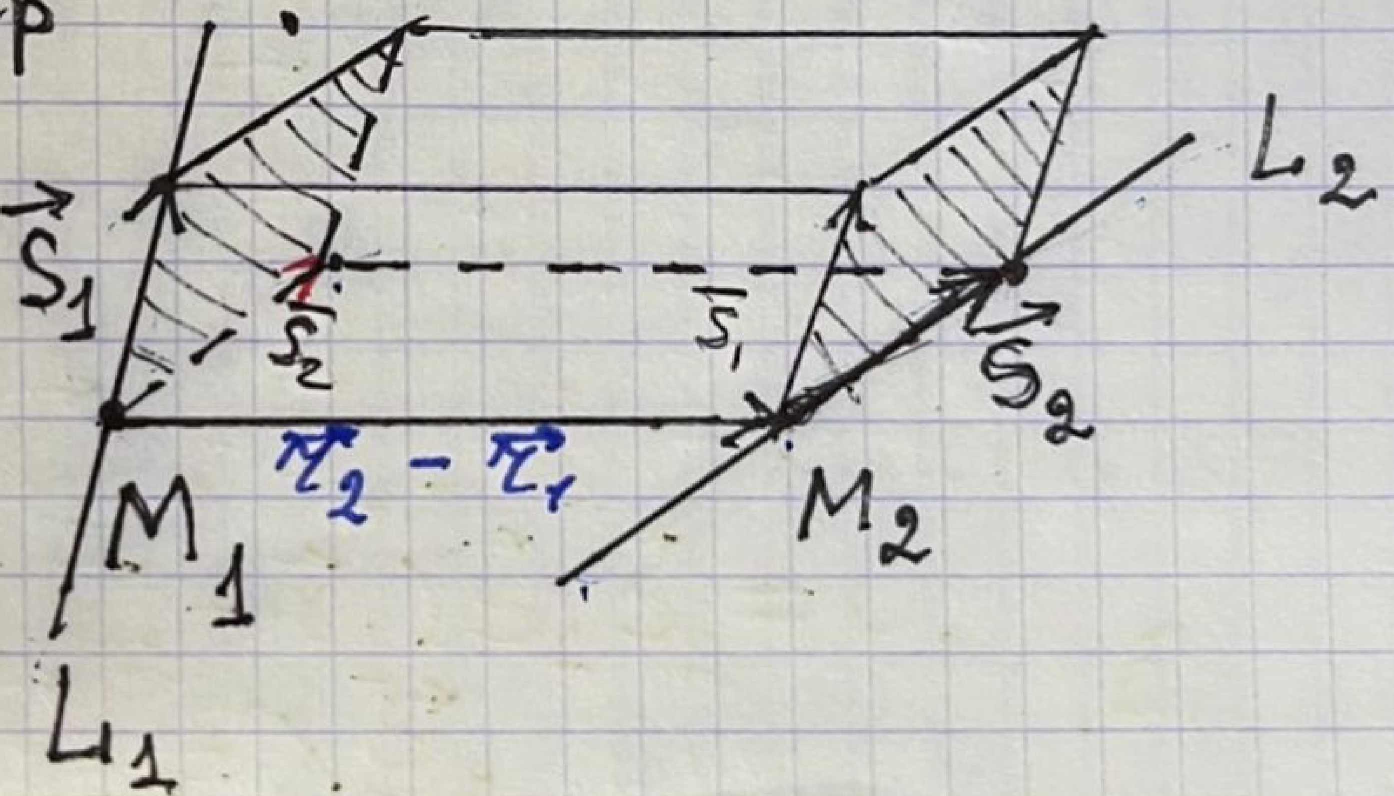
$\Rightarrow$ $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ – компл. $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{s}_1\vec{s}_2 = 0, \\ \vec{s}_1 \neq \lambda \vec{s}_2 \text{ (или ...)} \end{cases} \quad (6)$$

4) L_1 и L_2 скрещиваются

$$\begin{cases} (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\vec{s}_1\vec{s}_2 \neq 0, \\ \vec{s}_1 \neq \lambda \vec{s}_2 \end{cases} \quad (7)$$

$\rho_{кр} = ?$



$$\rho_{кр}(L_1, L_2) = \frac{V_{пар}}{S_{осн}}$$

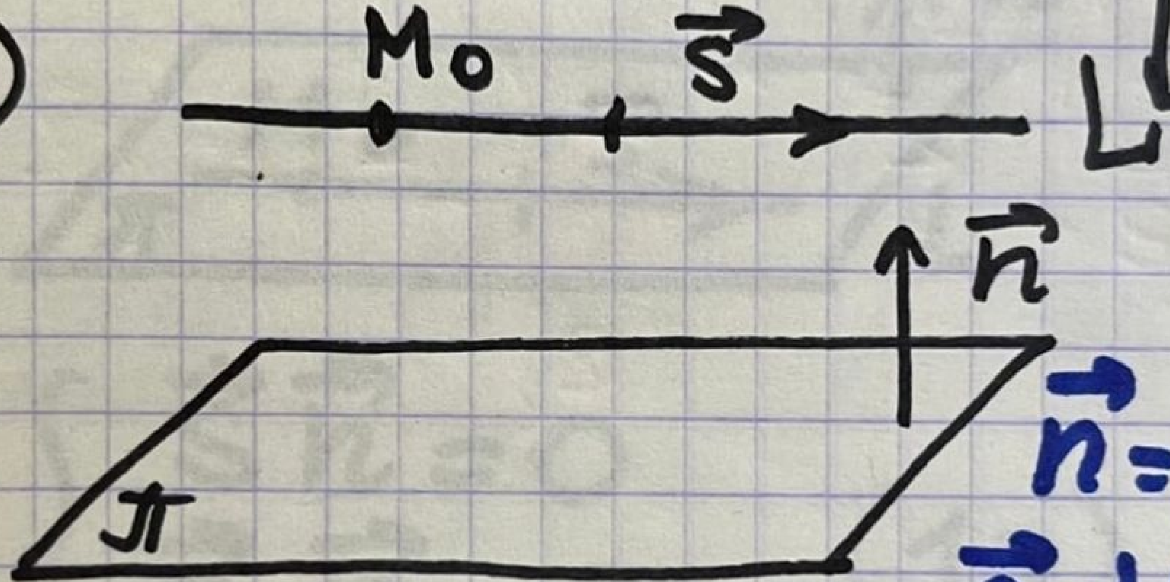
$$\rho_{кр}(L_1, L_2) = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{s}_1\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

(8)

III Прямая и плоскость

$\boxed{L \parallel \pi}$

1)



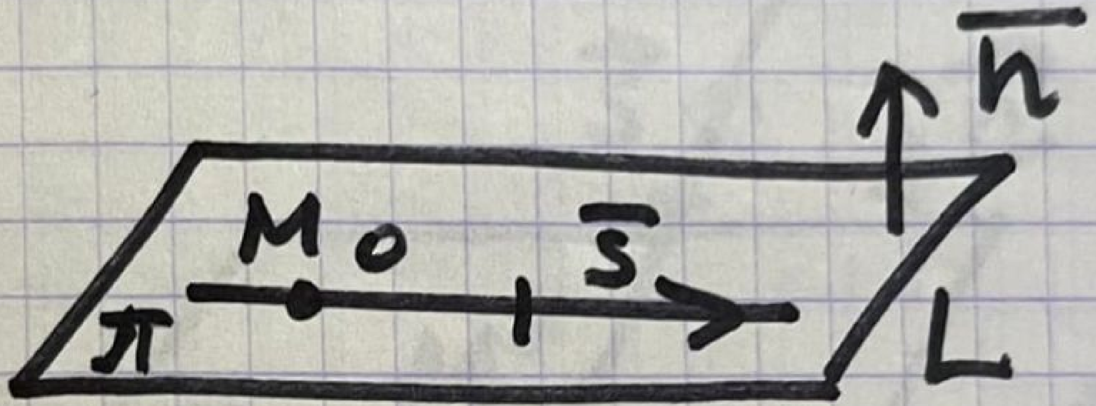
$\vec{n} = \{A; B; C\}$

$\vec{s} = \{l; m; p\}$

$$\begin{cases} \vec{s} \perp \vec{n} \\ M_0 \notin \pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{s}\,\vec{n} = 0 \\ \vec{r}_0\,\vec{n} \neq D \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} Al + Bm + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq D \end{cases} \quad (9^a)$$

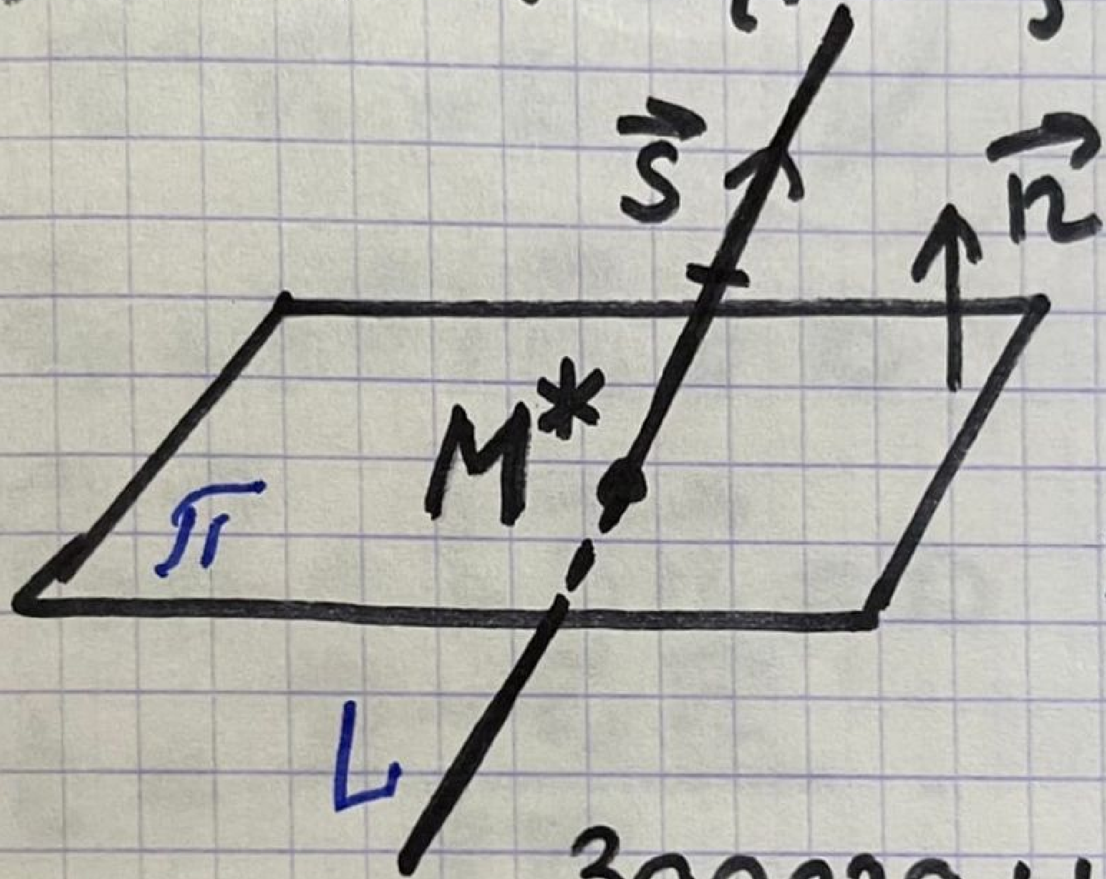
2) $\boxed{L \subset \pi}$



$$\begin{cases} \vec{s}\,\vec{n} = 0 \\ \vec{r_0}\,\vec{n} = D \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} Al + Bm + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D \end{cases} \quad (10^a)$$

3) $L \cap \pi = \{M^*\}$



$\vec{s} \not\perp \vec{n}$

$\vec{s}\vec{n} \neq 0$

<u>Задача</u>: найти M^*.

$L: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$

$\pi: \vec{r}\vec{n} = D$

$$\begin{cases}\vec{r}^{\,*} = \vec{r}_0 + t\vec{s}\\ \vec{r}^{\,*}\vec{n} = D\end{cases}$$

$$(\vec{r}_0 + t\vec{s})\vec{n} = D$$

$$\vec{r}_0\vec{n} + t\vec{s}\vec{n} = D$$

$$t = \frac{D - \vec{r}_0\vec{n}}{\vec{s}\vec{n}} \Rightarrow$$

$$\vec{r}^{\,*} = \vec{r}_0 + \frac{D - \vec{r}_0\vec{n}}{\vec{s}\vec{n}}\vec{s} \quad (11)$$

IV Углы между прямыми и плоскостями

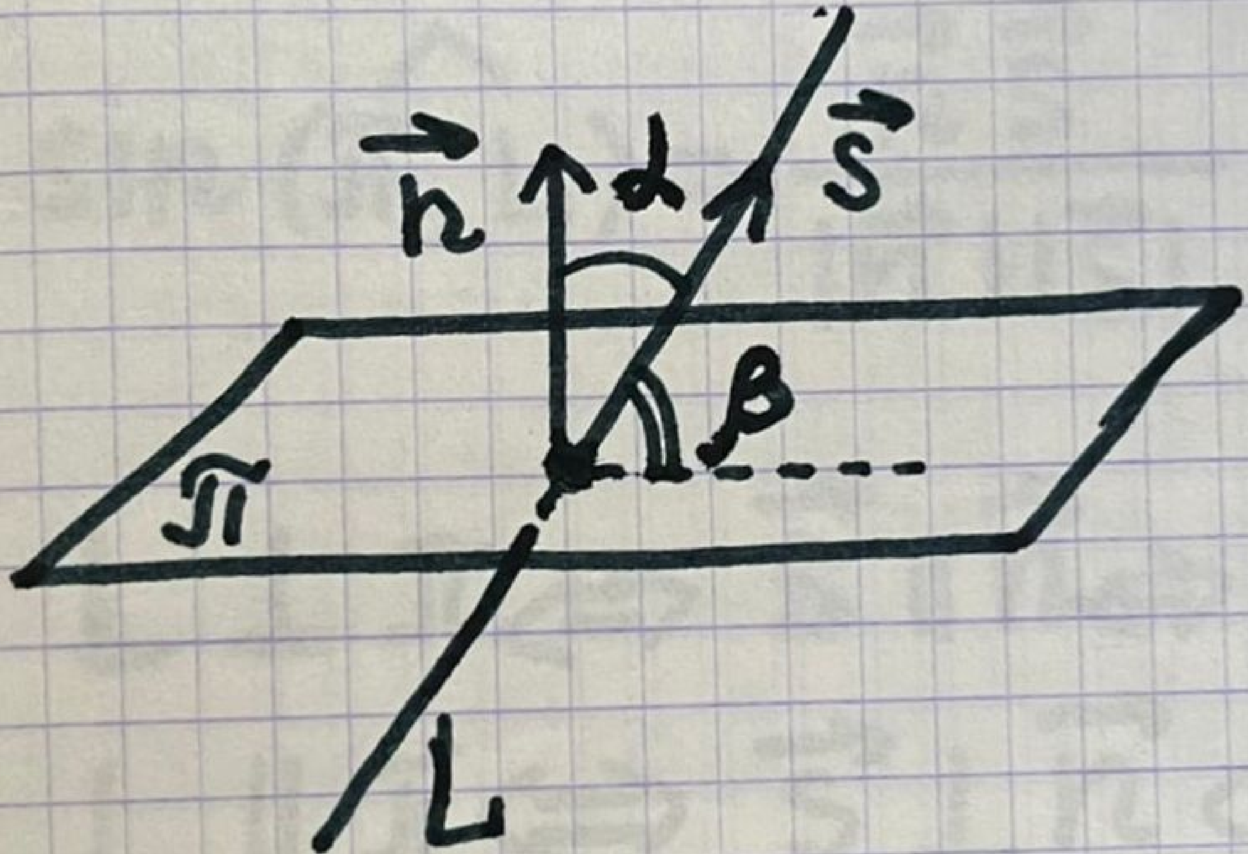
1) $(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = (\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})$

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \quad (12)$$

2) $(\widehat{L_1, L_2}) = (\widehat{\vec{S}_1, \vec{S}_2})$

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1||\vec{S}_2|} \quad (13)$$

3) $(\widehat{\pi, L})$



$$(\widehat{\pi, L}) = \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{s}, \vec{n}})$$

$$\sin(\widehat{\pi, L}) = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{s}}) \Rightarrow$$

$$\sin(\widehat{\pi, L}) = \frac{\vec{n}\,\vec{s}}{|\vec{n}|\,|\vec{s}|} \quad (1)$$

$$L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{s} = \lambda \vec{n}$$

$$\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0}$$

$$L \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow$$

$$\vec{s}\,\vec{n} = 0$$