

1695-

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт  
(технический университет)  
(СПбГТИ(ТУ))

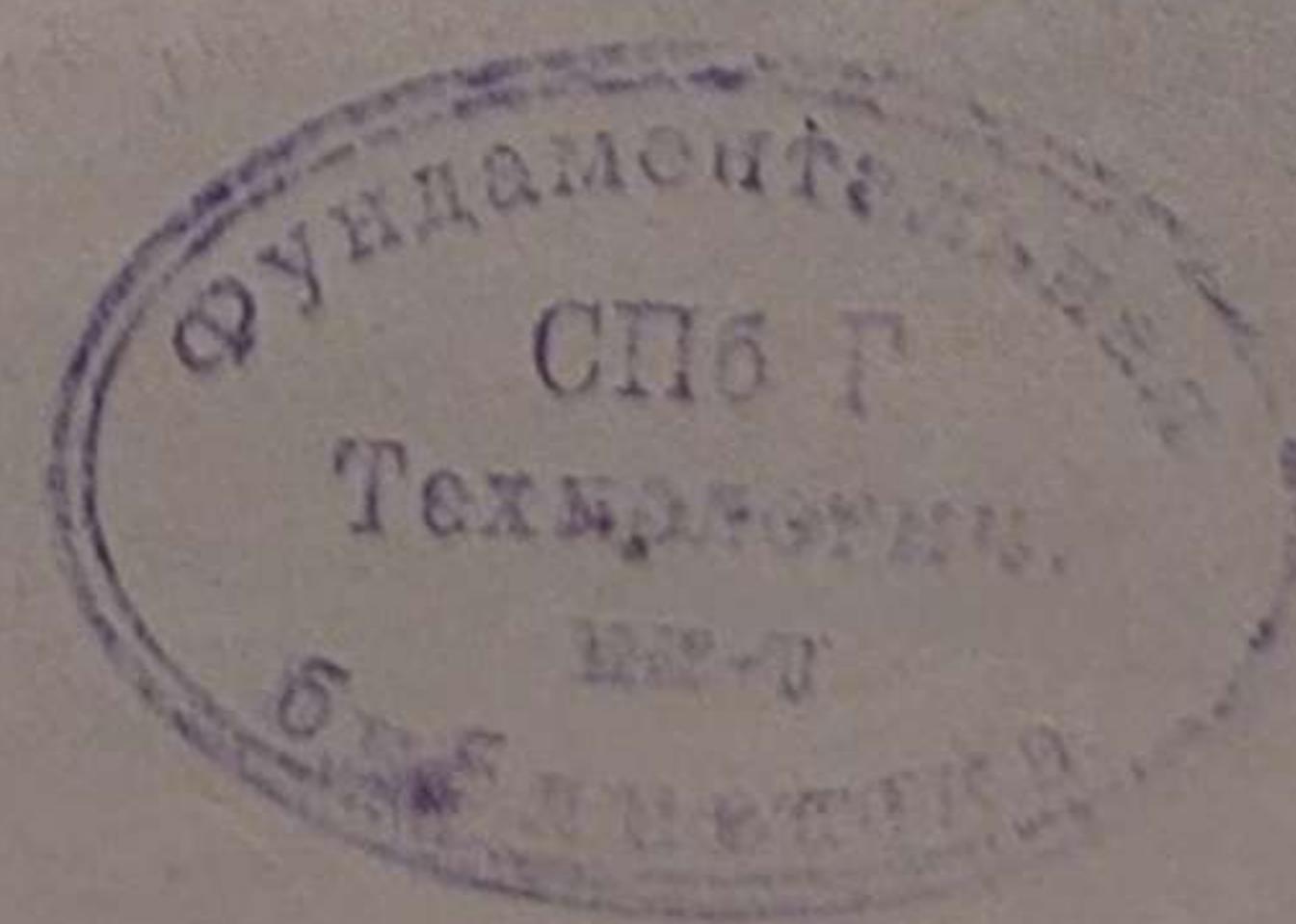
Кафедра общей физики

В.Г. Данильченко, А.Д. Иванов, Н.Г. Москвин, А.Г. Чубисо

МЕХАНИКА

Методические указания к лабораторным работам №<sup>80</sup>  
1, 01, 2, 02, 3, 4, 04, 05, 06, 07, 08, 09

Санкт-Петербург  
2012 г.



Данильченко, В.Г. Механика: методические указания к лабораторным работам / В.Г. Данильченко, А.Д. Иванов, Н.Г. Москвин, А.Г. Чибисов. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2012. – 64 с.

В методических указаниях представлены лабораторные работы по разделу «Механика» курса общей физики.

Данные лабораторные работы знакомят студентов с кинематикой и динамикой поступательного, вращательного и колебательного движения.

Методические указания соответствуют следующим компетенциям подготовки студентов всех направлений: ОК-1, ПК-1, ПК-3, ПК-4, ПК-8.

Методические указания предназначены для студентов первого курса всех факультетов в соответствии с рабочей программой по общей физике.

Рис. 19, табл. 11, библиогр. 4 назв.

Рецензент:

В.И. Зарембо, д-р. хим. наук., проф., зав. кафедрой аналитической химии СПбГТИ(ТУ)

Утверждено на заседании учебно-методического совета инженерно-технологического факультета Протокол № 2 от 08.10.2012 г.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1 Кинематика и динамика поступательного движения .....	6
1.1 Лабораторная работа № 07 «Определение ускорения свободного падения с помощью машины Атвуда» .....	12
Порядок выполнения работы .....	13
Контрольные вопросы .....	14
1.2 Лабораторные работы № 4 и № 04 «Удар шаров» .....	15
Порядок выполнения работы .....	18
Контрольные вопросы .....	20
1.3 Лабораторная работа № 08 «Определение коэффициента силы трения качения для наклонного маятника» .....	21
Порядок выполнения работы .....	24
Контрольные вопросы .....	26
2. Кинематика и динамика вращательного движения твердого тела....	27
2.1 Лабораторная работа № 1 или № 01 «Изучение динамики вращательного движения твердого тела» .....	33
Порядок выполнения работы .....	34
Задание 1 .....	34
Задание 2 .....	35
Контрольные вопросы .....	37
2.2. Лабораторная работа № 2 или № 02 «Определение момента инерции тела с помощью крутильных колебаний» .....	38
2.2.1 Задание для лабораторной работы № 02 .....	40
Порядок выполнения работы.....	41
2.2.2 Задание для лабораторной работы № 2 .....	42
Порядок выполнения работы.....	42
Контрольные вопросы .....	43
2.3. Лабораторная работа № 06 «Определение момента инерции маятника Максвелла» .....	44

Порядок выполнения работы.....	47
Контрольные вопросы .....	48
2.4. Лабораторная работа № 09 «Определение скорости полета частицы с помощью баллистического крутильного маятника» .....	48
Порядок выполнения работы.....	50
Контрольные вопросы .....	51
3. Гармоническое колебательное движение .....	52
3.1 Лабораторная работа № 05 «Изучение колебаний математического и физического маятников» .....	55
3.1.1 Математический маятник .....	55
Порядок выполнения работы .....	56
3.1.2 Оборотный маятник .....	57
Порядок выполнения работы .....	59
Контрольные вопросы .....	60
3.2. Лабораторная работа № 3 «Изучение колебаний маятника».....	61
Порядок выполнения работы .....	62
Контрольные вопросы .....	63
ЛИТЕРАТУРА .....	64

## ВВЕДЕНИЕ

Лабораторный практикум по физике способствует достижению нескольких целей:

- практическое знакомство студентов с некоторыми физическими явлениями и простейшими методами измерения физических характеристик;
- получение навыков в обращении с физическими приборами;
- приобретение навыков в оценке достоверности полученных результатов.

Лабораторные работы по механике разбиты на 3 раздела: поступательное, вращательное и колебательное движения. Для всех работ каждого раздела написана единая теоретическая часть, а затем идет описание лабораторных работ. После описания лабораторной работы представлен перечень вопросов, на которые студент должен ответить для получения допуска к работе.

После получения допуска студент приступает к выполнению эксперимента. Результаты измерений заносятся в "Лист наблюдений", который подписывает дежурный лаборант.

По результатам измерений дома студент готовит отчет по работе, включающий таблицы измерений, расчеты физических величин и расчет погрешностей измерений. Отчет вместе с листом наблюдений представляется на проверку преподавателю.

# 1 КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Кинематика. Механическим движением называют изменение положения одних тел относительно других, происходящее в пространстве с течением времени.

Поступательное движение — такое движение, при котором все точки тела двигаются по одинаковым траекториям, имеют одинаковые скорости и ускорения в каждый момент времени. Поэтому поступательное движение можно описать как движение одной точки. Такая модель тела, в которой не учитываются его размеры и форма, называется *материальной точкой* или *частицей*.

Положение частицы, движущейся в пространстве, определяется относительно другого тела, которое условно считают неподвижным (тело отсчета). С телом отсчета связывают ту или иную систему координат.

Для измерений промежутков времени служат часы, действие которых основано на использовании какого-либо периодического процесса.

Система координат и связанные с ней часы образуют систему отсчета (*CO*).

Положение тела относительно *CO* определяется с помощью радиус-вектора  $\vec{r}$ . Радиус-вектор можно задать, указав его проекции на координатные оси ( $x, y, z$ ), (рисунок 1).

При движении частицы длина и направление радиус-вектора изменяется, а его конец описывает траекторию движения.

Введем основные кинематические характеристики:

- вектор перемещения  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , который показывает на сколько и в каком направлении переместилось тело;
- путь ( $\Delta S$ ) — длина траектории. В пределе при малых перемещениях.

$$|d\vec{r}| = dS;$$

- средняя скорость ( $\bar{v}_{cp}$ ) — перемещение за единицу времени:

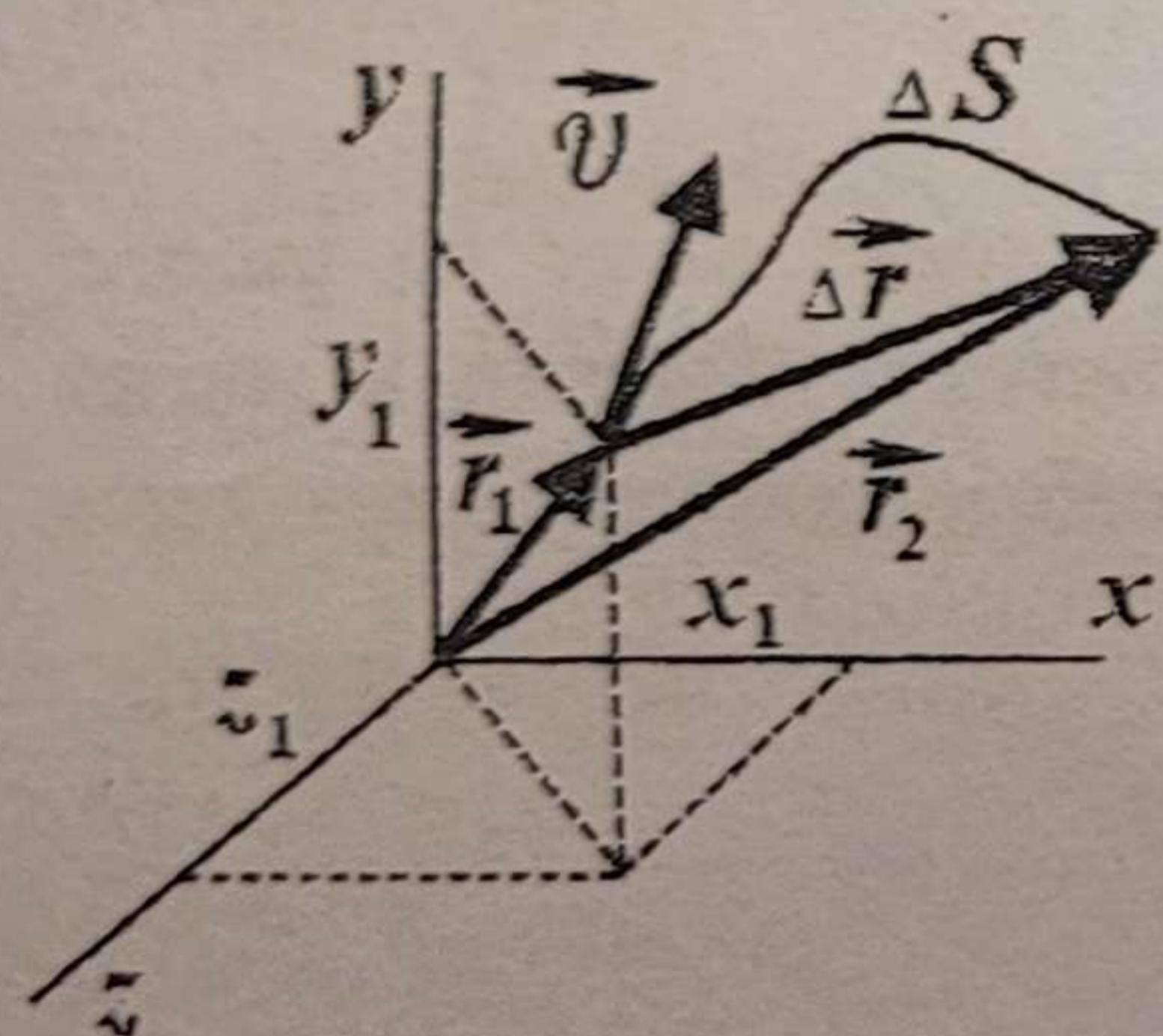


Рисунок 1 – Положение материальной точки в декартовой системе координат

$$\bar{v}_{cp} = \Delta \vec{r} / \Delta t . \quad (1.1)$$

Предел этого отношения при  $\Delta t \rightarrow 0$  или производную по времени от перемещения называют мгновенной скоростью ( $\bar{v}$ )

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r} / \Delta t = d \vec{r} / dt .$$

Мгновенная скорость, как вектор, направлена по касательной к траектории.

Ускорение ( $\bar{a}$ ) — первая производная от скорости по времени или вторая производная от перемещения по времени:

$$\bar{a} = d \bar{v} / dt = d^2 \vec{r} / dt^2 . \quad (1.2)$$

Если известна зависимость  $\vec{r}(t)$  от времени, то выполняя дифференцирование, можно найти скорость и ускорение.

Обратно: если задано ускорение как функция времени, то изменение скорости и перемещение за время  $t$  находят путем интегрирования

$$\Delta \bar{v} = \int_0^t \bar{a}(t) \cdot dt ; \quad \Delta \vec{r}(t) = \int_0^t \bar{v}(t) \cdot dt .$$

В частности, если частица движется с постоянным ускорением

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t , \quad (1.3)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a}t^2}{2} , \quad (1.4)$$

где  $\bar{v}_0$  и  $\vec{r}_0$  начальная скорость и радиус-вектор частицы в момент времени, принятый за начало его отсчета, т. е. при  $t = 0$ .

Из соотношений (1.3, 1.4) можно найти, что при равноускоренном движении

$$\bar{v}_{cp} = \Delta \vec{r} / \Delta t = (\bar{v}_0 + \bar{v}) / 2 , \quad (1.5)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a |\Delta r| . \quad (1.6)$$

Динамика — раздел механики, описывающий процесс изменения состояния движения тел, в результате их взаимодействия друг с другом.

Основу классической динамики частицы составляют три закона Ньютона, сформулированные на основе обобщения многочисленных опытных фактов.

**I закон Ньютона.** Существуют такие системы отсчета, в которых тела сохраняют состояние относительного покоя (или равномерного прямолинейного движения), если действие на них всех других тел (сил) скомпенсировано.

Первый закон динамики среди множества систем отсчета на основании эксперимента выделяет особый тип систем, в которых описание физических явлений имеет наиболее простой вид. Системы отсчета, удовлетворяющие требованию первого закона Ньютона, называют инерциальными.

**II закон Ньютона.** В инерциальных системах отсчета скорость изменения импульса частицы пропорциональна векторной сумме всех сил, действующих на частицу.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i . \quad (1.7)$$

Импульсом (или количеством движения) частицы называют векторную величину, равную произведению массы частицы на ее скорость

$$\vec{p} = m\vec{v} . \quad (1.8)$$

Масса является мерой инертности тела, т. е. величиной, показывающей насколько трудно с помощью данного воздействия изменить характер его движения.

Сила — количественная характеристика взаимодействия тел. Конкретное выражение для силы зависит от вида взаимодействий.

Если масса частицы со временем не меняется, т. е. при  $v \ll c = 3 \cdot 10^8$  м/с, то второй закон Ньютона можно записать в виде:

$$d(m\vec{v})/dt = m \cdot d\vec{v}/dt$$

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.9)$$

**III закон Ньютона.** В инерциальных системах отсчета два тела взаимодействуют друг с другом с силами равными по величине и противоположными по направлению.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \quad (1.10)$$

При решении конкретных задач с использованием второго закона Ньютона необходимо знать законы взаимодействия тел.

Приведем несколько примеров:

1) **Закон всемирного тяготения.** Две частицы притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной произведению величин масс частиц и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} , \quad (1.11)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ .

Сила  $\vec{F}_{\text{тяж}}$ , действующая со стороны Земли на тело массой  $m$ , находящееся у ее поверхности на высоте  $h \ll R_{\text{З}}$ , (где  $R_{\text{З}}$  — радиус Земли), называют силой тяжести. Ее можно записать в виде

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g} , \quad (1.12)$$

где  $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения у поверхности Земли.

2) Для небольшого растяжения пружины или стержня на величину  $\bar{x}$  к ней необходимо приложить силу, описываемую законом Гука:

$$\vec{F}_{\text{оид}} = -k\bar{x} , \quad (1.13)$$

где  $k$  — коэффициент упругости пружины.

3) **Силы сухого трения** — возникают при соприкосновении твердых тел и направлены по касательной к их поверхности.

При попытке сдвинуть тело относительно некоторой поверхности возникает сила трения покоя. При этом ее величина равна проекции внешней сдвигающей силы на касательную к поверхности соприкосновения.

При дальнейшем увеличении усилия сдвига начинается скольжение. Сила трения скольжения (в первом приближении) оказывается пропорциональной силе нормального давления ( $N$ ), с которой тело прижимается к поверхности

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu N , \quad (1.14)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения.

Максимальное значение силы трения скольжения совпадает по величине с силой трения покоя.

Используя законы Ньютона, а также кинематические соотношения, можно получить ряд следствий (теорем), удобных при решении практических задач.

Приведем некоторые из них:

1) Скорость изменения полного импульса системы частиц ( $\bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_n$ ) равна сумме внешних сил, действующих на данную систему

$$d\bar{P}/dt = \sum_i \bar{F}_i \text{внешн.} \quad (1.15)$$

Внешние силы — силы, возникающие при взаимодействии частиц системы с телами, не входящими в данную систему.

Если система замкнута, т. е.  $\sum_i \bar{F}_i \text{внешн.} = 0$ , то

$$d\bar{P}/dt = 0 \quad \text{или} \quad \bar{P} = \text{const} \quad (1.15a)$$

Таким образом, полный импульс замкнутой системы есть величина постоянная (закон сохранения импульса).

2) Введем в рассмотрение точку **C**, положение которой определяется радиус-вектором следующим образом:

$$\bar{R}_c = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \dots + m_n \bar{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (1.16)$$

где  $\bar{r}_i$ ,  $m_i$  — радиус-вектор и масса  $i$ -той частицы системы.

Такую точку называют *центром масс* (или центром инерции) системы частиц. Для этой точки справедлив следующий закон динамики:

$$M \frac{d^2 \bar{R}_c}{dt^2} = \sum_i \bar{F}_i \text{внешн.}, \quad (1.17)$$

т.е. произведение массы всей системы ( $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ ) на ускорение центра масс равно сумме внешних сил, действующих на систему.

Важное следствие можно получить относительно величины, получившей название *механической работы* ( $A$ ). За величину *элементарной работы* принимают скалярное произведение силы на элементарное перемещение:

$$dA = \bar{F} d\bar{r} = |\bar{F}| \cdot |d\bar{r}| \cdot \cos \alpha = F dS \cdot \cos \alpha = F_S dS. \quad (1.18)$$

В цепочке последних равенств:  $\alpha$  — угол между  $\bar{F}$  и  $d\bar{r}$ ;  $F_S$  — проекция силы на направление, касательное к траектории. Равенство (1.18) дает работу при бесконечно малом перемещении. В общем случае при перемещении тела из точки (1) в точку (2) работу находят, выполняя интегрирование:

$$A = \int_1^2 F_S dS.$$

Существуют силы, в поле которых работа определяется только выбором начальной и конечной точек перемещения и не зависит от формы траектории, соединяющей эти точки. Такие силы называют консервативными.

Сила тяжести и упругая сила консервативны. В то же время работа в поле сил трения зависит от формы траектории. Силы, подобные силе трения, называют диссипативными.

Можно показать, что существует величина, называемая *механической энергией системы* ( $E$ ), изменение которой равно работе диссипативных и внешних сил

$$E_2 - E_1 = A_{\text{дисс.}} + A_{\text{внешн.}} \quad (1.19)$$

Полная механическая энергия складывается из суммы кинетической и потенциальной энергий

$$E = E_{\hat{E}} + U.$$

Кинетическая энергия связана с движением тела и вычисляется по формуле:

$$E_{\hat{E}} = m \hat{v}^2 / 2. \quad (1.20)$$

Потенциальная энергия учитывает работу консервативных сил. Ее явное выражение зависит от конкретного вида взаимодействия. Например, потенциальная энергия тела в однородном поле сил тяжести

$$U = mgh, \quad (1.21)$$

$h$  — высота подъема относительно уровня, от которого отсчитывается потенциальная энергия. Потенциальная энергия упруго деформированной пружины

$$U_{\text{упр.}} = kx^2 / 2. \quad (1.22)$$

Заметим, что потенциальная энергия и соответствующие силы связаны соотношением

$$F_x = -dU/dx, \quad (1.23)$$

в соответствии с которым проекция силы на произвольное направление ( $F_x$ ) равно производной с обратным знаком от потенциальной энергии по этому направлению.

Если в замкнутой системе отсутствуют диссипативные силы, т. е. система консервативна, то  $A_{\text{дисс.}} = 0$ , тогда из (1.19) следует

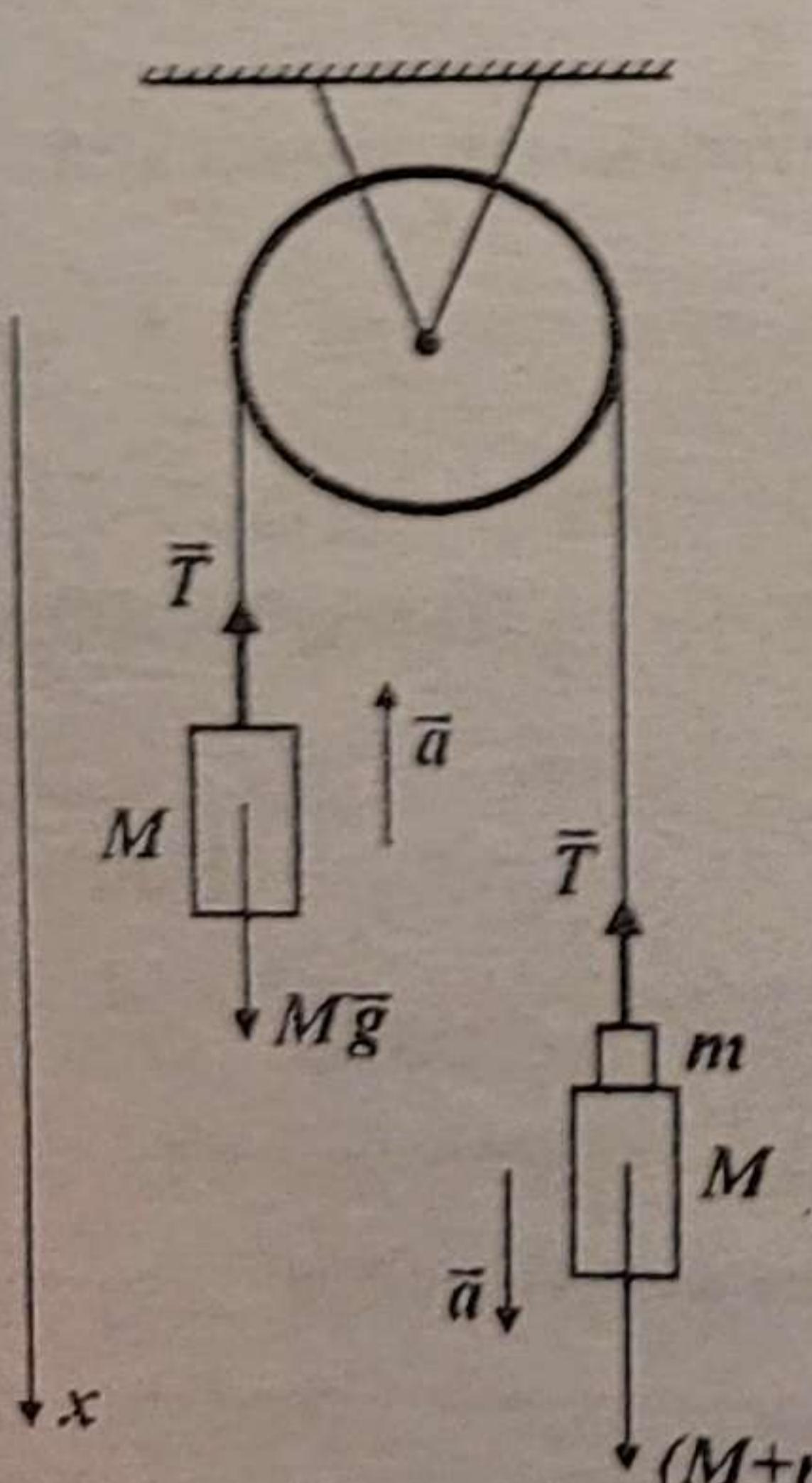
$$E_2 = E_1, \quad (1.24)$$

т.е. полная механическая энергия в замкнутых консервативных системах сохраняется.

### 1.1 Лабораторная работа № 07

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

Цель работы — изучение законов равноускоренного движения и определение ускорения свободного падения.



Лабораторная установка представляет собой т.н. машину Атвуда (рисунок 2).

Через легкий блок перекинута нить, к концам которой прикреплены одинаковые грузы массой  $M$ . На один из грузов кладется перегрузка массой  $m$ , и грузы приходят в ускоренное движение. Пренебрегая массой блока и нити, а также трением в оси блока и сопротивлением воздуха движению грузов, можно в соответствии со вторым законом Ньютона описать движение грузов следующими уравнениями:

$$Mg - T = -Ma,$$

$$(M+m) \cdot g - T = (M+m) \cdot a, \quad (1.25)$$

где  $T$  — натяжение нити;  $a$  — ускорение грузов.

Исключая  $T$  из уравнений (1.25), получаем

$$a = g \frac{m}{2M + m} \quad (1.26)$$

Машину Атвуда можно использовать для измерения ускорения свободного падения.

Пусть на отрезке пути  $S_0$  грузы  $M$  и  $(M+m)$  двигаются равноускоренно. Скорость грузов в конце равноускоренного движения найдем из формул равноускоренного движения:

$$v_0^2 = 2a \cdot S_0. \quad (1.27)$$

Если затем снять перегрузку, то грузы  $M$  продолжат движение по инерции с постоянной скоростью  $v_0$ , пройдя путь  $S$  за время  $t$ :

$$S = v_0 t = t \cdot \sqrt{2a S_0}. \quad (1.28)$$

Используя формулу (1.28), из формулы (1.26) можно выразить  $g$ :

$$g = \frac{2M + m}{m} \cdot \frac{S^2}{2S_0 t^2}. \quad (1.29)$$

Для определения  $g$  необходимо измерить путь  $S_0$  равноускоренного движения, а также путь  $S$  и время  $t$  равномерного движения.

Измерение времени движения груза в лабораторной установке осуществляется автоматически с помощью электронного секундомера и двух фотоэлектрических датчиков.

#### Порядок выполнения работы

- Наложить на шкив нить с большими грузиками. Масса каждого грузика  $M = (60,00 \pm 0,01)$  г.
- Включить прибор, нажав клавишу «Сеть». Для деблокировки шкива клавиша «Пуск» должна быть в нажатом (утопленном) положении.
- Переместить правый грузик в верхнее положение, совместив нижний край грузика с чертой на верхнем кронштейне и произвести блокировку шкива, отжав клавишу «Пуск». Наложить на верхний груз один из перегрузок.
- Нажать клавишу «Пуск», шкив деблокируется и грузы приходят в движение. Когда груз проходит через средний кронштейн, перегрузок

Рисунок 2 – Схема машины Атвуда

автоматически снимается и включается секундомер. Пересекая оптическую ось нижнего фотоэлектрического датчика, груз выключает секундомер. Записать время равномерного движения и нажать клавишу «Сброс» для деблокировки шкива. Поднять груз в верхнее положение и заблокировать его положение, отжав клавишу «Пуск». Повторить измерение с данным перегрузком еще 4 раза. По результатам измерений получить  $t_{\text{ср}}$  и  $\Delta t$  и вычислить по формуле (1.29)  $g$ , измерив предварительно по шкале  $S_0$  и  $S$ .

5. Проделать по 5 измерений с двумя другими перегрузками. Вычислить

$$g_2 \text{ и } g_3.$$

6. Вычислить среднее значение ускорения свободного падения.

7. Вывести формулу для расчета относительной погрешности метода и рассчитать ее для измерений с каждым перегрузком. Используя наибольшее значение относительной погрешности, рассчитать абсолютную погрешность среднего значения ускорения свободного падения.

Результаты представить в виде:

$$g_{\text{ср}} \pm \Delta g.$$

### Контрольные вопросы

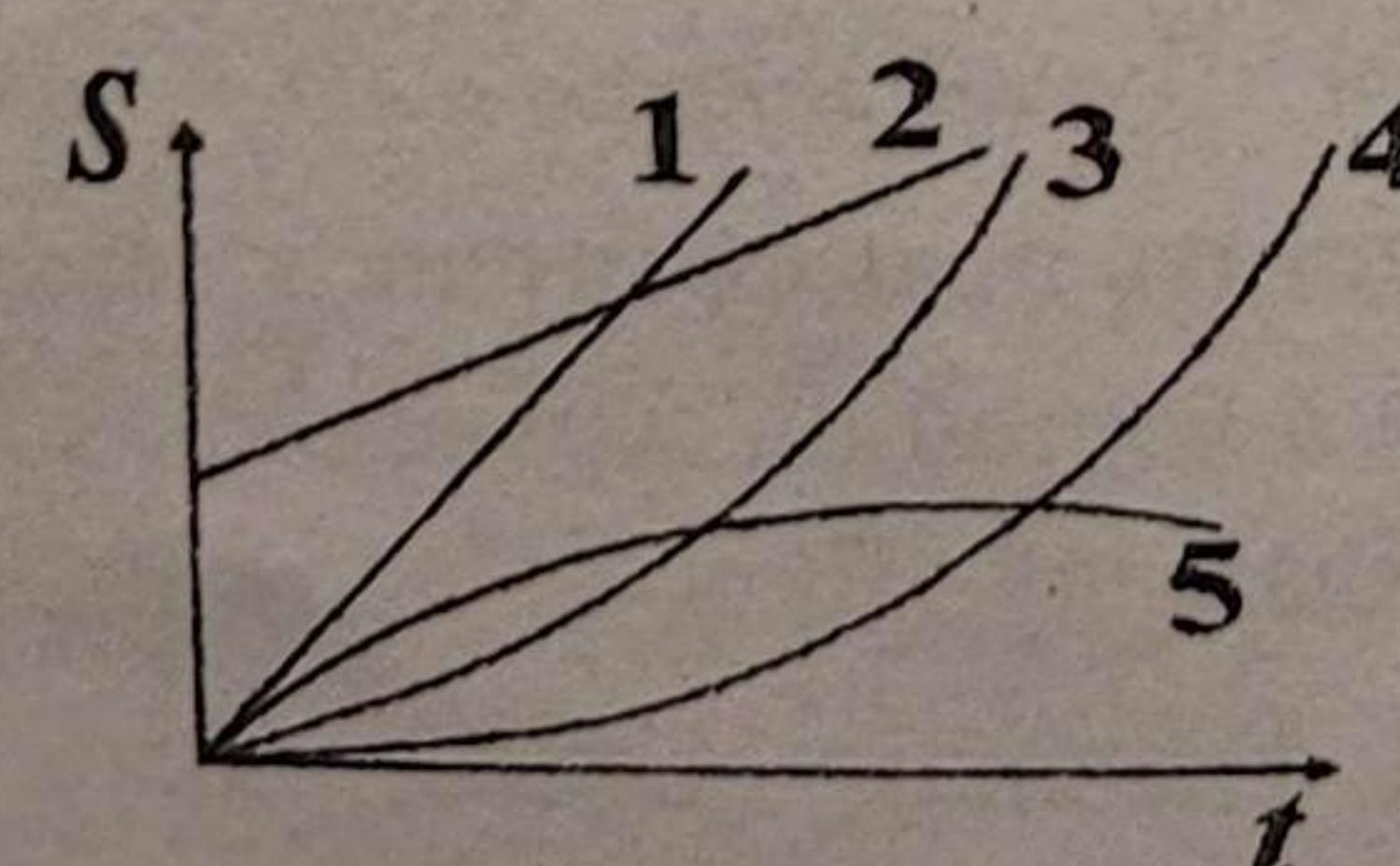
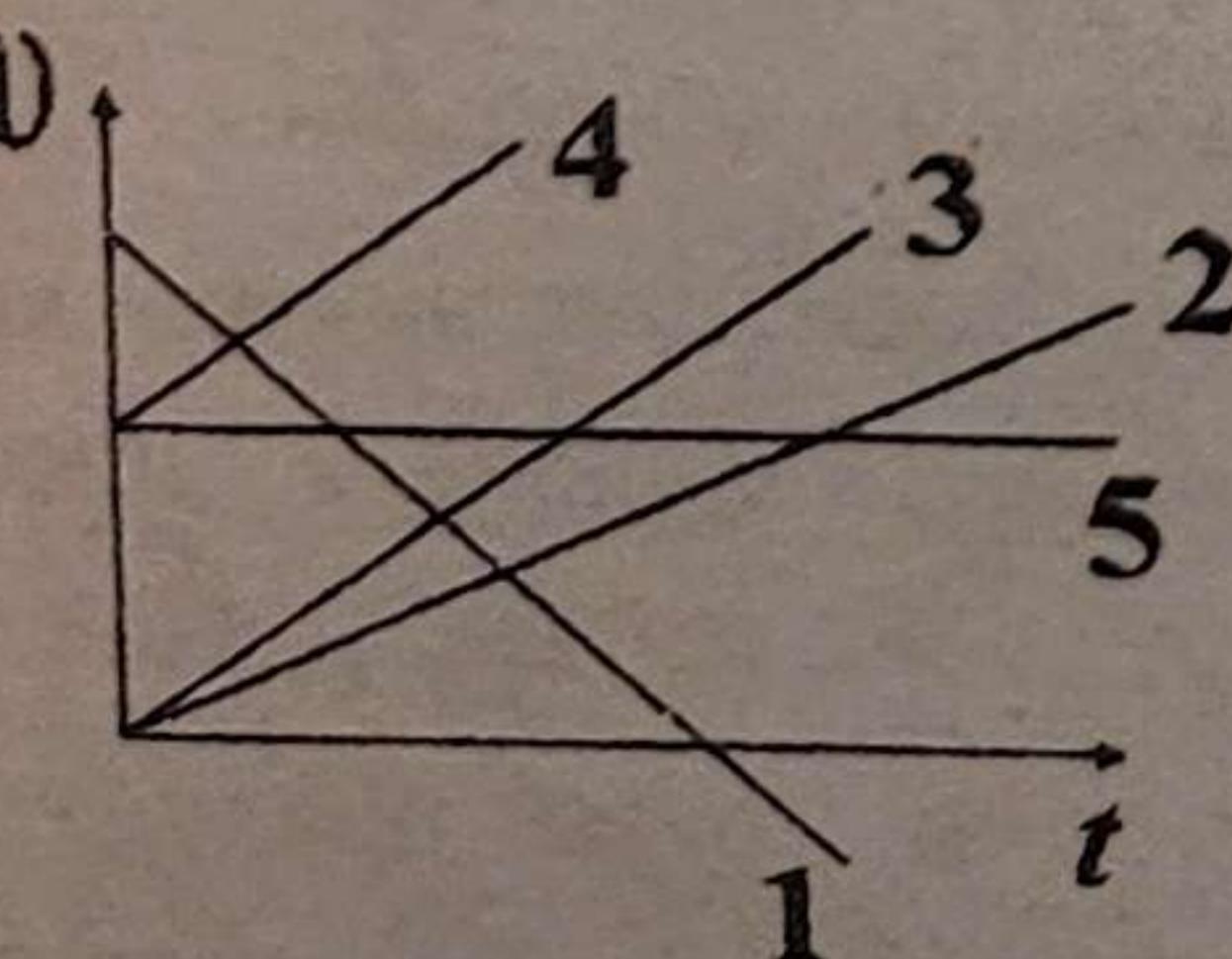
1. Дайте определение кинематических характеристик поступательного движения. Как направлены  $\vec{a}$  и  $\vec{v}$  при ускоренном движении, при замедленном движении?

2. Дайте определение силы и импульса тела. Как выглядит основное уравнение динамики? Какие виды сил Вы знаете? От чего они зависят?

3. Сформулируйте законы Ньютона.

4. Какие системы отсчета называются инерциальными? Как выглядят кинематические преобразования при переходе из одной инерциальной системы в другую?

5. Описать движения тел по следующим графикам:



6. Вывести формулу (1.29).
7. Что такое импульс силы?
8. Сформулируйте закон сохранения энергии и закон сохранения импульса. При каких условиях они выполняются?
9. Что такое центр инерции системы? Как он двигается?

## 1.2 Лабораторные работы № 4 и № 04

### УДАР ШАРОВ

**Цель работы** — Ознакомление с законами сохранения импульса и энергии.

В результате соударения двух тел их первоначальные скорости ( $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ) изменяются и принимают значения  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$ . При этом часть кинетической энергии переходит во внутреннюю (тепловую) энергию.

Для нахождения величин  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$  можно использовать закон сохранения импульса (1.15а), закон сохранения и превращения энергии:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (1.30)$$


$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2} + \Delta U_{\text{вн}}, \quad (1.31)$$

где  $\Delta U_{\text{вн}}$  — изменение внутренней энергии тел.

Рассмотрим центральное соударение двух шаров, т.е. такое соударение, при котором скорости  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$  направлены вдоль прямой, соединяющей центры этих шаров. Ограничимся двумя предельными случаями взаимодействия:

- абсолютно неупругого удара
- абсолютно упругого удара

а) *Неупругим* называется столкновение при котором не сохраняется механическая энергия (кинетическая), т.е. она частично превращается в тепловую (внутреннюю). *Абсолютно неупругим* называется такой удар, после которого тела движутся с одинаковой скоростью, имея общую массу  $(m_1 + m_2)$  (рисунок 3). При этом типе взаимодействия выполняется лишь закон сохранения импульса, а также имеет место закон сохранения суммарной энергии различных видов — механической и внутренней.

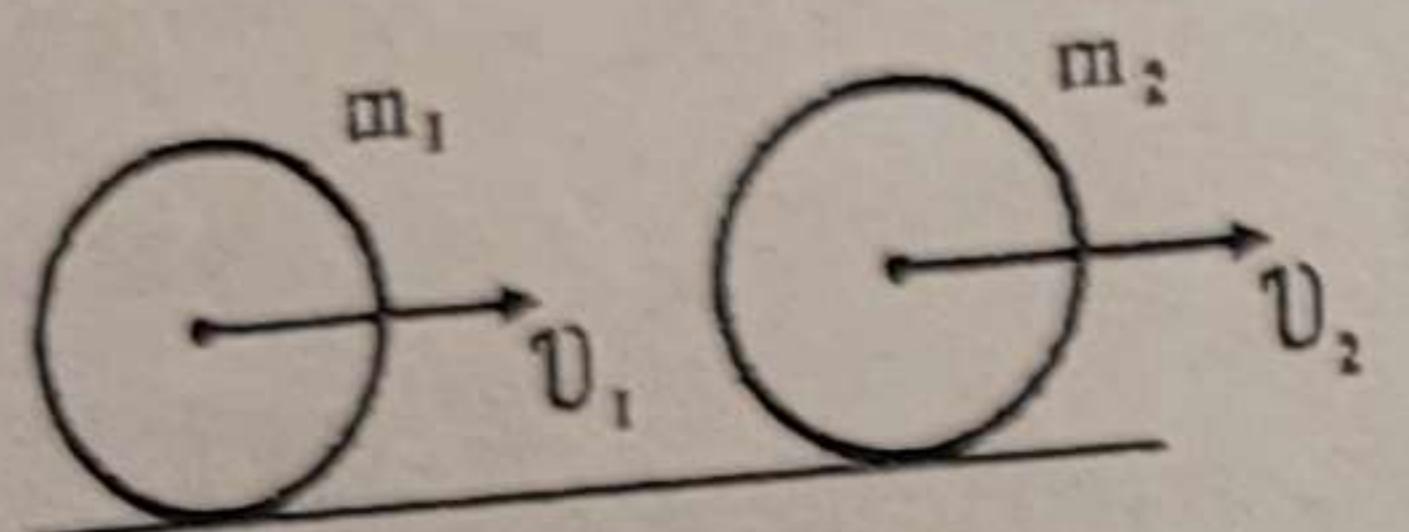


В этом случае для нахождения общей  $v$  скорости достаточно использовать закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 \pm m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v,$$

$$v = \left| \frac{m_1 v_1 \pm m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right| \quad (1.32)$$

откуда



Знак (+) соответствует случаю, при котором скорости  $v_1$  и  $v_2$  направлены в одну сторону, а знак (-) — в противоположные стороны.

Если  $m_1 = m_2$ , то

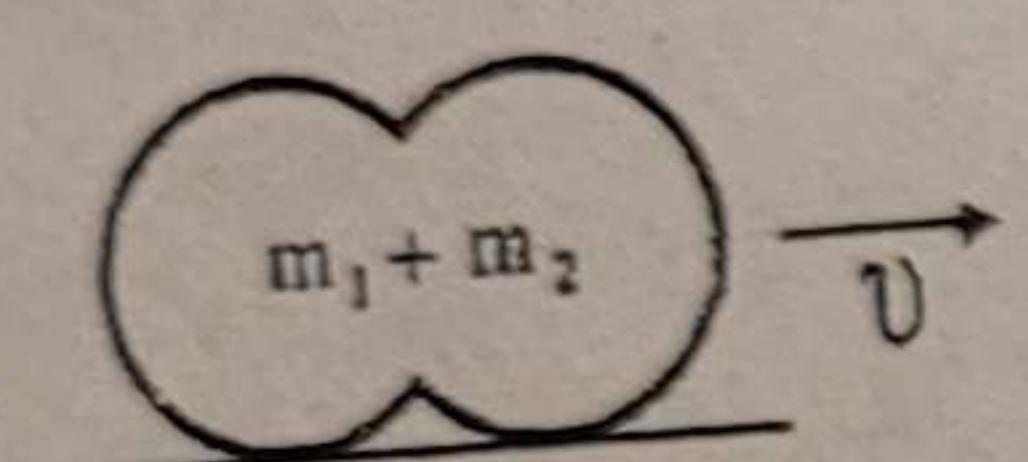


Рисунок 3 - Движение тел  
а) до соударения;  
б) после соударения

$$Q = E_1 - E_2$$

В частности, если  $m_1 = m_2$  и  $v_2 = 0$ , то  $v = \frac{v_1}{2}$  и

$$Q = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{2 m v_1^2}{2 \cdot 4} = \frac{m v_1^2}{4} \quad (1.33)$$

б) Абсолютно упругий удар — удар, при котором механическая энергия не переходит в другие виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации, затем потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются. Т.о. кинетические энергии шаров до и после взаимодействия равны друг другу.

Рассмотрим случай центрального удара двух однородных шаров.

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'_1^2}{2} + \frac{m_2 v'_2^2}{2} \quad (1.34)$$

Если к равенству (1.34) добавить закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 \pm m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (1.35)$$

то получим систему алгебраических уравнений для определения  $v'_1$  и  $v'_2$ . Перепишем данную систему в виде:

$$m_1 v_1^2 - m_1 v'^2_1 = m_2 v'^2_2 - m_2 v^2_2$$

$$m_1 v_1 - m_1 v'_1 = m_2 v'_2 \pm m_2 v_2$$

Поделив равенства почленно, получим:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 \pm v_2 \quad (1.36)$$

Присоединяя к равенству (1.36) уравнение (1.35), будем иметь линейную систему уравнений относительно  $v'_1$  и  $v'_2$ . Последняя система легко решается и в результате дает:

$$v'_1 = \frac{\pm 2 m_2 \cdot v_2 - (m_2 - m_1) v_1}{m_1 + m_2}, \quad (1.37)$$

$$v'_2 = \frac{2 m_1 v_1 \pm (m_1 - m_2) v_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.38)$$

Если  $v_2 = 0$ , то

$$v'_1 = \frac{(m_2 - m_1) v_1}{m_1 + m_2} \quad (1.37a)$$

$$v'_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad (1.38a)$$

Теперь допустим, что имеются два шара с массами  $m_1$  и  $m_2$ , подвешенные на нитях равной длины ( $\ell$ ) (рисунок 4).

Отведем один из шаров в сторону на угол  $\Phi$  и отпустим. Пренебрегая силой сопротивления воздуха и потерями в точке подвеса, можно утверждать, что вплоть до момента столкновения полная энергия



шара будет оставаться неизменной, т.е.  $m_1 gh = m_1 v'_2 / 2$ . Откуда, учитывая, что  $h = \ell - \ell \cos \phi$ , найдем скорость шара перед ударом

$$v_1 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \phi)} . \quad (1.39)$$

Измеряя максимальные углы отклонения  $\phi'_1$ ,  $\phi'_2$  или общий угол  $\phi'$ , в случае абсолютно неупругого удара можно найти скорости  $v_1$ ,  $v'_2$  и  $v$ , используя соотношения аналогичные (1.39), например

$$v'_1 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \phi'_1)} \quad (1.39a)$$

$$v'_2 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \phi'_2)}$$

### Порядок выполнения работы

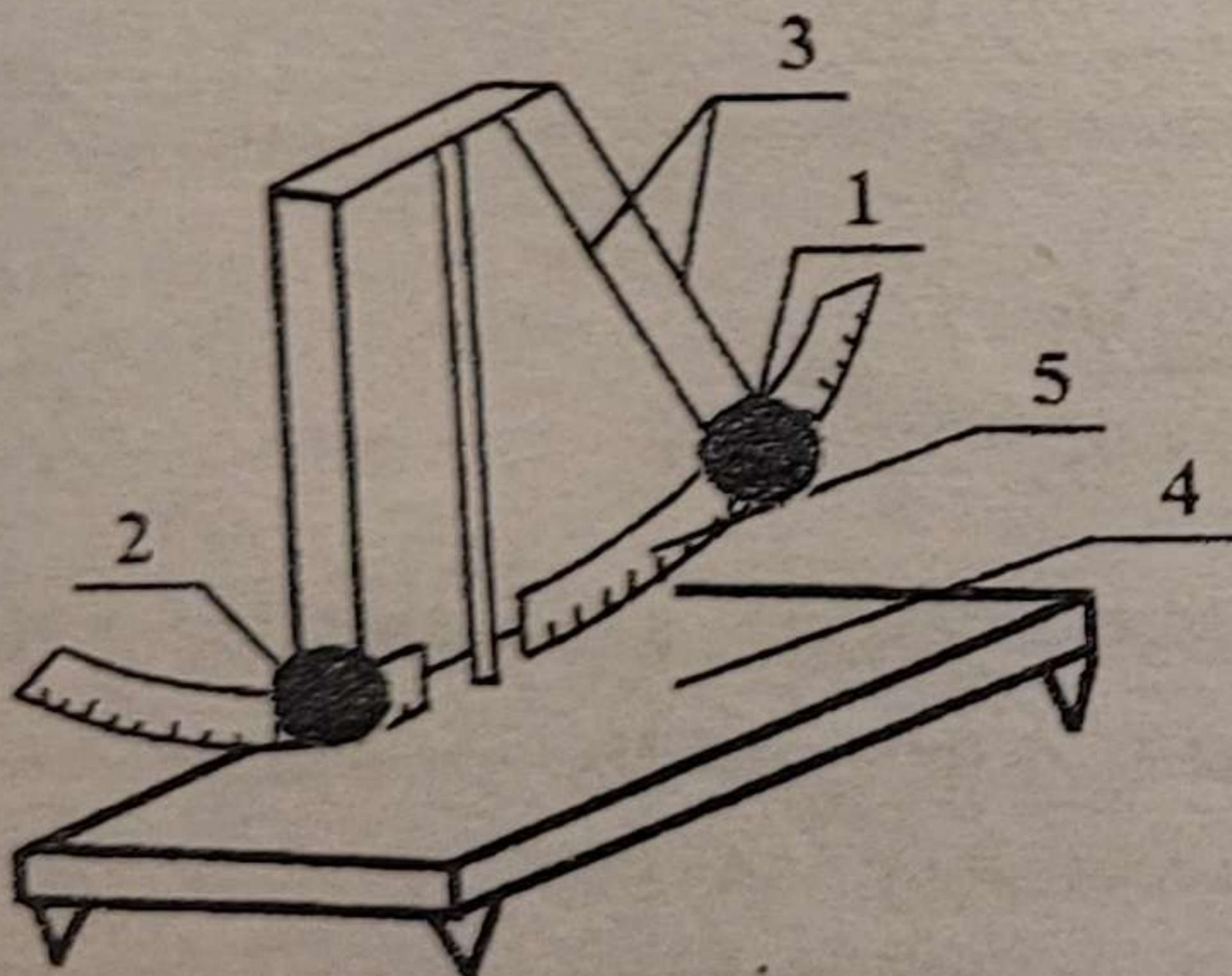


Рисунок 5 – Внешний вид установки

Шары (1), (2) при помощи сдвоенных нитей (3) подвешиваются на штативе (4) как показано на рисунок 5.

Для отсчета углов отклонения шаров служат шкалы (5) прикрепленные к штативу.

#### a) Неупругое столкновение шаров

В этой части работы используют шары, изготовленные из пластилина. Предварительно взвешиванием определяют их массы  $m_1$  и  $m_2$ . Один из шаров отводят на произвольный угол  $\phi$ . Шар отпускают и измеряют максимальный угол отклонения слипшихся шаров.

Опыт повторяют несколько раз и данные заносят в таблицу 1.

Таблица 1 – Значения углов отклонения слипшихся шаров

$\phi =$	$v =$	$\phi'_{ср.}$
$\phi'$		
$\Delta \phi'$		$\Delta \phi'_{ср.}$

По формуле (1.39) рассчитывают  $v_1$  и  $v$ . Оценивают погрешности  $\Delta v_1$  и  $\Delta v$ . Скорость  $v$  вычисляют также по формуле

$$v_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

и сравнивают с ранее найденным.

Используя формулу (1.31), вычисляют изменения внутренней энергии шаров при ударе.

$$m_1 g \ell (1 - \cos \phi) - (m_1 + m_2) g \ell (1 - \cos \phi') = Q . \quad (1.40)$$

Опыт и расчет повторяют еще при двух значениях угла  $\phi$ .

#### б) Упругое столкновение шаров

Для проведения опыта используют металлические или пластмассовые шары. Определяют их массы и закрепляют на подвесах.

Один из шаров, массу которого обозначим  $m_1$ , отводят на угол  $\phi$ , а затем отпускают. Измеряют угловые отклонения обоих шаров  $\phi'_1$  и  $\phi'_2$ . Опыт повторяют несколько раз при постоянном значении угла  $\phi$ , данные заносят в таблицу 2

Таблица 2 – Значения углов отклонения при упругом взаимодействии

$\phi =$	$v_1 =$	$\phi'_{ср.}$
$\phi'_1$		
$\Delta \phi'_1$		$\Delta \phi'_{ср.}$
$\phi'_2$		
$\Delta \phi'_2$		$\Delta \phi'_{ср.}$

По формулам (1.39) и (1.39a) определяют  $v_1$ ,  $v'_1$  и  $v'_2$ .

В случае абсолютно упругого удара закон сохранения и превращения энергии выглядит:

$$m_1 g \ell (1 - \cos \Phi) = m_1 g \ell (1 - \cos \Phi'_1) + m_2 g \ell (1 - \cos \Phi'_2). \quad (1.41)$$

Однако, на практике это равенство зависит от коэффициента восстановления материала шаров

$$K = \frac{v'_1}{v_1}. \quad (1.42)$$

Рассчитаем этот коэффициент на основании закона сохранения кинетической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_1 v'^2_2}{2}, \quad (1.43)$$

поделив это выражение на его левую часть, получаем:

$$1 = \frac{v'^2_1}{v_1^2} + \frac{m_2 v'^2_2}{m_1 v_1^2} \quad (1.44)$$

$$1 = K^2 + \frac{m_2 v'^2_2}{m_1 v_1^2} \quad (1.45)$$

Тогда, из (1.45) коэффициент восстановления будет выглядеть

$$K = \frac{v'_1}{v_1} = \sqrt{1 - \frac{m_2 v'^2_2}{m_1 v_1^2}} \quad (1.46)$$

Отметим, что при абсолютно упругом ударе коэффициент восстановления  $K = 1$ .

Эксперимент и вычисления повторяют ещё для двух значений угла  $\Phi$ .

### Контрольные вопросы

- Сформулируйте второй закон Ньютона.
- Чему равна скорость изменения импульса для системы частиц?
- Сформулируйте закон сохранения импульса.
- Что такое консервативные и диссипативные силы?

5. Что такое полная механическая энергия? Из каких конкретных видов энергии она состоит?

6. Сформулируйте закон сохранения энергии.

7. Что такое абсолютно упругое и абсолютно неупругое взаимодействия?

### 1.3 Лабораторная работа № 08

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СИЛЫ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ ДЛЯ НАКЛОННОГО МАЯТНИКА

Наклонный маятник представляет собой шарик, колеблющийся на наклонной плоскости (рисунок 6).

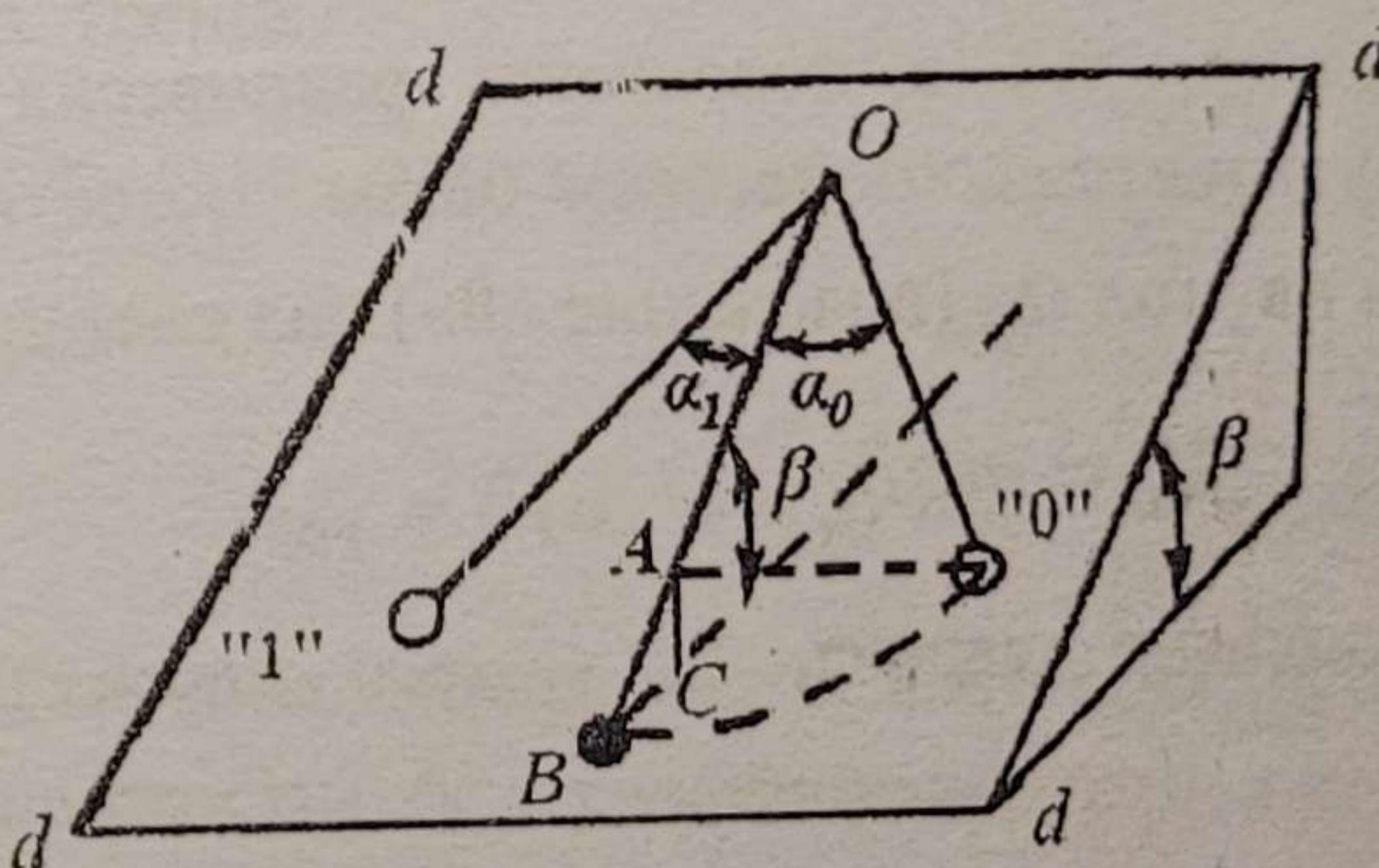


Рисунок 6 – Внешний вид установки.

$d - d - d - d$  – наклонная плоскость;

$AC = h_0$  – высота подъёма шарика

Шарик привязан к нитке, свободный конец которой закреплен у неподвижной оси. Отклоненный от положения равновесия на угол  $\alpha_0$ , шарик под действием силы тяжести скатывается по наклонной плоскости в исходное состояние и затем по инерции поднимается до угла  $\alpha_1$ .

Из-за действия силы трения качения шарик теряет при этом часть механической энергии, и поэтому угол  $\alpha_1$  всегда будет меньше, чем исходный угол  $\alpha_0$ .

Если предположить, что сила трения качения не зависит от скорости движения шарика, а это, как показывает опыт, при относительно небольших скоростях справедливо, то используя соотношение между изменением энергии шарика,  $\Delta a$  и величиной совершенной работы по

преодолению силы трения  $A$ , можно получить формулу для коэффициента трения качения следующего вида:

$$\mu = \operatorname{tg} \beta \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} \quad (1.47)$$

Здесь  $\mu$  — коэффициент трения качения,  
 $\beta$  — угол наклона плоскости,  
 $\alpha_0$  — угол начального отклонения шарика от положения равновесия,  
 $\alpha_n$  — угол отклонения шарика после  $n$  полных колебаний,  
 $n$  — число полных колебаний, сделанных шариком.

Покажем, как можно, пользуясь законами механики, вывести формулу (1.47)

Если предположить, что в положении равновесия потенциальная энергия шарика, обусловленная действием силы тяжести, равна нулю, то при отклонении на угол  $\alpha_0$  (положение «0») она составит

$$U_0 = mgh_0,$$

где  $h_0$  — высота подъема шарика,  $m$  — его масса,  $g$  — ускорение свободного падения.

При отклонении шарика на угол  $\alpha_1$ , потенциальная энергия будет равняться

$$U_1 = mgh_1,$$

где  $h_1$  — высота подъема, отсчитанная от положения равновесия.

Высоты  $h_0$  и  $h_1$  можно рассчитать через углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ , длину нити  $\ell$  и угол наклона плоскости  $\beta$ .

Действительно, из рисунка б следует:

$$\left. \begin{aligned} OA &= \ell \cos \alpha_0 \\ AC &= h_0 = AB \sin \beta \\ AB &= \ell - \ell \cos \alpha_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Комбинируя формулы (1.48), получим:

$$h_0 = \ell(1 - \cos \alpha_0) \sin \beta \quad (1.49)$$

Аналогичным путем можно получить

$$h_1 = \ell(1 - \cos \alpha_1) \sin \beta. \quad (1.50)$$

Уменьшение потенциальной энергии шарика при переходе из положения «0» в положение «1» составит

$$\begin{aligned} \Delta U_{01} &= U_0 - U_1 = mgh_0 - mgh_1 = \\ &= mg[\ell(1 - \cos \alpha_0) \sin \beta - \ell(1 - \cos \alpha_1) \sin \beta] = \\ &= mg\ell(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) \sin \beta \end{aligned} \quad (1.51)$$

Работа силы трения качения при переходе шарика из положения «0» в положение «1» составит:

$$A_{01} = F_{\text{тр}} S_{01}. \quad (1.52)$$

Здесь  $F_{\text{тр}}$  — сила трения,

$S_{01}$  — длина дуги окружности, соответствующей сумме углов  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  и равная:

$$S_{01} = \ell(\alpha_0 + \alpha_1). \quad (1.53)$$

Сила трения качения может быть выражена через силу реакции опоры (наклонной плоскости)  $N$  и коэффициент трения качения  $\mu$ :

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \beta. \quad (1.54)$$

Приравнивая  $\Delta U_{01} = A_{01}$ , согласно закону связи изменения энергии тела и совершенной работы, получим:

$$mg\ell(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) \sin \beta = \mu mg \cos \beta \cdot \ell(\alpha_0 + \alpha_1). \quad (1.55)$$

Поделив, правую и левую части формулы (1.55) на  $mg\ell$  и  $\cos \beta$ , получим:

$$(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) \operatorname{tg} \beta = \mu(\alpha_0 + \alpha_1). \quad (1.56)$$

Очевидно, что при движении из положения «1» в обратном направлении шарик не вернется в исходное состояние, а отклонится на угол  $\alpha_2$ , который будет меньше и  $\alpha_0$ , и  $\alpha_1$ .

Изменение потенциальной энергии шарика из положения «1» (угол  $\alpha_1$ ) в положение «2» (угол  $\alpha_2$ ) составит

$$\Delta U_{12} = U_1 - U_2 = mg\ell(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \sin \beta. \quad (1.57)$$

Работа против сил трения на этом участке пути будет равняться

$$A_{12} = \mu mg \cos \beta \cdot \ell (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (1.58)$$

Приравнивая (1.57) и (1.58), получим:

$$(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \operatorname{tg} \beta = \mu (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (1.59)$$

Если отклонения шарика от положения равновесия невелики, скажем, не более  $(5-7)^\circ$ , то формулы (1.56) и (1.59) можно упростить, т.к. для малых углов отклонения справедливы следующие преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_0 &= 1 - 2 \sin^2 \alpha_0 / 2 \approx 1 - \alpha_0^2 / 2, \\ \cos \alpha_1 &\approx 1 - \alpha_1^2 / 2, \\ \cos \alpha_2 &\approx 1 - \alpha_2^2 / 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

аналогично

Подставляя (1.60) в (1.56) и (1.59), разлагая разности квадратов углов на множители  $(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) = (\alpha_0 - \alpha_1) \cdot (\alpha_0 + \alpha_1)$  и сокращая правую и левую части уравнений на  $(\alpha_0 + \alpha_1)$  и  $(\alpha_0 + \alpha_1)$ , получим:

$$\frac{(\alpha_0 - \alpha_1) \operatorname{tg} \beta}{2} = \mu \quad (1.61)$$

$$\frac{(\alpha_0 - \alpha_2) \operatorname{tg} \beta}{2} = \mu$$

Складывая почленно формулы (1.61), будем иметь:

$$\frac{(\alpha_0 - \alpha_2)}{4} \operatorname{tg} \beta = \mu \quad (1.62)$$

Повторяя подобные математические выкладки для  $n$  полных колебаний шарика, можно получить

$$\mu = \frac{(\alpha_0 - \alpha_n)}{4n} \operatorname{tg} \beta \quad (1.63)$$

### Порядок выполнения работы

В работе требуется произвести измерения углов  $\alpha_0$  (начало отклонения маятника) и  $\alpha_n$  (отклонение маятника после  $n$  полных колебаний) при 3-х

различных положениях наклонной плоскости  $\beta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ . Угол наклона плоскости устанавливается с помощью маховичка, расположенного сзади установки. Углы отклонения шарика измеряются визуально до шкале, нанесенной на плоскости.

1. Вращая маховичек, установить наклон плоскости  $30^\circ$ . Закрепить стойку в этом положении с помощью стопорного винта.
2. Отвести шарик от положения равновесия на угол  $\alpha_0 = (5-7)^\circ$  и отпустить. После 10-20 полных колебаний записать новое значение угла  $\alpha_n$  отклонения шарика (одно полное колебание соответствует возвращению шарика в исходное положение).
3. Повторить измерение еще 4 раза при том же значении  $\alpha_0$ , что и в первом случае.
4. Произвести по 5 измерений для углов  $\beta$  наклона плоскости равных  $45^\circ$  и  $60^\circ$ .
5. По указанию преподавателя может быть дано дополнительное задание: определить коэффициент трения для других условий с заменой материала шарика или материала наклонной плоскости.
6. Данные измерений и расчетов занести в таблицу 3.

Таблица 3 Определение коэффициента трения.

№	Материал шарика — .....		Материал накл. плоскости — .....					
	град.	рад.	град.	рад.	град.	рад.	град.	рад.
1								
2								
3								
4								
5								
сред.								

7. Расчет погрешности. Для каждой серии опытов (5 измерений) выполняемых для определенного угла наклона  $\beta$ , рассчитываются средние значения коэффициента  $\mu$  и его погрешности  $\Delta \mu$ . Затем  $\mu$  усредняется для разных углов  $\beta$  и определяются общие усредненные  $\mu$  и  $\Delta \mu$ .

### Контрольные вопросы

1. Какой смысл вкладывается в физике в понятие силы?
2. Какие силы вы знаете? Запишите законы этих сил.
3. Что такое сила трения покоя, сила трения скольжения, сила трения качения?
4. Сформулируйте законы Ньютона.
5. Что такое кинетическая энергия; потенциальная энергия?
6. Сформулируйте закон сохранения энергии.
7. Как вычисляется работа силы, каков ее физический смысл?
8. Выведите формулу (1.47).
9. Как уменьшить силу трения скольжения?

## 2 КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Введем ряд кинематических и динамических характеристик, удобных при описании вращательного движения тел.

При движении частицы по окружности изменение ее положения удобно характеризовать углом поворота ( $\Delta\Phi$ ) радиуса  $R$ , соединяющего движущуюся точку с центром окружности (рисунок 7).

Производная от угла поворота по времени называется угловой скоростью  $\omega$ .

$$\omega = \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.1)$$

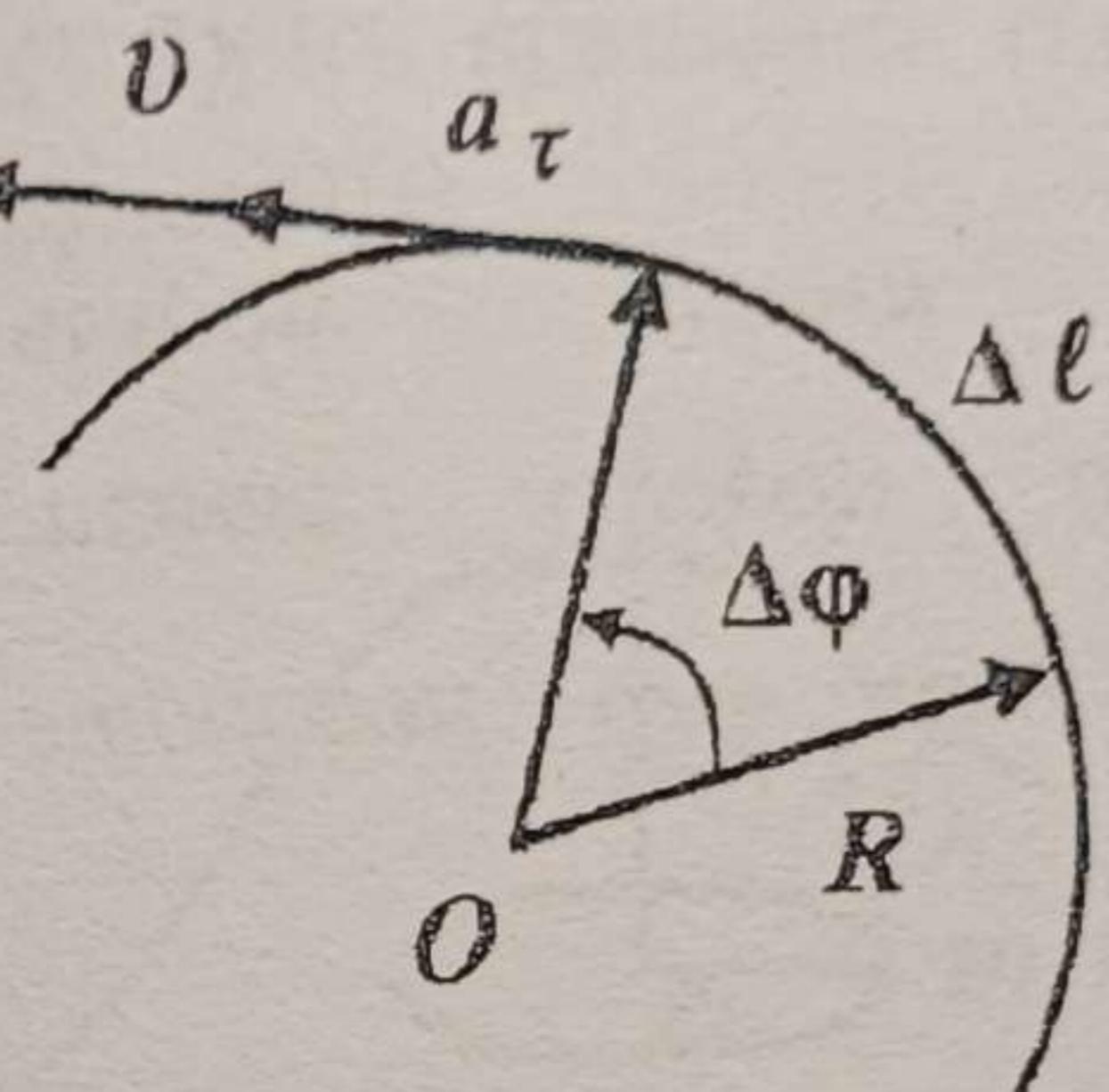


Рисунок 7 – Параметры материальной точки при вращательном движении.

Быстрая изменения угловой скорости или производная от угловой скорости по времени называется угловым ускорением

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2.2)$$

Величины угловой скорости и ускорения связаны с соответствующими линейными величинами:

$$v = \omega R, \quad (2.3)$$

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad (2.4)$$

где  $a_\tau$  проекция ускорения на направление касательной к окружности или так называемое тангенциальное ускорение.

Эти соотношения легко получить, продифференцировав по времени равенство  $\Delta\Phi = \frac{\Delta\ell}{R}$ , которое определяет радиальную меру угла

$$\omega = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\ell}{dtR} = \frac{v}{R}$$

При динамическом описании вращательного движения тела удобно вместо импульса частицы  $\bar{p} = m\bar{v}$  использовать величину, называемую моментом импульса. Момент импульса частицы  $\ell$  относительно точки  $O$  определяется как векторное произведение радиус-вектора, соединяющего частицу с точкой  $O$  и ее импульса:

$$\vec{\ell} = [\vec{r}, \vec{p}] \quad (2.5)$$

Из второго закона Ньютона  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ , следует, что скорость изменения момента импульса равна результирующему моменту сил, действующих на частицу:

$$d\vec{\ell}/dt = \vec{M} \quad (2.6)$$

Момент силы есть векторное произведение  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  (рисунок 8)

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (2.7)$$

Векторное произведение  $\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}]$  имеет модуль  $C = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin \alpha$  и направлено по движению правого винта, перпендикулярно плоскости векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  при его повороте от  $\vec{A}$  к  $\vec{B}$  (рисунок 9).

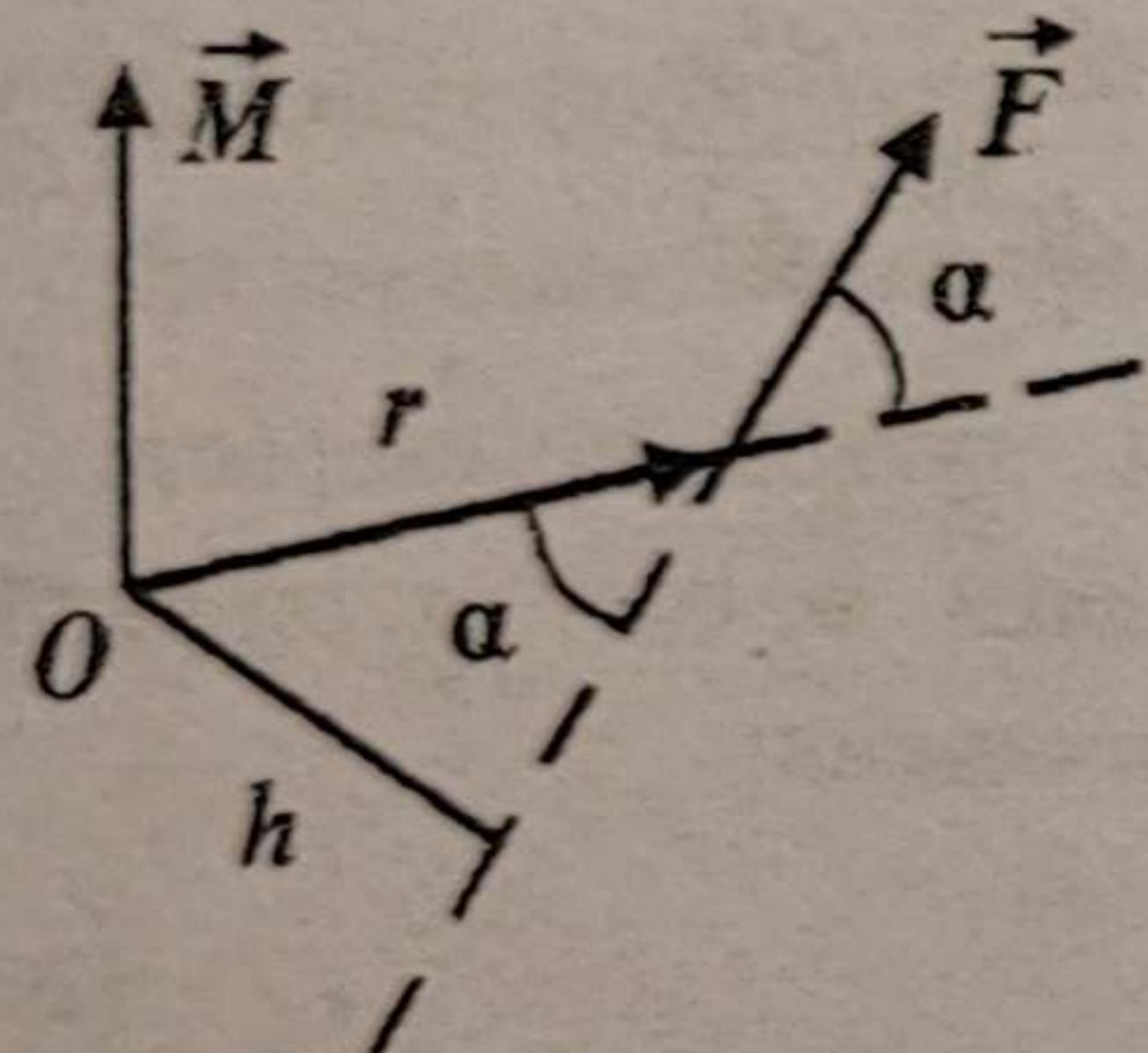


Рисунок 8 – Направление момента силы относительно радиус-вектора и силы.

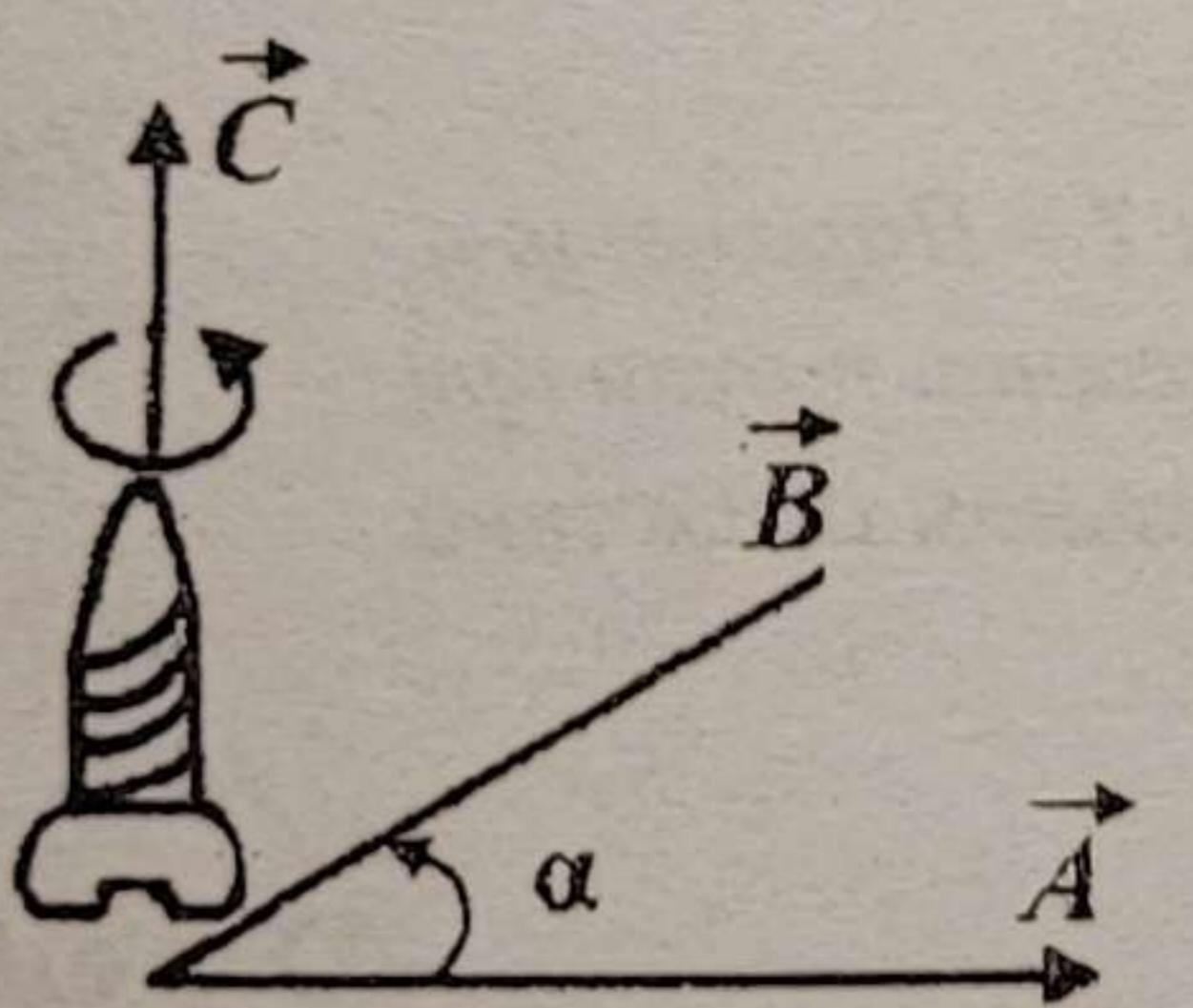


Рисунок 9 – Правило буравчика.

Модуль момента силы  $M$  равен:

$$M = rF \sin \alpha = Fh, \quad (2.8)$$

где  $h = r \sin \alpha$  — плечо силы или кратчайшее расстояние от точки  $O$  до линии действия силы.

Момент импульса системы частиц  $\vec{L}$  равен векторной сумме моментов импульсов частиц, образующих систему:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_n$$

Скорость изменения  $\vec{L}$  равна сумме моментов внешних сил, действующих на систему:

$$d\vec{L}/dt = \vec{M}_{\text{внешн}} \quad (2.9)$$

Полный момент импульса сохраняется ( $\vec{L} = \text{const}$ ), если

$$\vec{M}_{\text{внешн}} = 0.$$

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему частиц, расстояние между которыми в процессе движения не изменяется. Рассмотрим вращение твердого тела относительно фиксированной оси  $OO'$  (рисунок 10).

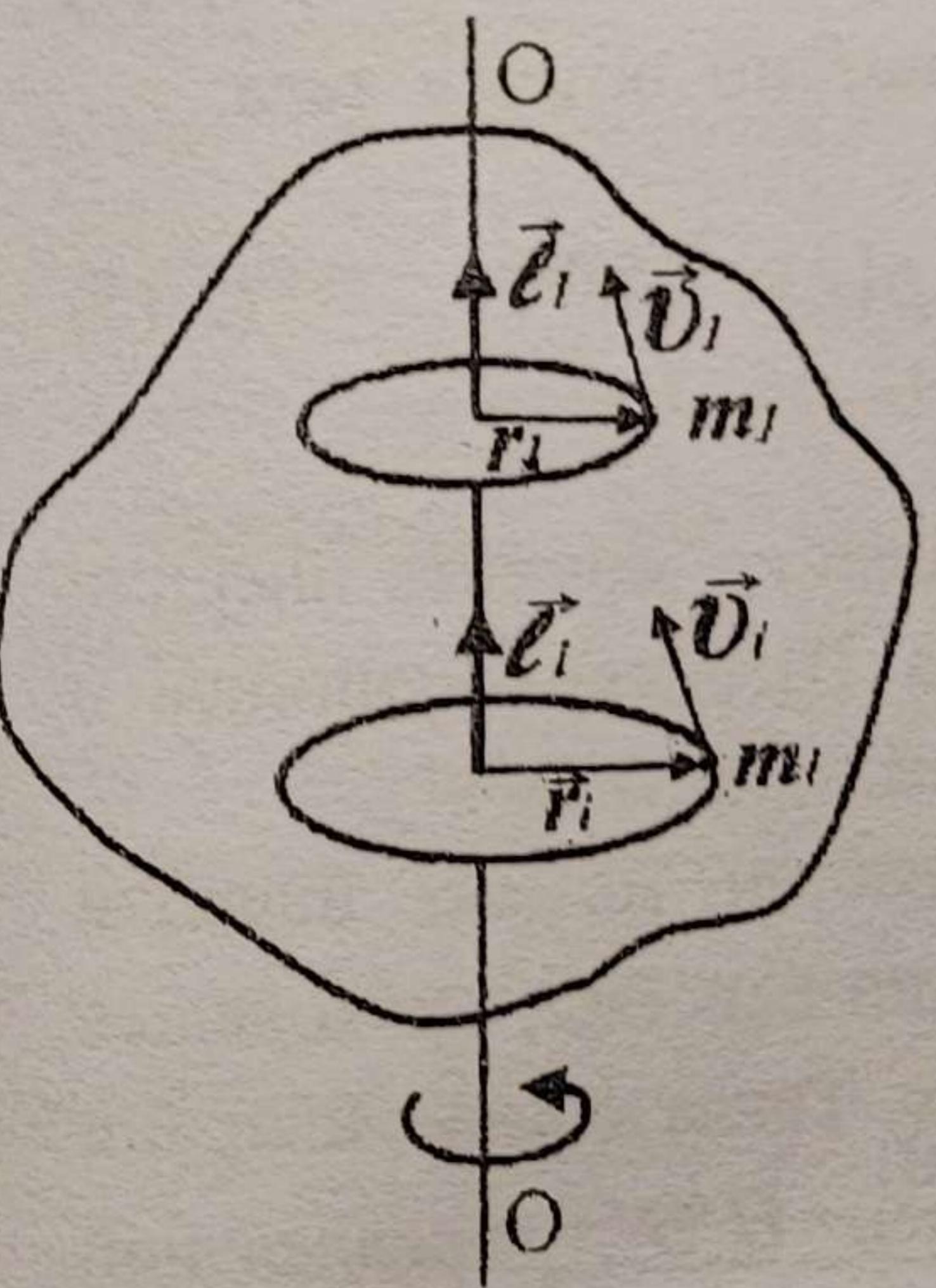


Рисунок 10 – Вращательное движение твердого тела.

Таким образом

$$L = I\omega \quad (2.11)$$

Подставив (2.11) в (2.9), получим основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела относительно фиксированной оси:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = M \quad (2.12)$$

Если  $I = \text{const}$ , то

$$\frac{Id\omega}{dt} = I\varepsilon = M, \quad (2.13)$$

где  $\varepsilon$  — угловое ускорение.

Если тело, помимо вращения, движется поступательно, то уравнение (2.13) может быть дополнено уравнением движения центра масс (точки  $C$ ).

$$M \frac{d^2 R_C}{dt^2} = \sum F_i \text{внешн} \quad (2.14)$$

Формула  $I = \sum m_i r_i^2$  может быть использована для нахождения момента инерции  $I$  при дискретном распределении масс. Если масса внутри тела распределена непрерывно с объемной плотностью  $\rho(r)$  то суммирование следует заменить интегрированием по объему тела:

$$I = \int_V \rho(r) r^2 dV \quad (2.15)$$

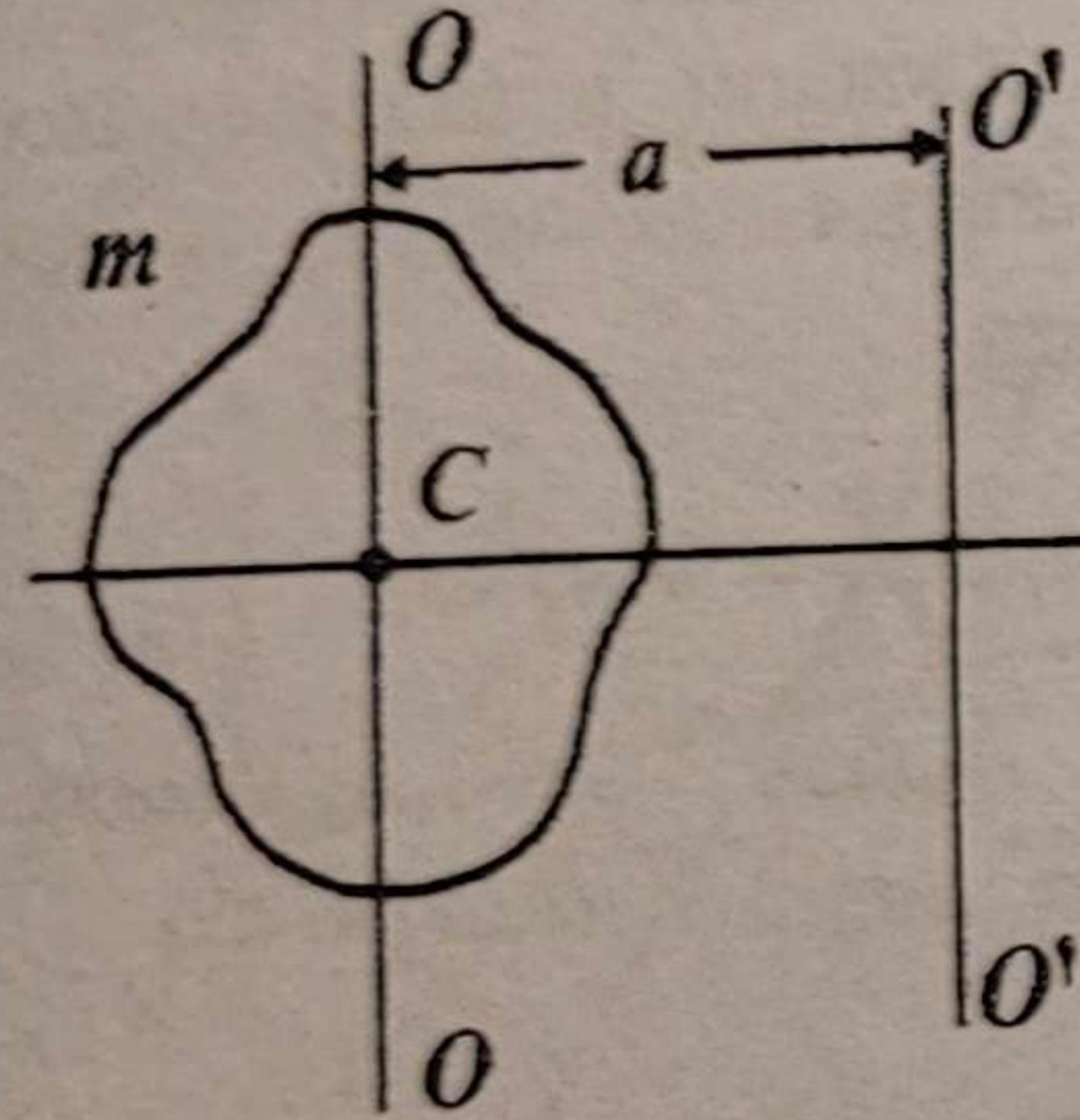


Рисунок 11 - Положение твердого тела, относительно произвольной оси.

Для вычисления момента инерции полезна теорема Штейнера-Гюйгенса о параллельных осях (рисунок 11).

Пусть известен момент инерции тела относительно оси  $OO'$ , проходящей через центр масс. Тогда момент инерции относительно оси  $O'O'$ , параллельной оси  $OO$  и отстоящей от нее на расстоянии  $a$ , равен:

$$I_{O'O'} = I_{OO} + ma^2, \quad (2.16)$$

где  $m$  — масса тела,  $a$  — расстояние между параллельными осями.

Вращающееся твердое тело обладает кинетической энергией, которую можно найти как сумму кинетических энергий частиц (материальных точек), составляющих тело:

$$E_{\text{к.вр}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{(\sum m_i r_i^2) \omega^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (2.17)$$

Формулы (2.6 — 2.17) являются следствием основных законов динамики (законов Ньютона) и аналогичны формулам поступательного движения, что видно из приведенной ниже таблицы (4):

Таблица 4 – Основные законы динамики поступательного и вращательного движения.

	ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ	ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ
Основной закон динамики частицы	$\frac{dp}{dt} = \vec{F}$	$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{M}$
Основной закон динамики системы частиц	$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{вн}}$ $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{вн}}$ $\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_n$
Основной закон динамики твердого тела	$m \frac{d^2 R_C}{dt^2} = \vec{F}_{\text{вн}}$	$I \vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Кинетическая энергия	$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$	$E_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2}$

Выражения для момента инерции некоторых тел приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Моменты инерции тел различной формы.

Тело	Момент инерции
Тонкий стержень	$I_{OO} = \frac{ml^2}{12}$
Тонкий диск	$I_z = \frac{mR^2}{2};$ $I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}$
Обруч	$I_z = mR^2;$ $I_x = I_y = \frac{mR^2}{2}$

## 2.1 Лабораторная работа № 1 или № 01

### ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Цель работы** — изучение динамических закономерностей вращательного движения, проверка выполнения основного закона динамики вращательного движения.

Схема установки, называемой маятником Обербека, приведена на рисунке 12.

Вращающаяся система состоит из двух шкивов радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , насаженных на общую ось, и крестовины, на которой насыжены четыре груза массой  $m_{\text{гр}}$  каждый. Ось вращения системы расположена горизонтально. На шкив намотана нить, к которой прикрепляется груз массой  $m_0$ . Падающий груз вызывает натяжение нити, которая раскручивает систему, создавая вращающий момент:

$$M = Tr \quad (2.18)$$

где  $T$  — натяжение нити, намотанной на шкив радиусом  $r$ , а  $\sin(\hat{T}r) = 1$ .

Натяжение нити можно найти из второго закона Ньютона для падающего груза:

$$m_0g - T = m_0a \quad (2.19)$$

Из уравнений (2.18) и (2.19) получаем, что

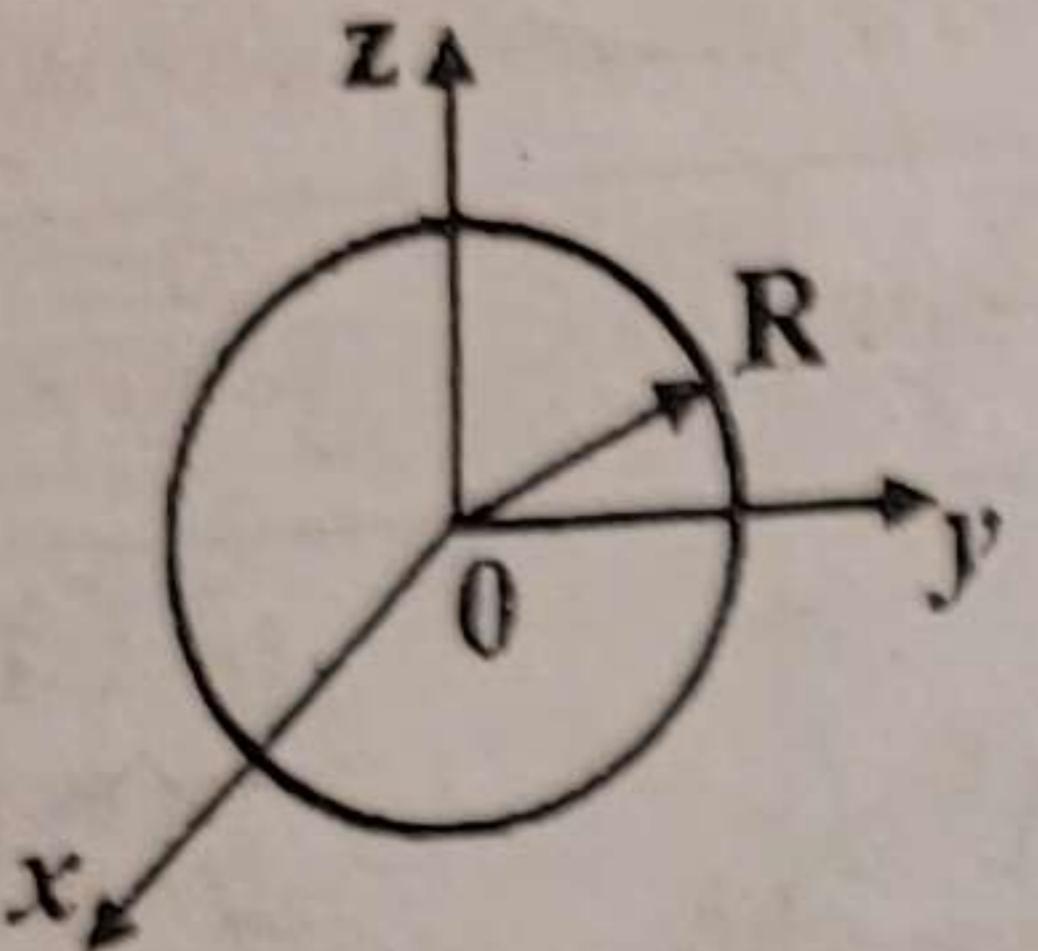
$$M = Tr = m(g - a)r \quad (2.20)$$

В опорах оси действуют силы трения, движение тормозит также воздух. Их тормозящее влияние учитывает момент сил трения  $M_{\text{тр}}$ . Соотношение (2.13) принимает вид:

$$M - M_{\text{тр}} = J\varepsilon \quad \text{или} \quad m_0(g - a)r - M_{\text{тр}} = J\varepsilon \quad (2.21)$$

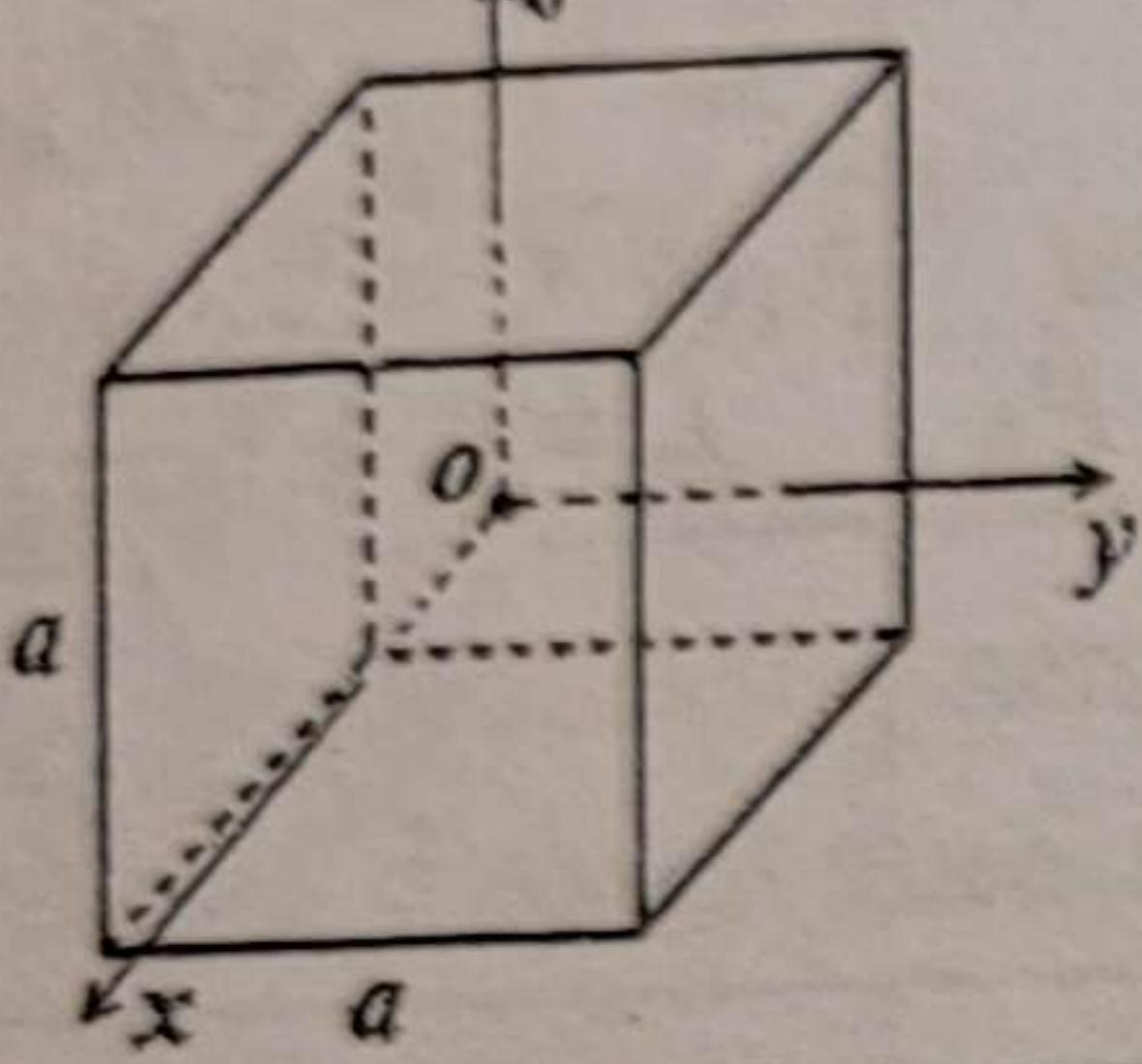
где  $J$  — суммарный момент инерции вращающейся системы.

Шар



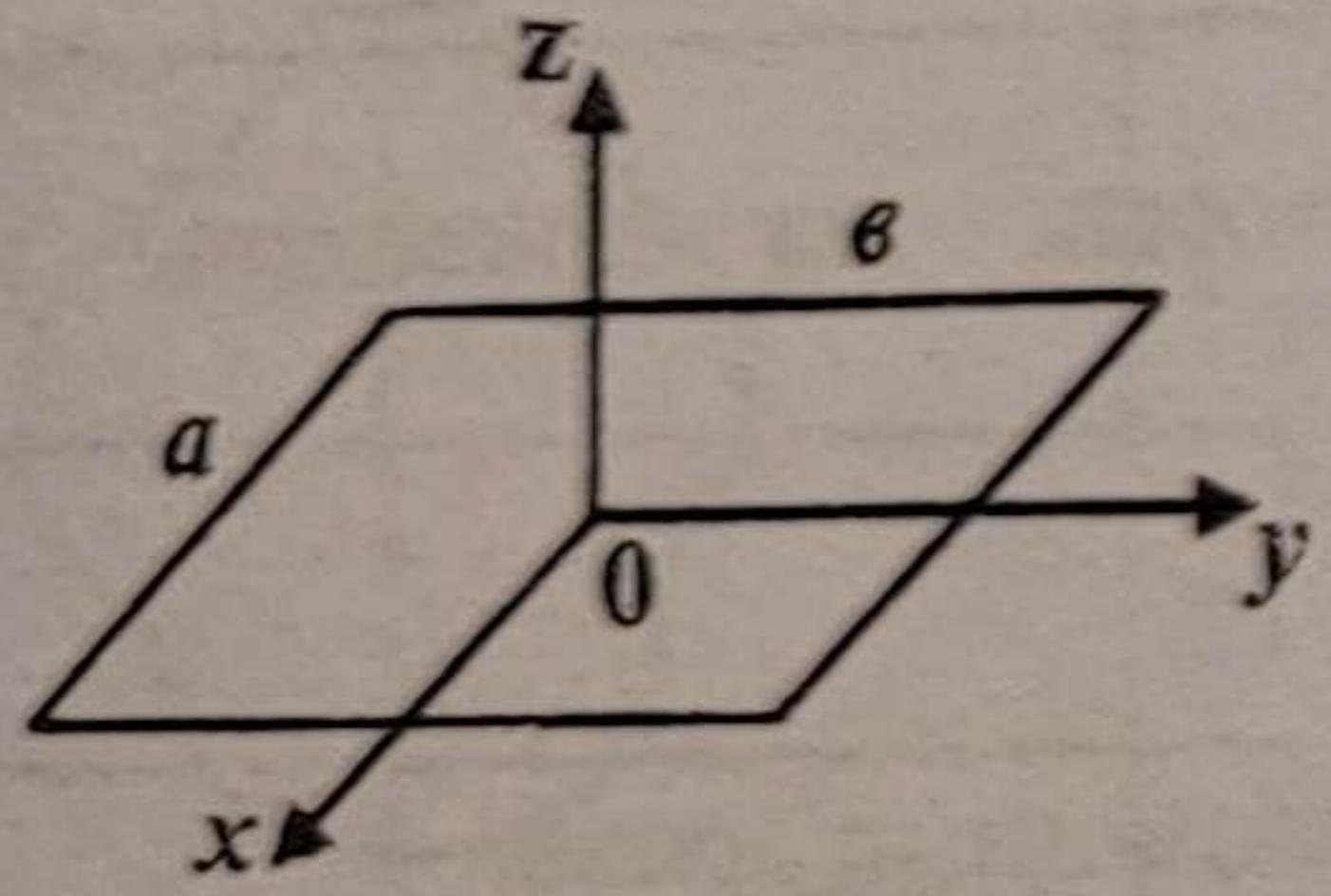
$$J_x = J_y = J_z = \frac{2mR^2}{5}$$

Куб



$$J_x = J_y = J_z = \frac{2ma^2}{6}$$

Тонкая прямоугольная пластина

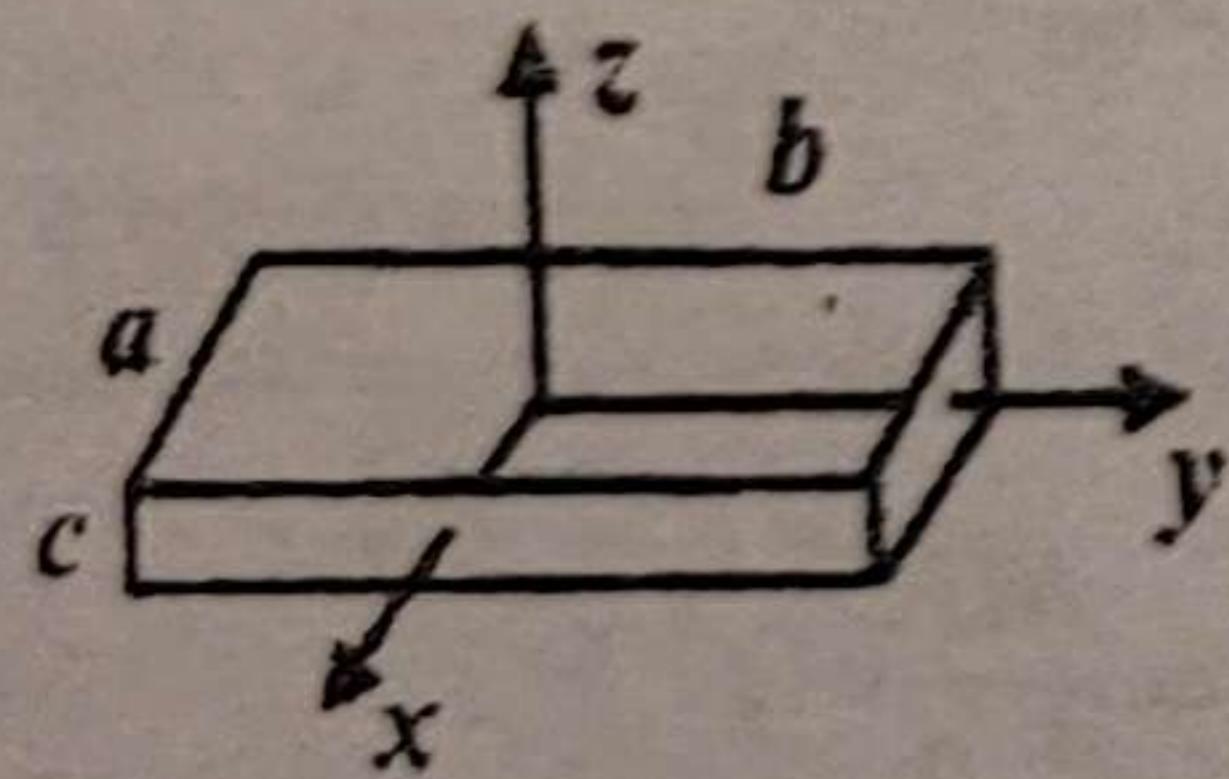


$$J_x = \frac{mb^2}{12};$$

$$J_y = \frac{ma^2}{12};$$

$$J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$

Прямоугольный параллелепипед

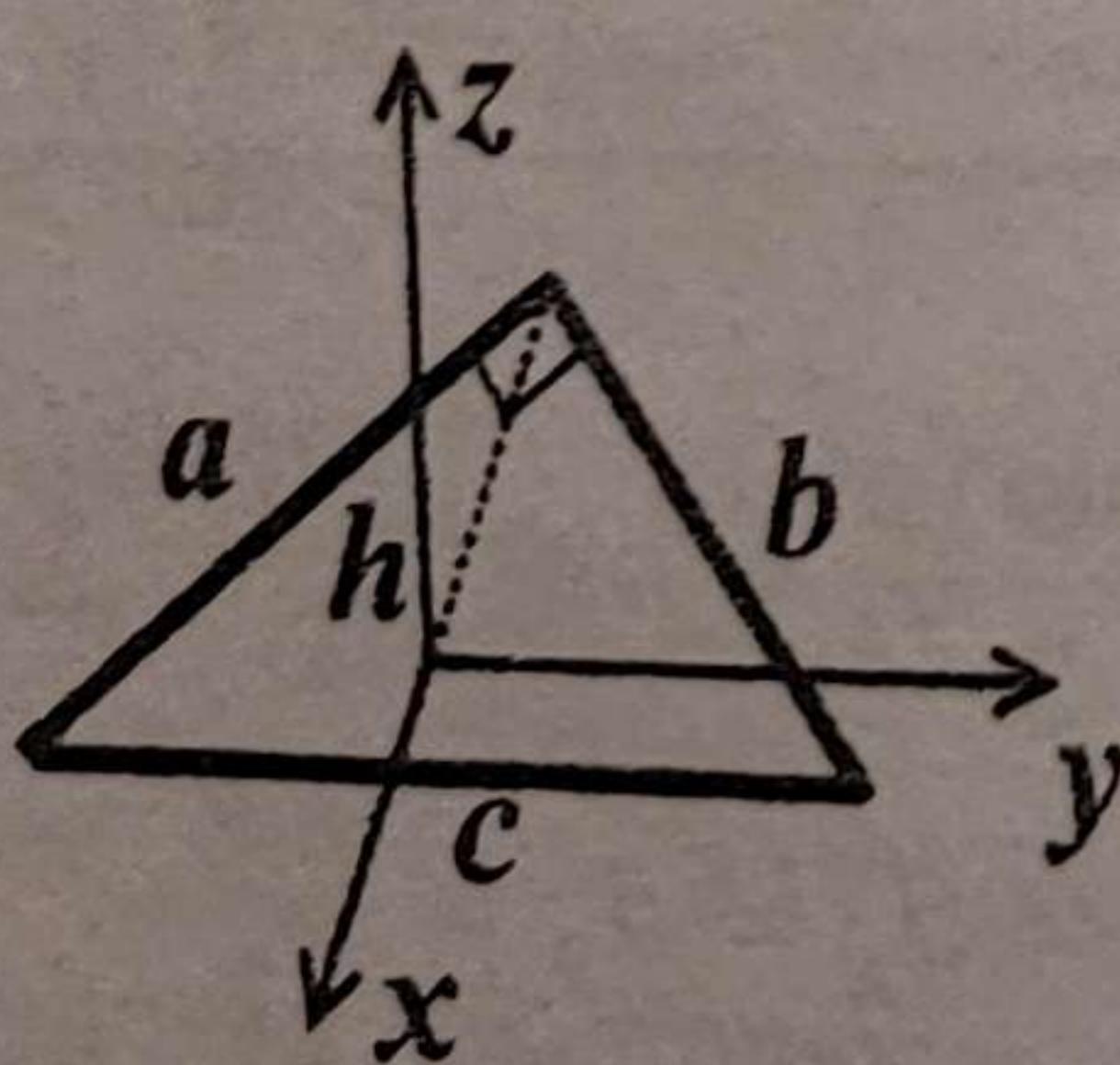


$$J_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{12};$$

$$J_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12};$$

$$J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$

Прямоугольный равнобедренный треугольник



$$J_y = \frac{2mh^2}{9} = \frac{m(a^2 + b^2 + c^2)}{36};$$

$$J_x = \frac{mh^2}{6}.$$

$h$  — высота,  
 $a, b, c$  — стороны треугольника

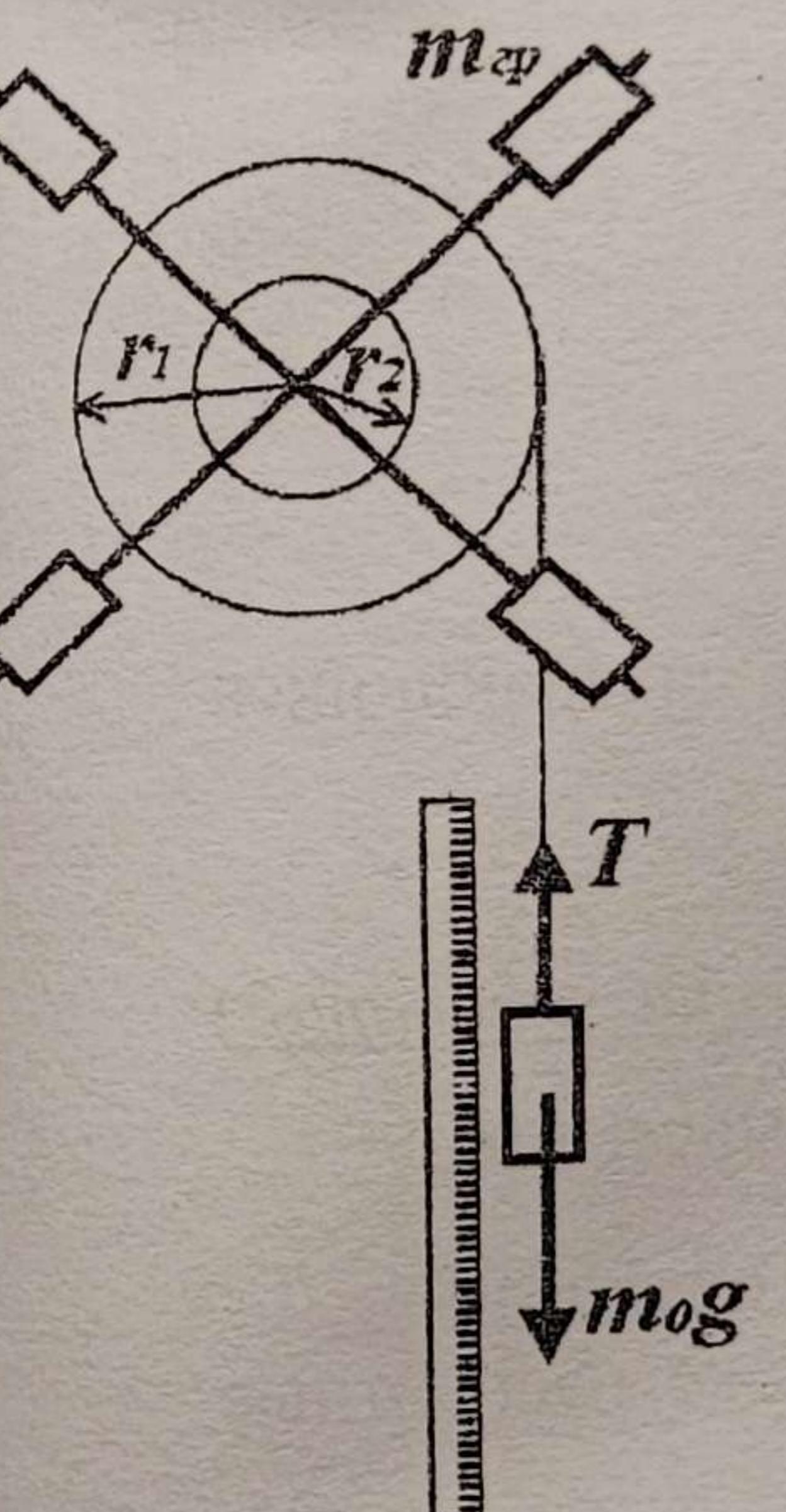


Рисунок 12 – Внешний вид установки.

Считая движение падающего груза равноускоренным, можно найти его ускорение из формулы

$$a = 2h/t^2, \quad (2.22)$$

где  $t$  — время падения груза с высоты  $h$ .

Для обода шкива угловое ускорение  $\varepsilon$  можно связать с линейным ускорением падающего груза формулой  $a = \varepsilon r$ , т.е.

$$\varepsilon = a/r = 2h/rt^2. \quad (2.23)$$

По указанию преподавателя выполняют задание 1 или задание 2.

### Порядок выполнения работы

#### Задание 1

- Сбалансировать маятник.
- Измерить расстояния  $R_i$  от оси вращения до центров вращающихся грузов. Найти  $\langle R \rangle$  и  $\Delta R$ .
- Намотав, на один из шкивов радиуса  $r_1$  или  $r_2$  (значение записать!) нить, прикрепить к свободному концу груз известной массы  $m_0$ .
- Измерить 5 раз время падения груза с фиксированной высоты  $h$ . Результаты измерения занести в таблицу 6. Записать также паспортные данные установки.

$r = \dots$

Таблица 6 – Измерения времени падения груза.

T	$\Delta t$	$r_i$	$m_0$	$m_{\text{тр}}$	R	$m_{\text{стерж}}$	$\ell_{\text{стерж}}$	h	$\varepsilon$
$t_1$		$r_1 \pm \Delta r_1$	$m_0 \pm \Delta m_0$	$m_{\text{тр}} = \Delta m$	$R_1$	$\langle m_{\text{ct}} \rangle \pm \Delta m$	$\langle \ell_{\text{ct}} \rangle \pm \Delta \ell$	$h \pm \Delta h$	
$t_2$		$r_2 \pm \Delta r_2$			$R_2$				
...					...				
...					...				
$t_5$					$R_5$				
$\langle t_{\text{ср}} \rangle$	$\langle \Delta t \rangle$								
					$\langle R \rangle \pm \Delta R$				

- В установке, где время падения регистрируется автоматически, необходимо:

а) включить прибор в сеть, нажав клавишу «Сеть». Нажать клавишу «Пуск».

б) Установить нижний край груза точно против отметки на корпусе верхнего фотозелектрического датчика и отжать клавишу «Пуск». При этом происходит блокировка шкива.

в) Нажать клавишу «Пуск». Груз начинает падать, а секундомер регистрирует время падения. Записать время падения и нажать клавишу «Сброс». При этом происходит деблокировка шкива и обнуление секундомера.

г) Повторить операции, указанные в пунктах б) и в) по 5 раз.

- По формуле (2.23) рассчитать угловое ускорение.
- Используя формулу (2.22), рассчитать по формуле (2.20) вращающий момент силы натяжения нити.
- Рассчитать момент инерции вращающейся системы.

$$\begin{aligned} J &= J_{\text{шкив } 1} + J_{\text{шкив } 2} + 4J_{\text{стерж}} + 4J_{\text{груз}} = \\ &= \frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2} + 4 \left[ \frac{m_{\text{ct}} \ell_{\text{ct}}^2}{3} + m_{\text{тр}} \cdot R^2 \right]. \end{aligned}$$

**Внимание!** Для установки с автоматической регистрацией времени момента инерции шкивов и вращающейся стержней обозначен через

$$J = (3,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

- Пренебрегая в формуле (2.21) моментом  $M_{\text{тр}}$  сил трения, проверить равенство  $M = J\varepsilon$ .
- Рассчитать погрешность для вращающего момента  $M$  и произведения  $J\varepsilon$ . Результаты работы представить в виде:

$$M \pm \Delta M;$$

$$J\varepsilon \pm \Delta(J\varepsilon).$$

#### Задание 2

- Сбалансировать маятник.
- К свободному концу нити прикрепить груз массой  $m_{01}$  и намотать нить на один из шкивов (записать значение  $r$ ).
- Измерить 5 раз время падения груза с фиксированной высоты  $h$ .

Для установки с автоматической регистрацией времени порядок измерений указан в п. 5 (Задание 1).

4. Произвести по 5 измерений  $t$  с 4-мя другими грузами.
5. Результаты измерений занести в таблицу 7 и 8.

Таблица 7 Время падения грузов с различной массой.

	Масса падающего груза					радиус выбранного шкива
	$m_{01}$	$m_{02}$	$m_{03}$	$m_{04}$	$m_{05}$	
$t_1$						
$\dots$						
$t_5$						
$t_{\text{ср}}$						
$a$						
$\varepsilon$						
$M$						

6. Записать паспортные данные установки, необходимые для расчетов.

Таблица 8 – Определение моментов инерции.

$r_i$	$m_{\text{тр}}$	$h$	$m_{\text{стерж}}$	$\ell_{\text{стерж}}$	$R$	$\mathcal{J}_0$
$r_1 \pm \Delta r_1$	$m_{\text{тр}} \pm \Delta m$	$h \pm \Delta h$	$m_{\text{стерж}} \pm \Delta m$	$\ell \pm \Delta \ell$	$R$	
$r_2 \pm \Delta r_2$					$\dots$ $R_5$ $R_{\text{ср}}$	

7. По формулам (2.22) и (2.21) рассчитать  $a$  и  $M$  для каждого из пяти падающих грузов и погрешности  $\Delta a$  и  $\Delta M$ .
8. Для каждого падающего груза рассчитать по формуле (2.23) угловое ускорение  $\varepsilon$ . Вывести формулу для расчета  $\Delta \varepsilon$  и подсчитать ее для каждого случая.
9. По результатам расчетов построить график зависимости  $M = f(\varepsilon)$ .

На графике указать погрешность  $\Delta M$  и  $\Delta \varepsilon$  для каждой точки. С учетом уравнения (2.21) из графиков определить  $M_{\text{тр}}$  и  $\mathcal{J}$ . Последнее задание может быть выполнено на ЭВМ с использованием программы "LINREG".

10. Сравнить найденное значение момента инерции со значением, рассчитанным по формуле:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathcal{J}_{\text{шкив } 1} + \mathcal{J}_{\text{шкив } 2} + 4 \mathcal{J}_{\text{стерж}} + 4 \mathcal{J}_{\text{гру}} = \mathcal{J}_0 + 4 \mathcal{J}_{\text{тр}} = \\ &= \frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2} + 4 \left[ \frac{m_{\text{ст}} \ell_{\text{ст}}^2}{3} + m_{\text{тр}} \cdot R^2 \right] = \mathcal{J}_0 + 4 m_{\text{тр}} R. \end{aligned}$$

где  $\mathcal{J}_0$  — момент инерции шкивов и стержней, известный для установки с автоматической регистрацией времени падения.

$$\mathcal{J} = (3,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

### Контрольные вопросы

1. Каковы особенности поступательного и вращательного движения тел?
2. Как определяются угловые кинематические величины (угол поворота, вектор угловой скорости, вектор углового ускорения)?
3. Как связаны линейные и угловые кинематические величины?
4. Что такое векторное произведение двух векторов?
5. Дайте определение вектора момента силы и вектора момента импульса. Как они направлены и чему равны их модули?
6. Что такое момент инерции? Каков физический смысл этой характеристики?
7. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения для точки, для тела, вращающегося относительно оси.
8. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера. Примените ее для вычисления момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно к стержню.
9. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. При каких условиях он справедлив?
10. Как вычисляется кинетическая энергия вращающегося тела?

## 2.2 Лабораторная работа № 02 или № 2

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы — с помощью крут拧ьного маятника экспериментально определяется момент инерции тела правильной формы и полученнное значение сравнивается с расчетным значением.

По указанию преподавателя выполняется одно из 2-х заданий (1 или 2).

Крут拧ьный маятник представляет собой тело, подвешенное на упругой проволоке. Если тело повернуть на небольшой угол относительно положения равновесия (покоя) и отпустить, то тело будет совершать достаточно длительное время колебательные движения относительно оси, совпадающей с проволокой.

Закручивание проволоки приводит к возникновению момента упругих  $M_{\text{упр}}$  сил, который для небольших углов выражается формулой.

$$\bar{M}_{\text{упр}} = -C\Phi, \quad (2.24)$$

где  $C$  — постоянная упругих сил, зависящая от свойств и характеристик упругой проволоки,

$\Phi$  — угол закручивания.

Знак  $(-)$  показывает, что момент силы  $\bar{M}_{\text{упр}}$  противодействует закручиванию нити.

Основное уравнение динамики для такого движения имеет вид:

$$M_{\text{упр}} = J\epsilon. \quad (2.25)$$

Объединив выражения, получим

$$J\epsilon = -C\Phi. \quad (2.25)$$

Так как  $\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\Phi}{dt^2}$ , то выражение (2.25) можно записать

$$J \frac{d^2\Phi}{dt^2} + C\Phi = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \omega_0^2\Phi = 0, \quad (2.26)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{C}{J}.$$

Уравнение (2.26) представляет собой уравнение движения тела, записанное в дифференциальной форме. Решая его, можно найти зависимость  $\Phi(t)$ , которая полностью определяет движение тела в любой момент времени. Решением уравнения (2.26) является выражение

$$\Phi = \Phi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (2.27)$$

Доказать это можно прямой подстановкой, предварительно получив выражение для второй производной: уравнение (2.26) превращается в ~~этот~~ случае в тождество

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_0 \Phi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\omega_0^2 \Phi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 \Phi$$

В уравнении (2.27) использованы следующие обозначения:

$\Phi_0$  — максимальный угол отклонения (амплитуда);

$(\omega_0 t + \alpha)$  — фаза колебания;

$\alpha$  — начальная фаза, определяющая  $\Phi$  при  $t = 0$

$\omega_0$  — собственная круговая (циклическая) частота, равная

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{C}{J}}.$$

Следовательно

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}. \quad (2.28)$$

Из формулы (2.28) вытекает, что период крут拧ьных колебаний зависит от момента инерции и упругих свойств нити.

Определив значение  $C$  из опытов для тела правильной формы, момент инерции которого  $J_0$  может быть рассчитан теоретически, можно найти момент инерции тел любой формы.

Система крепления тела к проволоке также обладает моментом инерции. В одном варианте работы тело прикручивается к цилиндрику, а в другом — закрепляется в прямоугольной рамке. Обозначим момент инерции системы крепления  $J_p$ .

## 2.2.1. Задание для лабораторной работы № 02

Это задание выполняется на промышленной установке с автоматическим измерением числа периодов и времени колебаний. Системой крепления тела к проволоке здесь служит специальная рамка, момент инерции которой  $\mathcal{J}_p$  необходимо учитывать. Он связан с периодом колебаний  $T_p$  соотношениями:

$$\mathcal{J}_p = \left( \frac{C}{4\pi^2} \right) T_p^2 \quad (2.29)$$

После прикрепления к рамке тела, момент инерции которого хотят измерить, момент инерции маятника становится равным

$$\mathcal{J} + \mathcal{J}_p = \left( \frac{C}{4\pi^2} \right) T^2, \quad (2.30)$$

где  $\mathcal{J}$  — момент инерции тела, а  $T$  — период колебаний рамки с телом.

Если в рамке закрепить эталонное тело, момент инерции которого  $\mathcal{J}_0$ , то период колебаний станет равным  $T_0$ :

$$\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_p = \left( \frac{C}{4\pi^2} \right) T_0^2, \quad (2.31)$$

Решая совместно (2.29), (2.30) и (2.31), получим:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \frac{T^2 - T_p^2}{T_0^2 - T_p^2} \quad (2.32)$$

Таким образом, чтобы определить момент инерции какого-либо тела, необходимо вычислить момент инерции эталонного тела и измерить периоды колебания собственно рамки, рамки и тела, рамки и эталонного тела.

(Например, для куба  $I_0 = \frac{ma^2}{6}$ , где  $m$  — масса куба,  $a$  — сторона куба).

Если момент инерции системы подвески мал по сравнению с моментом инерции тела, то, пренебрегая в (2.30) и (2.31) величиной  $\mathcal{J}_p$ , находим

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \frac{T^2}{T_0^2} \quad (2.33)$$

## Порядок выполнения работы

1. Получить у лаборанта эталонное тело (куб) и прямоугольный параллелепипед. Определить их размеры и массу.

2. Включить прибор для автоматического измерения числа периодов и времени колебаний, нажав кнопку «Сеть».

3. Отжать кнопку «Пуск», повернуть рамку до соприкосновения хвостовика рамки с сердечником электромагнита. При отжатой клавише «Пуск» рамка фиксируется в этом положении. Обнулить показания счетчиков, нажав клавишу «Сброс».

4. Нажав на клавишу «Пуск», освобождают рамку и она начинает совершать колебания. Отсчитав по счетчику периодов 19 колебаний, нажимают клавишу «Стоп». Записывают показания счетчиков. Измерения повторяют еще 2 раза, проделав операции, указанные в пунктах 3 и 4.

5. Фиксируют в рамке эталонное тело так, чтобы ось колебаний совпадала с осью относительно которой, рассчитан момент инерции из таблицы 5, допустим  $\mathcal{J}_x$ . Измеряют по 3 раза из 10 колебаний соответствующий период, обозначим его  $T_x$ . Затем проводят измерения периодов  $T_y$  и  $T_z$  относительно осей, перпендикулярных к двум другим граням куба. Так как для куба  $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \mathcal{J}_z$  то находят средний период колебаний  $T_0$  путем усреднения результатов 9-ти измерений (по 3 относительно каждой оси).

6. Устанавливают вместо куба прямоугольный параллелепипед так, чтобы ось вращения была перпендикулярна большей по размерам грани. Измеряют 3 раза период  $T_z$ . Затем проводят измерения  $T_x$  и  $T_y$  относительно осей, перпендикулярных к другим граням. Результаты измерений заносят в таблицу 9.

Таблица 9 – определение периода колебаний прямоугольного параллелепипеда.

	Рамка			Эталон (куб) $M = \dots, a = \dots,$			Прямоугольный параллелепипед $m = \dots, a = \dots, b = \dots, c = \dots,$				
	$t$	$N$	$T_p$	$t$	$N$	$T_0$	$t$	$N$	$T$	$I_x$	$I_z$
Ось Z										$T_z = \dots$	$I_z \pm \Delta I$
Ось X										$I_x = \dots$	$I_x \pm \Delta I$
Ось Y										$I_y = \dots$	$I_y \pm \Delta I$
											$T_0 = \frac{\sum T}{9}$

7. Вычисляют момент инерции по формуле (2.32). Находят погрешности  $\Delta J_x$ ,  $\Delta J_y$ ,  $\Delta J_z$ .

8. По формулам из таблицы 5 вычисляют расчетные моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ . Определяют погрешности  $\Delta J_x$ ,  $\Delta J_y$ ,  $\Delta J_z$ .

## 2.2.2. Задание для лабораторной работы № 2

Это задание выполняется на простой лабораторной установке, где тела прикрепляются к легкому цилиндрику с пренебрежимо малом моментом инерции относительно оси колебаний. Эталонным телом служит цилиндрический однородный стержень, момент инерции которого  $J_0$  равен

$$J_0 = \left( \frac{C}{4\pi^2} \right) T_0^2 \quad (2.34)$$

Присоединим к стержню исследуемое тело с моментом инерции  $J$ . Тогда по аналогии с формулой (8), момент инерции системы равен

$$J + J_0 = \left( \frac{C}{4\pi^2} \right) T^2 = \frac{T^2}{T_0^2} J_0 \quad (2.35)$$

откуда из (2.34) и (2.35)

$$J = \frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2} J_0, \quad (2.36)$$

где  $T_0$  и  $T$  — периоды колебаний отдельно стержня и системы.

### Порядок выполнения работы

1. Получить у лаборанта крутильный маятник, секундомер, эталонное тело, (цилиндрический стержень) и тело, указанное преподавателем.

2. Определить массу и размеры эталонного тела, в качестве которого используется тонкий стержень. Вычислить его момент инерции,

3. Закрепить стержень в системе крепления так, чтобы ось вращения маятника проходила через центр масс стержня.

4. Повернув маятник на небольшой угол, измерить 3 раза время 10–20 полных колебаний стержня и вычислить средний период колебаний  $T_0$  и его погрешность  $\Delta T_0$ .

5. Прикрутить тело, момент инерции которого хотят определить. 3 раза измерить периоды колебаний системы относительно оси  $Z$ . Направление осей для исследуемого тела взять из таблицы 5.

Аналогичные измерения произвести относительно других осей. Данные занести в таблицу 10.

Таблица 10 Определение периода колебаний.

Эталон $\begin{cases} m = \\ l = \end{cases}$				Тело ( $m = \dots, d = \dots, h = \dots, a = \dots, b = \dots$ )								
$T$	$N$	$T = t/N$	$\Delta T$	ось $z$			ось $x$			ось $y$		
				$t_z$	$N$	$T$	$t_x$	$N$	$T$	$t_y$	$N$	$T$
$t_1$												
$\dots$												
$T$												
$t_{cp}$				$t_{cp}$			$t_{cp}$			$t_{cp}$		

6. Взвесить тело и определить характерные размеры тела.

7. По формуле (2.36) вычислить  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ . Вычислить погрешность измерения  $\Delta J_x$ ,  $\Delta J_y$ ,  $\Delta J_z$ .

8. По формулам из таблицы 5 вычислить  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  для данного тела и рассчитать погрешности  $\Delta J_x$ ,  $\Delta J_y$ ,  $\Delta J_z$ .

9. Сравнить результаты измерений моментов инерции, полученных помощью крутильного маятника и результаты расчетов.

### Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции тела и от чего он зависит? Каков физический смысл этой величины?

2. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения. Дайте определения момента силы, момента импульса, момента инерции.

3. По какому закону совершаются крутильные колебания маятника? Дайте определения понятиям: амплитуда колебаний, период, фаза, частота.

4. Выведите формулу, связывающую период колебаний и момент инерции.
5. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса-Штейнера.
6. Опишите методику экспериментального определения момента инерции с помощью кривых колебаний.
7. Вычислите момент инерции стержня, относительно оси, проходящей через центр масс.
8. Продифференцировав формулу (2.5), получите уравнение моментов.

### 2.3 Лабораторная работа № 06

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Цель работы — заключается в экспериментальном определении момента инерции кольца с помощью маятника Максвелла.

Маятник Максвелла — это диск, насаженный на ось радиусом  $r$ , которая подвешена на двух нитях (рисунок 13).

Если накрутить нити на ось и отпустить диск, то он при раскручивании нити начинает вращаться и двигаться поступательно вниз. Когда нить полностью раскрутится, то вследствие инерции, вращение диска продолжается в прежнем направлении, что приведет к закручиванию нити и подъему диска.

Движение диска легко описать с использованием закона превращения энергии. В верхней точке маятник Максвелла обладает запасом потенциальной энергии  $mgh$ , где  $h$  — длина подвеса маятника.

По мере опускания диска потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения, что выражается формулой (2.17).

Закон сохранения энергии записывается в виде:

$$mgh = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mV_c^2}{2} \quad (2.37)$$

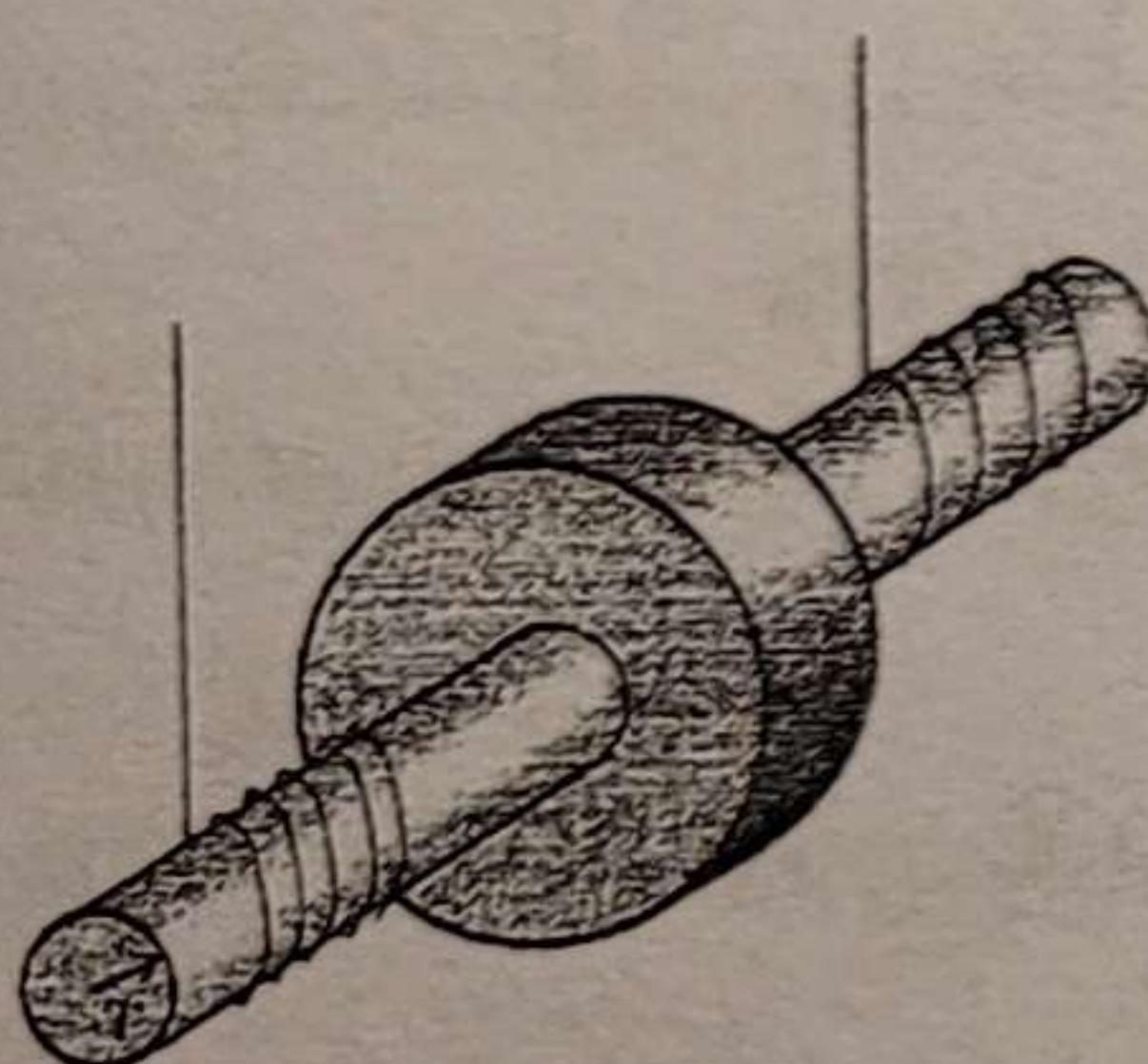


Рисунок 13 – Внешний вид маятника Максвелла.

Скорость центра масс связана с угловой скоростью соотношением

$$V_c = \omega r$$

Поступательное движение центра масс является равноускоренным, поэтому:

$$V_c = at, \quad h = \frac{at^2}{2}. \quad (2.38)$$

Исключив из выражений (2.38) ускорение, получаем:

$$V_c = \frac{2h}{t}. \quad (2.39)$$

Формулу (2.37) можно переписать так:

$$2mgh = \frac{Jv^2}{r^2} + mV_c^2 \quad (2.40)$$

или

$$gh = \left[ \frac{J}{mr^2} + 1 \right] \frac{2h^2}{t^2} \quad (2.40a)$$

Из последнего выражения следует, что

$$J = mr^2 \left[ \frac{gt^2}{2h} - 1 \right], \quad (2.41)$$

где  $J$  — момент инерции вращающейся системы;  $m$  — масса вращающейся системы.

Если на диск насадить кольцо, масса которого  $m_k$  и момент инерции  $J_k$ , то формула (2.41) преобразуется:

$$J = \left( \frac{1}{4} m D^2 \right) \left[ \frac{gt^2}{2h} - 1 \right], \quad (2.42)$$

где  $J$  — суммарный момент инерции системы;  $D$  — внешний диаметр оси маятника вместе с намотанной на нее нитью подвески;  $t$  — время падения маятника;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h$  — длина маятника, равная пути падения,  $m$  — общая масса маятника вместе с кольцом.

Масса  $m$  определяется по формуле:

$$m = m_0 + m_K + m_D , \quad (2.43)$$

где  $m_0$  — масса оси маятника;  $m_D$  — масса диска;  $m_K$  — масса наложенного на диск кольца.

Внешний диаметр оси маятника вместе с намотанной на нее нитью подвески определяется по формуле:

$$D = D_0 + D_H , \quad (2.44)$$

где  $D_0$  — диаметр оси маятника;  $D_H$  — диаметр нити подвески.

Полученное по формуле (2.42) значение момента инерции системы необходимо сравнить с теоретическим значением  $J_{\text{теор.}}$ , которое определяется по формуле:

$$J_{\text{теор.}} = J_0 + J_K + J_D , \quad (2.45)$$

где  $J_0$  — момент инерции оси маятника;  $J_D$  — момент инерции диска;

$J_K$  — момент инерции кольца, наложенного на диск.

Значения отдельных моментов инерции определяются по формуле:

$$J_0 = \left( \frac{1}{8} m_0 D_0^2 \right) , \quad (2.46)$$

где  $D_0$  — внешний диаметр оси маятника.

$$J_D = \frac{1}{8} m_D (D_0^2 + D_D^2) , \quad (2.47)$$

где  $D_D$  — внешний диаметр диска.

$$J_K = \frac{1}{8} m_K (D_D^2 + D_K^2) , \quad (2.48)$$

где  $D_K$  — внешний диаметр кольца.

Измерение времени движения в установке происходит автоматически с помощью электронного секундометра и двух фотоэлектрических, датчиков, один из которых установлен в верхнем кронштейне, а второй — в нижнем. В верхнем кронштейне находится электромагнит для фиксации маятника в верхнем положении и вороток для изменения длины нитей маятника.

## Порядок выполнения работы

1. На диск плотно насадить кольцо, указанное преподавателем. Отрегулировать положение оси маятника так, чтобы она была горизонтальна, а край кольца перекрывал оптическую ось нижнего фотоэлемента приблизительно на 2 мм. Включить прибор в сеть нажатием клавиши «Сеть».

2. Равномерно намотать нить на ось маятника и зафиксировать его в верхнем положении с помощью электромагнита, отжав клавишу «Пуск». Нажать клавишу «Сброс» для обнуления показаний секундометра.

3. Нажать клавишу «Пуск». Записать время падения. Измерения повторять 5 раз, проделав операции, указанные в пунктах 2 и 3. Рассчитать среднее время  $t$  падения и погрешность  $\Delta t$ .

4. Определить по указателю на нижнем кронштейне высоту  $h$  падения маятника. Записать данные о массах оси, диска и кольца, и радиусах оси, диска и кольца.

5. Вычислить момент инерции маятника по формуле (2.42) и рассчитать погрешность измерения момента инерции.

6. По формуле (2.45) вычислить теоретическое значение момента инерции маятника и его абсолютную погрешность.

7. Сравнить моменты инерции, полученные из формул (2.42) и (2.45).

### Параметры маятника:

- Диаметр оси маятника  $D_0 = (10,0 \pm 0,5)$  мм.
- Внешний диаметр диска  $D_D = (86,0 \pm 0,5)$  мм.
- Внешний диаметр кольца  $D_K = (105,0 \pm 0,5)$  мм.
- Диаметр нити подвески  $D_H = (0,5 \pm 0,1)$  мм.
- Масса оси  $m_0 = (33,0 \pm 0,1)$  г.
- Масса диска  $m_D = (156,0 \pm 0,1)$  г.
- Масса кольца  $m_K$  выгравирована на каждом кольце.

## Контрольные вопросы

1. Раскройте физический смысл понятия момент инерции тела.
2. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения тела и раскройте физический смысл величин, входящих в него.
3. Выведите формулу (5) с использованием законов поступательного и вращательного движения твердого тела.
4. Дайте определение момента силы. Как направлен вектор момента силы? Чему равен модуль момента силы?
5. Сформулируйте закон сохранения энергии и примените его к описанию движения маятника Максвелла.
6. Дайте определение угловой скорости. Как направлен вектор угловой скорости? Каким соотношением связаны между собой линейная и угловая скорости?
7. Дайте определения момента силы и момента импульса. Каким соотношением они связаны друг с другом?

## 2.4 Лабораторная работа № 09

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ЧАСТИЦЫ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Цель работы — в работе определяется скорость движения летящей частицы (снаряда) с помощью баллистического крутильного маятника.

Крутильный маятник представляет собой твердое тело, подведенное на упругой нити. Описание движения крутильного маятника приведено в лабораторной работе № 02 (раздел 2.2).

Маятник, выведенный из положения равновесия, совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{J/C} \quad (2.49)$$

где  $C$  — постоянная упругих сил, зависящая от свойств упругой нити.

В работе использован маятник, изображенный на рисунке 14.

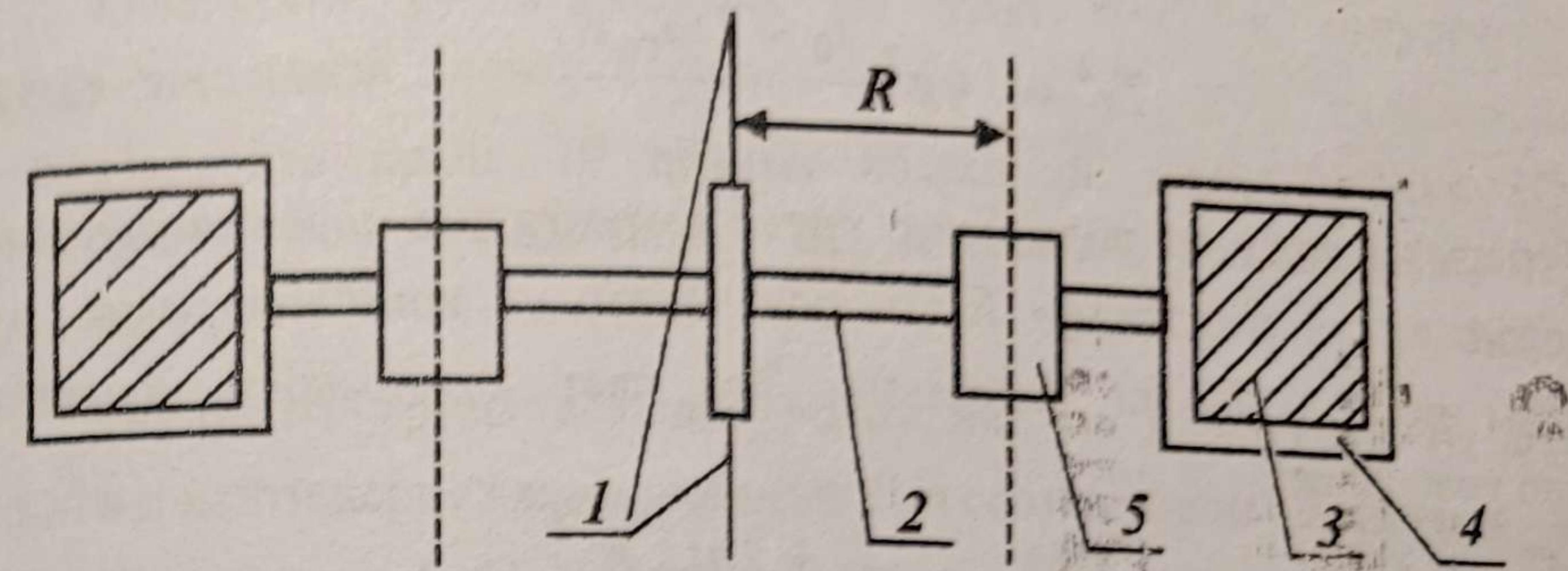


Рисунок 14 – Блок-схема установки.

Он состоит из подвешенного на упругой нити 2 стержня 1, на котором закреплены полые емкости 3, заполненные пластилином 4, и два подвижных груза 5.

Установим каждый из подвижных грузов на расстоянии  $R_1$  от оси системы. Тогда момент инерции маятника будет равен  $J = J_0 + 2m_{\text{тр}}R_1^2$ , где  $m_{\text{тр}}$  — масса подвижного груза, а  $J_0$  — момент инерции системы без подвижных грузов.

Предположим, что частица (снаряд) массой  $m$ , движущаяся со скоростью  $\mathbf{v}$ , попадает в пластилин и вонзается в него на расстоянии  $r$  от оси маятника. В результате, маятник отклонится на угол  $\Phi_0$  от положения равновесия и начнет колебаться с периодом  $T_1$ , который мы можем измерить.

Так как система «снаряд–маятник» замкнута, можно записать закон сохранения момента импульса всей системы до и после взаимодействия:

$$m\mathbf{v}r = (J_0 + 2m_{\text{тр}}R_1^2 + mr^2)\omega \quad (2.50)$$

Начальную угловую скорость вращения  $\omega$  маятника можно найти, используя уравнение его движения (см. формулу (2.27)):

$$\omega = d\Phi/dt = \Phi_0(2\pi/T_1)\cos(t2\pi/T_1)$$

Откуда при  $t = 0$  получим  $\omega = (2\pi/T_1)\cdot\Phi_0$ . Учитывая последнее соотношение, а также пренебрегая в правой части малым слагаемым  $mr^2$ , уравнение (2.50) запишем в виде:

$$m\mathbf{v}r = (J_0 + 2m_{\text{тр}}R_1^2)(2\pi/T_1)\Phi_0 \quad (2.51)$$

Кроме того, уравнение (2.49) позволяет записать:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2m_{\text{тр}} R_1^2}{C} \quad (2.52)$$

Теперь передвинем подвижные грузы в некоторое новое положение, расположив их на расстоянии  $R_2$  от оси. Возбудив колебания маятника, определим период  $T_2$  их колебаний. Это дает возможность написать еще одно уравнение:

$$T_2^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J_0 + 2m_{\text{тр}} R_2^2}{C} \quad (2.53)$$

Решая совместно уравнения (2.52) и (2.53)

$$J_0 = \frac{2m_{\text{тр}}(R_2^2 T_1^2 - R_1^2 T_2^2)}{T_2^2 - T_1^2} \quad (2.54)$$

Подставляя (2.54) в (2.51), вычислим скорость снаряда:

$$v = \frac{4\pi\Phi_0 m_{\text{тр}} T_1 (R_2^2 - R_1^2)}{(T_2^2 - T_1^2)} \quad (2.55)$$

Период колебаний маятника измеряется электронным секундомером, который подсчитывает число полных колебаний и соответствующее им время.

### Порядок выполнения работы

- Установить подвижные грузы симметрично относительно оси маятника и измерить расстояние  $R_1$  от оси до центра масс груза.
- Установить маятник в таком положении, чтобы черта на емкости с пластилином совпадала с нулевым делением угловой шкалы, предварительно ослабив верхний стопорный винт.
- Взвесив снаряд, определить его массу.
- Поместить снаряд в стреляющее устройство, оттянуть рукоять до упора и, повернув ее слегка вправо, произвести выстрел и измерить максимальный угол отклонения маятника  $\Phi_0$ .
- Измерить расстояние  $r$  от оси маятника до центра снаряда в месте его вклейивания в пластилин.
- Включить электронный секундомер нажатием кнопки «Сеть».

7. Отклонить рукоять маятника на угол 5-7° и отпустить его, одновременно нажав кнопку «Сброс».

8. Измерить время 10 полных колебаний, нажав кнопку «Стоп» после совершения маятником 10 колебаний. Вычислить период колебаний  $T_1$ .

9. Поставить грузы в новое положение на расстоянии  $R_2$  от оси маятника и найти период его колебаний  $T_2$  в соответствии с пунктами 7 и 8.

10. Повторить 5-6 раз операции пунктов 4-9 при различных сочетаниях значений  $R_1$  и  $R_2$ . Результаты занести в таблицу 11.

Таблица 11 – Определение скорости движения частицы.

№ п/п	$m_{\text{тр}}$ кг	$R_1$ м	$R_2$ м	$\Phi_0$ град	$\Phi_0$ рад	$r$ м	$T_1$ с	$T_2$ с	$m$ кг	$v$ м/с	$\Delta v$ м/с
1											
2											
3											
4											
5											
6											
										$v_{\text{ср}}$	$\Delta v$

11. По формуле (2.55) вычислить скорость снаряда. При этом  $\Phi_0$  нужно выразить в радианах. Вычислить среднее значение  $v$  и найти погрешность  $\Delta v$ .

### Контрольные вопросы

- Объясните, что такое векторное произведение двух векторов?
- Дайте определение момента импульса частицы и момента силы.
- Запишите закон изменения во времени момента импульса системы частиц.
- Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
- Запишите основной закон динамики вращательного движения абсолютно твердого тела.
- Определите момент инерции твердого тела.
- Запишите уравнение движения кручения маятника, приведите его решение.
- Выполните формулу (2.55) для определения скорости снаряда.
- Опишите ход выполнения работы.

### 3 ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Если перемещение частиц описывается законом

$$x = A \sin(\omega t + \Phi) = A \sin(2\pi t/T + \Phi), \quad (3.1)$$

то говорят, что она совершает гармонические колебания.

$A$  — амплитуда колебания — максимальное отклонение частицы от положения равновесия.

$T$  — период колебания — время одного полного колебания.

$\omega = 2\pi/T$  — круговая частота.

Величину  $(\omega t + \Phi)$ , стоящую в аргументе синуса, называют фазой колебания.

$\Phi$  — начальная фаза, т. е. значение фазы колебания при  $t = 0$ .

Гармонические колебания возникают под действием силы, пропорциональной смещению частицы из положения равновесия и направленной к положению равновесия (квазиупругая сила).

$$\bar{F} = -k\bar{x} \quad (3.2)$$

Действительно, записав второй закон Ньютона

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad (3.3)$$

получаем дифференциальное уравнение относительно  $x = x(t)$  как функции времени. Перепишем (3.3) в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = k/m. \quad (3.4)$$

Не используя формальные математические методы решения дифференциальных уравнений, прямой подстановкой проверим, что функция  $x = A \sin(\omega t + \Phi)$  является решением уравнения (3.4).

Взяв первую, а затем вторую производные по времени от  $x$

$$\frac{dx}{dt} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \Phi),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot A \sin(\omega_0 t + \Phi) = -\omega_0^2 x, \quad (3.5)$$

и подставив (3.5) в (3.4), находим, что уравнение (3.4) обращается в тождество. Т. е. если на частицу действуют квазиупругие силы, то она совершает гармонические колебания. При этом собственная частота колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (3.6)$$

Постоянные  $A$  и  $\Phi$  находят из начальных условий.

Например, если при  $t = 0$ ,  $x = 0$  и  $v = dx/dt = v_0$ , то для определения  $A$  и  $\Phi$  получаем систему уравнений:

$$0 = A \sin \Phi$$

$$v_0 = A \omega_0 \cos \Phi$$

Откуда  $\Phi = 0$  и  $A = v_0/\omega_0$ .

Рассмотрим некоторые конкретные системы, в которых возникают гармонические колебания.

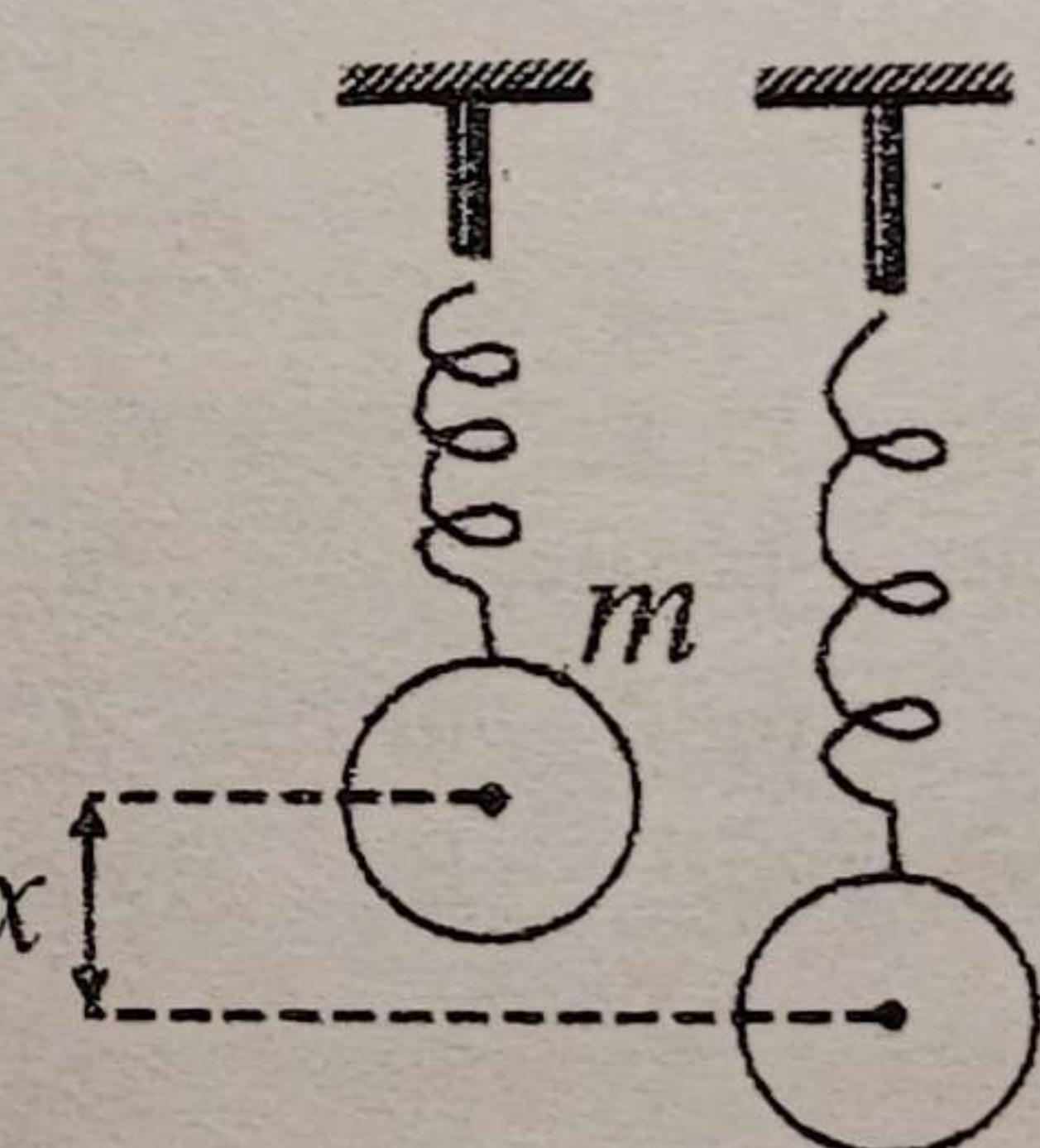


Рисунок 15 – Внешний вид пружинного маятника.

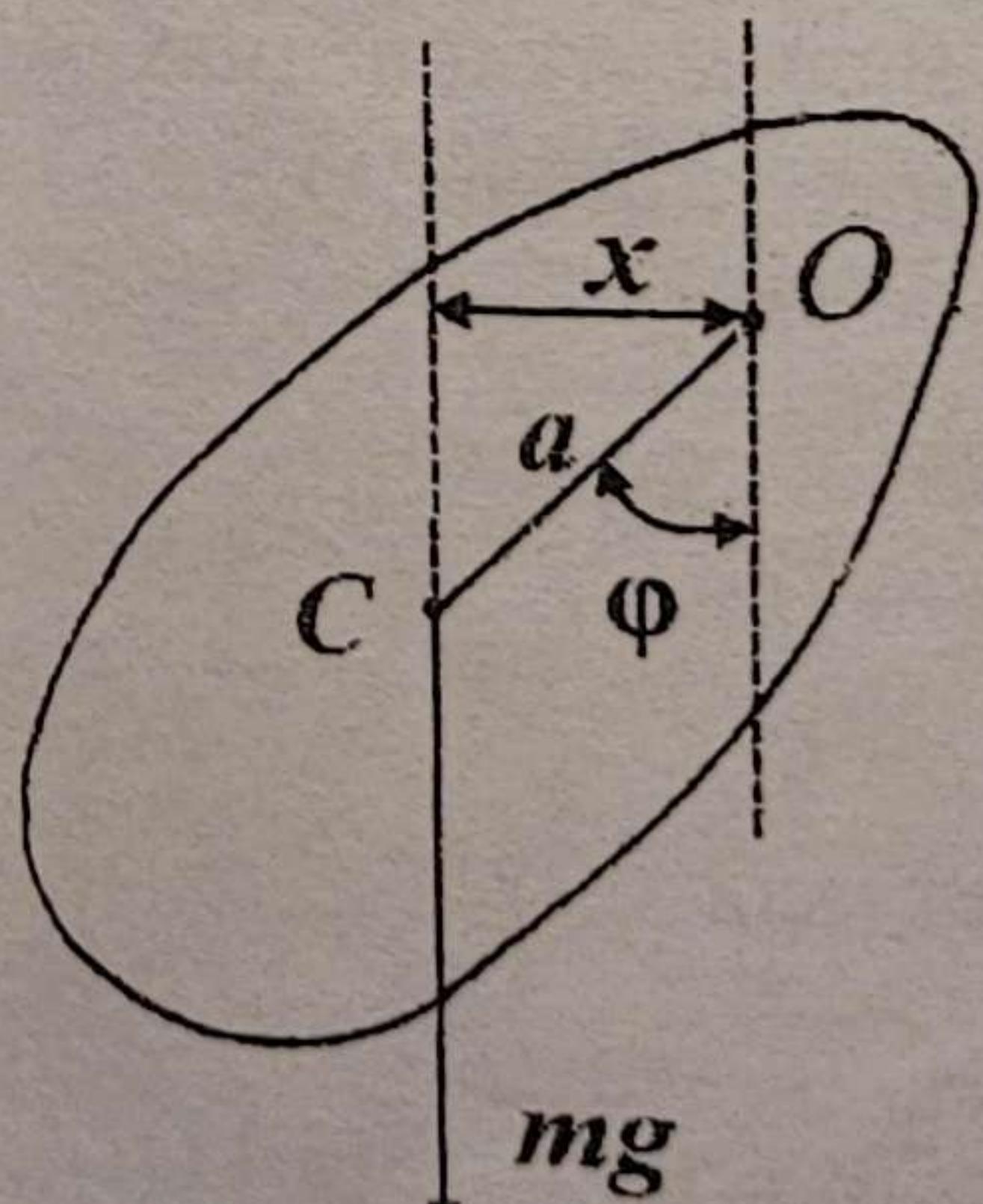


Рисунок 16 – Физический маятник

Пружинный маятник — груз массой  $m$ , подвешенный на упругой пружине с коэффициентом упругости  $k$  (рисунок 15).

При смещении шарика из положения равновесия на величину  $x$ , на него со стороны пружины будет действовать сила

$$F = -kx,$$

и следовательно (см. уравнение 3.3) шарик будет совершать гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Физический маятник — твердое тело, способное колебаться вокруг оси ( $O$ ), не проходящей через центр тяжести (рисунок 16).

Пусть  $a$  — расстояние между точкой подвеса  $O$  и центром тяжести  $C$ . При отклонении тела на угол  $\Phi$  от положения равновесия возникает момент силы тяжести  $M$ , стремящийся вернуть тело в положение равновесия:

$$M = -mgx = -mga \sin \varphi$$

Для малых углов

$$\sin \varphi \approx \varphi \text{ и } M = -mga \varphi$$

Запишем основной закон динамики вращательного движения твердого тела:

$$J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \varphi, \text{ или } \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga}{J} \cdot \varphi = 0, \quad (3.7)$$

где  $J$  — момент инерции тела относительно оси  $O$ .

Уравнение (3.7), с математической точки зрения тождественно уравнению (3.4). Следовательно, физический маятник будет совершая гармонические колебания частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}} \quad (3.8)$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad (3.9)$$

Маятник называется **математическим**, если размеры тела, подвешенного на нити малы по сравнению с длиной нити  $a$ . Тогда тело можно считать **материальной точкой**. В этом случае  $J = ma^2$  и

$$T = 2\pi \sqrt{a/g} \quad (3.10)$$

При рассмотрении предыдущих примеров не учитывались силы сопротивления, приводящие к затуханию колебаний. При малых отклонениях и скоростях эти силы оказываются пропорциональными скорости тела  $v$ :

$$F_{\text{сопр.}} = -r v = -r \frac{dx}{dt},$$

где  $r$  — коэффициент сопротивления.

С учетом этих сил уравнение движения принимает вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.11)$$

где  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\beta = r/2m$  — коэффициент затухания.

При  $\beta < \omega_0$  решением уравнения (3.11) является функция:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.12)$$

где

Смещение частицы, описываемое формулой (3.12), можно рассматривать как колебание с частотой  $\omega$ , амплитуда которого убывает со временем по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (3.13)$$

При  $\beta \ll \omega_0$  частота затухающих колебаний примерно равна собственной частоте незатухающих колебаний.

Затухание колебаний часто удобно характеризовать безразмерной величиной, называемой **логарифмическим декрементом затухания**.

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \quad (3.14)$$

под которым понимают натуральный логарифм отношения амплитуд, разделенных промежутком времени в один период ( $T$ ).

### 3.1 Лабораторная работа № 05

#### ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

##### 3.1.1 Математический маятник (Задание 1)

Цель работы — Определение ускорения свободного падения путем измерения периода гармонических колебаний математического маятника.

В качестве маятника используется шарик радиусом  $r$  — и массой  $m$ , подвешенный на нити. Расстояние от центра шарика до точки подвеса равно  $\ell$ . Момент инерции шарика относительно точки подвеса равен:

$$J = J_C + m\ell^2 = \left(\frac{2}{5}\right)m r^2 + m\ell^2.$$

Если  $r \ll \ell$ , то  $J \approx m\ell^2$  — и в этом приближении маятник можно рассматривать как математический с периодом колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

Определив период колебаний и длину маятника, можно вычислить  $g$ :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \ell \quad (3.15)$$

Измерение времени колебаний, и числа периодов в работе производится с помощью электронного секундометра. Длина маятника определяется по шкале, укрепленной на стойке прибора.

### Порядок выполнения работы

1. Установить нижний кронштейн так, чтобы линия на кронштейне совпала с чертой, проведенной по диаметру шарика. Измерить по шкале прибора длину  $\ell$  подвеса маятника. Включить прибор в сеть, нажав кнопку «Сеть».
2. Отвести маятник от положения равновесия — на малый угол ( $\approx 5^\circ$ ) и отпустить. Нажать кнопку «Сброс». Отсчитав 10 колебаний по счетчику периодов, нажать «Стоп». Полученные данные записать. Опыт повторить еще два раза, для этого снова нажимают кнопку «Сброс», а потом «Стоп». Определить  $T_{ср}$  и  $\Delta T$ .
3. Измерить по 3 раза периоды малых колебаний еще при четырех длинах маятника от  $\ell_{min} = 15$  см до  $\ell_{max} \approx 53$  см. По результатам измерений построить зависимость  $T^2$  от  $\ell$ .
4. Качественно проверить изохронность колебаний, сравнив периоды колебаний при малых углах отклонений ( $5 - 7^\circ$ ) и больших углах ( $15 - 20^\circ$  и  $(30 - 45)^\circ$ ). При этом  $\ell$  должна быть неизменной.
5. Определить ускорение свободного падения, причем измерение  $T$  производить при максимальной длине маятника. Период колебаний определить как среднее из 10 опытов.

По формуле (3.15) определить  $g$  и вычислить  $\Delta g$ .

Для получения допуска ответьте на вопросы, помещенные после 3.1.2. (задания 2).

### 3.1.2 Оборотный маятник (Задание 2)

Цель работы — определить ускорение свободного падения тел ( $g$ ) с помощью исследования оборотного физического маятника.

Измеряя период колебаний физического маятника  $T$ , можно воспользоваться выражением (3.16) для определения  $g$  (см. формулу 3.9):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{mga}} \quad (3.16)$$

Однако погрешность такого измерения может оказаться довольно большой ввиду того, что трудно сравнительно точно определить величины  $\mathcal{J}$  и  $a$  для тел произвольной формы. Повысить точности измерений можно основываясь на следующих теоретических соображениях. Обозначим величину  $\frac{\mathcal{J}}{ma}$ , имеющую размерность длины —

$\ell_{пр}$ , и назовем ее *приведенной длиной физического маятника*

Подставляя  $\frac{\mathcal{J}}{ma} = \ell_{пр}$  в формулу (3.16), получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_{пр}}{g}} \quad (3.17)$$

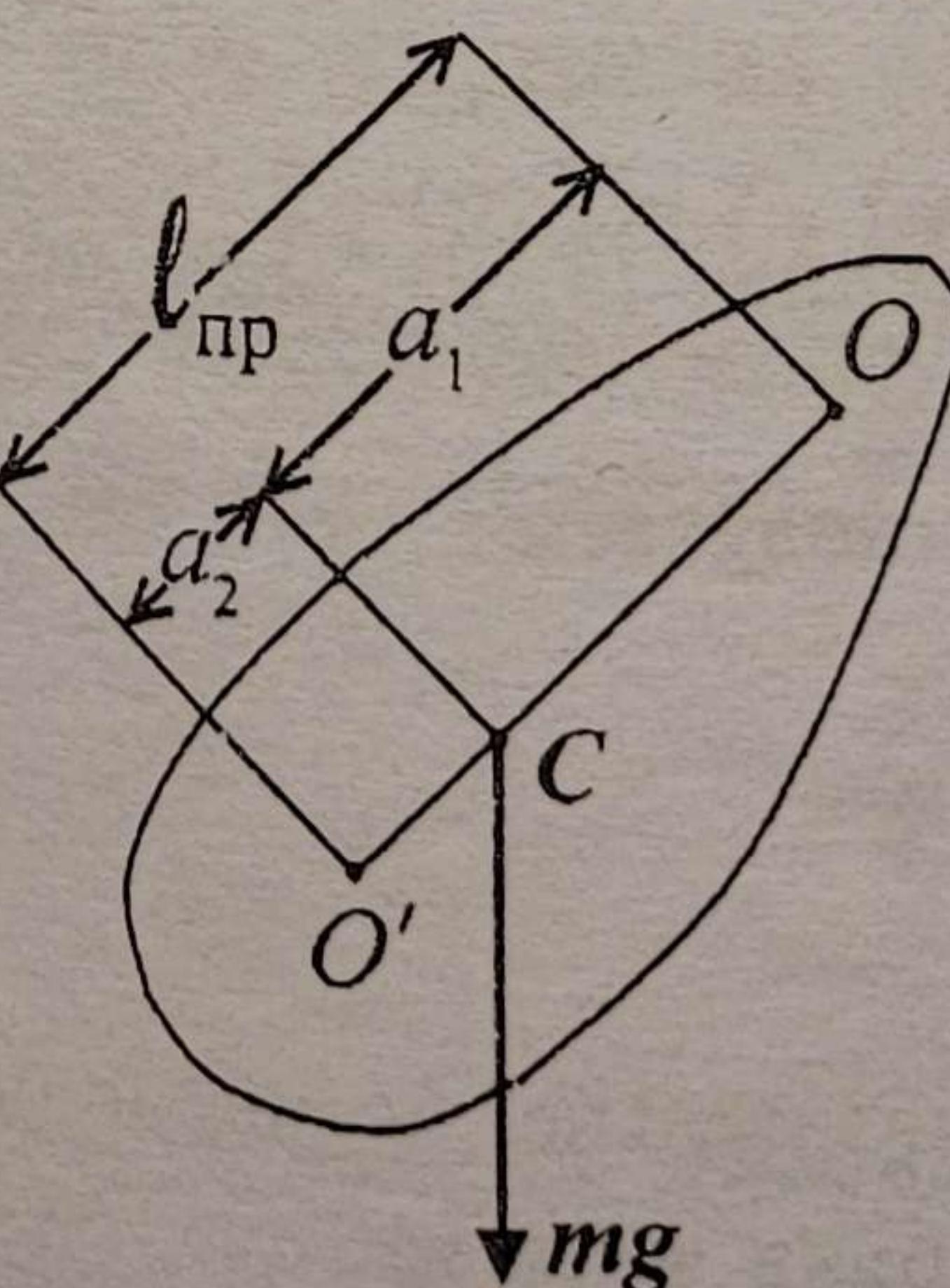


Рисунок 17 – Приведенная длина физического маятника.

Таким образом, физический маятник имеет то же выражение для периода колебаний, что и математический, но с длиной, равной  $\ell_{пр}$ . Точку  $O'$ , отстоящую от точки подвеса ( $O$ ) на расстоянии  $\ell_{пр}$  в направлении, проходящем через центр тяжести  $C$ , называют *центром качания* (рисунок 17).

Если маятник подвесить за центр качания, то его период не изменится, а прежняя точка подвеса станет новым центром качания. Докажем это. Пусть,  $a_1$  и  $a_2$  — расстояния до центра тяжести от точки подвеса и центра качания

соответственно, так что:

$$a_1 + a_2 = \ell_{\text{пр}} . \quad (3.18)$$

Тогда период колебаний маятника при его закреплении в точках  $O$  и  $O'$  будет:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}_O}{ma_1g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_{\text{пр}1}}{g}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}'_O}{ma_2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_{\text{пр}2}}{g}},$$

где  $\mathcal{J}_O$  и  $\mathcal{J}'_O$  моменты инерции маятника относительно осей, проходящих через точки  $O$  и  $O'$ . По теореме Штейнера – Гюйгенса:

$$\mathcal{J}_o = \mathcal{J}_c + ma_1^2 \quad \text{и} \quad \mathcal{J}'_o = \mathcal{J}_c + ma_2^2,$$

где  $\mathcal{J}_c$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр тяжести.

Используя данные соотношения, приведенные длины ( $\ell_{\text{пр}1}$  и  $\ell_{\text{пр}2}$ ) можно представить в виде:

$$\ell_{\text{пр}1} = \frac{\mathcal{J}_O}{ma_1} = a_1 + \frac{\mathcal{J}_c}{ma_1}; \quad (3.19)$$

$$\ell_{\text{пр}2} = \frac{\mathcal{J}'_O}{ma_2} = a_2 + \frac{\mathcal{J}_c}{ma_2}. \quad (3.20)$$

Учитывая, что  $a_2 = \ell_{\text{пр}} - a_1$ , из соотношения (3.19) находим

$a_2 = \frac{\mathcal{J}_c}{ma_1}$ . Подставляя это значение  $a_2$  в (3.20) получаем:

$$\ell_{\text{пр}2} = \frac{\mathcal{J}_c}{ma_1} + a_1 = \ell_{\text{пр}1}.$$

Таким образом, приведенные длины, а следовательно, и периоды колебаний маятника относительно точек  $O$  и  $O'$  одни и те же.

Величина этого общего периода колебаний равна:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_{\text{пр}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{g}}. \quad (3.21)$$

В настоящей работе определяются приведенная длина ( $\ell_{\text{пр}}$ ) и период колебания физического маятника и далее, на основании формулы (3.21), рассчитывается величина ускорения свободного падения ( $g$ ).

На рисунке 18 приведена конструкция маятника, используемого в работе. Такой маятник называется *оборотным*. На стержне закрепляются два груза: один ( $A$ ) — вблизи конца, другой ( $B$ ) — вблизи центра стержня, но дальше середины стержня.

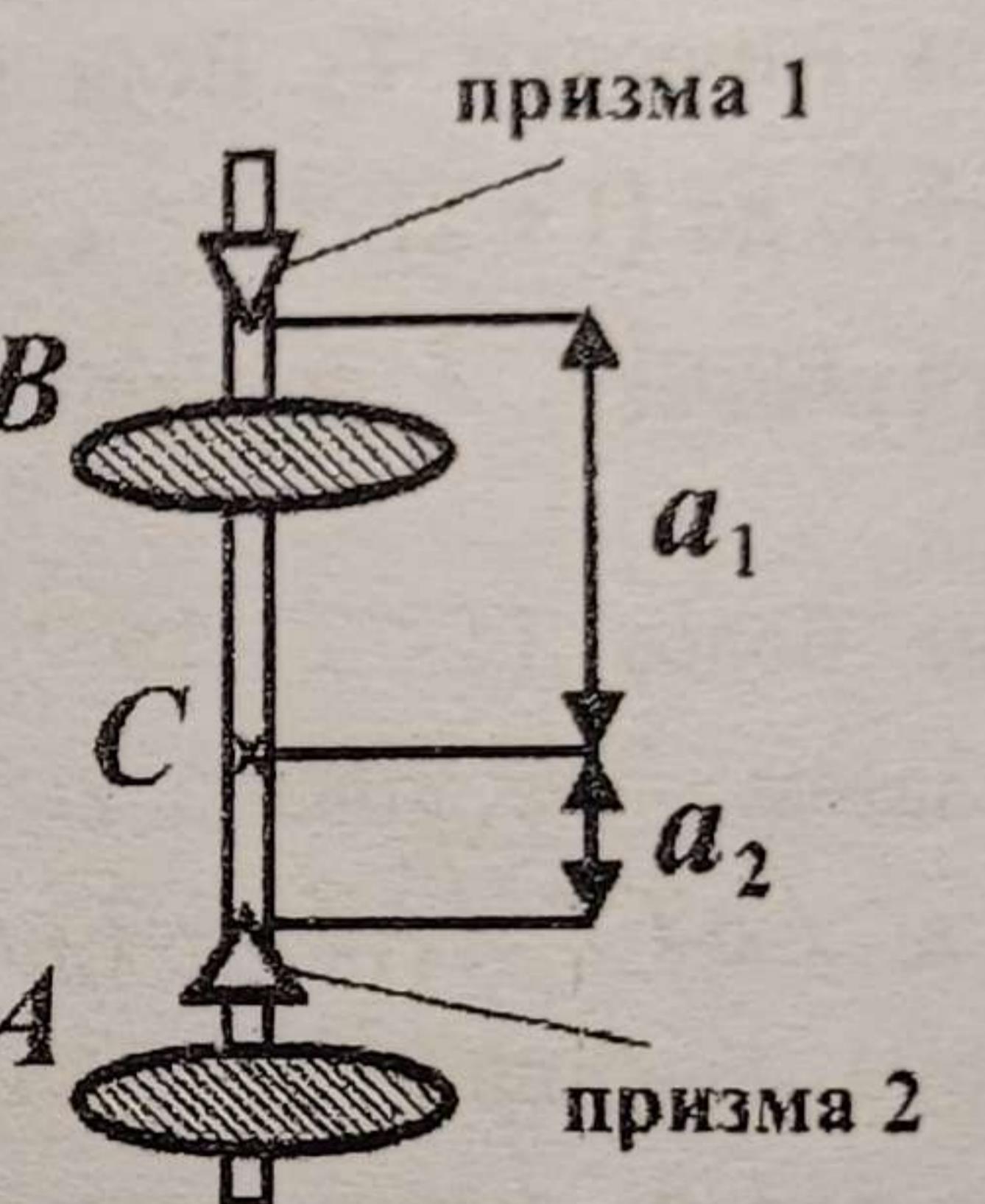


Рисунок 18 – Внешний вид  
оборотного маятника.

друг другу. Перемещая одну из призм вдоль стержня, можно добиться равенства  $T_1(a_1) = T_2(a_2)$  при этом  $a_1 \neq a_2$ . Очевидно, что в этом случае расстояние между призмами будет равно приведенной длине маятника  $\ell_{\text{пр}}$ . Измеряя  $T$ , ускорение  $g$  можно определить по формуле:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \ell_{\text{пр}}. \quad (3.22)$$

### Порядок выполнения работы

1. Закрепить грузы  $A$  и  $B$  и опорные призмы 1 и 2, как показано на рисунке 18.
2. Опереть маятник на призму 1. Нижний кронштейн установить так, чтобы нижний конец маятника перекрывал фотоэлектрический датчик.

3. Отклонить маятник на угол  $3\text{--}5^\circ$  и отпустить.
4. Нажать клавишу «Сброс» и, отсчитав 10 полных колебаний, нажать клавишу «Стоп». Вычислить период колебаний  $T_1 (a_1)$ .

5. Перевернуть маятник, оперев его на призму 2. Положение грузов не изменять. Подогнать положение нижнего кронштейна и, измерив время 10-ти колебаний; вычислить  $T_2 (a_2)$ .

Если  $T_2 > T_1$ , то призму 2 нужно передвинуть дальше от центра масс. Если  $T_2 < T_1$ , то призму 2 сдвигают ближе к центру масс. Передвинув призму в нужном направлении, вновь измеряют  $T_2$ . Если не достигнуто равенство периодов  $T_1$  и  $T_2$  с точностью до  $(1 \div 2) \cdot 10^{-2}$  с, то измерения продолжают, предварительно сдвинув призму 2 в нужном направлении.

6. Когда будет достигнуто расхождение не более  $(1 \div 2) \cdot 10^{-2}$  с, измеряют время 50-ти колебаний на призме 2, а затем – на призме 1. За величину периода принимают среднее  $T_1$  и  $T_2$ , а  $|\Delta T| = |T_1 - T_2|$ .

7. Вычисляют по формуле (3.22) ускорение свободного падения (при условии  $T_1 = T_2$ ), измерив расстояние  $\ell_{\text{пр}} = a_1 + a_2$  между ребрами опорных призм. Вычисляют погрешность  $\Delta g$ .

#### Контрольные вопросы

1. При каких условиях возникает колебательное движение? Каковы отличительные черты этого движения?
2. Запишите закон движения точки при гармонических колебаниях. Дайте определения основным характеристикам колебательного движения.
3. Запишите II закон Ньютона для пружинного маятника. Как выглядит его решение?
4. Что такое математический маятник? Как записывается, уравнение движения математического маятника? По какому закону движется математический маятник?
5. От чего зависит период колебаний математического маятника, физического маятника? Когда физический маятник можно принять за математический?
6. Для чего используются маятники?

7. Что такое физический маятник? Записать уравнение движения физического маятника и его решение. От чего зависит период колебаний физического маятника?
8. Что такое приведенная длина физического маятника?
9. Как устроен обратный маятник и как определяется ускорение свободного падения с помощью этого маятника?
10. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.

## 3.2 Лабораторная работа № 3

### ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

Цель работы — в работе определяют характеристики свободных колебаний физического маятника, и вычисляется ускорение свободного падения.

Физический маятник, используемый в установке, представляет собой металлическую пластину, подвешенную на бифилярном подвесе так, что расстояние между точкой подвеса  $O$  и центром масс  $C$  пластины, равно  $a$  (рисунок 19).

Для измерения амплитуды колебаний имеется шкала, к пластине прикреплен стержень-указатель. Для получения затухающих колебаний маятник дополнительно тормозится электромагнитом, между полюсами которого двигается пластина маятника.

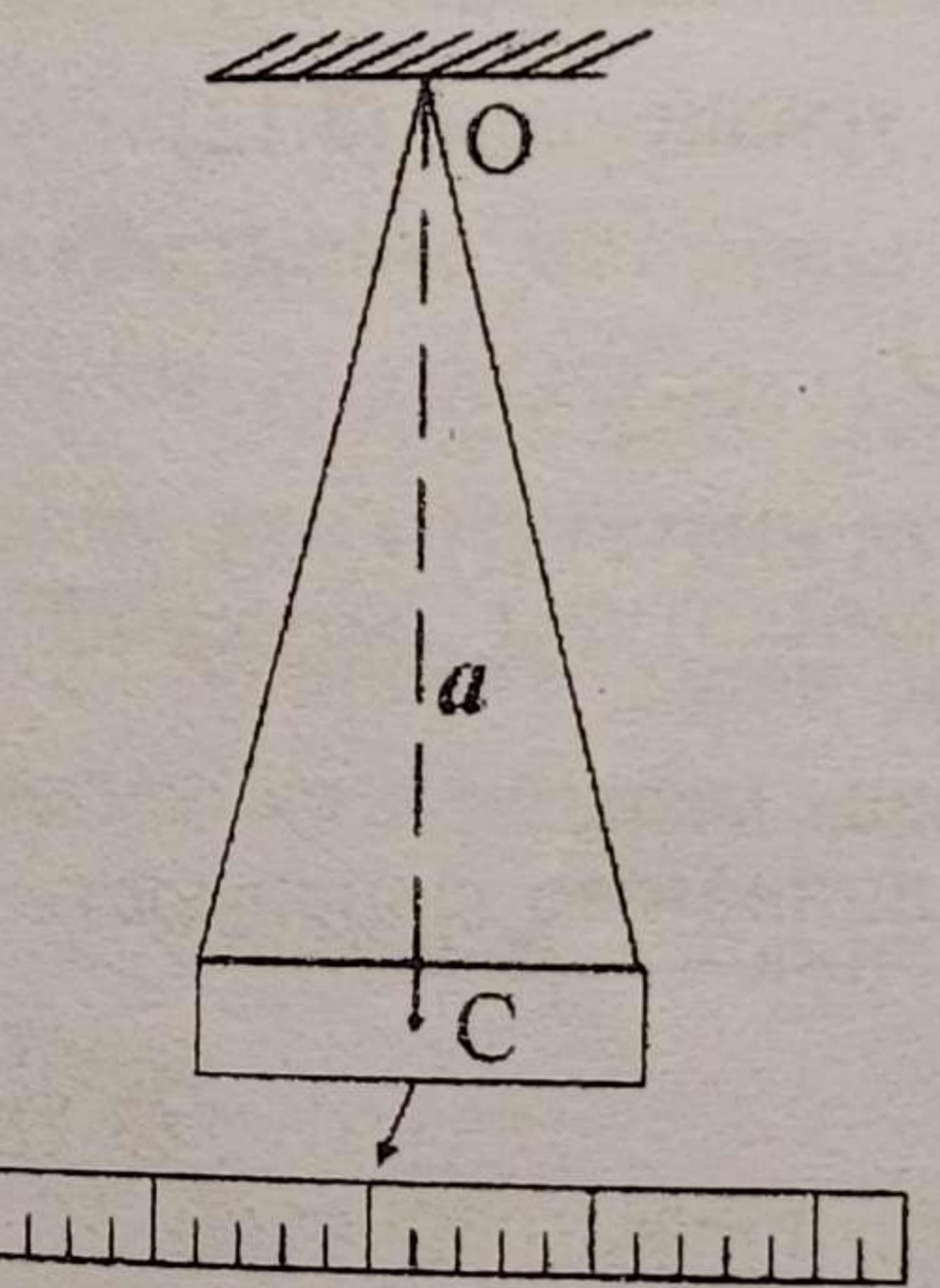


Рисунок 19 – Внешний вид установки.

Период колебаний физического маятника определяется формулой (3.9).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{mga}}, \quad (3.23)$$

где  $\mathcal{J}$  — момент инерции маятника относительно точки подвеса.

По теореме Гюйгенса-Штейнера  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_C + ma^2$ .

Момент инерции  $\mathcal{J}_C$  пластины относительно оси, параллельной оси подвеса и проходящей через центр масс, рассчитывается по формуле:

$$J_C = (m/12) \cdot (b^2 + c^2), \quad (3.24)$$

где  $b$  и  $c$  — ширина и длина пластины.

Масса и размеры пластины указаны на установке.

В нашей установке, как показывает расчет, можно пренебречь величиной  $J_C$  по сравнению с  $ma^2$ . Тогда период колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{a/g}. \quad (3.25)$$

Измерив период колебаний маятника в отсутствии затухания и зная параметры маятника, можно вычислить  $g$ :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{J}{ma} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a. \quad (3.26)$$

Затухающие колебания маятника описываются уравнением (3.12)

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (3.27)$$

где  $A(t) = \Phi_0 e^{-\beta t}$  — закон изменения амплитуды затухающих колебаний.

Если прологарифмировать  $A(t)$ , то получим линейную зависимость:

$$\ln A(t) = \ln \Phi_0 - \beta t. \quad (3.28)$$

Построив зависимость  $\ln A(t)$  как функцию времени  $t$ , можно найти коэффициент затухания  $\beta$  как угловой коэффициент прямой (3.28). Для этого из экспериментальных данных выбирают две точки, принадлежащие этой прямой и отстоящие как можно дальше друг от друга, и вычисляют коэффициент затухания по формуле:

$$\beta = \frac{\ln A_1 - \ln A_2}{t_2 - t_1}. \quad (3.29)$$

Логарифмический декремент затухания вычисляют по формуле (3.14), предварительно измерив период затухающих колебаний.

### Порядок выполнения работы

1. Регулируют положение пластины маятника так, чтобы она при движении не задевала полюсов электромагнита.

2. Отклонив маятник на угол  $\sim 5^\circ$ , измеряют 3 раза время 10–20 полных колебаний маятника и вычисляют средний период незатухающих колебаний  $T$  и находят  $\Delta T$ .

3. Записывают паспортные данные физического маятника и вычисляют по формуле (3.26) ускорение свободного падения.

4. Включают электромагнит и измеряют 3 раза время пяти затухающих колебаний и находят период затухающих колебаний  $T$ .

5. Исследуют изменение амплитуды затухающих колебаний во времени. Для этого маятник отклоняют от положения равновесия на несколько сантиметров и отпускают его. Записывают значение амплитуды через каждый период. Опыт повторяют еще 2 раза, отклоняя маятник на то же самое деление, что и в первом случае. Усредняют отклонения маятника для одинаковых моментов времени ( $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$ ). Строят график зависимости  $\ln A$  от  $t = nT$  и вычисляют  $\beta$  и  $\lambda$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое физический маятник? Запишите уравнение движения и его решение при отсутствии затухания.

2. Запишите закон движения при гармонических колебаниях. Дайте определения основным характеристикам гармонических колебаний.

3. Опишите влияние сил сопротивления на движение физического маятника.

4. Запишите закон движения маятника при затухающих колебаниях. Что такое коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания?

5. Раскройте физический смысл коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания.

6. От чего зависит период колебаний физического маятника при гармонических колебаниях, затухающих колебаниях?

7. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.

8. Выведите формулу (3.29).

## ЛИТЕРАТУРА

1 Валишев, М.Г. Курс общей физики [Текст]: учебное пособие для вузов / М.Г. Валишев, А.А Повзнер. — 2-е изд., стер. — СПб, М., Краснодар : Лань, 2010. — 573 с.

2 Введение в физический практикум. Обработка результатов измерений [Текст]: учебное пособие для заочного отделения / Б.Б. Болотов, В.В. Благовещенский, В.В. Кашмет, Н.Г. Москвин; СПб ГТИ (ТУ). Каф. общей физики. — СПб., 2009. — 15 с.

3 Иродов, И.Е. Механика. Основные законы / И.Е. Иродов — 7-е изд., стереотипн. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 309 с.

4 Савельев, И.В. Курс общей физики [Текст]. В 5-и тт. Т.1. Механика: учебн. пособие для втузов / И.В. Савельев — М.: Наука: Физматлит, 2002. — 336 с.

Кафедра общей физики

Методические указания к лабораторным работам

Механика

Валерий Григорьевич Данильченко,  
Анатолий Данилович Иванов,  
Николай Германович Москвин  
Александр Георгиевич Чибисов

Отпечатано с оригинал-макета. Формат 60x90 1/16  
Печ. л. 5. Тираж 60 экз. Заказ № 91

Санкт-Петербургский государственный технологический институт  
(Технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26  
Типография издательства СПбГТИ(ТУ), тел. 494-93-65