

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

### "ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ И ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ"

#### ЛОГИЧЕСКИЕ (БУЛЕВЫ) ФУНКЦИИ

##### Основные понятия

В курсе математического анализа изучаются функции, определённые на числовой прямой или на отрезке числовой прямой или на плоскости и т.п. Так или иначе область определения – *непрерывное* множество. В курсе дискретной математики изучаются функции, область определения которых – *дискретное* множество. Простейшим (но нетривиальным) таким множеством является множество, состоящее из двух элементов. Таким образом, частным случаем функции  $y=f(x_1;x_2;\dots;x_n)$  является функция, значения которой и значения компонент её аргумента принадлежат множеству  $\{0;1\}$ . Такую функцию называют *логической*. Аргумент логической функции  $(x_1;x_2;\dots;x_n)$  часто называют *двоичным(или булевым)* вектором, а его компоненты – *двоичными(или булевыми) переменными*.

Логическую функцию также называют *логической операцией*, т.к. значения функции и её аргументов принадлежат одному множеству  $\{0;1\}$ . *Знаки логических операций называют логическими связками*.

**Алгебру, носителем которой является множество  $X=(x_1;x_2;\dots;x_n,y)$ , элементы которого принимают значения на множестве  $\{0;1\}$ , а сигнатура которой определена множеством логических связок(логических операций), называют алгеброй логики.**

Два возможных значения логических переменных называют **ИСТИНА (TRUE)** и **ЛОЖЬ (FALSE)**, иногда их называют **ДА** и **НЕТ**, а чаще всего их обозначают **1** и **0**. При этом следует помнить, что эти логические 0 и 1 нельзя трактовать как числа, над ними нельзя производить арифметические действия.

Логическая функция может быть задана четырьмя способами:

- словесно (описанием ситуации),
- алгебраическим выражением,
- таблицей истинности
- электрической схемой, состоящей из контактов переключателей.

Например:

- 1.Лифт можно вызвать, если закрыты двери лифта на первом этаже и на втором этаже и на третьем этаже.
- 2.Если закрытые двери на первом этаже обозначить как  $A = 1$ , на втором –  $B = 1$ , на третьем –  $C = 1$ , возможность вызвать лифт обозначить как  $F = 1$ , логическую функцию  $F$  обозначить знаком умножения " $\times$ ", то алгебраическое выражение будет иметь вид :

$$F = A \times B \times C \quad (7)$$

- 3.В таблицу истинности заносятся все возможные комбинации входных аргументов и соответствующие этим комбинациям значения выходной функции. Входные комбинации записываются в порядке возрастания их значений от всех нулей до всех единиц сверху вниз. Таблица истинности, соответствующая данному примеру будет иметь следующий вид:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

4. Электрическая контактная схема обладает хорошей наглядностью, но может быть легко построена лишь для самых простых логических функций. Для нашего примера эта схема может иметь следующий вид:

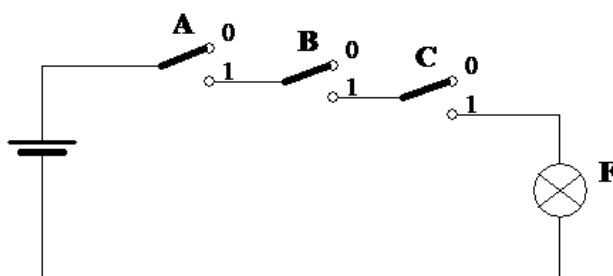


Рисунок 23

Многообразие значений логической функции  $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  определено многообразием значений её аргумента, т.е.  $|y| = 2^{|(x_1; x_2; \dots; x_n)|}$ .

Например, для вектора  $(x_1; x_2; x_3)$  имеем:  $|\{(x_1; x_2; x_3)\}| = 2^3 = 8$ , т.е.  $\{(0; 0; 0); (0; 0; 1); (0; 1; 0); (0; 1; 1); (1; 0; 0); (1; 0; 1); (1; 1; 0); (1; 1; 1)\}$ . Для функции  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_8)$  имеем:  $|y| = 2^8 = 256$ .

Для изображения аргумента логической функции, используют  $n$ -мерный куб с длиной ребра 1. Так, для вектора  $(x_1; x_2; x_3)$ , представленного на рис. 24-а), каждая вершина графа куба имеет единственный набор значений компонент этого вектора. Для вектора  $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ , представленного на рис. 24-б), каждая вершина 4-мерного куба также имеет единственный набор значений компонент вектора.

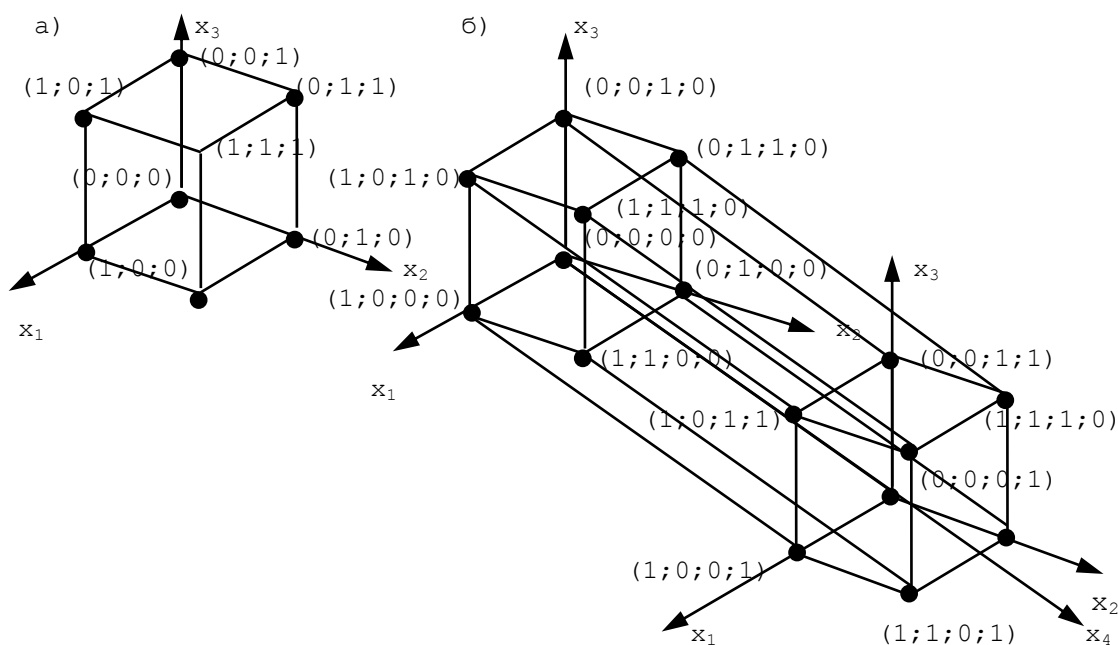


Рисунок 24. Единичные кубы для векторов  $(x_1; x_2; x_3)$  и  $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ .

Булевый вектор  $(x_1; x_2; x_3; x_4)$  часто называют тетрадой, как содержащий четыре компоненты.

Следует обратить внимание, что две вершины куба, принадлежащие одному ребру, отличаются между собой только значениями одной компоненты; четыре вершины, принадлежащие одной плоскости, отличаются между собой только значениями двух компонент булевого вектора.

При табличном задании функции необходимо для каждого набора двоичного вектора, т.е. аргумента логической функции, указать её значение (см. таблицу 1). Если значение функции определено не для всех наборов двоичного вектора, то функция называется частично

определённой. Число строк полностью определённой функции от  $n$  компонентов аргумента равно  $2^n$ .

Таблица 1

$x_1$	$x_2$	.....	$x_n$	$f(x_1; x_2; \dots x_n)$
0	0	.....	0	0
1	0	.....	0	0
0	1	...	0	1
1	1	.....	0	1
.....	.....	.....	.....	.....
1	1	.....	1	0

При аналитическом задании логической функции используют элементарные унарные и бинарные операции, а также правила подстановки и замещения при формировании формул логической функции.

### Описание логической функции одной и двух двоичных переменных

Как уже было отмечено, число логических функций для  $n$  компонентов аргумента определяется выражением:  $2^p$ , где  $p=2^n$ .

Для  $n=1$  число возможных значений логической функции равно 4 (см. табл. 2).

Анализ таблицы 2 позволяет дать определение каждой из четырёх логических функций:

Таблица 2.

X	$y=f(x)$			
	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- $f_0(x)$  - функция-константа "0", т.к. она не изменяет своего значения при изменении аргумента, т.е. ( $y=0$ ), переменная  $x$  для этой функции несущественна;
- $f_1(x)$  - функция повторитель, т.к. она

принимает значения, равные значению аргумента, т.е. ( $y=x$ );

- $f_2(x)$  - функция отрицания, т.к. она принимает значения противоположные значению аргумента, т.е. ( $y=\bar{x}$ ), эта функция может еще обозначаться:  $\neg x$ ,  $\neg x$ ,  $\bar{x}$ ;
- $f_3(x)$  - функция-константа "1", т.к. она не изменяет своего значения при изменении аргумента, т.е. ( $y=1$ ) и, как для функции  $f_0(x)$ , переменная  $x$  для этой функции несущественна.

Все функции таблицы 2 – унарные, т.к. это функции от одной переменной.

Для  $n=2$  число возможных значений логической функции равно 16 (см. табл. 3).

Таблица 3

Аргум.		Функция $y=f_i(x_1, x_2)$															
$x_1$	$x_2$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

В таблице 4 приведены имена всех логических функций.

Таблица 4

№ №	имя логической функции	формула логической функции	“чтение” логической функции
$f_0$	константа “0”	0	“любой ноль”
$f_1$	<b>конъюнкция</b> (логическое “И” совпадение)	$(x_1 \cdot x_2)$	“ $x_1$ и $x_2$ ”
$f_2$	отрицание импликации	$\neg(x_1 \rightarrow x_2) = x_1 \cdot \bar{x}_2 = \neg(\bar{x}_1 \vee x_2)$	“не если $x_1$ , то $x_2$ ”
$f_3$	повторитель первого аргумента	$x_1$	“как $x_1$ ”
$f_4$	отрицание обратной импликации	$\neg(x_2 \rightarrow x_1) = \bar{x}_1 \cdot x_2 = \neg(x_1 \vee \bar{x}_2)$	“не если $x_2$ , то $x_1$ ”
$f_5$	повторитель второго аргумента	$x_2$	“как $x_2$ ”
$f_6$	<b>отрицание эквивалентности</b> (сложение по модулю 2)	$\neg(x_1 \leftrightarrow x_2) = (x_1 \oplus x_2) = (\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2)$	“или $x_1$ , или $x_2$ ”
$f_7$	<b>дизъюнкция</b> (логическое “ИЛИ”, разделение)	$(x_1 \vee x_2)$	“ $x_1$ или $x_2$ ”
$f_8$	<b>отрицание дизъюнкции</b> (стрелка Пирса)	$\neg(x_1 \vee x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	“не $x_1$ и не $x_2$ ”
$f_9$	<b>эквиваленция</b> (равнозначность)	$(x_1 \leftrightarrow x_2) = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2)$	“ $x_1$ как $x_2$ ”
$f_{10}$	отрицание второго аргумента	$\bar{x}_2$	“не как $x_2$ ”
$f_{11}$	обратная импликация	$(x_2 \rightarrow x_1) = \bar{x}_2 \cdot x_1$	“если $x_2$ , то $x_1$ ”
$f_{12}$	отрицание первого аргумента	$\bar{x}_1$	“не как $x_1$ ”
$f_{13}$	<b>прямая импликация</b>	$(x_1 \rightarrow x_2) = \bar{x}_1 \cdot x_2$	“если $x_1$ , то $x_2$ ”
$f_{14}$	<b>отрицание конъюнкции</b> (штрих Шеффера)	$\neg(x_1 \cdot x_2) = x_1 \mid x_2 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$	“не $x_1$ или не $x_2$ ”
$f_{15}$	константа “1”	1	“любая единица”

Перечислим 7 важнейших функций:

1)  $f_1$  - конъюнкция (функция **И**), конъюнкция – это фактически обычное *умножение* (нулей и единиц). Иногда эту функцию обозначают  $x_1 \& x_2$  или  $x_1 \square \wedge x_2$ .

2)  $f_7$  - дизъюнкция (функция **ИЛИ**).

3)  $f_{13}$  - импликация (следование).

Иногда импликацию обозначают  $x_1 \supset x_2$ , это очень важная функция, особенно в логике. Ее можно рассматривать следующим образом: если  $x_1 = 0$  (т. е.  $x_1$  “ложно”), то из этого факта можно вывести и “ложь”, и “истину” (и это будет правильно), если  $x_2 = 1$  (т. е.  $x_2$  “истинно”), то истина выводится и из “лжи” и из “истины”, и это тоже правильно. Только вывод “из истины ложь” является неверным.

4)  $f_6$  - сложение по модулю 2. Иногда эту функцию обозначают  $x_1 \Delta x_2$  или  $x_1 \oplus x_2$ .

5)  $f_9$  - эквивалентность или подобие. Эта функция  $f_9 = 1$  тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$ . Иногда эту функцию обозначают  $x_1 \equiv x_2$  или  $x_1 \sim x_2$ .

6)  $f_{14}$  - штрих Шеффера.

7)  $f_8$  - стрелка Пирса (иногда эту функцию называют штрих Лукасевича).

Анализ логических функций одной и двух переменных показывает, что среди множества значений существуют функции от меньшего числа переменных. Так, для  $n=2$  имеем:  $f_0(x_1; x_2)$  и  $f_{15}(x_1; x_2)$  вообще не зависят от двоичных переменных, а функции  $f_3(x_1; x_2)$ ,  $f_5(x_1; x_2)$ ,  $f_{10}(x_1; x_2)$  и  $f_{12}(x_1; x_2)$  зависят только от значений одной переменной.

Функция, которая сводится к зависимости от меньшего числа двоичных переменных, называется вырожденной, а функция, существенно зависящая от всех двоичных переменных, - невырожденной.

Двоичная переменная  $x_i$  в функции  $f(x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; \dots; x_n)$  называется фиктивной, если выполняется условие:

$$f(x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; 0; x_{i+1}; \dots; x_n) = f(x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; 1; x_{i+1}; \dots; x_n).$$

Удаление фиктивной переменной упрощает анализ функции, а её введение позволяет всякую функцию сделать функцией от большего числа переменных.

### Суперпозиция логических функций. Формулы

Часто рассматриваются функции от функций, т. е. *суперпозиции* перечисленных выше функций. Функция  $f$ , получаемая из функций  $f_1; f_2; \dots; f_n$  с помощью операций подстановки их друг в друга и переименования аргументов, называется суперпозицией функций.

Алгебраическое выражение, описывающее логическую функцию и содержащее только двоичные переменные и логические связки, называют формулами  $F$  над  $F_0$ , где  $F_0 \subseteq \square$  сигнатура (множество операций) алгебры логики. Двоичные переменные иногда называют формулами глубины 0, а элементарные формулы, аргументами которых являются только двоичные переменные, - формулами глубины 1. При этом последовательность действий указывается (как обычно) скобками. Исключение составляет конъюнкция (которая на самом деле является обычным умножением в двоичной системе). Поэтому конъюнкция совершается первой даже если отсутствуют скобки. Например, запись  $x_1 \& x_2 \vee x_2 \& x_3$  означает  $(x_1 \& x_2) \vee (x_2 \& x_3)$ .

Всякая формула, выражающая функцию  $f$  как суперпозицию других функций  $f_1; f_2; \dots; f_n$ , задаёт способ её вычисления: формулу можно вычислить, только если уже вычислены значения всех её подформул. Значение подформулы можно вычислить по известному набору значений двоичных переменных.

По каждой формуле можно восстановить таблицу логической функции, но не наоборот, т.к. каждой логической функции можно представить несколько формул.

Формулы  $F_i$  и  $F_j$  представляющие одну и ту же логическую функцию  $f_i$ , называются эквивалентными или равносильными. Так, эквивалентными формулами являются:

$$f_8(x_1; x_2) = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) = \overline{(x_1 \vee x_2)} = x_1 \downarrow x_2;$$

$$f_{14}(x_1; x_2) = (\bar{x}_1 \vee x_2) = \overline{(x_1 \cdot x_2)} = x_1 \uparrow x_2.$$

Равенство  $F_i = F_j$  означает, что формулы  $F_i$  и  $F_j$  описывают одну и ту же логическую функцию.

Если какая-либо формула  $F$  содержит в качестве подформулы  $F_i$ , то замена  $F_i$  на эквивалентную  $F_j$  не изменяет значения формулы  $F$  при любом наборе булевого вектора, но изменяет форму её описания. Вновь полученная формула  $F'$  эквивалентна формуле  $F$ .

При формировании формул следует придерживаться следующих правил

Число левых скобок равно числу правых скобок;

Нет двух стоящих рядом логических связок, т.е. между ними должны быть формулы;

Нет двух стоящих рядом формул, т.е. между ними должны быть логические связки;

Логическая связка “ $\neg$ ” сильнее любой двухместной операции и выполняется прежде всего;

Логическая связка “ $\&$ ” сильнее любой двухместной логической связки;

Эти правила облегчают запись формул и их преобразование.

Из перечисленных функций особую роль играют три функции, а именно конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, поэтому рассмотрим более подробно их свойства.

### Булева алгебра и минимизация булевых функций

Алгебру, носителем которой является множество  $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n, y\}$ , элементы которого принимают значения на множестве  $\{0; 1\}$ , а сигнатура которой определена логическими операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания называют булевой алгеброй в честь английского математика Дж. Буля.

Таким образом булева алгебра есть:  $A = \langle X; \&; \vee; \neg; 0; 1 \rangle$ ,

где:

$X$  - множество, элементы которого принимают значения “1” или “0”;

$\neg$  - унарная операция отрицания значения  $x$ ;

$\&$  - бинарная операция конъюнкции двух элементов множества  $X$ ;

$\vee$  - бинарная операция дизъюнкции двух элементов множества  $X$ ;

Особая роль двух функций (из этих трех) определяется тем обстоятельством, что определение этих функций легко может быть перенесено на любое число переменных:

**Конъюнкцией  $n$  переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \& x_2 \dots \& x_n$  называется функция, которая принимает значение 1, если и только если все переменные равны 1 (и, значит, равна 0, если хотя бы одна из этих переменных равна 0).**

**Дизъюнкцией  $n$  переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \dots \vee x_n$  называется такая функция, которая равна 0 если и только если все переменные равны 0 (и, значит, равна 1 тогда и только тогда, когда хотя бы одна переменная равна 1).**

Из этих определений видно, что конъюнкция и дизъюнкция *коммутативны*, т.е. обе функции не зависят от порядка переменных. Опираясь на законы булевой алгебры, можно выполнять эквивалентные преобразования любых алгебраических выражений, усложняя или упрощая их описание. Эквивалентные преобразования алгебраических выражений необходимы для поиска наименьшего числа вычислительных операций или достижения результатов вычислений за меньшее число шагов. Последовательное применение законов булевой алгебры, формирующее минимальное по вычислительной сложности алгебраическое выражение, называют стратегией преобразования. Для облегчения исполнения преобразований формул булевой алгебры в единой таблице представлены основные законы и правила (см. табл. 5).

Таблица 5

Наименование правила	закона,	Эквивалентные формулы
1. коммутативности		1. $(x_1 \vee x_2) = x_2 \vee x_1$ ; $(x_1 \cdot x_2) = x_2 \cdot x_1$ ;
2. ассоциативности		2. $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$ ; $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$ ;
3. дистрибутивности		3. $x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$ ; $x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3)$ ;
4. идемпотентности		4. $x \vee x = x$ ; $x \cdot x = x$ ;
5. поглощения		5. $x_1 \vee (x_1 \cdot x_3) = x_1$ ; $x_1 \cdot (x_1 \vee x_3) = x_1$ ;
6. противоречия		6. $x \vee \bar{x} = 1$ ; $x \cdot \bar{x} = 0$ ;
7. де Моргана		7. $\overline{(x_1 \vee x_2)} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ ; $\overline{(x_1 \cdot x_2)} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ ;
8. свойство "1"		8. $x \vee 1 = 1$ ; $x \cdot 1 = x$ ;
9. свойство "0"		9. $x \vee 0 = x$ ; $x \cdot 0 = 0$ ;
10. двойное отрицание		10. $\overline{(\bar{x})} = x$ .

Рассмотрим стратегию преобразования формулы F:

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_3) \cdot \overline{(x_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee x_2 \cdot x_3)}$$

1) выполним преобразование по закону дистрибутивности

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee (\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_1 \cdot x_3) \cdot \overline{(x_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee x_2 \cdot x_3)}$$

2) используем закон противоречия

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{(x_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee x_2 \cdot x_3)}$$

3) воспользуемся законом де Моргана

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{(x_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3))} \cdot \overline{(x_2 \cdot x_3)});$$

4) повторим использование закона де Моргана

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot ((\bar{x}_1 \vee \overline{(x_2 \vee x_3)}) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3));$$

5) используем еще раз закон де Моргана

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot ((\bar{x}_1 \vee (\overline{(\bar{x}_2)} \cdot \overline{(x_3))}) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3));$$

6) используем закон двойного отрицания

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$$

7) выполним преобразование по закону дистрибутивности

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$$

8) используем закон идемпотентности

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee (\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$$

9) выполним преобразование по закону дистрибутивности

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_3;$$

10) используем закон поглощения и идемпотентности

$$F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3;$$

Итак, сложное алгебраическое выражение в результате эквивалентных преобразований, содержит меньшее число операций для тех же трех элементов множества  $x_1, x_2, x_3$ .

Используя некоторые дополнительные преобразования, можно еще упростить формулу F.

11) выполним преобразование по закону дистрибутивности

$$F = x_2 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3);$$

12) исполним процедуру обобщенного склеивания и поглощения

$$F = x_2 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_3) = x_2 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3);$$

Окончательное выражение формулы имеет вид:  $F = x_2 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3)$ .

На шаге 12) было использовано одно из правил Блейка-Порецкого, а именно обобщенного склеивания:

Если  $K_1$  и  $K_2$  - какие-то логические функции, тогда:

$$x \cdot K_1 \vee \bar{x} \cdot K_2 = x \cdot K_1 \vee \bar{x} \cdot K_2 \vee K_1 \cdot K_2,$$

Следствием из этого правила являются следующие выражения:

$$x \cdot K \vee \bar{x} \cdot K = K; \quad x \vee \bar{x} \cdot K = x \vee K.$$

При этом  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  быть как логическими функциями, так и

простыми переменными, что можно представить, например, в следующих равнозначных записях:

$$x \cdot y \vee \bar{x} \cdot y = y \quad \text{или} \quad x \cdot y \vee \bar{x} \cdot y = y \quad \text{или} \quad x \cdot y \vee \neg x \cdot y = y$$

Точно также равнозначными являются записи:

$$\overline{a \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \wedge \bar{d})} = \bar{a} \vee (\bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{c}} \vee \bar{\bar{d}}) = \bar{a} \vee (b \wedge c \vee d)$$

и

$$\neg(a \& (\neg b \vee \neg c \& d)) = \neg a \vee (\neg \neg b \& \neg \neg c \vee \neg d).$$

### Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

*Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза. Например,  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$  является простой конъюнкцией.*

*Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция простых конъюнкций. Например,  $\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2$  является ДНФ.*

*Простой дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза. Например,  $x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$  является простой дизъюнкцией.*

*Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция простых дизъюнкций. Например,  $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 \vee x_3)$  – КНФ.*

### УКАЗАНИЯ

**Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:**

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. – М.: Энергия, 1980. – 814 с.
2. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика: Учебник для вузов. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 544 с.
3. Белоусов А.И., Ткачев С.В. Дискретная математика: Учеб. для вузов/ под. ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 744 с.
4. Пономарев В.Ф. Основы дискретной математики. Учебное пособие. -Калининград: КГТУ, 1997. – 152 с.

### ЗАДАНИЕ

**Опираясь на законы булевой алгебры, выполнить эквивалентные преобразования алгебраических выражений.**



**Вариант № 1.**

1.  $((p \vee q) \vee r) \vee (p \wedge r)$

2.  $(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$

**Вариант № 2.**

1.  $(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$

2.  $a \wedge ((a \wedge b) \vee (\bar{b} \wedge c) \vee (\overline{b \vee (c \wedge d)}))$

**Вариант № 3.**

1.  $(a \vee (\bar{b} \wedge c \wedge d)) \wedge (\overline{a \vee c})$

2.  $((a \wedge \bar{b}) \vee c) \wedge ((\bar{a} \vee b) \vee \bar{c})$

**Вариант № 4.**

1.  $(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{a}) \vee (c \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge b) \vee (c \wedge b) \vee \bar{c}$

2.  $((a \wedge \bar{b}) \vee c) \wedge ((\bar{a} \vee b) \vee \bar{c})$

**Вариант № 5.**

1.  $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4)$

2.  $(a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c})$

**Вариант № 6.**

1.  $((\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \bar{a}) \wedge a \vee (\overline{a \wedge b})$

2.  $(\overline{a \wedge b}) \vee (c \wedge (b \vee d)) \vee c$

**Вариант № 7.**

1.  $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge (\bar{b} \wedge c)) \vee (a \wedge \bar{b})$

2.  $\bar{a} \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee b$

**Вариант № 8.**

1.  $(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{a} \vee c) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge (a \vee \bar{c}) \wedge (b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee c)$

2.  $(\overline{a \wedge b \wedge c}) \wedge ((a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}))$

**Вариант № 9.**

1.  $(\overline{a \vee b}) \vee (\overline{a \vee c}) \vee (\bar{a} \vee (b \wedge c))$

2.  $(\bar{a} \vee b) \wedge (\overline{a \vee c}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\overline{a \vee c})$

**Вариант № 10.**

1.  $(\bar{a} \vee b) \wedge (\overline{a \vee c}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\overline{a \vee c})$

2.  $(\overline{a \vee b}) \vee (\overline{a \vee c}) \vee (\bar{a} \vee (b \wedge c))$

**Вариант № 11.**

1.  $(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (c \wedge (b \vee d)) \vee c$

2.  $(\overline{a \vee (a \wedge \bar{b})}) \vee b$

**Вариант № 12.**

1.  $((\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee a) \vee \bar{a} \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$

2.  $(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (c \wedge (b \vee d)) \vee c$

**Вариант № 13.**

1.  $(a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (\overline{a \wedge \bar{b} \wedge c})$

2.  $(\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3}) \vee (\overline{x_1 \vee x_2}) \vee x_3$

**Вариант № 14.**

1.  $(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{a}) \vee (c \wedge \bar{a}) \vee (\overline{c \wedge b}) \vee c$

2.  $((a \wedge \bar{b}) \vee c) \wedge ((\bar{a} \vee b) \vee \bar{c})$

**Вариант № 15.**

1.  $\bar{a} \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c)) \vee (b \vee (c \wedge a))$

2.  $(\overline{a \vee (b \wedge c \wedge d)}) \wedge (a \vee c)$

**Вариант № 16.**

1.  $(\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})$

2.  $(a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$

**Вариант № 17.**

1.  $((p \vee q) \vee r) \vee (\overline{p \wedge r})$

2.  $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3})$

**Вариант № 18.**

1.  $(x_1 \vee x_2) \vee (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_3) \vee x_3$

2.  $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee (\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3})$

**Вариант № 19.**

1.  $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee (\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3})$

2.  $(\bar{a} \vee b) \wedge (\overline{(a \vee c) \wedge (a \vee b)})$

**Вариант № 20.**

1.  $(\bar{a} \vee b) \wedge ((\overline{a \vee c}) \wedge (\overline{a \vee b}))$

2.  $((\overline{a \vee b}) \wedge (\overline{a \vee b})) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})$

**Вариант № 21.**

1.  $(\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\overline{a \vee b \vee c})$

2.  $(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee a) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$

**Вариант № 22.**

1.  $(\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\overline{a \wedge \bar{b} \wedge c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\overline{a \wedge b \wedge c})$

2.  $(x \wedge \bar{y} \vee x \wedge (\overline{y \vee x \wedge z})) \wedge (x \wedge (\bar{y} \vee z) \vee y \wedge z)$

**Вариант № 23.**

1.  $(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{a}) \vee (c \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge b) \vee (c \wedge b) \vee \bar{c}$

2.  $(\bar{a} \vee b) \wedge (\overline{a \vee c}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (\overline{a \vee c})$

**Вариант № 24.**

1.  $(x \wedge \bar{y} \vee (\overline{x \vee y \wedge z}))$

2.  $(x \wedge y \vee x \wedge \bar{y}) \wedge (\overline{y \vee z}) \vee (\overline{z \wedge y})$

**Вариант № 25.**

1.  $(\overline{x_1 \wedge x_2})(\overline{x_2 \vee x_1})$

2.  $(\overline{(x \vee y) \wedge (\overline{x \vee y}))} \wedge (\overline{x \vee y \vee z})$

## ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

### Цель работы:

Целью работы является изучение основ алгебры логики и особенностей булевой алгебры и минимизация булевых функций.

### Задание на работу:

Используя методические указания, освоить последовательное применение законов булевой алгебры, формирующее минимальное по вычислительной сложности алгебраическое выражение

Упростить следующее выражение и указать, какие правила и законы булевой алгебры были применены на каждом шаге преобразований:

### Решение:

$$\begin{aligned} & \overline{((a \vee b) \wedge \bar{c}) \vee ((a \vee c) \wedge \bar{b})} = \\ & = \overline{((a \vee b) \wedge \bar{c})} \wedge \overline{((a \vee c) \wedge \bar{b})} = \\ & = (\overline{(a \vee b)} \vee \bar{c}) \wedge (\overline{(a \vee c)} \vee \bar{b}) = \\ & = (\bar{a} \wedge \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{c} \vee \bar{b}) = \\ & = ((\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \bar{c}) \wedge ((\bar{a} \wedge \bar{c}) \vee \bar{b}) = \\ & = (((\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{c})) \vee (((\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \bar{c}) \wedge \bar{b}) = \\ & = ((\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{a} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{c} \wedge \bar{a} \wedge \bar{c})) \vee ((\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{b}) \vee (\bar{c} \wedge \bar{b})) = \\ & = ((\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{c} \wedge \bar{a} \wedge \bar{c})) \vee ((\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{b}) \vee (\bar{c} \wedge \bar{b})) = \\ & = ((\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge 0)) \vee ((\bar{a} \wedge 0) \vee (\bar{c} \wedge \bar{b})) = \\ & = ((\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee 0) \vee (0 \vee (\bar{c} \wedge \bar{b})) = \\ & = (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{c} \wedge \bar{b}) \end{aligned}$$

Шаги преобразования исходного выражения:

1. правило де Моргана
2. правило де Моргана
3. закон двойного отрицания
4. правило де Моргана
5. закон дистрибутивности
6. закон дистрибутивности
7. закон идемпотентности
8. закон противоречия
9. свойство «0»
10. свойство «0»

### Вывод:

В результате проведенных преобразований исходное выражение булевой функции приведено к дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).