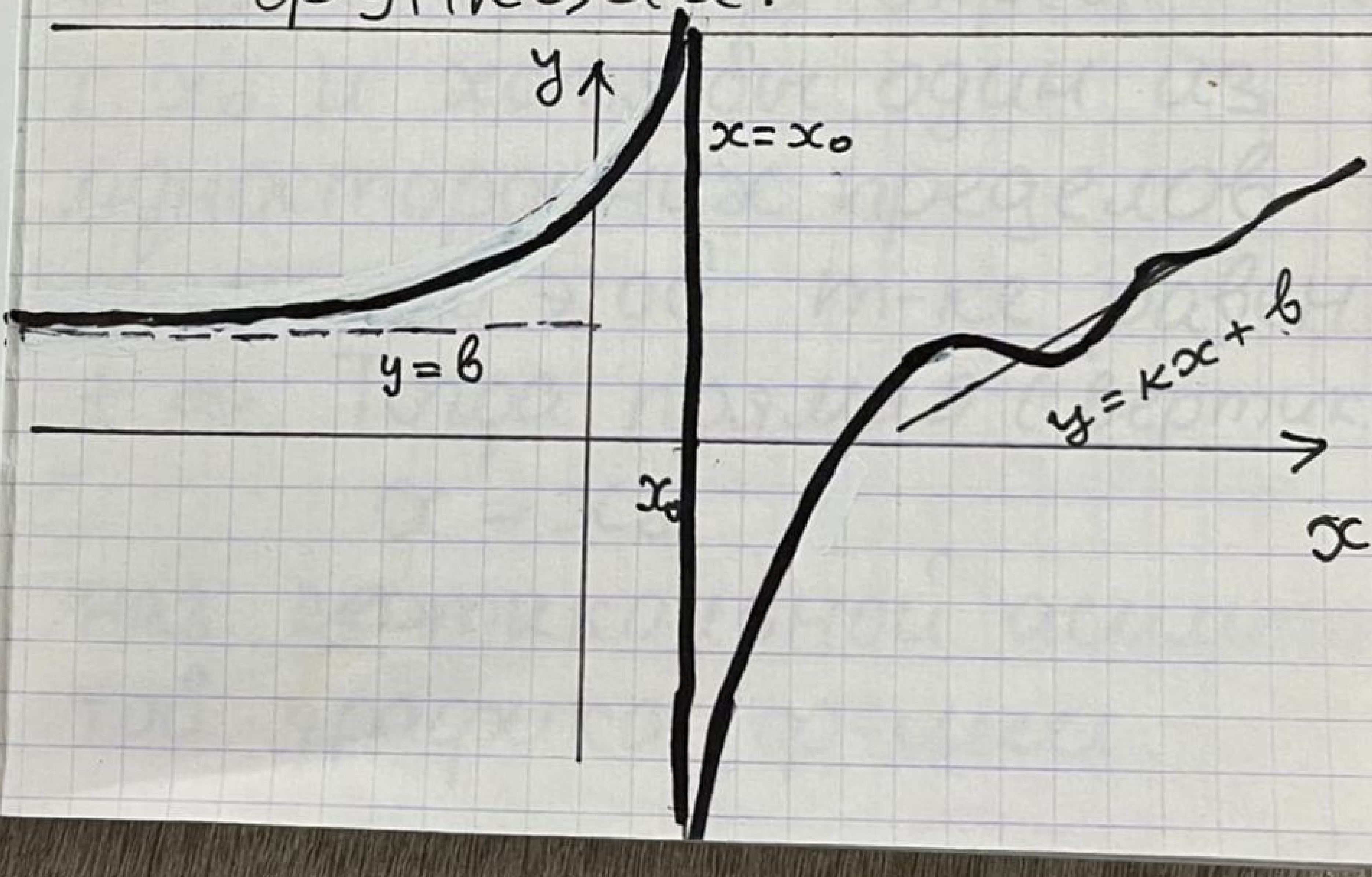
V. Асимптоты графика функции.



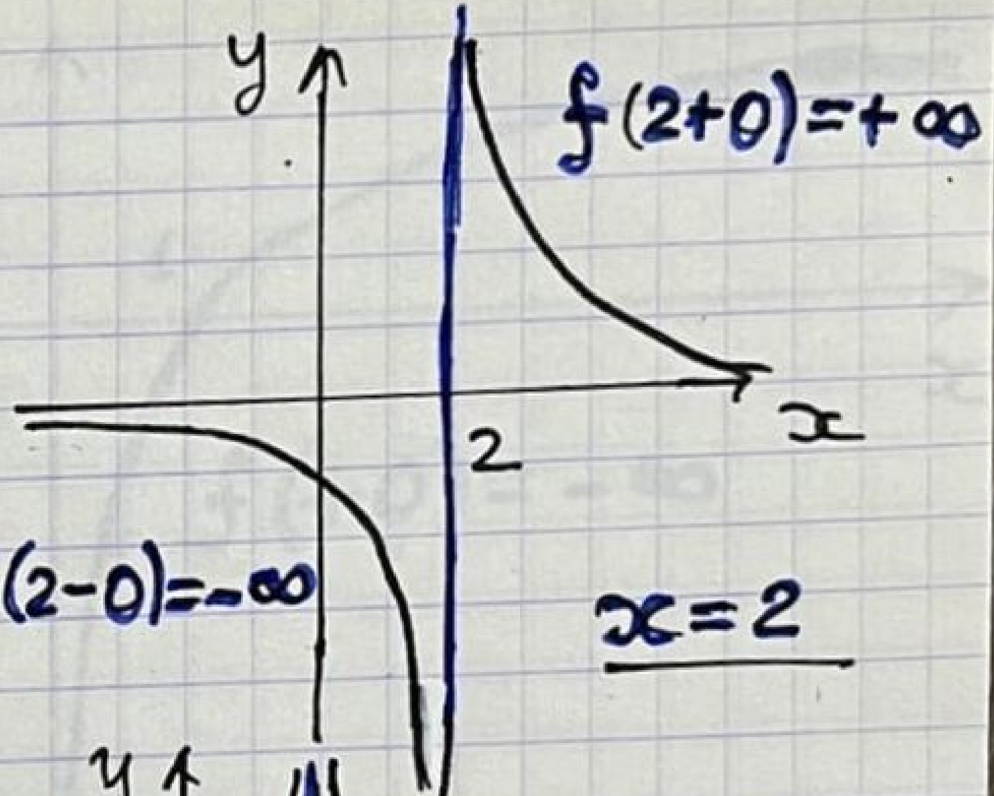
0.5. $\exists$ f опр-на в $\mathring{U}(x_0)$ или в односторонней окрестности т. x_0 и хотя бы один из односторонних пределов ф-ции в этой т-ке равен $\pm\infty$. Тогда прямая (вертик.)

$$x = x_0$$

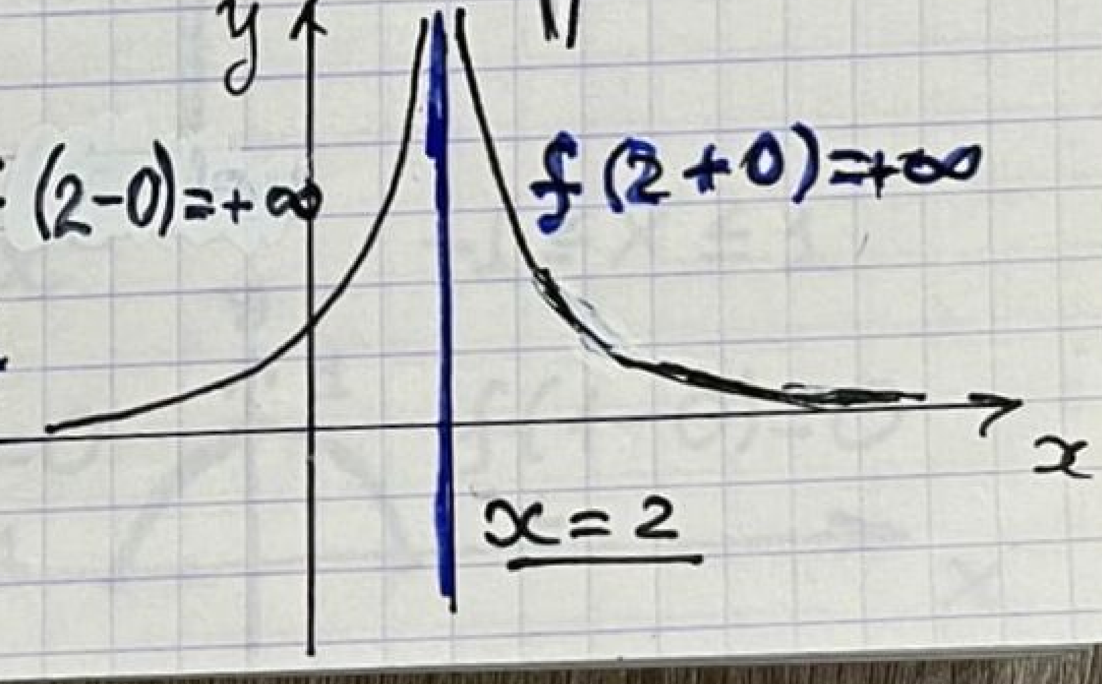
наз. вертикальной асимптотой графика ф-ции.

Примеры.

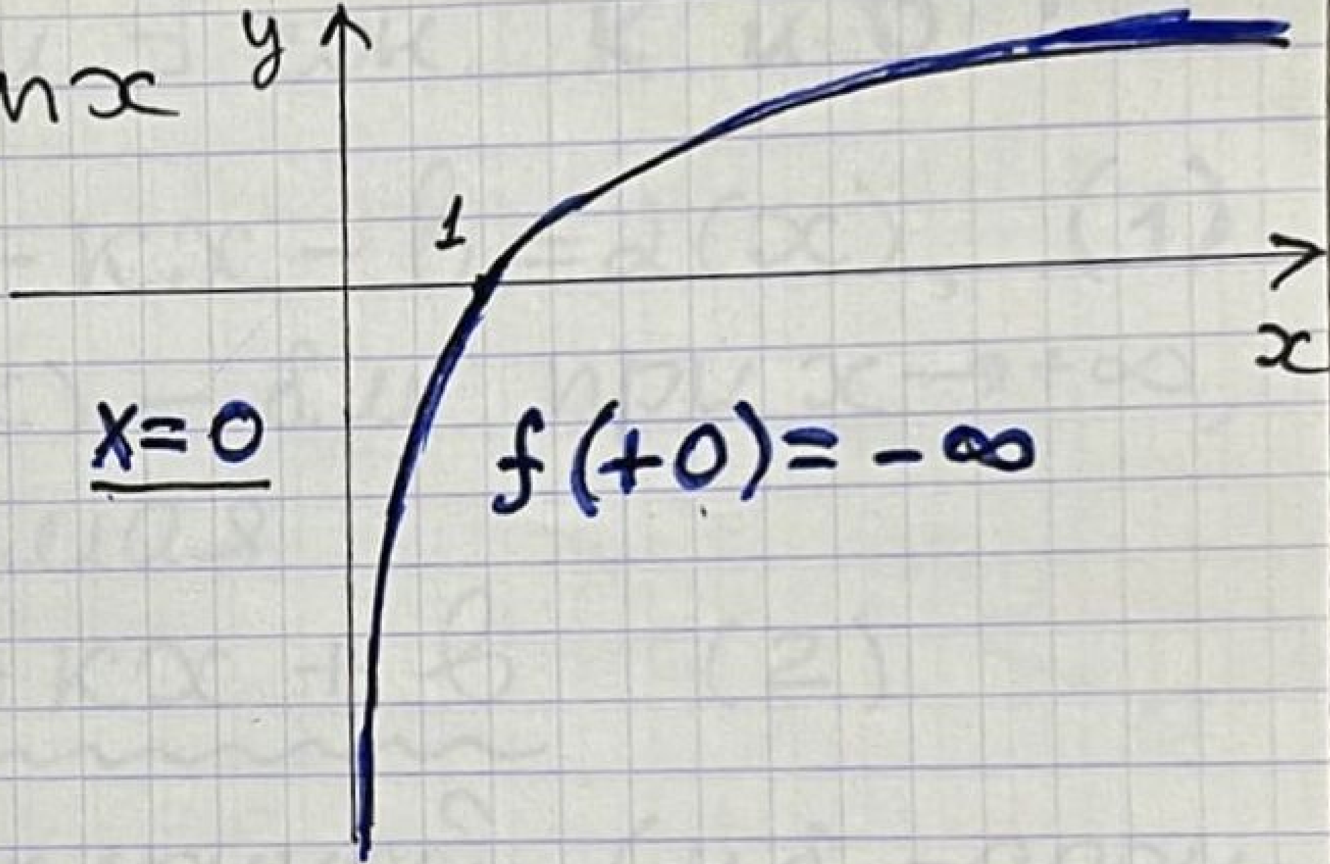
1) $y = \frac{1}{x-2}$



2) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$



3) $y = \ln x$

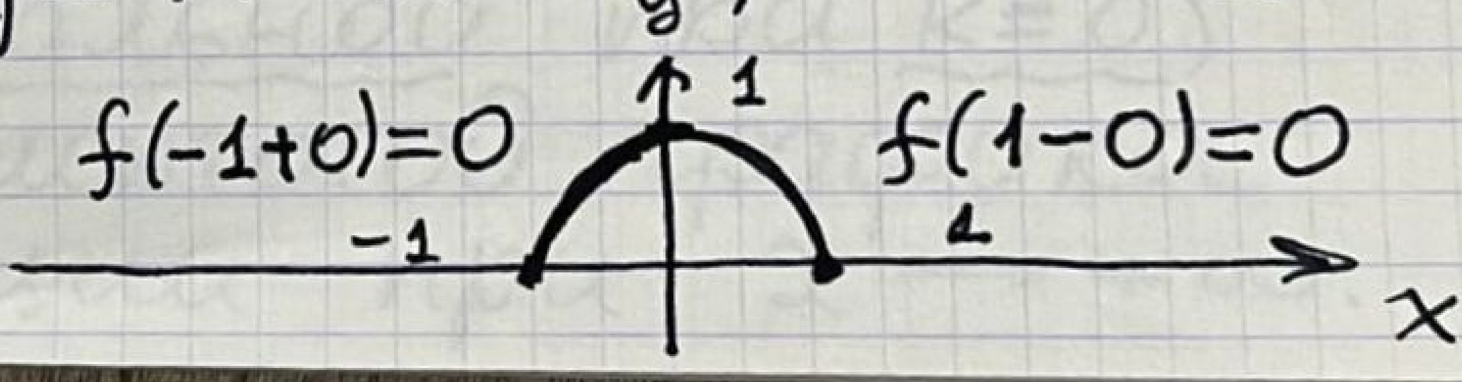


$\underline{x=0}$

$f(+0) = -\infty$

4) $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$

$f(-1+0) = 0$



$f(1-0) = 0$

О.6. Если $\exists$ кон. k и b:

$$f(x) - kx - b = \alpha(x), \quad (1)$$

где $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to +\infty$, то прямая

$$\underline{y = kx + b} \quad (2)$$

наз. наклонной (м.б., – горизонтальной при $\underline{k=0}$) асимптотой графика ф-ции при $x \to +\infty$.

аналогічно при $x \to -\infty$.

Ф-ли, для вичислення к і в:

$$k \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\alpha(x)}{x}}_{\to 0} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx - \overbrace{\alpha(x)}^{\to 0} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right)$$

$$\begin{cases} k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} & (3) \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) & (4) \end{cases}$$

<u>Зам.</u> аналогично при $x \to -\infty$.

<u>Пример</u> $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

$$k \overset{(3)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{(x^3 - 1)x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^4}\;1}{\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\cancel{x^4}}$$

$$\underline{k = 1}$$

$$b \overset{(4)}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3-1} - 1\cdot x\right) = \{\infty - \infty\}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - x^4 + x}{x^3-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3-1} = 0$$

$$\underline{b = 0}$$

$\boxed{y = x}$ – асимптота

VI. Полное исследование ф-ции и построение графика

План.

1. О.О.Ф.
2. периодичность; четность-нет.
3. Точки разрыва.
4. Вертикальные асимптоты
5. Наклонные (горизонтальные) асимптоты.

$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in$ O.O.Φ.

$f(-x) = -f(x)$

$T > 0$

$f(x+T) = f(x)$

$\forall x \in$ O.O.Φ.

$y = e^{\sin x}$

6. Монотонность и экстремумы

7. Направление выпуклости и т-ки перегиба.

8. Доп. т-ки.

9. Построение графика.

Примеры

① $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$

1) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Ф-я не явл. периодической.

$$\cancel{y(-x)=\frac{(-x)^4}{(-x)^3-1}=\frac{x^4}{-x^3-1}}$$

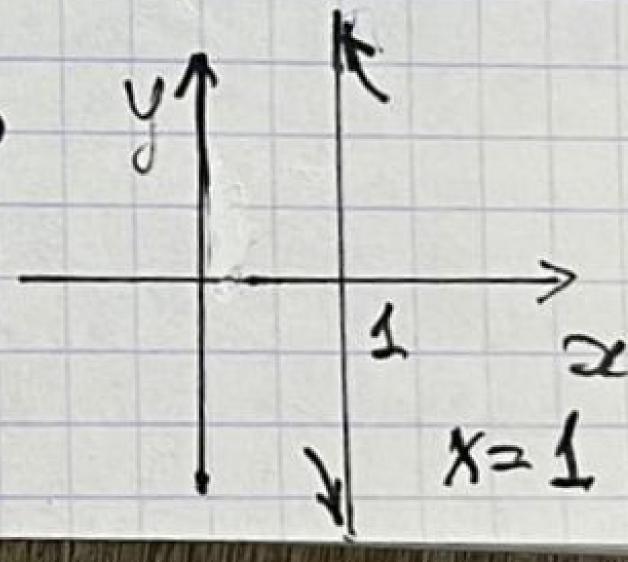
$$\cancel{y(-x)\neq y(x);\quad y(-x)\neq -y(x)}$$

ф-я общего вида, т.к. О.О.Ф. несимметрична относит. 0.

3) т-ка разрыва: $x_0=1$

4) $$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^4}{x^3-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^4}{x^3-1}=+\infty$$



$\underline{x=1}$ – вертикальная асимптота

5) $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{(x^3-1)x}=\underline{\underline{1=k}}$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=\underline{\underline{0}}$

$\underline{=b}$ $\Longrightarrow$ $y=kx+b$, т.е.

$\underline{y=x}$ – наклонная асимптота при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

б) $y' = \dfrac{4x^3(x^3-1) - 3x^2 \cdot x^4}{(x^3-1)^2} = \dfrac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$

y' $\exists$ и непрер. во всей $D(y)$.

Ищем стационарные т-ки, т.е. т-ки, где $y' = 0$: $x^3(x^3-4) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{4}$

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4};+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{max}(0)=0; \quad y_{min}(\sqrt[3]{4})=\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$$

7). Интервалы выпуклости и т-ки перегиба

$$y''=\frac{6(x^3+2)x^2}{(x^3-1)^3}$$

y'' $\exists$ и непрер. в $D(y)$.

Ищем, где $y''=0$.

$x^2(2+x^3)=0$

$x_1=0$, но это т-ка максимума $\Rightarrow$ не м.б. т-кой перегиба.

$x_2=-\sqrt[3]{2}$.

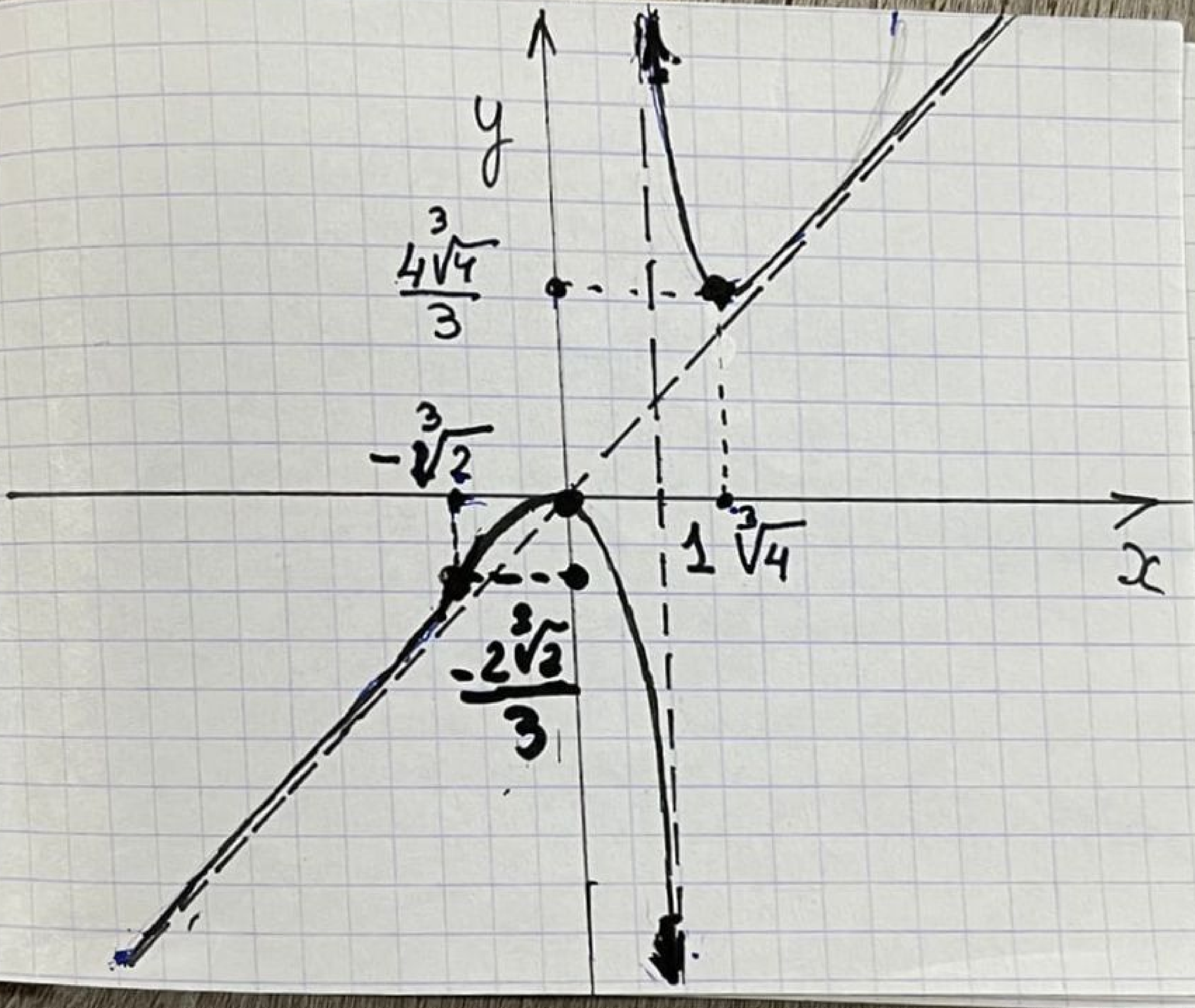
x	$(-\infty; -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	$+$	0	$-$		$+$
y	$\cup$	перегиб	$\cap$		$\cup$

$$y_{\text{перег}}(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$$

$$y'(-\sqrt[3]{2}) = \frac{4}{3},$$ т.е.

перегиб под углом

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$$


y
x
$\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$
$-\sqrt[3]{2}$
$\frac{-2\sqrt[3]{2}}{3}$
1
$\sqrt[3]{4}$

② $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$

2) Ф-я непериодическая

$y(-x) = \sqrt[3]{2x^2 + x^3}$

$y(-x) \neq -y(x); y(-x) \neq y(x) \Rightarrow$

ф-я общего вида.

3) точек разрыва нет

4) Вертик. асимптот нет

5) $\underline{\underline{k}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = \underline{\underline{-1}}$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (\overbrace{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}^{f(x)} \overbrace{+x}^{-kx}) = \{\infty - \infty\} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - \cancel{x^3} + \cancel{x^3}}{\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2} =$$

$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$y = -x + \frac{2}{3}$ накл. асимпт.

$x \to -\infty$ и $x \to +\infty$

б) $y' = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}$

$y' = 0$ при $x_1 = \frac{4}{3}$, а

в т-ках $x_2 = 0$ и $x_3 = 2$

y' терпит разрыв,

причем

$$\lim_{x \to -0} \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} = +\infty,$$

т.е. y' – не $\exists$ в т. $x_2 = 0$, а

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} =$$

$$y'\Big|_{x=2} = -\infty$$

$$= \lim_{2+0} \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} = -\infty,$$

т.е. $y'(+2) = -\infty$, т.е.

т.2 – не м.б. т-кой экстр.

[redacted] включать в табл. её **не** надо):

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3}; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$

$y(0) = 0$ (острый мин.)

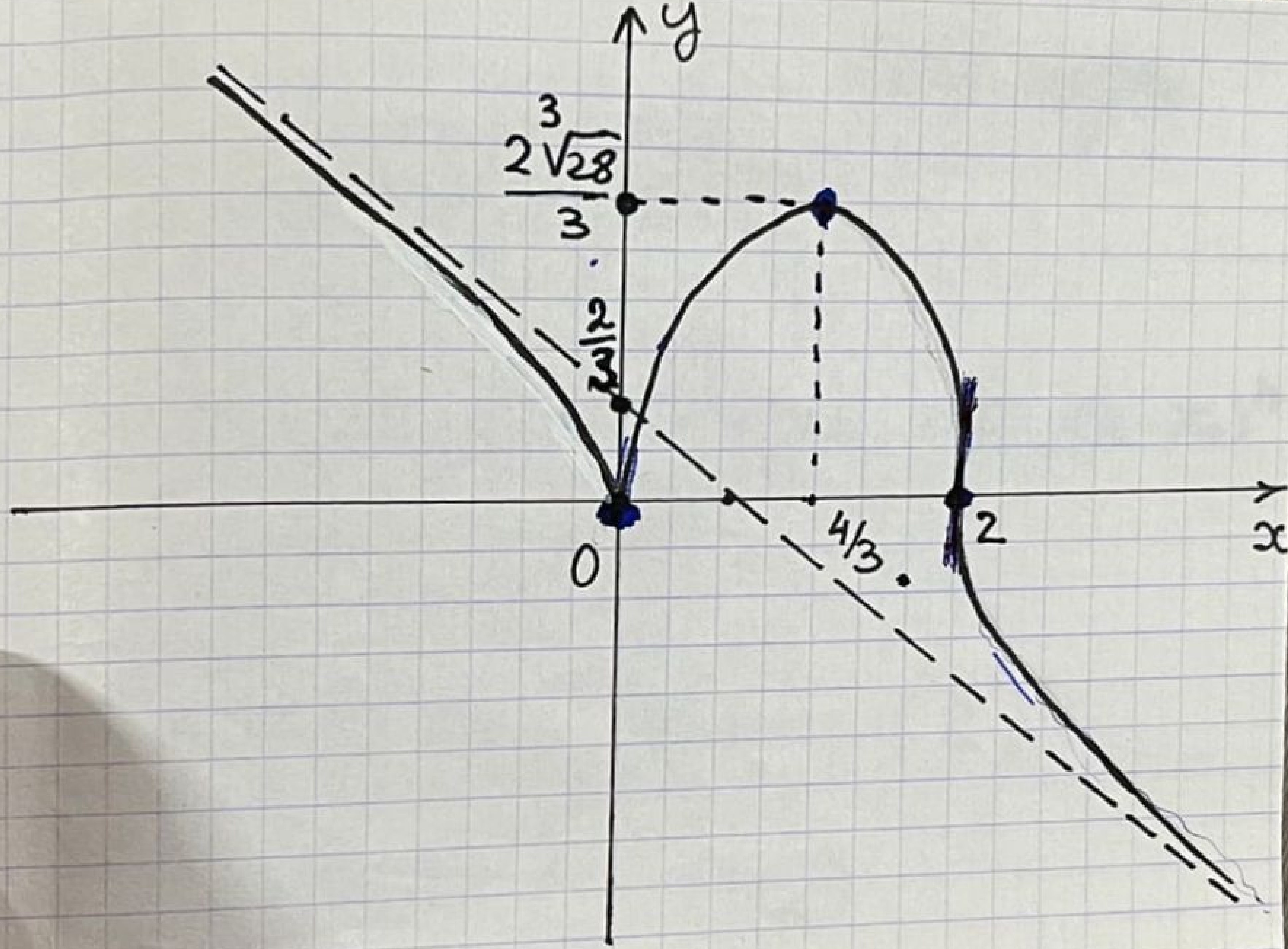
$y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{28}}{3}$ (гладкий макс.)

7) $y'' = \dfrac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(2-x)^5}}$

$y'' \neq 0$, но y'' терпит разрыв в т. $\underline{x_1 = 0}$ (это мин. $\Rightarrow$ не перегиб) и в т. $x_2 = 2$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y''	$-$	$\times$	$-$	не $\exists$	$+$
y	$\cap$	$\times$	$\cap$	перегиб	$\cup$

$y_{\text{перег.}}(2) = 0$, $y'(2) = -\infty$


y
$\frac{2\sqrt[3]{28}}{3}$
$\frac{2}{3}$
0
4/3
2
x

§6. Формули Те́йлора и Маклоре́на

]

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n \quad (1)$$

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n'(x_0) = f'(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases} \quad (2)$$

$$P_n'(x) = \overset{1!}{a_1} + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = \overbrace{1\cdot 2}^{2!}\cdot a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3(x-x_0) + \ldots +$$

$$+ (n-1)na_n(x-x_0)^{n-2}$$

. . . .

$$P_n^{(n)}(x) = n!\,a_n$$

подставим $x = x_0$

$\Longrightarrow$ в силу (2) :

$$P_n(x_0) = \underline{a_0 \overset{(2)}{=} f(x_0)}$$

$$P_n'(x_0) = \underline{1! \cdot a_1 \overset{(2)}{=} f'(x_0)}$$

$$\Longrightarrow$$

$$P_n''(x_0) = \underline{2!\, a_2 \overset{(2)}{=} f''(x_0)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = \underline{n!\, a_n \overset{(2)}{=} f^{(n)}(x_0)}$$

$$\Rightarrow \underline{a_0 = f(x_0)}\ ;\ \underline{a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}}\ ,\ \underline{a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}}\ ,$$

$$\ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(4)

Многочлен Тейлора

Обозначим

$$f(x) - P_n(x) = r_n(x) \quad (5).$$

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x) \quad (6)$$

, ф-ла Тейлора. $r_n(x)$ – оста-

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{1!}df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+r_n(x)$$

$(6^{а})$, где

$$r_n(x)=d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x)$$ $(7^{б})$

$$0<\theta<1$$

точный член ф-лы Тейл.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (7)$$

Остаточный член в форме Лагранжа. (c - между x и x_0)

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$0<\theta<1$$

(7^a)

Теорема. $\exists$ f – $(n+1)$ раз дифференцируема в $U(x_0)$.

Тогда

$$r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right),\ x \to x_0 \quad (8)$$

Остаточный член в форме Пеано.

Д-во.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$x_0 < c < x \quad (\text{или } x < c < x_0)$$

По непрер. $f^{(n)}(x)$ имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \left\{ \begin{array}{c} x < c < x_0 \\ \searrow \; \Downarrow \; \swarrow \\ x_0 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Rightarrow \text{по т. о связи...}$$

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+ \underbrace{\alpha(x) \cdot (x - x_0)^n}_{r_n(x)}$$

и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0.$$

Ч. сл. ф-лы Тейлора при

$x_0=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x) \quad (9)$$

*

Формула Маклоре́на.

Здесь

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \qquad (10)$$

(c – между 0 и x), или

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \qquad (10^{а})$$

$$0 < \theta < 1$$

или

$$(10^{б}) \quad r_n(x) = o(x^n), \quad x \to 0.$$

Ф-ла Маклорена для некоторых функций.

1) $y = e^x$, $y^{(n)} = e^x$

$y^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

(11)

2) $y = \sin x$

$$y^{(k)} = \sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$y(0)=0$; $y'(0)=1$; $y''(0)=0$,

$y'''(0)=-1$; $y^{IV}(0)=0$ и т.д.

$$y^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ (-1)^{n-1}, & k = 2n-1 \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{1!} \cdot x - \frac{1}{3!} x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n-1}(x)$$

(12)

3) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(x)$$

(13)

4) $y = \ln(1+x)$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{1} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$a_n \overset{(9)}{=} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x)$$

(14)

5) $y = (1+x)^{\alpha}$

$$y^{(n)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1).$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x)$$

(15)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{3!} - o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{3!} - \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3}}_{=0} = \frac{1}{6}$$