Оглавление

9 Вопросы для самопроверки к пункту 8
10 Список литературы

Методические указания к изучению начертательной геометрии

При изучении курса начертательной геометрии рекомендуется внимательно ознакомиться с программой и приобрести необходимую учебную литературу. Правильно построенные самостоятельные занятия позволяют сэкономить время и получить хорошие результаты. При самостоятельной организации учебного процесса необходимо руководствоваться следующим:

1) изучать начертательную геометрию строго последовательно и систематически;
2) проработанные теоретические положения обязательно подкреплять практическим решением задач;
3) проявлять максимальную самостоятельность в занятиях, т.к. начертательную геометрию нельзя заучить, её надо понимать;
4) научиться совмещать текст и чертёж книги, привлекая на помощь своё пространственное воображение, допуская в отдельных случаях пространственные модели.

Введение

Инженерная графика одна из основных дисциплин, обеспечивающих общеинженерную подготовку специалистов химико-технологического профиля. Знания, умения и навыки, приобретённые при изучении этого курса, необходимы для подготовки студентов по общеинженерным и специальным дисциплинам, а также в последующей инженерной деятельности.

Курс инженерной графики состоит из двух разделов: начертательной геометрии и технического черчения. По первому разделу - начертательной геометрии и подготовлены настоящие методические указания.

Изучение начертательной геометрии способствует развитию у студентов пространственного мышления, т.е. представлению в уме различных форм существующих или проектируемых объектов. Для отражения тесной связи между начертательной геометрией и техническим черчением достаточно упомянуть высказывание двух выдающихся учёных: ”Чертёж - язык техники.” (Г. Монж); “Начертательная геометрия – грамматика этого языка” (В.И. Курдюмов).

Начертательную геометрию, как и другие науки, вызвала к жизни трудовая деятельность человека. Задачи строительства вначале архитектурных сооружений, а позже станков и машин, потребовали изображений, основанных на геометрических законах. Сохранившиеся до наших дней остатки архитектурных и технических сооружений свидетельствуют о том, что их творцы пользовались чертежами.

Ещё в 1-м в. до н.э. римский архитектор Витрувий в работе ”Десять книг по архитектуре” приводит, как известные, горизонтальные и фронтальные проекции предметов. Там же сказано, что геометрическую разработку начал перспективы дали древнегреческие мыслители Анаксагор и Демокрит (V в. до н.э.). Однако вплоть до XV в. общей теории построения изображений не существовало.

Лишь с развитием строительства и искусств появляются исследования в области теории изображений, учитывающие опыт учёных древних веков. Это работы А.Дюрера, Г.Убальди, Ш.Дезарге. Значительно дополнил теорию перспективы Леонардо да Винчи, который для увеличения наглядности изображения предложил окраску и наложение светотеней.

Таким образом, зарождение и последующее развитие начертательной геометрии органично связаны с потребностями графического изображения создаваемых сооружений и устройств, т.е. с инженерной графикой.

Развивающаяся промышленность требовала метода изображений, позволяющегося определить истинные размеры объекта наиболее простым путём. Таким приёмом явился метод ортогонального (прямоугольного) проецирования на взаимно перпендикулярные вертикальную и горизонтальную плоскости. Накопленные теоретические материалы и соответствующие исследования позволили французскому учёному Гаспару Монжу опубликовать в 1799 г. учебный курс новой науки ”Начертательная геометрия”.

В России приёмы изображений вначале были самобытными, но, постепенно совершенствуясь, приближались к научно обоснованной теории. Фрески Новгородской школы XIV и XV столетий, а также картины Рублёва и Дионисия являются изображениями, приближённо соответствующими изображениям в косоугольном проецировании. Основными видами чертежей того времени были планы земельных угодий или архитектурных объектов. При Петре I были созданы школы, где составление чертежей являлось частью учебного процесса.

Великий русский учёный М.В. Ломоносов и российский академик Л.Эйлер совместно разработали новый метод проекций, послуживший основой для составления географического атласа России. Архитекторы Д.В.Ухтомский, В.И.Баженов, М.Ф.Казаков, В.П.Стасов, а также изобретатели И.П.Кулибин, И.И.Ползунов, отец и сын Черепановы пользовались чертежами, выполненными в прямоугольных проекциях.

Преподавание начертательной геометрии в России было начато в 1810 г. В Институте корпуса инженеров путей сообщения. Первый учебный курс "Основания начертательной геометрии " с разработкой терминологии на русском языке был выпущен в 1821 г. Я.А.Севастьяновым. Позднее в России появилась книга А.Х.Редера, посвящённая методу прямоугольного изометрического проецирования. В 1870 г. профессор Н.И.Макаров выпустил "Полный курс начертательной геометрии", считающийся капитальным трудом в данной науке.

Классические труды по начертательной геометрии оставил В.И.Курдюмов. В его работах подробно исследованы методы вращения и перемены плоскостей проекций, а также методы, посвящённые изображениям кривых линий и кривых поверхностей.

Таким образом, XIX в. и начало XX в. явились периодом становления начертательной геометрии как учебной дисциплины. Применение её в практических целях ограничивалось незначительным количеством работ.

В советский период появился ряд новых разделов в теории изображений благодаря работам Д.И.Каргина, А.И.Добрякова, Н.Ф.Четверухина и др., причём связь науки и практики стала основой развития начертательной геометрии. В настоящее время методы и приёмы начертательной геометрии неуклонно совершенствуются и внедряются в различные отрасли науки и техники.

Принятые обозначения

Обозначения геометрических фигур

1 Точки, расположенные в пространстве, обозначаются прописными буквами латинского алфавита **A**, **B**, **C**, **D**…или арабскими цифрами **1**, **2**, **3**, **4**…

2 Последовательность точек (и других элементов) - подстрочными индексами: $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$...

3 Линии в пространстве – по точкам, определяющим линию или строчными буквами латинского алфавита: **a**, **b**, **c**…

4 Углы – строчными буквами греческого алфавита $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\omega}$.

5 Плоскости – строчными буквами греческого алфавита $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$.

6 Поверхности – римскими цифрами **I**, **II**, **III**, **IV** а также прописными буквами русского алфавита: цилиндр – **Ц**, конус – **К**, сфера – **Сф**…

7 Плоскости проекций – строчной буквой греческого алфавита $\boldsymbol{\pi}$. Произвольная плоскость – $\boldsymbol{\pi_0}$, горизонтальная – $\boldsymbol{\pi_1}$, фронтальная – $\boldsymbol{\pi_2}$, профильная – $\boldsymbol{\pi_3}$, любая дополнительная – $\boldsymbol{\pi_4}$, $\boldsymbol{\pi_5}$…

8 Оси проекций – строчными буквами **x**, **y**, **z** или (при введении дополнительных плоскостей) $\boldsymbol{\pi_2/\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_2/\pi_3}$, $\boldsymbol{\pi_2/\pi_5}$…Начало координат – прописной буквой **O**.

9 Проекции точек:

на произвольную плоскость $\boldsymbol{\pi_0}$ – $\mathbf{A^0}$, $\mathbf{B^0}$, $\mathbf{C^0}$…
на горизонтальную плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ – $\mathbf{A^I}$, $\mathbf{B^I}$, $\mathbf{C^I}$…
на фронтальную плоскость $\boldsymbol{\pi_2}$ – $\mathbf{A^{II}}$, $\mathbf{B^{II}}$, $\mathbf{C^{II}}$…
на профильную плоскость $\boldsymbol{\pi_3}$ – $\mathbf{A^{III}}$, $\mathbf{B^{III}}$, $\mathbf{C^{III}}$…
на дополнительную плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$ – $\mathbf{A^{IV}}$, $\mathbf{B^{IV}}$, $\mathbf{C^{IV}}$…

10 Проекции линий – по проекциям точек, определяющих линию; кроме того:

горизонтальная линия – буквой **h**;
фронтальная линия – буквой **f**;
профильная линия – буквой **p**.

11 <u>Обозначение плоскостей, заданных следами</u>:

горизонтальный след плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ – $\mathbf{h^{I}_{0\alpha}}$

фронтальный след плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ - $\mathbf{f^{II}_{0\alpha}}$

профильный след плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ – $\mathbf{p^{III}_{0\alpha}}$

В тех случаях, когда плоскость не требует наименования, обозначение следов упрощённо – $\mathbf{h^{I}_{0}}$, $\mathbf{f^{II}_{0}}$, $\mathbf{p^{III}_{0}}$

Для проецирующих плоскостей задаётся проекция плоскости:

$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{I}}$ – горизонтально - проецирующая плоскость

$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{II}}$ – фронтально – проецирующая плоскость

$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{III}}$ – профильно – проецирующая плоскость

Точки схода следов плоскости – прописными буквами **X**, **Y**, **Z** с индексом соответствующей плоскости: $\mathbf{X_{\alpha}}$, $\mathbf{Y_{\alpha}}$, $\mathbf{Z_{\alpha}}$.

12 <u>При преобразовании эпюра (чертежа) вращением</u> (или совмещением) в новом положении:

точки – $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{C}}$ …

плоскости – $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ …

следы плоскости – $\mathbf{f^{II}}_{\overline{0\alpha}}$, $\mathbf{f^{II}}_{\overline{0\beta}}$

После второго вращения соответственно:

A, **B**, **C**… $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$

Новое положение точки схода следов при вращении плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ - $\mathbf{X_{\alpha}}$, $\mathbf{Y_{\alpha}}$, $\mathbf{Z_{\alpha}}$.

Обозначения отношений между геометрическими элементами

1 Совпадение ($\equiv$):

A ≡ **B** – точки **A** и **B** совпадают.

2 Параллельность ($\parallel$):

a$\parallel$**b** - прямые **a** и **b** параллельны.

3 Перпендикулярность ($\perp$):

a $\perp$ $\boldsymbol{\alpha}$ - Прямая **a** перпендикулярна плоскости $\boldsymbol{\alpha}$.

Обозначения теоретико-множественные

1 Принадлежность ($\in$):

A $\in$ **a** – точка **A** принадлежит прямой **a**.

2 Включение ($\subset$):

$\mathbf{A} \subset \boldsymbol{\alpha}$ – прямая $\boldsymbol{\alpha}$ принадлежит плоскости $\boldsymbol{\alpha}$.

3 Пересечение ($\cap$):

$\mathbf{A} = \mathbf{a} \cap \boldsymbol{\alpha}$ – точка **A** есть пересечение прямой **a** с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$.

4 Импликация – логическое следствие ($\Rightarrow$):

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ – если **a** и **b** параллельны прямой **c**, то они параллельны между собой.

1 Методы проецирования

Правила начертательной геометрии предусматривают построение изображений плоских или объёмных предметов с помощью приёма, называемого проецированием.

1.1 Центральное проецирование

Предположим, что в пространстве заданы (Рис.1.1) кривая **ABC**, плоскость π_0 и точка **S**. Проведём из точки **S** через точки **A**, **B** и **C** кривой **ABC** прямые линии и отметим точки пересечения последних с плоскостью π_0.

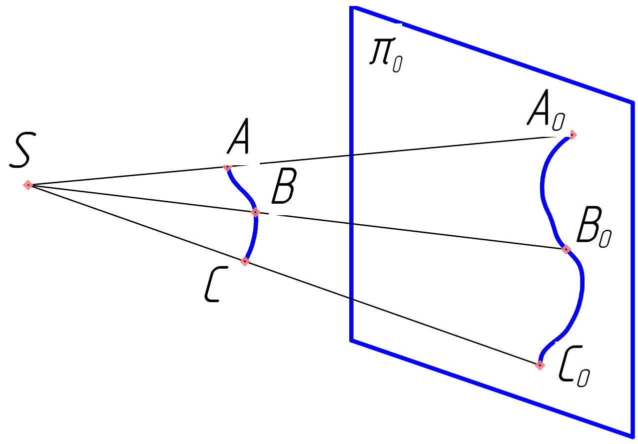


Рис.1.1

Обозначим полученные точки соответственно буквами A_0, B_0, C_0. Исходные и построенные элементы получили в начертательной геометрии названия:

(**.**) **S** – полюс (центр) проецирования;

плоскость π_0 - плоскость проекций;

прямые SA_0, SB_0, SC_0 - проецирующие лучи;

кривая **ABC** – оригинал;

точки A_0, B_0, C_0 – центральные проекции точек **A**, **B**, **C** на плоскости π_0 (изображение);

кривая $A_0B_0C_0$ – центральная проекция кривой **ABC**.

Центральное проецирование – это проецирование на заданную плоскость из заданного полюса (центра) проецирования.

Основные свойства центрального проецирования:

- любой геометрический элемент имеет на плоскости проекций единственную проекцию;

- любая точка на плоскости проекций является проекцией бесчисленного множества точек (любой точки, расположенной на проецирующем луче);

- проекцией прямой линии является прямая линия.

Достоинством центрального проецирования является наглядность изображения.

Недостаток – сложность определения истинных размеров оригинала по его изображению. Это ограничивает применение центрального проецирования, так как в технике определение истинных размеров проецируемого предмета по его изображению является одним из основных требований.

Данный метод, называемый перспективой, применяется в живописи, архитектуре. Кроме того, фотографии и киноизображения также являются центральными проекциями.

1.2 Параллельное проецирование

Параллельное проецирование – проецирование с помощью параллельных проецирующих лучей, что наблюдается при бесконечном удалении полюса от плоскости проекций.

Пусть (Рис.1.2, а) требуется построить изображение кривой **ABC** на плоскости $\boldsymbol{\pi_0}$. Проведём через точки кривой **A**, **B**, **C** проецирующие лучи, параллельные произвольному направлению **a** и продолжим эти лучи до пересечения с плоскостью $\boldsymbol{\pi_0}$. Полученная проекция $\mathbf{A_0B_0C_0}$ – параллельная проекция кривой **ABC** на плоскость $\boldsymbol{\pi_0}$.

Параллельное проецирование обладает теми же свойствами, что и центральное. Кроме того, *параллельные прямые проецируются в виде параллельных прямых* (см. Рис.1.2, б); *отношение отрезков двух параллельных прямых **AB** и **CD*** (см. Рис.1.2, б) *равно отношению проекций этих отрезков.*

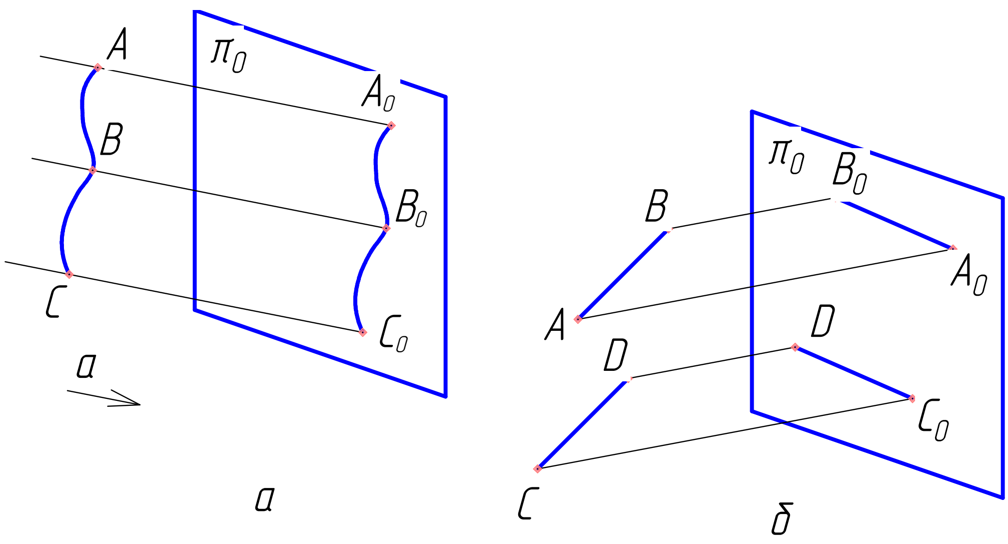


Рис.1.2

Параллельное проецирование разделяется на *косоугольное* и *прямоугольное*.

Косоугольное проецирование – это проецирование с помощью лучей, наклонённых к плоскости проекций под некоторым отличным от прямого углом.

Прямоугольное (ортогональное) проецирование – это проецирование с помощью лучей, перпендикулярных к плоскости проекций.

Плоскость проекций обычно относят к декартовой системе координат. Так, прямоугольное проецирование на горизонтальную и вертикальную плоскости проекций получило наименование «Метод прямоугольного проецирования на плоскости координат» (метод Г. Монжа).

Метод прямоугольного проецирования положен в основу выполнения технических чертежей.

1.3 Проецирование на плоскости координат

Плоскости координат могут в пространстве располагаться произвольно. Принято одну из плоскостей располагать горизонтально, а две другие – вертикально. Одну из вертикальных плоскостей координат располагают перед наблюдателем (фронтально).

Зададим (Рис.1.3) прямоугольную систему координат **Oxyz**. Обозначим плоскости **xOy**, **xOz**, **yOz** соответственно буквами $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_2}$, $\boldsymbol{\pi_3}$. Эти плоскости называют горизонтальной ($\boldsymbol{\pi_1}$), фронтальной ($\boldsymbol{\pi_2}$) и профильной ($\boldsymbol{\pi_3}$) плоскостями проекций.

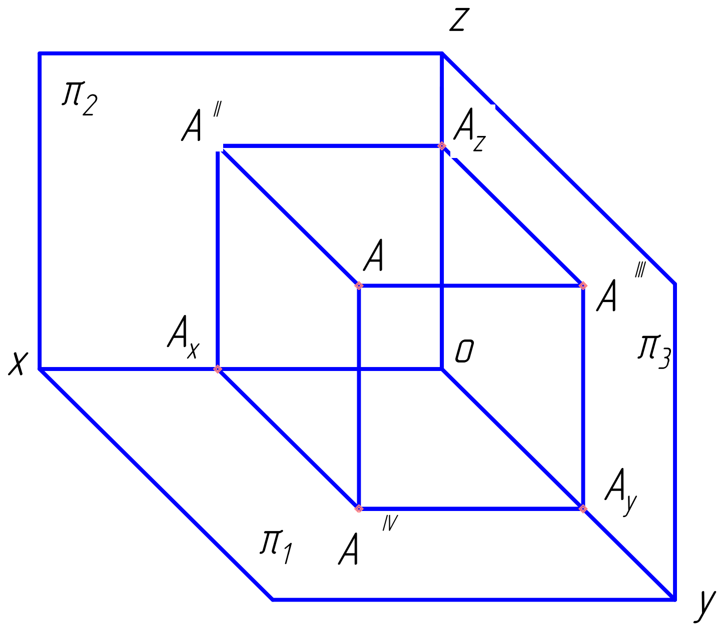


Рис.1.3

Возьмём произвольную точку **A**, расположенную над плоскостью $\boldsymbol{\pi_1}$, перед плоскостью $\boldsymbol{\pi_2}$ и слева от плоскости $\boldsymbol{\pi_3}$. Спроецируем эту точку прямоугольно на плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_2}$, $\boldsymbol{\pi_3}$, для чего опустим из точки **A** перпендикуляры на данные плоскости. В точках пересечения перпендикуляров с упомянутыми плоскостями получим точки $\mathbf{A^I}$, $\mathbf{A^{II}}$, $\mathbf{A^{III}}$, которые соответственно называются горизонтальной, фронтальной и профильной проекциями точки **А**.

Каждая пара проецирующих лучей определяет плоскость, параллельную плоскости координат и, следовательно, перпендикулярную к соответствующей оси координат. Так плоскость $\mathbf{AA^{II}A_xA^I}$ перпендикулярна к оси **Ox** и пересекается с ней в точке $\mathbf{A_x}$, аналогичные рассуждения справедливы для плоскостей $\mathbf{AA^{II}A_yA^I}$ и $\mathbf{AA^{II}A_zA^{III}}$. В результате проделанных построений получим параллелепипед, называемый <u>параллелепипедом координат</u> точки **А**. Отрезки $\mathbf{AA^{III}}$, $\mathbf{AA^{II}}$, $\mathbf{AA^{I}}$ определяют расстояния от точки **А** до плоскостей координат и называются <u>координатами точки</u> **А**. Обозначают: $\mathbf{AA^{III}=x}$, $\mathbf{AA^{II}=y}$, $\mathbf{AA^{I}=z}$.Нетрудно заметить, что отрезки $\mathbf{OA_x}$, $\mathbf{OA_y}$ и $\mathbf{OA_z}$ численно равны координатам точки **А**, т.е. $\mathbf{OA_x=AA^{III}=x}$, $\mathbf{OA_y=AA^{II}=y}$ и $\mathbf{OA_z=AA^{I}=z}$.

Таким образом, положение точки **А** определяется тремя её координатами, а положение каждой из её проекций $\mathbf{A^I}$, $\mathbf{A^{II}}$, $\mathbf{A^{III}}$ - двумя координатами.

В общем случае плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_2}$, $\boldsymbol{\pi_3}$ (Рис.1.4, а) делят пространство на восемь частей (трёхгранных углов) называемых *октантами* или *координатными углами*.

Причём для правой системы координат, изображённой на Рис.1.4, а принята следующая нумерация углов:

I угол – левый, передний, верхний (**x**, **y**, **z**);

II угол – левый, задний, верхний (**x**, **-y**, **z**);

III угол – левый, задний, нижний (**x**, **-y**, **-z**);

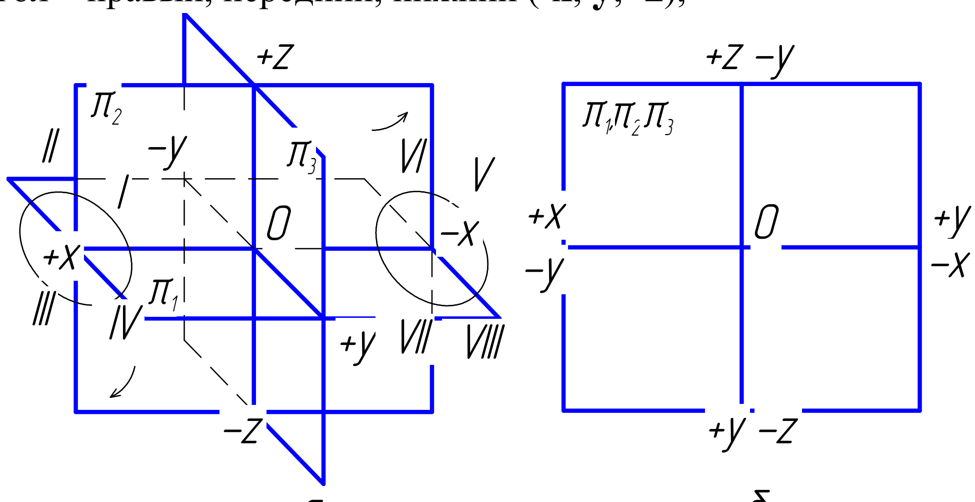
IV угол – левый, передний, нижний **(x**, **y**,**-z**);

V угол – правый, передний, верхний (**-x**, **y**, **z**);

VI угол – правый, задний, верхний (**-x**,**-y**, **z**);

VII угол – правый, задний, нижний (**-x**, **-y**, **-z**);

VIII угол – правый, передний, нижний (**-x**, **y**, **-z**);



а б

Рис.1.4

Практически изображение выполняется на одной плоскости (листе бумаги, доске и т. п.), называемой плоскостью чертежа. С этой целью плоскость $\boldsymbol{\pi_2}$ мысленно совмещают с плоскостью чертежа, а плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_3}$ совмещают с плоскостью $\boldsymbol{\pi_2}$ вращением вокруг осей **Ox** и **Oz** в направлениях, указанных на Рис.1.4, а стрелками. Изображение плоскостей и осей координат, совмещённых с плоскостью чертежа, показано на Рис.1.4, б. Следует обратить внимание, что ось **Oy** изображается дважды, совмещаясь соответственно с осями **Oz** и **Ox**.

Проецируемая точка может располагаться в любом из координатных углов (октантов). Поэтому для построения её проекций кроме численных значений координат необходимо учитывать их знаки.

Рассмотрим случай общего положения точки, т.е. случай, когда требуется построить проекции точки **A** (**-x**, **y**, **z**), причём $\mathbf{x}\neq 0$, $\mathbf{y}\neq 0$, $\mathbf{z}\neq 0$. Сначала построим косоугольные проекции заданной точки. Для этого нанесём на чертеже оси координат и отложим на них заданные значения координат с учётом их знаков (Рис.1.5, а). Получим точки $\mathbf{A_x}$, $\mathbf{A_y}$, $\mathbf{A_z}$. Далее строим горизонтальную $\mathbf{A^I}$, фронтальную $\mathbf{A^{II}}$ и профильную $\mathbf{A^{III}}$ проекции в точках пересечения прямых, проведённых из $\mathbf{A_x}$, $\mathbf{A_y}$, $\mathbf{A_z}$ параллельно соответствующим осям координат. Изображение точки **A** получим в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных к плоскостям проекций из точек $\mathbf{A^I}$,$\mathbf{A^{II}}$ и $\mathbf{A^{III}}$.

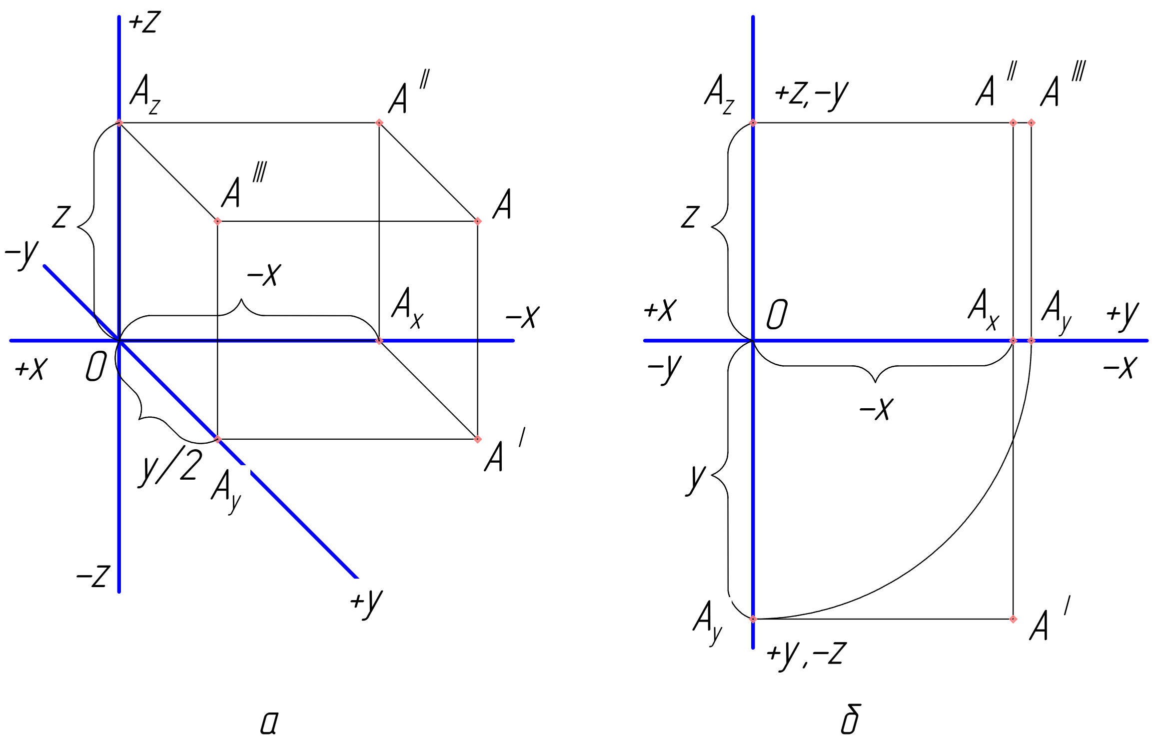


Рис.1.5

По полученному чертежу легко установить, что данная точка **A** расположена в пятом октанте.

Построим прямоугольные проекции точки **A**. Для этого на чертеже (см. Рис.1.5, б) проводим оси координат **x**(**-x**), **y**(**-y**), **z**(**-z**). Затем откладываем на осях заданные значения координат с учётом знака и получаем точки $\mathbf{A_x}$, $\mathbf{A_y}$, $\mathbf{A_z}$.

При этом координата **y** всегда откладывается дважды: на оси **Oy**, совмещённой с осью **Oz** (вертикальная ось **Oy**), и на оси **Oy**, совмещённой с осью **Ox** (горизонтальная ось **Oy**). Находим прямоугольные проекции точки **A** в пересечении перпендикуляров, восстановленных из $\mathbf{A_x}$, $\mathbf{A_y}$, $\mathbf{A_z}$ к соответствующим осям координат. Эти перпендикуляры показывают на чертеже тонкими сплошными линиями проекционной связи.

Отметим, что в *прямоугольных проекциях горизонтальная* $\boldsymbol{A^{I}}$ *и фронтальная* $\boldsymbol{A^{II}}$ *проекции точки* ***A*** *всегда расположены на одной вертикальной прямой, а фронтальная* $\boldsymbol{A^{II}}$ *и профильная* $\boldsymbol{A^{III}}$ *проекции – на одной горизонтальной прямой*.

Изображения, полученные при совмещении плоскостей проекций с плоскостью чертежа, называются *эпюрами*. *Эпюр (эпюра) – чертёж, на котором пространственная фигура изображена методом ортогональных проекций на три плоскости;* эпюр позволяет определить форму и размеры проецируемого предмета, так как координаты **x**, **y** и **z** любой его точки могут быть установлены непосредственно по чертежу.

В *частных случаях* точка может быть расположена в одной из плоскостей координат или лежать на одной из осей (Рис.1.6, а, б). При этом, если точка лежит в плоскости координат, то её проекция на данную плоскость совпадает с самой точкой, а две другие её проекции расположены на осях координат (см. Рис.1.6, а). Если же точка лежит на оси координат, то две её проекции совпадают с самой точкой, а третья совпадает с началом координат (см. Рис.1.6, б).

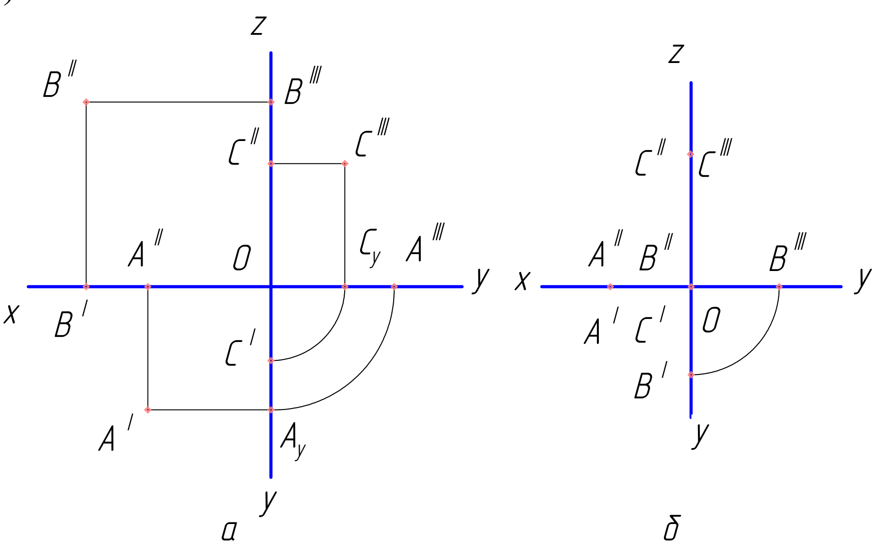


Рис.1.6

1.4 Аксонометрические проекции

Если оси прямоугольной системы координат и отнесённый к ним предмет спроецировать центрально или параллельно на некоторую плоскость, то полученное изображение называется *аксонометрией*. Рассмотрим наиболее часто употребляемые на практике виды аксонометрических проекций.

Косоугольным аксонометрическим проецированием на фронтальную плоскость называют косоугольное проецирование на плоскость, совмещённую с плоскостью $\boldsymbol{\pi_2}$ прямоугольной координатной системы, к которой отнесён проецируемый предмет.

Возьмём прямоугольную координатную систему (Рис.1.7, а) и спроецируем её косоугольно на плоскость $\boldsymbol{\pi_0}$, совмещённую с плоскостью $\boldsymbol{\pi_2}$ данной системы. Проекции осей **Ox** и **Oz** на плоскость $\boldsymbol{\pi_0}$ совпадают с этими осями. Начало координат тоже будет собственной проекцией. Остаётся спроецировать на плоскость ось **Oy**.

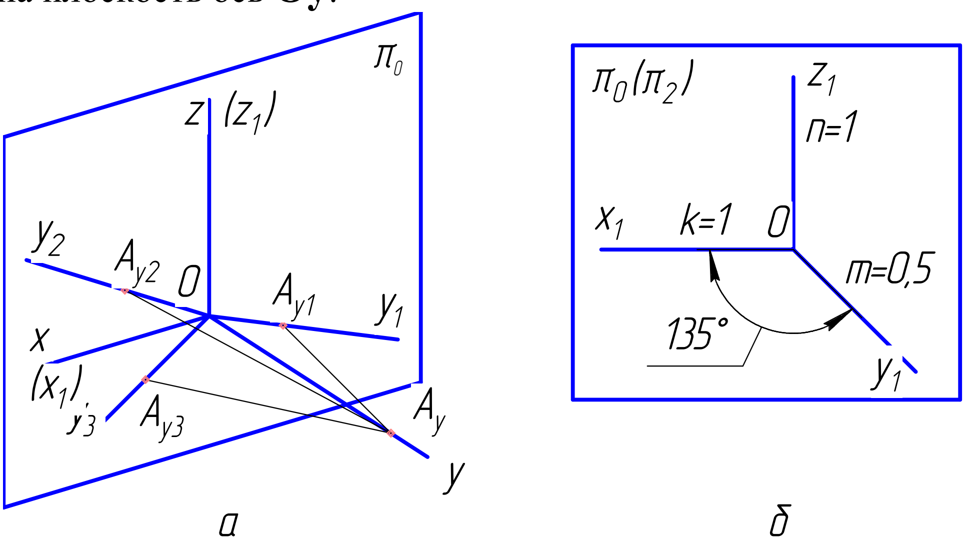


Рис.1.7

Для этого выберем на оси **Oy** произвольную точку $\mathbf{A_y}$ и спроецируем её на плоскость $\boldsymbol{\pi_0}$ с помощью произвольного проецирующего луча, пересекающего плоскость $\boldsymbol{\pi_0}$ например в точке $\mathbf{A_{y1}}$. Прямая $\mathbf{0A_{y1}}$ будет косоугольной проекцией оси **Oy** на плоскость $\boldsymbol{\pi_0}$ (ось $\mathbf{Oy_1}$).

Если изменять направление проецирования, то на плоскости $\boldsymbol{\pi_0}$ можно получить бесконечное множество изображений точки $\mathbf{A_y}$ и соответственно осей $\mathbf{Oy_1}$, $\mathbf{Oy_2}$, $\mathbf{Oy_3}$…Решение будет однозначным, если задать направление проецирования. Оно задаётся углами между проекциями осей координат и так называемыми *коэффициентами искажения*. *Коэффициентом искажения для данной оси координат называется отношение длины проекции отрезка упомянутой оси к истинной длине самого отрезка.*

Обозначим: k – коэффициент искажения для оси **Ox**; m – для оси **Oy**; n – для оси **Oz**.

При косоугольном проецировании на фронтальную плоскость (см. Рис.1.7, а, б) имеем k=n=1. Для оси **Oy** значение m может изменяться в пределах $0< m<\infty$. Из соображений большей наглядности принимают m=0,5, а угол между проекциями осей $\mathbf{Ox_1}$ и $\mathbf{Oy_1}$ составляет 135° при $<\mathbf{x_1Oz_1}=90°$. Косоугольные проекции осей координат на фронтальную плоскость в совмещении с плоскостью чертежа показаны на Рис.1.7, б.

Иногда данную проекцию называют *косоугольной диметрией* в связи с тем, что два измерения по оси $\mathbf{Ox_1}$ и оси $\mathbf{Oz_1}$ равны между собой (k= n=1).

Прямоугольной изометрией называют случай прямоугольного проецирования на плоскость, одинаково наклонённую к трём плоскостям проекций. Такая плоскость проекций пересекает оси координат на равных расстояниях от начала координат.

Изобразим (Рис.1.8, а) прямоугольную координатную систему **Oxyz** и отложим на осях координат равные в натуре отрезки $\mathbf{OK_x=OK_y=OK_z}$.

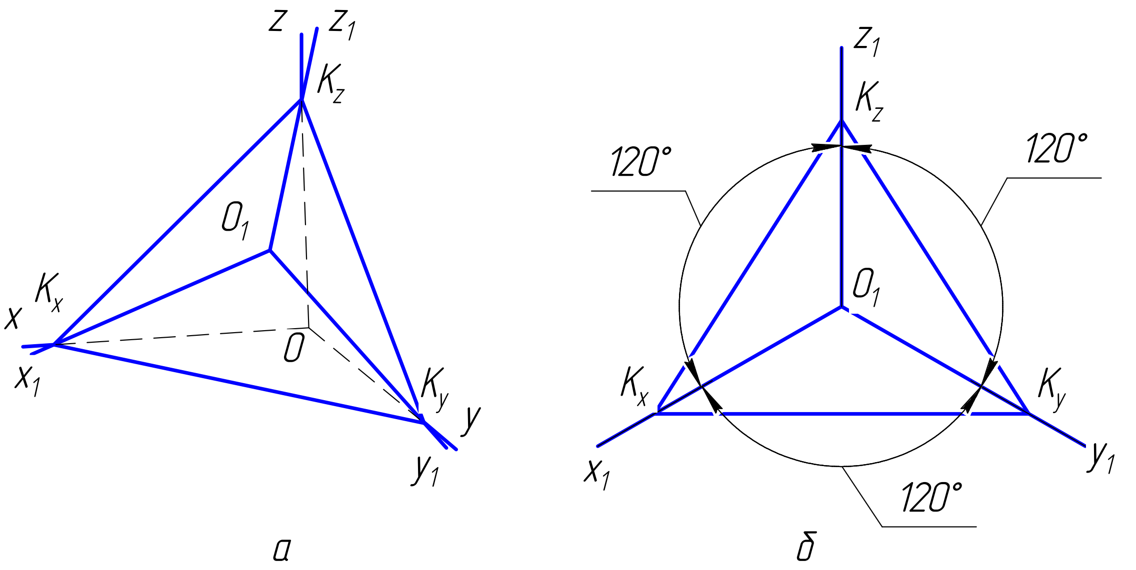


Рис.1.8

Соединим попарно прямыми линиями точки $\mathbf{K_x}$, $\mathbf{K_y}$ и $\mathbf{K_z}$. Треугольник $\mathbf{K_xK_yK_z}$ будет изображением части плоскости, равно наклонённой к плоскостям координат. Примем эту плоскость за плоскость проекций и спроецируем на неё прямоугольно оси координат. Точки $\mathbf{K_x}$, $\mathbf{K_y}$, $\mathbf{K_z}$ являются собственными проекциями. Проекцию начала координат получим в точке $\mathbf{O_1}$ пересечения перпендикуляра, опущенного из точки **O** на плоскость $\mathbf{K_xK_yK_z}$. Тогда искомые проекции осей координат изображаются в виде прямых $\mathbf{O_1x_1}$, $\mathbf{O_1y_1}$ и $\mathbf{O_1z_1}$, проведённых из точки $\mathbf{O_1}$ через точки $\mathbf{K_x}$, $\mathbf{K_y}$, $\mathbf{K_z}$. Можно показать, что оси координат **Ox**, **Oy** и **Oz** проецируются с одинаковыми искажениями, причём *натуральные* коэффициенты искажения k =m=n=0,82. Углы между проекциями осей координат: $<\mathbf{x_1O_1z_1}=<\mathbf{y_1O_1z_1}=<\mathbf{x_1O_1y_1}=120°$. Изометрические проекции осей координат в совмещении с плоскостью чертежа показаны на Рис.1.8, б.

Если изометрическая проекция имеет целью выявление формы предмета (без наглядного отражения его размеров), то при построении точек допускается откладывать на осях значения координат точек с *приведёнными* коэффициентами искажения, равными единице (k=m=n=1). При этом изображение предмета получается увеличенным в отношении 1,0/0,82=1,22.

Прямоугольной диметрией называют случай прямоугольного проецирования на плоскость, равно наклонённую к двум осям координат. Обычно проецируют на плоскость, равно наклонённую к плоскостям $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_3}$.

Изобразим (Рис.1.9, а) прямоугольную координатную систему **Oxyz** и отложим на осях **Ox** и **Oz** равные в натуре отрезки $\mathbf{OK_x} = \mathbf{OK_z}$. По оси **Oy** отложим произвольный отрезок $\mathbf{OK_y}$ не равный $\mathbf{OK_x}$ и $\mathbf{OK_z}$. Плоскость, определяемая треугольником $\mathbf{K_xK_yK_z}$ одинаково наклонена к плоскостям $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_3}$.

Спроецируем на неё прямоугольно начало координат ($\mathbf{OO_1} \perp$ плоскости $\Delta\mathbf{K_xK_yK_z}$) и оси координат ($\mathbf{O_1x_1}$, $\mathbf{O_1y_1}$, $\mathbf{O_1z_1}$ **–** прямые, проведённые из точки $\mathbf{O_1}$ через точки $\mathbf{K_x}$,$\mathbf{K_y}$, $\mathbf{K_z}$). Поскольку $\Delta\mathbf{OO_1K_x} = \Delta\mathbf{OO_1K_z}$, то $\mathbf{O_1K_x} = \mathbf{O_1K_z}$. Следовательно,

$$k=\frac{\mathbf{O_1K_x}}{\mathbf{OK_x}}=n=\frac{\mathbf{O_1K_z}}{\mathbf{OK_z}}$$

Значение коэффициента искажения m, исходя из условий получения наиболее наглядного изображения, принимают равным k/2=n/2. При этом k=n=0,94; m=0,47; $<\mathbf{x_1O_1y_1} = <\mathbf{y_1O_1z_1} = 131^0 25'$; $<\mathbf{x_1O_1\ z_1} = 97^0 10'$ На практике обычно принимают k=n=1, m=0,5. В этом случае линейные размеры изображения увеличиваются в отношении 1,0/0,94=1,06.

Диметрические проекции осей координат в совмещении с плоскостью чертежа показаны на Рис.1.9, б.

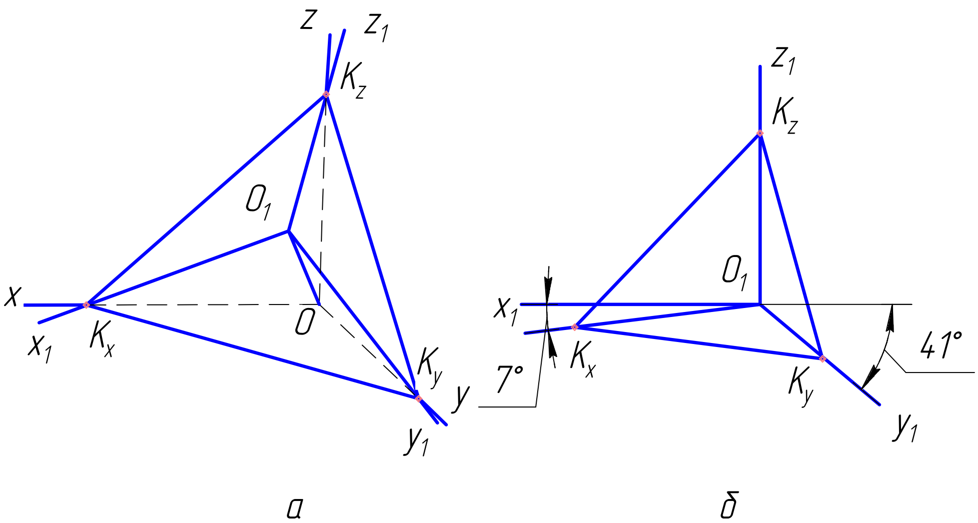


Рис.1.9

2 Прямая линия

Прямая линия проецируется в виде прямой линии. В общем случае прямая линия – безгранична. Положение прямой в пространстве обычно определяется заданием двух точек. Если спроецировать эти точки на плоскость и соединить найденные проекции точек, то полученная проекция отрезка определяет проекцию всей линии, так как отрезок может быть продолжен в любую сторону на требуемое расстояние.

2.1 Общее положение прямой

Прямой общего положения называется прямая, пересекающая все плоскости координат.

Пусть заданы две точки **A** (**x**, **y**, **z**) и **B** ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$) прямой общего положения. Требуется построить прямоугольные проекции прямой. Нанесём на чертеже (Рис.2.1) оси координат и построим проекции заданных точек прямой.

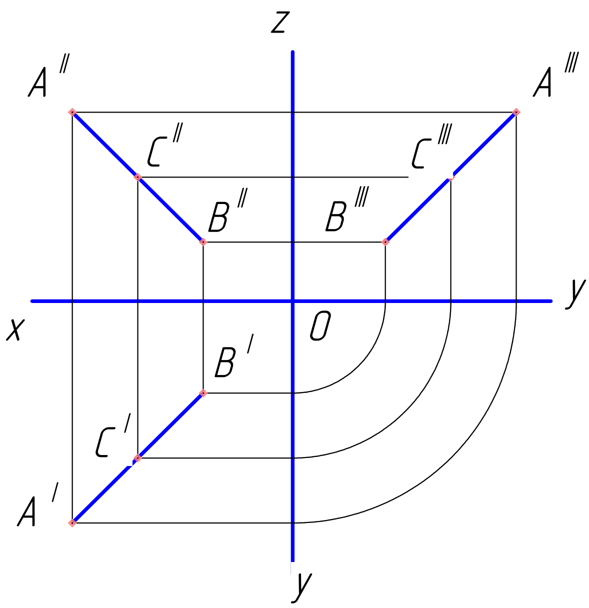


Рис.2.1

Соединяя соответствующие проекции точек прямыми линиями, получим проекции прямой, заданной отрезком **AB**.

Известно, что две проекции прямой определяют её положение в пространстве.

Оценив наглядность и измеримость полученного изображения, заметим:

- что форма проецируемого элемента – прямая линия, так как все проекции его прямые;

- размеры проекций отрезка не равны истинной длине отрезка, так как он наклонён ко всем плоскостям проекций;

- положение прямой относительно плоскостей координат может быть установлено по чертежу.

Отметим следующее важное обстоятельство: если точка лежит на прямой, то её проекции расположены на соответствующих проекциях прямой (точка **C** на Рис.2.1).

Известно, что две прямые, пересекаемые рядом параллельных прямых, рассекаются ими на пропорциональные части. Следовательно, отношение отрезков прямой равно отношению проекций этих отрезков, т.е.

$$\frac{AC}{CB}=\frac{A^{I}C^{I}}{C^{I}B^{I}}=\frac{A^{II}C^{II}}{C^{II}B^{II}}=\frac{A^{III}C^{III}}{C^{III}B^{III}}$$

2.2 Частные случаи положения прямой

К частным случаям положения прямой относят прямые: параллельные одной из плоскостей координат, перпендикулярные к одной из плоскостей координат, лежащие в плоскости координат,совпадающие с осью координат.

Прямая, параллельная какой - либо плоскости координат, проецируется на эту плоскость в истинную величину. Это очевидно, так как $\mathbf{AA^{I}}=\mathbf{BB^{I}}=\mathbf{z}=\mathrm{const}$ (Рис.2.2, а) и, следовательно, $\mathbf{AB}\parallel\mathbf{A^{I}B^{I}}$. $\mathbf{AB}=\mathbf{A^{I}B^{I}}$ – как противоположные стороны прямоугольника.

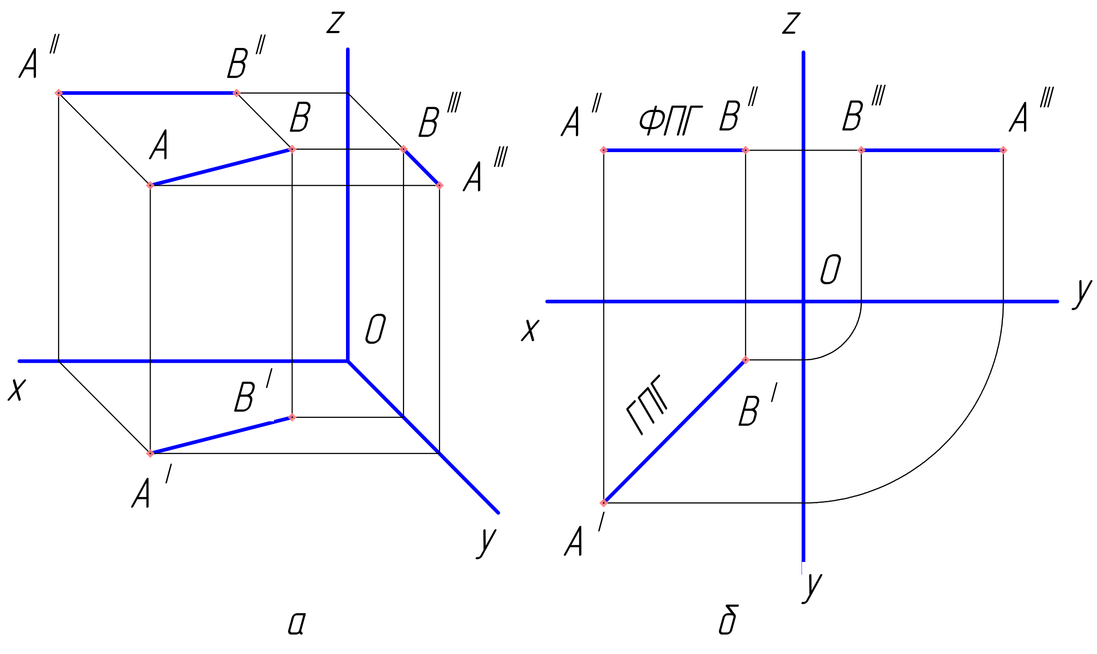


Рис.2.2

Для прямоугольных проекций прямой, параллельной плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ (горизонтали) (см. Рис.2.2, б), характерно, что $\mathbf{A^{II}B^{II}}\parallel\mathbf{Ox}$ и $\mathbf{A^{III}B^{III}}\parallel\mathbf{Oy}$. Отсюда следует: *любая прямая, фронтальная проекция которой параллельна оси* $\boldsymbol{Ox}$*, параллельна плоскости* $\boldsymbol{\pi_1}$*. Горизонтальная проекция горизонтали (ГПГ) – истинная длина отрезка.*

Аналогично, любая прямая ***CD****, горизонтальная проекция* $\boldsymbol{C^{I}D^{I}}$ *которой параллельна оси* ***Ox****, параллельна плоскости* $\boldsymbol{\pi_2}$ *(фронталь) (Рис.2.3, а, б). Фронтальная проекция фронтали (ФПФ) – истинная длина отрезка.*

Прямым, параллельным плоскостям координат, принято давать общее название *линий уровня*.

Прямая, перпендикулярная к какой-либо плоскости координат (проецирующая прямая), параллельна оси координат, перпендикулярной к этой плоскости. Например, прямая **EF**, перпендикулярная к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$, параллельна оси **Oz**. Горизонтальная проекция такой прямой (Рис.2.4, а, б) – точка. Фронтальная и профильная проекции прямой, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$, параллельны оси **Oz**.

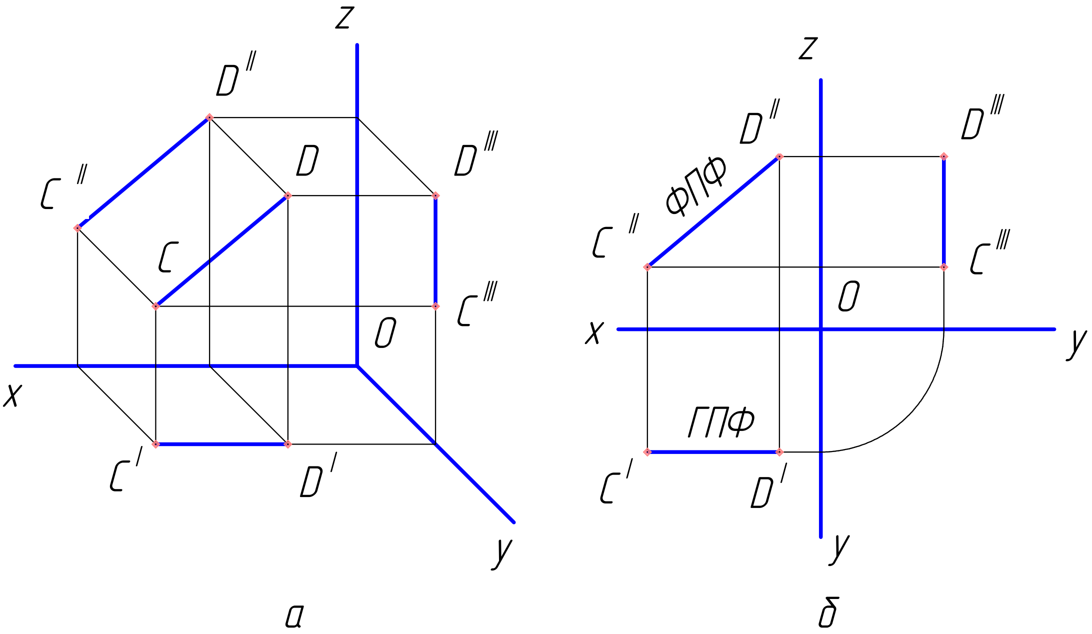


Рис.2.3

В общем случае, *если прямая перпендикулярна к плоскости координат, то на эту плоскость она проецируется в виде точки, а на две другие плоскости – в истинную длину* и параллельно той оси координат, которой параллельна сама прямая.

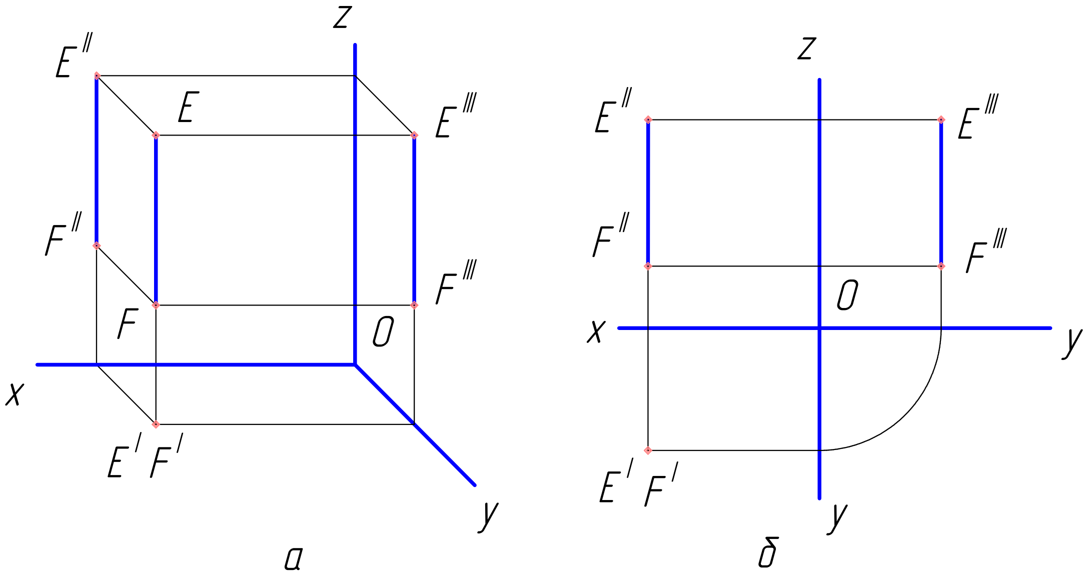


Рис.2.4

Если прямая расположена в плоскости координат, то её проекция на эту плоскость совпадает с самой прямой, а две другие проекции совпадают с осями координат.

Если прямая совпадает с осью координат, то две её проекции совпадают с самой прямой, а на плоскость, перпендикулярную этой оси, прямая спроецируется точкой в начало координат.

2.3 Определение истинной длины отрезка прямой

Пусть отрезок прямой **AB** задан горизонтальной проекцией $\mathbf{A^I B^I}$ (Рис.2.5, а). Фигура $\mathbf{AA^I\ B^I B}$ в натуре – прямоугольная трапеция, у которой углы $<\mathbf{AA^I B^I}$ и $<\mathbf{BB^I A^I}$ – прямые, а отрезки $\mathbf{AA^I}$ и $\mathbf{BB^I}$– соответственно расстояния от точек **A** и **B** до плоскости $\boldsymbol{\pi}_\mathbf{1}$. Эти отрезки численно равны координатам $\mathbf{z_A}$ и $\mathbf{z_B}$ точек. Отсюда следует, что для определения истинной длины отрезка по его проекции нужно построить на этой проекции прямоугольную трапецию с параллельными сторонами, соответственно равными расстояниям от точек отрезка до плоскости. Такой способ определения длины отрезка называют *способом трапеции*.

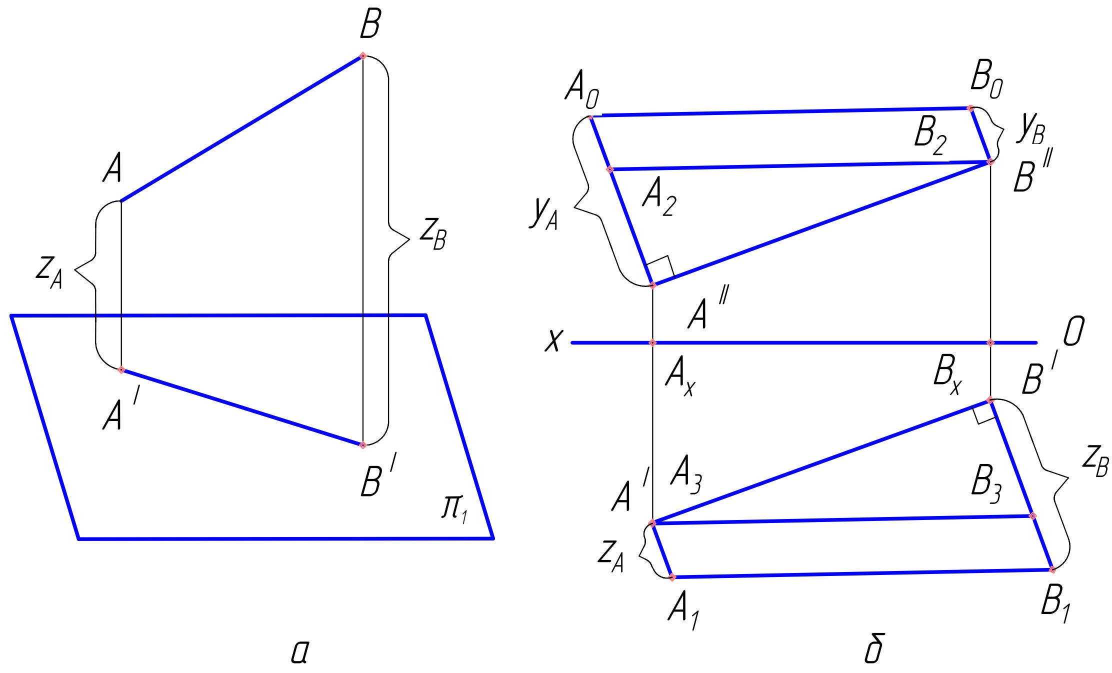


Рис.2.5

Рассмотрим пример определения истинной длины отрезка, расположенного в первом октанте. Пусть имеются проекции $\mathbf{A^IB^I}$ и $\mathbf{A^{II}B^{II}}$(см. Рис.2.5,б). Определим его истинную длину по фронтальной проекции. Для этого в точках $\mathbf{A^{II}}$ и $\mathbf{B^{II}}$ восстановим перпендикуляры к проекции $\mathbf{A^{II}B^{II}}$ и отложим на них отрезки $\mathbf{A^{II}A^*}$ и $\mathbf{B^{II}B^*}$, соответственно равные расстояниям от точек **A** и **B** до плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$, т.е. координаты $\mathbf{y_A}$ и $\mathbf{y_B}$ (*недостающие координаты точек*). Итак $\mathbf{A^{II}A^* \perp A^{II}B^{II}}$; $\mathbf{B^{II}B^* \perp A^{II}B^{II}}$; $\mathbf{A^{II}A^*=A_XA^I=y_A}$; $\mathbf{B^{II}B^*=B_XB^I=y_B}$. Соединяя точки $\mathbf{A^*}$и $\mathbf{B^*}$прямой, находим $\mathbf{A^*B^*}$– истинную длину отрезка **AB**.

Аналогичное построение можно выполнить на горизонтальной проекции отрезка. В этом случае $\mathbf{A^IA_1^* \perp A^IB^I}$; $\mathbf{B^IB_1^* \perp A^IB^I}$; $\mathbf{A^IA_1^*=A_XA^{II}=z_A}$; $\mathbf{B^IB_1^*= B_XB^{II}=z_B}$. Соответственно, $\mathbf{A_1^*B_1^*}$– истинная длина отрезка **AB**.

Построение можно упростить. Если отложить на перпендикуляре, восстановленном из точки $\mathbf{A^{II}}$, отрезок $\mathbf{A^{II}A_2=y_A-y_B}$ и соединить точки $\mathbf{A_2}$ и $\mathbf{B^{II}}$ ($\mathbf{B_2}$) прямой. Аналогично найдём $\mathbf{A^IB_3=A_1^*B_1^*}$. Такой приём определения истинной длины отрезка называется *способом треугольника*.

Отметим, что *в способе треугольника одновременно с истинной длиной отрезка определяется угол наклона прямой к соответствующей плоскости координат*:

$<\mathbf{B_3A^IB^I}$– угол наклона прямой к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$;

$<\mathbf{A_2B^{II}A^{II}}$ – угол наклона прямой к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$;

Рассмотрим пример определения истинной длины отрезка для случая, когда координаты концевых точек имеют разные знаки. Пусть, например, точка

B (Рис. 2.6, а) расположена над плоскостью $\boldsymbol{\pi_1}$, а точка **A** – под плоскостью $\boldsymbol{\pi_1}$.

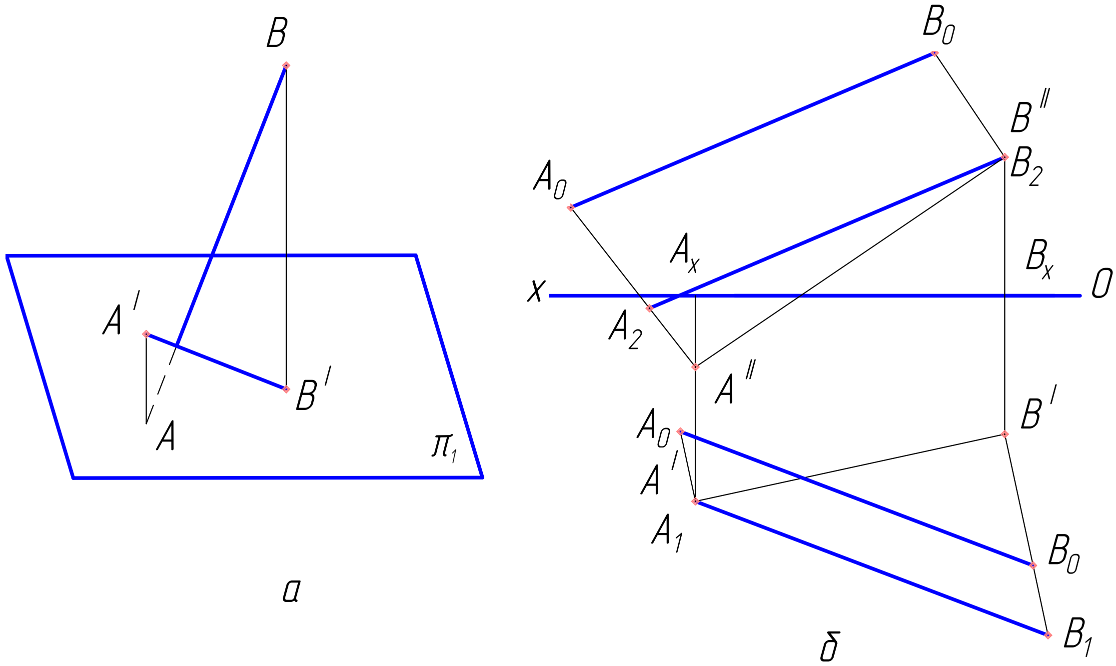


Рис. 2.6

Особенностью построения в данном случае является необходимость учёта знаков недостающих координат точек, т.е. значения этих координат откладываются на перпендикулярах, восстановленных к концам проекции отрезка, в произвольные, но разные стороны (см. Рис.2.6, б).
В нашем примере $\mathbf{B^I B_0}^*=\mathbf{B_x B^{II}}=+\mathbf{z_B}$, а $\mathbf{A^I A_0}^*=\mathbf{A_x A^{II}}=-\mathbf{z_A}$.

При построении способом треугольника на перпендикуляре, восстановленном из точки $\mathbf{B^I}$, откладывается отрезок $\mathbf{B^I B_1}^*$, равный алгебраической разности недостающих координат:$+\mathbf{z_B}-(-\,\mathbf{z_A})=\mathbf{z_B}+\mathbf{z_A}$. Определение истинной длины отрезка по его вертикальной проекции аналогично рассмотренному ранее примеру.

2.4 Следы прямой линии

Следом прямой линии на данной плоскости координат называется точка пересечения (встречи) прямой с упомянутой плоскостью.

Точка пересечения прямой с плоскостью $\boldsymbol{\pi_1}$ называется горизонтальным следом, с плоскостью $\boldsymbol{\pi_2}$ - фронтальным (вертикальным) следом и с плоскостью $\boldsymbol{\pi_3}$ - профильным следом прямой. Следы прямой обозначаются буквами, соответственно **M**, **N** и **P**.

Изобразим в косоугольных проекциях (Рис.2.7) произвольный отрезок **AB** прямой общего положения и вторичные проекции этого отрезка. Построение проекций следов начнём с горизонтального следа. Согласно определению, искомая точка принадлежит прямой и, кроме того, расположена в плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Если точка принадлежит прямой, то её проекции лежат на соответствующих проекциях прямой. Но, с другой стороны, точка лежит в плоскости координат и, следовательно, её проекция на эту плоскость совпадает с самой точкой. Таким образом, искомое изображение горизонтального следа прямой должно быть расположено в точке пересечения изображения прямой и её горизонтальной проекции. Продолжая отрезки **AB** и $\mathbf{A^{I}B^{I}}$, отметим точку их пересечения **M**.

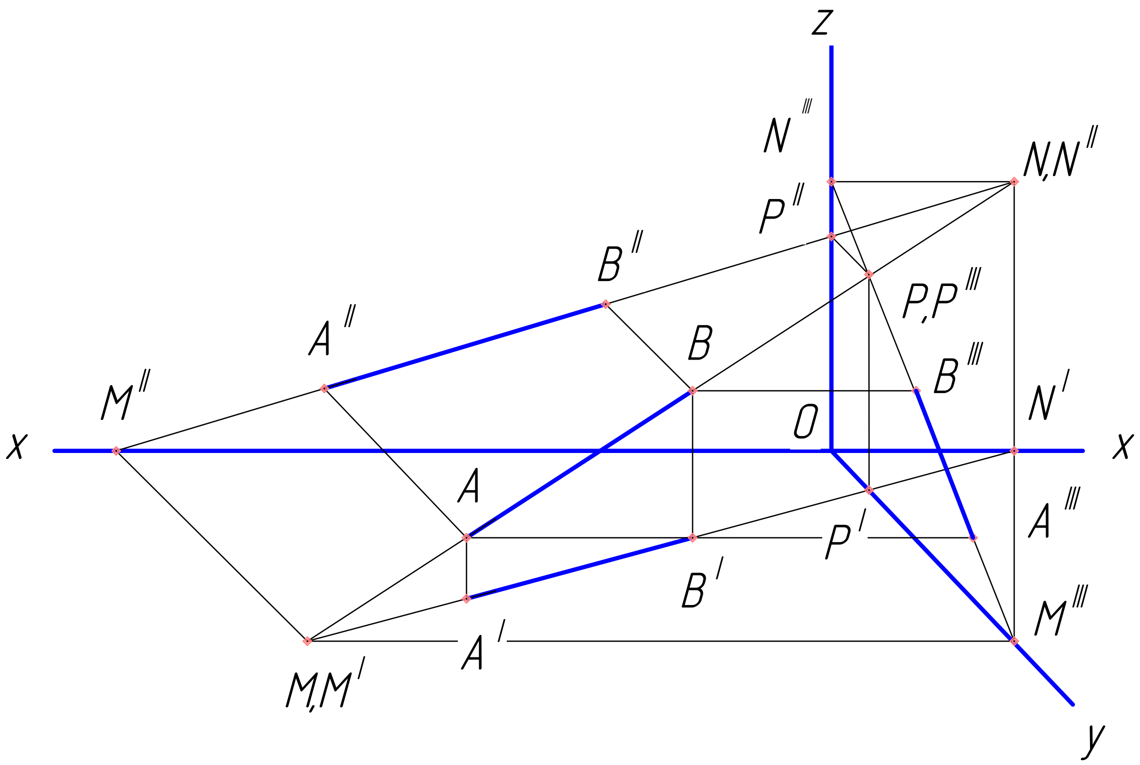


Рис.2.7

Изображение горизонтальной проекции $\mathbf{M^{I}}$ следа совпадает с изображением точки **M**. Изображение фронтальной проекции $\mathbf{M^{II}}$ горизонтального следа найдём на оси **Ox**, проведя через точку $\mathbf{M^{I}}$ прямую, параллельную оси **Oy**. Изображение профильной проекции $\mathbf{M^{III}}$ горизонтального следа получим в точке пересечения с осью **Oy** прямой, проведённой через точку $\mathbf{M^{I}}$ параллельно оси **Ox**.

Точка **M** принадлежит также прямой **AB** и её проекции должны находиться на соответствующих проекциях прямой. Следовательно, изображения фронтальной и профильной проекций горизонтального следа должны лежать на продолжении отрезков $\mathbf{A^{II}B^{II}}$ и $\mathbf{A^{III}B^{III}}$ (в точках пересечения $\mathbf{A^{II}B^{II}}$ с осью **Ox** и $\mathbf{A^{III}B^{III}}$ с осью **Oy**).

Построение проекций фронтального **N** и профильного **P** следов прямой осуществляется в той же последовательности.

Местоположение следов прямой **AB** и их проекций на плоскостях координат представлено в таблице:

След	Местоположение следов и их проекций		
M	$\mathbf{M^{I}}$ (**M**) на **AB** и $\mathbf{A^{I}B^{I}}$	$\mathbf{M^{II}}$ на **AB** и $\mathbf{A^{I}B^{I}}$	$\mathbf{M^{III}}$ на $\mathbf{A^{II}B^{III}}$ и **Oy**
N	$\mathbf{N^{I}}$ на $\mathbf{A^{I}B^{I}}$и **Ox**	$\mathbf{N^{II}}$ (**N**) на **AB** и $\mathbf{A^{II}B^{II}}$	$\mathbf{N^{III}}$ на $\mathbf{A^{III}B^{III}}$ и **Oz**
P	$\mathbf{P^{I}}$ на $\mathbf{A^{I}B^{I}}$ и **Oy**	$\mathbf{P^{II}}$ на $\mathbf{A^{II}B^{II}}$ и **Oz**	$\mathbf{P^{III}}$ (**P**) на **AB** и $\mathbf{A^{III}B^{III}}$

Рассмотрим построение прямоугольных проекций следов прямой общего положения, заданной проекциями отрезка **AB** (Рис.2.8). Построение начнём с нахождения проекций горизонтального следа прямой.

Для этого следует найти сначала фронтальную или профильную проекции этого следа. Фронтальную проекцию $\mathbf{M^{II}}$ получим в точке пересечения фронтальной проекции прямой с осью **Ox**. Горизонтальную проекцию $\mathbf{M^{I}}$ найдём в точке пересечения горизонтальной проекции прямой (продолжение отрезка $\mathbf{A^{I}B^{I}}$) с перпендикуляром, восстановленным из точки $\mathbf{M^{II}}$ к оси **Ox**. Профильная проекция $\mathbf{M^{III}}$ горизонтального следа может быть получена в точке пересечения профильной проекции $\mathbf{A^{III}B^{III}}$ прямой с осью **Oy** или как третья проекция точки **M** по двум проекциям $\mathbf{M^{I}}$ и $\mathbf{M^{II}}$. Отметим, что профильная проекция горизонтального следа должна находиться на горизонтальной оси **Oy**.

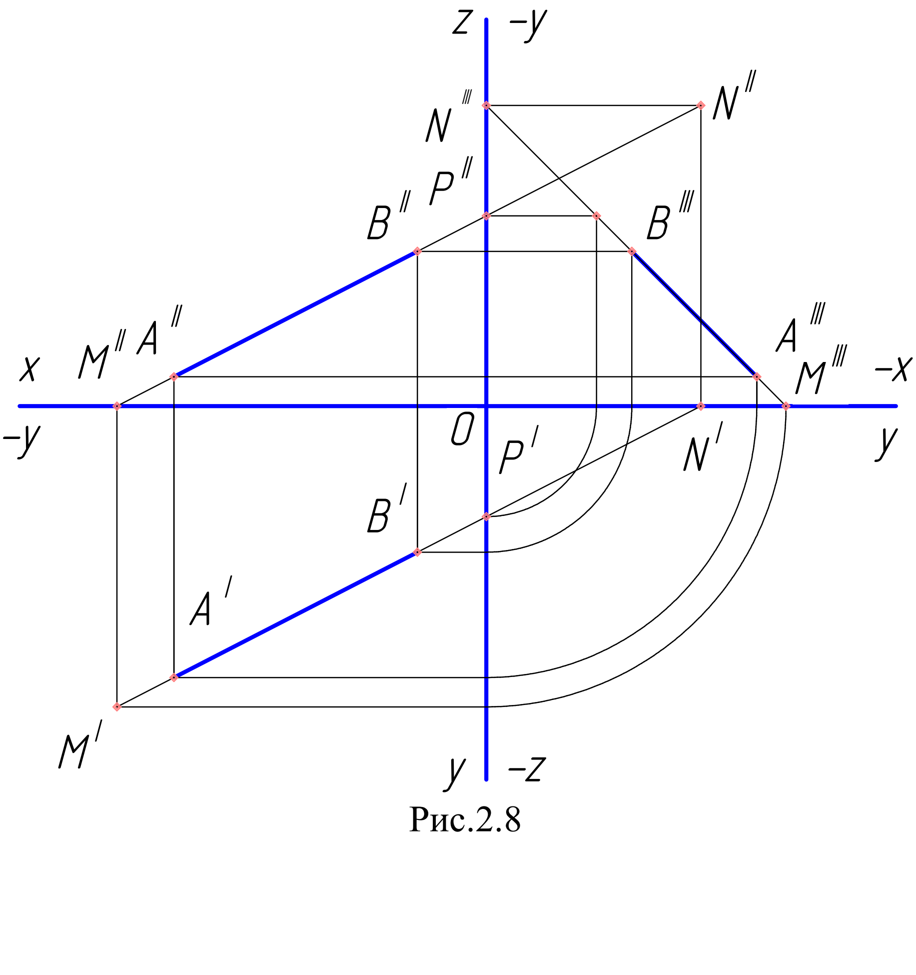


Рис.2.8

Горизонтальную проекцию $\mathbf{N^{I}}$ фронтального следа прямой найдём, продолжив горизонтальную проекцию прямой до пересечения с осью **Ох**. Фронтальную проекцию $\mathbf{N^{II}}$ этого следа получим в точке пересечения перпендикуляра к оси **Ох**, восстановленного из точки $\mathbf{N^{I}}$, с продолжением фронтальной проекции прямой. Профильную проекцию $\mathbf{N^{II}}$ фронтального следа найдём, опустив перпендикуляр из точки $\mathbf{N^{II}}$ на ось **Оz**. Точка $\mathbf{N^{III}}$ будет также в точке пересечения профильной проекции прямой с осью **Оz**.

Аналогичным построением найдём проекции профильного следа.

В заключение данного раздела отметим следующее:

- *прямая, параллельная одной из плоскостей координат, имеет лишь два следа;*
- *прямая, перпендикулярная к плоскости координат, имеет лишь один след;*
- *два следа прямой совпадают в одной точке, если прямая пересекает ось координат;*
- *три следа прямой совпадают, если прямая проходит через начало координат.*

2.5 Взаимное положение прямых линий

Возможны три случая относительного положения прямых линий. Прямые могут быть взаимно параллельны, могут пересекаться друг с другом или скрещиваться.

Если прямые параллельны, то их соответствующие проекции тоже параллельны.

Пусть даны косоугольные проекции двух взаимно параллельных прямых **АВ** и **CD** (см. Рис.2.9, а).

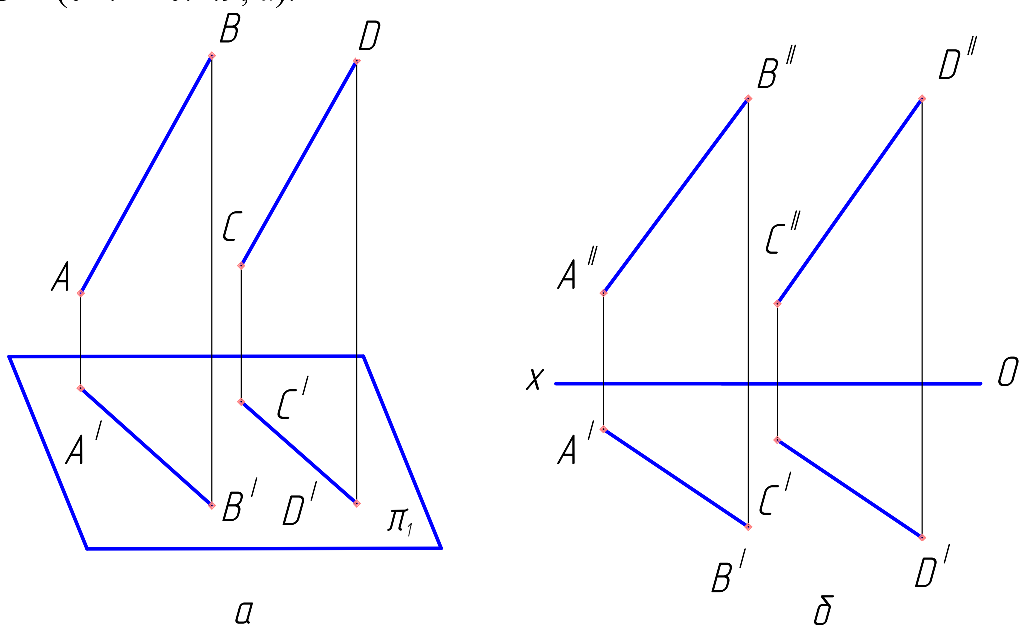


Рис.2.9

Чтобы через данную точку провести прямую, параллельную заданной, нужно через проекции этой точки провести прямые, параллельные соответствующим проекциям заданной прямой.

У пересекающихся прямых соответствующие проекции пересекаются и проекции точки пересечения связаны перпендикуляром к соответствующей оси координат. Пусть даны две пересекающиеся в точке **К** прямые **АВ** и **CD** (см. Рис.2.10).

Точка **К** принадлежит обеим прямым. Следовательно, проекции этой точки должны лежать на проекциях обеих прямых, т.е. в точках $\mathbf{K^{I}}$ и $\mathbf{K^{II}}$ пересечения соответствующих проекций.

Скрещивающиеся прямые не имеют общей точки. Их проекции могут пересекаться, но точки пересечения не находятся в проекционной связи друг с другом, т. е. не лежат на перпендикуляре к соответствующей оси координат.

Изобразим прямоугольные проекции (Рис.2.11) двух скрещивающихся прямых **АВ** и **CD**. В точку пересечения их горизонтальных проекций проецируются две точки: точка **1**, принадлежащая прямой **АВ**, и точка **2**, принадлежащая прямой **CD**. *Эти точки называются конкурирующими*. С их помощью определяется взаимное положение прямых относительно плоскостей проекций (*видимость* проекций геометрических элементов). Так, в нашем случае, приведённом на Рис.2.11, луч, проецирующий прямые на плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ встретит раньше точку **1**. Следовательно, эта часть прямой **АВ** расположена выше прямой **CD**. Аналогично определим, что левая часть прямой **АВ** расположена дальше от плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ вместе с принадлежащей ей точкой **3**, чем прямая **CD**. В общем случае при определении видимости прямоугольных проекций на плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ направление проецирующего луча принимают заданным сверху вниз, на плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ - снизу вверх и на плоскости $\boldsymbol{\pi_3}$ - слева направо.

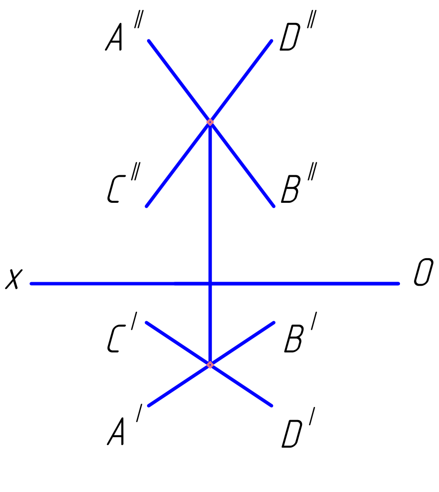


Рис.2.10

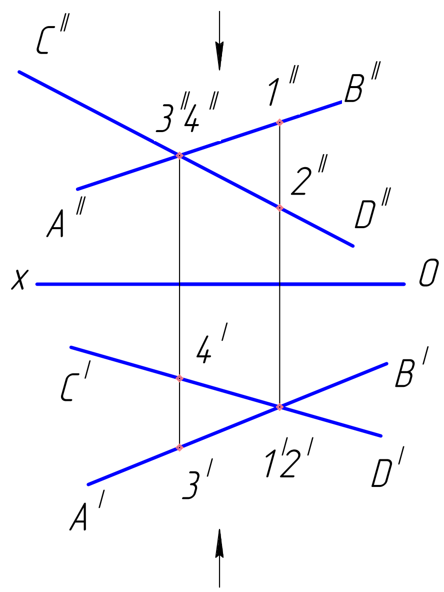


Рис.2.11

3 Вопросы для самопроверки

1. Какие существуют основные методы проецирования геометрических форм на плоскости?
2. Сформулируйте основные свойства параллельного проецирования.
3. Что понимается под термином «метод Монжа»?
4. Как называют и обозначают основные плоскости проекций?
5. Как построить горизонтальную проекцию точки по заданным фронтальной и профильной проекциям?
6. Как построить фронтальную проекцию точки по заданным горизонтальной и профильной проекциям точки?
7. Какие координаты точки можно определить по её горизонтальной проекции? Профильной проекции?
8. Какое изображение называют аксонометрией?
9. Какие имеются виды аксонометрии?
10. Как располагают оси прямоугольной изометрии? Чему равны натуральные и приведённые коэффициенты искажения в прямоугольной изометрии?
11. Как располагают оси прямоугольной диметрии? Чему равны натуральные и приведённые коэффициенты искажения в прямоугольной диметрии?
12. Чем определяется проекция прямой линии?
13. Какое положение может занимать прямая относительно плоскостей проекций?
14. Какие прямые называют линиями уровня? Проецирующими прямыми?
15. Что называют следом прямой линии?
16. Укажите правило построения следов прямой линии.
17. Как определить истинную длину отрезка прямой по его комплексному чертежу?
18. Как могут быть расположены в пространстве две различные прямые?
19. Как на чертеже изображают параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые?
20. Как на чертеже располагаются проекции точки пересечения пересекающихся прямых?

4 Плоскость

Плоскостью называется поверхность, обладающая тем свойством, что прямая, проходящая через любые две точки этой поверхности, лежит в ней всеми остальными точками.

Задание плоскости на чертежах осуществляется заданием геометрических элементов, определяющих положение этой плоскости в пространстве.

4.1 Способы задания плоскости

Различают следующие способы задания плоскости:

- *задание равнозначными геометрическими элементами;*
- *задание следами этой плоскости;*
- *задание плоскими фигурами.*

Рассмотрим подробнее каждый из этих способов.

К первому способу относят задание плоскости изображениями (Рис.4.1):

а) трёх точек, не лежащих на одной прямой;

б) прямой и точки вне этой прямой;

в) двух пересекающихся прямых;

г) двух параллельных прямых.

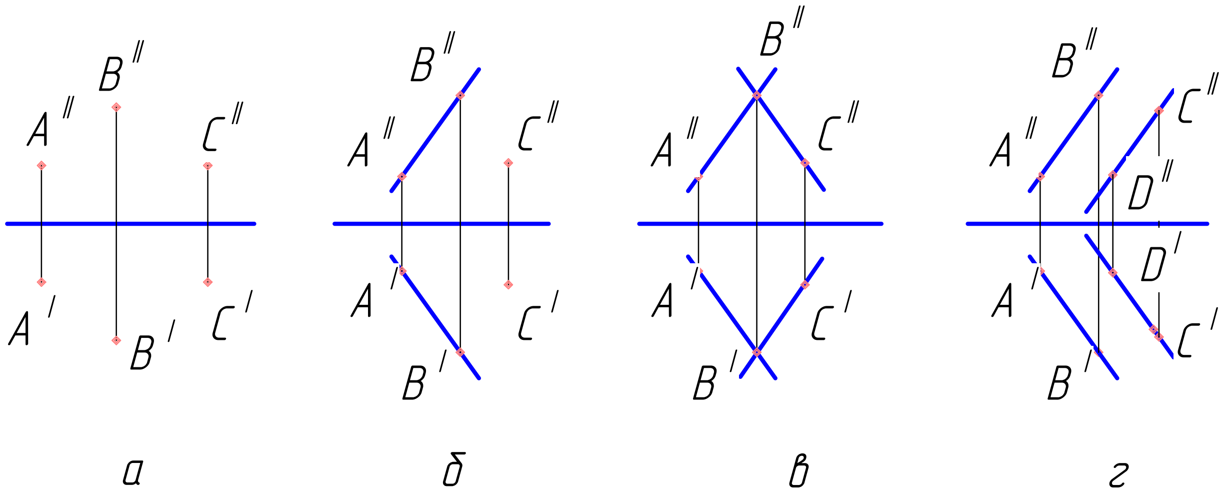


Рис.4.1

Следом плоскости на данной плоскости координат называется линия пересечения плоскости с указанной плоскостью координат. Задание плоскости следами обеспечивает наглядность изображения и позволяет наиболее просто решать задачи, связанные с построением изображений геометрических элементов, расположенных в этой плоскости.

Плоскостью общего положения называют плоскость, пересекающую все оси координат.

Покажем на чертеже (Рис.4.2, а) изображения осей координат и отметим на них произвольные точки $\mathbf{X_\alpha}$, $\mathbf{Y_\alpha}$, $\mathbf{Z_\alpha}$.

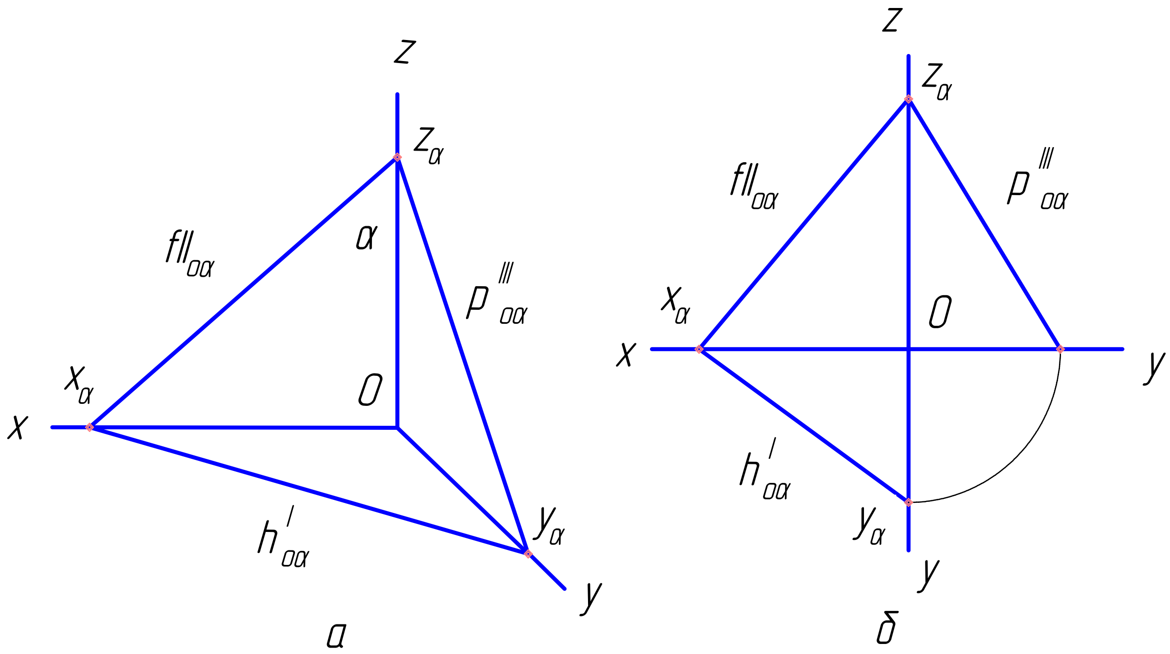


Рис.4.2

Соединяя эти точки прямыми линиями, получим изображение плоскости в виде треугольника, называемого треугольником следов. Сторонами этого треугольника являются линии пересечения плоскости общего положения $\boldsymbol{\alpha}$ с плоскостями координат – *следы плоскости*.

Их называют: горизонтальным следом $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$, фронтальным следом $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$, профильным следом $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$ плоскости $\boldsymbol{\alpha}$.

Точки $\mathbf{X_\alpha}$, $\mathbf{Y_\alpha}$, $\mathbf{Z_\alpha}$ называют *точками схода следов*. Положение плоскости относительно плоскостей координат определяется отрезками $\mathbf{ox_\alpha}$, $\mathbf{oy_\alpha}$, $\mathbf{oz_\alpha}$, называемыми *параметрами* плоскости ($\mathbf{OX_\alpha=X}$, $\mathbf{OY_\alpha=Y}$, $\mathbf{OZ_\alpha=Z}$).

Три заданных по величине и знаку параметра плоскости определяют положение её в системе координат.

Изображение следов плоскости в прямоугольных проекциях получают, откладывая на соответствующих осях координат (см. Рис.2, б) значения параметров плоскости. Соединяя точки схода следов $\mathbf{X_\alpha}$, $\mathbf{Y_\alpha}$, $\mathbf{Z_\alpha}$ прямыми линиями, получают изображения следов плоскости. Отметим, что отрезок $\mathbf{OY_\alpha}$ откладывается дважды – на горизонтальной и вертикальной составляющих оси **Oy**.

Для задания положения плоскости достаточно показать на чертеже два следа этой плоскости, так как при этом задаются все три параметра плоскости.

Рассмотрим пример построения следов плоскости общего положения с одним отрицательным параметром.

Пусть задана плоскость (**X**, **Y**, -**Z**). Откладывая на изображениях осей координат (Рис.4.3, а) значения параметров (с учётом коэффициентов искажения по осям), получим изображения точек схода следов $\mathbf{X_\alpha}$, $\mathbf{Y_\alpha}$ и $\mathbf{Z_\alpha}$.

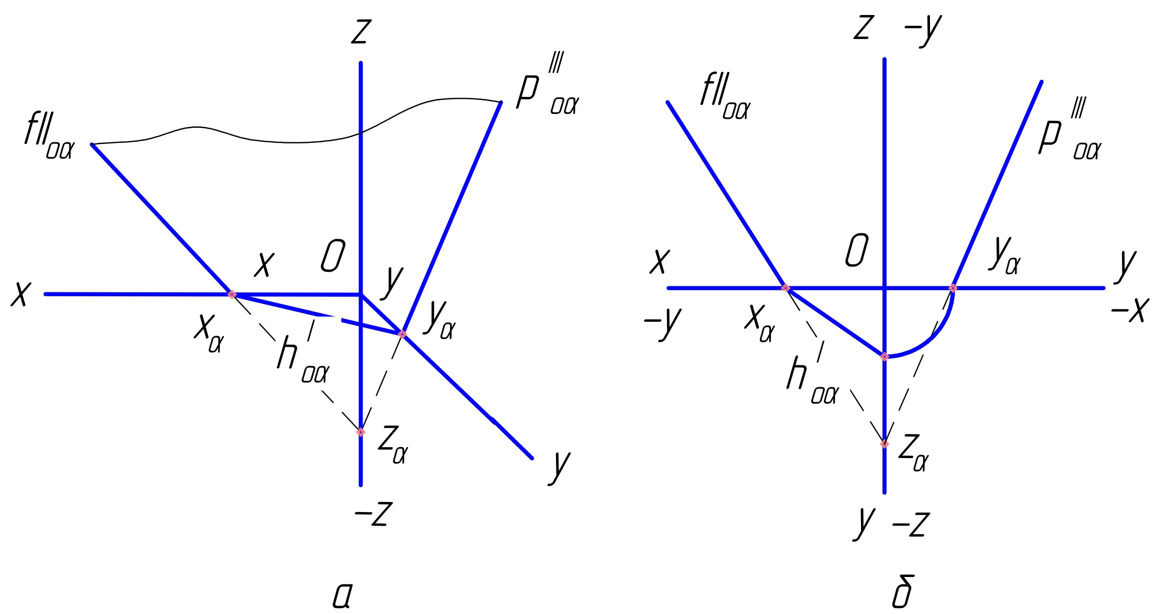


Рис.4.3

Соединив попарно эти точки прямыми линиями, получим изображения следов $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$, $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$, $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$. При этом, как правило, показывают сплошными линиями только те части следов, которые располагаются на плоскостях координат, ограничивающих первый октант.

Для построения прямоугольных проекций следов плоскости нанесём на чертёж (см. Рис.4.3, б) оси координат. Откладывая заданные значения параметров, отмечаем точки схода следов $\mathbf{X_\alpha}$, $\mathbf{Y_\alpha}$ и $\mathbf{Z_\alpha}$. Соединяя эти точки попарно прямыми линиями, получаем изображения следов.

Любую плоскую фигуру можно представить как часть плоскости, ограниченную ломаной или кривой линиями. Следовательно, задавая положения плоской фигуры в пространстве, тем самым мы задаём положение плоскости, частью которой является эта фигура. Положение плоской фигуры в пространстве определяется двумя её проекциями на плоскости координат. Так, чтобы построить проекции плоского многоугольника, достаточно построить проекции его вершин.

Треугольник, параллелограмм и трапеция, расположенные в плоскости общего положения, проецируются на плоскости координат соответственно в виде треугольника, параллелограмма и трапеции.

Это обусловлено тем, что три вершины треугольника как три любые точки, не лежащие на одной прямой, всегда лежат в одной плоскости. Покажем на чертеже (Рис.4.4, а) произвольную горизонтальную проекцию параллелограмма ($\mathbf{A^IB^I \parallel C^ID^I}$, $\mathbf{A^ID^I \parallel B^IC^I}$).

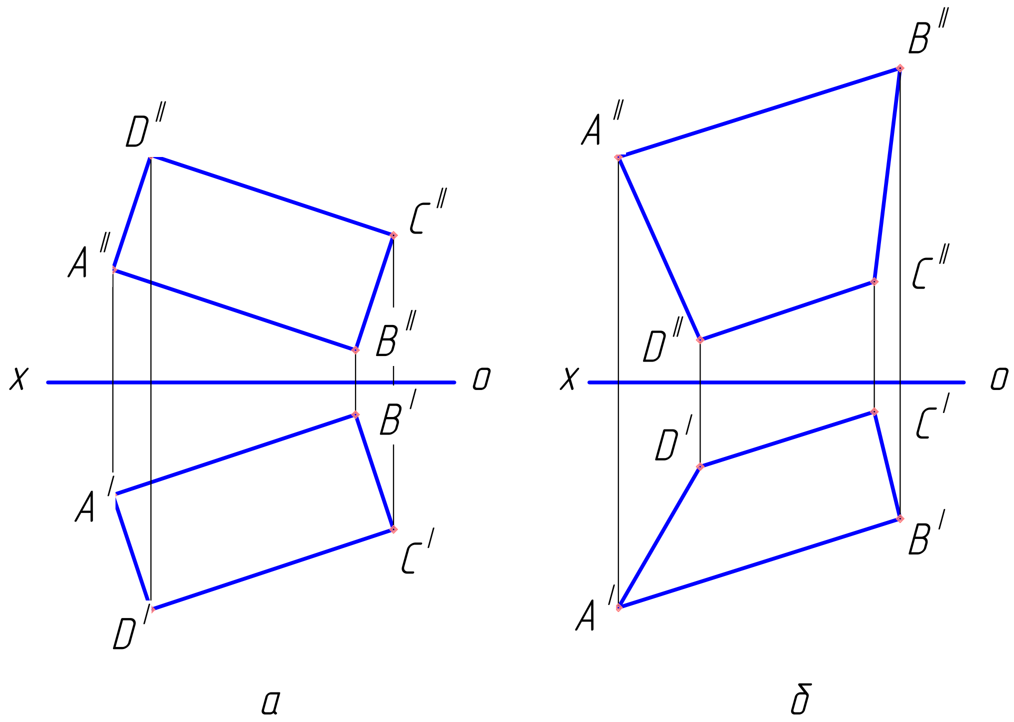


Рис.4.4

Фронтальную его проекцию найдём, построив вертикальные проекции вершин и выдерживая лишь проекционные связи между точками и параллельность между проекциями соответствующих сторон ($\mathbf{A^{II}B^{II}}\|\mathbf{C^{II}D^{II}}$, $\mathbf{A^{II}D^{II}}\|\mathbf{B^{II}C^{II}}$). Построение проекций трапеции (Рис.4.4, б) аналогично построению проекций параллелограмма. При этом должна быть выдержана лишь параллельность двух её сторон, например: $\mathbf{A^{I}B^{I}}\|\mathbf{C^{I}D^{I}}$, $\mathbf{A^{II}B^{II}}\|\mathbf{C^{II}D^{II}}$.

4.2 Прямая и точка в плоскости

Известно, что *прямая лежит в плоскости, если две точки прямой лежат в этой плоскости*. Чтобы построить прямую, лежащую в заданной плоскости, достаточно соединить прямой линией две точки, заведомо лежащие в плоскости. Такими точками могут быть и точки, *расположенные на следах плоскости*.

Пусть дана плоскость общего положения $\boldsymbol{\alpha}$ (Рис.4.5, а). Требуется построить прямую, лежащую в этой плоскости. Отметим на изображениях следов $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ две произвольные точки, соответственно, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Соединяя прямой точки $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, получим изображение отрезка, лежащего в плоскости $\boldsymbol{\alpha}$. Точки $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ принадлежат следам $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ и расположены, соответственно, в плоскостях координат $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_2}$. Следовательно, для построенной прямой точки $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ являются следами.

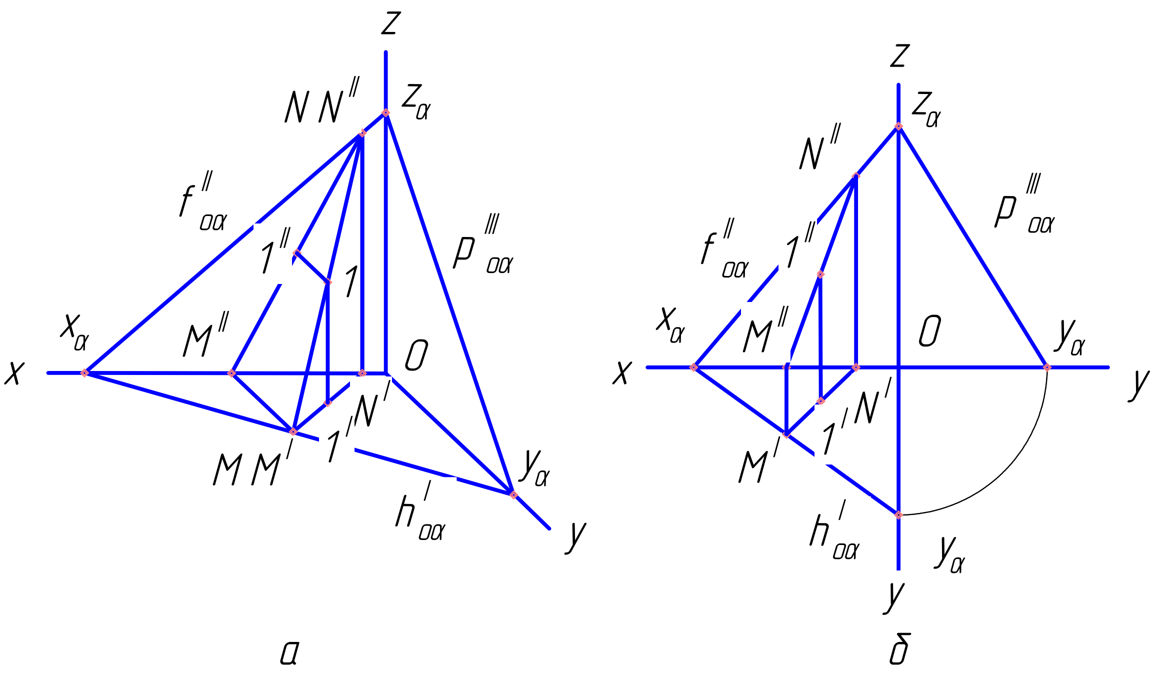


Рис.4.5

Из изложенного следует, что *прямая лежит в плоскости, если её следы лежат на соответствующих следах плоскости*.

Построим горизонтальную и фронтальную проекции прямой **MN** (Рис.4.5, а). При этом горизонтальная проекция $\mathbf{M^{I}}$ горизонтального следа и фронтальная проекция $\mathbf{N^{II}}$ фронтального следа совпадут с изображениями точек **M** и **N**. Фронтальную проекцию $\mathbf{M^{II}}$ горизонтального следа и горизонтальную проекцию $\mathbf{N^{I}}$ фронтального следа получим, построив изображение перпендикуляров, опущенных из точек **M** и **N** на ось **ox** ($\mathbf{M^{I}M^{II}}\|\mathbf{oy}$ и $\mathbf{N^{II}N^{I}}\|\mathbf{oz}$). Соединяя прямыми линиями соответствующие проекции следов, найдём изображения проекций прямой **MN**.

Чтобы построить прямоугольные проекции прямой общего положения, лежащей в плоскости, заданной следами (см. Рис.4.5, б), отмечают на следах плоскости две точки, например $\mathbf{M^{I}}$ и $\mathbf{N^{II}}$. Принимая эти точки, соответственно, за горизонтальную проекцию горизонтального следа и фронтальную проекцию фронтального следа искомой прямой, строят проекции $\mathbf{M^{II}}$ и $\mathbf{N^{I}}$, опуская перпендикуляры из точек $\mathbf{M^{I}}$ и $\mathbf{N^{II}}$ на ось **ox**. Соединяя соответствующие проекции следов прямыми линиями, получают проекции прямой, лежащей в плоскости $\boldsymbol{\alpha}$.

Чтобы построить точку, лежащую в плоскости, нужно провести вспомогательную прямую, лежащую в плоскости, и на не взять точку. Например, точка **1** ($\mathbf{1^{I},1^{II}}$), взятая на прямой **MN** (Рис.4.5, б), лежит в плоскости $\boldsymbol{\alpha}$.

Рассмотрим *частные случаи положения прямой в плоскости общего положения*. К таким случаям относят прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные какой – либо плоскости координат (*линии уровня*).

Прямая, лежащая в плоскости и параллельная плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ *называется горизонталью плоскости. Горизонталь параллельна горизонтальному следу плоскости.*

Построим проекции горизонтали плоскости общего положения (Рис.4.6, а, б).

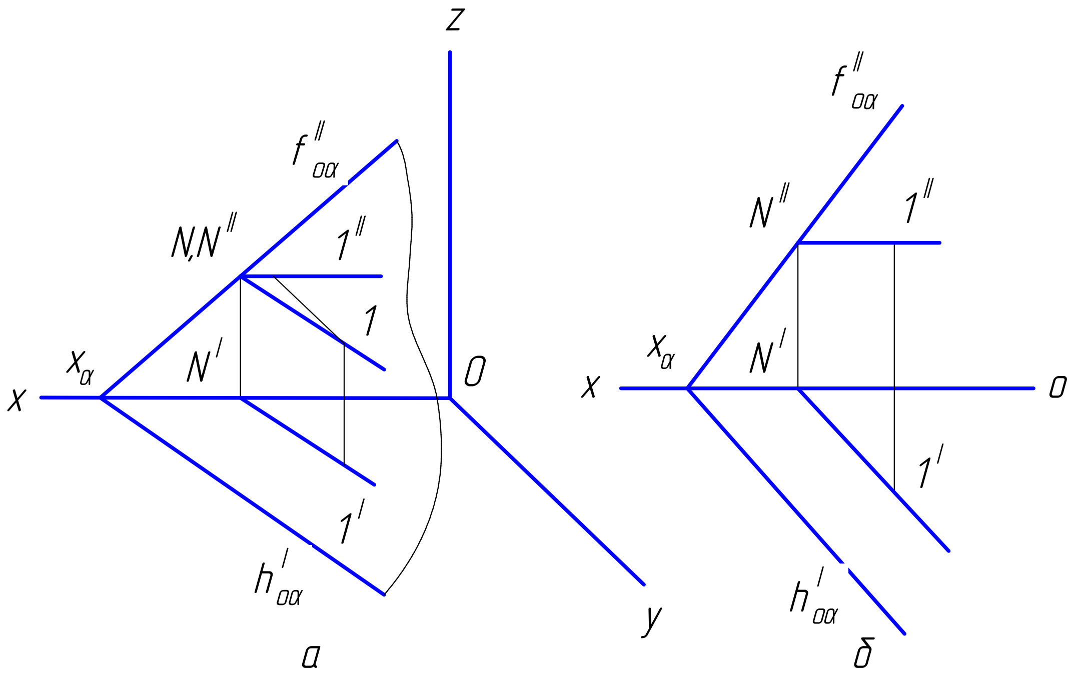


Рис.4.6

Для этого на следе $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ плоскости возьмём любую точку **N** (см. Рис.4.6, а) и из неё проведём прямую, параллельную изображению следа $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$. Для построения вторичных проекций горизонтали отметим на чертеже изображения проекций $\mathbf{N^{I}}$ и фронтального следа этой горизонтали. Изображение фронтальной проекции горизонтали найдём, проведя через точку $\mathbf{N^{II}}$ прямую, параллельную оси **ox**. Изображением горизонтальной проекции горизонтали будет прямая, проведённая через точку $\mathbf{N^{I}}$ параллельно изображению самой прямой и, следовательно, параллельно следу $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$. Возьмём на построенной горизонтали точку **1** и построим изображение её проекций. Для данного случая $\mathbf{N1 \| N^{I}1^{I} \| h^{I}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{N^{II}1^{II} \| ox}$.

Для построения прямоугольных проекций горизонтали (Рис.4.6, б) достаточно взять на следе $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ произвольную точку $\mathbf{N^{II}}$ (фронтальная проекция фронтального следа горизонтали) и построить горизонтальную проекцию $\mathbf{N^{I}}$ этой точки. Фронтальную проекцию горизонтали получим, проведя через точку $\mathbf{N^{II}}$ прямую, параллельную оси **ox**. Горизонтальной проекцией горизонтали будет прямая, проведённая через точку $\mathbf{N^{I}}$ параллельно следу $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$. Отметим проекции точки **1**, лежащей на горизонтали. При этом $\mathbf{N^{I}1^{I} \| h^{I}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{N^{II}1^{II} \| ox}$.

Прямая, лежащая в плоскости произвольного положения и параллельная плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ *называется фронталью плоскости.*

Построим косоугольные проекции осей координат и плоскости $\boldsymbol{\alpha}$, заданной следами (см. Рис.4.7,а). Возьмём произвольную точку **M** на следе $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ и проведём через неё прямую, параллельную $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$. Это и будет изображением фронтали. Построение вторичных проекций фронтали и точки на ней (например, точки 2) аналогично построению, показанному в предыдущем примере. При этом $\mathbf{M2 \| M^{II}2^{II} \| f^{II}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{M^{I}2^{I} \| ox}$. Для построения прямоугольных проекций фронтали (см. Рис.4.7, б) достаточно на следе $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ взять произвольную точку $\mathbf{M^{I}}$ (горизонтальная проекция горизонтального следа фронтали) и построить её фронтальную проекцию $\mathbf{M^{II}}$($\mathbf{M^{I}M^{II} \perp ox}$).

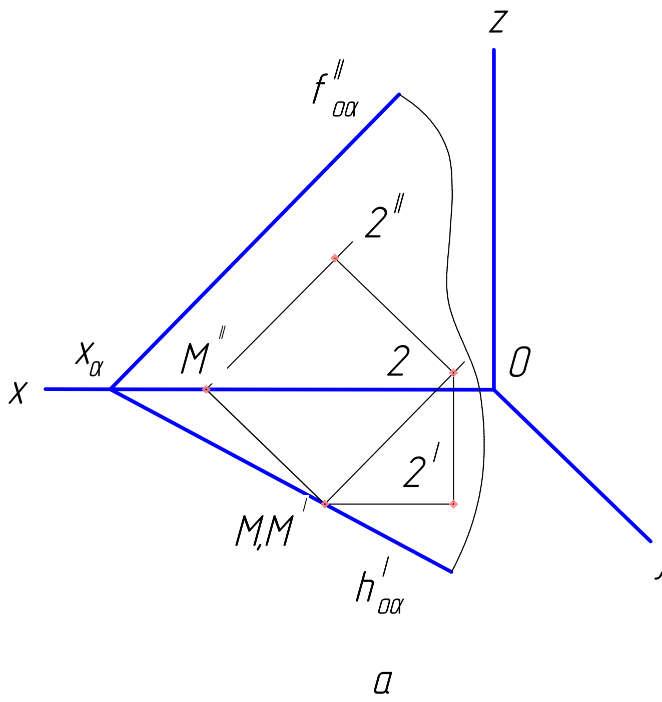


Рис.4.7, а

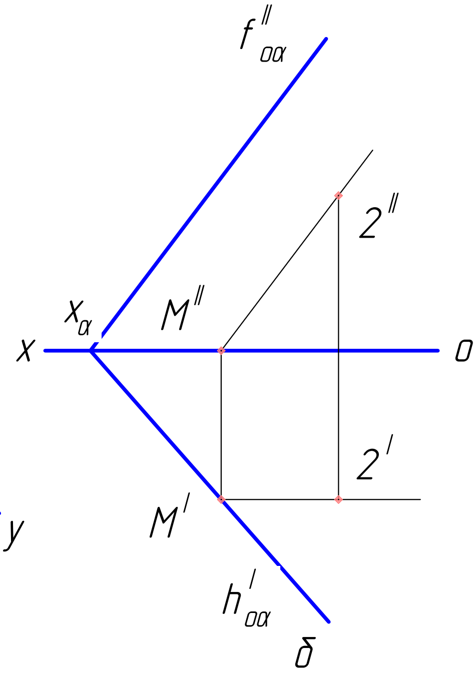


Рис.4.7, б

Горизонтальную проекцию фронтали получим, проведя через точку $\mathbf{M^{I}}$ прямую, параллельную оси **ox**. Фронтальной проекцией фронтали будет прямая, проведённая через точку $\mathbf{M^{II}}$ параллельно следу $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$. Отметим проекции точки **2**, лежащей на фронтали $\mathbf{M^{I}2^{I} \| ox}$ и $\mathbf{M^{II}2^{II} \| f^{II}_{o\alpha}}$.

Прямая, лежащая в плоскости и параллельная плоскости $\boldsymbol{\pi_3}$ *называется профильной.* Рассматривать её построение не будем, так как оно аналогично построению горизонтали и фронтали.

4.3 Частные случаи положения плоскости

К частным случаям положения плоскости относят плоскости:

- перпендикулярные одной из плоскостей координат;

- параллельные одной из плоскостей координат;
- проходящие через ось координат;
- проходящие через начало координат.

Рассмотрим более подробно построение изображений плоскостей, перпендикулярных какой – либо плоскости координат. Такие плоскости называют проецирующими плоскостями.

Возможны три типа плоскостей, перпендикулярных к плоскостям координат, а именно:

1) плоскости, перпендикулярные к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$;

2) плоскости, перпендикулярные к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$;

3) плоскости, перпендикулярные к плоскости $\boldsymbol{\pi_3}$;

Плоскость, перпендикулярная к плоскости $\boldsymbol{\pi_4}$, параллельна оси **z**. Параметр z такой плоскости равен бесконечности.
Построим косоугольную проекцию такой плоскости (см. Рис.4.8, а).

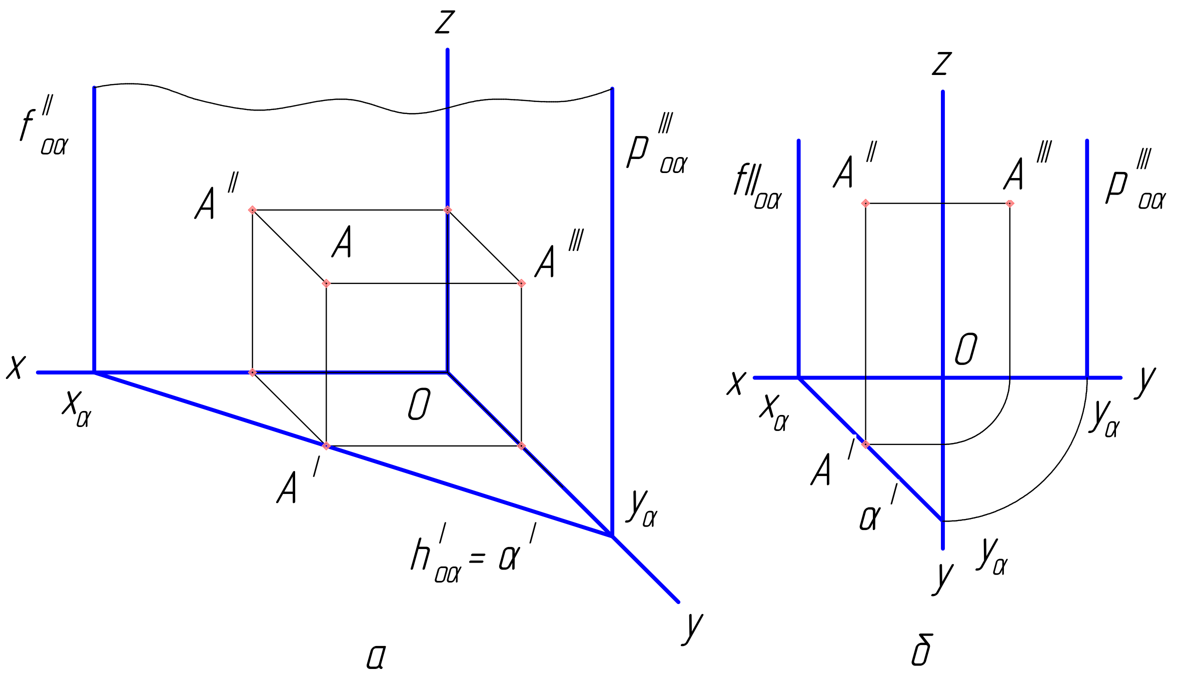


Рис.4.8

Откладывая на осях координат параметры z и y, находим точки схода следов $\mathbf{x_\alpha}$ и $\mathbf{y_\alpha}$, соединяя которые прямой линией, получим изображение горизонтального следа $\boldsymbol{\alpha^{I}}$. Так как точка схода $\mathbf{z_\alpha}$ удалена в бесконечность, то изображения фронтального $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ и профильного $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$ следов получим, проводя из точек $\mathbf{x_\alpha}$ и $\mathbf{y_\alpha}$ прямые, параллельные оси **oz**.

Следы $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$, как параллельные оси **oz**, соответственно перпендикулярны к осям **ox** ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha} \perp ox}$) и **oy** ($\mathbf{p^{III}_{o\alpha} \perp oy}$).

Возьмём в плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ произвольную точку **A** и построим её вторичные проекции. Горизонтальную проекцию найдём на следе $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$. Изображения фронтальной и профильной проекций получим, построив параллелепипед координат точки.

Заметим важное обстоятельство: *горизонтальная проекция точки или любого геометрического элемента, расположенного в плоскости* $\boldsymbol{\alpha}$*, перпендикулярной к плоскости* $\boldsymbol{\pi_1}$*, совпадает со следом* $\boldsymbol{h^{I}_{o\alpha}}$.

Плоскость, перпендикулярная к плоскости $\boldsymbol{\pi_4}$, называется горизонтально – проецирующей плоскостью. Построим прямоугольные проекции плоскости, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Для этого на осях координат отметим точки $\mathbf{x_\alpha}$ и $\mathbf{y_\alpha}$ (см. Рис.4.8, б). След $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ получим, соединяя прямой линией точку $\mathbf{x_\alpha}$ с точкой $\mathbf{y_\alpha}$, отмеченной на вертикальной оси $\mathbf{oy}$. Следы $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$ найдём, проводя прямые, параллельные оси $\mathbf{oz}$ из точек $\mathbf{x_\alpha}$ ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}\perp\mathbf{ox}$) и $\mathbf{y_\alpha}$, отмеченной на горизонтальной оси $\mathbf{oy}$ ($\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}\perp\mathbf{oy}$).

Построим прямоугольные проекции точки **A**, лежащей в горизонтально – проецирующей плоскости. Её горизонтальной проекцией будет произвольная точка $\mathbf{A^{I}}$ на следе $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$. Проекции $\mathbf{A^{II}}$ и $\mathbf{A^{III}}$ найдём, задаваясь значением координаты Z точки.

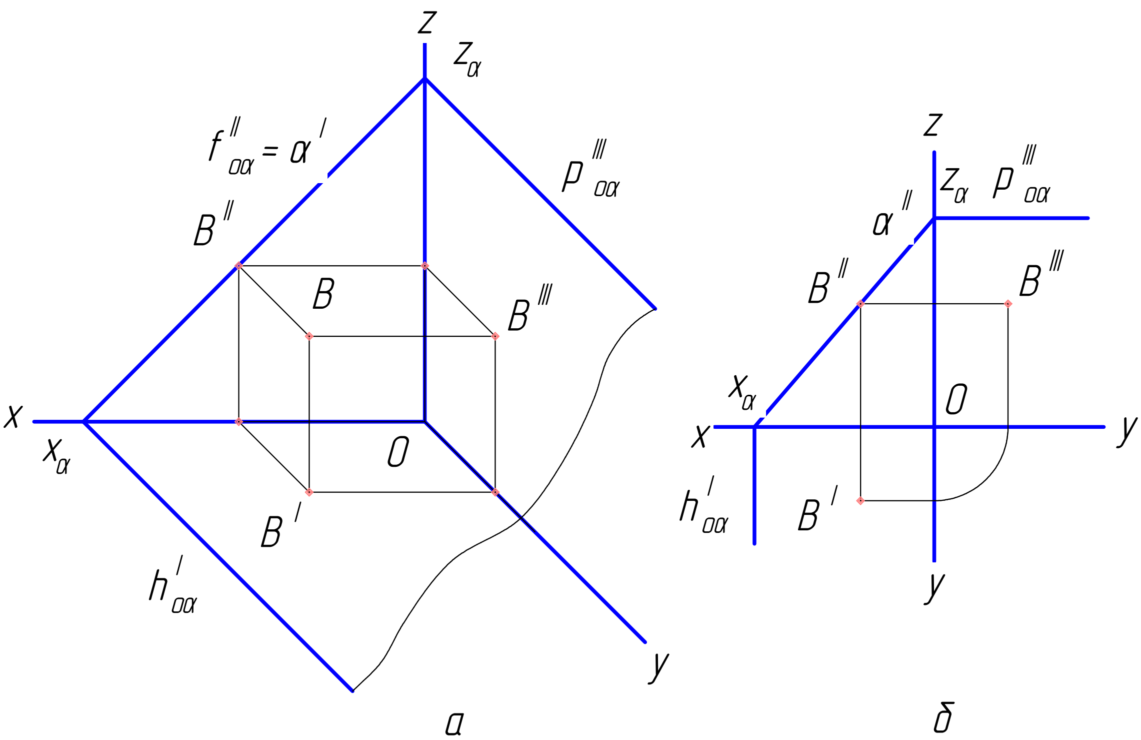


Рис.4.9

Рассмотрим построение проекций плоскости, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$. Откладывая на изображениях осей координат параметры X и Z (см. Рис.4.9, а), находим точки $\mathbf{x_\alpha}$ и $\mathbf{z_\alpha}$, соединяя которые прямыми линиями, получаем изображение следа $\boldsymbol{\alpha^{I}}$. Изображения следов $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$ найдём, проводя из точек схода следов $\mathbf{x_\alpha}$ и $\mathbf{z_\alpha}$ прямые, параллельные оси $\mathbf{oy}$.

В прямоугольных проекциях (см. Рис.4.9, б) след $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ - прямая, проведённая из точки $\mathbf{x_\alpha}$ параллельно вертикальной оси **oy** ($\mathbf{h^{I}_{o\alpha}\perp ox}$), а след $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$ - прямая, проведённая из точки $\mathbf{z_\alpha}$ параллельно горизонтальной оси **oy** ($\mathbf{p^{III}_{o\alpha}\perp oz}$).

Изображение фронтальной проекции $\mathbf{B^{II}}$ точки **B** (см. Рис.4.8, а, б) совпадает со следом $\boldsymbol{\alpha^{II}}$, а изображения проекций $\mathbf{B^{I}}$ и $\mathbf{B^{III}}$ могут быть построены по заданной координате y этой точки.

Плоскость, перпендикулярная к плоскости **V**, называется *фронтально - проецирующей плоскостью*.

Построим изображение следов плоскости, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_3}$ (см. Рис.4.10, а, б). Такая плоскость параллельна оси **ox**. Откладывая на осях координат параметры y и Z, отметим точки схода следов $\mathbf{y_\alpha}$ и $\mathbf{z_\alpha}$.

Изображение следа $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$ найдём, соединяя прямой линией точку $\mathbf{z_\alpha}$ с точкой $\mathbf{y_\alpha}$ (в прямоугольных проекциях на Рис.4.10, б – через точку $\mathbf{y_\alpha}$ на горизонтальной оси **oy**). Отметим, что при прямоугольном проецировании $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}\perp oy}$ и $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}\perp oz}$. Если взять точку **C** в плоскости $\boldsymbol{\alpha}$, то изображение её профильной проекции будет находиться на следе $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$.

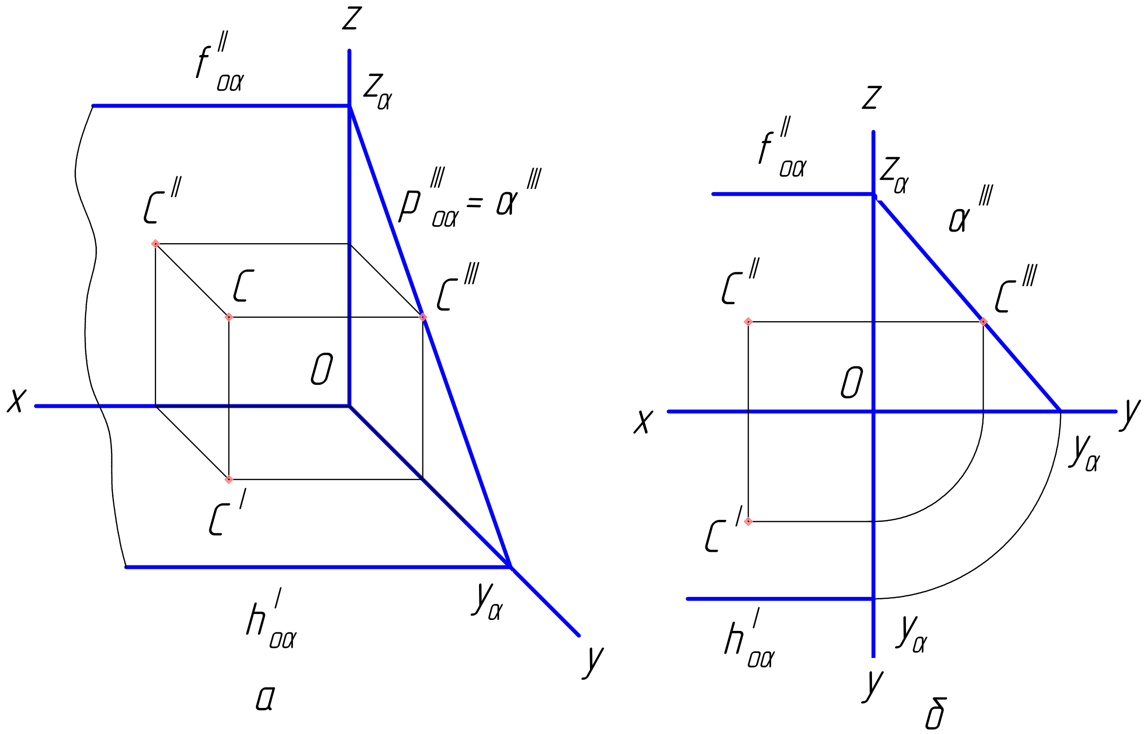


Рис.4.10

Изображения проекций $\mathbf{C^{I}}$ и $\mathbf{C^{II}}$ могут быть построены по заданной координате X этой точки.

Плоскость, перпендикулярная к плоскости $\boldsymbol{\pi_3}$, называется *профильно - проецирующей плоскостью*.

4.4 Взаимное положение прямой и плоскости

Возможны следующие случаи взаимного положения прямой и плоскости:

- прямая лежит в плоскости;
- прямая параллельна плоскости;
- прямая перпендикулярна к плоскости;
- прямая пересекает плоскость.

Первый случай взаимного положения прямой и плоскости был ранее рассмотрен. Отметим лишь, что *прямая лежит в плоскости, если её следы лежат на соответствующих следах плоскости*.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой – либо прямой, лежащей в плоскости. Задача о проведении прямой, параллельной заданной плоскости, через данную точку – неопределённа, так как в плоскости может быть проведено бесчисленное множество прямых и такое же количество параллельных им прямых может быть проведено через данную точку. Для определённости решения должно быть задано дополнительное условие (направление прямой или одна из её проекций).

Пример 1. Даны проекции $\mathbf{A^{I}}$ и $\mathbf{A^{II}}$ точки **A** и горизонтальная проекция $\mathbf{A^{I}B^{I}}$ прямой **AB**, параллельной заданной плоскости $\boldsymbol{\alpha}$. Построить фронтальную проекцию этой прямой (см. Рис.4.11).

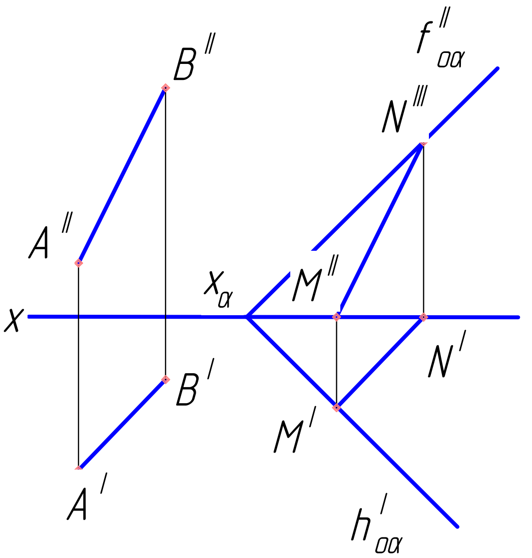


Рис.4.11

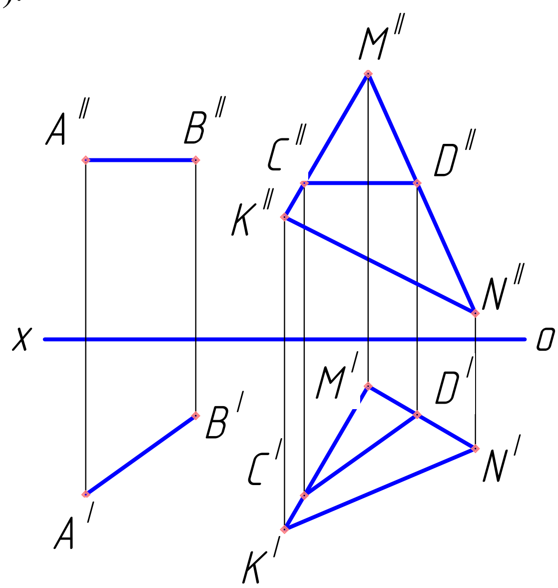


Рис.4.12

Построение осуществляем в такой последовательности. В заданной плоскости строим проекции вспомогательной прямой, параллельной искомой. Для этого проведём $\mathbf{M^{I}N^{I} \parallel A^{I}B^{I}}$ и построим фронтальную проекцию $\mathbf{M^{II}N^{II}}$ этой прямой. Затем проводим недостающую проекцию искомой прямой параллельно соответствующей проекции вспомогательной прямой, т.е. через точку $\mathbf{A^{II}}$ проводим прямую $\mathbf{A^{II}B^{II} \parallel M^{II}N^{II}}$.

Пример 2. Через точку **A**, заданную проекциями $\mathbf{A^{I}}$ и $\mathbf{A^{II}}$, провести прямую, параллельную горизонтали плоскости, заданной треугольником (см.

Рис.4.12). В этом случае в качестве дополнительного условия задано направление прямой. Проведём в плоскости треугольника **KMN** произвольную горизонталь **CD**. Искомые проекции прямой, проходящей через точку **A** и параллельной горизонтали **CD**, получим, проведя через точки $\mathbf{A^{I}}$ и $\mathbf{A^{II}}$ прямые, параллельные соответствующим проекциям горизонтали. Точка **B** ($\mathbf{B^{I}}$,$\mathbf{B^{II}}$) взята произвольно.

Прямая перпендикулярна к плоскости, если её прямоугольные проекции перпендикулярны к соответствующим следам этой плоскости.

Для доказательства данного утверждения изобразим плоскости координат и произвольную плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ (см. Рис.4.13).

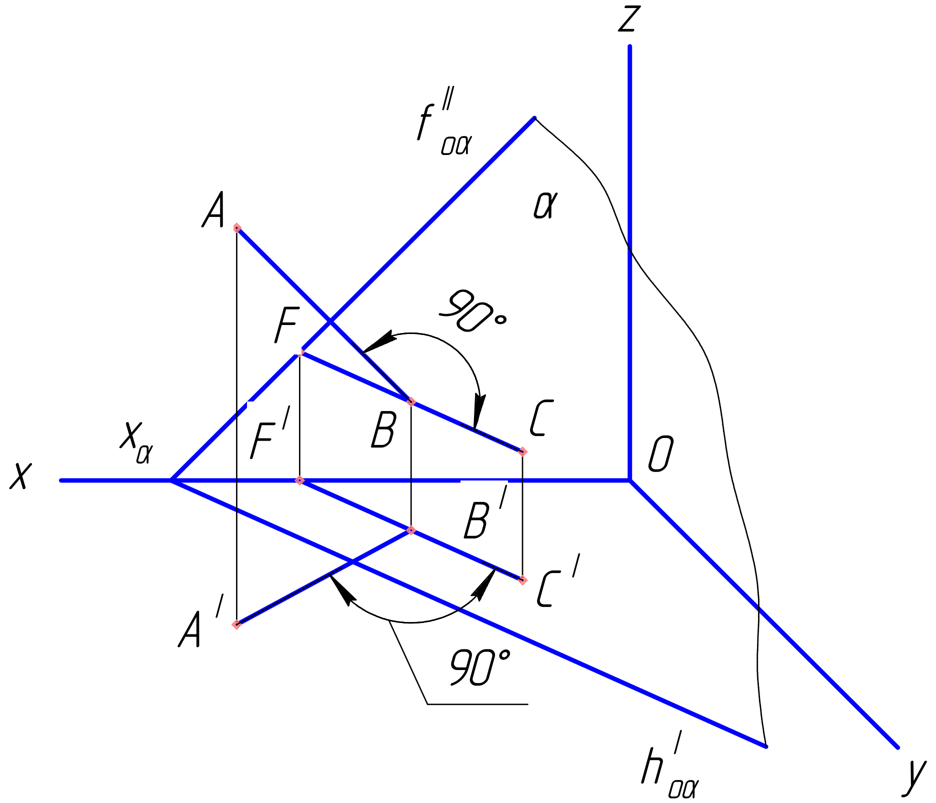


Рис.4.13

Пусть прямая **AB** перпендикулярна к плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ и пересекает её в точке **B**. Известно, что эта прямая должна быть перпендикулярна и к любой прямой, проведённой в плоскости через точку **B**.

Проведём через точку **B** горизонталь плоскости ($\mathbf{FC} \parallel \mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$).Тогда (в натуре) $<\mathbf{ABC}=90^0$. Построим горизонтальные проекции горизонтали ($\mathbf{FC^{I}} \parallel \mathbf{FC} \parallel \mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$) и прямой $\mathbf{A^{I}B^{I}}$. Если $<\mathbf{ABC}=90^0$ и $\mathbf{BC} \parallel \mathbf{B^{I}C^{I}}$, то $<\mathbf{A^{I}B^{I}C^{I}}=90^0$, так как плоскости, ограниченные четырёхугольниками $\mathbf{ABB^{I}A^{I}}$ и $\mathbf{BCC^{I}B^{I}}$, перпендикулярны плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ и взаимно перпендикулярны. Отсюда $\mathbf{A^{I}B^{I}} \perp \mathbf{B^{I}C^{I}}$. Но $\mathbf{B^{I}C^{I}} \parallel \mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$, следовательно $\mathbf{A^{I}B^{I}} \perp \mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$, т. е. горизонтальная проекция $\mathbf{A^{I}B^{I}}$ перпендикулярна к горизонтальному следу плоскости.

Аналогичным построением можно показать, что фронтальные и профильные проекции прямой **AB** перпендикулярны к соответствующим следам плоскости.

Пример 3. Из произвольной точки на плоскости, заданной следами, построить перпендикуляр к ней.

Пусть даны плоскость **α** ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}, h^{I}_{o\alpha}}$) и точка **A** ($\mathbf{A^{I}, A^{II}}$), лежащая в плоскости **α** ($\mathbf{A^{I}}$ и $\mathbf{A^{II}}$) лежат на проекциях горизонтали этой плоскости (см. Рис.4.14). Проекции перпендикуляра, восстановленного из точки **A** к плоскости **α**, изображаются в виде прямых, проведённых из точек $\mathbf{A^{I}}$ и $\mathbf{A^{II}}$ и перпендикулярно к соответствующим следам плоскости ($\mathbf{A^{I}B^{I} \perp h^{I}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{A^{II}B^{II} \perp f^{II}_{o\alpha}}$). Точка **B** ($\mathbf{B^{I}, B^{II}}$) взята произвольно.

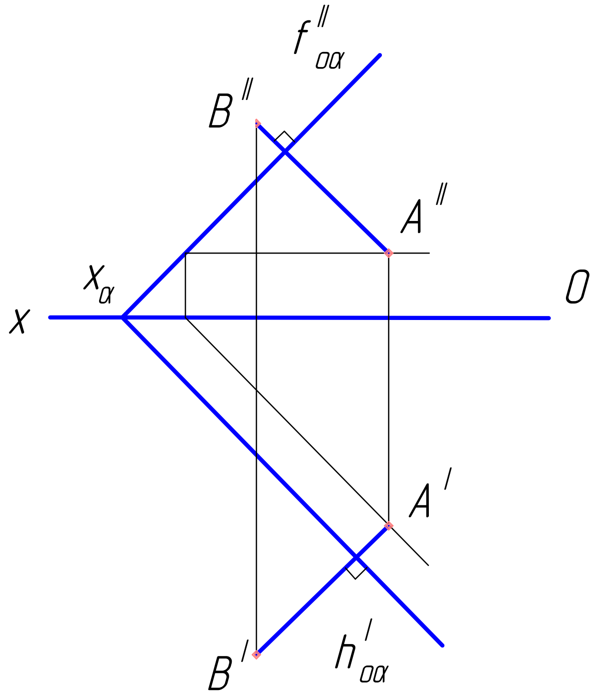


Рис.4.14

Пример 4. Из точки A восстановить перпендикуляр к плоскости, заданной треугольником **ACD** (Рис.4.15).

В данном случае нет необходимости строить следы плоскости, так как известно, что они параллельны соответствующим проекциям горизонтали и фронтали плоскости. Поэтому строим проекции горизонтали **AF** и фронтали **AE**. Проекции перпендикуляра, восстановленного из точки **A** к плоскости треугольника, получим, проведя $\mathbf{A^{II}B^{II} \perp A^{II}E^{II}}$ и $\mathbf{A^{I}B^{I} \perp A^{I}F^{I}}$.

Точка **B** ($\mathbf{B^{I}, B^{II}}$) взята на перпендикуляре произвольно.

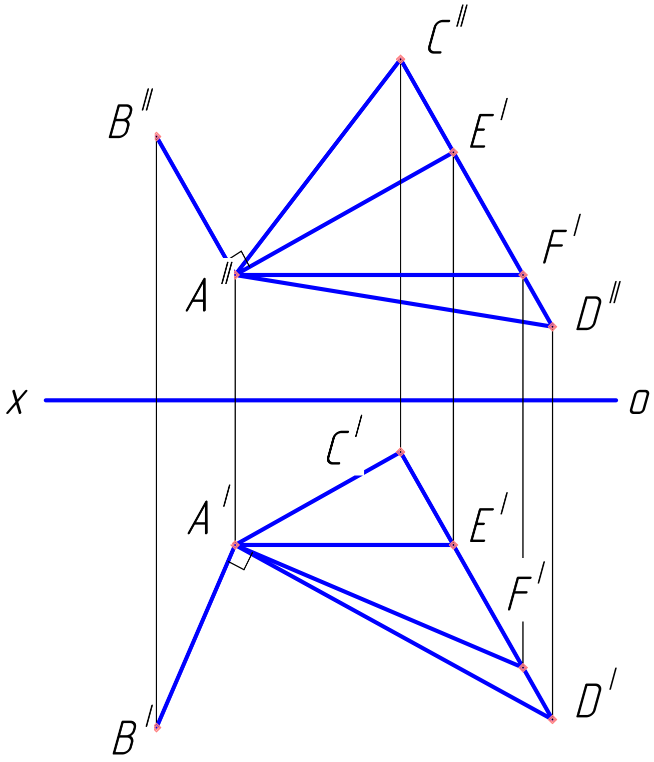


Рис.4.15

Случай пересечения прямой с плоскостью будет разобран после изложения следующего параграфа.

4.5 Взаимное положение плоскостей

Плоскости могут быть параллельны, взаимно перпендикулярны и могут пересекаться.

Известно, что две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым. Следы двух параллельных плоскостей – это линии их пересечения с плоскостями координат. Следовательно, соответствующие следы двух параллельных плоскостей – параллельны.

Пример 1. Через точку, заданную проекциями $\mathbf{A^I}$ и $\mathbf{A^{II}}$, провести плоскость, параллельную плоскости, заданной следами $\mathbf{f^{II}}_{\mathbf{o\alpha}}$ и $\mathbf{h^I}_{\mathbf{o\alpha}}$ (см. Рис.4.16). Направление следов искомой плоскости известно (они параллельны следам $\mathbf{f^{II}}_{\mathbf{o\alpha}}$ и $\mathbf{h^I}_{\mathbf{o\alpha}}$). Следовательно, для решения задачи достаточно найти точку, принадлежащую одному из следов, т.е. найти след любой прямой, лежащей в искомой плоскости и проходящей через точку $\mathbf{A}$. Такой прямой может быть, например, горизонталь. Строим проекции горизонтали ($\mathbf{N^I A^I} \parallel \mathbf{h^I}_{\mathbf{o\alpha}}$ и $\mathbf{N^{II} A^{II}} \parallel \mathbf{ox}$). Проводим через точку $\mathbf{N^{II}}$ фронтальный след искомой плоскости ($\mathbf{f^{II}}_{\mathbf{o\beta}} \parallel \mathbf{f^{II}}_{\mathbf{o\alpha}}$). Горизонтальный след $\mathbf{h^I}_{\mathbf{o\beta}}$ получим, проведя прямую через точку схода следов $\mathbf{x_\beta}$ параллельно следу $\mathbf{h^I}_{\mathbf{o\alpha}}$.

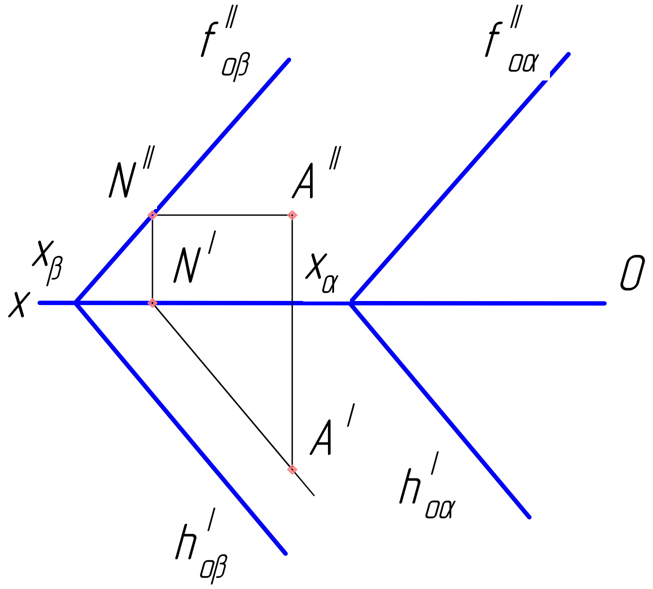


Рис.4.16

Пример 2.Через точку **A** ($\mathbf{A^{I}}$,$\mathbf{A^{II}}$) провести плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ параллельную плоскости треугольника **BCD** (Рис.4.17).

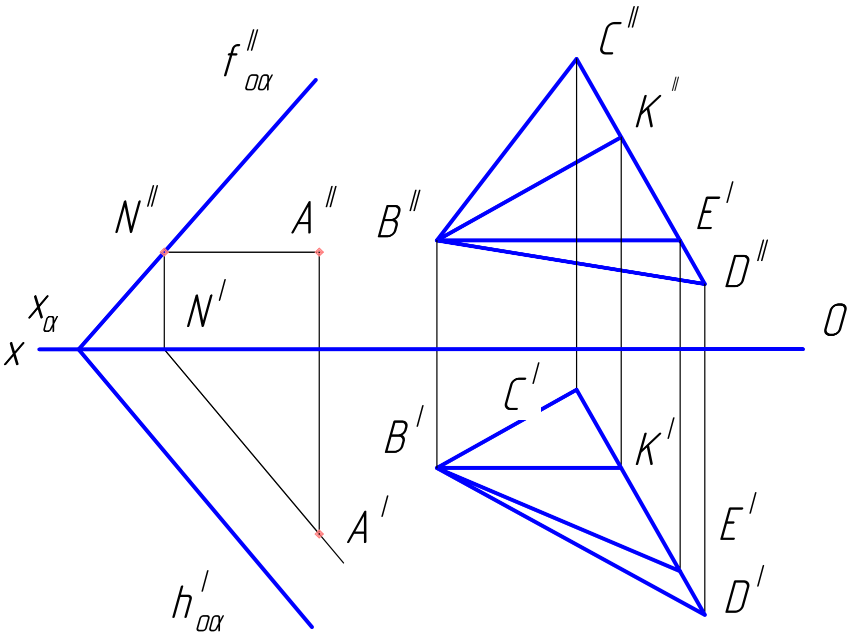


Рис.4.17

Направления следов искомой плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ определим, проводя в плоскости треугольника горизонталь и фронталь, например **BE** и **BK**. Далее строим проекции горизонтали плоскости $\boldsymbol{\alpha}$, проходящей через точку **A** ($\mathbf{N^{I}A^{I} \parallel B^{I}E^{I}}$ и $\mathbf{N^{II}A^{II} \parallel ox}$). Фронтальный след $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ искомой плоскости получим, проведя через точку $\mathbf{N^{II}}$ прямую, параллельную $\mathbf{B^{II}K^{II}}$. Горизонтальный след $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$

проходит через точку схода следов $\mathbf{x}_\alpha$ и параллелен горизонтальной проекции горизонтали.

Отметим, что искомая плоскость может быть изображена двумя пересекающимися прямыми, параллельными сторонами заданного треугольника и проведёнными через точку **A**.

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой. Задача о проведении плоскости, перпендикулярной к заданной, через данную точку неопределённа, так как через перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, можно провести бесчисленное множество плоскостей. В качестве дополнительного условия может быть задана, например, прямая, через которую следует провести плоскость, перпендикулярную заданной.

Пример 3.Через прямую **AB** ($\mathbf{A^I B^I}, \mathbf{A^{II} B^{II}}$) провести плоскость $\boldsymbol{\beta}$ (Рис.4.18), перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$, $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$).

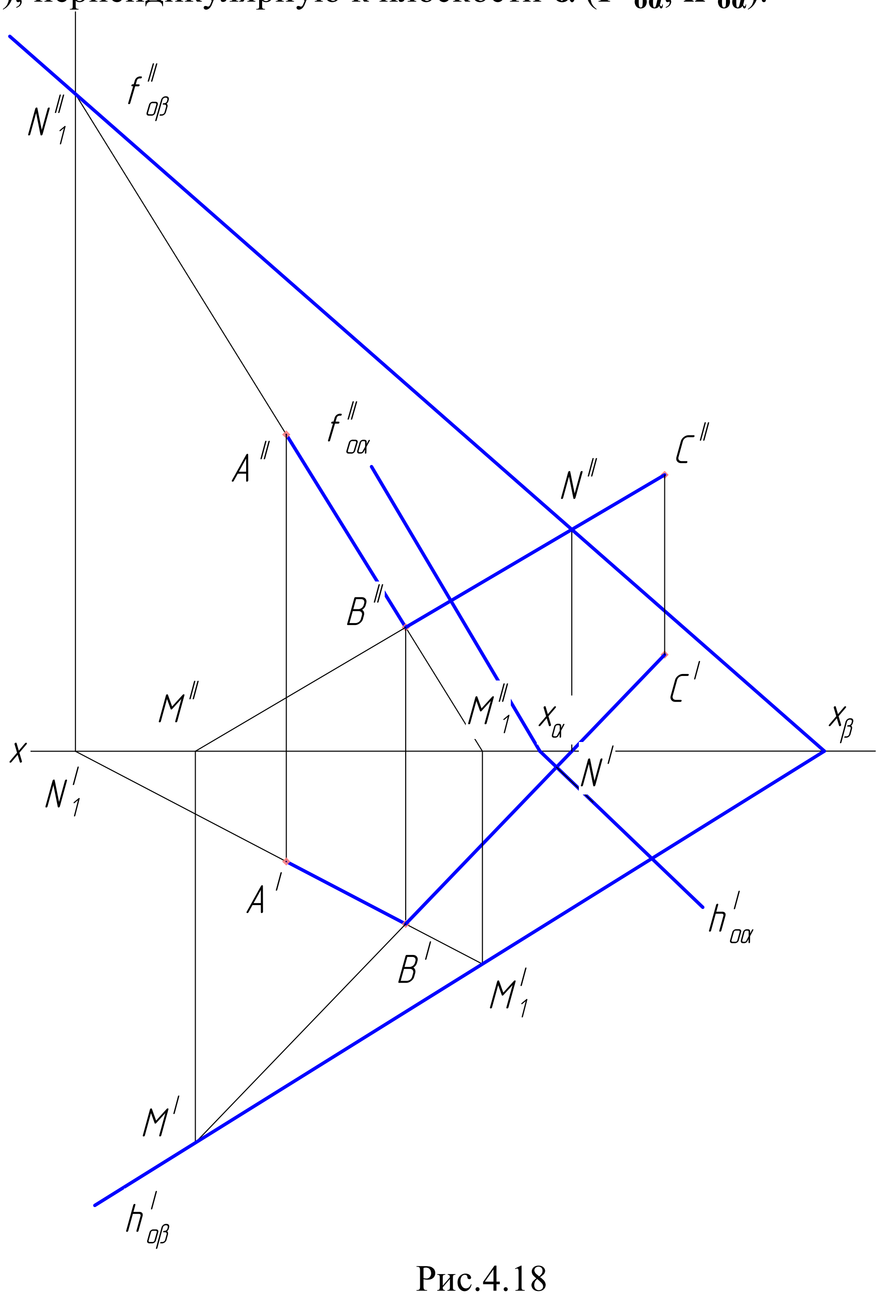


Рис.4.18

Искомая плоскость должна проходить через перпендикуляр к плоскости **α**. Построим проекции перпендикуляра, опущенного из произвольной точки заданной прямой (например, точки **B**) на плоскость **α** ($\mathbf{B^{II}C^{II}\perp f^{II}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{B^{I}C^{I}\perp h^{I}_{o\alpha}}$). Плоскость, определяемая двумя пересекающимися прямыми **AB** и **BC**, будет искомой. Для построения следов искомой плоскости необходимо найти проекции следов прямых **AB** и **BC**. Следы $\mathbf{h^{I}_{o\beta}}$ и $\mathbf{f^{II}_{o\beta}}$ получим, проводя прямые через одноимённые проекции ($\mathbf{M^{I}M^{I}_{1}, N^{II}N^{II}_{1}}$) горизонтальных и фронтальных следов указанных прямых.

Пример 4.Через точку **A** ($\mathbf{A^{I},A^{II}}$) провести горизонтально проецирующую плоскость **β**, перпендикулярную к плоскости **α** (Рис.4.19).

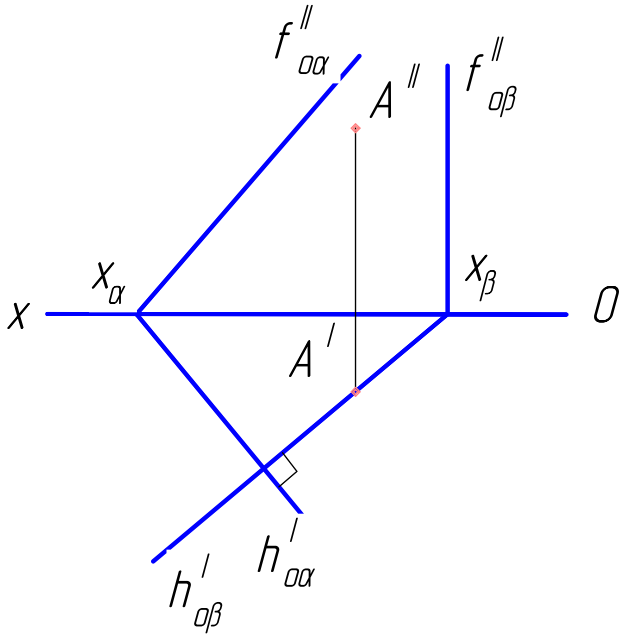


Рис.4.19

В данном случае дополнительным условием является задание типа плоскости. Искомая плоскость должна проходить через перпендикуляр, опущенный из точки **A** на плоскость **α**. Горизонтальная проекция этого перпендикуляра должна совпадать с горизонтальным следом искомой плоскости и быть перпендикулярной к следу $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$. Поэтому след $\mathbf{h^{I}_{o\beta}}$ искомой плоскости получим, проведя через горизонтальную проекцию $\mathbf{A^{I}}$ прямую, перпендикулярную к следу $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$. След $\mathbf{f^{II}_{o\beta}}$ - прямая, перпендикулярная к оси **ox**, проведённая из точки схода следов $\mathbf{x_\beta}$.

Необходимо указать, что *в общем случае соответствующие следы взаимно перпендикулярных плоскостей не перпендикулярны друг к другу*.

Две плоскости пересекаются по прямой линии. *Линия пересечения двух плоскостей проходит через точки пересечения одноимённых следов этих плоскостей.*

Рассмотрим построение проекций линии пересечения двух плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ *и* $\boldsymbol{\beta}$ *(*Рис.4.20, а, б), заданных следами.

Изображения одноимённых следов этих плоскостей пересекаются в точках **M** и **N** (Рис.4.20, а). Прямая **MN** - линия пересечения плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

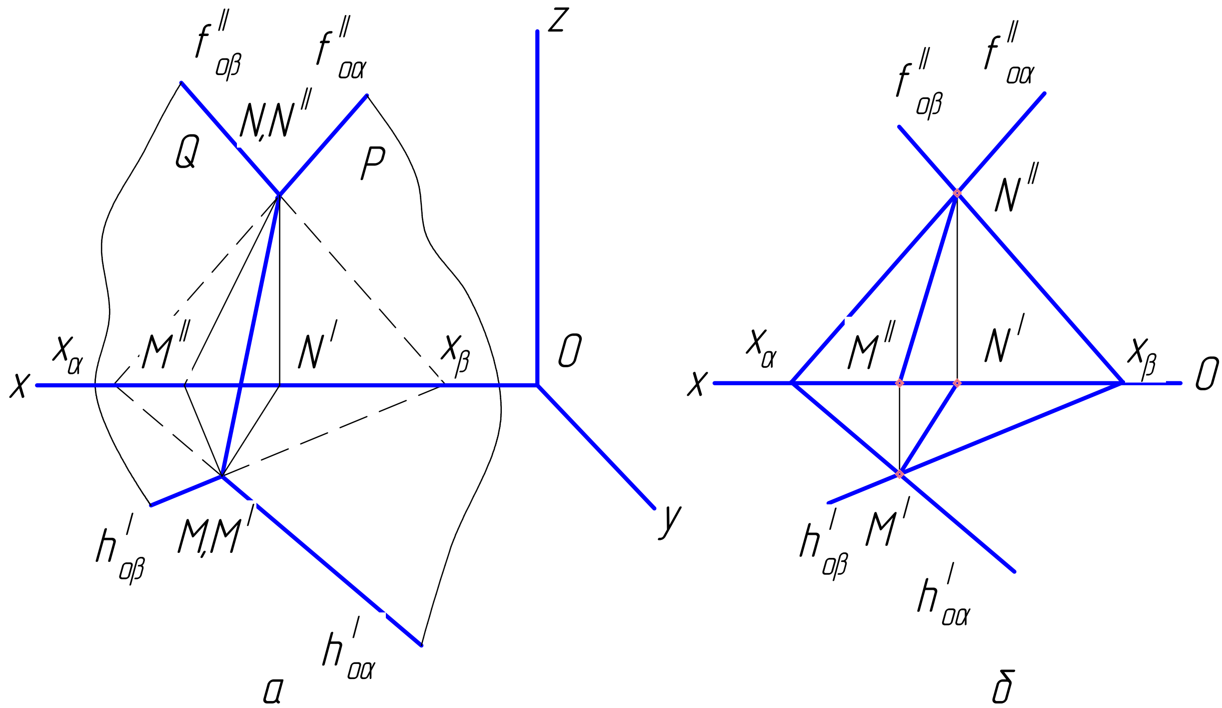


Рис.4.20

Изображения проекций ($\mathbf{M^IN^I}$ и $\mathbf{M^{II}N^{II}}$) линии пересечения плоскостей получим, соединяя прямыми линиями изображения соответствующих проекций её следов.

Построим прямоугольные проекции (Рис.4.20, б) следов искомой линии пересечения плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Проекции $\mathbf{M^I}$ и $\mathbf{N^{II}}$ этих следов совпадают с точками пересечения соответствующих следов плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Проекции $\mathbf{M^{II}}$ и $\mathbf{N^I}$ найдём на оси **ox**. Проекции искомой линии пересечения получим, соединяя прямыми линиями соответствующие проекции её следов.

Рассмотрим построение проекций линий пересечения двух плоскостей, у которых два одноимённых следа взаимно параллельны.

Пусть даны две пересекающиеся плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ (Рис.4.21), у которых горизонтальные следы параллельны ($\mathbf{h^I_{o\alpha}} \parallel \mathbf{h^I_{o\beta}}$). Проекции фронтального следа искомой линии пересечения отыскиваются просто: $\mathbf{N^{II}}$- в точке пересечения $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ с $\mathbf{f^{II}_{o\beta}}$ – на оси **ox**. Так как следы $\mathbf{h^I_{o\alpha}}$ и $\mathbf{h^I_{o\beta}}$ не пересекаются, то, следовательно, горизонтального следа искомая прямая не имеет. Такой линией может быть лишь общая для обеих плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ горизонталь. Проекции её получим, проведя из точки $\mathbf{N^{II}}$ прямую, параллельную оси **ox** ($\mathbf{N^{II}1^{II}}$), а из точки $\mathbf{N^{I}}$ прямую, (Рис.4.20, а,) параллельную следам $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{h^{I}_{o\beta}}$ ($\mathbf{N^{I}1^{I}}$). Отметим, что если у пересекающихся плоскостей параллельны фронтальные следы, то линией их пересечения будет общая фронталь. Кроме того, общей горизонталью или фронталью двух пересекающихся плоскостей будет также линия пересечения таких плоскостей, одна из которых параллельна плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ или $\boldsymbol{\pi_1}$ (Рис.4.22).

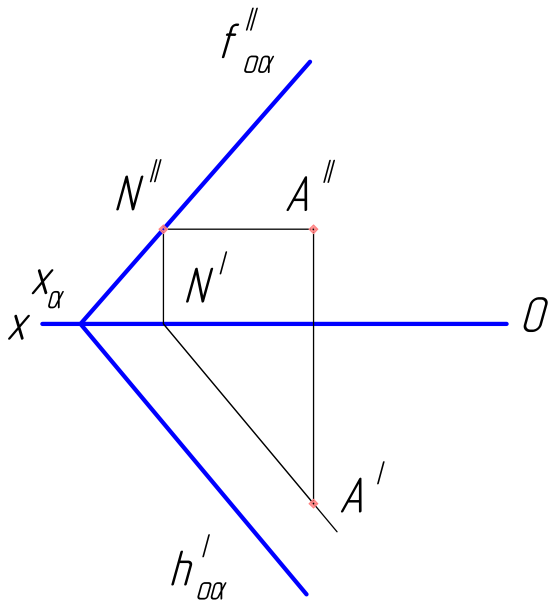


Рис.4.22

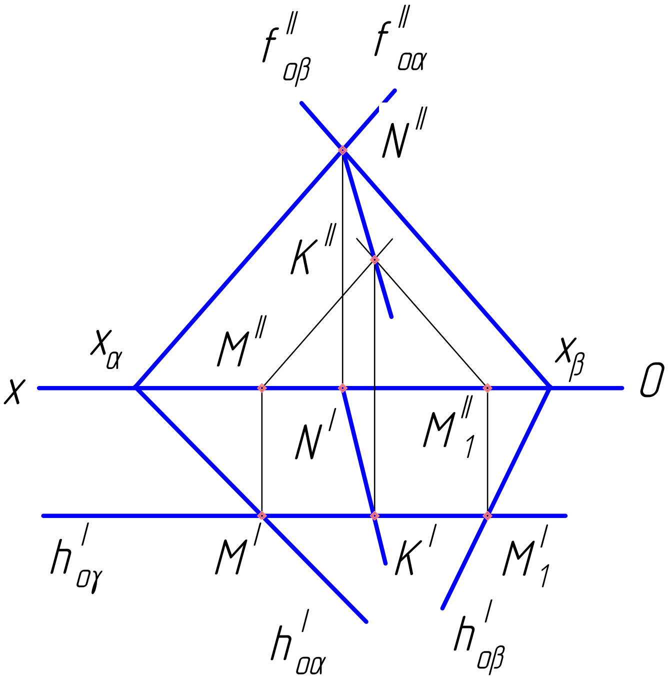


Рис.4.23

Рассмотрим случай построения проекций линии пересечения плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}},\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$) и $\boldsymbol{\beta}$ ($\mathbf{f^{II}_{o\beta}},\mathbf{h^{I}_{o\beta}}$) , горизонтальные следы которых пересекаются вне пределов чертежа (Рис.4.23). Одной из точек, принадлежащих линии пересечения этих плоскостей, будет точка пересечения их фронтальных следов. Отметим проекции $\mathbf{N^{II}}$ и $\mathbf{N^{I}}$ этой точки. Проекции второй точки искомой линии пересечения найдём с помощью вспомогательной плоскости $\boldsymbol{\gamma}$, параллельной плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ ($\mathbf{h^{I}_{o\gamma}} \parallel \mathbf{ox}$). Любая линия, лежащая в плоскости $\boldsymbol{\gamma}$, параллельна плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$. Следовательно, линиями пересечения плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ с плоскостью $\boldsymbol{\gamma}$ будут фронтали плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Горизонтальные проекции этих фронталей совпадут со следом $\mathbf{h^{I}_{o\gamma}}$. Фронтальные их проекции найдём, отметив проекции точек $\mathbf{M}$ ($\mathbf{M^{I}},\mathbf{M^{II}}$) и $\mathbf{M_1}$ ($\mathbf{M_1^{I}},\mathbf{M_1^{II}}$) пересечения следов $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{h^{I}_{o\beta}}$ со следом $\mathbf{h^{I}_{o\gamma}}$ и проведя через точки $\mathbf{M^{II}}$ и $\mathbf{M_1^{II}}$ прямые, соответственно параллельные следам $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{f^{II}_{o\beta}}$. Точка $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K^{I}},\mathbf{K^{II}}$) пересечения построенных фронталей является общей для плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, т.е. искомой второй точкой линии пересечения плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Проведя прямые линии через соответствующие проекции точек $\mathbf{N}$ и $\mathbf{K}$, получим проекции искомой линии пересечения плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

Характерными являются случаи пересечения двух проецирующих плоскостей. Например, линия пересечения двух горизонтально проецирующих плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ (Рис.4.24) как линия пересечения двух плоскостей с плоскостью, им перпендикулярной, перпендикулярна к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Горизонтальная её проекция – точка, совпадающая с пересечением следов $\mathbf{h^I}_{\mathbf{o\alpha}}$ и $\mathbf{h^I}_{\mathbf{o\beta}}$, а фронтальная проекция – перпендикуляр к оси $\mathbf{ox}$, восстановленный из точки $\mathbf{M^{II}}$ (точка $\mathbf{1^{II}}$ взята произвольно).

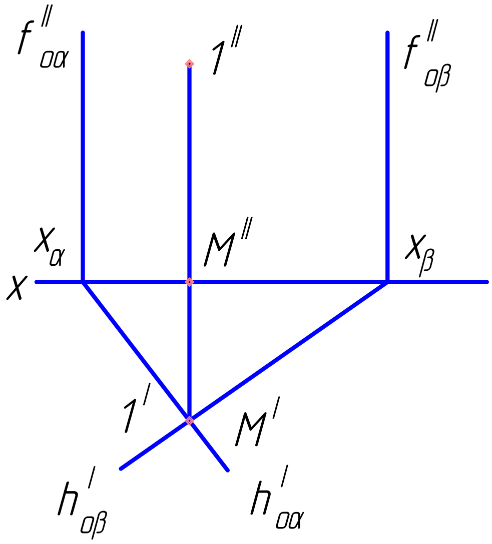


Рис.4.24

В случае, когда у двух плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ имеется общая точка схода следов ($\mathbf{x_\alpha \equiv x_\beta}$) (Рис.4.25), линия пересечения этих плоскостей также находится с помощью вспомогательной плоскости. Одна общая точка этих плоскостей очевидна ($\mathbf{x_\alpha \equiv x_\beta}$). Возьмём вспомогательную горизонтальную плоскость $\boldsymbol{\gamma}$ ($\mathbf{f^{II}}_{\mathbf{o\gamma}} \| \mathbf{ox}$). Плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ пересекаются по горизонтали $\mathbf{N1}$ ($\mathbf{N^{II}1^{II}}$,$\mathbf{N^I1^I}$), а плоскости $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ - по горизонтали $\mathbf{N_12}$ ($\mathbf{N_1{}^{II}2^{II}}$,$\mathbf{N_1{}^{I}2^{I}}$) (см. Рис.4.22). Фронтальные проекции этих горизонталей совпадают со следом $\mathbf{f^{II}}_{\mathbf{o\gamma}}$, горизонтальные проекции пересекаются в точке $\mathbf{K^I}$. Точка $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K^I}$,$\mathbf{K^{II}}$) - общая для всех трёх плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, т. е. это вторая общая точка для плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$. Соединяя точку ($\mathbf{x_\alpha \equiv x_\beta}$) с точкой $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K^I}$,$\mathbf{K^{II}}$) получим проекции линии пересечения.

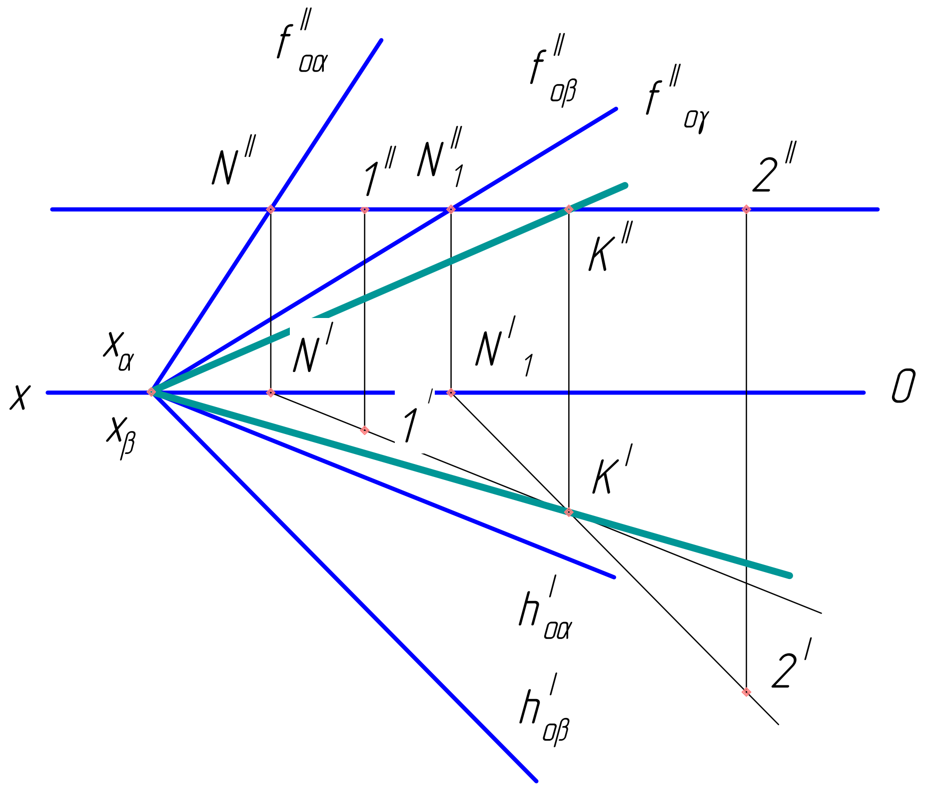


Рис.4.25

Если пересекаются две профильно - проецирующие плоскости **α** и **β** (Рис.4.26, а, б), то очевидно, что линия их пересечения – прямая, параллельная оси **ох**.

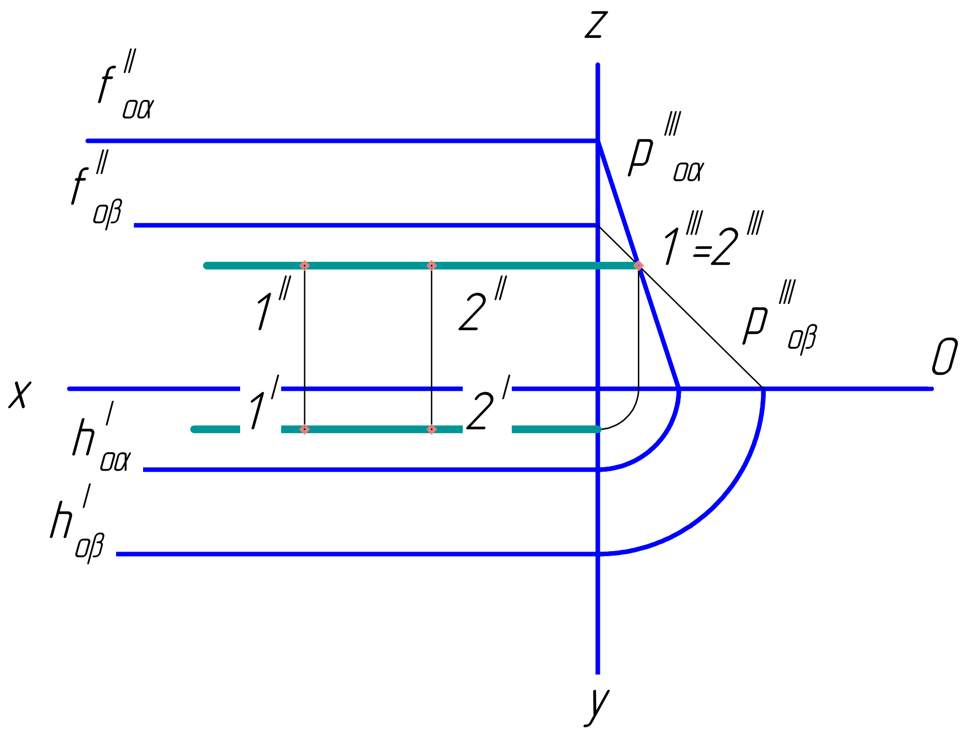


Рис.4.26, а

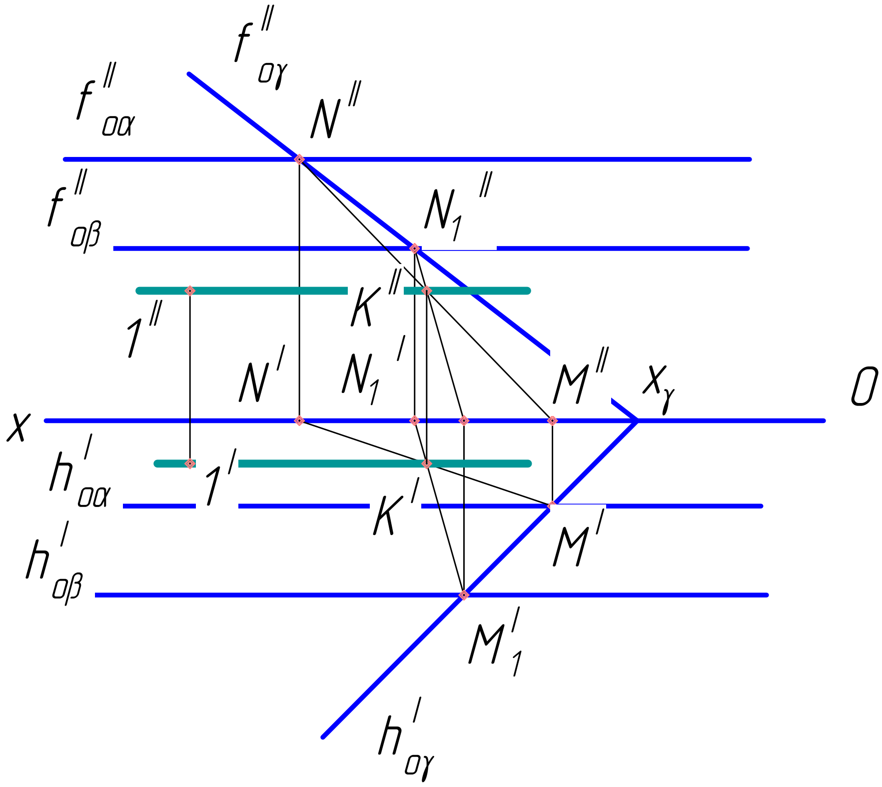


Рис.4.26, б

Найти её можно двумя способами, либо по общим правилам (см. Рис.4.20), применив для нахождения общей точки **K** ($\mathbf{K^{I}}$,$\mathbf{K^{II}}$), через которую пройдёт линия пересечения **K1** ($\mathbf{K^{I}1^{I}}$,$\mathbf{K^{II}1^{II}}$) вспомогательную плоскость γ общего положения (Рис.4.26, б), либо построить произвольную ось **zoy** и найти профильные следы плоскостей $\mathbf{p^{III}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{p^{III}_{o\beta}}$. Точка пересечения этих следов ($\mathbf{1^{III}2^{III}}$) есть профильная проекция линии пересечения (Рис.4.26, а).

Если одна из профильно – проецирующих плоскостей α проходит через ось **ox** ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}} \equiv \mathbf{h^{I}_{o\alpha}} \equiv \mathbf{ox}$), угол наклона плоскости α к плоскостям координат задаётся произвольной точкой **K** ($\mathbf{K^{I}}$,$\mathbf{K^{II}}$), лежащей в этой плоскости), а вторая - β горизонтальная (или вертикальная), проходящая через точку **K**, то очевидно (см. Рис.4.27, а, б), что линия пересечения **1-2** пройдёт через точку **K**, а её проекции – через соответствующие проекции точки ($\mathbf{1^{II}}$-$\mathbf{2^{II}}$ через $\mathbf{K^{II}}$; $\mathbf{1^{I}}$-$\mathbf{2^{I}}$ через $\mathbf{K^{I}}$).

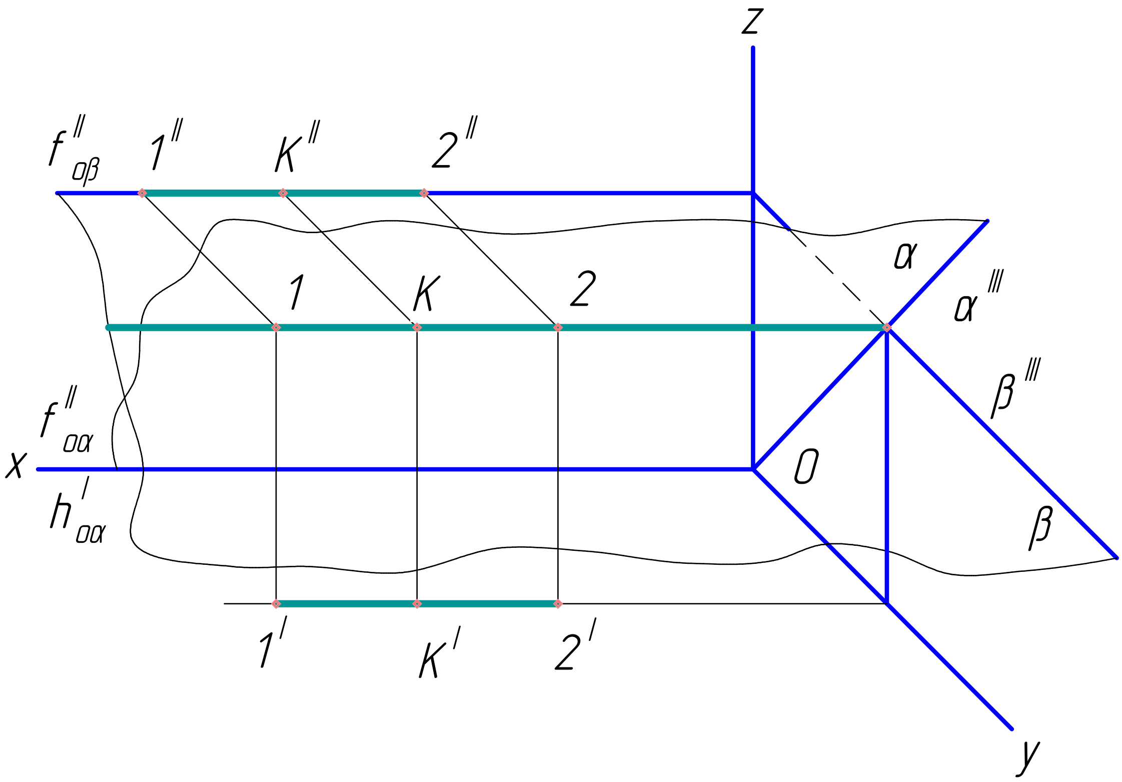


Рис.4.27, а

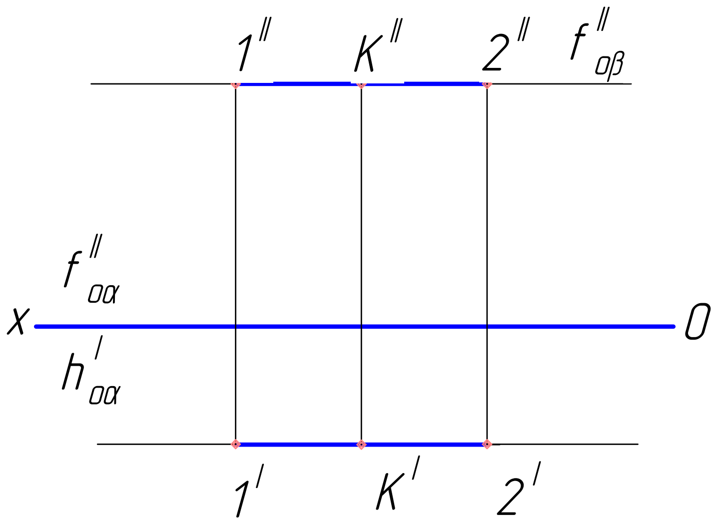


Рис.4.27, б

Рассмотренный случай находит применение, когда находится линия пересечения плоскости общего положения $\boldsymbol{\beta}$ с профильно – проецирующей плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$, проходящей через ось **ox** (Рис.4.28).

Проводим вспомогательную горизонтальную плоскость $\boldsymbol{\gamma}$ (произвольно). $\mathbf{f^{II}_{o\gamma} \parallel ox}$. Ищем линию пересечения **12** ($\mathbf{1^{I}2^{I}}$,$\mathbf{1^{II}2^{II}}$) плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ (см. Рис.4.27). Находим линию пересечения плоскостей (см. Рис.4.22).

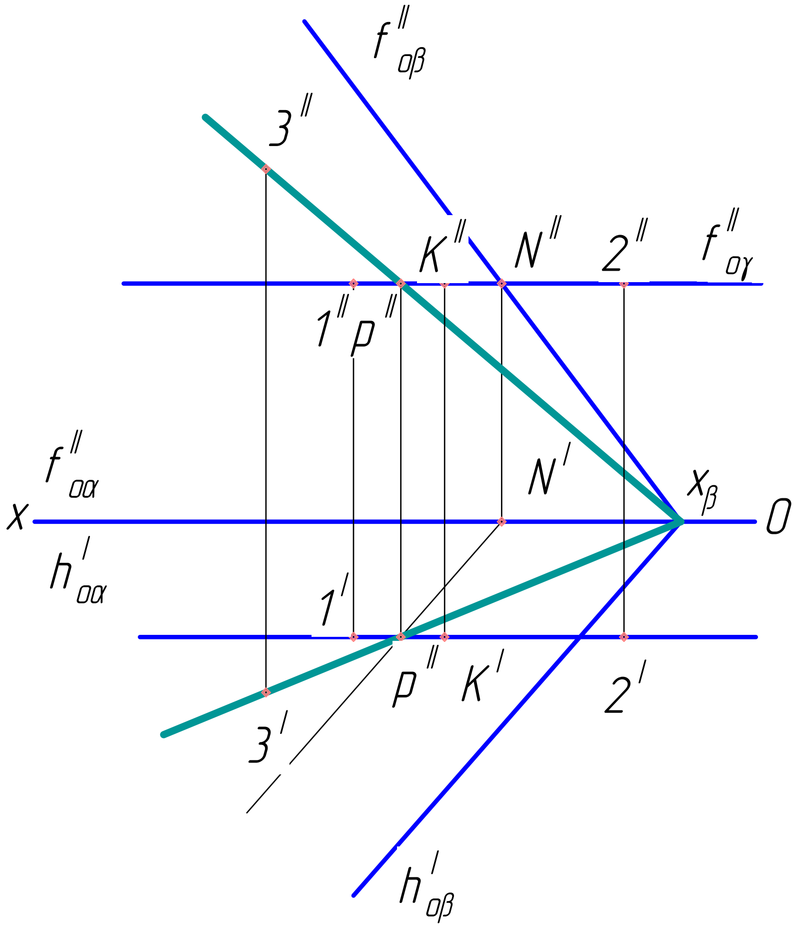


Рис.4.28

Фронтальные проекции этих линий совпадают с фронтальным следом плоскости γ ($f^{II}_{o\gamma}$), а горизонтальные проекции пересекаются в точке **P** (P^{I},P^{II}). Эта точка - общая для трёх плоскостей α, β и γ и, следовательно, вторая искомая точка линии пересечения плоскостей α и β (первая точка – точка схода следов x_β). Соединяя точку x_β с точками P^{I} и P^{II}, получаем проекции линии пересечения ($x_\beta 3^{II}$,$x_\beta 3^{I}$).

4.6 Пересечение прямой линии с плоскостью

Точку пересечения (встречи) прямой линии с плоскостью определяют тремя последовательными построениями:

1) через прямую проводят вспомогательную плоскость (как правило, проецирующую);
2) строят линию пересечения заданной и вспомогательной плоскостей;
3) отмечают точку пересечения построенной линии заданной прямой, которая и является искомой точкой встречи.

Рассмотрим примеры построения точек пересечения прямых с плоскостями.

Пусть даны косоугольные проекции (Рис.4.29, а) плоскости **α** (**$f^{II}_{o\alpha}$,$h^{I}_{o\alpha}$**) и пересекающей её прямой **AB** (**A^IB^I**). Требуется найти точку пересечения прямой **AB** с плоскостью **α**.

Проведём через прямую **AB** горизонтально – проецирующую плоскость **β**. Изображение её горизонтального следа **β^I** совпадает с изображением горизонтальной проекции **A^IB^I** прямой **AB**. Изображение фронтального следа **$f^{II}_{o\beta}$** (**$f^{II}_{o\beta} \parallel oz$**) - прямая, проведённая из точки **x_β** перпендикулярно к оси **ox**. Построим линию пересечения плоскостей **α** и **β**. Проекции **N** и **M** следов этой линии совпадут с изображением точек пересечения одноимённых следов **α** и **β**. Соединяя точки **N** и **M**, получим линию пересечения плоскостей **α** и **β**. Изображение искомой точки **K** пересечения прямой **AB** с плоскостью **α** найдём, отметив точку пересечения прямой **AB** и линии пересечения **NM** плоскостей **α** и **β**.

В прямоугольных проекциях построение точки пересечения прямой с плоскостью осуществляется в аналогичной последовательности.

Пусть даны (см. Рис.4.29, б) плоскость **α** (**$f^{II}_{o\alpha}$,$h^{I}_{o\alpha}$**) и пересекающая её прямая **AB** (**A^IB^I,$A^{II}B^{II}$**). Проведём через прямую **AB** горизонтально – проецирующую плоскость **β**. Её горизонтальный след **β^I** совпадает с горизонтальной проекцией **A^IB^I** прямой **AB**. Фронтальный след **$f^{II}_{o\beta}$** получим, проведя из точки схода следов **x_β** прямую, перпендикулярную к оси **ox**. Построим проекции линии пересечения заданной и вспомогательной плоскостей. Горизонтальная проекция **M^I** горизонтального следа этой прямой, а также фронтальная проекция **N^{II}** её фронтального следа совпадут с точками пересечения соответствующих следов плоскостей **α** и **β**. Проекции **M^{II}** и **N^I** найдём на оси **ox**. Соединяя одноимённые проекции следов прямыми линиями, получаем проекции пересечения плоскостей **α** и **β**. Фронтальную проекцию **K^{II}** искомой точки пересечения прямой **AB** с плоскостью **α** найдём, отметив точку пересечения фронтальных проекций заданной прямой и построенной линии пересечения. Её горизонтальную проекцию **K^I** получим на горизонтальной проекции **A^IB^I** прямой **AB**.

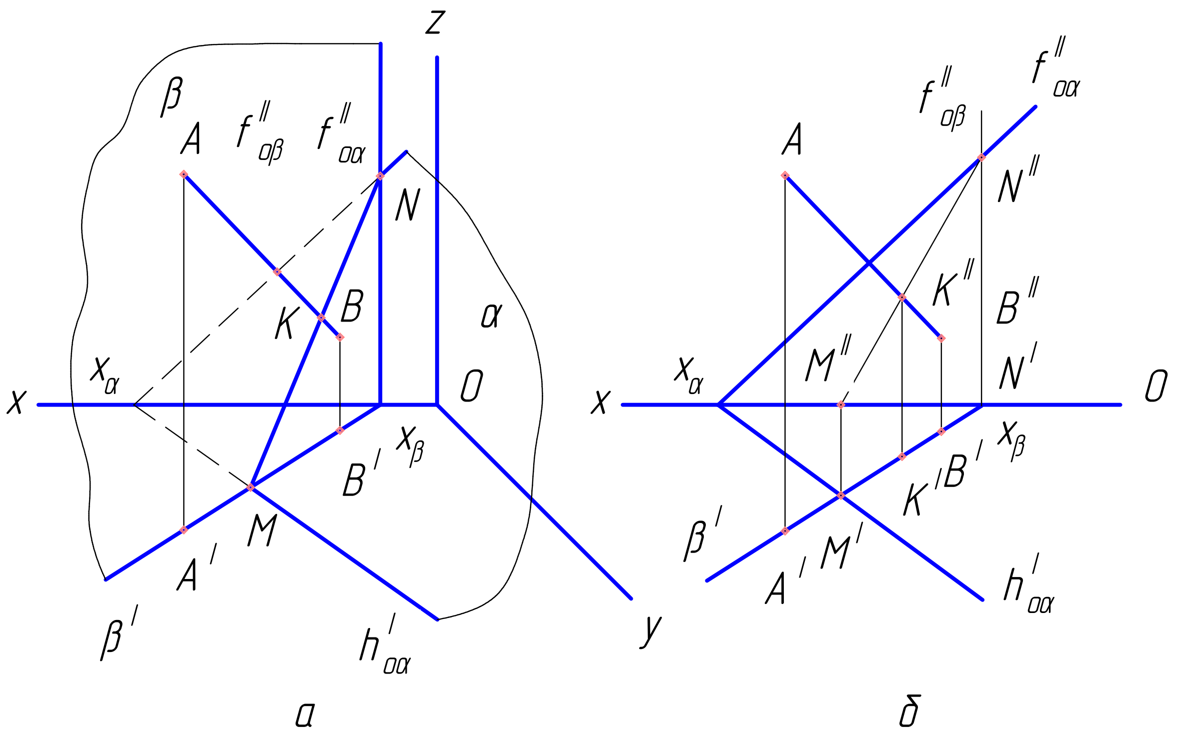


Рис.4.29

Рассмотрим случай пересечения прямой, перпендикулярной к плоскости координат, с плоскостью общего положения.

Пусть дана плоскость общего положения **α** ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$,$\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$) и пересекающая её прямая **AB** ($\mathbf{A^{I}B^{I}}$,$\mathbf{A^{II}B^{II}}$), перпендикулярная к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ (Рис.4.30, а, б).

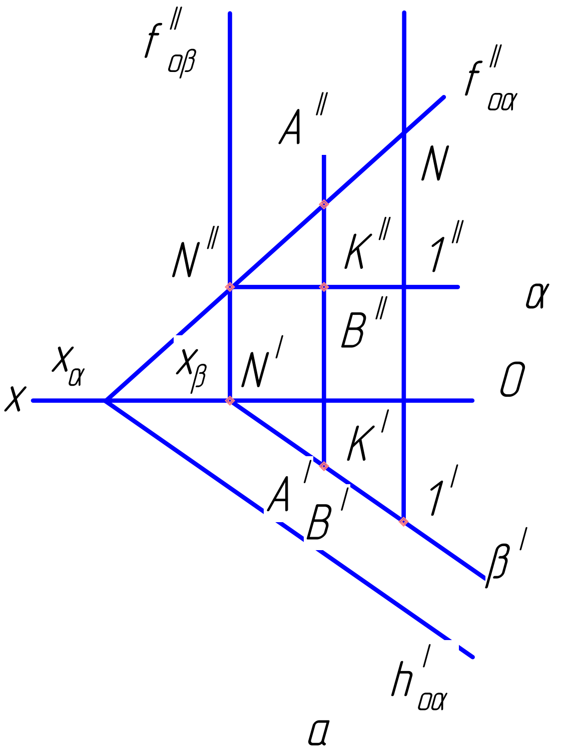


Рис.4.30, а

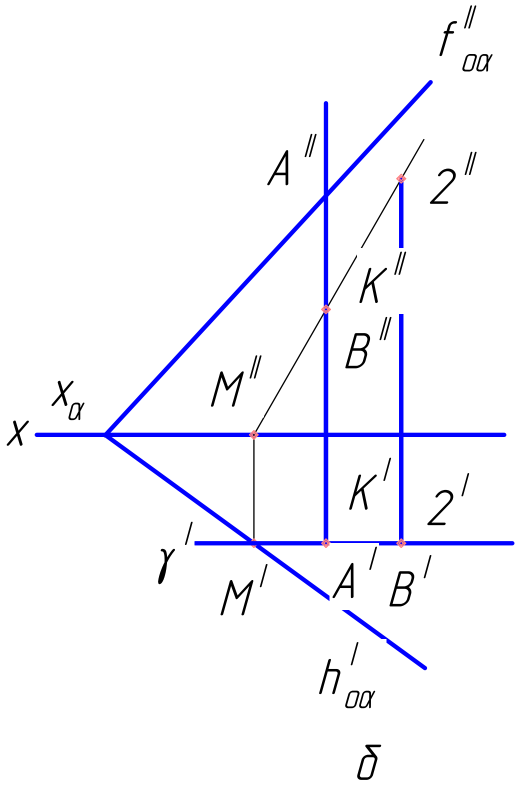


Рис.4.30, б

Проведём через прямую **AB** вспомогательную горизонтально - проецирующую плоскость. Любая прямая, проведённая через точку, в которую проецируется на плоскость **H** заданная прямая, может быть принята за горизонтальный след такой плоскости. С целью упрощения построений этот след проводят так, чтобы вспомогательная плоскость пересекалась бы с заданной по общей горизонтали или фронтали.

Проведём $\beta^{I} \parallel h^{I}_{o\alpha}$ через точку $A^{I}B^{I}$ и $f^{II}_{o\beta} \perp ox$ из точки x_{β} схода следов (см. Рис.4.30, а). Линия пересечения плоскостей α и β будет общей горизонталью **N1** ($N^{I}1^{I}$;$N^{II}1^{II}$)обеих плоскостей. Фронтальную проекцию искомой точки пересечения прямой **AB** с плоскостью α найдём, отметив точку K^{II} пересечения фронтальных проекций заданной прямой и построенной горизонтали. Горизонтальная проекция K^{I} совпадает с точкой $A^{I}B^{I}$, в которую проецируется на плоскость π_1 прямая **AB**.

Если провести $\gamma^{I} \parallel ox$ (см. Рис.4.30, б), то вспомогательная плоскость γ будет параллельна плоскости π_2. При этом линия пересечения плоскостей α и γ будет общей фронталью **M2** ($M^{I}2^{I}$,$M^{II}2^{II}$) обеих плоскостей. Проекции K^{I} и K^{II} искомой точки пересечения прямой **AB** с плоскостью α найдём, отметив точки пересечения соответствующих проекций заданной прямой и построенной фронтали.

Рассмотрим постороение точки встречи прямой **AB** ($A^{I}B^{I}$,$A^{II}B^{II}$) общего положения с плоскостью, заданной плоской фигурой, например треугольником (Рис.4.31).

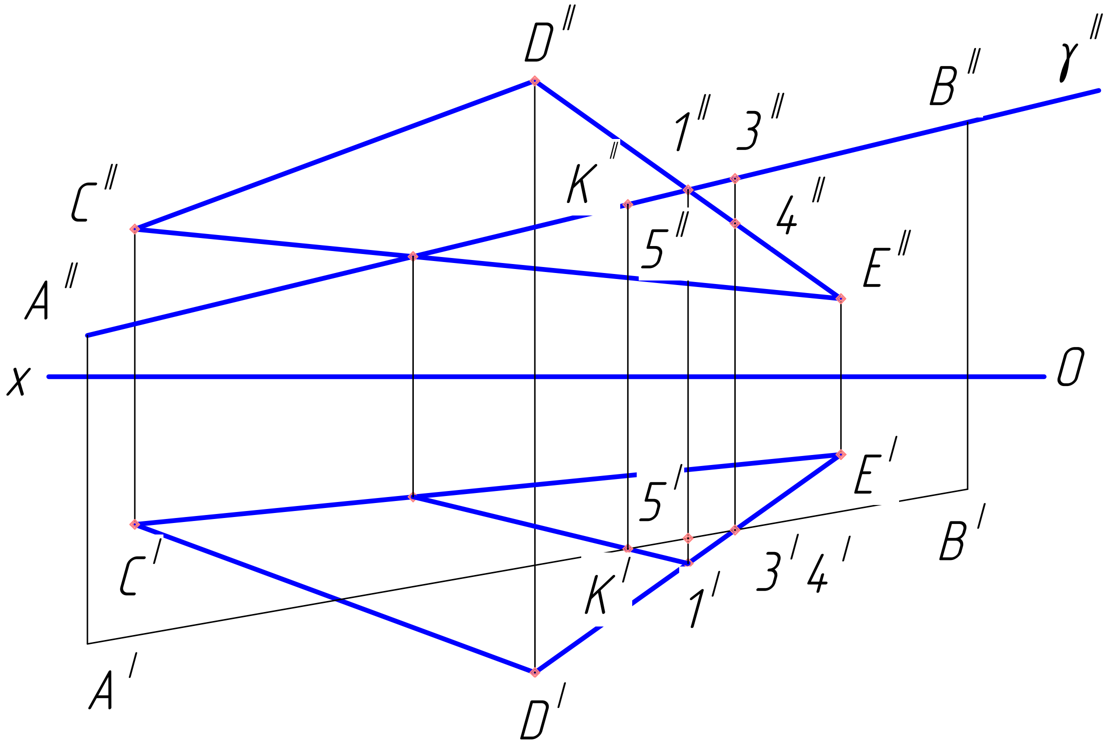


Рис.4.31

Проведём через прямую **AB** вспомогательную фронтально - проецирующую плоскость γ. Её фронтальный след γ^{II} совпадает с фронтальной проекцией $A^{II}B^{II}$ прямой **AB**. Построим проекции линии пересечения заданной и вспомогательной плоскостей. Фронтальная проекция этой линии совпадает со следом γ^{II}. Фронтальные проекции двух точек, принадлежащих линии пересечения указанных плоскостей, найдём, отметив 1^{II} и 2^{II} пересечения следа γ^{II} с фронтальными проекциями $D^{II}C^{II}$ и $C^{II}E^{II}$ сторон треугольника. Горизонтальную проекцию линии пересечения плоскостей получим, соединяя прямой линией горизонтальные проекции 1^{I} и 2^{I} и этих точек.

Горизонтальную проекцию K^{I} искомой точки встречи прямой **AB** с плоскостью треугольника **CDE** найдём, отметив точку пересечения горизонтальных проекций заданной прямой и построенной линии пересечения плоскостей. Фронтальную её проекцию K^{II} найдём на фронтальной проекции $A^{II}B^{II}$ прямой **AB**.

Определим видимость проекций с помощью конкурирующих точек.

Если считать, что плоскость **CDE** непрозрачна, то отрезки прямой, перекрытые треугольником, будут невидимыми и должны быть показаны на чертеже штриховыми линиями. Очевидно, что видимость отрезков прямой изменяется в точке **K** (K^{I},K^{II}) пересечения прямой с плоскостью. Начнём с определения видимости отрезков $A^{I}K^{I}$ и $K^{I}B^{I}$ на плоскости π_1. Отметим на чертеже две точки, принадлежащие прямой **AB** и плоскости треугольника **CDE** и являющиеся конкурирующими по отношению к плоскости **H**. Такими точками могут быть точки **3** и **4**, горизонтальные проекции которых 3^{I} и 4^{I} находятся в пересечении $A^{I}B^{I}$ с $D^{I}E^{I}$, а фронтальные проекции 3^{II} и 4^{II} - на соответствующих проекциях $A^{II}B^{II}$ и $D^{II}E^{II}$. Луч, проецирующий обе точки на плоскость π_1 встретит раньше точку **3**, принадлежащую прямой **AB**. Следовательно, видимой будет горизонтальная проекция отрезка $K^{I}B^{I}$ прямой. Часть проекции $A^{I}K^{I}$ перекрытая проекцией треугольника, невидима и показана на чертеже штриховой линией.

Видимость фронтальных проекций $A^{II}K^{II}$ и $K^{II}B^{II}$ может быть определена, например, с помощью точек **1** и **5**, конкурирующих по отношению к плоскости π_2. В этом случае видима точка **1**, принадлежащая стороне **DE** треугольника, так как горизонтальный луч, проецирующий точки **1** и **5** на плоскость π_2, встретит раньше точку **1**. Следовательно, фронтальная проекция треугольника перекрывает часть проекции $K^{II}B^{II}$ отрезка **KB**. Проекция $A^{II}K^{II}$ отрезка **AK** видима и изобразится на чертеже сплошной линией.

5 Вопросы для самопроверки

1. Какие существуют способы задания плоскости?
2. Как на чертеже построить проекции точки, принадлежащей плоскости?
3. Как на чертеже построить проекции прямой, принадлежащей плоскости?
4. Какие плоскости называются проецирующими?
5. Покажите способы построения горизонтали и фронтали плоскости общего положения и проецирующих плоскостей?
6. Какие плоскости можно провести через фронтально – проецирующую прямую?
7. Можно ли провести проецирующую плоскость через прямую общего положения?
8. Какова последовательность решения задач на пересечение прямой с плоскостью? Плоскостей?
9. Как относительно друг друга могут быть расположены в пространстве прямая и плоскость?
10. По какой линии пересекаются две фронтально – проецирующие плоскости?
11. Сформулируйте условия параллельности и условия перпендикулярности двух плоскостей.
12. Как построить проекции перпендикуляра, проведённого из точки пространства к плоскости общего положения?
13. По какой прямой пересекаются две плоскости, если одна из плоскостей параллельна плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$? Плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$?
14. Сформулируйте принцип построения линии пересечения двух плоскостей, одноимённые следы которых не пересекаются в пределах чертежа
15. Как определить на проекциях видимость прямой относительно плоскости?

6 Способы преобразования проекций

Задачи, связанные с определением истинных размеров изображённых геометрических элементов, решаются способом преобразования проекций. Он основан на переходе от общих случаев к частным случаям положения этих элементов по отношению к плоскостям проекций. Такой переход можно осуществить:

1) изменением положения рассматриваемого геометрического элемента по отношению к неизменной системе плоскостей проекций;
2) переменной плоскостей проекций при неизменном положении рассматриваемого геометрического элемента в пространстве.

6.1 Метод вращения

Сущность метода заключается в том, что заданный геометрический элемент вращением вокруг некоторой неподвижной прямой (оси вращения) приводят в положение, удобное для решения поставленной задачи.

Ось вращения может быть выбрана произвольно, но чаще всего её располагают параллельно или перпендикулярно к плоскости проекций.

Рассмотрим случай вращения точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$.

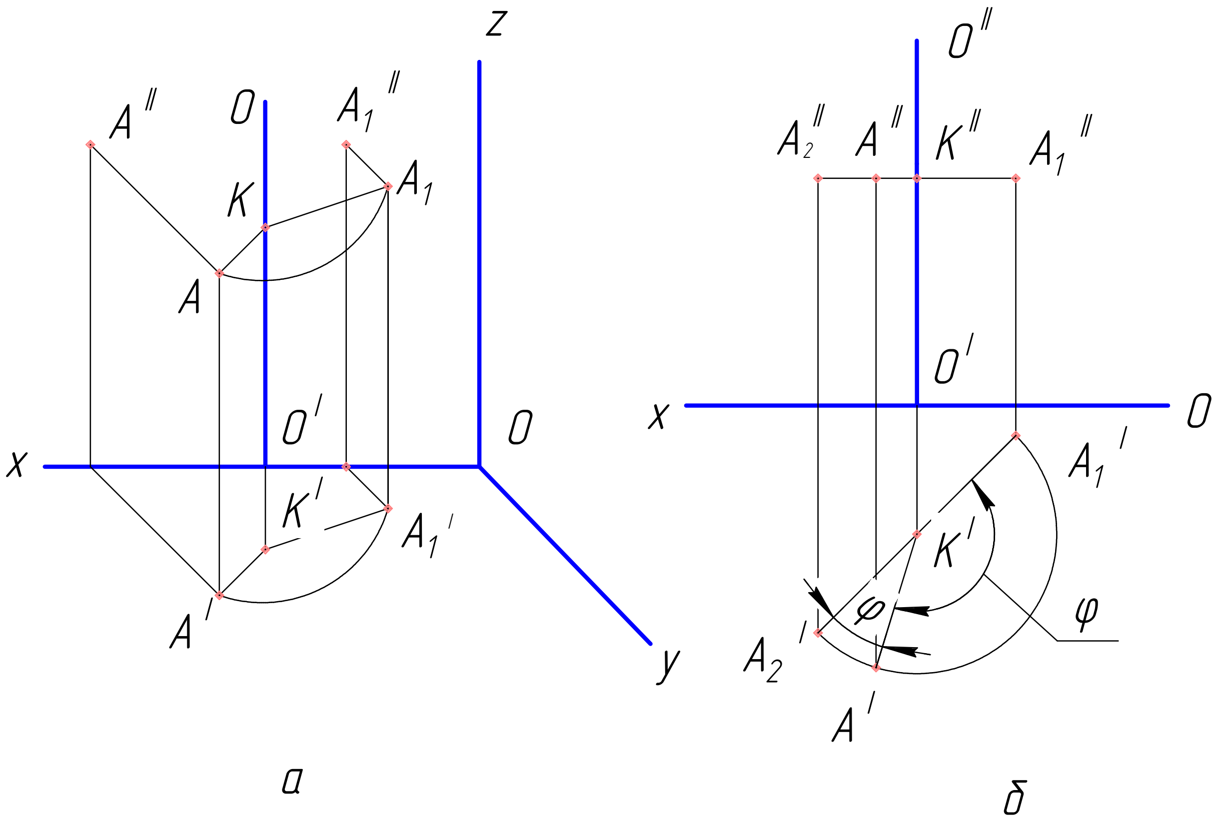


Рис.6.1

Пусть даны (см. Рис.6.1, а) косоугольная проекция точки **A**, её вторичные проекции $\mathbf{A^{I}}$ и $\mathbf{A^{II}}$, косоугольная проекция прямой **o**, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$, и её проекция на плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$(точка $\mathbf{o^{I}}$). Будем вращать вокруг прямой **o** точку **A**. *При этом она будет перемещаться по окружности в плоскости, перпендикулярной к этой прямой. Радиусом данной окружности является перпендикуляр, опущенный из точки на прямую.* В нашем случае точка **A** будет вращаться по окружности в плоскости, параллельной плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Поэтому горизонтальную проекцию $\mathbf{A^{I}K^{I}}$ радиуса вращения получим, соединяя прямой точку $\mathbf{A^{I}}$ с точкой $\mathbf{o^{I}}$. Проведя $\mathbf{AK \parallel A^{I}K^{I}}$ найдём косоугольную проекцию радиуса вращения. Пусть точка A вращением вокруг оси переместится в точку $\mathbf{A_1}$.Траектория движения в натуре – дуга окружности (в косоугольных проекциях – часть эллипса). На плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ траектория движения точки спроецируется без искажения, а на плоскость $\boldsymbol{\pi_2}$– в виде прямой, параллельной оси **ox**. Изображение горизонтальной проекции точки **A** переместится в точку $\mathbf{A_1^{I}}$, а изображение её фронтальной проекции – в точку $\mathbf{A_1^{II}}$.

Итак, при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$, её горизонтальная проекция перемещается по окружности, а фронтальная проекция – по прямой, параллельной оси **ox**.

В прямоугольных проекциях (см. Рис.6.1, б) при вращении точки **A** ($\mathbf{A^{I}}$,$\mathbf{A^{II}}$) вокруг оси **o** ($\mathbf{o^{I}}$,$\mathbf{o^{II}}$), перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$, горизонтальная проекция точки будет перемещаться по дуге окружности радиуса $\mathbf{A^{I}K^{I}}$, а фронтальная её проекция – по прямой, параллельной оси **ox**.

При повороте на угол $\boldsymbol{\varphi_1}$ (или $\boldsymbol{\varphi_2}$) проекции $\mathbf{A^{I}}$ и $\mathbf{A^{II}}$ точки переместятся, соответственно, в точки $\mathbf{A_1^{I}}$ и $\mathbf{A_1^{II}}$ ($\mathbf{A_2^{I}}$ и $\mathbf{A_2^{II}}$).

Аналогичными построениями можно показать, что при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$, фронтальная проекция точки будет перемещаться по дуге окружности, а её горизонтальная проекция – по прямой, параллельной оси **ox**.

Вращение отрезка прямой может быть выполнено в соответствии с правилами вращения точки. Пусть требуется повернуть на некоторый угол $\boldsymbol{\varphi_1}$ прямую **AB** ($\mathbf{A^{I}B^{I}}$,$\mathbf{A^{II}B^{II}}$) вокруг оси **o** ($\mathbf{o^{I}}$,$\mathbf{o^{II}}$), перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ (см. Рис.6.2).

Переместим каждую из горизонтальных проекций точек **A** и **B** по дугам окружностей с центром в точке $\mathbf{o^{I}}$ на заданный угол $\boldsymbol{\varphi_1}$. Соединяя полученные точки $\overline{\mathbf{A^{I}}}$ и $\overline{\mathbf{B^{I}}}$ прямой, получим горизонтальную проекцию отрезка **AB**, повёрнутого вокруг оси **o** на угол $\boldsymbol{\varphi_1}$. Фронтальные проекции $\mathbf{A^{II}}$ и $\mathbf{B^{II}}$ переместятся по прямым, параллельным оси **ox**, и займут положения $\overline{\mathbf{A^{II}}}$ и $\overline{\mathbf{B^{II}}}$.

Отметим, что *при вращении отрезка прямой вокруг оси, перпендикулярной к плоскости* $\boldsymbol{\pi_1}$*, горизонтальная проекция его не изменяет длины*, так как $\Delta \mathbf{A^I o_1 B^I} = \Delta\, \mathbf{\bar{A}^I\, o_1 \bar{B}^I}$. Используем это обстоятельство на практике. Пусть даны **AB** ($\mathbf{A^I B^I, A^{II} B^{II}}$) и ось вращения **o** ($\mathbf{o^I, o^{II}}$), перпендикулярная к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ (Рис.6.3). Требуется повернуть прямую **AB** вокруг оси **o** на некоторый угол $\boldsymbol{\varphi_1}$.

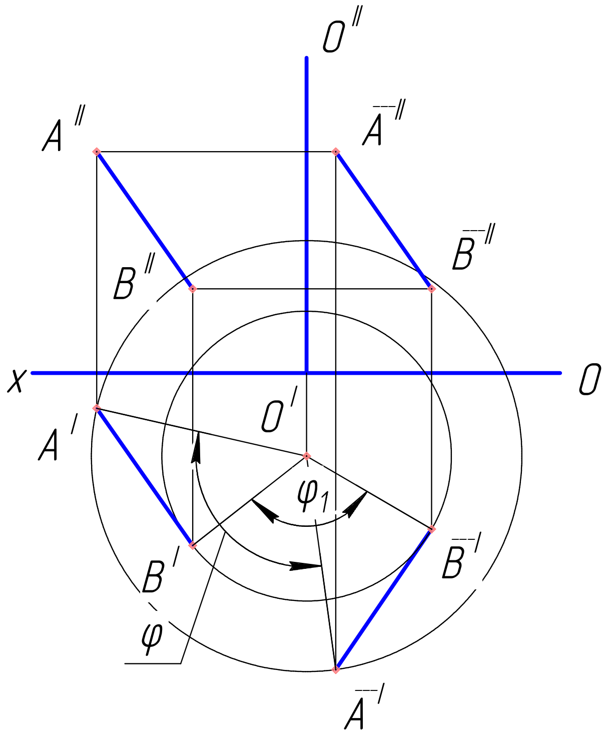


Рис.6.2

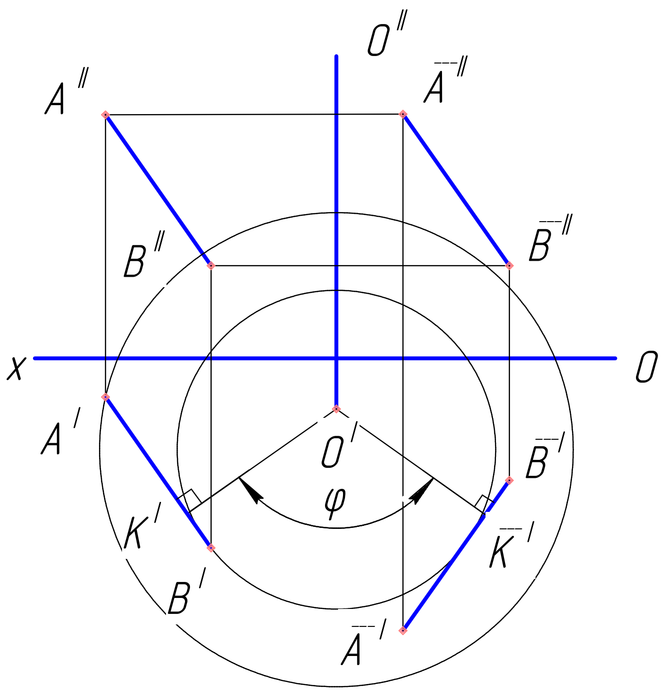


Рис.6.3

Опустим перпендикуляр из горизонтальной проекции оси вращения на горизонтальную проекцию отрезка. Полученную точку $\mathbf{K^I}$ повернём вокруг оси $\mathbf{o}$ на угол $\boldsymbol{\varphi_1}$. Через точку $\mathbf{\overline{K^I}}$ проведём прямую, перпендикулярную к $\mathbf{o^I\overline{K^I}}$, на которой отложим отрезки $\mathbf{\overline{K^I}\ \overline{B^I}}$ и $\mathbf{\overline{K^I}\ \overline{A^I}}$ соответственно равные отрезкам $\mathbf{K^IB^I}$ и $\mathbf{K^IA^I}$. Получим новую горизонтальную проекцию $\mathbf{\overline{A^I}\ \overline{B^I}}$ отрезка $\mathbf{AB}$. Фронтальная проекция $\mathbf{\overline{A^{II}}\ \overline{B^{II}}}$ строится по аналогии с предыдущим примером.

Наиболее просто вращение отрезка осуществляется вокруг оси, пересекающей этот отрезок, так как точка их пересечения остаётся неподвижной.

Определим методом вращения истинную длину отрезка $\mathbf{AB}$ ($\mathbf{A^IB^I},\mathbf{A^{II}B^{II}}$) прямой общего положения (Рис.6.4). Для этого следует повернуть заданный отрезок так, чтобы он расположился параллельно какой – либо плоскости координат. Проведём ось вращения $\mathbf{o}$ перпендикулярно к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ через точку $\mathbf{B}$ отрезка. Фронтальная проекция оси изобразится в виде прямой $\mathbf{o^{II}}$, перпендикулярной к оси $\mathbf{ox}$, а горизонтальная проекция её – точка $\mathbf{o^I}$, совпадающая с точкой $\mathbf{B^I}$.

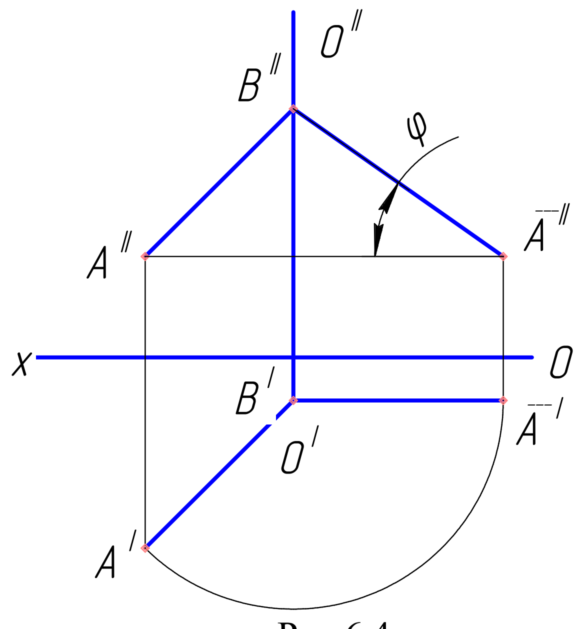


Рис.6.4

При вращении отрезка $\mathbf{AB}$ точка $\mathbf{B^I}$ остаётся неподвижной, а точку $\mathbf{A}$ переместим в положение $\mathbf{\overline{A}}$, когда горизонтальная проекция $\mathbf{B^I\overline{A^I}}$ будет параллельна оси $\mathbf{ox}$. Новой фронтальной проекцией отрезка будет отрезок $\mathbf{B^{II}\overline{A^{II}}}$ ($\mathbf{A^{II}\overline{A^{II}}} \parallel \mathbf{ox}$). В этом положении отрезок $\mathbf{BA}$ параллелен плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ ($\mathbf{B^I\overline{A^I}} \parallel \mathbf{ox}$) и, следовательно, проецируется на неё в истинную длину, то есть $\mathbf{B^{II}\overline{A^{II}}}=\mathbf{AB}$ - истинная длина отрезка.

Отметим, что *при определении истинной длины отрезка методом вращения одновременно определяется угол наклона этого отрезка к одной из плос-*

костей координат. В нашем случае угол φ - угол наклона отрезка **AB** к плоскости π_1. Для определения угла наклона отрезка прямой к плоскости π_2 следует его вращать вокруг оси, перпендикулярной к плоскости π_2 так, чтобы он расположился параллельно плоскости π_1.

Для того чтобы повернуть плоскость вокруг некоторой оси, достаточно повернуть вокруг неё геометрические элементы, определяющие её положение. Пусть требуется повернуть плоскость α ($f^{II}_{o\alpha}$,$h^{I}_{o\alpha}$) общего положения вокруг оси o (o^{I},o^{II}), перпендикулярной к плоскости π_1 на некоторый угол φ_1 (Рис.6.5).

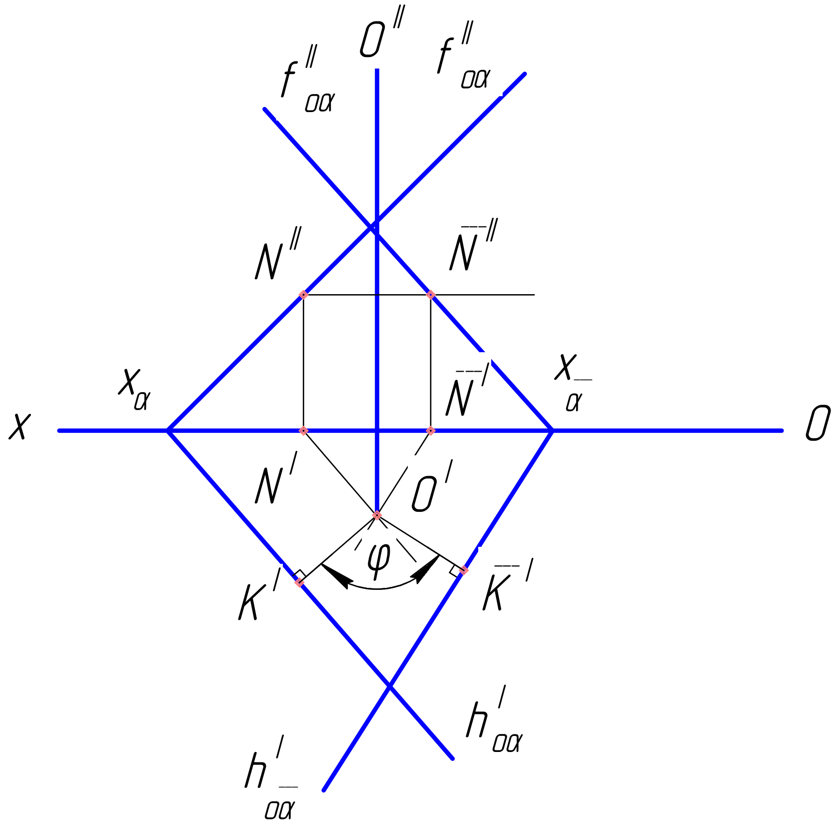


Рис.6.5

Для получения изображения горизонтального следа плоскости α, повёрнутой вокруг оси o, опустим перпендикуляр из горизонтальной проекции o^I оси вращения на след $h^I_{o\alpha}$. Полученную точку K^I повернём вокруг оси o на угол φ_1 и, через точку $\overline{K^I}$ проведём прямую, перпендикулярную к $o^I\overline{K^I}$. Эта прямая и будет новым горизонтальным следом $h^I_{o\bar{\alpha}}$. В точке пересечения $h^I_{o\bar{\alpha}}$ с осью ox найдём новую точку схода следов $x_{\bar{\alpha}}$. Для построения нового фронтального следа необходимо найти ещё одну точку, принадлежащую этому следу. Такой точкой будет фронтальная проекция фронтального следа любой прямой, лежащей в плоскости α, в новом её положении. Обычно в качестве такой прямой берут горизонталь **N1**, пересекающую ось вращения. Новой горизонтальной ния. Новой горизонтальной проекцией горизонтали будет прямая $\mathbf{o^{I}\overline{N^{I}}}$, проведённая через точку $\mathbf{o^{I}}$, параллельно следу $\mathbf{h^{I}}_{\overline{o\alpha}}$. Новой фронтальной проекцией горизонтали будет прямая $\mathbf{N^{II}\overline{N^{II}}}$, на которой нетрудно найти точку $\mathbf{\overline{N^{II}}}$ - новый фронтальный след горизонтали. Новый фронтальный след $\mathbf{f^{II}}_{\overline{o\alpha}}$ плоскости получим, проведя прямую через точки $\mathbf{x}_{\overline{\alpha}}$ и $\mathbf{\overline{N^{II}}}$.

Построение нового фронтального следа плоскости значительно упрощается, если ось вращения перпендикулярна к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ и лежит в плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ (Рис.6.6).

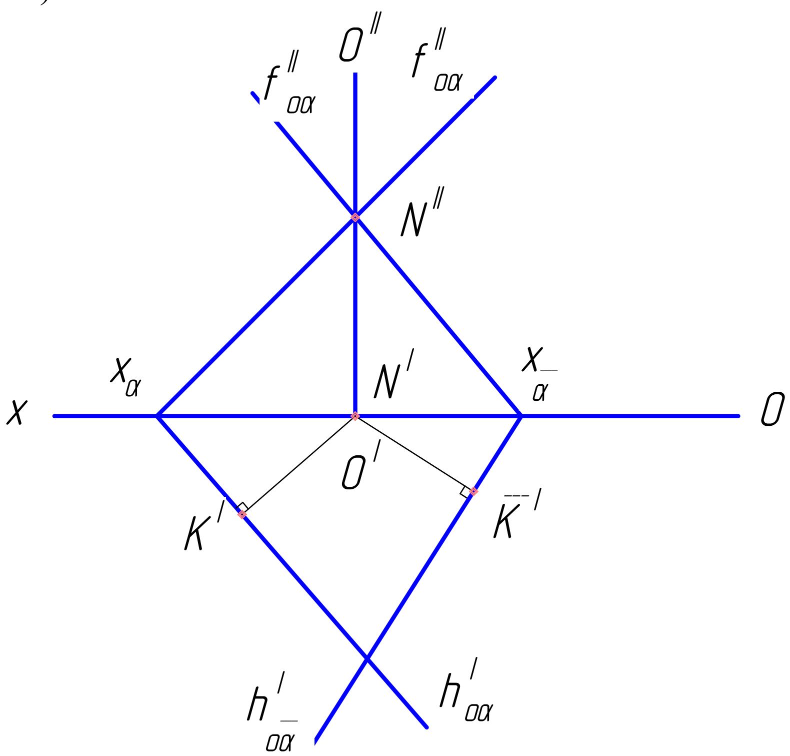


Рис.6.6

В этом случае новый горизонтальный след $\mathbf{h^{I}}_{\overline{o\alpha}}$ плоскости $\boldsymbol{\alpha}$, повёрнутой вокруг оси, находится так же, как и в предыдущем примере ($\mathbf{o^{I}K^{I}} \perp \mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ и $\mathbf{h^{I}}_{\overline{o\alpha}} \perp \mathbf{o^{I}\overline{K^{I}}}$). Второй точкой (кроме $\mathbf{x}_{\overline{\alpha}}$) для проведения нового фронтального следа плоскости $\mathbf{f^{II}}_{\overline{o\alpha}}$ будет точка $\mathbf{N^{II}}$, так как она не изменяет своего положения при повороте следа.

Вращение плоскости вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям координат, осуществляют при решении задач приведения плоскости общего положения в частное положение, например, перпендикулярное одной из плоскостей проекций.

Рассмотрим случай вращения плоскости, заданной плоской фигурой, например треугольником **ABC** (Рис.6.7). Требуется методом вращения сделать эту плоскость фронтально – проецирующей. Вращение такой плоскости может быть осуществлено, в частности, вращением трёх вершин треугольника. Однако с целью упрощения построений ось вращения проводят через одну из вершин плоской фигуры. Угол, на который следует повернуть треугольник, определяется из условия, что любая горизонталь фронтально - проецирующей плоскости перпендикулярна к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$, т.е. проецируется на плоскость $\boldsymbol{\pi_2}$ в точку. Проведём через вершину $\mathbf{C}$ треугольника горизонталь $\mathbf{CF}$ ($\mathbf{C^IF^I}$, $\mathbf{C^{II}F^{II}}$) и повернём её вокруг оси $\mathbf{o}$, проходящей через точку $\mathbf{C}$, на такой угол, при котором её горизонтальная проекция $\mathbf{C^I\overline{F^I}}$ будет перпендикулярна к оси $\mathbf{ox}$. Далее вращением вокруг оси $\mathbf{o}$ горизонтальные проекции $\mathbf{A^I}$ и $\mathbf{B^I}$ точек $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на тот же угол. Это построение проще выполнить, проведя из точки $\mathbf{C}$, как из центра, дуги окружностей радиусами $\mathbf{C^IA^I}$ и $\mathbf{C^IB^I}$ и сделав на этих дугах засечки из точки $\mathbf{\overline{F^I}}$ радиусами $\mathbf{\overline{F^I}\,\overline{A^I}}=\mathbf{F^IA^I}$ и $\mathbf{\overline{F^I}\,\overline{B^I}}=\mathbf{F^IB^I}$. Треугольник $\mathbf{\overline{A}^I\overline{B}^I\overline{C}^I}$ будет искомой горизонтальной проекцией треугольника после его вращения. Построив новые фронтальные проекции точек $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в соответствии с правилами, рассмотренными ранее, получим новую фронтальную проекцию треугольника $\mathbf{ABC}$ в виде прямой линии $\mathbf{\overline{A}^{II}\overline{B}^{II}\overline{C}^{II}}$.

Если необходимо сделать плоскость общего положения горизонтально – проецирующей, то следует её вращать вокруг оси, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$, до положения, при котором фронтальный след плоскости или фронтальная проекция любой её фронтали будут перпендикулярны к оси $\mathbf{ox}$.

Метод вращения позволяет сделать плоскость общего положения, параллельной плоскости координат. Это можно осуществить двумя способами:

1) *последовательным вращением плоскости вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций;*
2) *вращением плоскости вокруг горизонтали или фронтали.*

Не рассматривая подробно первый способ, отметим лишь возможность его применения в предыдущей задаче (см. Рис.6.7), где полученную фронтально – проецирующую плоскость (треугольника $\mathbf{\overline{A}^{II}\overline{B}^{II}\overline{C}^{II}}$) можно повернуть ещё раз вокруг оси, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$, проходящей, например, через точку $\mathbf{A}$ до положения, параллельного плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ ($\mathbf{\overline{\overline{A^{II}}}\,\overline{\overline{B^{II}}}\,\overline{\overline{C^{II}}}}$). В этом положении треугольник спроецируется на плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ в истинную величину ($\mathbf{A^IB^IC^I}$).

Установим, как перемещаются проекции точек при вращении вокруг произвольной горизонтали. При вращении точки $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B}$,$\mathbf{B^I}$) вокруг горизонтали $\mathbf{MN}$ (см. Рис.6.8) точка $\mathbf{B}$ будет перемещатся по дуге окружности в плоскости, проходящей через точку $\mathbf{B}$ и перпендикулярной к $\mathbf{MN}$, т.е. в горизонтально - проецирующей плоскости $\boldsymbol{\alpha}$. Горизонтальнай след $\boldsymbol{\alpha^I}$ этой плоскости проходит через точку $\mathbf{B}^{\mathbf{I}}$ и перпендикулярен к горизонтальной проекции $\mathbf{M}^{\mathbf{I}}\mathbf{N}^{\mathbf{I}}$ горизонтали. Радиусом вращения точки **B** будет перпендикуляр **BO**, опущенный из точки **B** на **MN**.

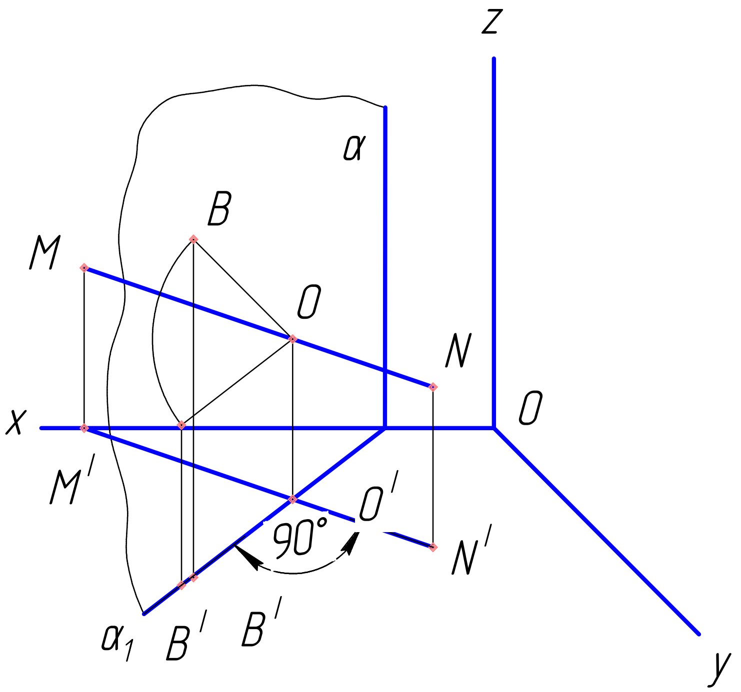


Рис.6.8

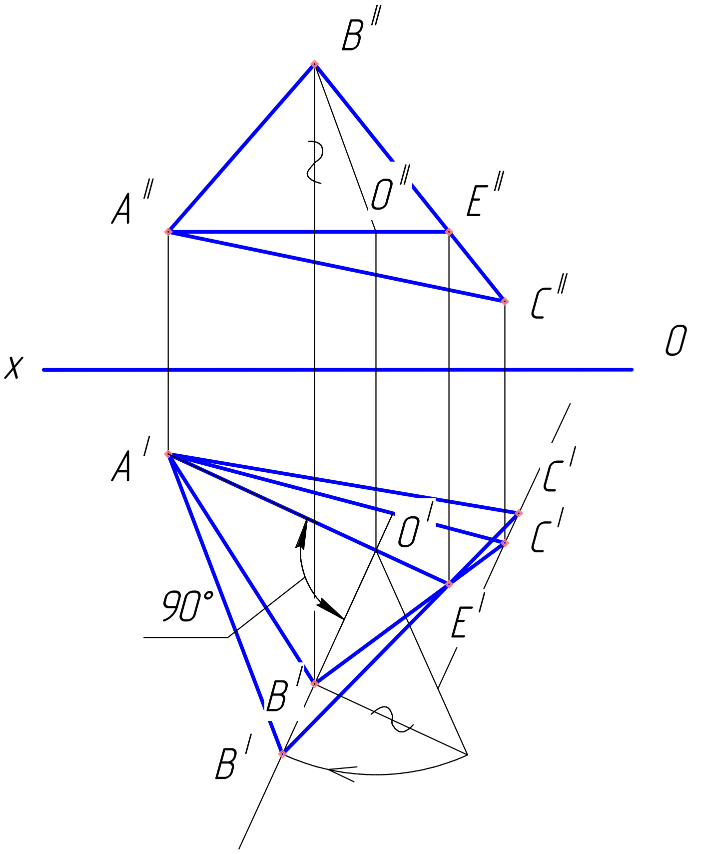


Рис.6.9

Если привести радиус вращения **BO** в положение, параллельное плоскости π_1 ($BO \parallel \alpha^I$), то он спроецируется на эту плоскость отрезком B^IO^I, совпадающим со следом α^I и по длине равным **BO**.

Рассмотрим задачу определения *истинной величины плоской фигуры вращением вокруг горизонтали.* Пусть задан треугольник **ABC** (см. Рис.6.9) двумя проекциями $A^IB^IC^I$ или $A^{II}B^{II}C^{II}$. Требуется определить его истинную величину. Осью вращения выбираем горизонталь **AE** (A^IE^I,$A^{II}E^{II}$). Для определения истинной величины треугольника следует привести его вращением вокруг горизонтали **AE** в положение, параллельное плоскости π_1. Новой фронтальной проекцией треугольника будет прямая, совпадающая с фронтальной проекцией горизонтали (на Рис.6.9 не показана). Построим новую горизонтальную проекцию треугольника **ABC**. Для этого сначала найдём новую горизонтальную проекцию B^I вершины **B**. Радиус вращения точки **B** в начальном положении треугольника проецируется на плоскость π_1 отрезком B^IO^I, перпендикулярным к A^IE^I, а на плоскость π_2 - отрезком $B^{II}O^{II}$. Когда точка **B** расположится в плоскости, параллельной плоскости π_1 и проходящей через горизонталь **AE**, радиус **OB** (O^IB^I,$O^{II}B^{II}$) спроецируется на плоскость π_1 отрезком $O^I\overline{B^I}$, перпендикулярным к A^IE^I и равным собственной длине. Последнюю обычно определяют способом треугольника, откладывая на перпендикуляре к B^IO^I разность недостающих координат (прямые, отмеченные волнистым знаком ~). Полученная точка B^I будет новой искомой горизонтальной проекцией вершины **B** треугольника. Так как точка **E** стороны **BC** неподвижна, то точка C^I найдётся в пересечении продолжения $\overline{B^I}\,E^I$ с продолжением перпендикуляра, опущенного из точки C^I на A^IE^I. Новая горизонтальная проекция $\overline{A^I}$ вершины **A** совпадает с точкой A^I.

Треугольник $\overline{A^I}\,\overline{B^I}\,\overline{C^I}$ является искомой истинной величиной треугольника **ABC**.

Вращение вокруг фронтали по существу аналогично вращению вокруг горизонтали. При этом такую фигуру располагают в плоскости, параллельной плоскости π_2 и строят её новую фронтальную проекцию.

6.2 Метод перемены плоскостей проекций

Сущность метода заключается в том, что заданный геометрический элемент проецируется на новую плоскость проекций, обычно перпендикулярную к одной из старых плоскостей проекций. Новая плоскость проекций выбирается так, чтобы рассматриваемый элемент проецировался на неё наиболее удобно для решения поставленной задачи.

Методом перемены плоскостей проекций в большинстве случаев решают задачи по определению расстояний между заданными геометрическими элементами и определению истинных размеров плоских фигур.

Построение проекций геометрических элементов на новой плоскости проекций начнём с примера построения проекций точки.

Пусть в косоугольных проекциях (Рис.6.10) даны плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$ и точка **A**. Требуется построить проекцию точки **A** на новую фронтальную плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$, перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Линия пересечения плоскостей $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_4}$ будет новой осью проекций $\mathbf{x_1}$. Построим сначала изображение проекции точки **A** на плоскость $\boldsymbol{\pi_2}$, для чего покажем на чертеже изображение перпендикуляра, опущенного из горизонтальной проекции $\mathbf{A^I}$ на ось **ox** (в натуре $\mathbf{A^I A_x} \perp \mathbf{ox}$). Точку $\mathbf{A^{II}}$ получим в пересечении перпендикуляра, восстановленного из точки $\mathbf{A_x}$ к оси **ox** ($\mathbf{A_x A^{II}} \parallel \mathbf{oz}$), с перпендикуляром, опущенным из точки **A** на плоскость $\boldsymbol{\pi_2}$ ($\mathbf{AA^{II}} \parallel \mathbf{A^I A_x}$).

Изображение проекции точки **A** на плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$ строится в той же последовательности. Строим изображение перпендикуляра, опущенного из горизонтальной проекции $\mathbf{A^I}$ на новую ось проекций $\mathbf{x_1}$ (в натуре $\mathbf{A^I A_{x1}} \perp \mathbf{x_1}$), и находим изображение искомой проекции точки $\mathbf{A^{IV}}$ на новой фронтальной плоскости $\boldsymbol{\pi_4}$, проводя $\mathbf{A_{x1} A^{IV}} \parallel \mathbf{AA^I}$ и $\mathbf{AA^{IV}} \parallel \mathbf{A^I A_{x1}}$.

Отметим, что $\mathbf{AA^I = A_x A^{II} = A^{IV} A_{x1} = z_A}$, т.е. *при перемене плоскости* $\boldsymbol{\pi_2}$ *на новую фронтальную плоскость проекций, перпендикулярную к плоскости* $\boldsymbol{\pi_1}$*, координата* **z** *проецируемой точки остаётся неизменной.*

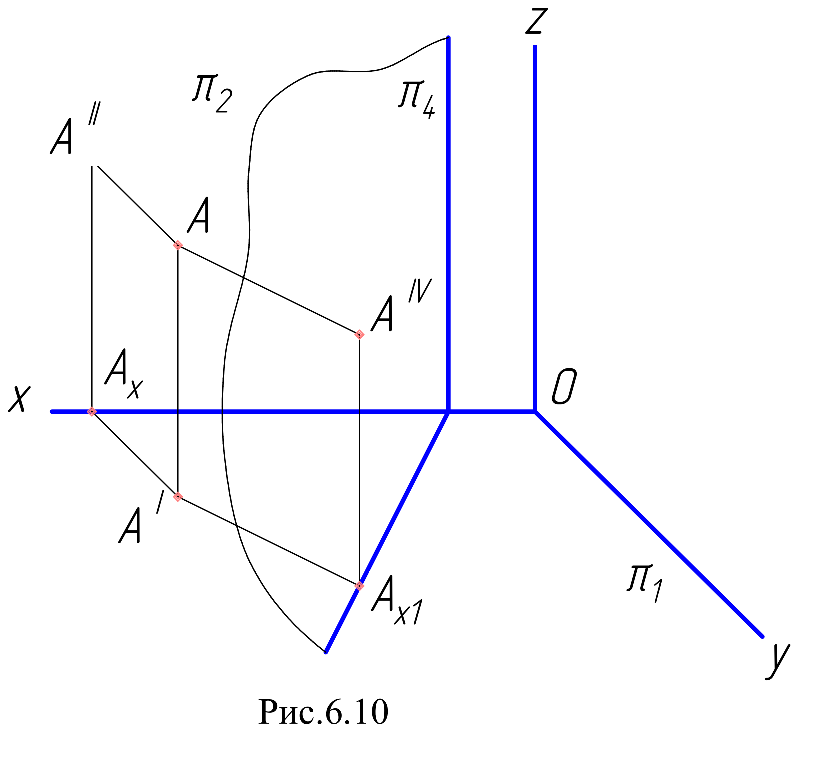


Рис.6.10

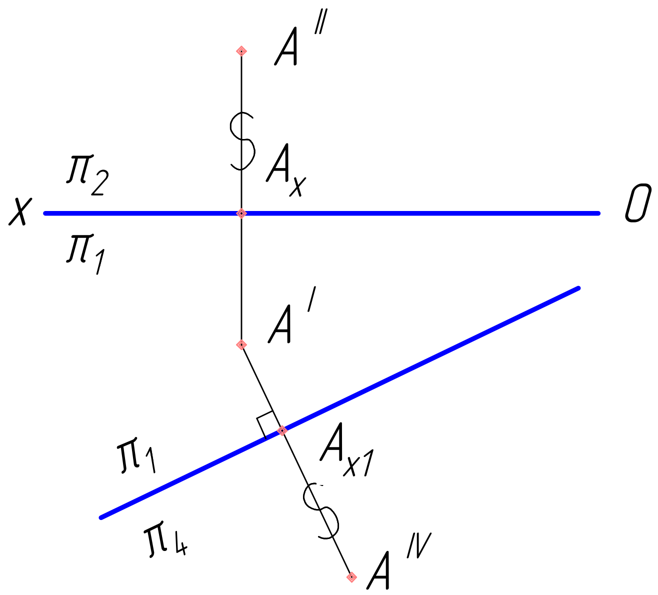


Рис.6.11

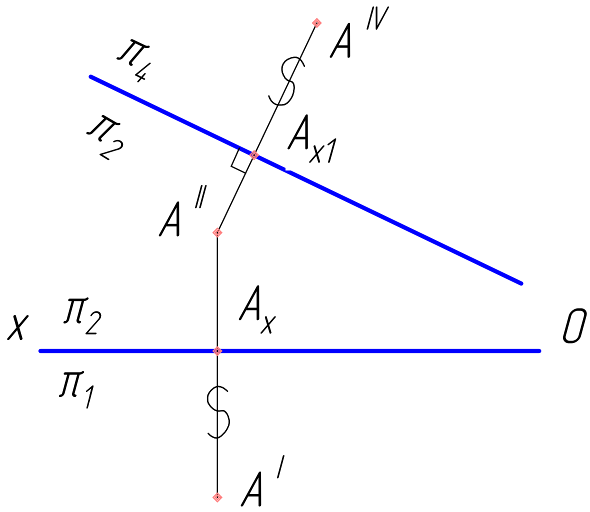


Рис.6.12

Рассмотрим решение задачи в прямоугольных проекциях. Пусть задана точка **A** ($\mathbf{A^{I}}$,$\mathbf{A^{II}}$) в системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$ (см. Рис.6.11). Требуется построить проекцию точки **A** на новую плоскость проекций, перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Проведём произвольную прямую и примем её за новую ось проекций $\mathbf{x_1}$. Новую плоскость проекций $\boldsymbol{\pi_4}$ совместим с плоскостью чертежа вращением вокруг оси $\mathbf{x_1}$. Это вращение обычно производится так, чтобы избежать наложения дополнительного изображения на основные проекции. Новую фронтальную проекцию $\mathbf{A^{IV}}$ получим, откладывая на продолжении перпендикуляра, опущенного из горизонтальной проекции $\mathbf{A^{I}}$ на ось $\mathbf{x_1}$, отрезок $\mathbf{A_{x1}A^{IV}}$=$\mathbf{A^{II}A_x}$=$\mathbf{z_A}$.

Построение проекций точек на новую плоскость проекций, перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$, осуществляют в аналогичной последовательности.

Пусть требуется построить новую проекцию точки $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A^{I}}$,$\mathbf{A^{II}}$) на горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_4}$, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ (см. Рис.6.12). Проведём новую произвольную ось проекций $\mathbf{x_1}$. Из фронтальной проекции $\mathbf{A^{II}}$ опускаем перпендикуляр на $\mathbf{x_1}$ и на его продолжении откладываем отрезок $\mathbf{A_{x1}A^{IV}}$=$\mathbf{A_xA^{I}}$=$\mathbf{y_A}$. Проекция $\mathbf{A^{IV}}$ точки $\mathbf{A}$ называется новой горизонтальной проекцией точки. Отметим, что *при перемене плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ на новую плоскость проекций, перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$, остаётся неизменной координата $\boldsymbol{y}$ проецируемой точки.*

Рассмотрим пример построения новых проекций точки при последовательной перемене двух плоскостей проекций. Пусть дана точка $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A^{I}}$,$\mathbf{A^{II}}$) в системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$ (см. Рис.6. 13).

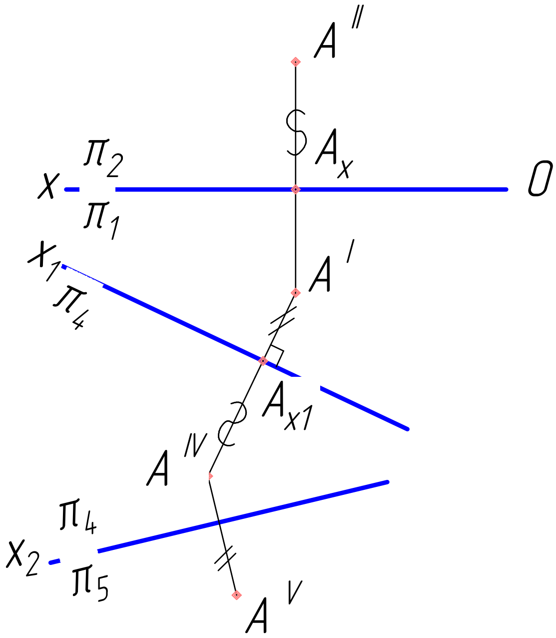


Рис.6.13

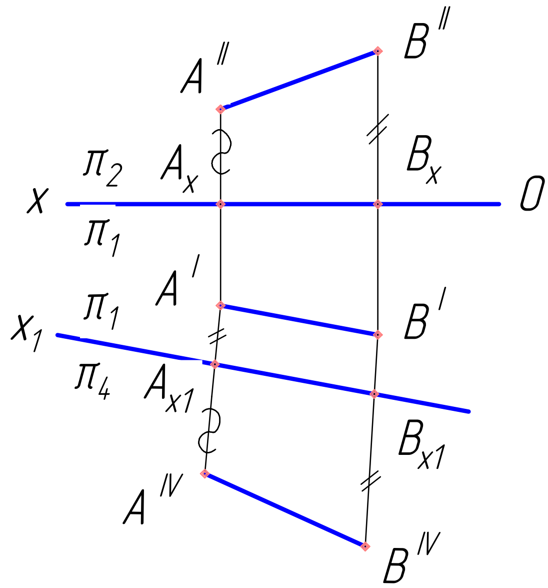


Рис.6.14

Новые проекции точки $\mathbf{A}$ будем строить, последовательно заменяя плоскость $\boldsymbol{\pi_2}$ на плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$, а затем плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$- на $\boldsymbol{\pi_5}$. Для этого проведём новую ось проекций $\mathbf{x_1}$ и на перпендикуляре, опущенном из точки $\mathbf{A^{I}}$ на $\mathbf{x_1}$, отложим $\mathbf{A_{x1}A^{IV}}$=$\mathbf{A_xA^{II}}$=$\mathbf{z_A}$. В системе $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_4}$ координата $\mathbf{y_A}$=$\mathbf{A^{I}A_{x1}}$, а координата $\mathbf{z_A}$=$\mathbf{A_xA^{II}}$. Далее заменим плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ на плоскость $\boldsymbol{\pi_5}$. Проведём новую ось проекций $\mathbf{x_2}$ и на перпендикуляре, опущенном из точки $\mathbf{A^{IV}}$ на ось $\mathbf{x_2}$, отложим отрезок $\mathbf{A_{x2}A^{V}}$=$\mathbf{A^{I}A_{x1}}$=$\mathbf{y_A}$. Точка $\mathbf{A^{V}}$- новая горизонтальная проекция точки $\mathbf{A}$. Таким образом, в результате последовательной перемены двух плоскостей проекций осуществлён переход от системы плоскостей $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$ к системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_4}$ и $\boldsymbol{\pi_5}$, в которой точка задана проекциями $\mathbf{A^{IV}}$ и $\mathbf{A^{V}}$.

Решение задач методом перемены плоскостей проекций предусматривает, как правило, проецирование прямой на новую плоскость проекций, параллельную или перпендикулярную к ней (прямой).

Пусть требуется определить *истинную длину отрезка* **AB** ($\mathbf{A^IB^I}$,$\mathbf{A^{II}B^{II}}$) прямой общего положения (см. Рис.6. 14).

Для этого спроецируем заданный отрезок на новую плоскость проекций, параллельную ему и перпендикулярную, например, к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Новые фронтальные проекции точек **A** и **B** находим, откладывая на перпендикулярах, опущенных из точек $\mathbf{A^I}$ и $\mathbf{B^I}$ на ось $\mathbf{x_1}$, отрезки $\mathbf{A_{x1}A^{IV}}$=$\mathbf{A_xA^{II}}$=$\mathbf{z_A}$; $\mathbf{B_{x1}B^{IV}}$=$\mathbf{B_xB^{II}}$=$\mathbf{z_B}$.

Отрезок $\mathbf{A^{IV}B^{IV}}$ равен истинной длине отрезка **AB**, так как в системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_4}$-$\mathbf{A^IB^I}\parallel\mathbf{x_1}$. Необходимо отметить, что если концы заданного отрезка (точки **A** и **B**) имеют разные по знаку координаты, то значения этих координат откладываются в противоположные стороны по отношению к новой оси проекций.

Рассмотрим пример преобразования отрезка прямой общего положения в отрезок, перпендикулярный к новой плоскости проекций. Эту задачу можно решить последовательной переменой двух плоскостей проекций. Сначала заданную прямую проецируют на плоскость, параллельную этой прямой и перпендикулярную к одной из плоскостей проекций, а затем – на плоскость, перпендикулярную к прямой и к предыдущей плоскости проекций.

Пусть задан отрезок **AB** ($\mathbf{A^IB^I}$,$\mathbf{A^{II}B^{II}}$) прямой общего положения (см. Рис.6.15).

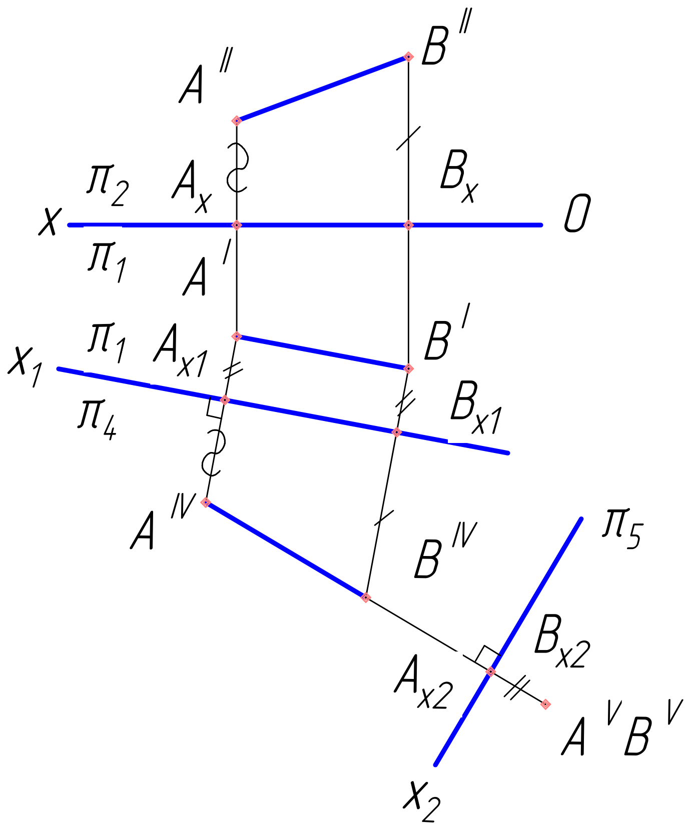


Рис.6.15

Требуется сделать эту прямую перпендикулярной к новой плоскости проекций. Для этого спроецируем заданный отрезок на плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$ параллельную ему и перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Новой фронтальной проекцией отрезка **AB** будет $\mathbf{A^{IV}B^{IV}}$. Далее заменим плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ на новую $\boldsymbol{\pi_1}$, перпендикулярную к отрезку и к плоскости $\boldsymbol{\pi_4}$, т.е. проведём $\mathbf{x_2 \perp A^{IV}B^{IV}}$. При перемене горизонтальной плоскости проекций неизменными будут координаты **y** точек **A** и **B**. Новые горизонтальные проекции $\mathbf{A^V}$ и $\mathbf{B^V}$ расположатся на общем перпендикуляре к $\mathbf{x_2}$ и на одинаковом расстоянии от $\mathbf{x_2}$ ($\mathbf{A_{x2}A^V}$= $\mathbf{B_{x2}B^V}$=$\mathbf{A^IA_{x1}}$=$\mathbf{B^IB_{x1}}$.

Перейдём к построению методом перемены плоскостей проекций новых проекций плоскости. Пусть дано косоугольное изображение плоскости общего положения $\boldsymbol{\alpha}$ ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$,$\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$) в системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$ (см. Рис.6.16).

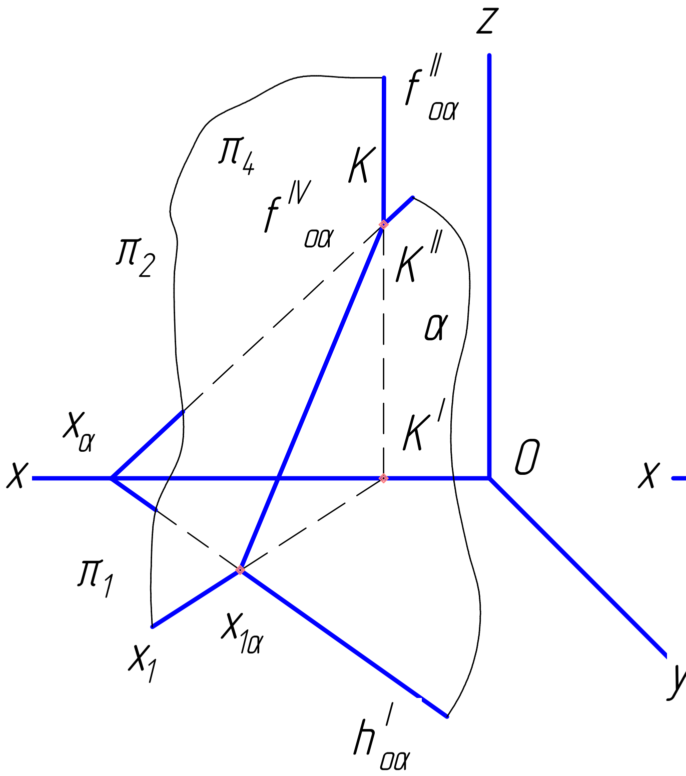


Рис.6.16

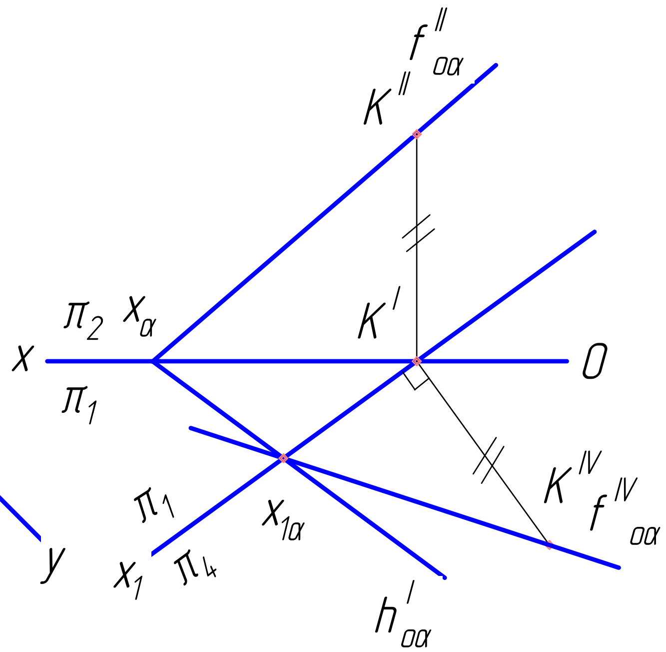


Рис.6.17

Требуется построить изображение плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ в системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_4}$, задав плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ следами. Изобразим на чертеже произвольную плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$, перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Её горизонтальный след будет новой осью проекций $\mathbf{x_1}$. След $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ сохранится прежним. Новым фронтальным следом плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ будет линия пересечения плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\pi_4}$. Изображение этого следа $\mathbf{f^{IV}_{o\alpha}}$ получим, соединяя прямой точки пересечения соответствующих следов данных плоскостей ($\mathbf{x_{1\alpha}}$ и $\mathbf{K^{IV}}$). Точка $\mathbf{x_{1\alpha}}$ - новая точка схода следов плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ в системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_4}$.

Покажем построение нового фронтального следа плоскости в прямоугольных проекциях. Пусть дана плоскость **α** ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$,$\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$) в системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_1}$ (см. Рис.6.17). Требуется построить следы плоскости **α** в системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_4}$, где $\boldsymbol{\pi_4}$ - новая плоскость проекций, перпендикулярная к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$. Проведём произвольную прямую, пересекающую след $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ и ось **ox**, и примем её за новую ось проекций $\mathbf{x_1}$. Построим новый фронтальный след плоскости **α**, совместив плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$ с плоскостью чертежа вращением вокруг оси $\mathbf{x_1}$. Точку $\mathbf{x_{1\alpha}}$ схода следов имеем в пересечении следа $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ с осью $\mathbf{x_1}$. Вторую точку $\mathbf{K^{IV}}$следа $\mathbf{f^{IV}_{o\alpha}}$ найдём, построив новую фронтальную проекцию точки **K** пересечения фронтальных следов плоскостей **α** и $\boldsymbol{\pi_4}$. Её горизонтальная проекция $\mathbf{K^{I}}$ расположена в точке пересечения осей $\mathbf{x_1}$ и **ox**, а фронтальная проекция $\mathbf{K^{II}}$ - в пересечении перпендикуляра, восстановленного из точки $\mathbf{K^{I}}$ к оси **ox**, со следом $\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$. Новую фронтальную проекцию $\mathbf{K^{IV}}$ точки **K** найдём, отложив на перпендикуляре к оси $\mathbf{x_1}$, восстановленном из точки $\mathbf{K^{I}}$, значение координаты **z** ($\mathbf{K^{I}K^{IV}}$=$\mathbf{K^{I}K^{II}}$) точки **K**. Прямая, проведённая из точки $\mathbf{x_{1\alpha}}$ через точку $\mathbf{K^{IV}}$, будет новым фронтальным следом $\mathbf{f^{IV}_{o\alpha}}$ плоскости **α**.

Методом перемены плоскостей проекций можно преобразовать плоскость общего положения в плоскость, проецирующую по отношению к новой плоскости проекций. Пусть требуется заданную плоскость **α** ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$,$\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$) общего положения сделать перпендикулярной к новой плоскости проекций (см. Рис.6.18).

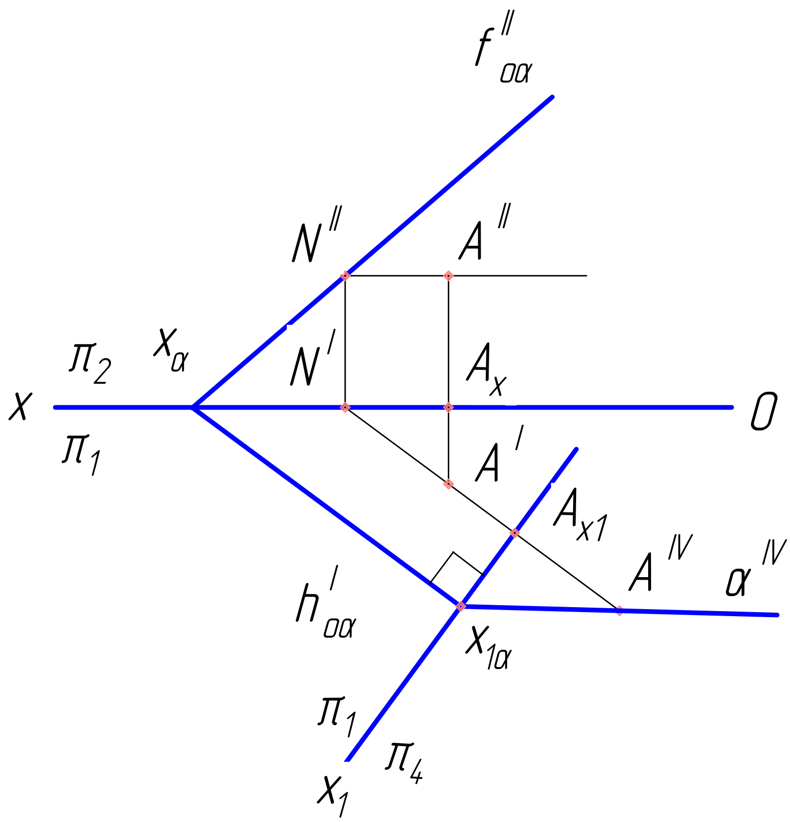


Рис.6. 18

Заменим плоскость α плоскостью π_4, одновременно перпендикулярной к плоскости α и к плоскости π_1. Если плоскость α перпендикулярна к плоскости π_4, то в системе плоскостей π_1 и π_4 плоскость α будет фронтально – проецирующей и её горизонтальный след перпендикулярен к новой оси проекций. С учётом изложенного проведём $x_1 \perp h^I_{o\alpha}$ и отметим новую точку схода следов $x_{1\alpha}$. Второй точкой следа α^{IV} будет новая фронтальная проекция любой точки, лежащей в плоскости α. Возьмём точку A (A^I,A^{II}) на горизонтали NA плоскости α и построим новую её фронтальную проекцию A^{IV} ($A^IA^{IV} \perp x_1$) и $A_{x1}A^{IV}=A_x\ A^{II}=z_A$. Проведя прямую из точки $x_{1\alpha}$ через точку A^{IV}, получим новый фронтальный след α^{IV}.

Построение можно упростить, если взять точку на следе заданной плоскости. Например, для преобразования плоскости α ($f^{II}_{o\alpha}$,$h^I_{o\alpha}$) в проецирующую по отношению к плоскости π_4 (см. Рис.6.19) проводим $x_1 \perp h^I_{o\alpha}$ и строим новую фронтальную проекцию K_1^{IV} точки K, взятой на следе $f^{II}_{o\alpha}$ ($K_1^IK^{IV} \perp x_1$ и $K_1^IK^{IV}=K^IK^{II}= z_K$). Прямая, проведённая из новой точки $x_{1\alpha}$ схода следов через точку K^{IV}, будет искомым новым фронтальным следом α^{IV}.

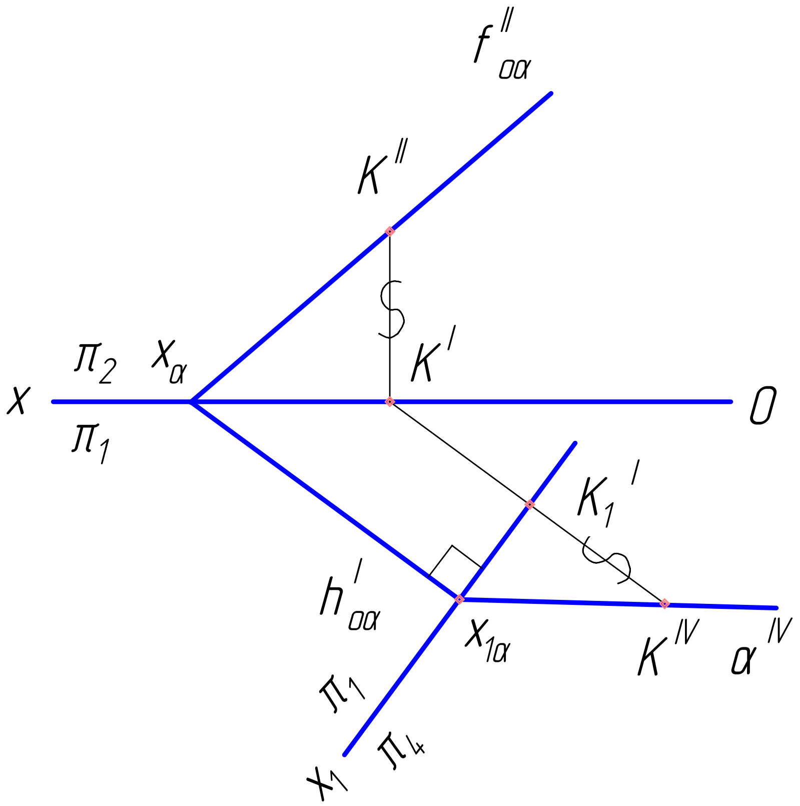


Рис.6.19

Пусть требуется определить *истинную величину треугольника* ***ABC***, заданного проекциями $A^IB^IC^I$ и $A^IB^{II}C^{II}$ (см. Рис.6.20). Заменим плоскость π_2 новой фронтальной плоскостью проекций π_4, перпендикулярной к плоскости треугольника. Для этого строим произвольную горизонталь треугольника.

Горизонтальная проекция $\mathbf{A^{I}F^{I}}$ горизонтали определяет направление горизонтального следа плоскости треугольника. Проведём $\mathbf{x_1 \perp A^{I}F^{I}}$ и найдём новую фронтальную проекцию треугольника, построив новые фронтальные проекции его вершин.

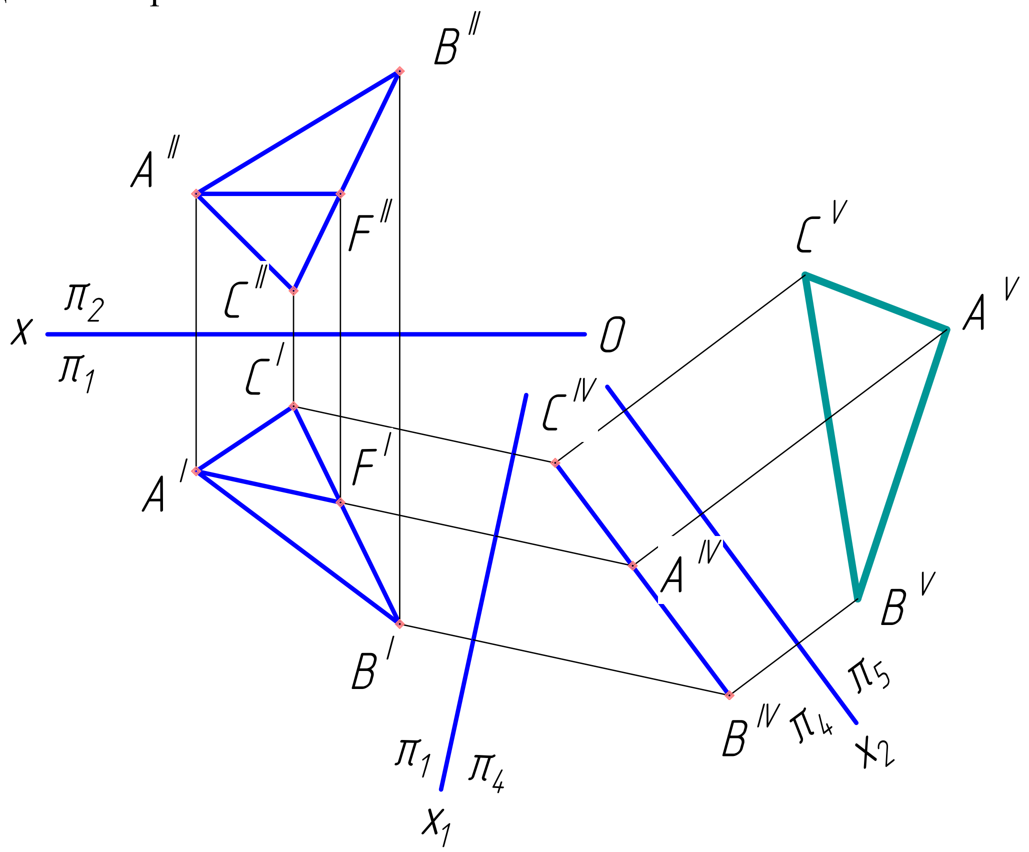


Рис.6. 20

Треугольник $\mathbf{ABC}$ спроецируется на плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$ в виде прямой $\mathbf{A^{IV}B^{IV}C^{IV}}$, так как плоскость треугольника стала проецирующей.

Произведём вторую перемену плоскости проекций, заменяя плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ новой плоскостью $\boldsymbol{\pi_5}$, параллельной плоскости треугольника. Новой осью проекций $\mathbf{x_2}$ будет прямая, параллельная проекции $\mathbf{C^{IV}A^{IV}B^{IV}}$треугольника. Новые горизонтальные проекции $\mathbf{A^{V}}$,$\mathbf{B^{V}}$,$\mathbf{C^{V}}$ вершин найдём на перпендикулярах, опущенных из точек $\mathbf{A^{IV}}$,$\mathbf{B^{IV}}$,$\mathbf{C^{IV}}$ на ось $\mathbf{x_2}$, откладывая на них от оси $\mathbf{x_2}$ значения координат $\mathbf{y}$ этих точек. Соединяя новые горизонтальные проекции точек прямыми линиями, получим истинную величину $\mathbf{A^{V}B^{V}C^{V}}$ заданного треугольника.

Отметим, что метод перемены плоскостей проекций обеспечивает получение чёткого чертежа, так как дополнительные построения не накладываются на основные проекции.

6.3 Основные метрические задачи

К метрическим задачам относят задачи на определение кратчайших расстояний между геометрическими элементами, определение истинных размеров углов между геометрическими элементами и определение истинных размеров геометрических элементов. Часть этих задач рассматривалась выше (определение истинной длины отрезка прямой линии, определение истинной величины плоской фигуры).

В этом разделе рассмотрим решение метрических задач с помощью метода вращения вокруг горизонтали (фронтали), а также метода перемены плоскостей проекций.

Рассмотрим следующие задачи:

1 Определить кратчайшее расстояние:
  - 1.1 Между двумя точками
  - 1.2 Между точкой и прямой
  - 1.3 Между параллельными прямыми
  - 1.4 Между скрещивающимися прямыми
  - 1.5 От точки до плоскости
  - 1.6 От прямой до параллельной ей плоскости
  - 1.7 Между параллельными плоскостями

2 Определить истинную величину угла:
  - 2.1 Между двумя пересекающимися прямыми
  - 2.2 Между прямой и плоскостью
  - 2.3 Между двумя плоскостями

1.1 Кратчайшее расстояние между двумя точками есть истинная длина отрезка, соединяющего эти точки (см. Рис.6.14)

1.2 Кратчайшим расстоянием от точки до прямой будет перпендикуляр, опущенный из этой точки на прямую (или её продолжение). Задача решается двумя переменами плоскостей проекций – прямую проецируют в точку (см. Рис.6.15), в ту же систему координат проецируют заданную точку и, соединяя две полученные точки, находят искомое расстояние (см. Рис.6.21) $\mathbf{C^{V}K^{V}}$.

Чтобы найти положение точки $\mathbf{K^{IV}}$ на проекции $\mathbf{A^{IV}B^{IV}}$ необходимо помнить, что если $\mathbf{C^{V}K^{V}}$- истинная величина отрезка, то $\mathbf{C^{IV}K^{IV}}$ всегда параллельна оси $\mathbf{x_2}$.

Следует помнить, что $\mathbf{C^{V}K^{V}}$всегда больше (частный случай – равен) любой проекции $\mathbf{CK}$.

1.3 Кратчайшее расстояние между параллельными прямыми - перпендикуляр, опущенный из любой точки одной прямой на другую (см.1.2, Рис.6.21).

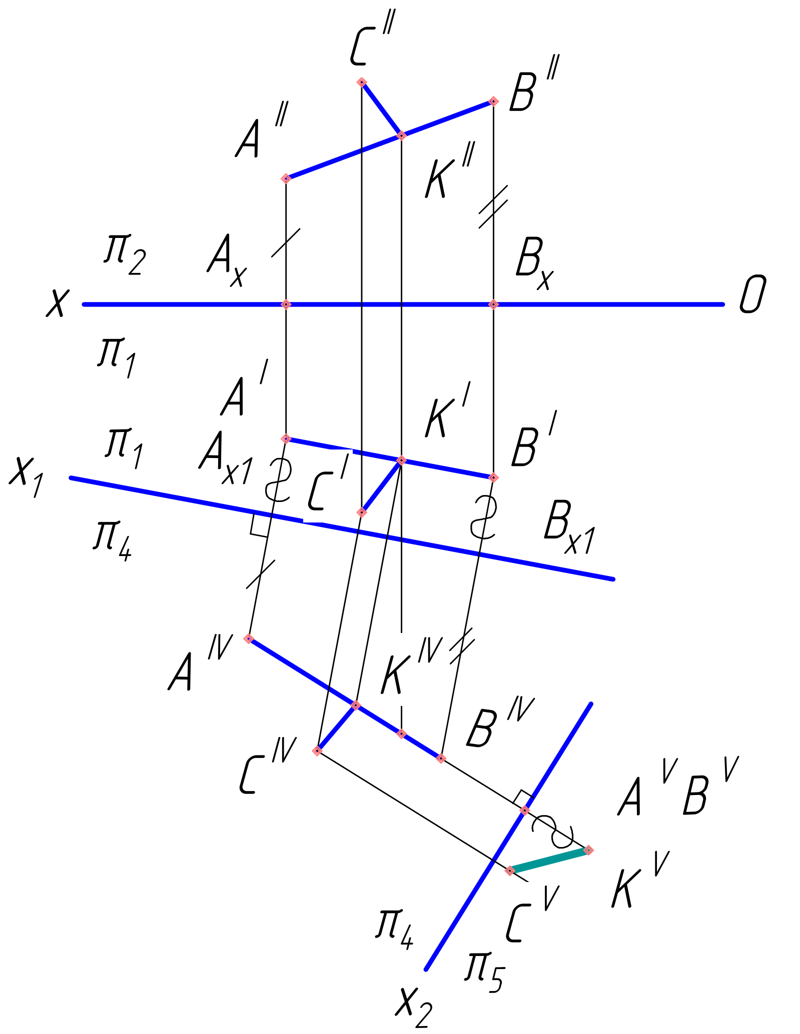


Рис.6.21

1.4 Чтобы найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми, нужно двумя переменами плоскостей проекций одну из прямых спроецировать в точку, перенести в эту систему координат, вторую прямую и из полученной точки опустить перпендикуляр на проекцию прямой (см. Рис.6.22)

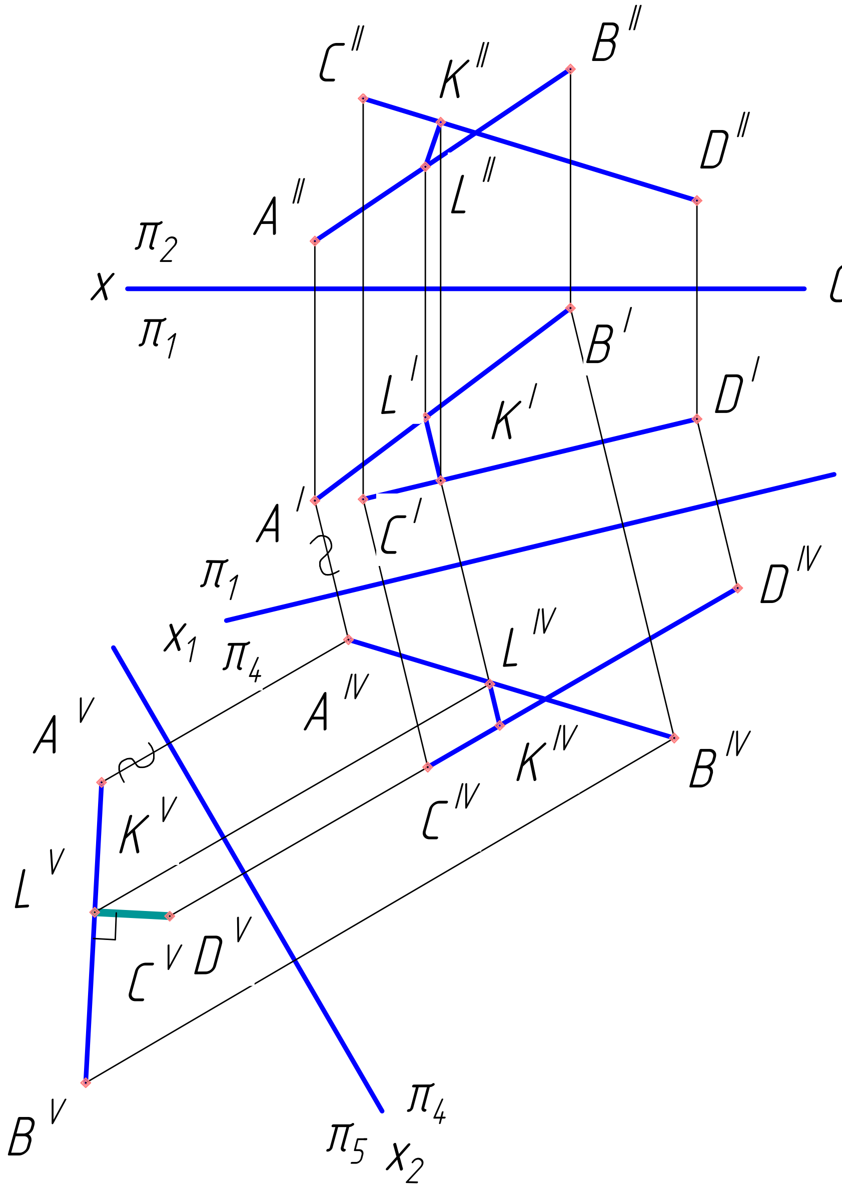


Рис.6.22

1.5 Кратчайшее расстояние от точки до плоскости – перпендикуляр, проведённый от этой точки к плоскости. Если плоскость проецирующая – это перпендикуляр от проекции точки к проецирующему следу плоскости (см. Рис.6.23, а). Если задана плоскость общего положения – одной переменой плоскостей проекций преобразуем её в проецирующую (см. Рис.6.18) и решаем задачу, как указано выше (см. Рис.6.23, б).

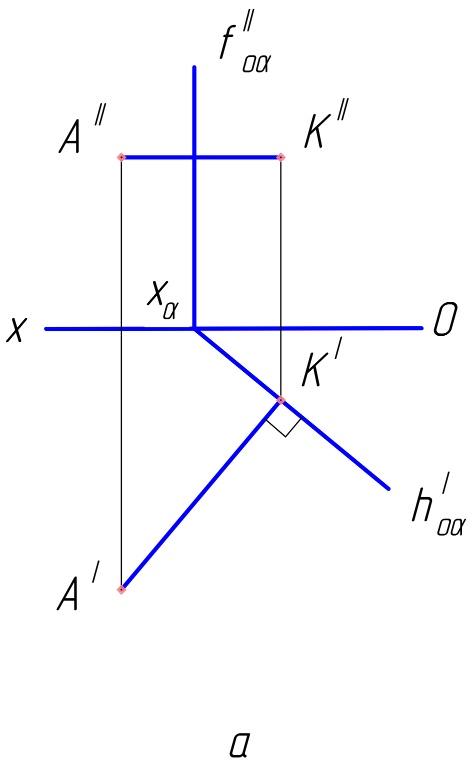


Рис.6.23, а

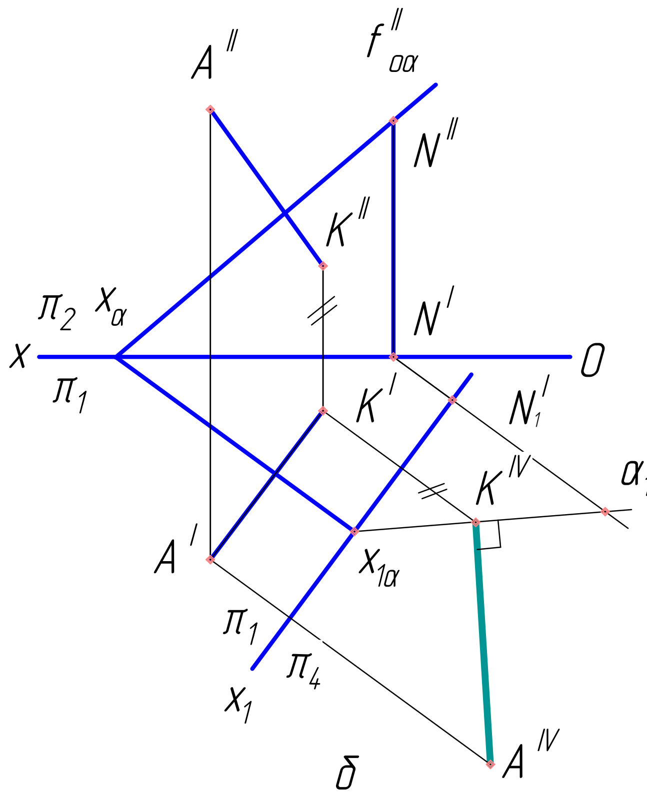


Рис.6.23, б

Если плоскость задана плоской фигурой – одной переменой плоскостей проекций преобразуем её в проецирующую (см. Рис.6.20) и опускаем на эту линию перпендикуляр из проекции заданной точки.

1.6 Так как прямая параллельна плоскости, то все её точки равноудалены от плоскости. Поэтому находим кратчайшее расстояние от любой точки этой прямой до плоскости (см.1.5, Рис.6.23).

1.7 У параллельных плоскостей соответствующие следы параллельны. Если даны две проецирующие плоскости, то кратчайшее расстояние между ними - это перпендикуляр, проведённый в любом месте к проецирующим следам этих плоскостей (см. Рис.6.24). Если заданы параллельные плоскости общего положения – преобразуем их в проецирующие.

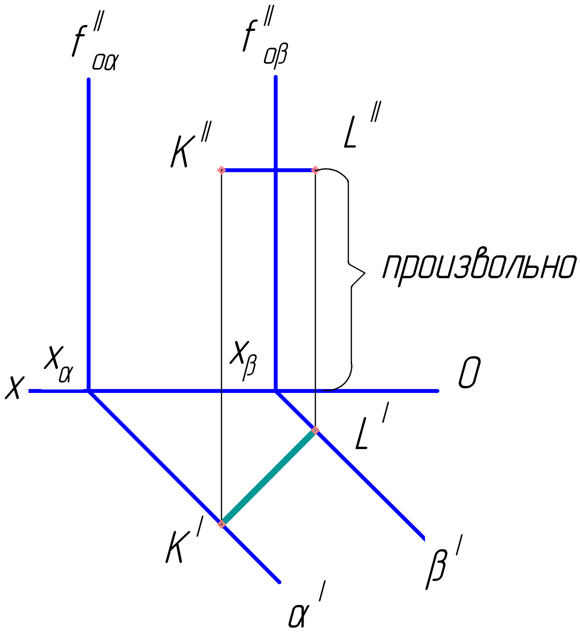


Рис.6.24

2.1 Для нахождения истинной величины угла   между пересекающимися прямыми **AB** и **BC** применим метод вращения вокруг горизонтали (см. Рис.6.25). Проводим $\mathbf{C^{II}1^{II}}$ - ФПГ находим $\mathbf{C^{I}1^{I}}$- ГПГ. При вращении **Δ1BC** вокруг горизонтали **1C** точки **1**и **C** – неподвижны. Точкам **B** перемещается в пространстве по окружности, горизонтальная проекция которой – прямая $\perp\mathbf{1^{I}C^{I}}$ (ГПГ). Откладывая от оси вращения $\mathbf{1^{I}C^{I}}$ истинную величину радиуса вращения $\mathbf{O^{I}B^{I}}$ (см. Рис.6. 9), получим истинную величину $\mathbf{\Delta 1^{I}B^{I}C^{I}}$, т. е. истинную величину угла **φ** между прямыми **AB** и **BC**.

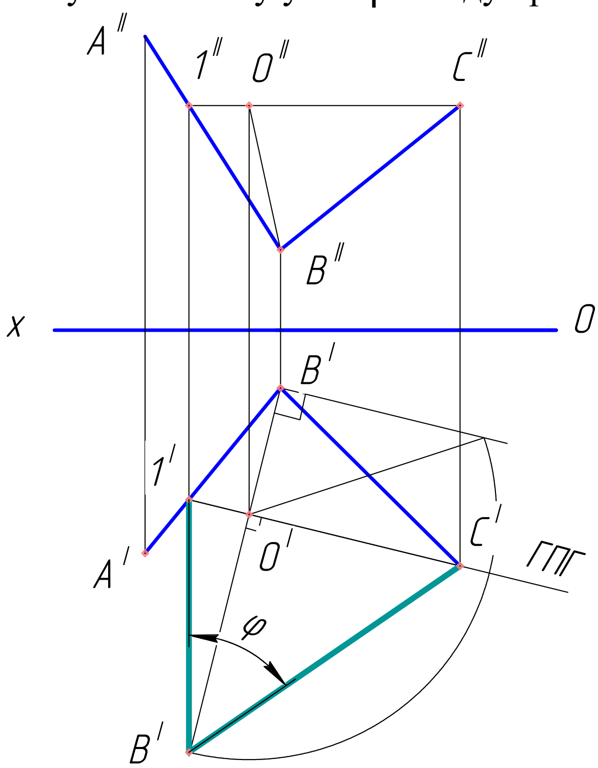


Рис.6.25

2.2 Прямая, не параллельная плоскости, составляет с ней некоторый угол **φ**. Для нахождения этого угла воспользуемся следующим рассуждением. Рассматривая прямоугольный треугольник $\Delta K^{I}BB^{I}$ (Рис.6.26, а), нетрудно убедиться, что угол между прямой **AB** и плоскостью π_1= 90°-ω.
Если нужно найти угол **φ** между плоскостью **α** ($f^{II}_{o\alpha}$,$h^{I}_{o\alpha}$) и прямой **AB** ($A^{I}B^{I}$,$A^{II}B^{II}$), то мы сначала найдём угол **ω** - между прямой **AB** и перпендикуляром к плоскости **α**, опущенным из произвольной точки прямой **AB**.

Пусть задана плоскость **α** ($f^{II}_{o\alpha}$,$h^{I}_{o\alpha}$) и прямая **AB** ($A^{I}B^{I}$,$A^{II}B^{II}$). Из точки **B** опустим перпендикуляр к плоскости **α** **BC** ($B^{I}C^{I}\perp h^{I}_{o\alpha}$,$B^{I}C^{I}\perp f^{II}_{o\alpha}$). Точка **C** ($C^{I}$,$C^{II}$), выбрана произвольно. Вращением вокруг горизонтали **C1** ($C^{II}1^{II}\parallel ox$,$C^{I}1^{I}$) находим истинную величину дополнительного угла **ω** (см. Рис.6.25). Находим **φ**=90°-**ω** (см. Рис.6.26, б).

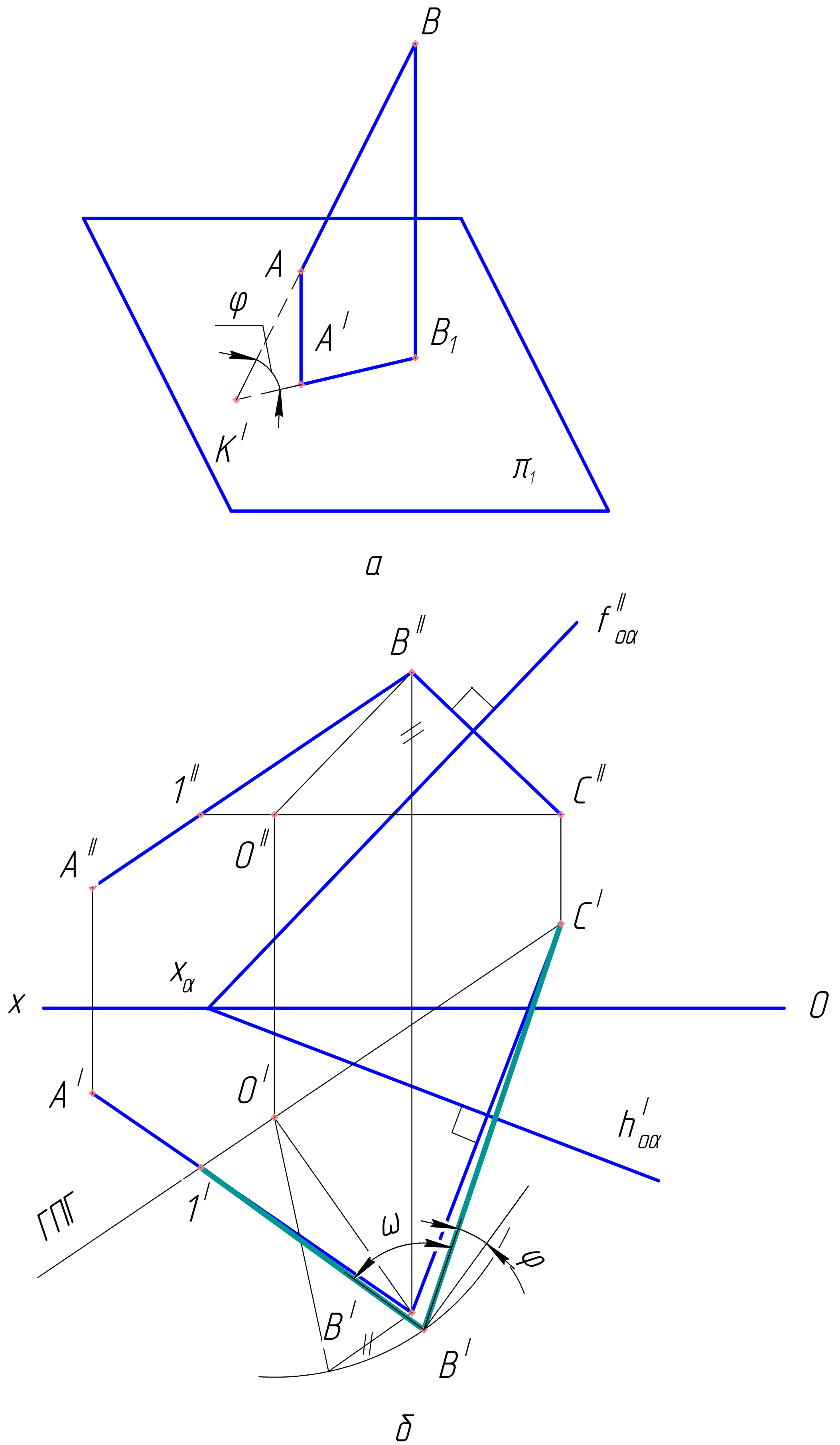


Рис.6.26, а,б

2.3 Две пересекающиеся плоскости образуют в пространстве четыре угла, два из них (противоположные) – острые, два – тупые (частный случай – все углы прямые). Углом между плоскостями в начертательной геометрии принято считать острый угол.

Если из произвольной точки **A** в пространстве (Рис.6.27, а) опустить на пересекающиеся плоскости $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ перпендикуляры **AK** и **AL**, то угол $\boldsymbol{\varphi}$ между плоскостями будет равен $\boldsymbol{\varphi}=180°-\boldsymbol{\omega}$.

Воспользуемся этим рассуждением для нахождения угла $\boldsymbol{\varphi}$ между плоскостями $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ (Рис.6.27, б). Из произвольной точки **A** ($\mathbf{A^{I}}$,$\mathbf{A^{II}}$) опускаем перпендикуляры к плоскостям $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ $\mathbf{A^{II}K^{II}\perp f^{II}_{o\beta}}$,$\mathbf{A^{I}K^{I}\perp h^{I}_{o\beta}}$ (точки **K** и **L** взяты произвольно). Проведя $\mathbf{K^{II}L^{II}}$ (ФПГ) и $\mathbf{K^{I}L^{I}}$ (ГПГ) находим истинную величину дополнительного угла $\boldsymbol{\omega}$ (см. Рис.6.25). Находим $\boldsymbol{\varphi}=180°-\boldsymbol{\omega}$ (см. Рис.6.27, б). Если найденный дополнительный угол $\boldsymbol{\omega}$ - острый, то он и будет углом между пересекающимися плоскостями.

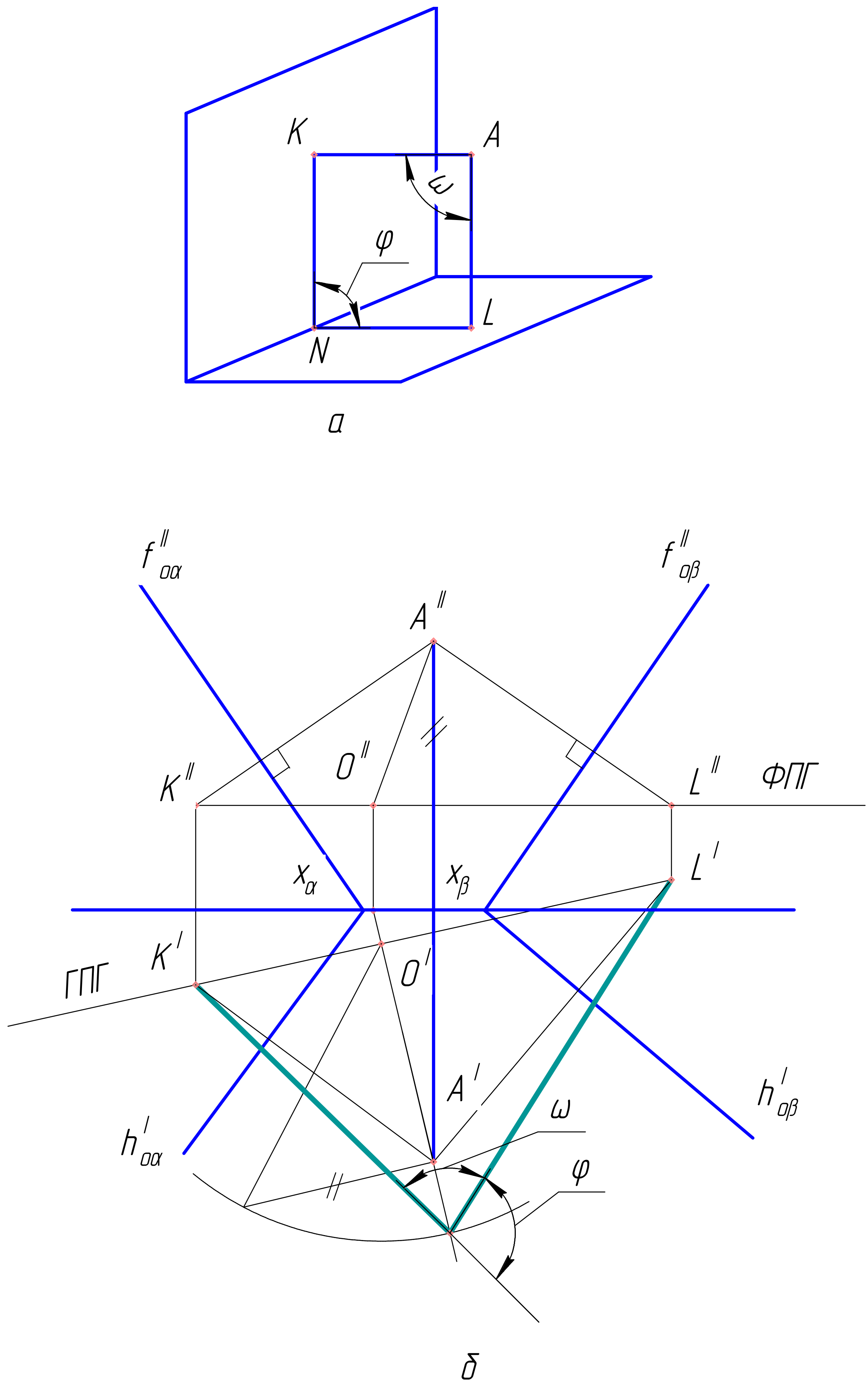


Рис.6.27, а,б

7 Вопросы для самопроверки

1. С какой целью необходимо преобразование проекций?
2. Какие существуют способы преобразования проекций?
3. В чём сущность метода перемены плоскостей проекций?
4. Как надо расположить новые плоскости проекций, чтобы отрезок прямой общего положения спроецировался в истинную величину? В точку?
5. Как нужно расположить новую плоскость проекций, чтобы плоскость общего положения стола проецирующей?
6. При каком расположении плоской фигуры можно определить её истинную величину заменой только одной плоскости проекций?
7. В чём сущность преобразования проекций методом вращения?
8. Какие линии используются в качестве осей вращения?
9. Как изменяется фронтальная проекция фигуры при вращении её вокруг фронтально – проецирующей прямой?
10. Сформулируйте принцип определения истинной величины фигуры вращением вокруг горизонтали как фронтали.

8 Поверхность

*Поверхностью называется совокупность последовательных положений некоторой линии **g**, перемещающейся в пространстве по определённому закону.*

Закон перемещения линии **g** целесообразно задавать в виде совокупности и указаний о характере перемещения линии **g**. *Подвижная линия{**d**...} называется образующей, неподвижные линии{**d**...} - направляющими.*

На Рис.8.1 закон перемещения линии **g** задан кривой **d**. При этом имеется в виду, что образующая **g** скользит по направляющей **d**, оставаясь параллельной самой себе, в точке **A**, принадлежащая образующей , перемещается по кривой **d**.

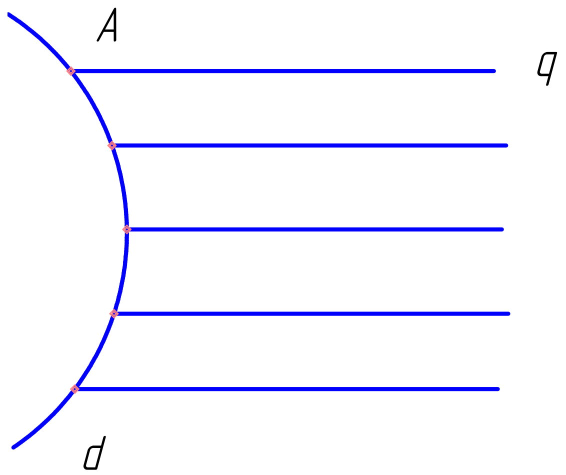


Рис.8.1

Если образующая **g** - прямая, то поверхность называется *линейчатой*. Если **g** - кривая, то поверхность будет *криволинейной (нелинейчатой)*.

В дальнейшем будем рассматривать только линейчатые поверхности с одной направляющей. *К ним относятся конические, цилиндрические и многогранные поверхности.*

Коническая поверхность (Рис.8.2, а) однозначно определяется прямолинейной образующей **g**, кривой направляющей **d** и точкой **S**. При этом образующая пересекает направляющую и все образующие пересекаются в одной точке.

Цилиндрическая поверхность (см. Рис.8.2, б) получается в случае, когда все прямолинейные образующие пересекаются в несобственной точке $\mathbf{S}_\infty$.

Плоскость (см. Рис.8.2, в) является частным случаем цилиндрической или конической поверхности, когда и образующая и направляющая являются прямыми и все образующие пересекаются в несобственной точке $\mathbf{S}_\infty$.

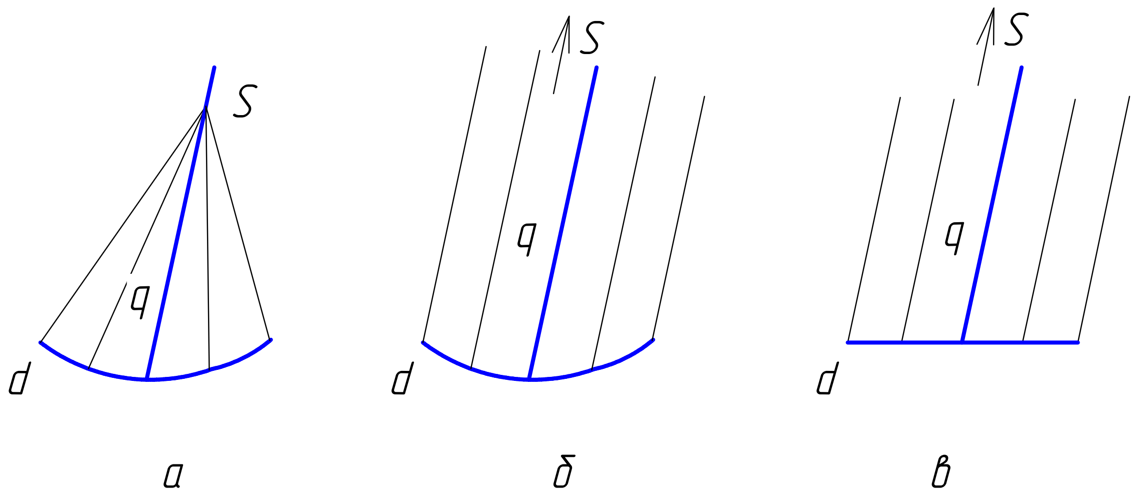


Рис.8.2

8.1 Пересечение поверхности плоскостью

При пересечении поверхности плоскостью получается плоская фигура, которую называют *сечением*. Построение сечения поверхности плоскостью целесообразно начать с пересечения многогранников плоскостью.

Многогранником называют пространственную фигуру, ограниченную рядом плоскостей, имеющих форму многоугольников. Стороны многоугольников образуют *рёбра*, а плоскости – *грани*.

Проекциями сечения многогранников в общем случае являются многоугольники, вершины которых принадлежат рёбрам, а стороны – граням многогранника. Поэтому задачу по определению сечения многогранника плоскостью можно решать способом рёбер или способом граней. *Способ рёбер* заключается в нахождении точек встречи прямой (ребро многогранника) с плоскостью. *Способ граней* сводится к построению линии пересечения двух плоскостей (грань многогранника и секущая плоскость). Какому способу отдать предпочтение, нужно решать в каждом конкретном случае отдельно. Рассмотрим примеры построения многогранников плоскостью.

<u>Пример 1</u> Построить проекции сечения прямой призмы плоскостью общего положения (см. Рис.8.3).

В случае рёбра призмы **ABCDEF** перпендикулярны плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$, следовательно, основания призмы проецируются на неё в истинную величину. Кроме того, нижнее основание лежит в горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_1}$ ($\mathbf{DEF} \in \boldsymbol{\pi}$). Из Рис.8.3 следует, что плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ пересекает основание **DEF** и ребро **CF**. Так как $\mathbf{h^I{}_{o\alpha}} \in \boldsymbol{\pi_1} \Delta\mathbf{DEF} \in \boldsymbol{\pi_1}$, достаточно отметить горизонтальные проекции точек пересечения ($\mathbf{1^I}$ и $\mathbf{2^I}$) сторон нижнего основания с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$ и найти их фронтальные проекции ($\mathbf{1^{II}}$ и $\mathbf{2^{II}}$). Вследствие того, что $\mathbf{CF} \perp \boldsymbol{\pi_1}$ горизонтальная проекция точки пересечения $\mathbf{3^I}$ этого ребра с плоскостью **α** совпадает с горизонтальной проекцией ребра, т. е. $\mathbf{C^I}$ точками и $\mathbf{F^I}$.

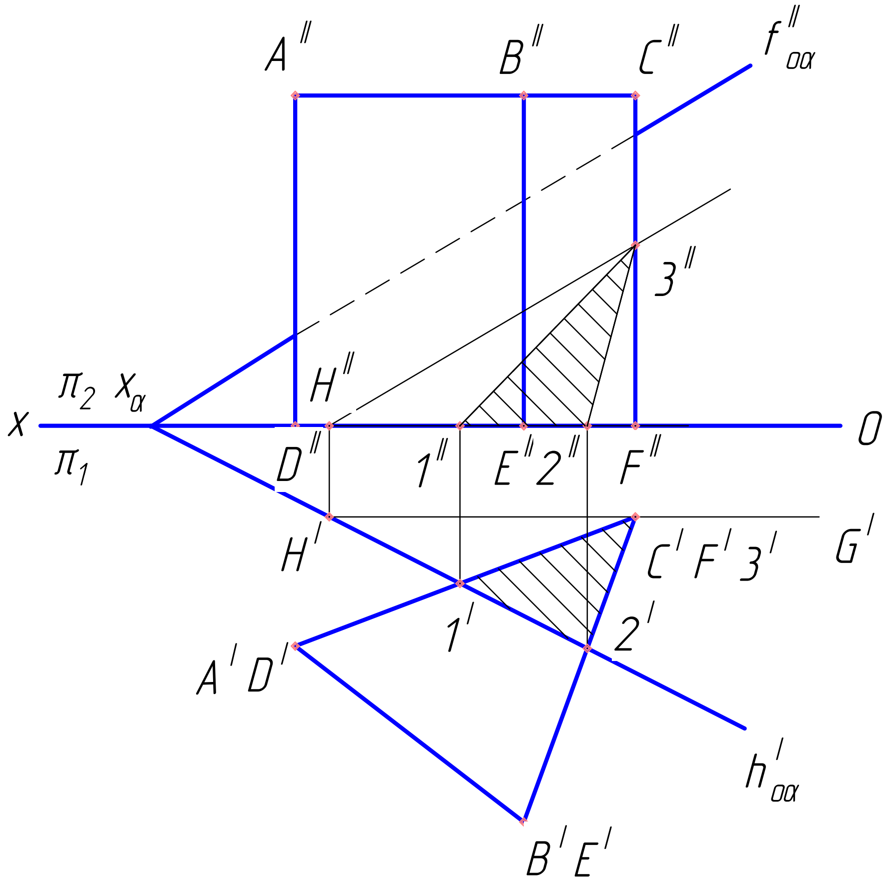


Рис.8.3

Фронтальная проекция точки **3** определяется из условия принадлежности её плоскости **α**. Для этого через точку $\mathbf{3^I}$ проводят горизонтальную проекцию $\mathbf{H^IG^I}$ прямой, принадлежащей плоскости **α**, находят её фронтальную проекцию $\mathbf{H^{II}G^{II}}$ и на ней отмечают точку $\mathbf{3^{II}}$. Так как плоскость **α** задана следами, то в качестве вспомогательной прямой целесообразно использовать фронталь **HG** (см. Рис.8.3) или горинталь.

Необходимо отметить, что если бы плоскость **α** не пересекала основание призмы, то точки **1** и **2** на рёбрах находились бы также с помощью вспомогательных прямых.

<u>Пример 2</u> Построить сечение трёхгранной пирамиды горизонтально – проецирующей плоскостью (см. Рис.8.4).

При таком расположении секущей плоскости **α** нет необходимости в дополнительных построениях, так как горизонтальная проекция сечения должна принадлежать следу $\mathbf{\alpha^I}$ плоскости. Поэтому достаточно отметить точки $\mathbf{1^I}$, $\mathbf{2^I}$, $\mathbf{3^I}$ в которых горизонтальный след $\mathbf{\alpha^I}$ пересекает горизонтальные проекции $\mathbf{S^IA^I}$, $\mathbf{S^IB^I}$, $\mathbf{S^IC^I}$ рёбер пирамиды. Фронтальные проекции $\mathbf{1^{II}}$, $\mathbf{2^{II}}$, $\mathbf{3^{II}}$ определяются в проекционной связи на соответствующих фронтальных проекциях рёбер пирамиды.

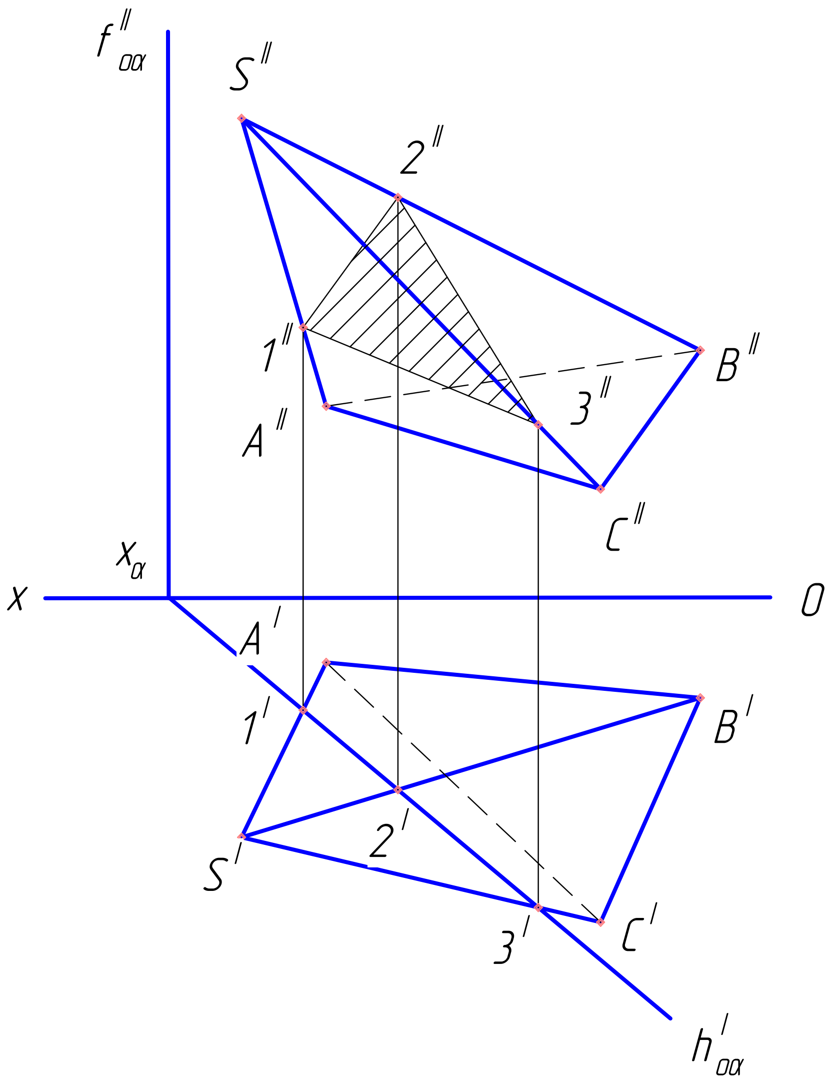


Рис.8.4

Пример 3 Построить проекции сечения наклонной пирамиды плоскостью общего положения (см. Рис.8.5). Определить истинную величину фигуры сечения.

В данном случае целесообразно методом перемены плоскостей проекций преобразовать плоскость α общего положения в проецирующую и далее действовать так же, как ив предыдущем примере. Таким образом осуществляем переход от системы плоскостей π_2, π_1 к новой системе π_1, π_4, в которой плоскость α станет фронтально – проецирующей. Для этого новую ось x_1 проводим перпендикулярно к горизонтальному следу $h^{I}_{o\alpha}$. Новый фронтальный след α^{II} плоскости проходит через точку схода следов $x_{1\alpha}$. Для нахождения второй точки при проведении следа α^{II}, можно взять произвольную точку $k^{II} \in f^{II}_{o\alpha}$ и построить рассмотренным ранее способом её фронтальную проекцию K^{IV} на новой плоскости π_4.

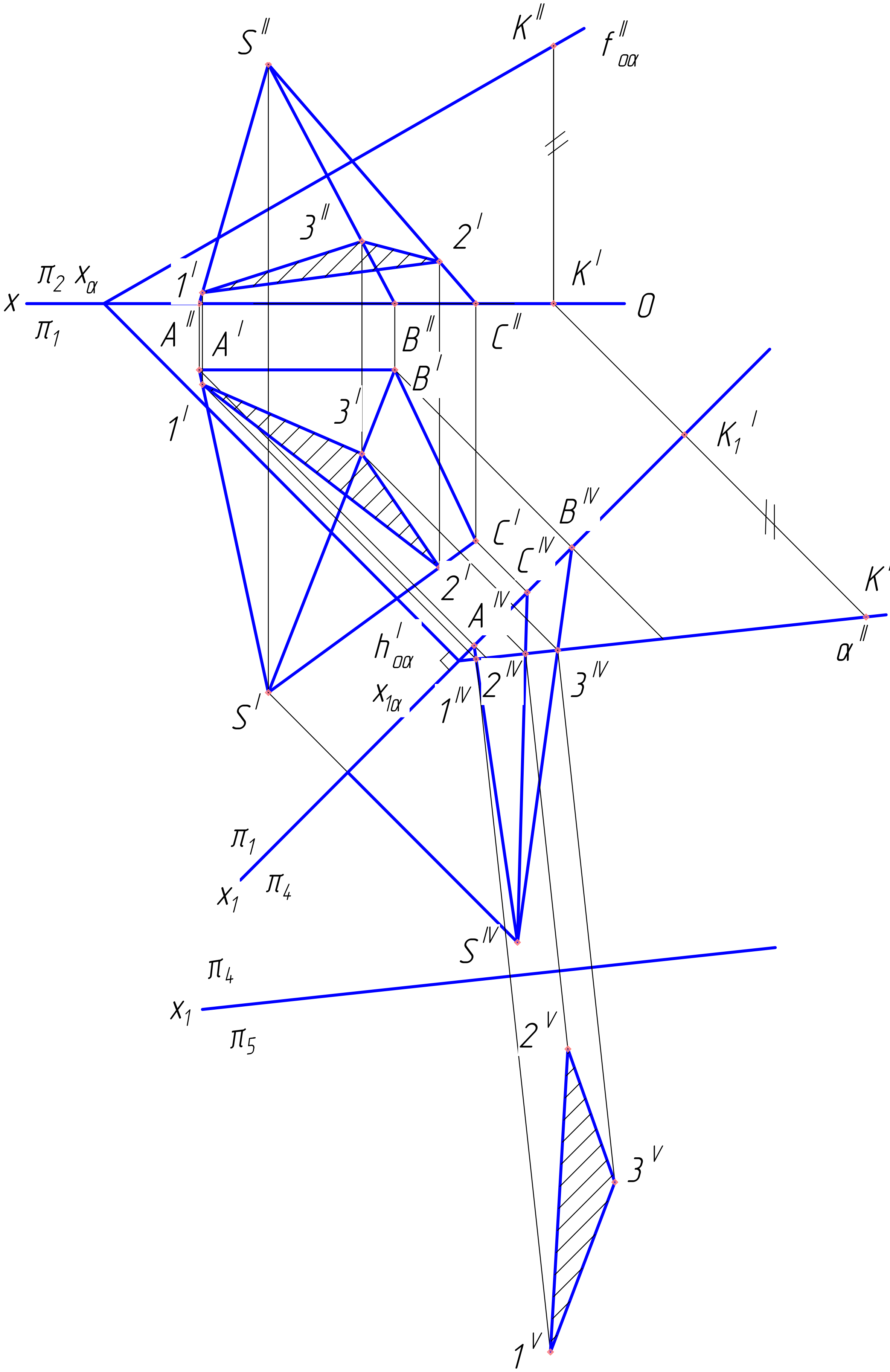

S''
K''
f''0α
3''
2'
x
π2
xα
1'
π1
A''
A'
B''
C''
K'
0
B'
1'
3'
K1'
B IV
C'
C IV
2'
A IV
K IV
h'0α
α''
x1α
1 IV
2 IV
3 IV
S'
π1
x1
π4
S IV
π4
x1
π5
2 V
3 V
1 V

Рис.8.5

Далее строим проекцию пирамиды на плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$. Для построения проекции вершины $\mathbf{S^{IV}}$ необходимо от новой оси $\mathbf{x_1}$ по линии связи, перпендикулярной к ней, отложить отрезок, равный $\mathbf{z}$ точки $\mathbf{S}$. Точки $\mathbf{A^{IV}}$,$\mathbf{B^{IV}}$ и $\mathbf{C^{IV}}$ основания будут лежать на оси $\mathbf{x_1}$, так как $\mathbf{ABC} \in \boldsymbol{\pi_1}$.

Фронтальная проекция сечения пирамиды плоскостью $\mathbf{P}$ принадлежит следу $\boldsymbol{\alpha^{II}}$, поэтому отмечаем точки $\mathbf{1^{IV}}$,$\mathbf{2^{IV}}$и $\mathbf{3^{IV}}$, в которых след $\boldsymbol{\alpha^{II}}$, пересекает фронтальные проекции $\mathbf{S^{IV}A^{IV}}$, $\mathbf{S^{IV}C^{IV}}$, $\mathbf{S^{IV}B^{IV}}$ рёбер. Далее методом обратного проецирования находим горизонтальную и фронтальную проекции сечения:

$$\mathbf{1^{IV} \in S^{IV}A^{IV}} \Leftrightarrow (\mathbf{1^{I} \in S^{I}A^{I}}) \wedge (\mathbf{1^{II} \in S^{I}A^{I}})$$
$$\mathbf{2^{IV} \in S^{IV}C^{IV}} \Leftrightarrow (\mathbf{2^{I} \in S^{I}C^{I}}) \wedge (\mathbf{2^{II} \in S^{I}C^{I}})$$
$$\mathbf{3^{IV} \in S^{IV}B^{IV}} \Leftrightarrow (\mathbf{3^{I} \in S^{I}B^{I}}) \wedge (\mathbf{3^{II} \in S^{I}B^{I}})$$

Чтобы определить истинную величину фигуры сечения, необходимо произвести замену плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ новой плоскостью $\boldsymbol{\pi_5}$, параллельной секущей плоскости $\boldsymbol{\alpha}$. Для этого проводим новую ось $\mathbf{x_2}$ параллельно проецирующему следу $\boldsymbol{\alpha^{II}}$. Далее находим проекции точек $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ и $\mathbf{3}$ на плоскость $\boldsymbol{\pi_5}$ следующим образом. Из точек $\mathbf{1^{IV}}$,$\mathbf{2^{IV}}$и $\mathbf{3^{IV}}$ восстанавливаем перпендикуляры к оси $\mathbf{x_2}$ и откладываем на них от новой оси $\mathbf{x_2}$, отрезки, равные соответственно расстояниям от $\mathbf{1^{I}}$,$\mathbf{2^{I}}$ и $\mathbf{3^{I}}$ до оси $\mathbf{x_1}$. Соединив полученные точки $\mathbf{1^{IV}}$,$\mathbf{2^{V}}$и $\mathbf{3^{V}}$ получим истинную величину фигуры сечения пирамиды плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$.

При нахождении точек сечения поверхности вращения плоскостью целесообразно применять способ вспомогательных секущих плоскостей, которые пересекают поверхность по окружностям или по образующим. Построение проекций сечения начинают с отыскания проекций характерных (опорных) точек. К ним относятся точки, проекции которых расположены на проекциях контурных (очерковых) образующих поверхности, так как в этих точках изменяется видимость проекций линии пересечения. Характерными будут также точки перехода линии пересечения с боковой поверхности тела на его основание (если плоскость пересекает основание) и точки, проекции которых являются наивысшими наинизшими. Рассмотрим некоторые примеры.

<u>Пример 4</u> Построить проекции сечения прямого и кругового цилиндра плоскостью общего положения (см. Рис.8.6).

Построение начнём с отыскания *характерных* точек. Проекции точек линии пересечения, расположенных на контурных образующих, найдём с помощью вспомогательной фронтальной плоскости $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\beta^{I}} \parallel \mathbf{ox}$), проходящей через ось цилиндра.

Плоскость $\boldsymbol{\beta}$ пересекает поверхность цилиндра по образующим, а плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ - по общей для них фронтали ($\mathbf{K^{I}L^{I}}$, $\mathbf{K^{II}L^{II}}$).

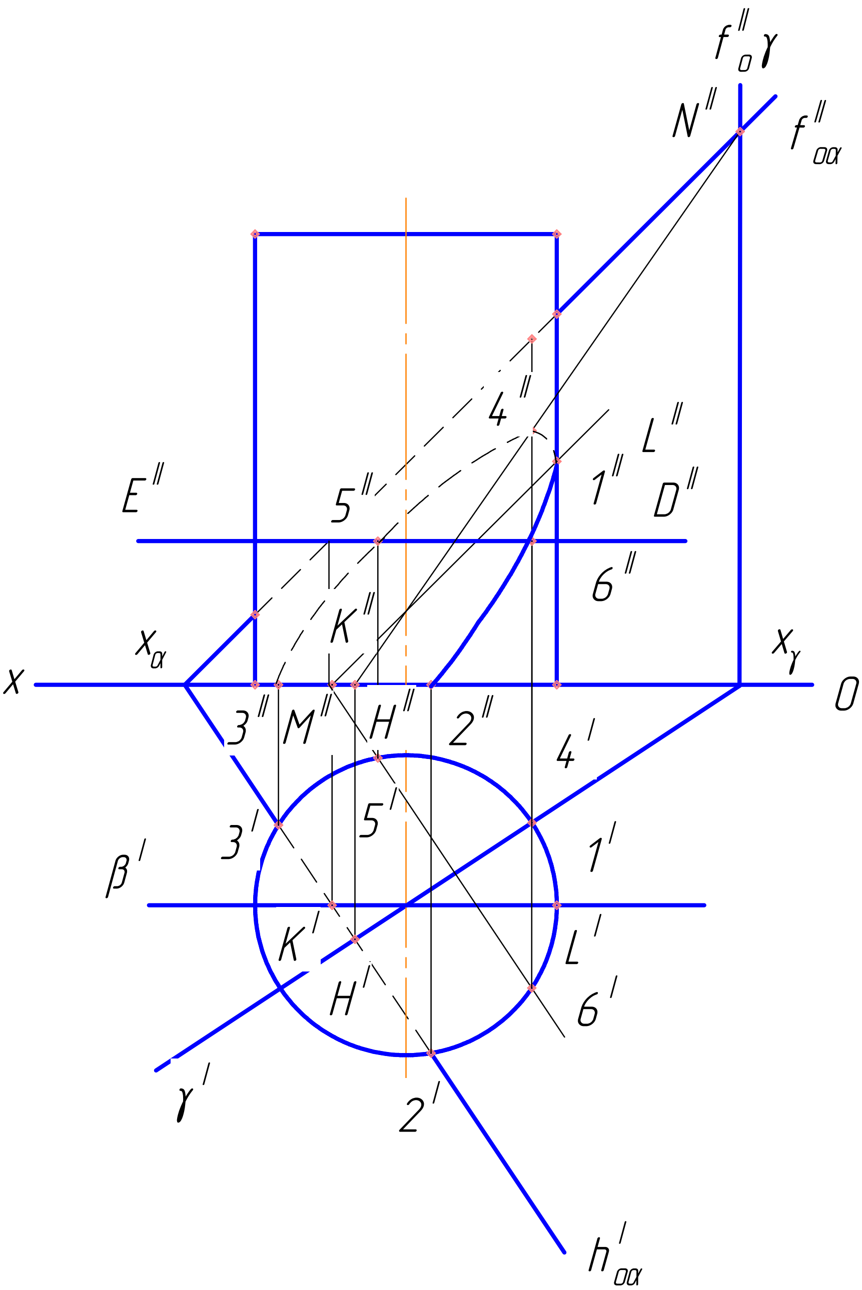


Рис.8.6

Точка $\mathbf{1^{II}}$ пересечения фронтальной проекции $\mathbf{K^{II}L^{II}}$ фронтали с образующей будет искомой фронтальной проекцией точки пересечения образующей с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$. Горизонтальная проекция точки $\mathbf{1^{I}}$ совпадает с точкой, в которую проецируется на плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ образующая (точка на горизонтальной проекции фронтали).

Вторая контурная образующая в пределах заданной поверхности с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$ не пересекается. Следовательно, плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ пересекает нижнее основание цилиндра. Точки перехода линии пересечения с боковой поверхности цилиндра на его основание отмечаем без дополнительных построений. Горизонтальные проекции $\mathbf{2^{I}}$ и $\mathbf{3^{I}}$ этих точек будут в точках пересечения следа $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$ с горизонтальной проекцией основания цилиндра. Их фронтальные проекции $\mathbf{2^{II}}$ и $\mathbf{3^{II}}$ находим на оси **ox**, так как основание принадлежит плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$.

Наивысшая и наинизшая точки проекции сечения на плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ определяются с помощью вспомогательной горизонтально – проецирующей плоскости $\boldsymbol{\gamma}$, перпендикулярной к плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\gamma^{I} \perp h^{I}_{o\alpha}}$) и проходящей через ось цилиндра. Эта плоскость пересекает поверхность цилиндра по образующим, горизонтальные проекции которых совпадают с точками пересечения следа $\boldsymbol{\gamma^{I}}$, с горизонтальной проекцией основания цилиндра (точка $\mathbf{4^{I}}$). Фронтальная проекция $\mathbf{4^{II}}$ расположена на фронтальной проекции $\mathbf{H^{II}N^{II}}$ линии пересечения плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\gamma}$.

Промежуточные точки **5** и **6** линии сечения строим с помощью вспомогательной плоскости $\boldsymbol{\varepsilon}$, перпендикулярной к оси цилиндра ($\boldsymbol{\varepsilon^{II} \parallel ox}$). Она пересекает поверхность цилиндра по окружности, а плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ - по общей для них горизонтали **MD** ($\mathbf{M^{I}D^{I}, M^{II}D^{II}}$). Горизонтальные проекции $\mathbf{5^{I}}$ и $\mathbf{6^{I}}$ точек сечения получаем в пересечении с окружностью основания. Фронтальные их проекции $\mathbf{5^{II}}$ и $\mathbf{6^{II}}$ расположены на следе $\boldsymbol{\varepsilon^{II}}$.

Соединяя фронтальные проекции $\mathbf{3^{II}}$, $\mathbf{5^{II}}$, $\mathbf{4^{II}}$, $\mathbf{1^{II}}$, $\mathbf{6^{II}}$ и $\mathbf{2^{II}}$ точек плавной кривой, получаем фронтальную проекцию линии пересечения.

<u>Пример 5</u> Построить проекции сечения поверхности прямого кругового конуса плоскостью, параллельной двум образующим (Рис.8.7).

В нашем случае (см. Рис.8.7) плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ является горизонтально - проецирующей плоскостью. Поэтому горизонтальная проекция сечения (гиперболы) совпадает с горизонтальным следом $\boldsymbol{\alpha^{I}}$. Горизонтальные проекции $\mathbf{1^{I}}$ и $\mathbf{2^{I}}$ точек перехода линии сечения с боковой поверхности конуса на основание находятся в пересечении $\boldsymbol{\alpha^{I}}$ с горизонтальной проекцией основания. Фронтальные проекции $\mathbf{1^{II}}$ и $\mathbf{2^{II}}$ расположены на оси **ox**. Для нахождения наивысшей точки **3** сечения воспользуемся вспомогательной горизонтально - проецирующей плоскостью $\boldsymbol{\beta}$, проходящей через ось конуса перпендикулярно плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\beta^{I} \perp \alpha^{I}}$). Горизонтальная проекция $\mathbf{3^{I}}$ искомой точки лежит в пересечении горизонтальных следов $\boldsymbol{\beta^{I}}$ и $\boldsymbol{\alpha^{I}}$, а фронтальная проекция $\mathbf{3^{II}}$ – на фронтальной проекции $\mathbf{S^{II}B^{II}}$, образующей **SB**, по которой плоскость $\boldsymbol{\beta}$ пересекает поверхность конуса. Горизонтальная проекция точки **4**, разделяющей фронтальную проекцию сечения на видимую и невидимую части, ленжит в пересечении горизонтальной проекции образующей $\mathbf{S^{I}A^{I}}$ и следа $\boldsymbol{\alpha^{I}}$. Фронтальная проекция $\mathbf{4^{II}}$ расположена на $\mathbf{S^{II}A^{II}}$. Дополнительные точки **5** и **6** сечения находим с помощью произвольной вспомогательной горизонтальной плоскости $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma^{I} \parallel ox}$), пересекающей поверхность конуса по окружности.

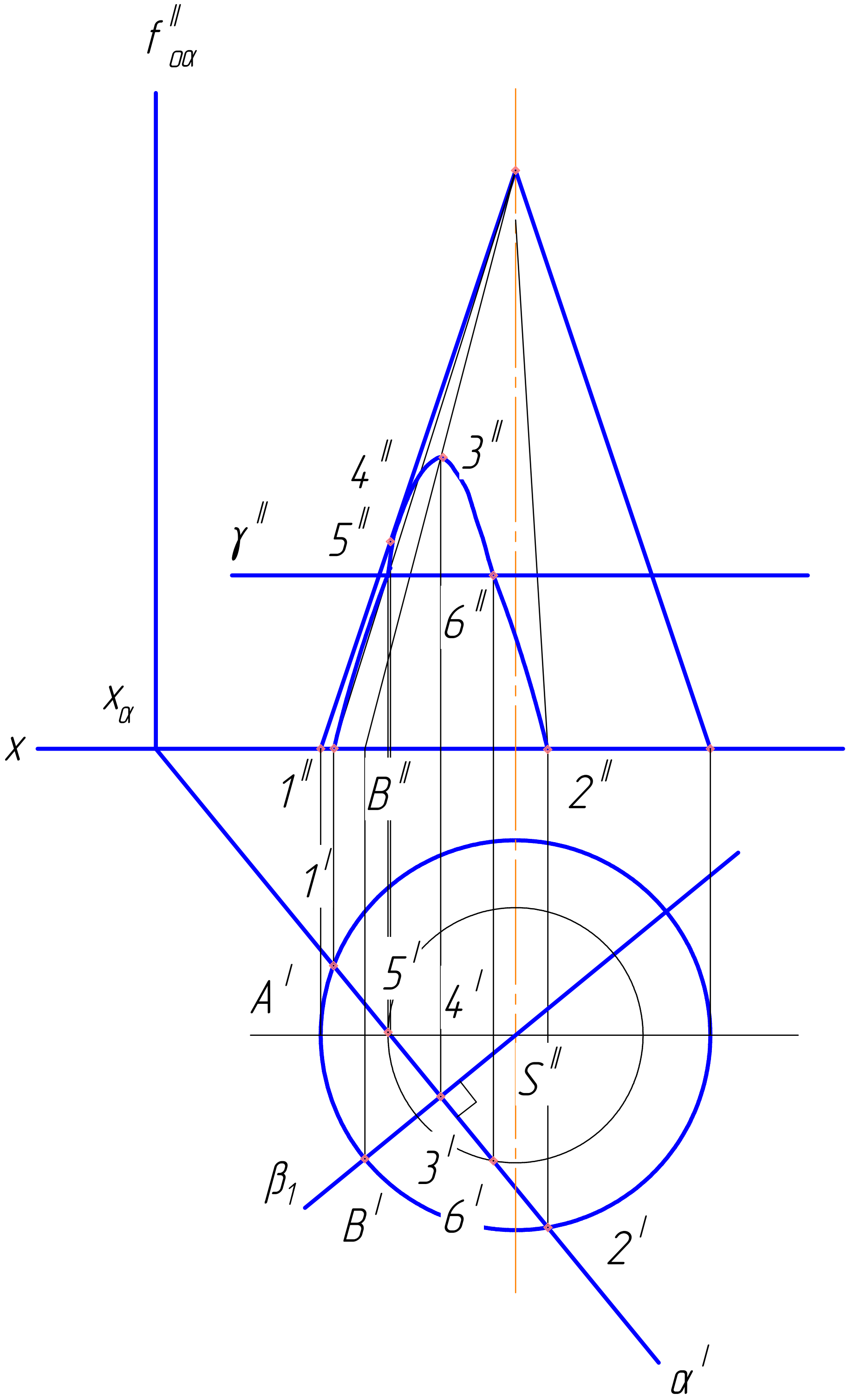


Рис.8.7

<u>Пример 6</u> Построить проекции сечения поверхности прямого кругового конуса плоскостью **α** общего положения (см. Рис.8.8).

Построение начинаем с нахождения точек **1** и **2**, расположенных на очерковых образующих. Для этого проводим вспомогательную плоскость **γ**, параллельную фронтальной плоскости π_2 ($\gamma^I \parallel ox$) и проходящую через ось конуса.

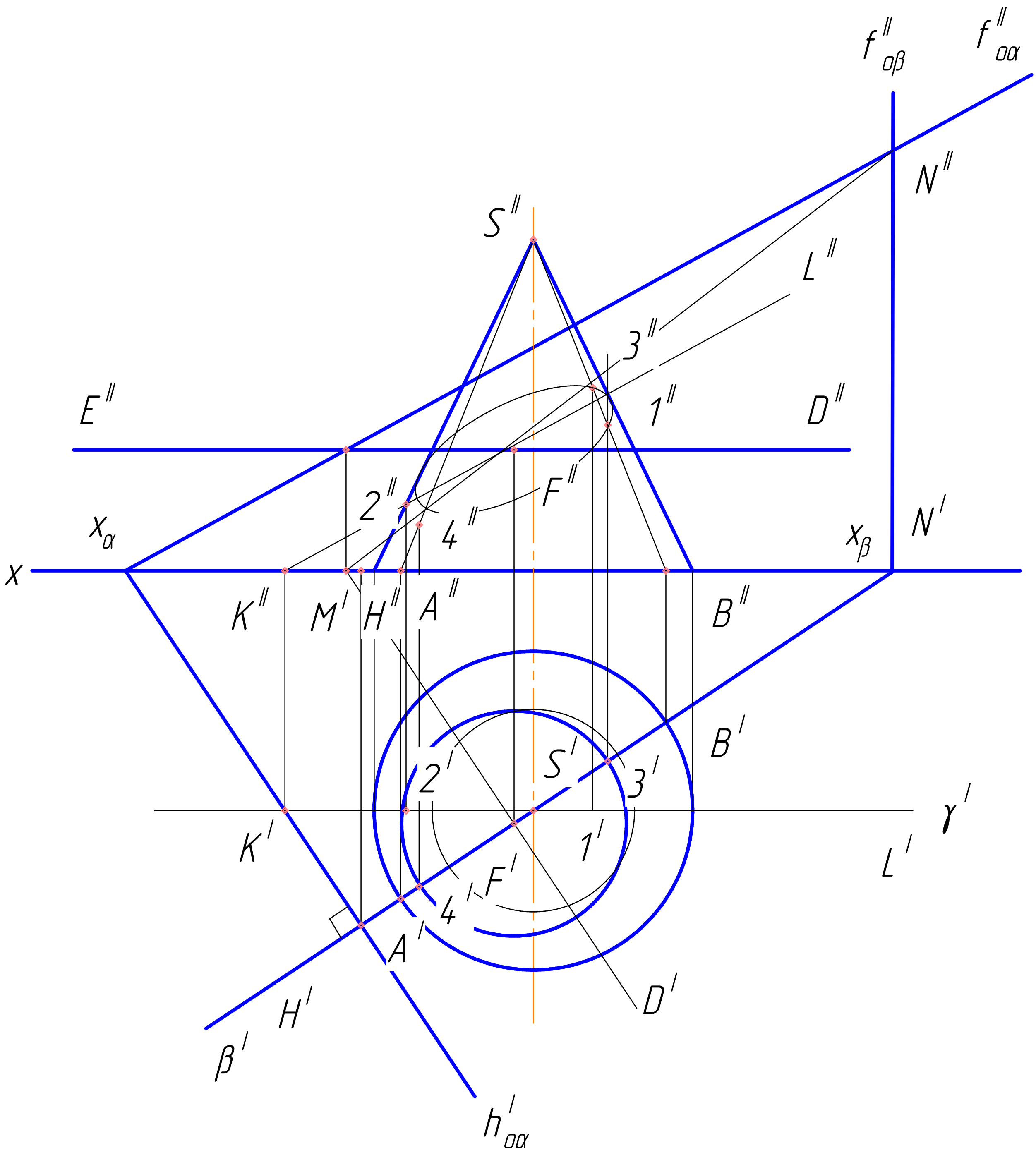


Рис.8.8

Она пересекает плоскость **α** по фронтали **KL** ($\mathbf{K^{I}L^{I}}$,$\mathbf{K^{II}L^{II}}$), а поверхность конуса – по очерковой образующей. На пересечении фронтальной проекции $\mathbf{K^{II}L^{II}}$ фронтали и очерковых образующих находим точки $\mathbf{1^{II}}$ и $\mathbf{2^{II}}$. Горизонтальные проекции $\mathbf{1^{I}}$ и $\mathbf{2^{I}}$ точек расположены на $\mathbf{K^{I}L^{I}}$. Далее проводим плоскость **β**, горизонтально - проецирующую и перпендикулярную к плоскости **α**, проходящую через ось конуса. Эта плоскость пересекает коническую поверхность по образующим **SA** и **SB**, а плоскость **α** - по линии **HN** ($\mathbf{H^{I}N^{I}}$,$\mathbf{H^{II}N^{II}}$). На пересечении фронтальных проекций $\mathbf{S^{II}A^{II}}$ и $\mathbf{S^{II}B^{II}}$ образующих и прямой $\mathbf{H^{II}N^{II}}$ находим точки $\mathbf{3^{II}}$ и $\mathbf{4^{II}}$. Горизонтальные проекции точек $\mathbf{3^{I}}$ и $\mathbf{4^{I}}$ лежат в проекционной связи с $\mathbf{3^{II}}$ и $\mathbf{4^{II}}$ на следе $\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{I}}$. Необходимо отметить, что прямая **3** – **4** является большой осью эллипса, получающегося в сечении. Для нахождения малой оси эллипса через середину **F** отрезка **3** – **4** проводим вспомогательную плоскость **ε**, перпендикулярную к оси конуса (**ε**‖**ox**) и проходит через $\mathbf{F^{II}}$. Она пересекает поверхность конуса по окружности радиуса **r**, а плоскость **α** - по горизонтали **MD** ($\mathbf{M^{I}D^{I}}$,$\mathbf{M^{II}D^{II}}$).

На пересечении $\mathbf{M^{I}D^{I}}$ с окружностью радиуса **r** находим горизонтальные проекции $\mathbf{5^{I}}$ и $\mathbf{6^{I}}$ точек, ограничивающих малую ось эллипса. Фронтальные проекции $\mathbf{5^{II}}$ и $\mathbf{6^{II}}$ этих точек лежат на фронтальной проекции $\mathbf{M^{II}D^{II}}$ горизонтали. Соединяя плавной кривой точки $\mathbf{1^{I}}$, $\mathbf{3^{I}}$, $\mathbf{6^{I}}$, $\mathbf{2^{I}}$, $\mathbf{4^{I}}$, и $\mathbf{5^{I}}$, получим горизонтальную проекцию сечения, представляющего собой эллипс. Фронтальную проекцию сечения получим в результате соединения плавной кривой точек $\mathbf{1^{II}}$, $\mathbf{3^{II}}$, $\mathbf{6^{II}}$, $\mathbf{2^{II}}$, $\mathbf{4^{II}}$, и $\mathbf{5^{II}}$.

<u>Пример 7</u> Построить проекции сечения поверхности конуса плоскостью, проходящей через его вершину (Рис.8.9).

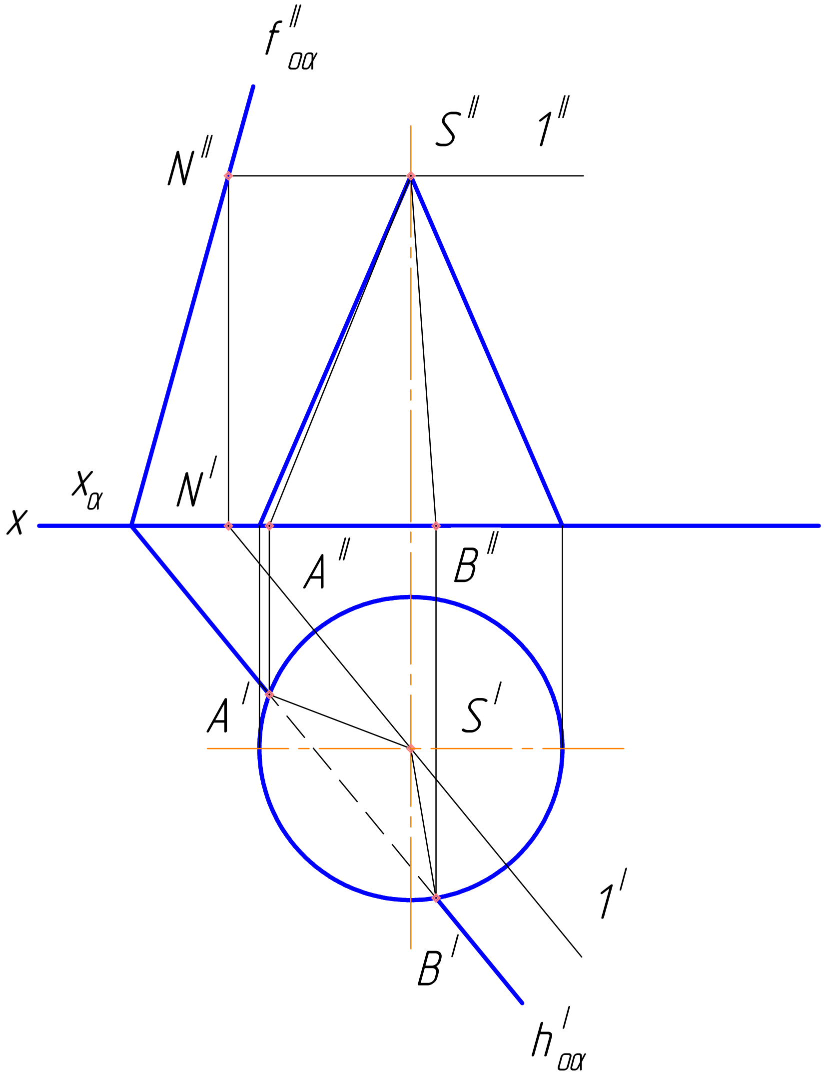


Рис.8.9

Факт принадлежности точки **S** (вершина конуса) плоскости **α** устанавливается при помощи горизонтали **N** (N^I,N^{II}), проведённой через эту точку. Поскольку в нашем примере основание конуса лежит в плоскости π_1, то точки A^I и B^I находятся в пересечении горизонтального следа $h^I_{o\alpha}$ с окружностью основания. Фронтальные проекции A^{II} и B^{II} точек лежат на оси **ox**. Таким образом, плоскость **α** пересекает поверхность конуса по образующим **SA** и **SB**.

Пример 8 Построить проекции сечения поверхности сферы горизонтально-проецирующей плоскостью **α** ($f^{II}_{o\alpha}$, α^I). Горизонтальная проекция сечения (эллипса) совпадает с горизонтальным следом α^I (см. Рис.8.10).

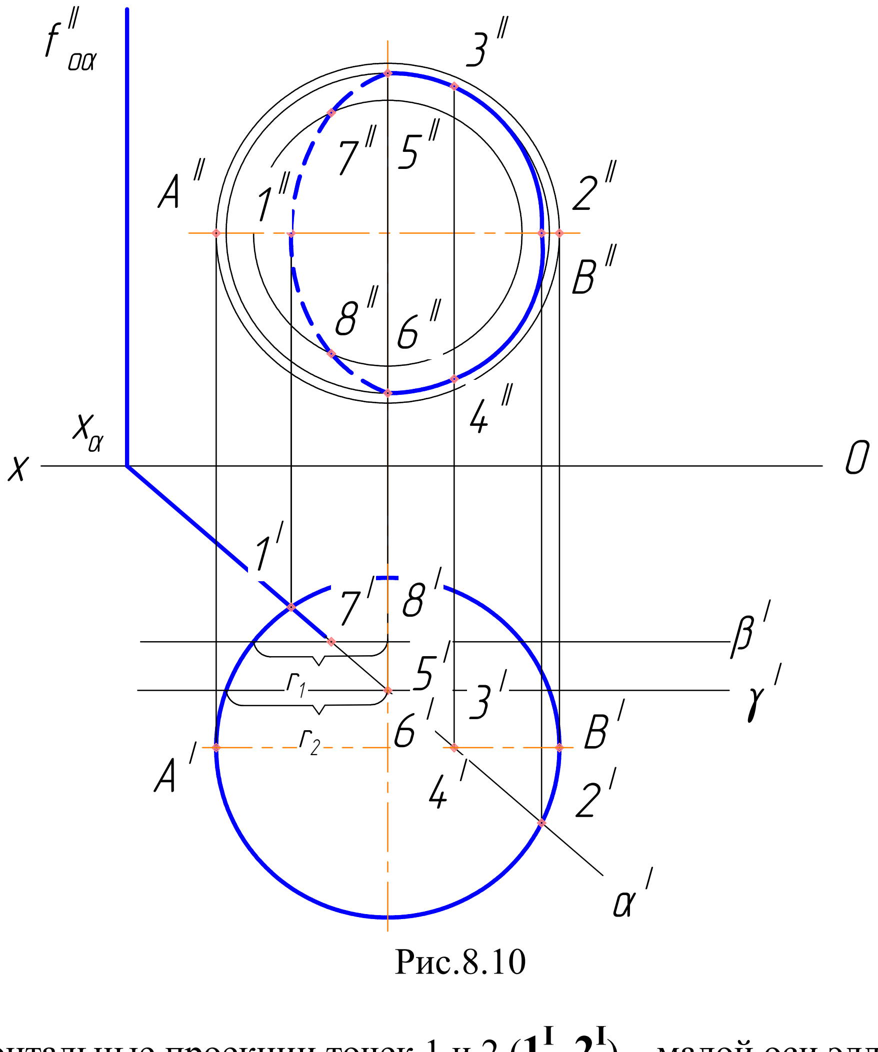


Рис.8.10

Горизонтальные проекции точек 1 и 2 (1^I, 2^I) – малой оси эллипса находятся на пересечении горизонтальной проекции сферы со следом α^I. Фронтальные проекции этих точек (1^{II}, 2^{II}) находим на фронтальной проекции диаметра сферы A^{II}, B^{II}. Две характерные точки 3 и 4, в которых на фронтальной проекции видимая часть эллипса переходит в невидимую, на горизонтальной проекции получаем в пересечении диаметра (1^I, 2^I) со следом α^I. Вертикальные проекции этих точек (3^{II}, 4^{II}) находим на фронтальной проекции сферы. Промежуточные точки 5 и 6 находим, проводя произвольную вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma}^{\mathbf{I}} \| \mathbf{ox}$). Она пересекает сферу по окружности радиуса r_2. Горизонтальные проекции точек ($\mathbf{5^I}$, $\mathbf{6^I}$) находим на пересечении фронтального следа $\boldsymbol{\gamma}^{\mathbf{I}}$ со следом $\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{I}}$. Фронтальные проекции точек ($\mathbf{5^{II}}$, $\mathbf{6^{II}}$) находим в проекционной связи на фронтальной проекции окружности радиуса r_2. Аналогично хаходим другие промежуточные точки (**7**, **8**) и т. д.

<u>Пример 9</u> Построить проекции сечения поверхности сферы плоскостью общего положения $\boldsymbol{\alpha}$ ($\mathbf{f^{II}_{o\alpha}}$, $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$) (см. Рис.8.11). Применив метод перемены плоскостей проекций (пункт 6,2, Рис.6.19) преобразуем задачу в вариант, аналогичный примеру 10.

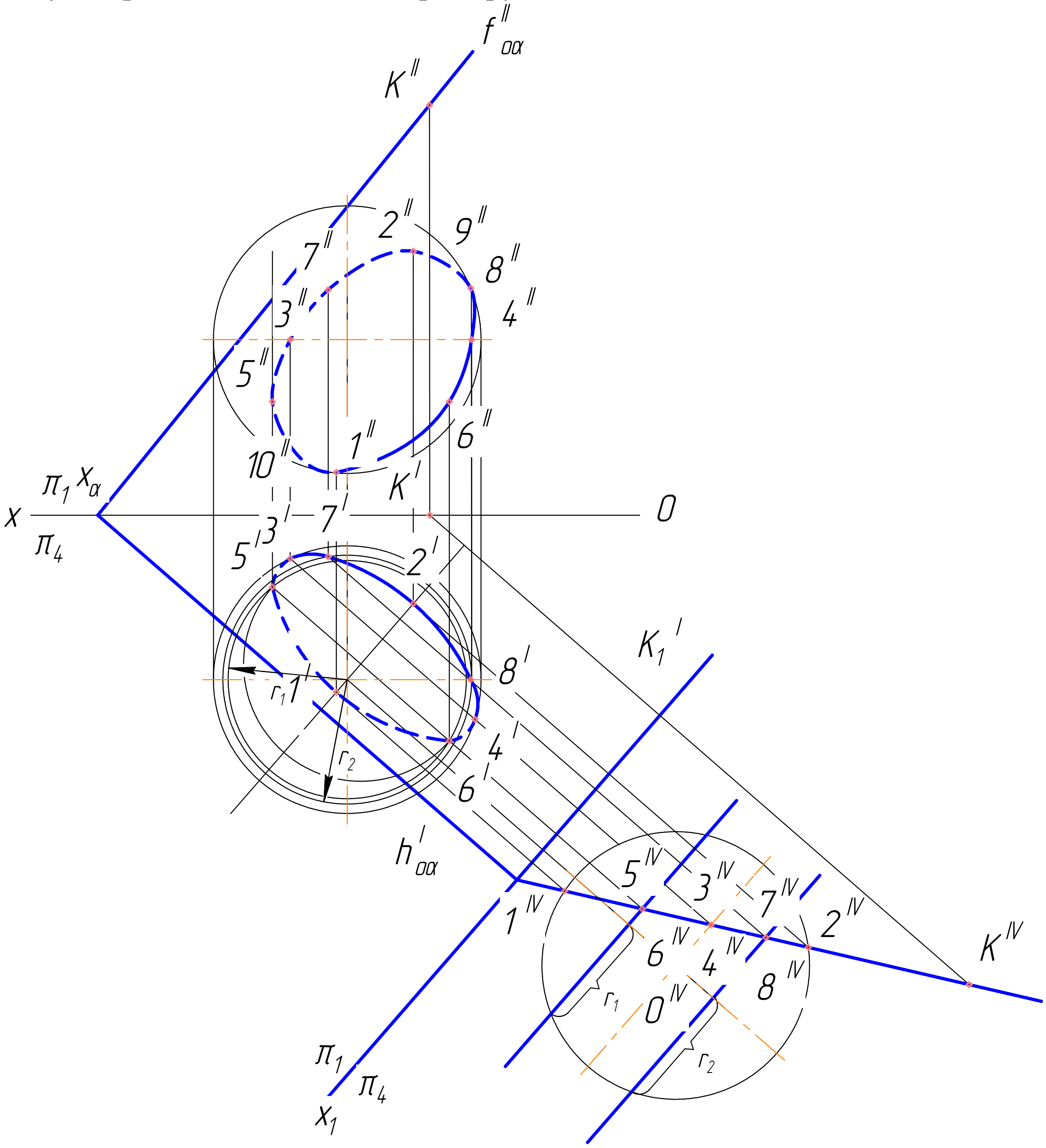


Рис.8.11

8.2 Развёртка поверхностей

Рассмотрим развёртки поверхностей вращения и многогранников.

Под развёрткой многогранной поверхности понимают плоскую фигуру, составленную из граней этой поверхности, совмещённых с одной плоскостью. Существуют три способа построения развёртки многогранных поверхностей:

1) способ нормального сечения
2) способ раскатки
3) способ треугольников

Рассмотрим все три способа на примерах.

Пример 10 Построить развёртку поверхности прямой трёхгранной призмы **ABCDEF** (Рис.8.12).

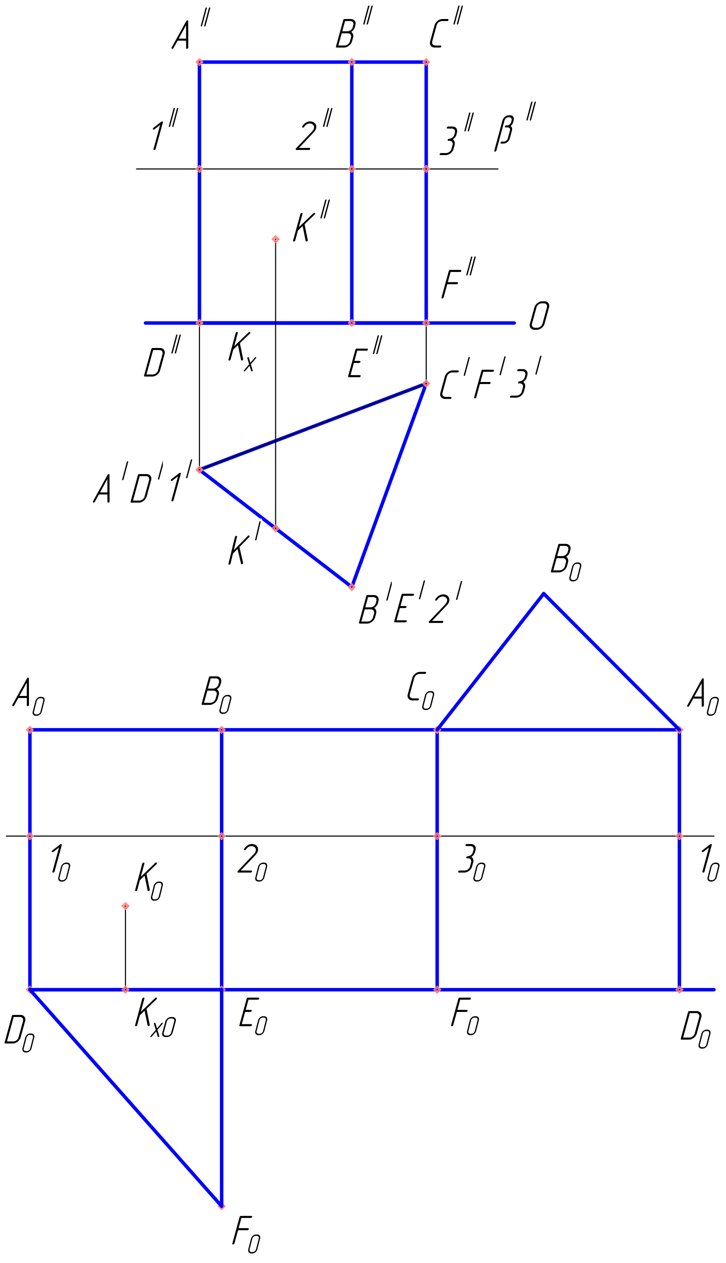


Рис.8.12

Построение начинаем с пересечения призмы **ABCDEF** плоскостью β, перпендикулярной к боковым рёбрам ($\beta^{II} \parallel ox$).
Так как плоскость β горизонтальная, то фронтальная проекция сечения 1^{II}, 2^{II}, 3^{II} совпадает со следом
β^{II}, а на плоскость π_1 сечение **1**, **2**, **3** проецируется в истинную величину и совпадает с горизонтальной проекцией призмы.

Для построения развёртки необходимо определить истинную величину рёбер и сторон треугольника, получившегося в сечении призмы плоскость β. В нашем случае дополнительных построений не требуется, так как призма прямая. Рёбра **AD**, **BE** и **CF** параллельны плоскости π_2 и потому проецируются на эту плоскость без искажения.

Далее в свободном месте чертежа проводим прямую и от произвольной точки 1_0, взятой на этой прямой, откладываем отрезки $[1_0 2_0]$, $[2_0 3_0]$, $[3_0 1_0]$, равные сторонам треугольника **1**, **2**, **3**. Через точки 1_0, 2_0, 3_0, 1_0 проводим прямые, перпендикулярные к прямой $1_0 - 1_0$, и откладываем на них отрезки $[1_0 A_0]$, $[1_0 D_0]$, $[2_0 B_0]$, $[2_0 E_0]$… равные длинам боковых рёбер, соответственно, [**1A**], [**1D**], [**2B**], [**2E**]…. Плоская фигура $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ представляет собой развёртку боковой поверхности призмы. Для получения полной развёртки поверхности призмы необходимо к любой из сторон A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0, D_0F_0… достроить методом засечек основания $A_0B_0C_0$ и $D_0E_0F_0$, предварительно определив их истинные размеры.

На развёртку нанесена точка **K** из условия: $D_0K_{xo}=DK$, $K_{xo}\,K_o=K_xK^{II}$.

<u>Пример 11</u> Построить развёртку поверхности наклонной призмы с основанием в плоскости π_1 и рёбрами, параллельными плоскости π_2 (Рис.8.13).

Развёртку боковой поверхности заданной призмы будем строить последовательным вращением всех её граней, которое представляет перекатывание призмы по фронтальной плоскости, проходящей через одно из рёбер призмы. Во избежание наложения развёртки на изображение призмы начинаем вращать её вокруг ребра **FC**. При вращении грани **FCBE** вокруг ребра **FC** точки **B** и **E** перемещаются по окружности в плоскостях, перпендикулярных к ребру **FC**. Фронтальные проекции B^{II} и E^{II} этих точек перемещаются по перпендикулярам, опущенным из B^{II} и E^{II} на фронтальную проекцию $F^{II}C^{II}$ ребра **FC**. Когда грань **FCBE** совместится с фронтальной плоскостью, проходящей через ребро **FC**, она спроецируется на плоскость π_2 в истинную величину, и отрезки $[C^{II}B_0]$, $[F^{II}E_0]$ изобразятся без искажения. Изображения точек B_0 и E_0 получаем, засекая перпендикуляры, опущенные из точек B^{II} и E^{II} отрезками $[C^{II}B_0]$, $[F^{II}E_0]$, соответственно равными их истинным длинам $C^{II}B_0=B^IC^I$, $F^{II}E_0=F^IE^I$. Построенный таким образом параллелограмм $F^{II}C^IB_0E_0$ представляет истинную величину грани **FCBE**. При дальнейшем перекатывании призмы она будет вращаться вокруг ребра $\mathbf{B_0E_0}$ (в новом его положении) до совмещения грани **BEDA** с плоскостью, параллельной плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$. Точки $\mathbf{A_0}$ и $\mathbf{D_0}$ получаем с помощью засечек перпендикуляров, опущенных из точек $\mathbf{A^{II}}$ и $\mathbf{D^{II}}$ на $\mathbf{F^{II}C^{II}}$, отрезками [$\mathbf{B_0A_0}$] и [$\mathbf{E_0D_0}$], равными их истинным длинам ($\mathbf{B_0A_0=B^IA^I}$; $\mathbf{E_0D_0=E^ID^I}$. Соединяя прямыми точки $\mathbf{B_0A_0D_0}$ и $\mathbf{E_0}$, получаем развёртку грани **BADE**. Аналогичным построением находим развёртку грани **ADFC**. Полную развёртку поверхности призмы получаем, достраивая методом засечек оба её основания (пристраиваются к любой грани).

Изображение точки **K** на боковой поверхности построено из условия: $\mathbf{E_0N_0=E^IN^I}$, $\mathbf{B_0M_0=B^IM^I}$ и $\mathbf{M_0K_0=M^{II}K^{II}}$.

Если рёбра призмы не параллельны ни одной из плоскостей проекций, то этот общий случай методом перемены плоскостей проекций приводят к рассмотренному ранее частному случаю.

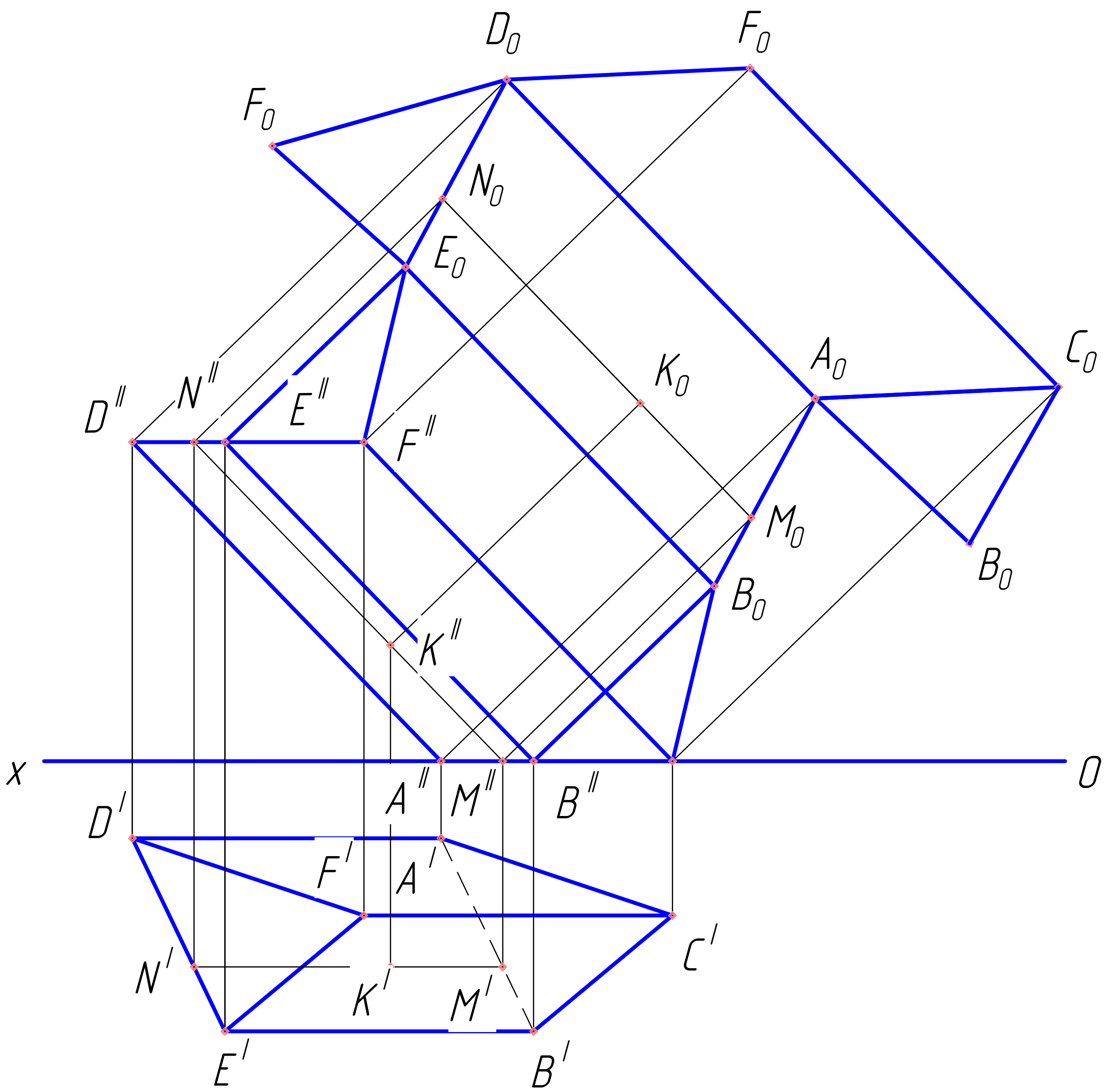


Рис.8.13

Пример 12 Построить развёртку поверхности трёхгранной пирамиды с основанием в плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ (Рис.8.14).

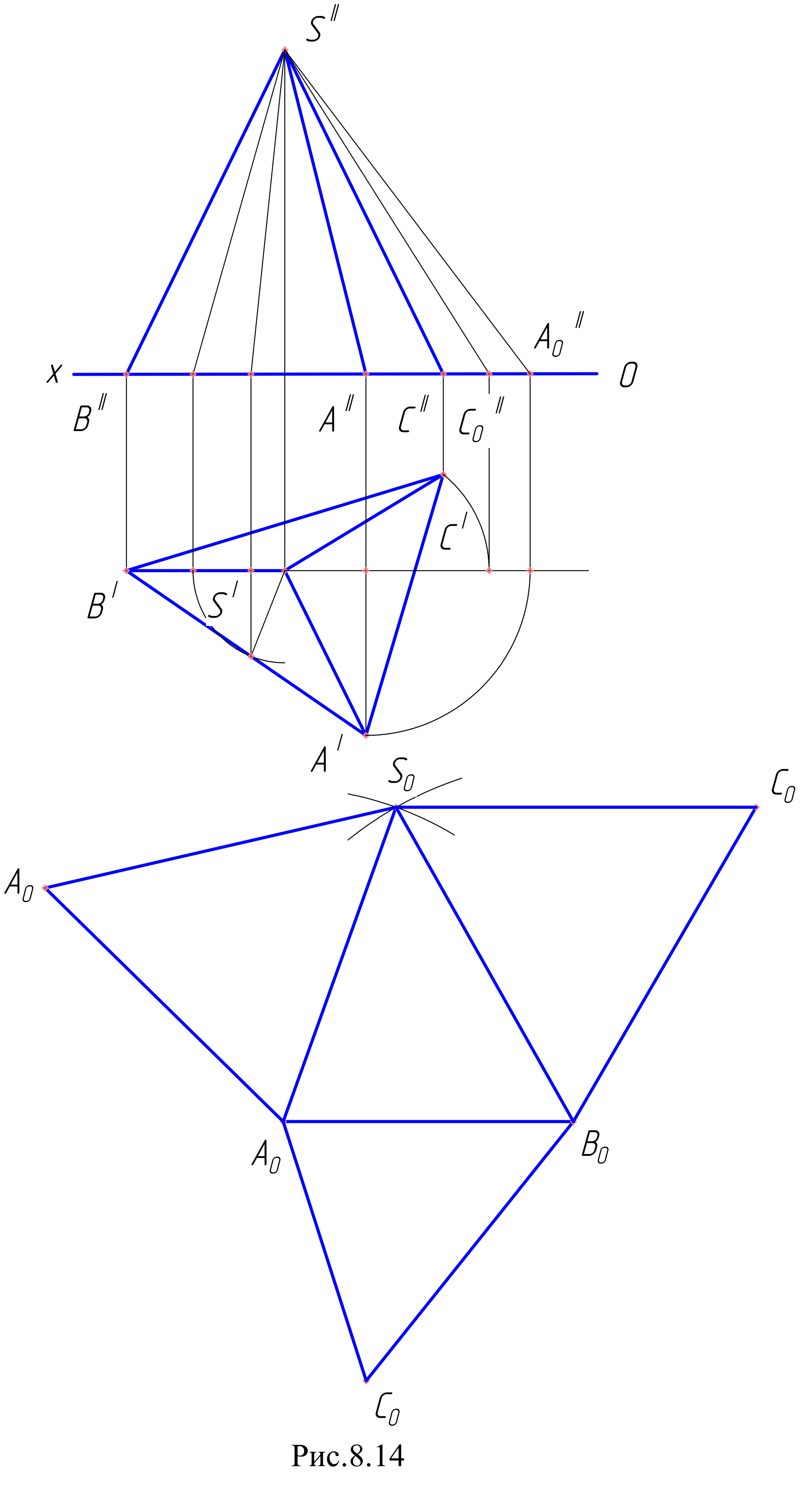


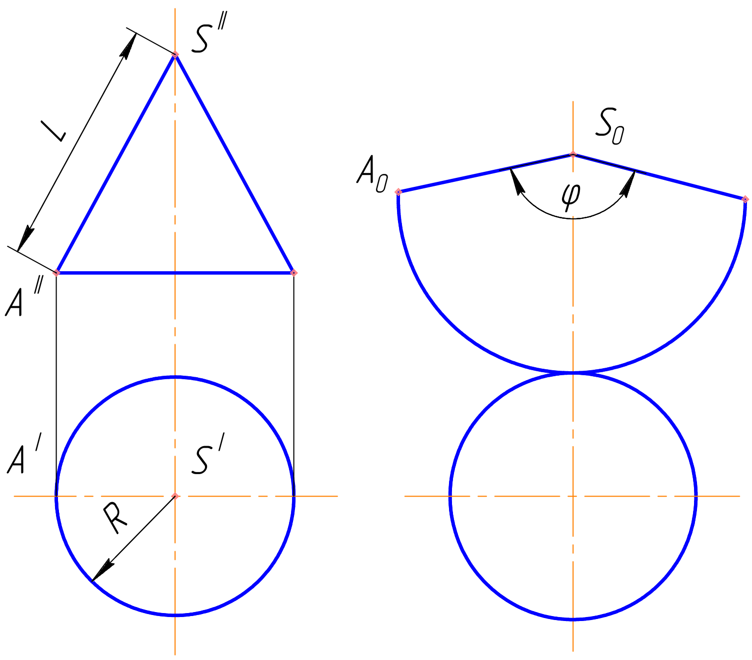
Рис.8.14

В данном случае в истинную величину проецируется на плоскость π_1 основание **ABC** пирамиды, а на плоскость π_2 её ребро **SB**. Рёбра **SA** и **SC** - прямые общего положения. Их истинные длины определены вращением вокруг оси, перпендикулярной к плоскости π_1 и проходящей через точку **S** ($S C^{I}_{0} \| ox$; $S^{II} C^{II}_{0}$; $S A^{I}_{0} \| ox$; $S^{II} A^{II}_{0} = S_0 A_0$). Построение развёртки начинаем с построения любой грани, например грани **SAB**.

Для этого на произвольной прямой откладываем отрезок $[A_0 B_0]$, равный истинной длине сторон **AB** основания $A_0 B_0 = A^I B^I$, и строим точку S_0 в пересечении засечек, сделанных из точек A_0 и B_0 дугами окружностей радиусов $S_0 A_0 = S^{II} A^{II}_{0}$ и $S_0 B_0 = S^{II} B^{II}$. Соединяя прямыми точку S_0 с точками A_0 и B_0, получаем изображение грани **SAB**. Изображения граней $S_0 A_0 C_0$ и $S_0 B_0 C_0$ пирамиды, а также её основания $A_0 B_0 C_0$ достраиваем к изображению грани $S_0 A_0 B_0$ также методом засечек. Для построения на развёртке точки K_0 необходимо предварительно определить истинное расстояние её до вершины **S** пирамиды, например методом вращения прямой **SD** ($S D^{I}_{0} \| ox$; $K^{II} K^{II}_{0} \| ox$). Затем на стороне основания $A_0 B_0$ развёртки отложить отрезок $[A_0 D_0] = A^I D^I$ и на прямой $S_0 D_0$ найти точку K_0 ($S_0 K_0 = S^{II} K^{II}_{0}$).

Развёртка поверхности вращения является чаще всего приближённой. Это объясняется тем, что при развёртке поверхности последнюю, как правило, аппроксимируют поверхностями вписанных или описанных многогранников. Поэтому при графическом выполнении развёртки приходится спрямлять кривые, принадлежащие поверхности, что ведёт к потере точности.

Пример 13 Построить развёртку поверхности прямого кругового конуса (Рис.8.15).



$\varphi = 2\pi r / L$

Рис.8.15

В данном случае развёртка боковой поверхности представляет круговой сектор, радиус которого равен длине образующей L=[**SA**], а центральный угол φ=2πr/L, где r- радиус основания. Для получения полной развёртки конуса необходимо достроить основание.

<u>Пример 14</u> Построить развёртку боковой поверхности наклонного конуса с круговым основанием (Рис.8.16).

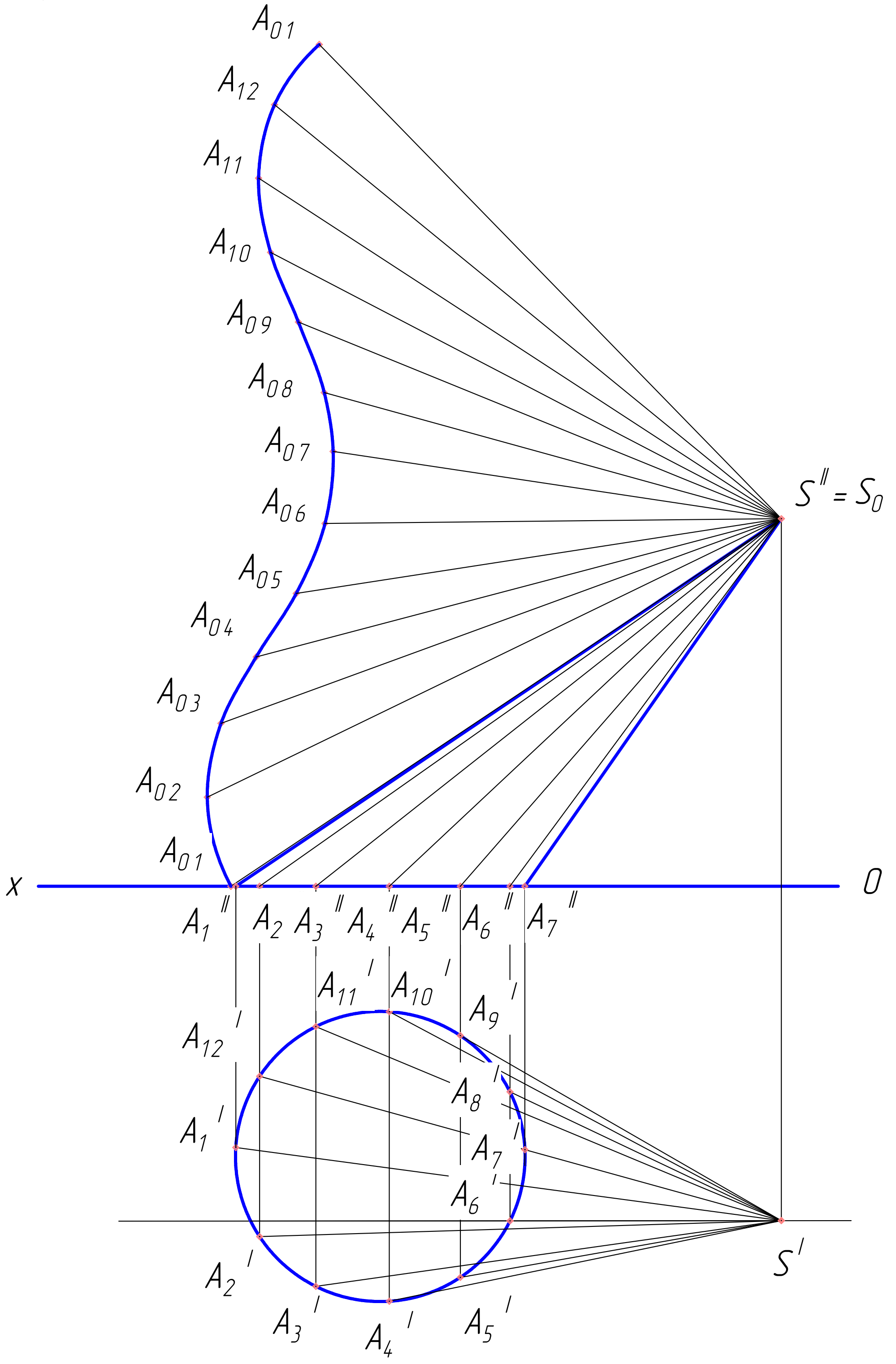


Рис.8.16

Окружность основания заменяем многоугольником со сторонами A_1A_2, A_2A_3 и т.д., а коническую поверхность SA_1A_2, SA_2A_3– поверхностью пирамиды с треугольными гранями и т. д. В развёрнутом положении поверхность представляет собой совокупность этих треугольников.

Определив способом вращения длину отрезка SA_1 - отрезок S^IA_{01} и длину отрезка SA_2 - отрезок S^IA_{02}, строим треугольник по трём его сторонам $S^{II}A_{01}$, $S^{II}A_{02}$ и $A^I{}_1A^I{}_2$ (хорда), затем строим второй треугольник $S^{II}A_{02}$ A_{03}, для чего определяем способом вращения длину отрезка SA_3- отрезок $S^{II}A_{03}$ и берём хорду $A^I{}_2A^I{}_3$ и т. д.

Соединив построенные точки и т. д. плавной кривой, получаем развёртку боковой поверхности наклонного конуса. Для получения полной развёртки поверхности конуса необходимо достроить его основание.

8.3 Пересечение линии с поверхностью

В общем случае для решения задачи по определению положения точек пересечения (встречи) линии с поверхностью необходимо выполнить ряд построений:

- заключить данную линию во вспомогательную поверхность (плоскость);

- определить линии пересечения вспомогательной поверхности (плоскости) с заданной;

- отметить точки, в которых пересекаются полученные линии с заданной.

С целью упрощения записи целесообразно использовать символику, приведённую в таблице:

Словесное описание на языке начертательной геометрии	Символическая запись
Заключаем линию **MN** во вспомогательную плоскость α.	Заключаем $MN \subset \alpha$.
Определяем линию пересечения вспомогательной плоскости α с заданной поверхностью.	Определяем $l = P \cap I$
Отмечаем точки пересечения полученной линии **l** с заданной **MN**.	Отмечаем $\{K\ldots\} = I \cap MN$

Пример 15 Определить точки пересечения прямой **MN** с поверхностью **I** прямой призмы (Рис.8.17).

В соответствии с записанным ранее алгоритмом заключаем прямую **MN** в горизонтально проецирующую плоскость α ($MN \subset \alpha$). Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает со следом α^I и горизонтальной проекцией $\mathbf{M^{I}N^{I}}$ прямой. Далее отмечаем точки $\mathbf{1^{I}}$, $\mathbf{2^{I}}$, $\mathbf{3^{I}}$ и $\mathbf{4^{I}}$ – горизонтальная проекция пересечения граней призмы с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$. Фронтальные проекции точек **1**, **2**, **3** и **4** расположены на соответствующих сторонах основания. Соединив фронтальные проекции точек $\mathbf{1^{II}}$, $\mathbf{2^{II}}$, $\mathbf{3^{II}}$ и $\mathbf{4^{II}}$ прямыми, получаем фронтальную проекцию, линии пересечения граней с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$, т.е. (**1**-**2**)=$\boldsymbol{\alpha}\cap$(**ACFD**) и (**3**-**4**)=$\boldsymbol{\alpha}\cap$(**BCFE**). Затем отмечаем точки **K** и **L** пересечения заданной прямой **MN** с полученными линиями **1**-**2** и **3**-**4**, $\mathbf{K^{II}}$=($\mathbf{1^{II}}$-$\mathbf{2^{II}}$)$\cap\mathbf{M^{II}N^{II}}$. Горизонтальные проекции точек пересечения $\mathbf{K^{I}}$ и $\mathbf{L^{I}}$ расположены на горизонтальной проекции прямой $\mathbf{M^{I}N^{I}}$.

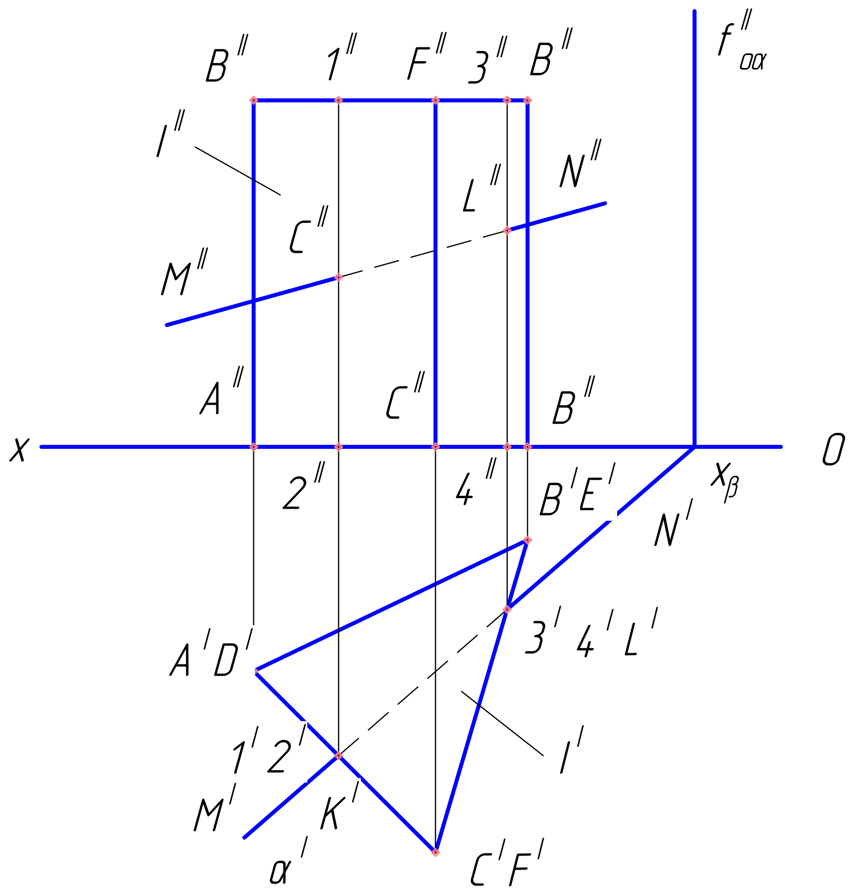


Рис.8.17

<u>Пример 16</u> Определить точки пересечения прямой **MN** с поверхностью **I** наклонной призмы (Рис.8.18).

Решение начинаем с заключения прямой **MN** во фронтально - проецирующую плоскость $\boldsymbol{\alpha}$. Фронтальная проекция линии пересечения $\boldsymbol{\alpha}\cap\mathbf{I}$ совпадает со следом $\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{II}}$, поэтому сразу отмечаем точки $\mathbf{1^{II}}$, $\mathbf{2^{II}}$, $\mathbf{3^{II}}$ пересечения фронтальных проекций рёбер призмы со следом $\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{II}}$. **I** наклонной призмы (Рис.8.18).

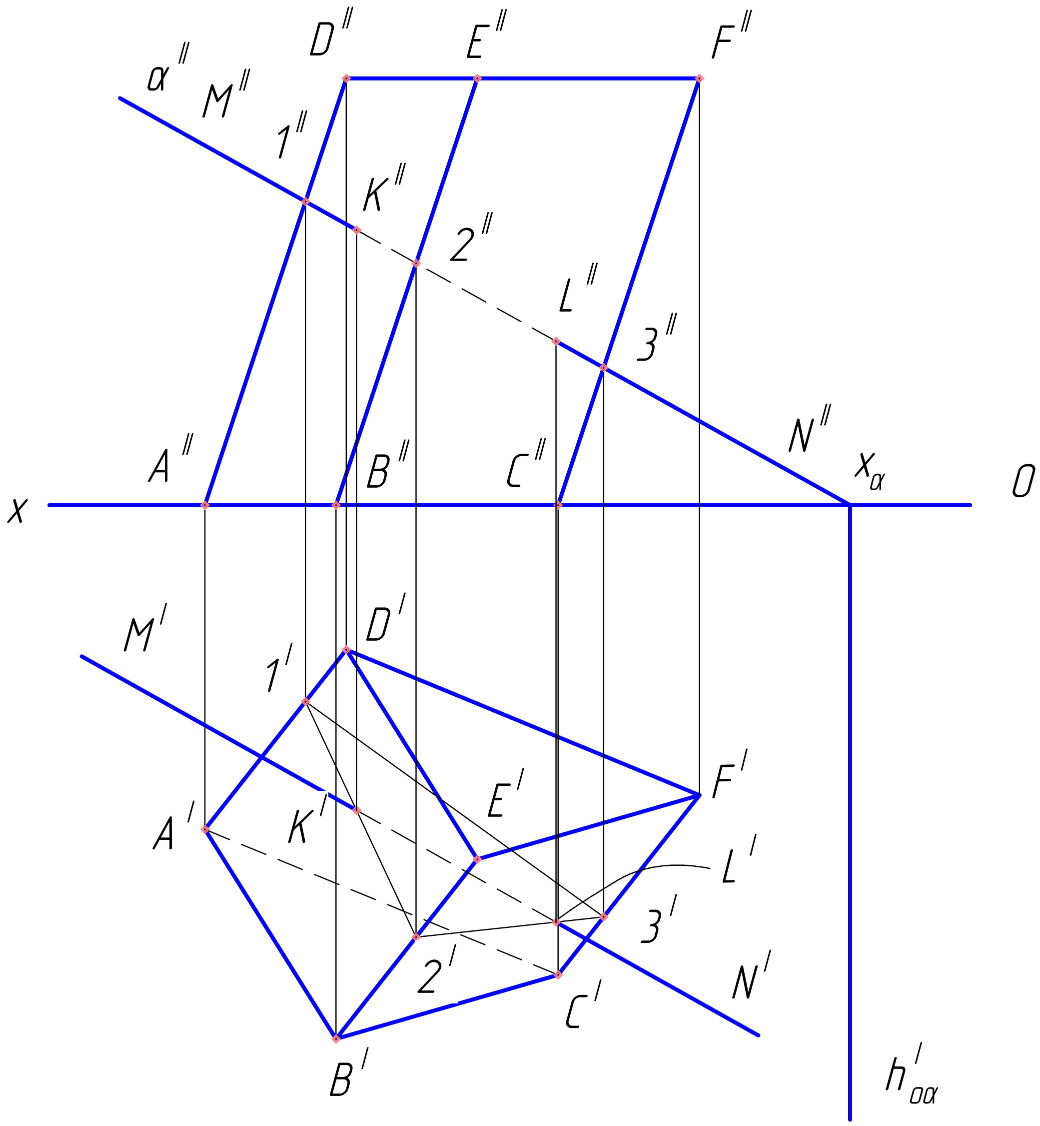


Рис.8.18

Горизонтальные проекции $\mathbf{1^I}$, $\mathbf{2^I}$, $\mathbf{3^I}$ точек определяем на соответствующих горизонтальных проекциях рёбер ($\mathbf{1^I} \in [\mathbf{A^I D^I}]$; $\mathbf{2^I} \in [\mathbf{B^I E^I}]$; $\mathbf{3^I} \in [\mathbf{C^I F^I}]$.

Соединяя точки $\mathbf{1^I}$, $\mathbf{2^I}$, $\mathbf{3^I}$, $\mathbf{1^I}$ прямыми , получаем горизонтальную проекцию линии пересечения граней призмы с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$. Отмечаем горизонтальные проекции $\mathbf{K^I}$ и $\mathbf{L^I}$ точек пересечения прямых $\mathbf{1^I}$-$\mathbf{2^I}$ и $\mathbf{2^I}$-$\mathbf{3^I}$ с прямой $\mathbf{M^I N^I}$. По горизонтальным проекциям этих точек находим их фронтальные проекции ($\mathbf{K^{II}} \in \mathbf{M^{II} N^{II}}$ и $\mathbf{L^{II}} \in \mathbf{M^{II} N^{II}}$).

Пример 17 Определить точки пересечения прямой **MN** с поверхностью **I** пирамиды (Рис.8.19).

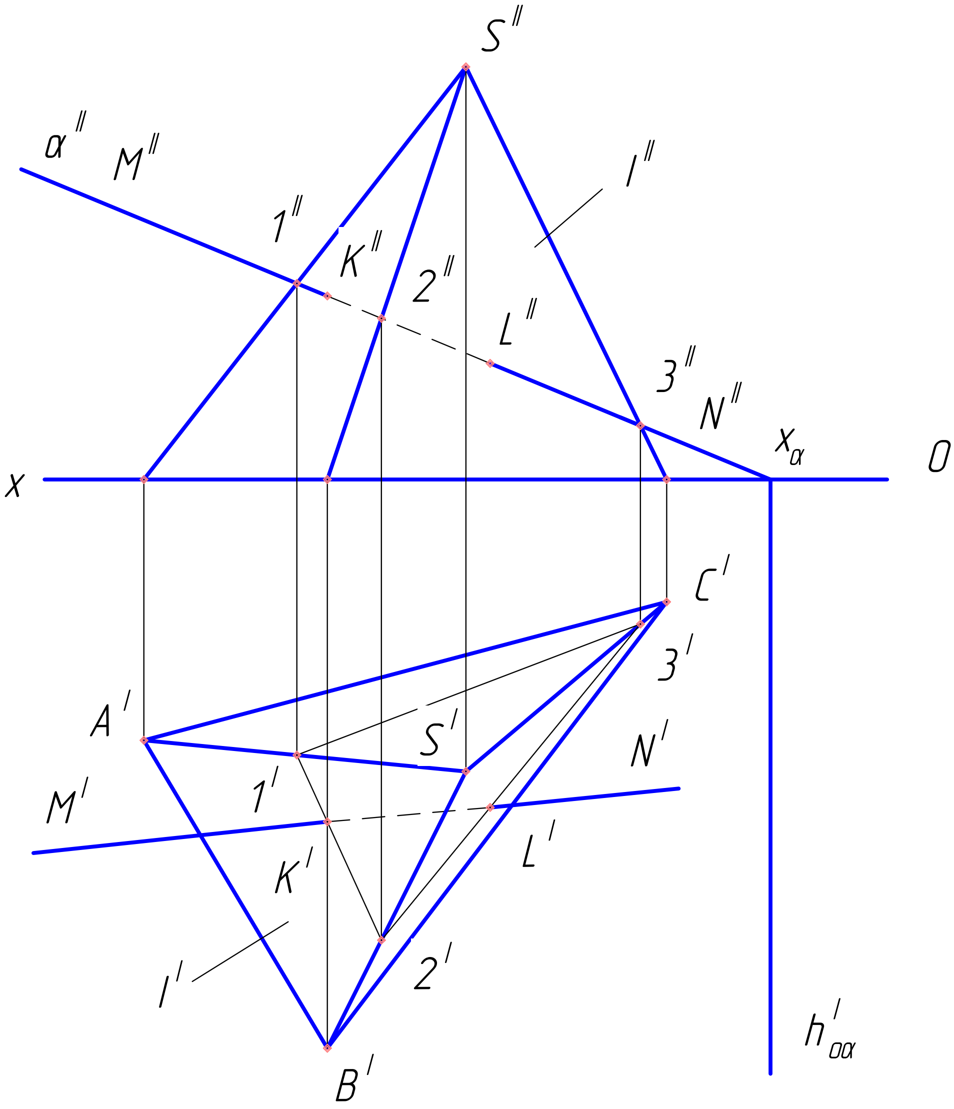


Рис.8.19

Заключаем прямую **MN** во фронтально –проецирующую плоскость **α**. Определим линию пересечения **1-2-3-1** плоскости **α** с гранями пирамиды. При этом её фронтальная проекция $\mathbf{1^{II}}$- $\mathbf{2^{II}}$- $\mathbf{3^{II}}$- $\mathbf{1^{II}}$ совпадает со следом $\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{II}}$. По фронтальным проекциям точек $\mathbf{1^{II}}$- $\mathbf{2^{II}}$- $\mathbf{3^{II}}$ находим их горизонтальные проекции ($\mathbf{1^{I}} \in \mathbf{S^{I}A^{I}}$; $\mathbf{2^{I}} \in \mathbf{S^{I}B^{I}}$; $\mathbf{3^{I}} \in \mathbf{S^{I}C^{I}}$). Соединив точки $\mathbf{1^{I}}$, $\mathbf{2^{I}}$, $\mathbf{3^{I}}$, $\mathbf{1^{I}}$ прямыми, получаем горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости **α** с гранями пирамиды. Далее отмечаем точки $\mathbf{K^{I}}$ и $\mathbf{L^{I}}$, в которых($\mathbf{1^{I}}$-$\mathbf{2^{I}}$)$\cap \mathbf{M^{I}N^{I}}$ и ($\mathbf{2^{I}}$-$\mathbf{3^{I}}$)$\cap \mathbf{M^{I}N^{I}}$. По горизонтальным проекциям точек $\mathbf{K^{I}}$ и $\mathbf{L^{I}}$ определяем их фронтальные проекции $\mathbf{K^{II}}$ и $\mathbf{L^{II}}$, лежащие на $\mathbf{M^{II}N^{II}}$.

Пример 18 Определить точки пересечения прямой **MN** с поверхностью **I** прямого кругового конуса (Рис.8.20).

Заключаем прямую **MN** в плоскость **α**, проходящую через вершину **S** конической поверхности. Для этого через вершину **S** и произвольную точку $\mathbf{F} \in \mathbf{MN}$ проводим вспомогательную прямую **SF**. Таким образом, плоскость

α задана пересекающимися прямыми **MN** и **SF**. Определяем горизонтальный след плоскости $\mathbf{h}^{I}_{o\alpha}$, предварительно найдя горизонтальные следы $\mathbf{H}^{I}$ и $\mathbf{H_1}^{I}$ прямых **MN** и **SF**. Отмечаем точки $\mathbf{1}^{I}$ и $\mathbf{2}^{I}$ пересечения горизонтального следа $\mathbf{h}^{I}_{o\alpha}$ с основанием конуса. Проводим горизонтальные проекции образующих $\mathbf{S}^{I}\mathbf{1}^{I}$ и $\mathbf{S}^{I}\mathbf{2}^{I}$, по которым боковая поверхность **I** конуса пересекается плоскостью **α**. Точки $\mathbf{K}^{I}$ и $\mathbf{L}^{I}$ находим как точки пересечения горизонтальных проекций $\mathbf{S}^{I}\mathbf{1}^{I}$ и $\mathbf{S}^{I}\mathbf{2}^{I}$ с $\mathbf{M}^{I}\mathbf{N}^{I}$.

Фронтальные проекции $\mathbf{K}^{II}$ и $\mathbf{L}^{II}$ расположены на фронтальной проекции прямой $\mathbf{M}^{II}\mathbf{N}^{II}$.

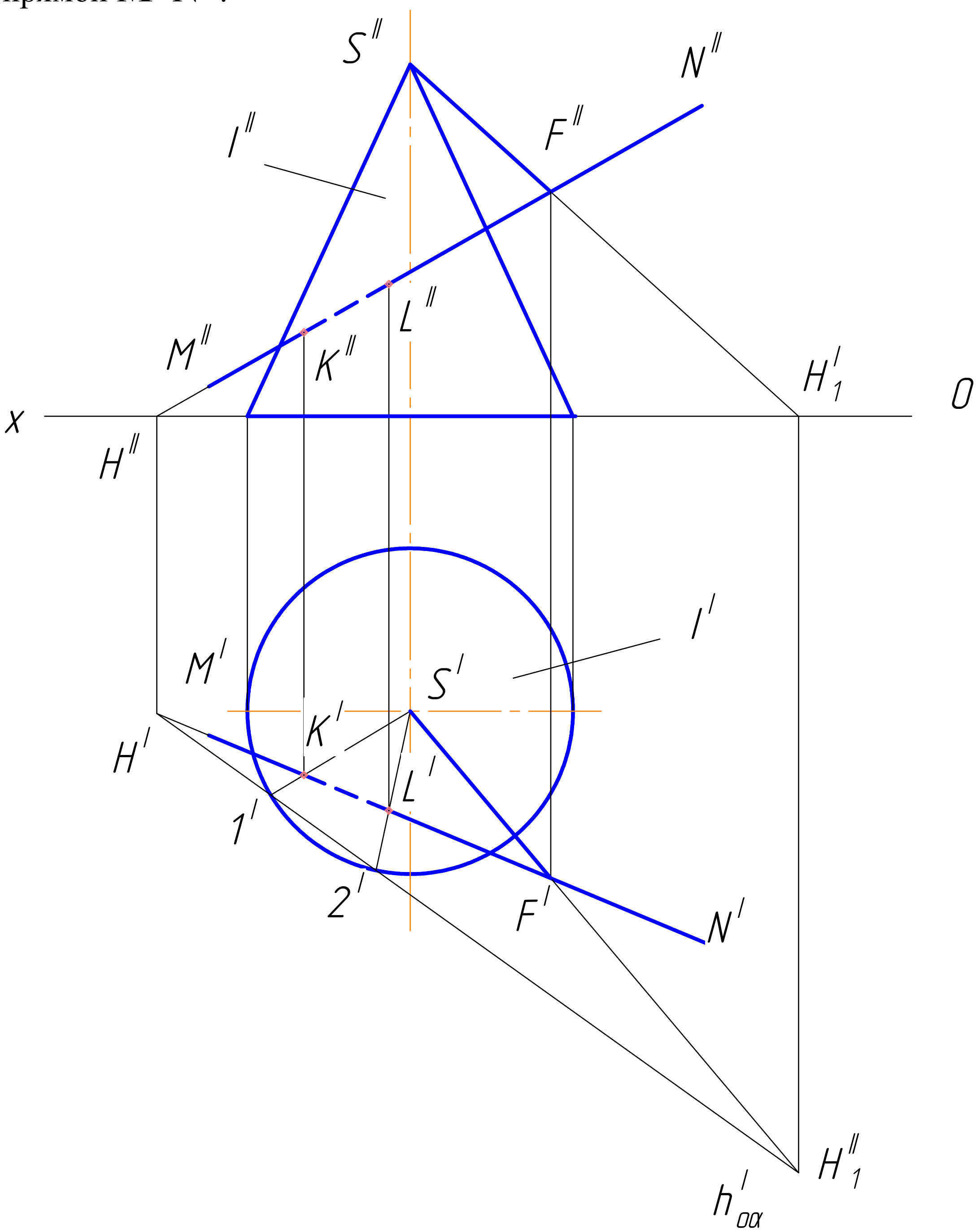


Рис.8.20

Пример 19 Определить точки пересечения прямой **MN** с поверхностью **I** наклонного цилиндра (Рис.8.21).

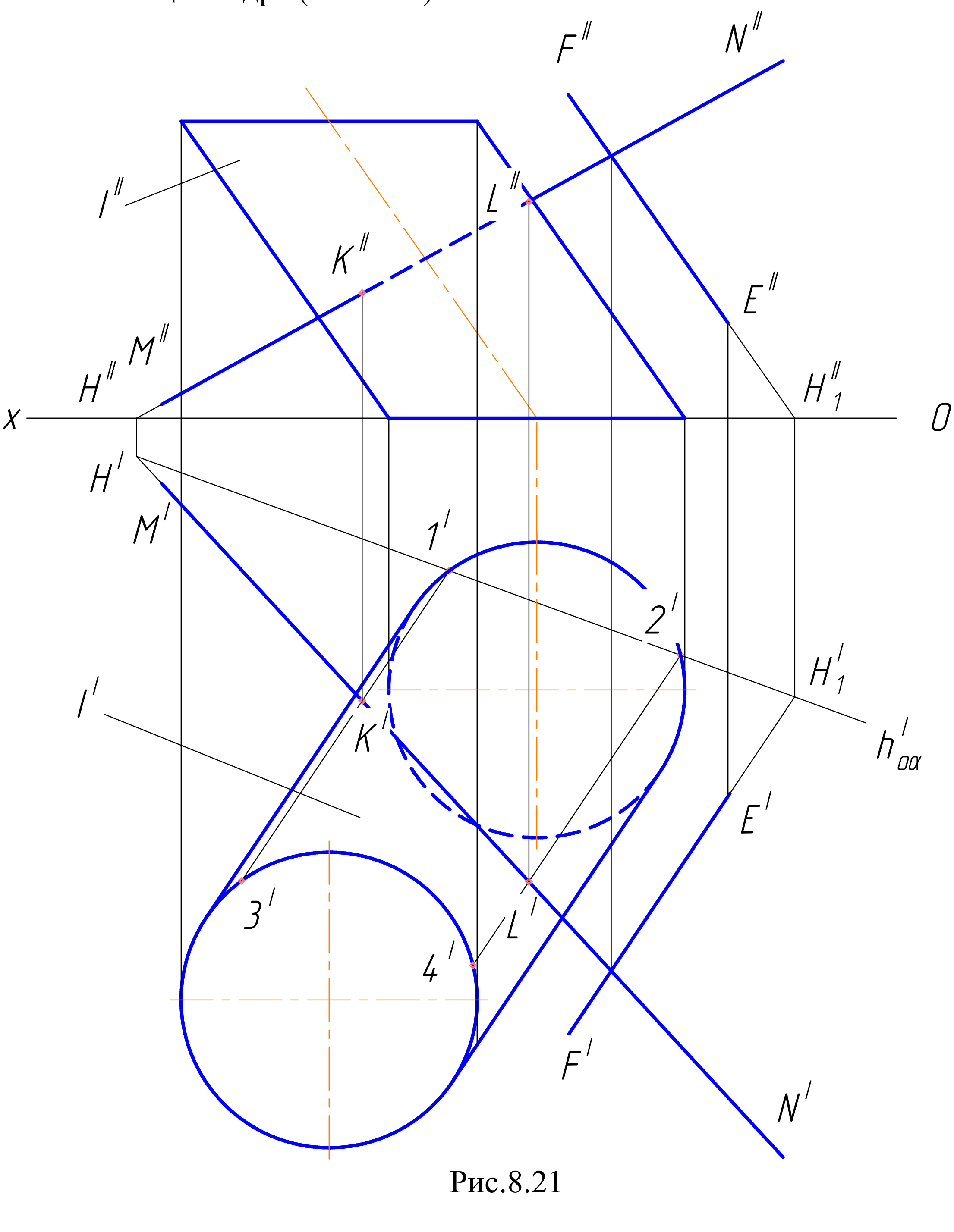


Рис.8.21

Заключаем прямую **MN** в плоскость **α**, заданную двумя пересекающимися прямыми **MN** и **FE**. При этом прямую **FE** проводим параллельно оси цилиндра. Тогда плоскость **α** пересечёт поверхность цилиндра по образующим. Построим горизонтальный след плоскости $\mathbf{h^{I}_{o\alpha}}$, предварительно определив горизонтальные следы $\mathbf{H^{I}}$ и $\mathbf{H_1^{I}}$ прямых **MN** и **FE**. Отмечаем точки $\mathbf{1^{I}}$ и $\mathbf{2^{I}}$, в которых плоскость **α** пересекает нижнее основание цилиндра. Проводим горизонтальные проекции $\mathbf{1^{I}}$- $\mathbf{3^{I}}$ и $\mathbf{2^{I}}$- $\mathbf{4^{I}}$ образующих, по которым цилиндрическая поверхность пересекается плоскостью α. Горизонтальные проекции искомых точек пересечения **K** и **L** находим из условия: $K^I = M^I N^I \cap (1^I - 3^I)$ и $L^I = M^I N^I \cap (2^I - 4^I)$. Их фронтальные проекции K^{II} и L^{II} расположены на фронтальной проекции прямой $M^{II}N^{II}$.

8.4 Взаимное пересечение поверхностей

Две поверхности пересекаются по линии, точки которой принадлежат одновременно обеим поверхностям. Способ построения линии пересечения двух поверхностей состоит в следующем:

- *заданные поверхности пересекаются вспомогательной поверхностью (плоскостью), удобной для решения задачи;*
- *находят линии пересечения вспомогательной поверхности (плоскости) с каждой из данных;*
- *отмечают точки, в которых пересекаются полученные линии пересечения.*

Повторив названные операции k раз, получим множество точек, образующих искомую линию пересечения двух поверхностей.

Рассмотрим примеры построения линии пересечения двух поверхностей.

<u>Пример 20</u> Построить линию пересечения двух **I** и **II**, оси которых пересекаются под прямым углом (Рис.8.22).круговых цилиндров

Решение задачи начинаем с нахождения высших **1** и $\mathbf{1}_1$,низших **2** и $\mathbf{2}_1$, передних **3** и $\mathbf{3}_1$, задних **4** и $\mathbf{4}_1$ точек пересечения очерковых образующих цилиндров **I** и **II**. Проекции этих точек определяются как проекции пересечения соответствующих образующих. Для построения промежуточных точек введём две вспомогательные секущие плоскости α и β, параллельные фронтальной плоскости проекций π_2. Плоскость π_2 пересекает поверхность цилиндра **I** по образующим **5 - 6** и $\mathbf{5}_1$ - $\mathbf{6}_1$, а поверхность цилиндра **II** - по образующим **5 -** $\mathbf{5}_1$, и **6 -** $\mathbf{6}_1$. Плоскость β пересекает поверхность **I** по образующим **7 – 8** и $\mathbf{7}_1$- $\mathbf{8}_1$, а поверхность **II** – по образующим **7 -** $\mathbf{7}_1$ и **8 -** $\mathbf{8}_1$. Пересечение полученных проекций образующих определяет фронтальные проекции видимых точек **7** и **8** и невидимых точек **5** и **6**. Соединяя точки $\mathbf{1}^{II}$, $\mathbf{7}^{II}$, $\mathbf{3}^{II}$, $\mathbf{8}^{II}$ и $\mathbf{2}^{II}$ сплошной плавной линией, получаем фронтальную проекцию видимой части линии пересечения цилиндров **I** и **II**. Горизонтальная проекция линии пересечения поверхностей сливается с горизонтальной проекцией цилиндра **I**, а профильная проекция – с профильной проекцией цилиндра **II**.

Построение линии пересечения поверхностей многогранников может быть осуществлено двумя способами. *По первому способу определяют точки, в которых рёбра одной поверхности пересекают грани другой и наоборот: рёбра второй поверхности пересекают грани первой.* Затем через найденные точки в определённой последовательности проводят ломаную линию, представляющую собой линию пересечения данных поверхностей. *Второй* *способ состоит в определении отрезков прямых, по которым грани одной поверхности пересекают грани другой.* Эти отрезки являются звеньями ломаной линии, получаемой при пересечении заданных поверхностей между собой.

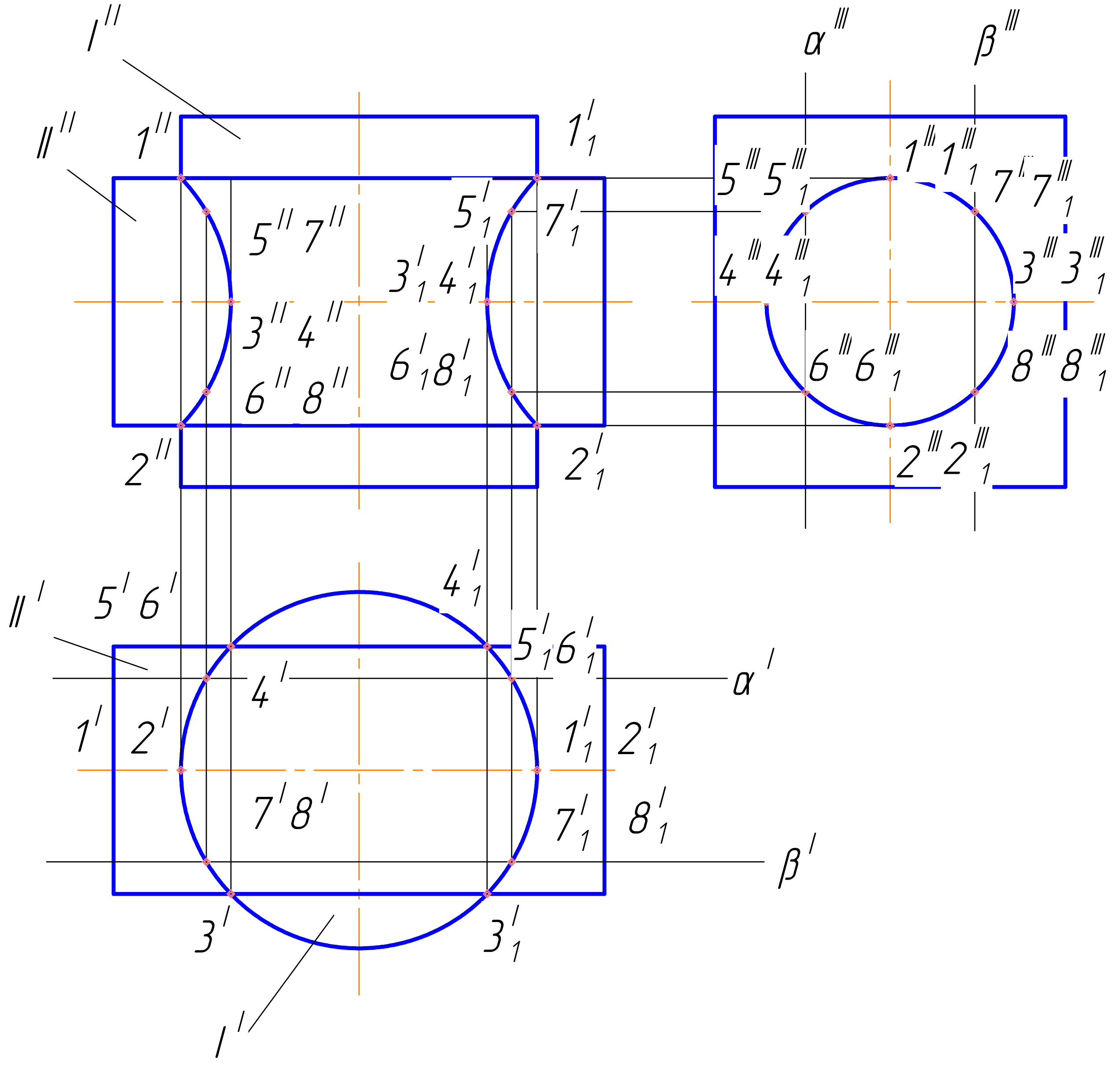


Рис.8.22

<u>Пример 21</u> Построить линию пересечения прямой трёхгранной призмы **I** с трёхгранной пирамидой **II** (Рис.8.23).

При решении данной задачи применим первый способ нахождения линии пересечения. В нашем случае трёхгранная пирамида как бы «входит» в одну грань и «выходит» из другой грани. Для нахождения точек пересечения ребра **SC** пирамиды с гранями призмы заключаем его во вспомогательную горизонтально – проецирующую плоскость **α** и находим линию пересечения этой плоскости с гранями призмы. Линии пересечения граней **KFDL** и **DEML** с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$ спроецируются на горизонтальную плоскость проекций $\boldsymbol{\pi_1}$ в точке $\mathbf{1^{I}}$ и $\mathbf{2^{I}}$, лежащие на следе $\boldsymbol{\alpha^{I}}$. Фронтальные проекции $\mathbf{1^{II}}$ и $\mathbf{2^{II}}$ точек расположены на фронтальной проекции прямой $\mathbf{S^{II}C^{II}}$. Аналогично находим точки **5**, **6** и **3**, **4** пересечения рёбер **SA** и **SB** с гранями призмы. Для получения искомой линии пересечения соединяем проекции точек прямыми, учитывая видимость отдельных отрезков. Таким образом, пирамида «входит» в грань призмы по треугольнику **2 - 4 - 6**, а «выходит» из соответствующей грани по треугольнику **1- 3 - 5**.

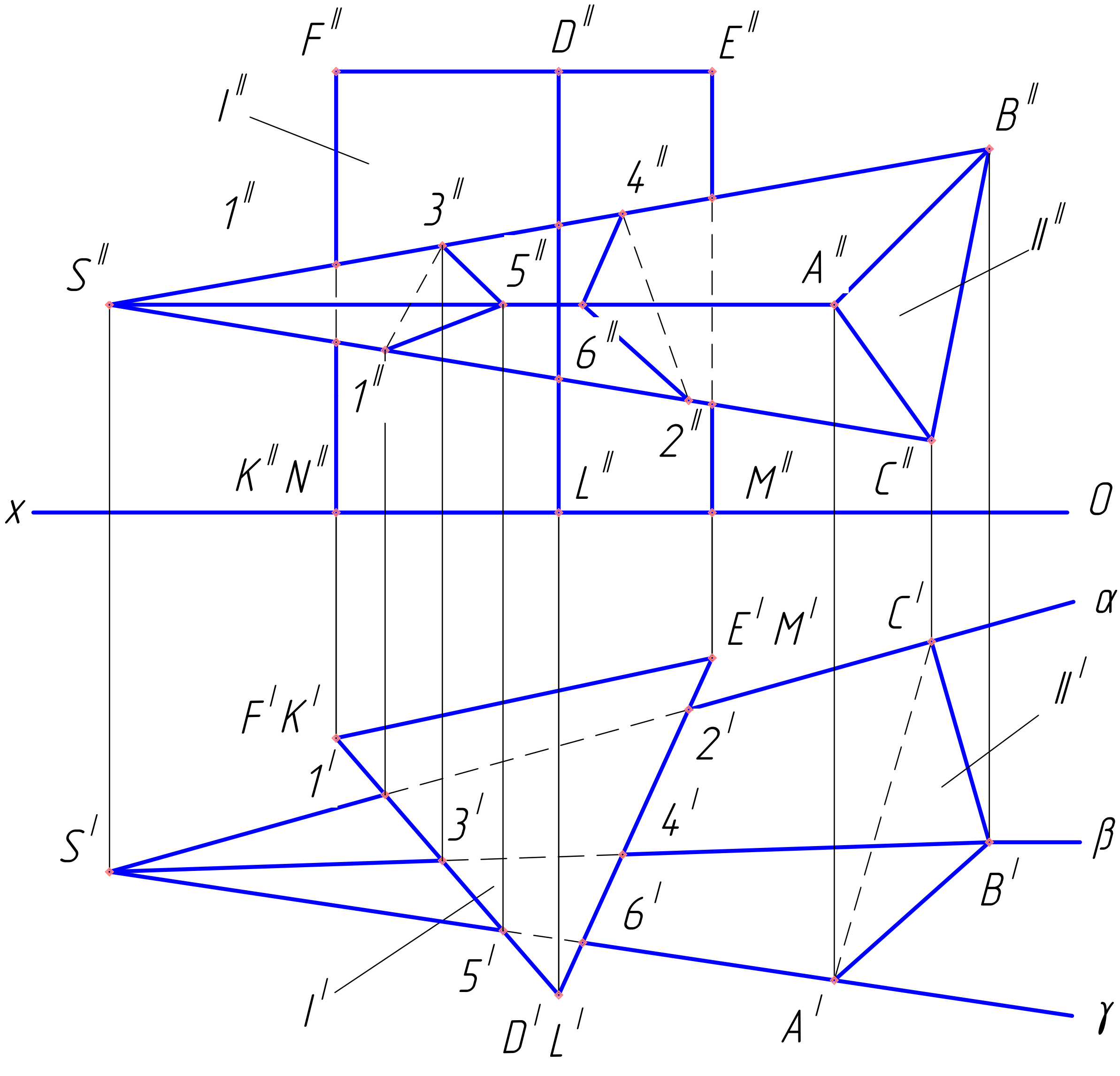


Рис.8.23

<u>Пример 22</u> Построить линию пересечения наклонной призмы **I** и пирамиды **II** (Рис.8.24).

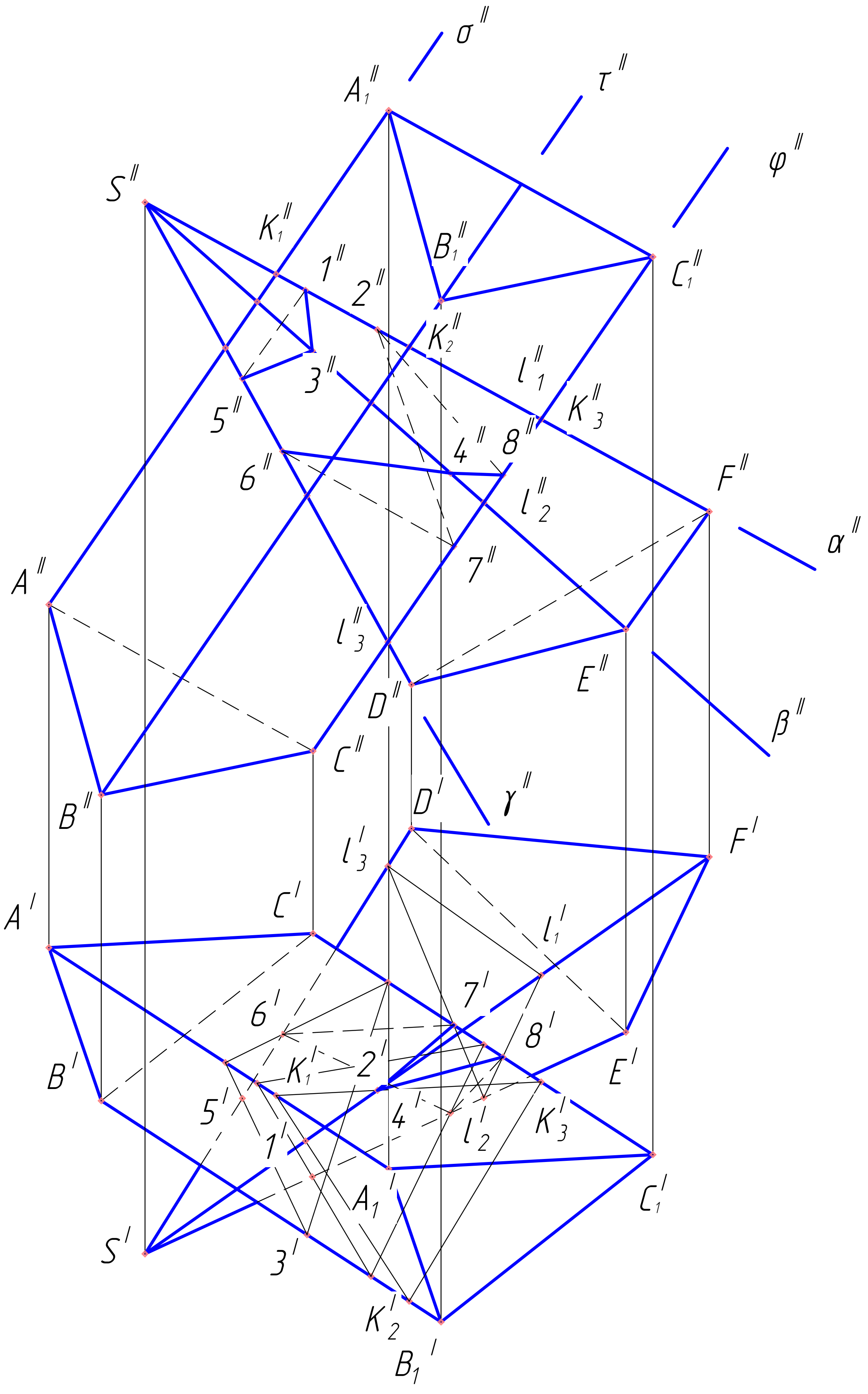

σ''
τ''
φ''
A₁''
S''
K₁''
1''
B₁''
C₁''
2''
K₂''
3''
l₁''
5''
K₃''
4''
8''
6''
F''
l₂''
α''
7''
A''
l₃''
E''
D''
β''
C''
D'
γ''
B''
F'
l₃'
A'
C'
l₁'
7'
6'
8'
K₁'
2'
E'
B'
5'
4'
l₂'
K₃'
1'
A₁'
C₁'
S'
3'
K₂'
B₁'

Рис.8.24

Для определения точек пересечения рёбер пирамиды с гранями призмы заключаем рёбра во фронтально – проецирующие плоскости **α**, **β** и **γ**. Находим точки **1** и **2** пересечения ребра **SF** с гранями $\mathbf{AA_1B_1B}$ и $\mathbf{AA_1C_1C}$ призмы. Для этого определяем линию пересечения плоскости **α** с поверхностью **I**. Так как фронтальная проекция этой линии пересечения совпадает со следом $\mathbf{\alpha^{II}}$, то достаточно отметить точки $\mathbf{K_1^{II}}$, $\mathbf{K_2^{II}}$ и $\mathbf{K_3^{II}}$. Горизонтальные проекции этих точек находим в проекционной связи на соответствующих рёбрах призмы.

Отмечаем точки $\mathbf{1^I}$ и $\mathbf{2^I}$ пересечения полученной проекции линии пересечения с проекцией $\mathbf{S^IF^I}$ ребра пирамиды. Фронтальные проекции $\mathbf{1^{II}}$ и $\mathbf{2^{II}}$ точек находим в проекционной связи на ребре $\mathbf{S^{II}F^{II}}$ пирамиды.

В такой же последовательности построены точки встречи рёбер **SE** и **SD** пирамиды с гранями призмы (точки **3**, **4**, **5** и **6**).

С целью получения точек пересечения рёбер призмы с гранями пирамиды ребра призмы заключаем во фронтально – проецирующие плоскости **σ**,**ε** и **φ**. Построим проекции точек **7** и **8**, в которых ребро $\mathbf{CC_1}$ пересекает грани пирамиды. Для этого:

- находим фронтальные проекции $\mathbf{l_1^{II}}$,$\mathbf{l_2^{II}}$ и $\mathbf{l_3^{II}}$ точек пересечения рёбер пирамиды с плоскостью **φ**. Горизонтальные проекции этих точек расположены на горизонтальных проекциях соответствующих рёбер пирамиды;

- отмечаем точки $\mathbf{7^I}$ и $\mathbf{8^I}$, в которых горизонтальная проекция $\mathbf{l_1^I}$,$\mathbf{l_2^I}$ и $\mathbf{l_3^I}$ линии пересечения **φ** и **II** пересекается с горизонтальной проекцией ребра $\mathbf{C^IC_1^I}$. Фронтальные проекции точек $\mathbf{7^{II}}$ и $\mathbf{8^{II}}$ находим на фронтальной проекции $\mathbf{C^{II}C_1^{II}}$ ребра.

Проведя аналогичные построения для рёбер $\mathbf{BB_1}$ и $\mathbf{AA_1}$ призмы убеждаемся в том, что они не пересекаются с гранями пирамиды.

Соединяем полученные точки пересечения. При этом необходимо учитывать следующее обстоятельство. Так как каждое звено искомой пространственной ломаной является линией пересечения граней двух различных многогранников, то соединять прямыми можно лишь точки, которые одновременно принадлежат одним и тем же граням пересекающимся многогранников. Таким образом на Рис 8.22 построены замкнутые ломаные **2 – 8 – 4 – 6 – 7 - 2** и **1 – 3 – 5 - 1**. При этом точки **2** и **8** первой ломаной соединены потому, что они лежат в общих для них гранях **SEF** пирамиды $\mathbf{AA_1C_1C}$ призмы. Точки **8** и **4**, лежащие в общих для них гранях **SEF** и $\mathbf{CC_1B_1B}$ определяют следующее звено этой ломаной и т. д.

Отметим видимость звеньев построенной ломаной. При этом видимым будет звено, по которому пересекаются две видимые грани. Если хотя бы одна из граней невидима, то и звено искомой линии, расположенное на этой грани, будет невидимым. Поэтому звено **2 - 8** показано видимым, а звено **8 - 4** невидимым.

Пример 23 Построить линию пересечения поверхности **I** правильной призмы с поверхностью **II** кругового цилиндра (Рис.8.25).

Построения начинаем с нахождения точек $\mathbf{1^{II}}$ и $\mathbf{2^{II}}$ пересечения проекций $\mathbf{A^{II}}$ и $\mathbf{B^{II}}$ рёбер призмы с крайней верхней образующей цилиндра. В проекционной связи находим горизонтальные $\mathbf{1^{I}}$ и $\mathbf{2^{I}}$ и фронтальные $\mathbf{1^{II}}$ и $\mathbf{2^{II}}$ проекции этих точек.

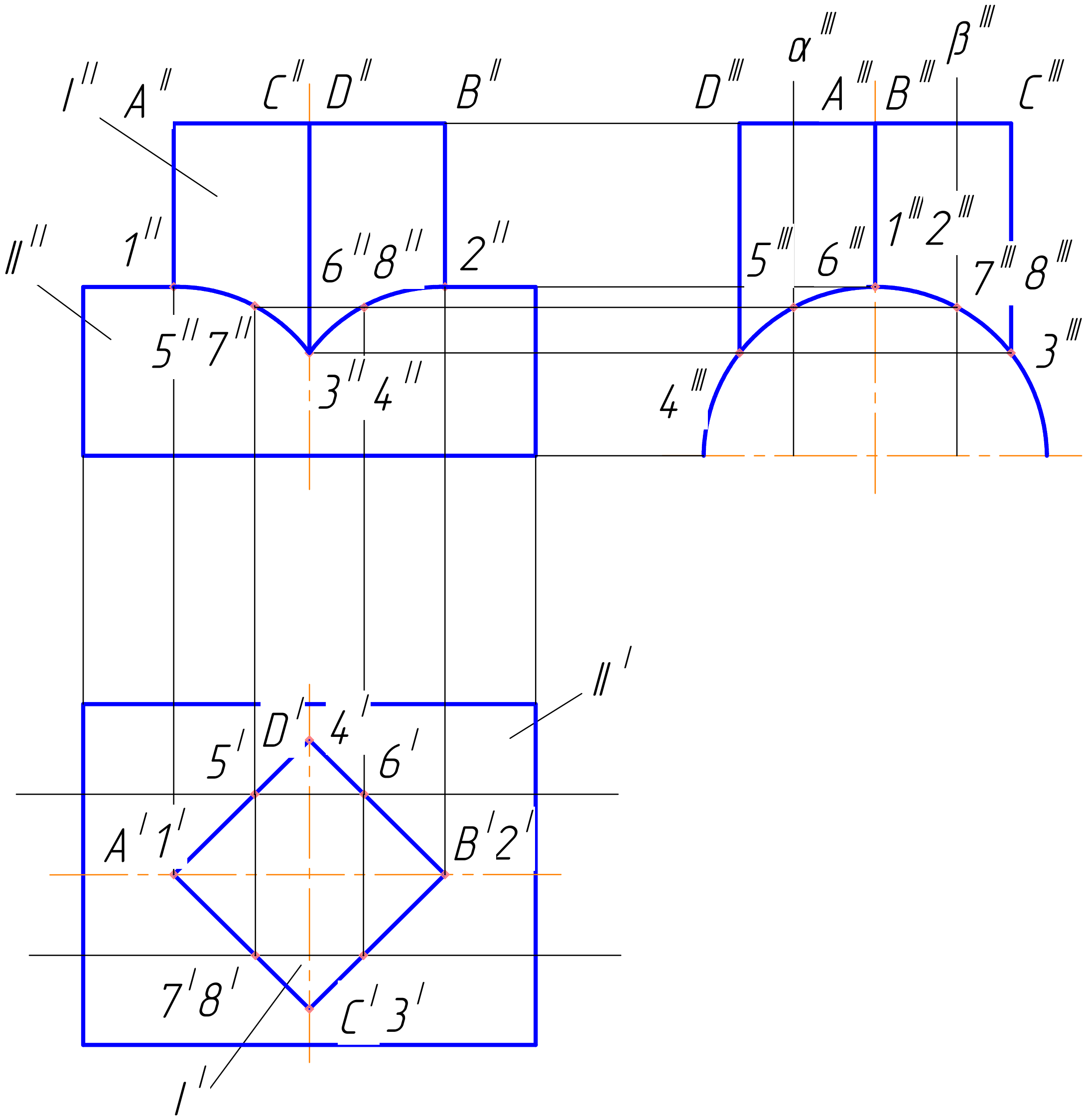


Рис.8.25

Затем определяем точки $\mathbf{3^{II}}$ и $\mathbf{4^{II}}$ и пересечения проекции $\mathbf{D^{III}}$ и $\mathbf{C^{III}}$ рёбер призмы с поверхностью **II** цилиндра. В проекционный связи находим горизонтальные $\mathbf{3^{I}}$ и $\mathbf{4^{I}}$ и фронтальные $\mathbf{3^{II}}$ и $\mathbf{4^{II}}$ проекции этих точек. Для построения дополнительных точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей **I** и **II**, вводим вспомогательные секущие плоскости **α** и **β**. Эти плоскости пересекают поверхность **II** цилиндра по образующим **5 - 6** и **7 - 8**, а поверхность **I** призмы – по прямым, параллельным рёбрам призмы. Горизонтальные проекции $\mathbf{5^{I}}$, $\mathbf{6^{I}}$, $\mathbf{7^{I}}$ и $\mathbf{8^{I}}$ точек совпадают с горизонтальными про-

екциями боковых граней призмы, а профильные $\mathbf{5}^{\mathbf{III}}$, $\mathbf{6}^{\mathbf{III}}$, $\mathbf{7}^{\mathbf{III}}$ и $8^{\mathbf{III}}$ проекции – с профильной проекцией цилиндра. Фронтальные проекции
$\mathbf{5}^{\mathbf{II}}$, $\mathbf{6}^{\mathbf{II}}$, $\mathbf{7}^{\mathbf{II}}$ и $\mathbf{8}^{\mathbf{II}}$ точек находим в проекционной связи с горизонтальными и профильными проекциями.

Найденные фронтальные проекции $\mathbf{1}^{\mathbf{II}}$, $\mathbf{7}^{\mathbf{II}}$, $\mathbf{3}^{\mathbf{II}}$, $\mathbf{8}^{\mathbf{II}}$, $\mathbf{2}^{\mathbf{II}}$ соединяем плавными кривыми, которые являются фронтальными проекциями видимой части линии пересечения поверхностей призмы и цилиндра. Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией призмы, а профильная – с профильной проекцией цилиндра.

9 Вопросы для самопроверки

1. Что называется поверхностью?
2. Как образуются линейчатые и нелинейчатые поверхности?
3. К какому типу поверхности относится плоскость?
4. Как образуются гранные поверхности?
5. Как образуются коническая и цилиндрическая поверхности?
6. Как определяют линию пересечения гранных поверхностей плоскостью общего положения?
7. Какие фигуры могут быть получены в сечении прямого кругового конуса плоскостью?
8. Что называют развёрткой поверхности?
9. Какие поверхности относятся к развёртывающимся поверхностям?
10. Какие существуют способы построения развёрток поверхностей?
11. Каким способом строят развёртки пирамидальных поверхностей?
12. Какую форму имеет развёртка поверхности прямого кругового конуса?
13. Каким способом строят развёртки призматических поверхностей?
14. Как нанести на развёртку поверхности точку, ей принадлежащую?
15. Укажите последовательность решения задач на определение точек пересечения прямой с поверхностью.
16. Какова последовательность решения задач на построение линии пересечения поверхностей?
17. Какие вспомогательные поверхности удобно использовать при пересечении двух поверхностей?
18. В чём сущность способа вспомогательных секущих плоскостей при построении двух поверхностей?

10 Список литературы

1. Дешевой Г.М., Павлов Г.Д. Начертательная геометрия. Конспект лекций/ЛТИ им. Ленсовета, л,1964, ч.1, 2.
2. Гордон В.О., Семенцов – Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. М.”Высшая школа”, 2006 г.