§2. Свойства интегрируемых ф-й

I. Св-ва опр. и-ла.

1) $\int_a^b dx = b - a$

$$f(x) \equiv 1 \Rightarrow f(\xi_i) = 1$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} (b-a) = b-a$$

2) Аддитивность относительно $\underline{\text{ф-й}}$.

$\exists$ f_1 и f_2 инт. на $[a;b]$. Тогда (f_1+f_2) инт. на $[a;b]$, причем

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

(*)

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx =$$

(*)

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{n}(f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i))\Delta x_i$$

$$= \lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i +$$

$$+ \lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

3) Однородность

$\exists f$ – интегрируема на $[a;в]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда λf – интегр. на $[a;в]$ и

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

4) линейность.

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\right) dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f_i(x)\,dx$$

$\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)\Delta x_i}_{\geq 0} \geq 0$$

5) Положительная определенность.

$\rceil f(x) \geqslant 0 \ \forall x \in [a;b]$

$(a \leq b)$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

6)] $f(x) \le g(x)$

$\forall x \in [a; b]$. Тогда

$(a \le b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

(следствие из $\boxed{5.2}$)

$(a \le b)$

7) f - инт. на $[a;b]$.

Тогда $|f(x)|$ инт. и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (b \geq a)$$

8) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(бсе $\Delta x_i = 0$)

9) Ориентированность

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(все $\Delta x_i < 0$)

10). f – интегрир. на $[a;b]$

$[a_1; b_1] \subset [a; b]$. Тогда

f инт. на $[a_1; b_1]$.

11). Аддитивность относительно промежутков.

$c \in (a;в)$, f интегр. на $[a;c]$ и $[c;в]$. Тогда f интегр. на $[a;в]$ и

$$\int_a^в f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^в f(x)dx$$

12). f и g интегрир. на $[a;b]$. Тогда $f \cdot g$ интегрир. на $[a;b]$.

II. Теоремы о среднем.

Лемма (Об оценке интеграла).

$\exists$ f - интегрир. на $[a; b]$. Тогда $\exists$ числа m, M :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

(1)

---

f – инт. $\Rightarrow$ f – огр., т.е.

$\exists\, m;\, M:$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b]$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\int_a^b dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Т.1. (о среднем).

$\rceil$ f-непрер. на $[a;b]$.

Тогда $\exists$ т. $\xi \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (2)$$

f – непрер. на $[a;b] \Rightarrow$

огранич., т.е. $\exists\, m, M$:

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a;b]$$

и по лемме

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

$= \mu$

По т. Коши о непрер. ф-ях

$\exists$ т. $\xi \in [a; b]$: $f(\xi) = \mu$, т.е.

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a},\ (2^a)$$

т.е. (2) верна.

<u>Замеч.</u> $f(\xi)$ наз. средним значением ф-ции f на $[a;b]$.

Т.2. (Обобщенная т-ма о среднем)

] 1) f и g опр. на $[a;b]$,

2) f – непр. на $[a;b]$,

3) g – инт. на $[a;b]$,

4) g – не меняет знака

Тогда

$\exists$ т. $\xi \in [a; b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

(3)

---

f - огр. $\Rightarrow \exists$ числа $m; M$:

по т. В.

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a; b]$$

] $g(x) \geqslant 0$. Тогда

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$$

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

(+)

1 случай: $\int_a^b g(x)dx = 0$. $\Rightarrow$

$$0 \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le 0, \text{ т.е.}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \Rightarrow$$

(3) – верна.

<u>2 случай</u>: $\int_a^b g(x)\,dx \ne 0$

> 0

$$\Rightarrow \quad m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{=\mu} \le M$$

по т. Коши о непр. ф.

$\exists\, \xi \in [a;b] : f(\xi) = \mu$, т.е.

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx},$$ т.е.

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx$$

§3. Определенный и-л с переменным верхним пределом

Ⓘ Дифференцируемость и-ла с переменным верхним пределом.

$\exists f$ - интегрир. на $[a;в]$

$\Rightarrow$ инт. на любом

$[a;x] \subset [a;в]$

<u>О.1</u>. Ф-я

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad (1)$$

наз. и-лом с п.в.пр.

Т.1. (о дифф-ти и-ла с перем. верхн. пределом)

] f интегрир. на $[a;b]$ и непрер. в т. $x_0 \in (a;b)$.

Тогда F дифф-ма в т. x_0

и $$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} = f(x_0) \quad (2)$$

$$\Delta F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\Delta F - f(x_0)\Delta x}{\Delta x}\right|$$

$$= \frac{1}{|\Delta x|}\left|\Delta F - f(x_0)\Delta x\right| =$$

$$= \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\,dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt \right|$$

f – непрер. в т. x_0 $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0$: для

всех t удов-х усл. 7б

$|t - x_0| < \delta_\varepsilon$ ох хб

выполняется

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \ (+)$$

$|\Delta x| < \delta_\varepsilon$

Возьмем ~~[illegible]~~. Тогда

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x}-f(x_0)\right|<\frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\varepsilon\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{|\Delta x|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta x|=\varepsilon.$$

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x}-f(x_0)\right|<\varepsilon,\ \text{т.е.}$$

$$\underbrace{\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0}}_{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)}$$

Т.2 (Коши о ∃-нии первообразной)

Если f непрер. на $[a;b]$, то она имеет первообр. на $[a;b]$.

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} = f(x_0)$$

Д-во.

по т. 1 $\forall x \in (a; b)$

$$\frac{dF}{dx} = f(x), \text{ где}$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Замеч.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad (3)$$

Ⅱ. Формула Ньютона-Лейбница