§6. Односторонние пределы и непрерывность

О.1. $\rceil$ f опр-на на $(a; x_0\rangle$.
A наз. пределом слева ф. f в т. x_0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$: для всех x, уд-х нер-ву
$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$
выполняется и нер-во $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$$

$$f(x_0 - 0) = A$$

$$\lim_{x \to -0} f(x) = A \qquad (x_0 = 0)$$

$$f(-0) = A$$

О.2. Пусть f опр-на на $\langle x_0; b)$.
A наз. пределом справа f в т. x_0, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$: для всех x, уд-х нер-ву
$$x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$$
выполняется нер-во
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = A$$

О.З. Правосторонний и левосторонний пределы ф-ции в т-ке наз. односторонними пределами.

Зам. М.б. $f(x_0-0)=\pm\infty$

$f(x_0+0)=\pm\infty$

Т. 1. Ф-я f имеет предел в т. $x_0 \Leftrightarrow \exists f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, причем они равны. Значение предела при этом равно значению односторонних пределов

(Н.)] $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta_\varepsilon > 0$: для всех x, уд-х нер-ву

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon,$$

т.е.

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \text{ и } x \neq x_0,$$

выполняется нер-во

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (*).$$

В частности, нер-во (*) выполняется для x: $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ и для x:

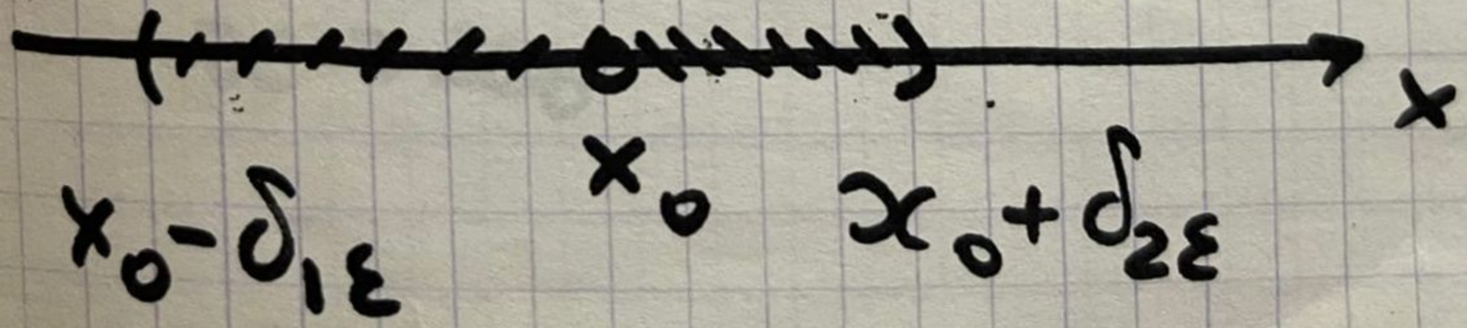
$x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$, т.е.

$f(x_0 - 0) = A$ и

$f(x_0 + 0) = A$.

D.)] $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$;

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_{1\varepsilon} > 0$ и $\delta_{2\varepsilon} > 0$: для всех x, уд-х нер-ву $x_0 - \delta_{1\varepsilon} < x < x_0$ или $x_0 < x < x_0 + \delta_{2\varepsilon}$ выполняется нер-во $|f(x) - A| < \varepsilon$ (*)



Выберем $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{1\varepsilon}, \delta_{2\varepsilon}\}$.

Тогда для всех x, уд-х

нер-ву $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

будет выполняться

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

0.4.] f опр-на на $(a; x_0]$. f наз. непрерывной слева в т. x_0, если $\exists$ кон. $f(x_0-0)$ и $f(x_0-0)=f(x_0)$.

0.5.] f опр-на на $[x_0; b)$. f наз. непрерывной справа в т. x_0, если $\exists$ кон $f(x_0+0)$ и $f(x_0+0)=f(x_0)$

Т.2. Ф-я f непрер. в т. $x_0 \Leftrightarrow$ она непрер. и слева и справа в этой т.

Д-во. f непр. в т. $x_0 \Leftrightarrow$ $\exists$ кон $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\overset{\text{Т.1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0), \end{cases}$$

но это и означает непре-
рывность слева и справа в
т. x_0.

<u>О.6.</u> $\exists$ f опр-на на $(a; b)$ и $\exists$ $x_0 \in (a; b)$,
кроме, м.б. т. x_0. Т. x_0 наз.
т-кой разрыва ф-ции f,
если либо f не опр-на в
т. x_0, либо опр-на, но не
является непрерывной.

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad ; \quad y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Классификация т-к разрыва

а) $\exists$ кон. $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.
Тогда x_0 – т-ка разрыва I рода.

Разрыв I р. наз. устранимым, если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$

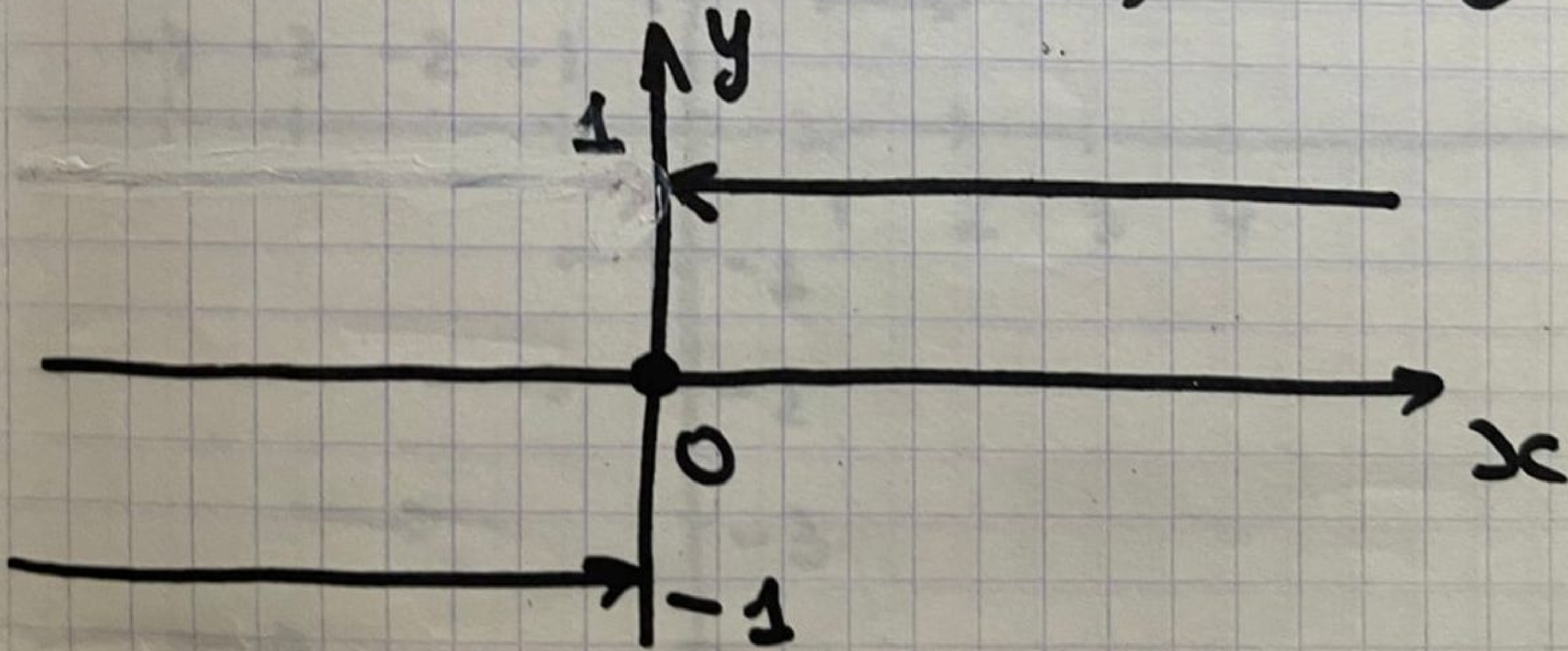
$$y=\frac{\sin x}{x} \qquad y_1=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

(скачок ф-ции $=0$)

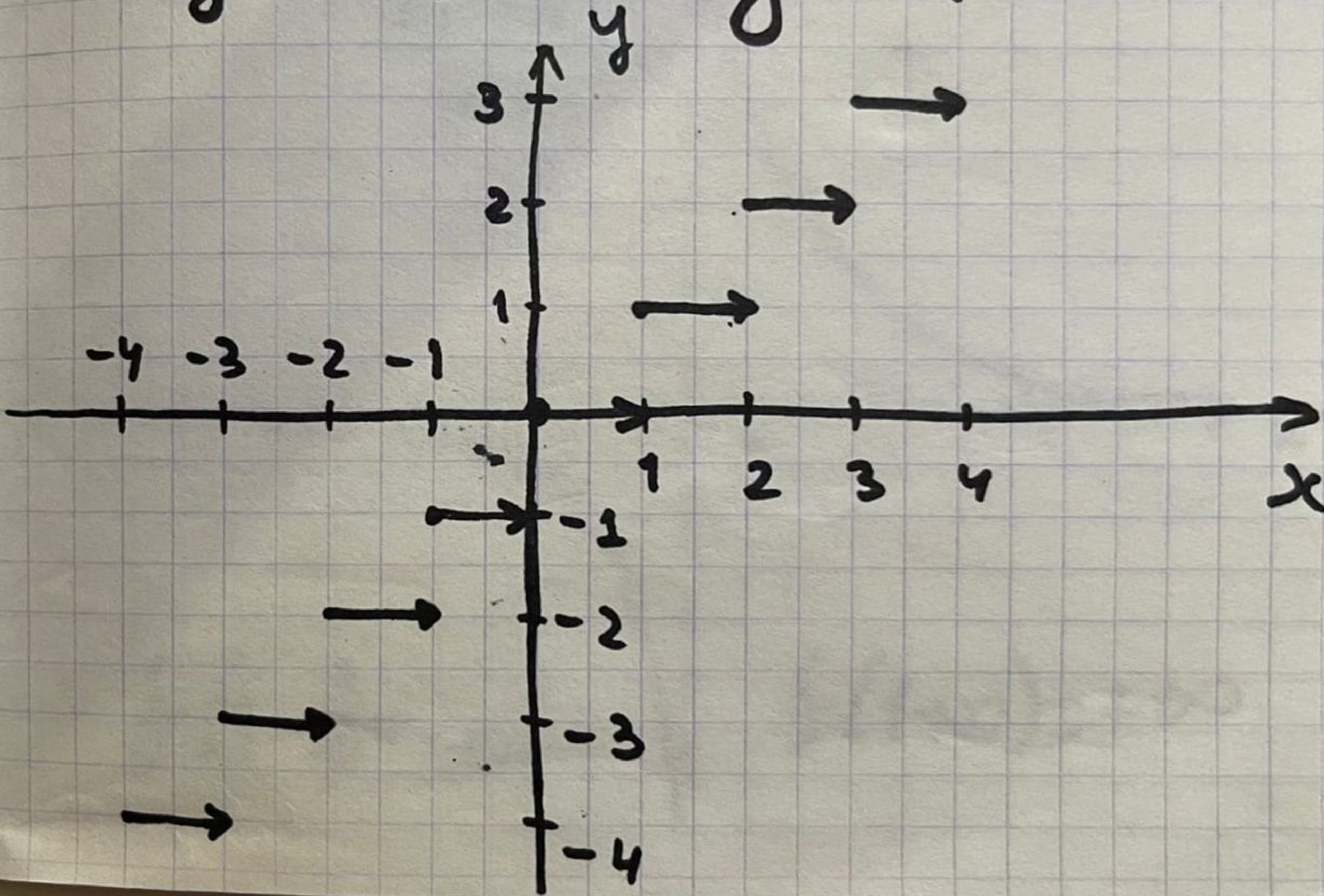
б) Все разрывы, не являющиеся разрывами I р. наз. разрывами II р., т.е...

примеры

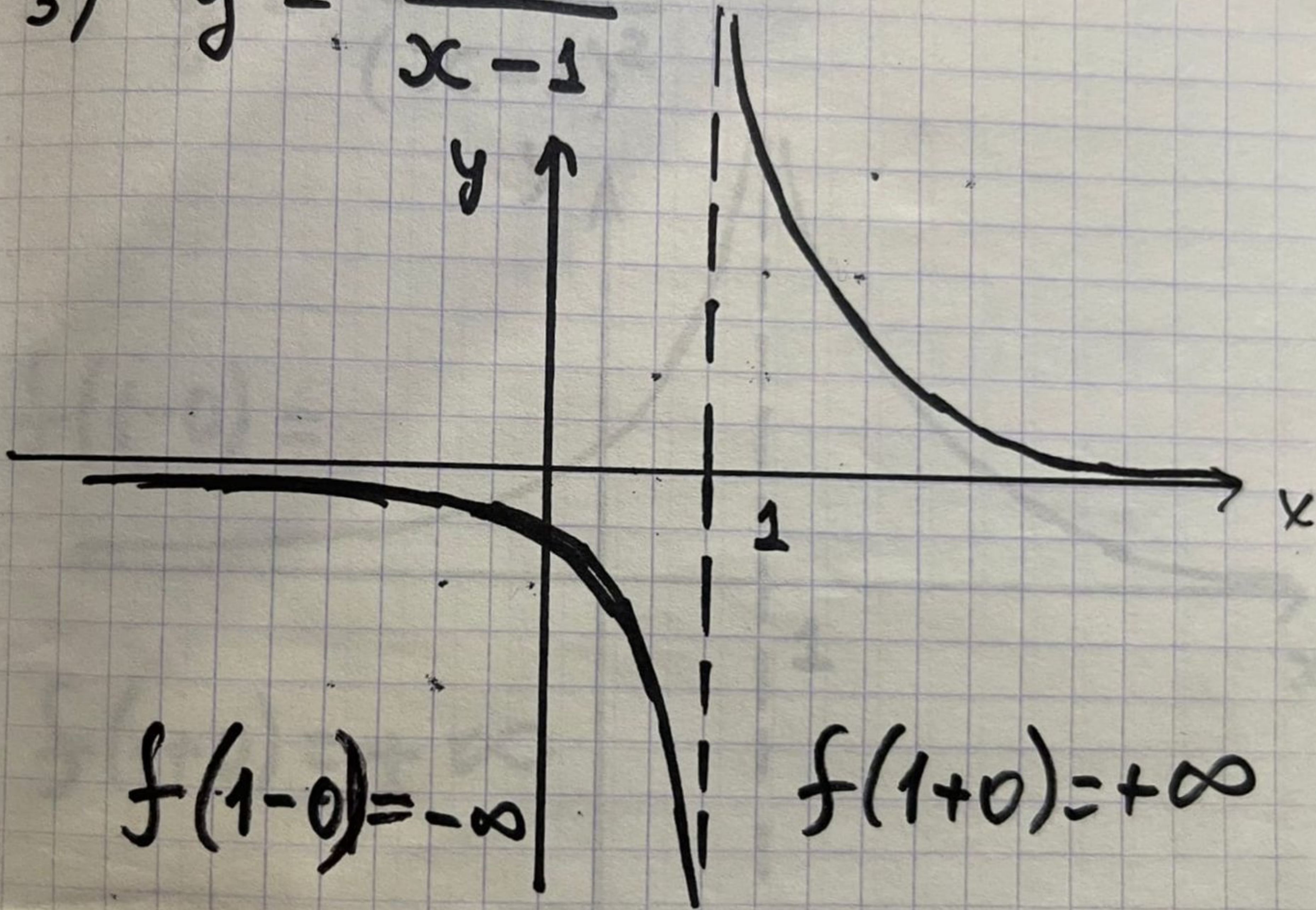
1) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$



2) $y = [x]$ $\quad y = E(x)$

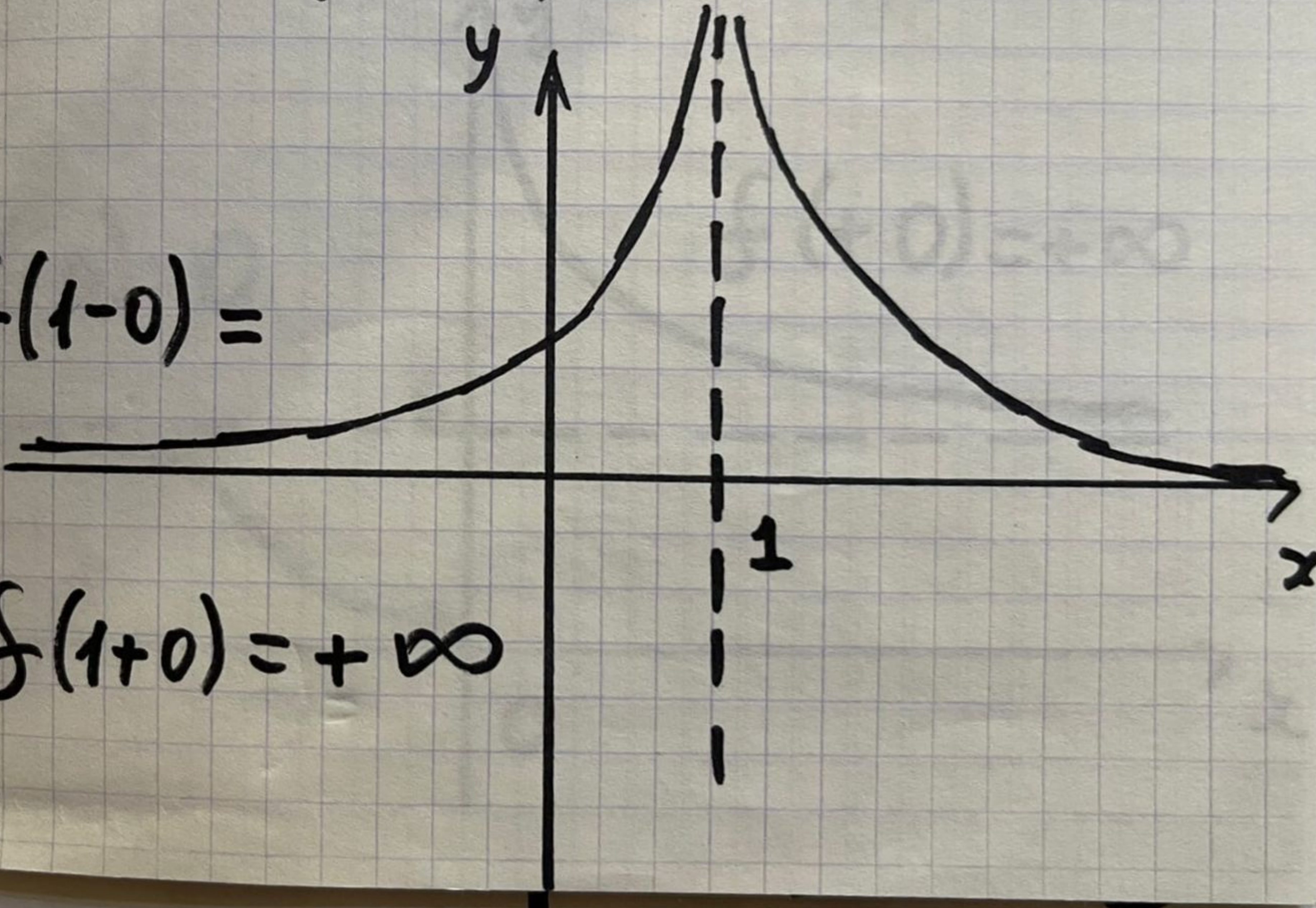


3) $y = \dfrac{1}{x-1}$



$f(1-0) = -\infty$ $\qquad$ $f(1+0) = +\infty$

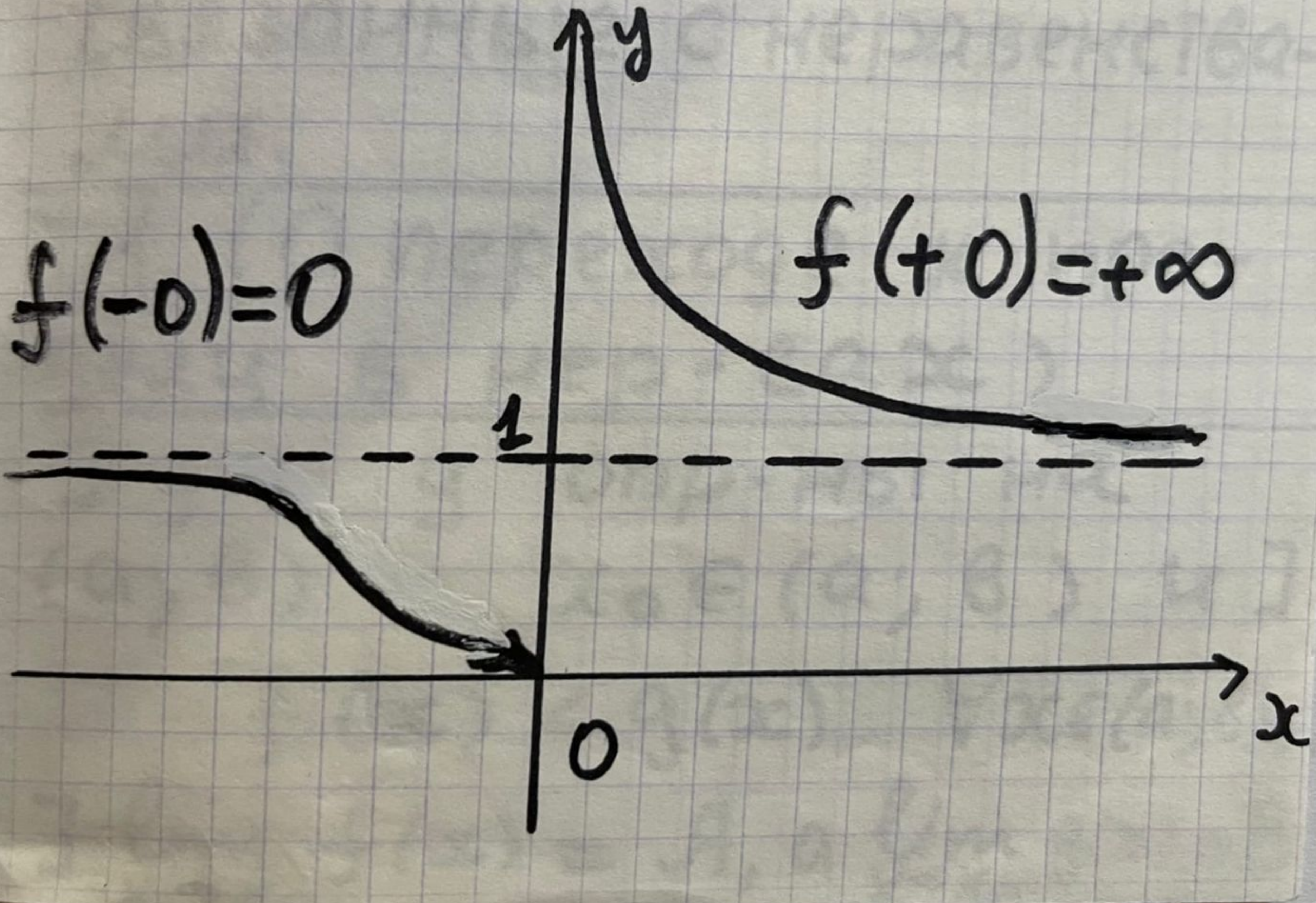
4) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$



$f(1-0) =$

$= f(1+0) = +\infty$

5) $y = a^{\frac{1}{x}}, \ a > 1$



§7. Свойства пределов, связанные с неравенствами.

Т.1. (О переходе к пределу в нер-вах)

] f и g опр-ны на $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$ и]

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in (a;b).$$

] $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

Тогда $A \le B$.

Д-во (от противного).

$\exists\, B < A$. Р-м $h(x) = f(x) - g(x)$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$

$= A - B > 0$. Тогда $\exists\, U(x_0)$:
$h(x) > 0$ в ней. Тогда
$f(x) - g(x) > 0$, т.е.
$f(x) > g(x)$ ...

Зам.

Т.2. (О сжатой переменной)

$\rceil$ f, g, φ – опр-ны на $(a; b)$,
$x_0 \in (a; b)$ и

$$f(x) \le \varphi(x) \le g(x) \quad \forall x \in (a; b)$$

и пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$.

$$
\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[dr, "x \to x_0"'] & \le \varphi(x) \le \arrow[d, Rightarrow] & g(x) \arrow[dl, "x \to x_0"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

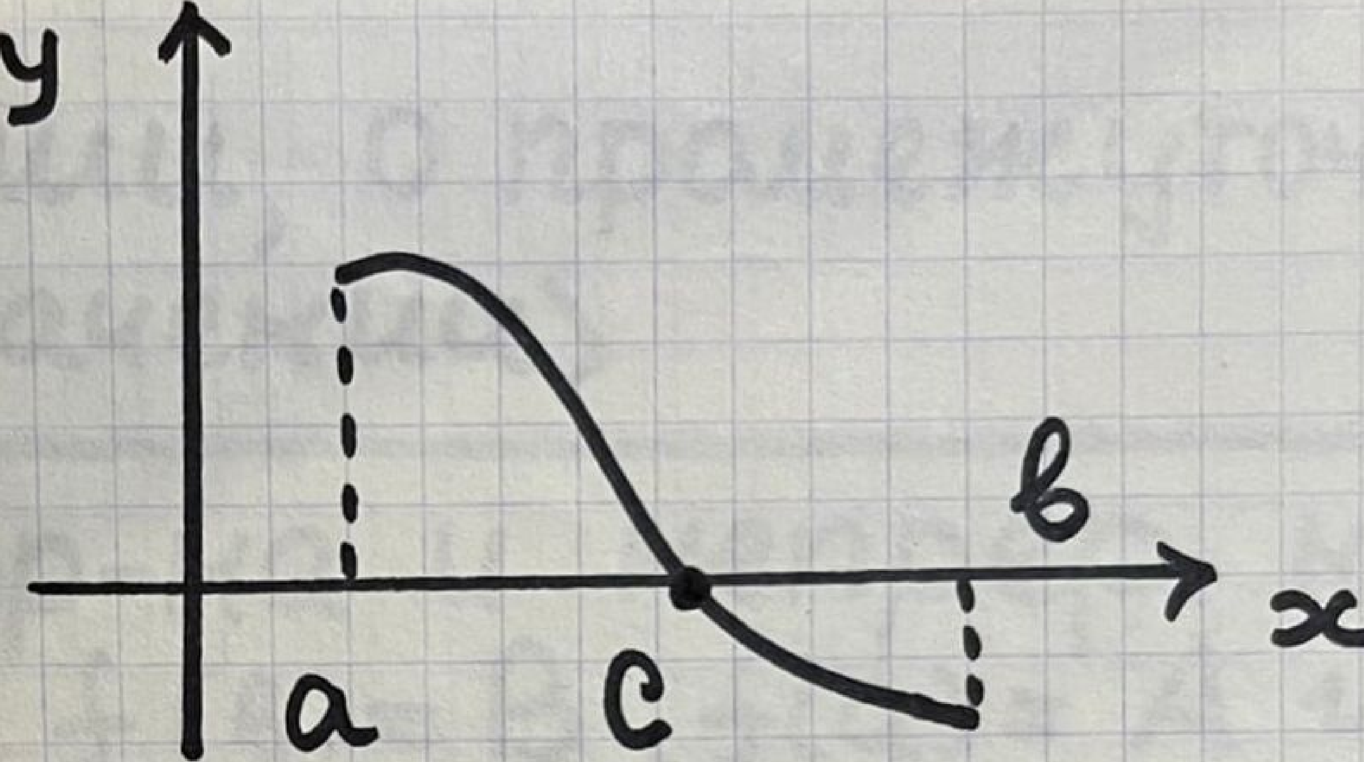
§8. Функции, непрерывные на отрезке.

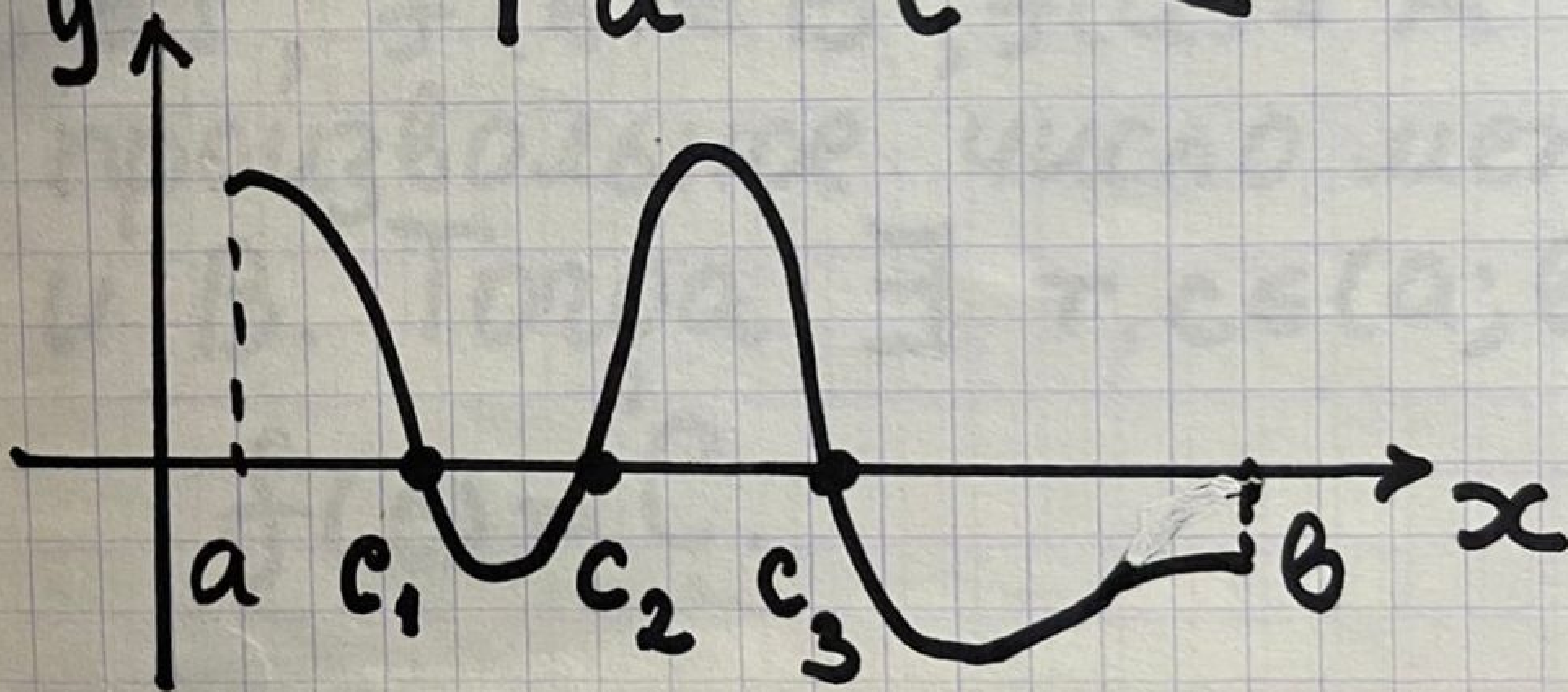
О.1. Ф-я f наз. непрерывной на отрезке $[a; b]$, если
1) она непрерывна $\forall$ т. $x \in (a; b)$;
2) непрерывна справа в т. a;
3) непрерывна слева в т. b.

Т.1. (Коши, об обращении ф-ции в 0)

Пусть f. опр-на и непрерывна на $[a;b]$ и $f(b)f(a) < 0$. Тогда $\exists$ т. $c \in (a;b)$ такая, что $f(c)=0$

Зам.


y
в
x
a
c


y
x
a
c_1
c_2
c_3
в

Т.2. (Коши, о промежуточном значении)

]f опр-на и непрер. на $[a;b]$, $f(b)=B$, $f(a)=A$ и C - произвольное число между A и B. Тогда $\exists$ т. $c\in(a;b)$:

$$f(c)=C.$$

Д-во.] $A < B$. Тогда

$A < C < B$.

] $\varphi(x) = f(x) - C$. Тогда

$\varphi(a) = A - C < 0$; $\varphi(b) = B - C > 0$

$\Rightarrow$ по Т. 1. $\exists$ т. $c \in (a; b)$:

$\varphi(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$, т.е.

$f(c) = C$

О.3. M наз. (точной) верхней гранью ф-ции f на мн-ве X, если

1) $f(x) \le M \quad \forall x \in X$,

2) $\forall M_1 < M \quad \exists x_1 \in X$:

$f(x_1) > M_1$

$$\sup_X f(x) = M$$

О.4. m наз. (точной) нижней гранью ф-ции f на X, если

1) $f(x) \geq m \quad \forall x \in X$;

2) $\forall m_1 > m \quad \exists x_1 \in X$:

$$f(x_1) < m_1$$

$$\inf_{X} f(x) = m$$

Примеры

1) $y = \sin x$;

Т.3 (1^я теорема Вейерштрасса, об ограниченности ф-ции)

] f опр-на и непрер. на $[a;b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке.

Т.4. (2^{я} т. Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях)

$\exists$ ф-я f опр-на и непрер. на $[a; b]$. Тогда она достигает на $[a; b]$ своего наиб. и наим. значений.

Глава II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

§1. Производная и дифференциал.

I. Основное определения.

О.1. Если $\exists$ предел отношения приращения ф-ции к вызвавшему его приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, то этот предел наз. производной ф-ции в точке и обозначается:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

$$y', \ \frac{dy}{dx}$$

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Замечания

1. М. б. бесконечная пр-я

$$\frac{df}{dx} = \pm\infty$$

(в дальнейшем ...

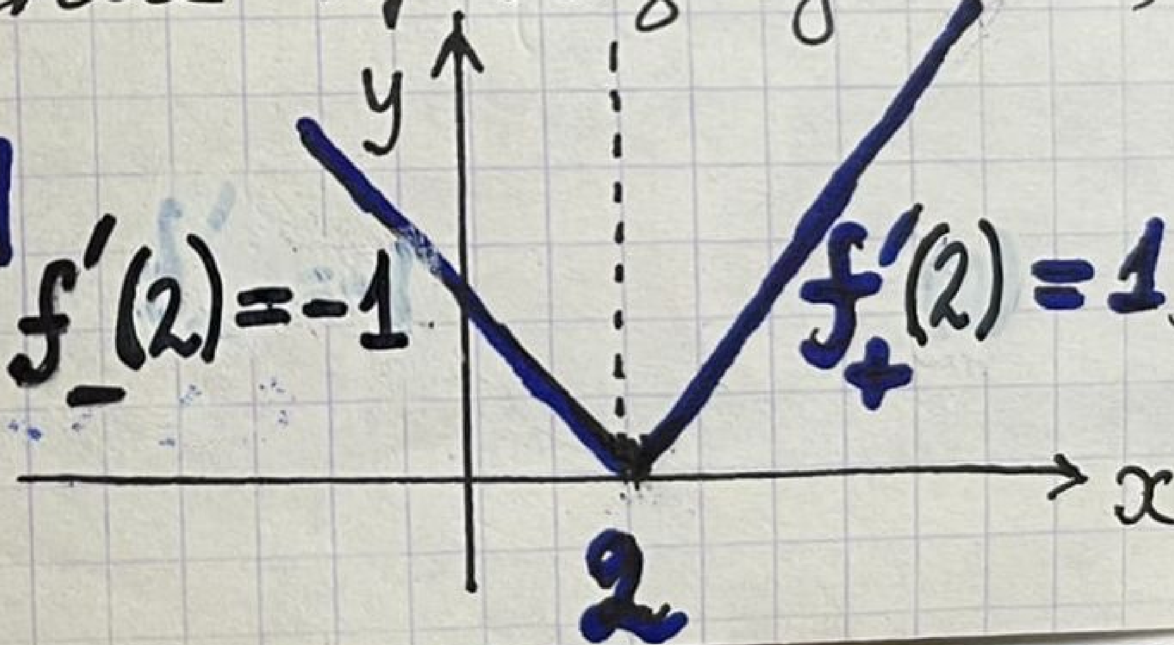
2. М. б. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ не $\exists$, но

$$\exists \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'_-(x)$$

$$\exists \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'_+(x)$$

(односторонние производные):

$y = |x-2|$



односторонние производные тоже м.б. ∞.

<u>О.2.</u> $\exists$ f опр-на в $U(x_0)$, $x_0+\Delta x \in U(x_0)$. Если приращение ф-ции в т. x_0 представимо в виде

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\overbrace{\Delta x}^{x-x_0}+\alpha(\Delta x), (1)$$

где $A=const$, а $\alpha(\Delta x)=o(\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$,

то ф-я f наз. дифференци-

руемой в т. x_0, а линей-
ная часть приращения
наз. <u>дифференциалом</u>
ф-ции f в т. x_0 и обозн.

$$df(x_0) = A\underbrace{\Delta x}_{x-x_0} \quad (1)$$

$$\Delta x = dx$$

$$df(x_0) = A\,dx \quad (2).$$

Зам. df не только линейная, но и главная часть приращения ф-ции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{df(x_0)} \overset{(1)}{\underset{(+)}{=}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x}{A\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{d(\Delta x)}{A\Delta x}$$

$= 1 + 0 = 1$, т.е. $\Delta f(x_0) \underset{\Delta x \to 0}{\sim} df(x_0)$

II. Свойства дифференцируемых функций

ная, но и главная часть приращения ф-ции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{df(x_0)} \overset{(1)}{\underset{(*)}{=}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x}{A\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{A\Delta x}$$

$= 1 + 0 = 1$, т.е. $\Delta f(x_0) \underset{\Delta x \to 0}{\sim} df(x_0)$

II. Свойства дифференцируемых функций

Т.1 (Н. и д. условия диффе-
ренцируемости функций)

Ф-я f дифференцируе-
ма в т. $x_0 \Leftrightarrow \exists$ кон. $f'(x_0)$,
причем

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx \quad (3)$$

Д-во

Н. f – дифф-ма в т. x_0, т.е

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}}_{=0} =$$

$= A$, т.е. $\exists\, f'(x_0) = A$.

Ⓓ] $\exists$ кон. $f'(x_0)$. Тогда

по опред. пр-ой $\exists$ кон.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

по т. ....

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \underbrace{\alpha_1(\Delta x)}_{\text{б.м. при } \Delta x \to 0} \Big| \cdot \Delta x$$

где $\alpha_1(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$.

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \underbrace{\alpha_1(\Delta x)\cdot \Delta x}_{\alpha(\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha_1(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha_1(\Delta x) = 0 \text{ т.е.}$$

$\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

<u>Следствие</u>. Для дифф-ой ф-ции верно:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \underbrace{\alpha(\Delta x)}_{o(\Delta x)} \quad (4)$$

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)dx} \quad (5)$$

Т.2. Дифференцируемая в т. x_0 ф-я непрерывна в этой т-ке.

Д-во.

$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$, т.е. f-непрер. в т. x_0.

Зам. Обратное, в общем случае, неверно.

Пример: $y = |x-2|$ в т. $x_0 = 2$

Т.3. $\exists$ функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в т. x. Тогда

1) $u(x)+v(x)$ дифференцируема в т. x, причем

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x) \qquad (6)$$

$$d(u(x)+v(x)) = d(u(x))+d(v(x)) \qquad (7)$$

2) $u(x)\cdot v(x)$ — дифференцируема в т. x, причем

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \tag{8}$$

$$d(uv) = v\,du + u\,dv \tag{9}$$

3) если $v(x) \neq 0$, то

$\frac{u}{v}$ — дифференцируема

в т. x, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{10}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2} \qquad (11)$$

Д-во

),2) - самостоятельно

3) $$\Delta\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=$$

$$=\frac{(u+\Delta u)v-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}=$$

$$=\frac{uv+v\Delta u-\cancel{uv}-u\Delta v}{v^2+v\Delta v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v^2+v\Delta v}$$

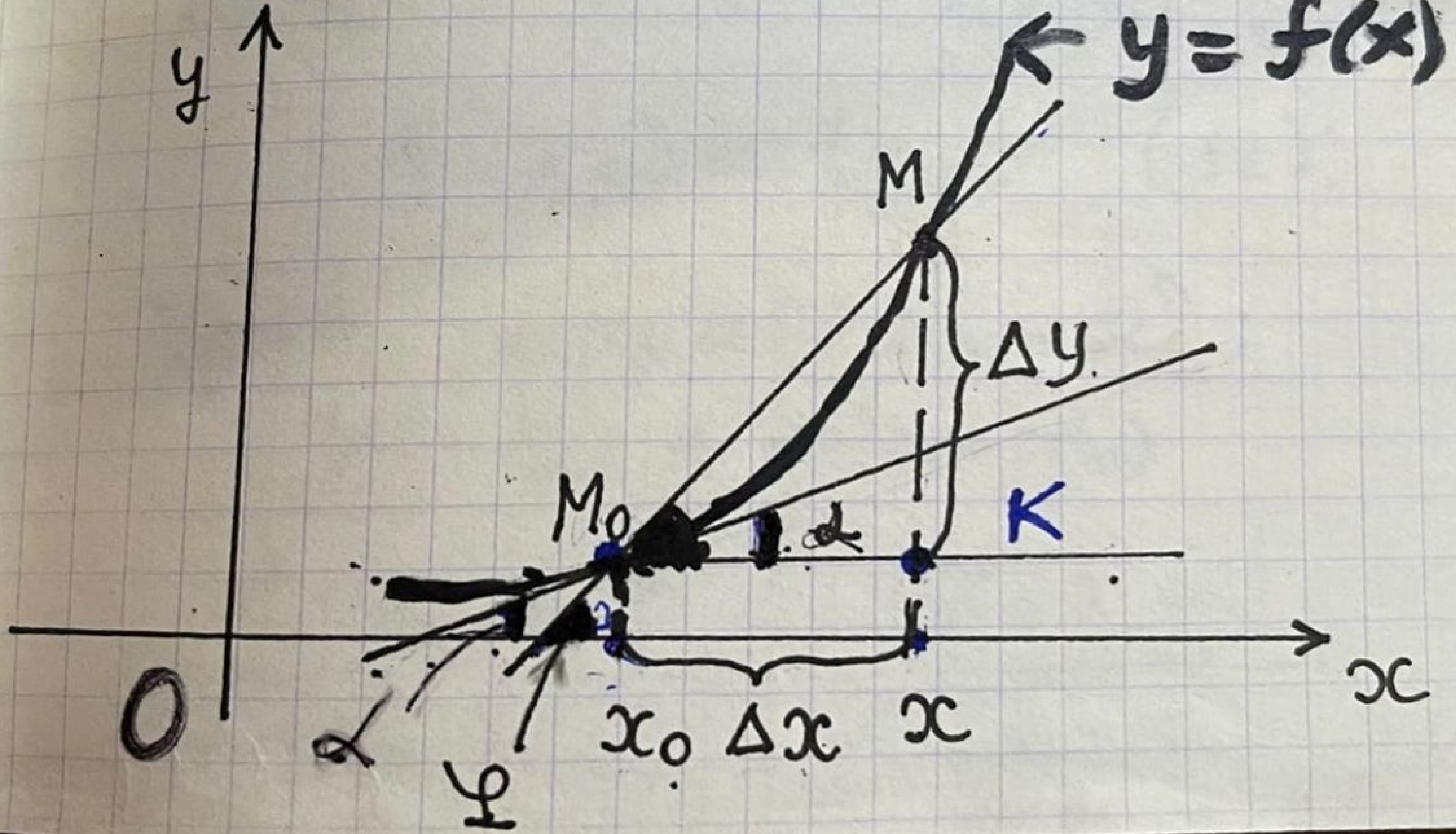
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\underbrace{\Delta v}_{\substack{\to 0 \\ \Delta x \to 0}}} =$$

$$= \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) \overset{(5)}{=} \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{v \cdot \overbrace{u' dx}^{(5)} - u\overbrace{v' dx}^{(5)}}{v^2} =$$

$$= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

III. Геометрический и механический смысл производной и дифференциала



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \underline{\operatorname{tg}\alpha} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{f'(x_0)}$$

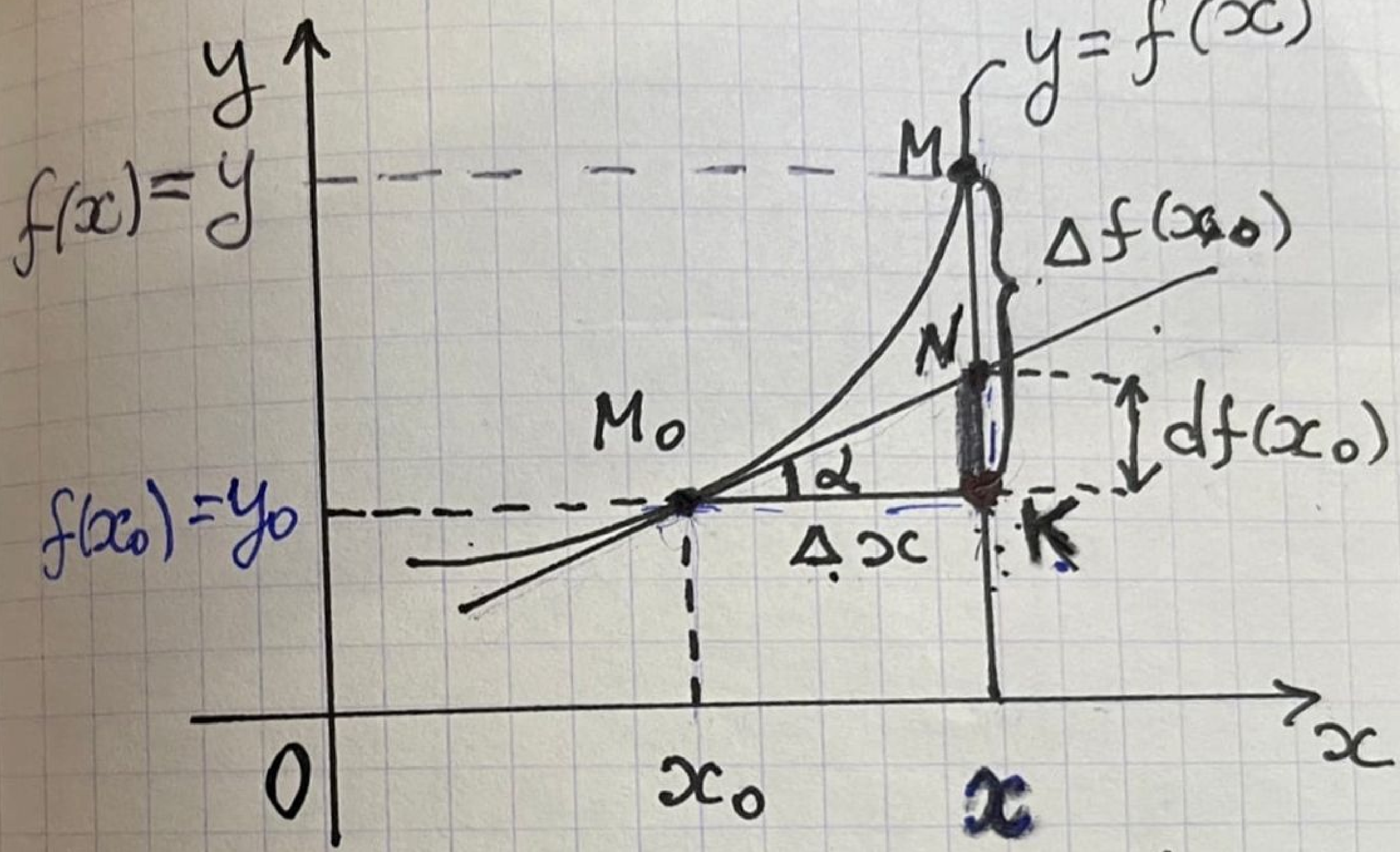
$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha \quad (12).$$

Ур-е касательной:

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) \Rightarrow$$

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \quad (13)$$



$$NK = (tg\alpha)\cdot\Delta x = f'(x_0)\Delta x =$$

$$= df(x_0) \Rightarrow \ldots$$

] $s(t)$ – путь, пройденный т-кой к моменту времени t.

$$\Delta s(t_0) = s(\overbrace{t_0+\Delta t}^{t}) - s(t_0)$$

$$v_{ср} = \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t}$$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

$ds = s'(t_0)\overbrace{dt}^{\Delta t} = v(t_0)\Delta t$, т.е. это

путь, который прошла бы

матер. т-ка, если бы она двигалась равномерно со скоростью $v(t_0)$

§2. Дифференцирование сложной и обратной функций.

Т.1.] $y = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x) = u$.] $\exists\, \varphi'(x_0)$ и

$\exists f'(u_0)$, где $u_0 = \varphi(x_0)$.

Тогда $\exists$ производная сложной ф-ции $f(\varphi(x))$ в т. x_0 и она равна

$$(f(\varphi(x)))'\Big|_{x_0} = f'_u(u_0)\cdot\varphi'(x_0)$$

(1)

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (1^a)$$

Д-во.

по усл. $\exists\ y'_u$, т.е. $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$

$\Rightarrow$ по т. . . . . $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u)$ (*),

где $\alpha(\Delta u) \xrightarrow[\Delta u \to 0]{} 0$. из (*) $\Longrightarrow$

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \alpha(\Delta u)$$

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= y'_u \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'_x} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\overset{\Delta x \to 0\ \to\ 0}{\Delta u})}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'_x}$$

$$\cancel{= y'_u \cdot u'_x}$$

$$= y'_u \cdot u'_x$$

__Следствие 1.__ (Логарифмическое дифференцирование)

$$y = (u(x))^{v(x)}$$

$$\ln y = \ln u^{v}$$

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$y' = \overbrace{y}^{=u^{v}} \left(v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\right)$$

$$y' = u^{v} \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$$

(2)