§ 2 Интегрирование рациональных дробей.

I. Интегрирование простейших дробей.

A $$\int \frac{A\,dx}{(x-x_0)} = A\int \frac{d(x-x_0)}{(x-x_0)} =$$

$$= A\ln|x-x_0| + C$$

$$\boxed{B} \quad \int \frac{A\,dx}{(x-x_0)^K} = A\int \frac{d(x-x_0)}{(x-x_0)^K} =$$

$$K \in \mathbb{N},\ K \neq 1 \qquad = A\int (x-x_0)^{-K}\,d(x-x_0)$$

$$= \frac{-A}{(K-1)(x-x_0)^{K-1}} + C$$

$K-1$

$\boxed{C}$ $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx =$$

$D<0$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t;\ dx=dt \\ x=t-\frac{p}{2}; \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{Mt - \frac{Mp}{2} + N}{t^2 - pt + \frac{p^2}{4} + pt - \frac{p^2}{2} + q}\,dt$$

$$= M \int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} + \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$\left(a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$$

$$= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) +$$

$$+ \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) +$$

$$= + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

$+ \boxed{D}$

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^l} dx$$

$l > 1$

$p^2 - 4q < 0$

$l \neq 1$; $t = x + \frac{p}{2}$

$l \in N$

$$I_\ell = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\ell}$$

$$J_\ell =$$

$$= \frac{1}{a^2} J_{\ell-1} + \frac{x}{2a^2(\ell-1)(x^2+a^2)^{\ell-1}} -$$

$$- \frac{1}{2a^2(\ell-1)} J_{\ell-1} .$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x\cdot x}{(x^2+a^2)^2}dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad ; \quad du = dx \\ dv = \dfrac{\overbrace{x\,dx}^{=\frac{1}{2}d(x^2+a^2)}}{(x^2+a^2)^2} ; \quad v = -\dfrac{1}{2(x^2+a^2)} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} -$$

$$- \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{a^3} +$$

$$+ \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

II Общий случай

План. $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$

1. . . . .

2. . . .

§3. Некоторые случаи замены переменных, приводящие к интегр
р. др.

I. $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

A $R(-\cos x, -\sin x) =$

$= R(\cos x, \sin x)$.

$t = \operatorname{tg} x$; $x = \operatorname{arctg} t$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

B) Общий случай.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \quad x = 2\operatorname{arctg} t;$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

8 II $$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_k}{s_k}}, x\right)dx$$

$$r_i \in \mathbb{Z}, \quad s_i \in \mathbb{N}$$

$$] \; s = \text{Н.О.К.}(s_1, \ldots, s_k)$$

$$t^s = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right); \; t = \ldots; \; x = \ldots$$

$$dx = \ldots$$

III Интегрирование дифференциального бинома.

О.1 Выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

$m, n, p \in \mathbb{Q}$; $a, b \neq 0$

наз. ...

Случай 1.

$p \in \mathbb{Z}$, $m = \dfrac{r_1}{s_1}$; $n = \dfrac{r_2}{s_2}$

Замена

$t^s = x$, где $s = \text{Н.О.К.}(s_1, s_2)$

(см. II.)

Случай 2.

$p \notin \mathbb{Z},\ p = \frac{r}{s};\ \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$

Замена

$a + bx^n = t^s;\ x = \left(\frac{t^s - a}{b}\right)^{1/n}$

$t = (a + bx^n)^{1/s}$

случай 3.

$p \notin \mathbb{Z}$, $p = \frac{r}{s}$; $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$

$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Замена

$ax^{-n} + b = t^s$; $x = \left(\frac{t^s - b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}$

$x^m (a + bx^n)^p =$

$= x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p$

Т. Чебышёва.

При значениях параметров m, n, p, не уд-х случаям 1-3 и-л от дифф. бинома не является элементарной ф-ей.

IV. Понятие об и-лах, не являющихся элементарными функциями.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \qquad m=0,\quad n=3,\quad p=-\frac{1}{2}$$

$p \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{m+1}{n}+p \notin \mathbb{Z}$

примеры.

1. $\int \frac{e^x}{x^n} dx$;

2. $\int \frac{\sin x}{x^n} dx$;

2ª. $\mathrm{Si}\,x = \int \frac{\sin x}{x} dx$

6. $\int R(x, \sqrt{P_k(x)})\,dx$

$k = 3; 4.$

эллиптические и-лы

3. $\int \frac{\cos x}{x^n} dx$

3a. $\int \frac{\cos x}{x} dx = \operatorname{Co} x$

4. $\int e^{-x^2} dx$

5. $\operatorname{Li} x = \int \frac{dx}{\ln x}$