§11. Вещественное линейное пространство.

<u>О.1.</u> Мн-во M эл-ов произвольной природы, в к-ром заданы 2 операции:

1) $\forall\ x_1, x_2 \in M$ задан элемент $x_1 + x_2 \in M$, называемый суммой эл-ов x_1 и x_2;

2) $\forall\ x \in M$ и $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ задан эл-т $\lambda x \in M$, наз. . . . ,

причем выполняются след. аксиомы:

1) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

2) $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$

3) $\exists$ эл-т $\tilde{0} \in M$:

$x + \tilde{0} = x \quad \forall\, x \in M$

4) $\forall\, x \in M \ \exists\, -x \in M$:

$x + (-x) = \vartheta$

5) $1 \cdot x = x \quad \forall x \in M$

6) $\lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1\lambda_2)x$

7) $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$

8) $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$

наз. <u>линейным ве-</u>

щественным пространством и обозначается $\mathcal{L}$.
Элементы $x \in M$ наз. векторами.

Примеры

О.2.7 Векторы $x_1, x_2, \ldots$
$\ldots, x_n \in \mathcal{L}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Выражение вида
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad (1)$$
наз. <u>линейной ком-</u>

бинацией в-ров.

О.З. Система в-ров наз. линейно зависимой, если $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 > 0$, а $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \tilde{0}$ (2)

в противном случае система в-ров наз. линейно независимой.

<u>O.4.</u> Базисом линейного пр-ва L наз. любая упорядоченная система в-ров

$e_1, e_2, \dots, e_n$:

1) она линейно независима;

2) $\forall x \in \mathcal{L}$ представим в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, \quad (3)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$.

Коэффициенты разл. (3) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ наз. координатами в-ра x в данном базисе.

Будем писать:

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

<u>Зам.</u> Базис есть максимальное число мин.

нез. в-ров простран-
ства $\mathcal{L}$.

2. ...

0.5. Число в-ров базиса
наз. размерностью
линейного пр-ва.

0.6. Линейное пр-во
столбцов, состав-

ленных из n вещ.
чисел

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \text{ для кото-}$$

рых

$$x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} \xi_1^1 + \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_n^1 + \xi_n^2 \end{pmatrix}, \text{ а}$$

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 \\ \vdots \\ \lambda \xi_n \end{pmatrix}$$

наз. n-мерным арифметическим пр-вом и обозн. $\mathbb{R}^n$.

Пример базиса $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>О.7.</u> Если $\forall$ в-ров x и $y \in \mathcal{L}$ поставлено в соответствие число xy, причем

1) $xy = yx$;

2) $(\lambda x)y = \lambda(x \cdot y)$

3) $(x+y)z = xz + yz$,

то говорят, что задано скалярне произведение в-ров

0.8. Вещественное линейное пр-во L

наз. евклидовым,
если в нем задано
скалярное произве-
дение так, что
$xx \geq 0$ и $xx = 0 \Leftrightarrow$
$x = \tilde{0}$.

09. В-ры x и y
наз. ортогональ-

ными, если $xy=0$.

О.10. Базис $e_1, \dots, e_n$ наз. ортонормированным, если

$$e_i e_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$x_1 x_2 = \xi_1^1 \xi_1^2 + \xi_2^1 \xi_2^2 + \dots + \xi_n^1 \xi_n^2$$

в ортонорм. базисе

§12. Линейные отображения и матрицы

О.1.] $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ - линейные пр-ва. Отображение

$$\tilde{A}: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2 \quad (1)$$

наз. оператором, действующим из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$.

О.2. Оператор $\tilde{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ наз. линейным, если

1. $\tilde{A}(x_1 + x_2) = \tilde{A}(x_1) + \tilde{A}(x_2)$
2. $\tilde{A}(\lambda x) = \lambda \tilde{A}(x)$

] $\tilde{A}$ – линейное отобр.

$\mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$ и

$e_1, \ldots, e_n$ – базис L^n

$p_1, \ldots, p_m$ – базис L^m

и $\exists$

$$\begin{cases} \tilde{A}e_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \\ \tilde{A}e_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{A}e_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \end{cases}$$

(2)

т.е.

$$(2^a)\quad \tilde{A}e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

<u>О.3.</u> Прямоугольная таблица из mn чисел, содержащая m строк и n столбцов наз. $m \times n$ матрицей и

обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Числа a_{ij} наз. элементами матрицы

Т. обр., коэффициенты разложений (2) образуют матрицу

$] \; x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$

а

$\tilde{A} x = \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \ldots + \eta_m p_m$

+

С другой стороны,

$$\tilde{A}x = \tilde{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = [\text{лин}] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \tilde{A}(e_j) = [2^a] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i\right) = [\ldots] =$$

$$=\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_{ij}\right) \quad (++)$$

Сравнивая $(+)$ и $(++)$, получим

$$(4)\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{12} + \ldots + \xi_n a_{1n} \\ \eta_2 = \xi_1 a_{21} + \xi_2 a_{22} + \ldots + \xi_n a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_m = \xi_1 a_{m1} + \xi_2 a_{m2} + \ldots + \xi_n a_{mn} \end{cases}$$