§21. Комплексные числа (к.ч.)

I Определение к.ч. Алгебраическая форма к.ч.

О.1. Мн-во упорядоченных пар (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$ для к-рых

1) $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;

2) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) =$

$= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$;

3) $(x_1, y_1)(x_2, y_2) =$

$= (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$

наз. мн-вом комплéксных чисел $\mathbb{C}$.

<u>Зам.</u> 1) Мн-во (x, y) — это мн-во т-к $\mathbb{R}^2$ (плоскости)

2) Обозначение: $z = (x, y)$.

Св-ва операций над к. ч.

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3) $(x, y) + (0; 0) = (x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

4) $(x, y) + (-x; -y) = (0; 0)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5) $(x, y)(1, 0) = (x, y)$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

6) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$; 7) $(z_1 z_2) z_3 =$

Зам. 1) Между мн-вом к. ч. вида $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ и мн-вом веществ. чисел $x \in \mathbb{R}$ есть взаимно-однозн. соотв., причем

$(x_1, 0) + (x_2, 0) \Longleftrightarrow x_1 + x_2$

$(x_1, 0)(x_2, 0) \Longleftrightarrow x_1 x_2$

Заменим $(x, 0)$ на x, а $(1, 0)$ на 1

2) $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

$(y, 0)(0, 1) = (0, y)$

Пара $(0, 1)$ имеет специальное обозначение:

$$\boxed{(0,1)=i} \qquad (1)$$

Тогда

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=$$

$$= x+y(0,1) \overset{(1)}{=} x+iy$$

итак,

$$\boxed{(x,y)=x+iy} \qquad (2)$$

Запись к. ч. $z=x+iy$ наз. <u>алгебраической фор-</u>

мой записи к. ч.

$$\boxed{\begin{array}{l} i^2 = i\cdot i = -1 \\ (-i)^2 = -1 \end{array}} \quad (3)$$

i наз. мнимой единицей

$$(4)\ \boxed{\begin{array}{l} x = \operatorname{Re} z \\ y = \operatorname{Im} z \end{array}} \begin{array}{l} \text{— вещ. часть к. ч.} \\ \text{— мнимая часть к. ч.} \end{array}$$

Опр. 2. К. ч. $\bar{z} = x - iy$ наз. комплексно сопряженным к. ч. $z = x + iy$

св-ва:

1) $\overline{\overline{z}} = z$; 2) $z\overline{z} = x^2 + y^2$;

3) $z + \overline{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z$

4) $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z$ – вещ. число.

Заметим, что $\forall z \neq 0$

$$\exists\; z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2} \quad (5):$$

$$z z^{-1} = 1$$

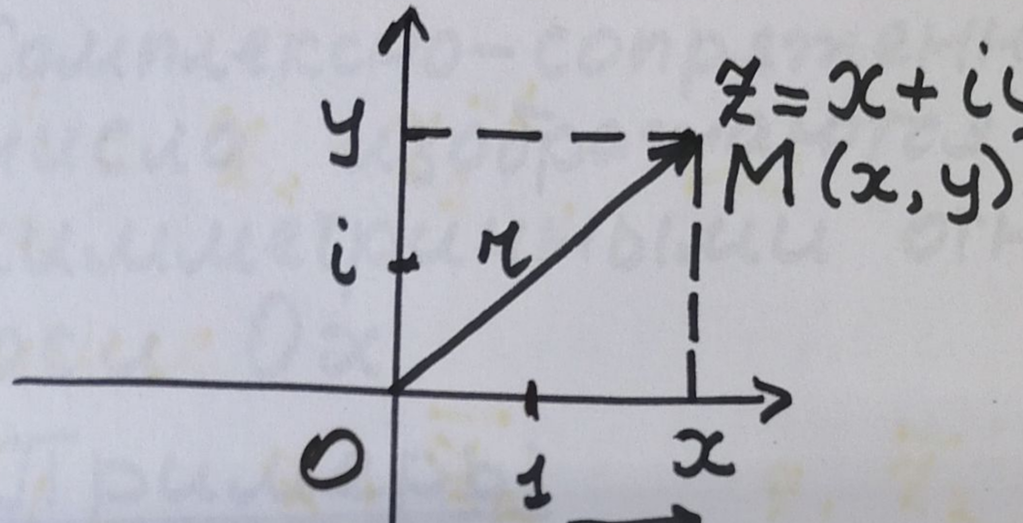
Если $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}, \text{ но}$$

проще

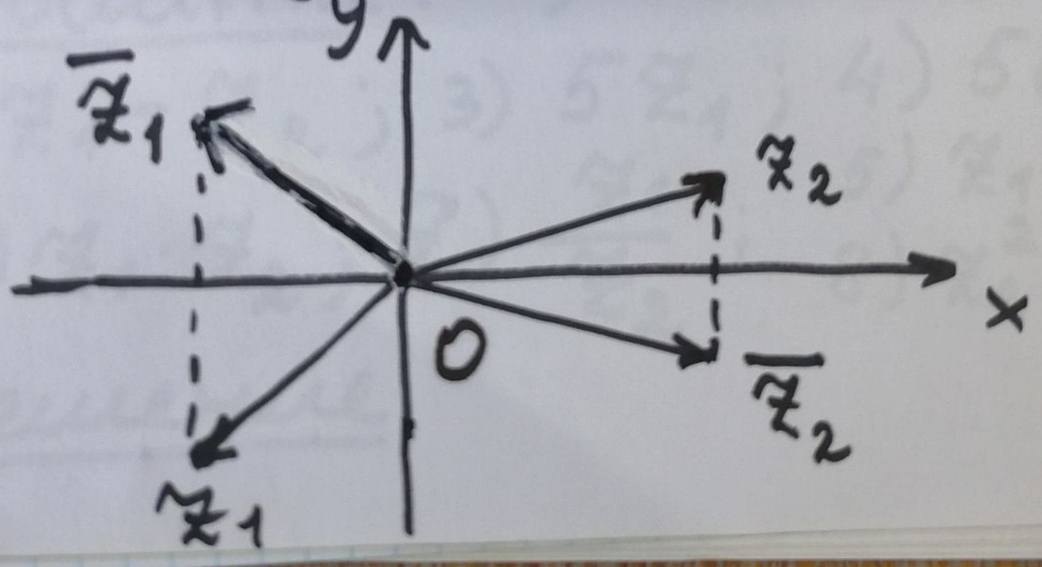
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}$$ — вещ.

Если изображать к. ч. $z = x + iy$ точками плоскости, то имеем



$$|\overrightarrow{OM}| = |z| = r \quad (6)$$

модуль к. ч. z. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



Комплексно-сопряженные числа изображаются т-ками, симметричными относит. оси Ox.

Примеры

$z_1 = 3+4i$; $z_2 = 2+i$.

Найти: 1) $z_1 + z_2$; 2) $z_1 - z_2$; 3) $5z_1$; 4) $5i \cdot z_1$; 5) $z_1 \bar{z}_1$; 6) $z_1 \cdot z_2$; 7) $\frac{z_1}{z_2}$; 8) z_2^2.

Решение

1) $z_1 + z_2 = 3 + 4i + 2 + i = 5 + 5i.$

2) $z_1 - z_2 = 3 + 4i - 2 - i = 1 + 3i.$

3) $5z_1 = 5(3 + 4i) = 15 + 20i.$

4) $5i \cdot z_1 = 5i(3 + 4i) = 15i + 20\underbrace{i^2}_{-1} =$

$= -20 + 15i.$

5) $z_1 \overline{z_1} = (3 + 4i)(3 - 4i) =$

$= 9 - 16\overbrace{i^2}^{=-1} = 9 + 16 = 25 = |z_1|^2 = z_1^2.$

6) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(2 + i) =$

$= 6 + 3i + 8i + 4\underbrace{i^2}_{-1} = 6 + 11i - 4 =$

$= 2 + 11i.$

7) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{2+i} = \frac{(3+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$= \frac{6-3i+8i-4\overbrace{i^2}^{=-1}}{4+1} = \frac{10+5i}{5} =$$

$$= 2+i$$

8) $$(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i$$

Решение квадратных уравнений

1) $x^2+1=0 \Longleftrightarrow x^2=-1$; $x=\pm\sqrt{-1}=$
$=\pm i$.

2) $x^2 + 9 = 0,$

$x^2 = -9,$

$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\,\sqrt{-1} = \pm 3i.$

3) $9x^2 - 6x + 37 = 0 \quad (ax^2 + bx + c = 0)$

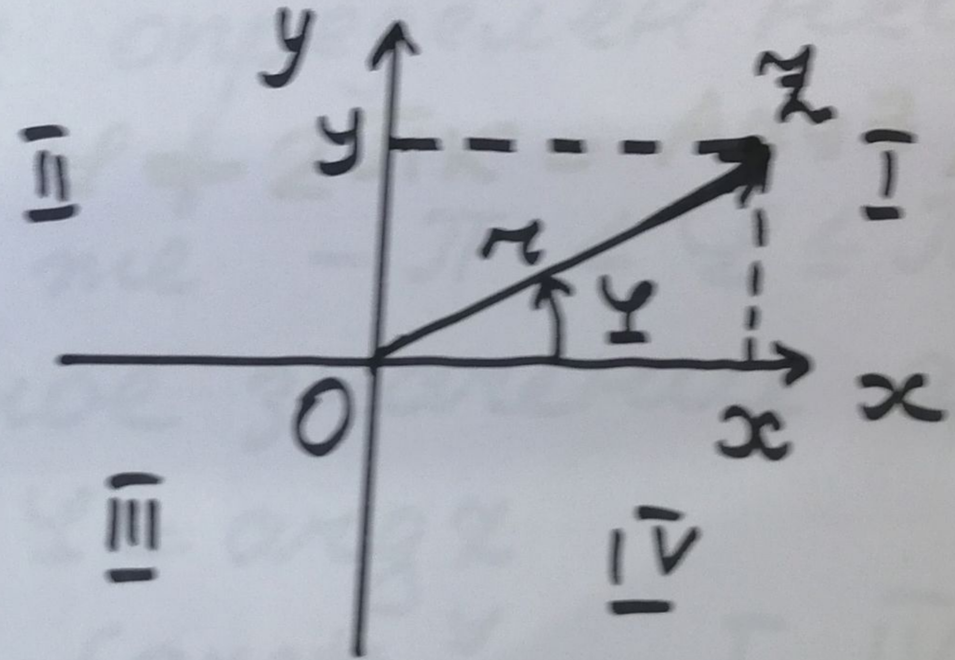
$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 9\cdot 37}}{9} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9\cdot(-36)}}{9} = \frac{3 \pm 3\cdot 6\cdot i}{9} =$$

$$= \frac{1}{3} \pm 2i$$

II. Тригонометрическая форма к. ч.



О. З. Угол между положит. полуосью Ox и радиус-вектором, изображающим к.ч., наз. аргументом к.ч.

$$\varphi = \mathrm{Arg}\, z \quad (7)$$

Arg z определен неоднозначно: $\varphi + 2\pi k = \mathrm{Arg}\, z$, $k \in \mathbb{Z}$

Если же $-\pi < \varphi \le \pi$, то это главное значение аргумента

$$\varphi = \arg z$$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \mathrm{I}, \overline{\mathrm{IV}} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \overline{\mathrm{II}} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \overline{\mathrm{III}} \\ \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0; & -\frac{\pi}{2}, x = 0, y < 0 \end{cases}$$

$z = 0$ — $\arg z$ не определен

$$z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \underbrace{r}_{|z|}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \quad (8)$$

наз. <u>тригонометрической</u> <u>формой к. ч.</u>

$$] \; z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)\big) = \ldots =$$

$$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$$

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) \quad (9)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right), \quad (10)$$

$z_2\neq 0$

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \quad (11)$$

Ф-ла Муавра

при $r=1$:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi \quad (12)$$

$n\in \mathbb{N}$

Извлечение корня целой положит. степени

] $w^n = z$ и

$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\Downarrow$$

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$\rho^n = r$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифм. корень)

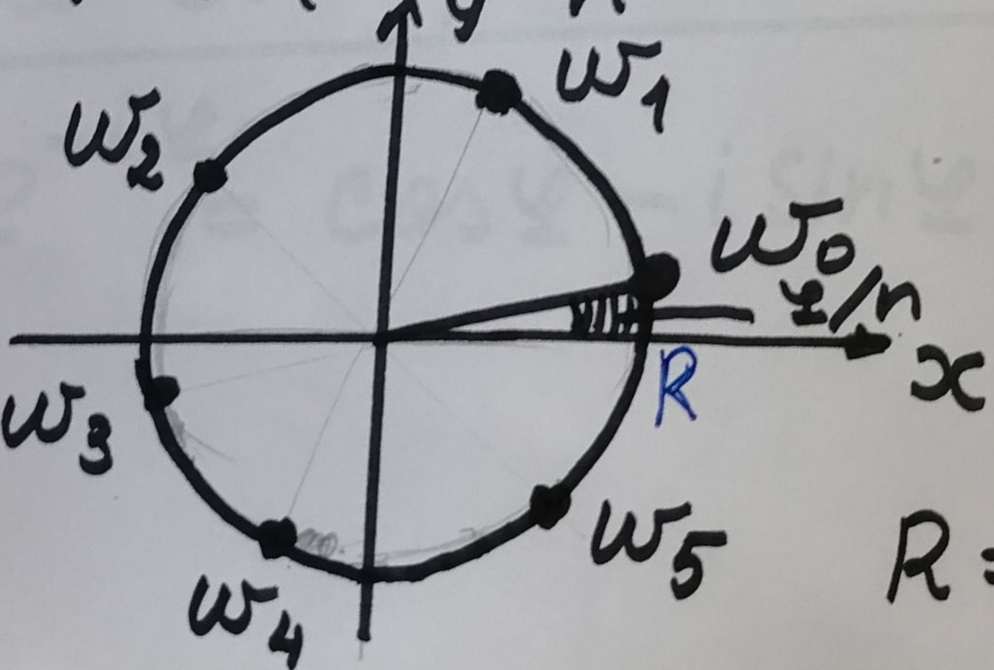
$$n\theta = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad (13)}$$

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$



$$R = \sqrt[n]{r} = \rho$$

III. Показательная форма к.ч.

О4. $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (14)$$

Ф-ла Эйлера

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} \overset{(11)}{=}$$

$$= e^{x}(\cos y + i\sin y).$$

Св-ва степени с **комплексным показат.**

1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

3) $(e^{z})^{n} = e^{nz}.$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \overset{(14)}{=}$$

$$= r e^{i\varphi}$$

$$z = r e^{i\varphi} \qquad (15)$$

Показательная форма к.ч

1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, $z_2 \neq 0$

3) $z^n = r^n e^{in\varphi}$

4) $w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$,

$k = 0, 1, \dots, n-1.$

<u>Зам.</u> 1) Из (14) и (15):

$$e^{i\pi} = -1$$

2)
$$\left.\begin{array}{l} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{array}\right| \Rightarrow$$

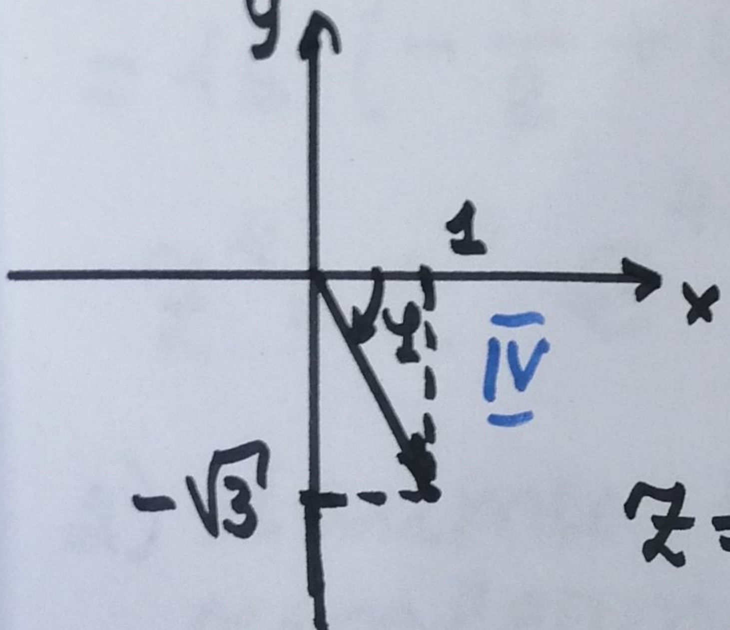
$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

(16)

примеры

1) $(1-\sqrt{3}\,i)^4 = ?$



$$r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \quad (\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3})$$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z^4 = 2^4\left(\cos 4\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 4\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 16\left(\cos\frac{-4\pi}{3} + i\sin\frac{-4\pi}{3}\right) = [\ \ldots\ ] =$$

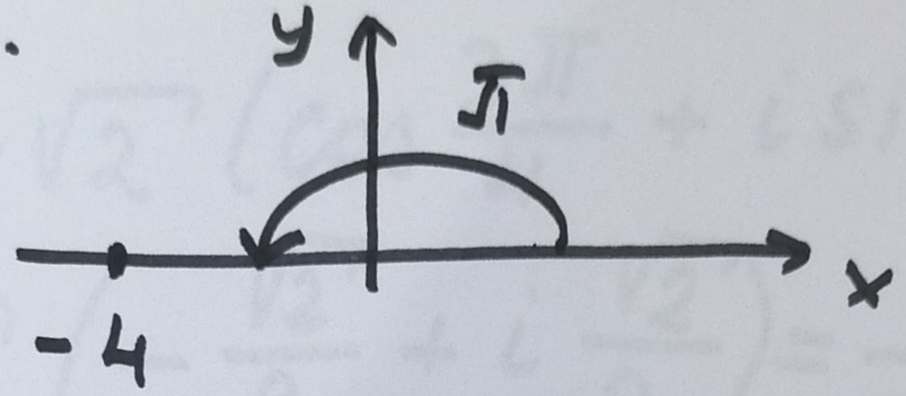
$$= 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 16\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + i\,8\sqrt{3}$$

$$z^4 = 2^4 \cdot e^{4\left(-\frac{\pi}{3}\right)i} = 16e^{-\frac{4\pi}{3}i} = 16e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

2) Найти все корни четвертой степени из числа „−4".



$$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\rho = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

$$\theta_k = \frac{\pi + 2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{1+i}$$

$$w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=$$

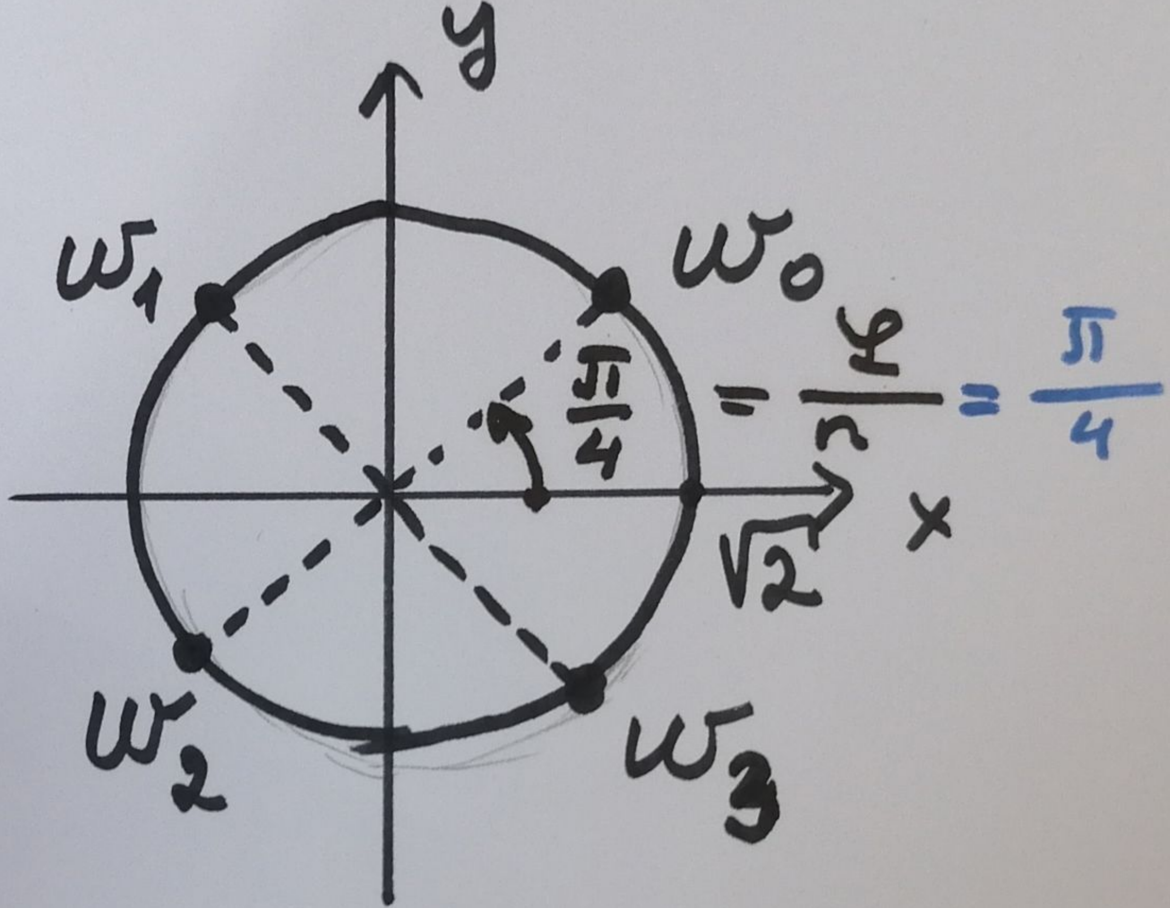
$$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i$$

$$w_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1-i$$

$$w_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i$$


y
x
w1
w0
w2
w3
π/4
= φ/n = π/4
√2