N

Q

R

C

Z

!

A

L

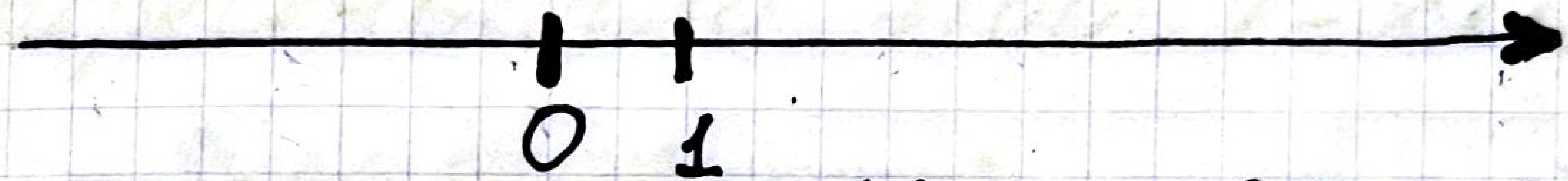
E

Глава I.

Введение в анализ

§1. Числовые ф-ции.

I Основные понятия



числовая ось

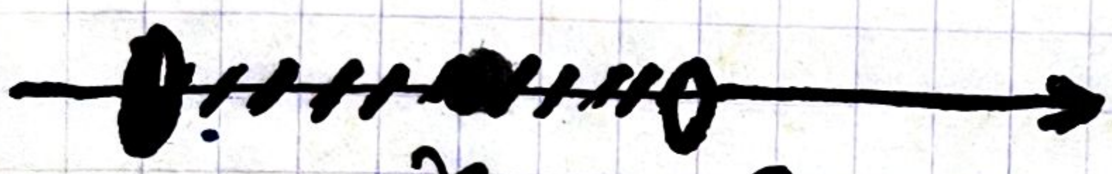
$(a;b)=\{x \mid a<x<b\}$ - интервал

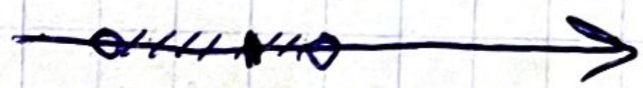
$(a;b]=\{x \mid a<x\le b\}$
$[a;b)=\{x \mid a\le x<b\}$ полуинтервалы

$[a;b]=\{x \mid a\le x\le b\}$ - отрезок

(промежутки) $\langle a;b\rangle$

О.1. Любой интервал, содержащий т. x_0 наз. окрестностью этой т-ки





$U(x_0)$

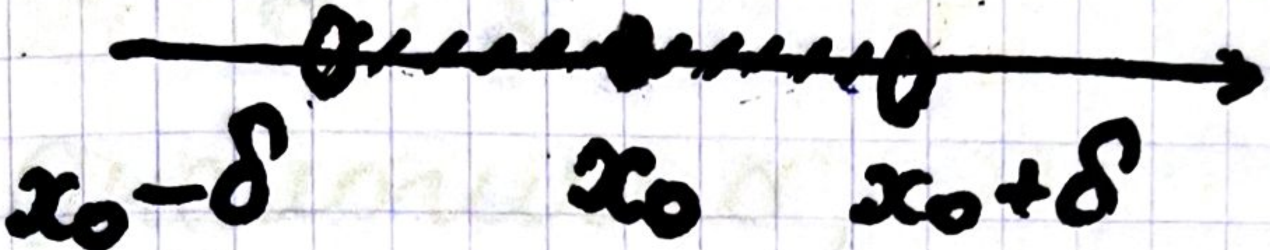
Δ, δ

симметричный интервал

$$(x_0-\delta;\ x_0+\delta)=\{x \mid \rho(x,x_0)<\delta\}$$

$$(\delta>0) \qquad =\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

наз. δ-окрестностью т. x_0



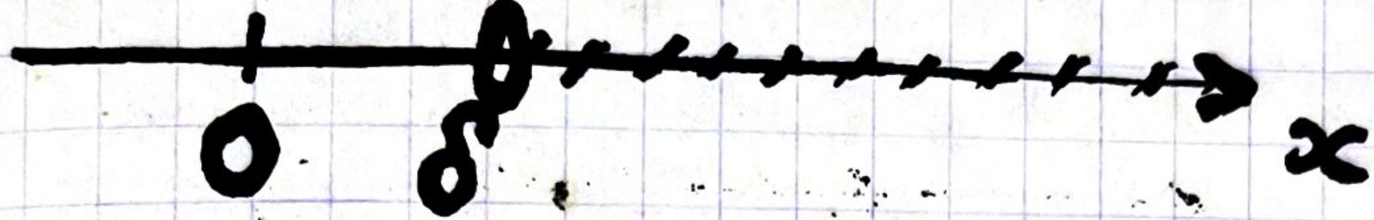
$U(x_0; \delta)$

О.2. δ-окрестностью т-ки „$+\infty$"

наз. ~~[illegible]~~

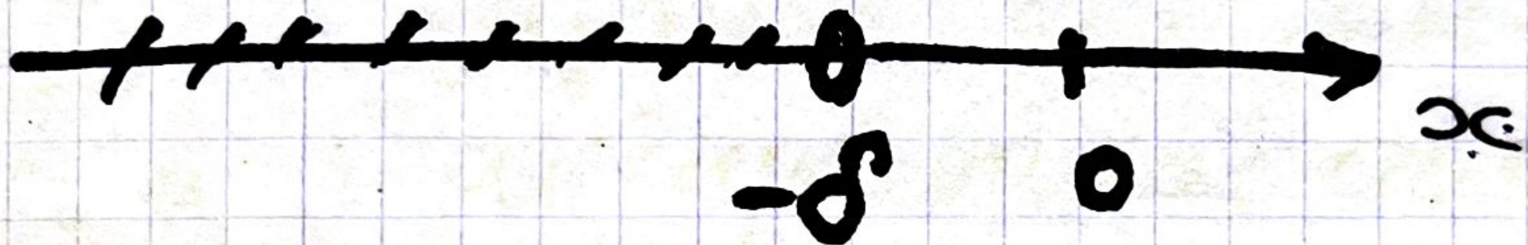
мн-во т-к вида

$U(+\infty; \delta) = \{x \mid x > \delta\}$



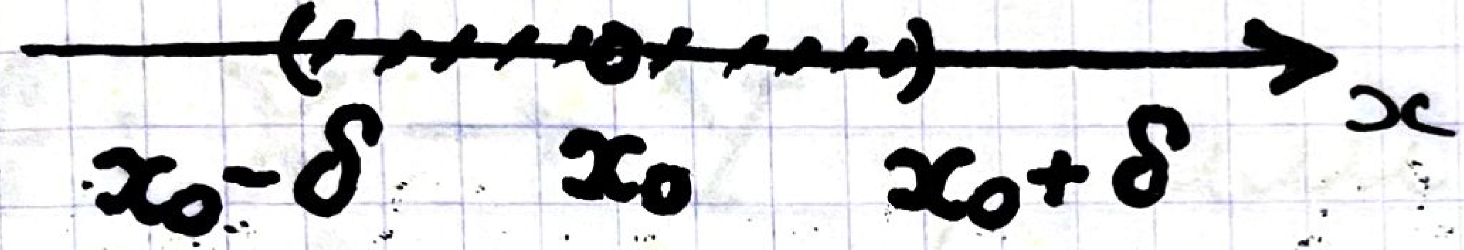
Аналогично,

$U(-\infty, \delta) = \{x \mid x < -\delta\}$



<u>О.3.</u> Выколотой или проколотой δ- окрестностью т. x_0 наз. её δ- окрестность из к-рой выброшена сама т. x_0

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$



<u>О.4.</u> $\exists$ заданы два мн-ва X и Y и правило f, ставящее в соответствие каждому эл-ту $x \in X$ <u>единственный</u> эл-т $y \in Y$. Тогда говорят, что задано

отображение мн-ва X в мн-во Y.

$f: X \to Y$, или

$X \xrightarrow{f} Y$.

<u>0.5</u>] $f: X \to Y$, где $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$. Тогда говорят, что задана числовая ф-я f.

$y = f(x)$, $x \in X$

Примеры: $y = \sin^2 x$;

$y = \sqrt[3]{x^2+3}$ и т.п.

<u>О.б.</u> $\exists$ задано отображение мн-ва натур. чисел в мн-во вещественных чисел. Тогда говорят, что задана числовая последовательность.

$f(n) = x_n$ $\quad \{x_n\}, \{a_n\}$

$a_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$: $\{a_n\}$

$\{x_n\}$:

$x_n = \sin\dfrac{1}{n}$ и т.п.

<u>О.7.</u> Числовая ф-я наз.

1) ограниченной сверху на мн-ве X, если

$\exists$ число M:

$$f(x) \le M \quad \forall x \in X.$$

г) ограниченной снизу на мн-ве X, если $\exists$ число m:

$$f(x) \ge m \quad \forall x \in X$$

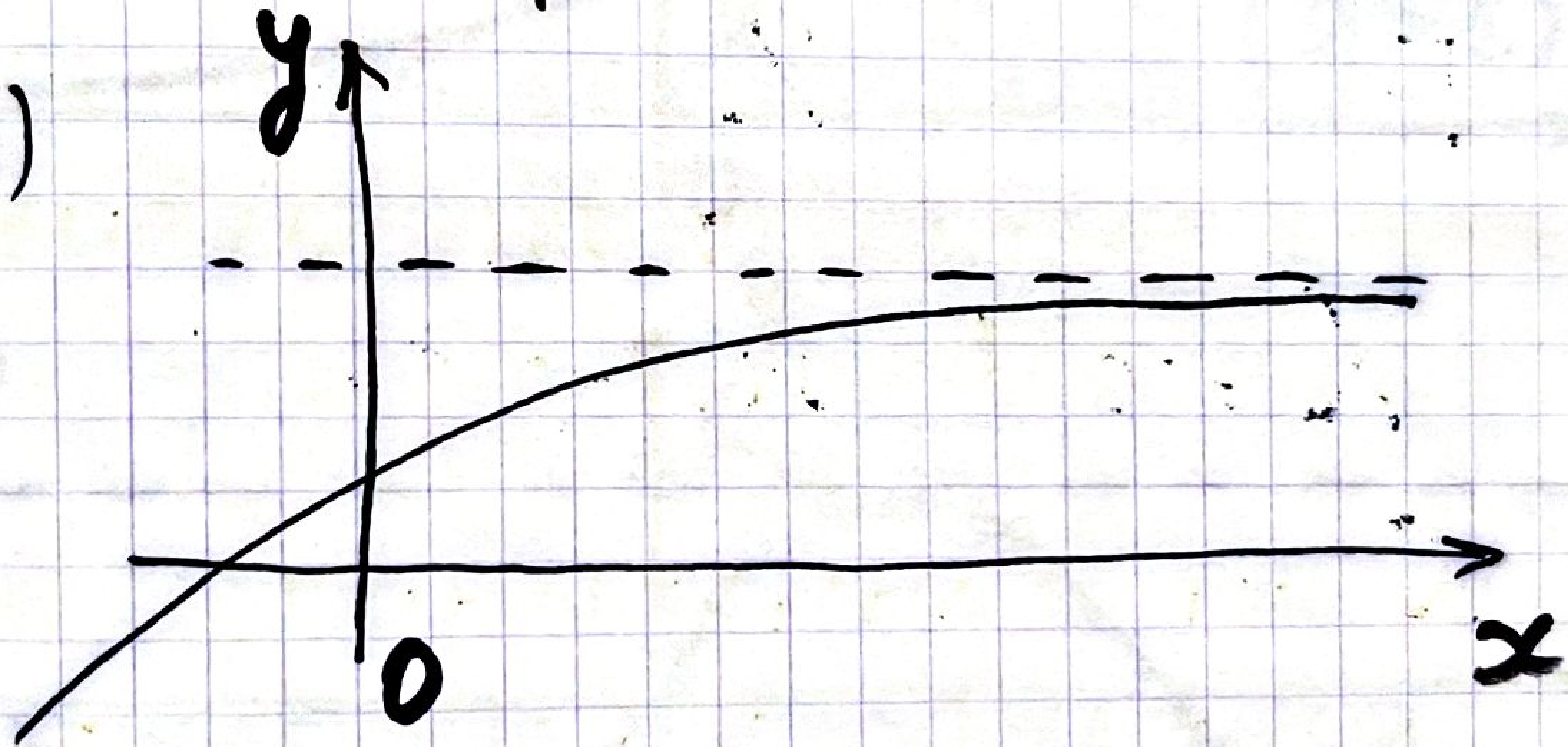
3) Ограниченной на X, если она ограничена и сверху и снизу, т.е.

$\exists$ числа m и M:

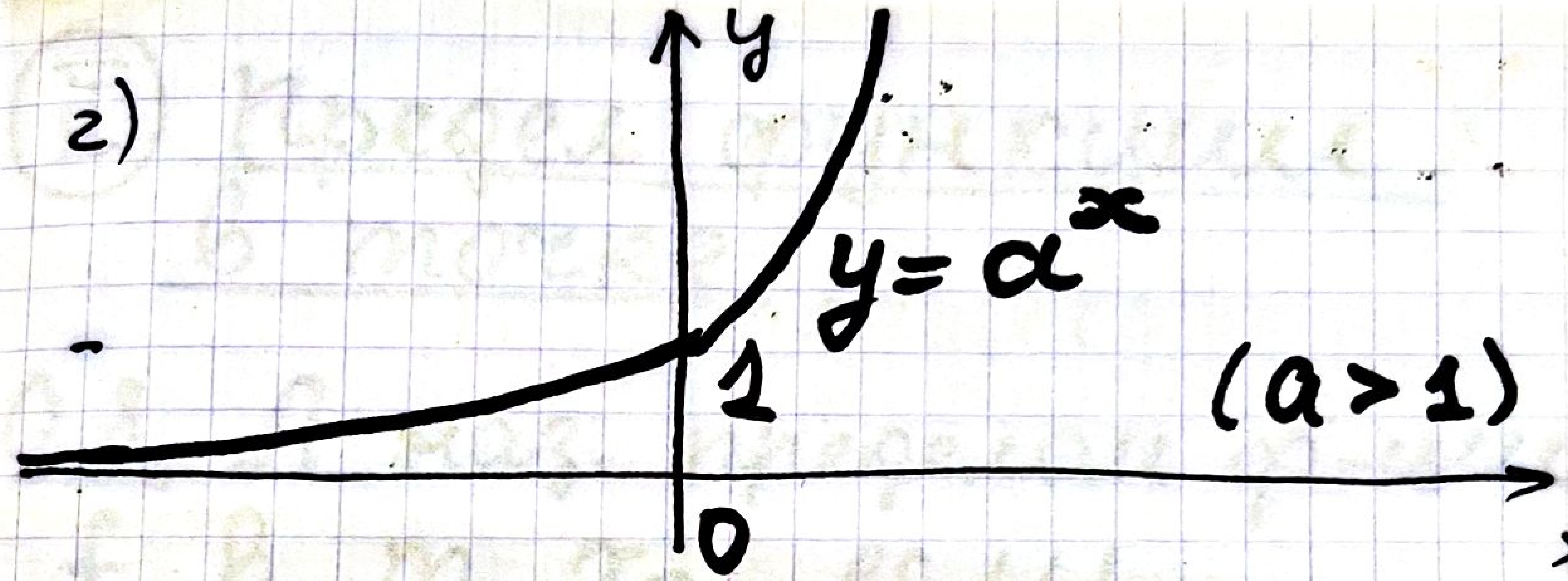
$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in X$$

Геометрически:

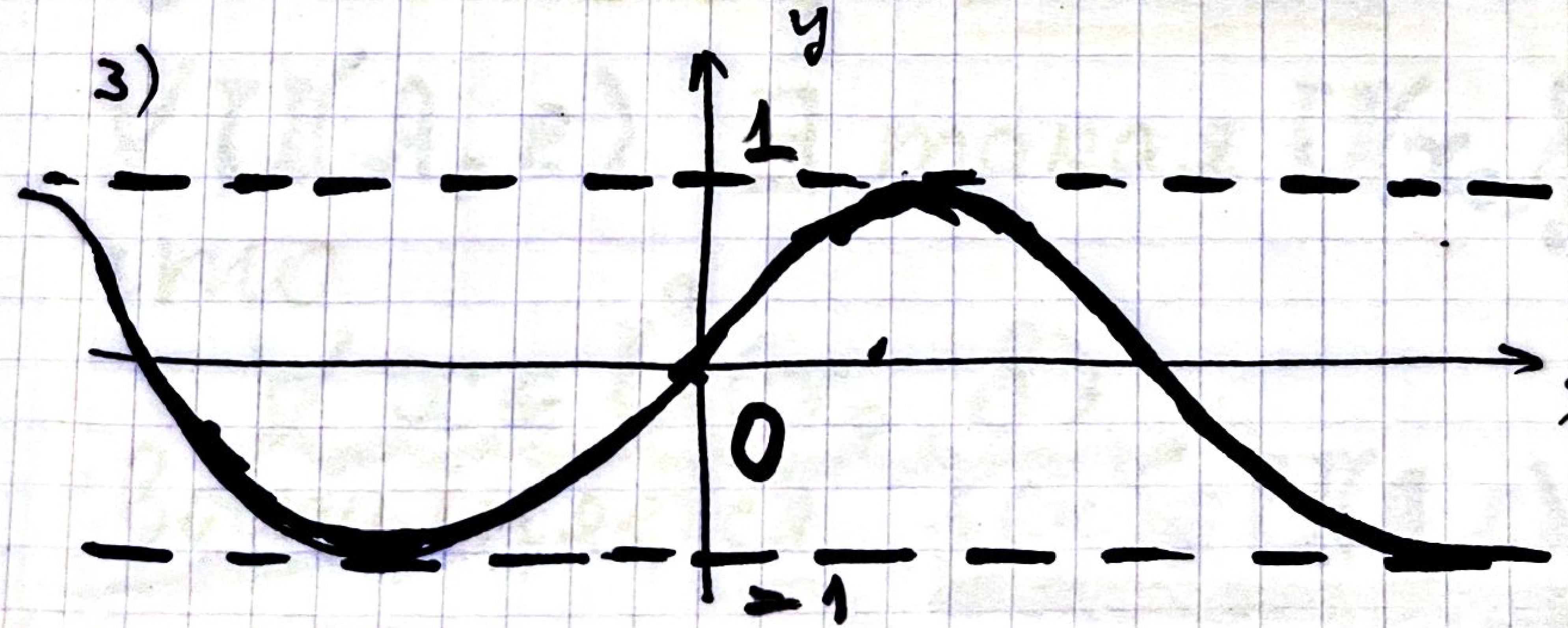
1)



2)



3)



II. Предел функции в точке.

0.8. A наз. пределом ф-ции f в т. x_0, если

$\forall U(A, \varepsilon)$ $\exists$ такая $U(x_0, \delta)$, что

$\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$

выполняется $f(x) \in U(A, \varepsilon)$

О.8.[a] $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$

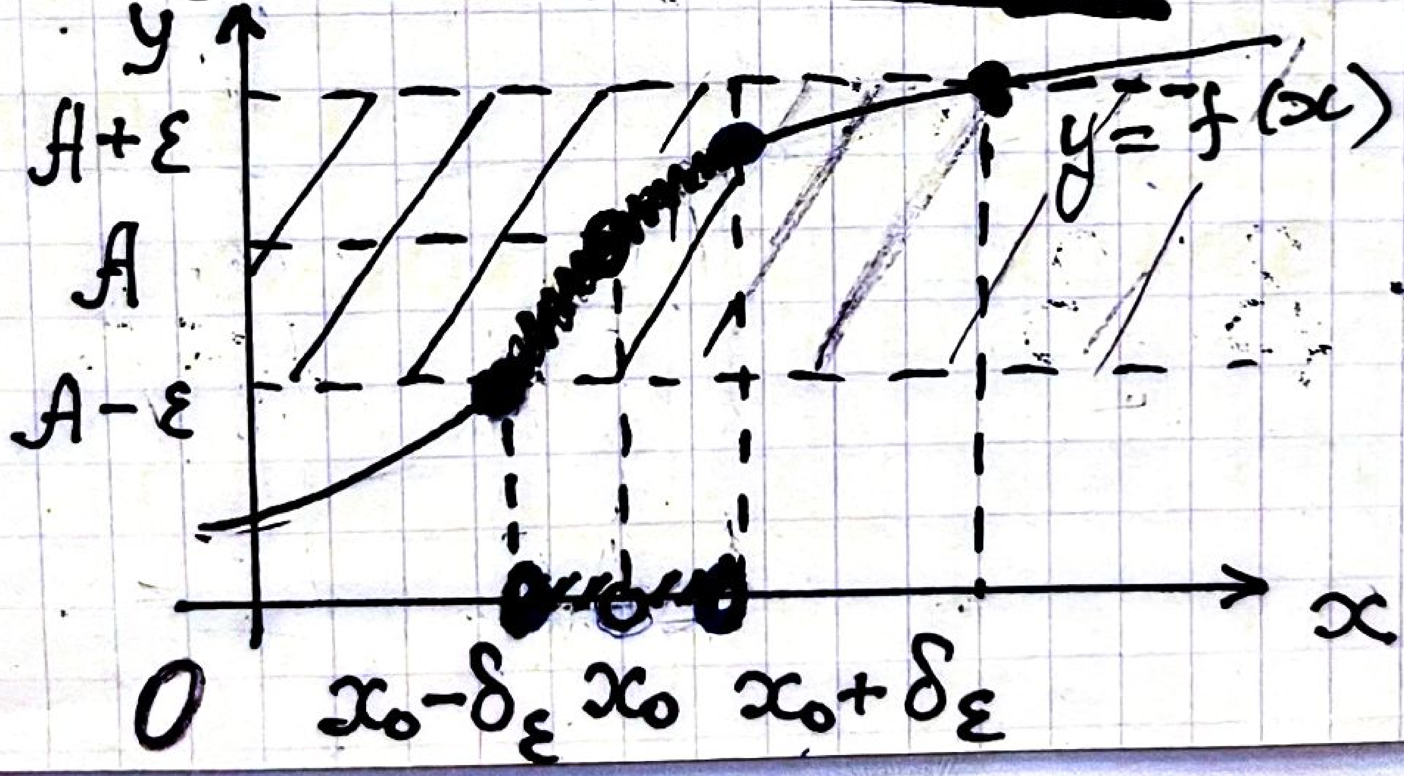
I $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$.

О.8.[a] Число A наз. пределом ф-ции f в т. x_0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ число $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех x, для к-рых выполняется нер-во

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

выполняется и нер-во

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$



$\rceil$ $x_0 \in \mathbb{R}$, $A = -\infty$

<u>О.8°.</u> $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех x, уд-х нер-ву $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ выполняется и нер-во

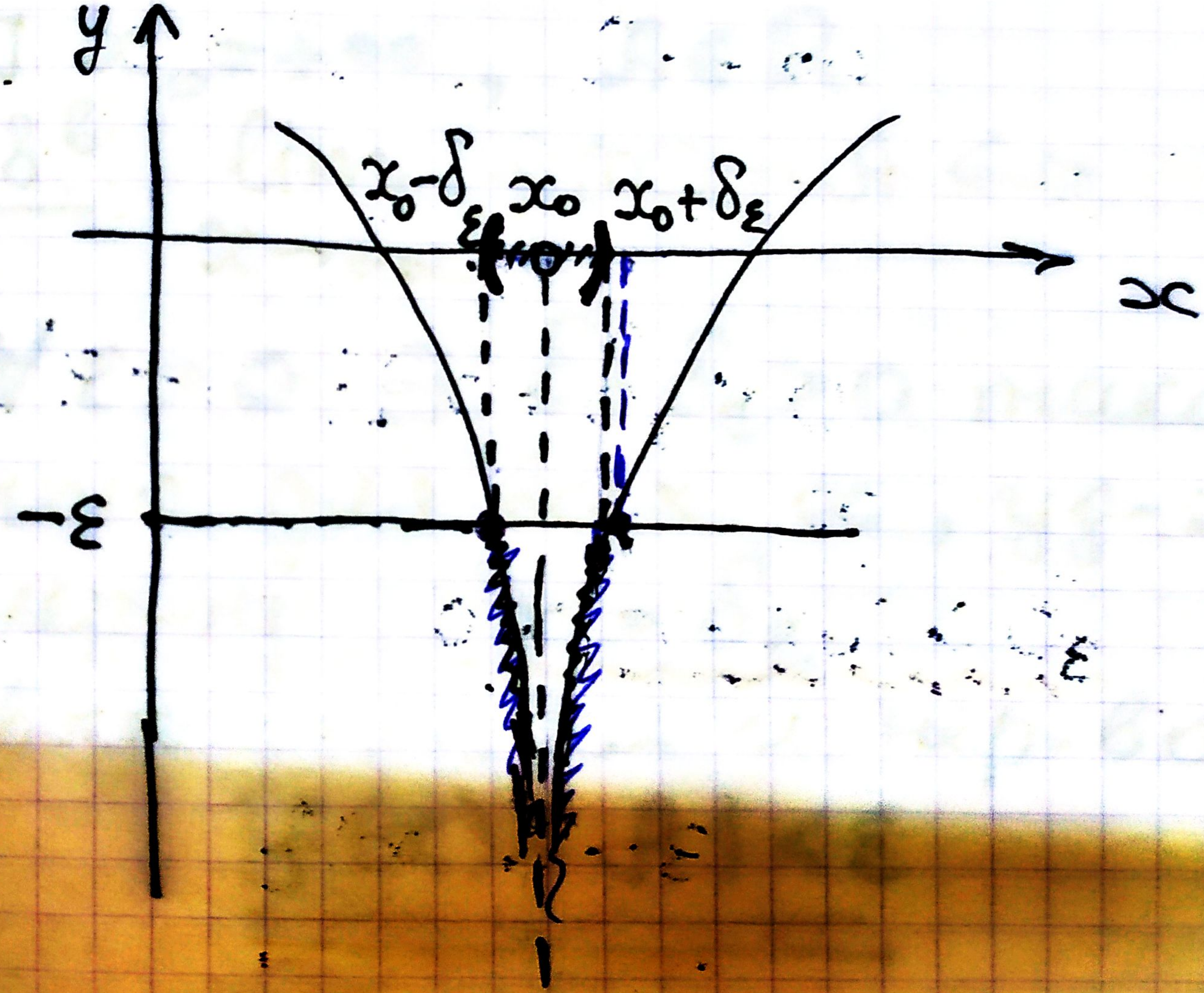
$$f(x) < -\varepsilon$$

] $x_0 = +\infty$, $A \in \mathbb{R}$.

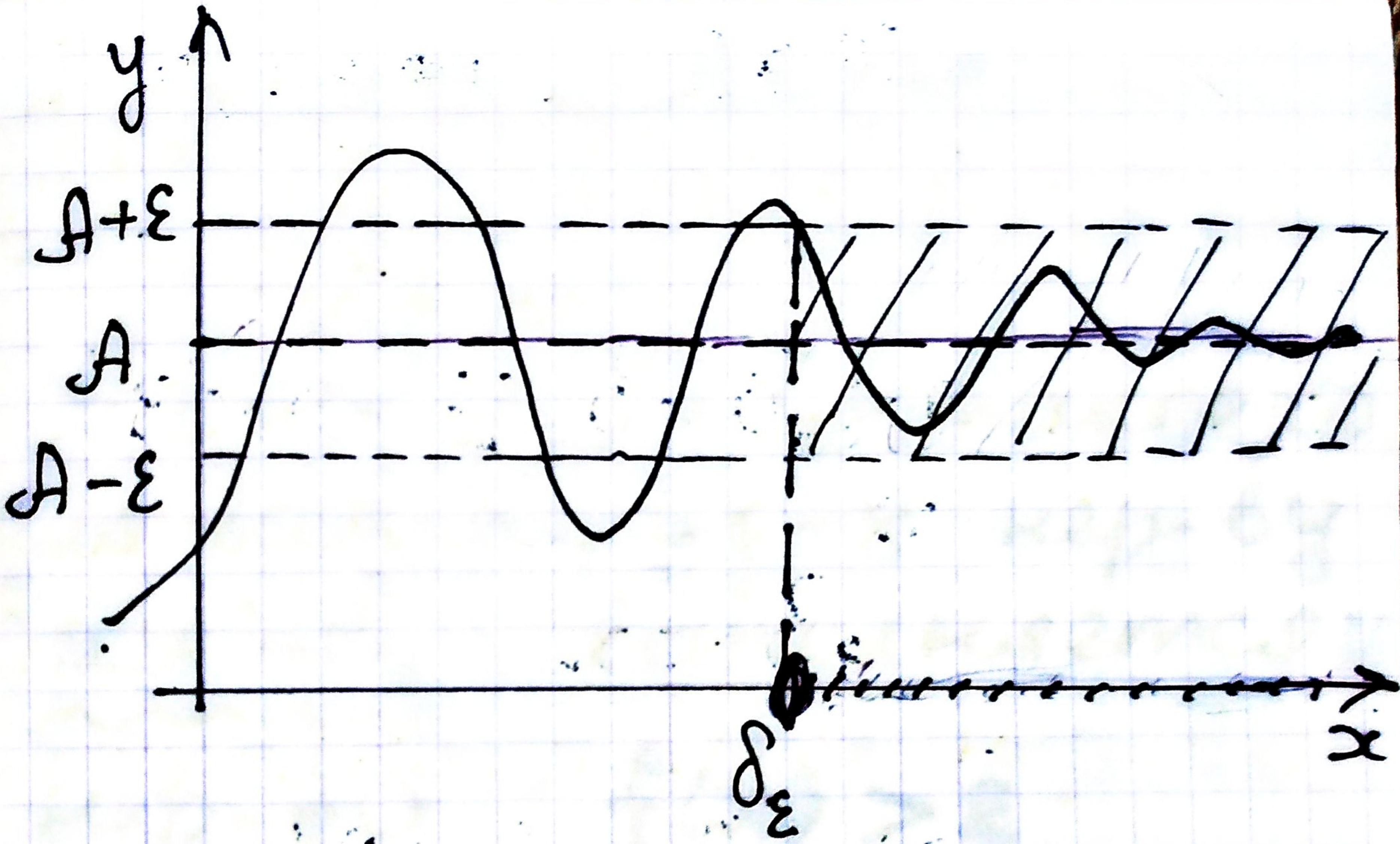
<u>О. 8.</u>[б] $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех x, уд-х нер-ву $x > \delta_\varepsilon$ выполняется и нер-во

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$



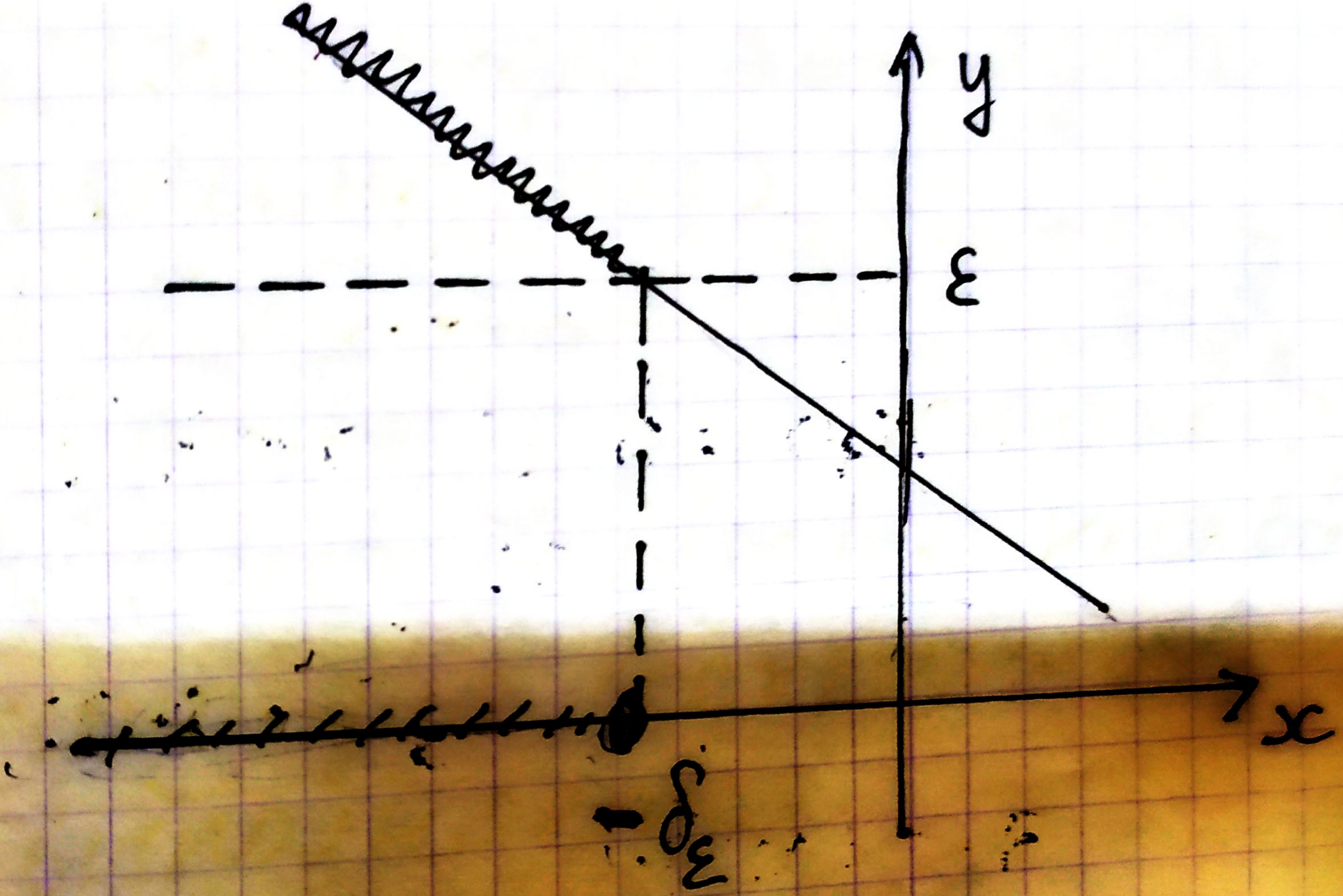
y
x
$x_0-\delta_\varepsilon$
x_0
$x_0+\delta_\varepsilon$
$-\varepsilon$


y
A+ε
A
A-ε
x
δε

] $x_0 = -\infty$, $A = +\infty$

<u>О.8²:</u> $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех x, уд-х нер-ву $x < -\delta_\varepsilon$ выполняется и нер-во $f(x) > \varepsilon$


y
ε
x
δε

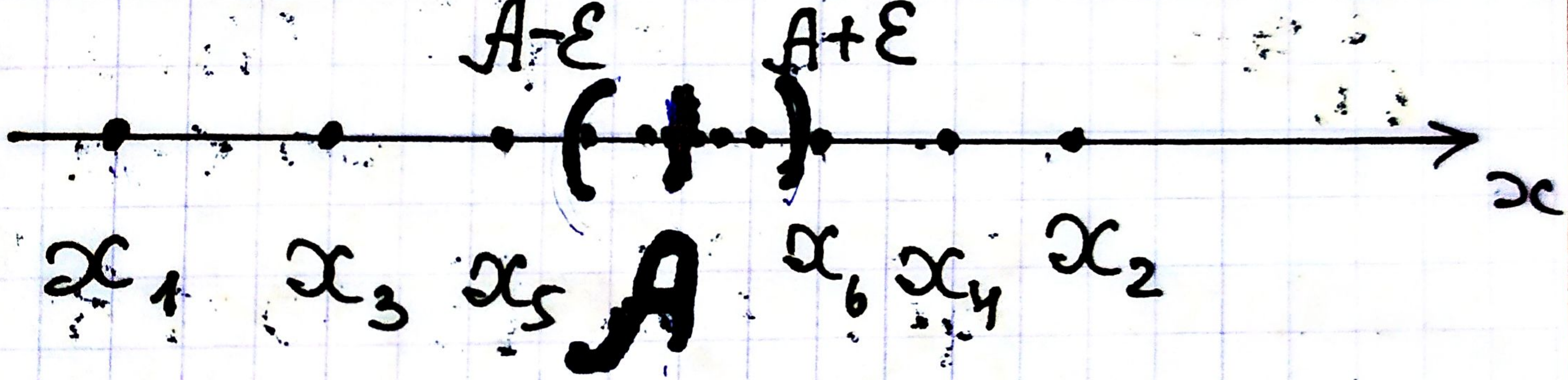
0.9. (Предел последовательности).

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A, \quad A \in \mathbb{R}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N_\varepsilon$ такой, что для всех $n: n > N_\varepsilon$ выполняется

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

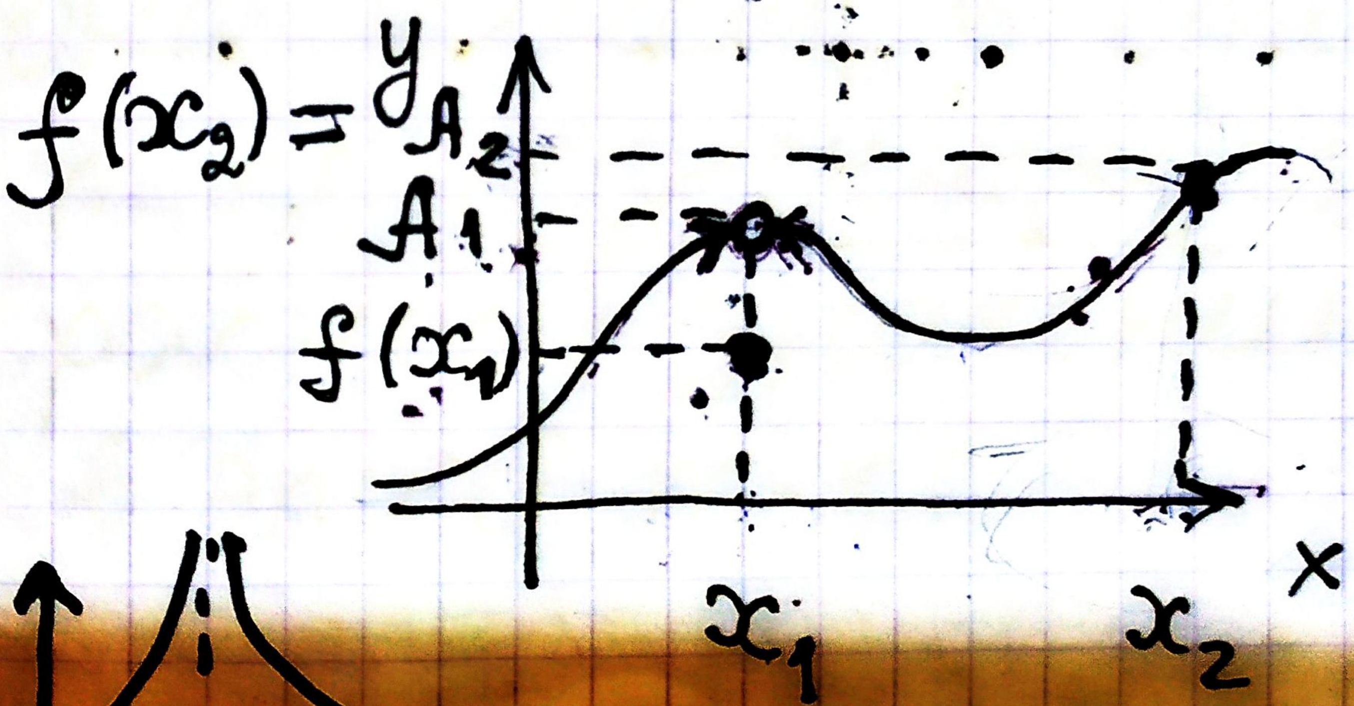
геометрически:

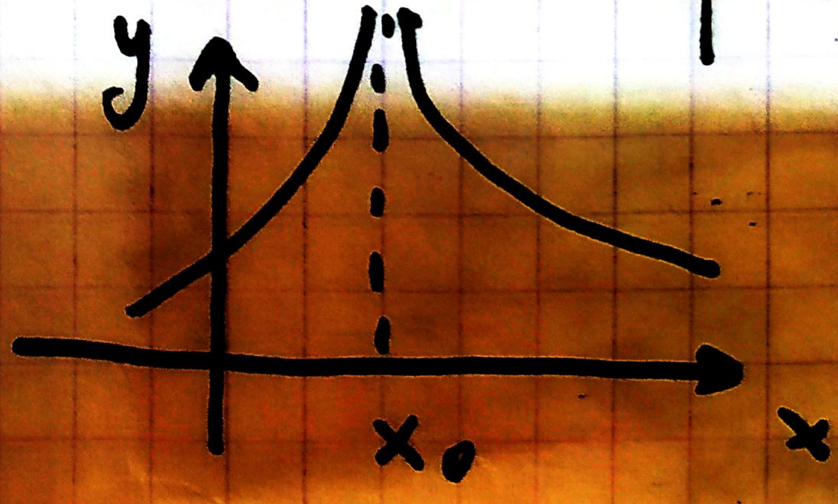


$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

III. Непрерывность ф-ции в точке





0.10. Ф-я f наз. непрерывной в т. x_0, если она имеет в этой т-ке конечный предел, равный значению ф-ции в этой т-ке

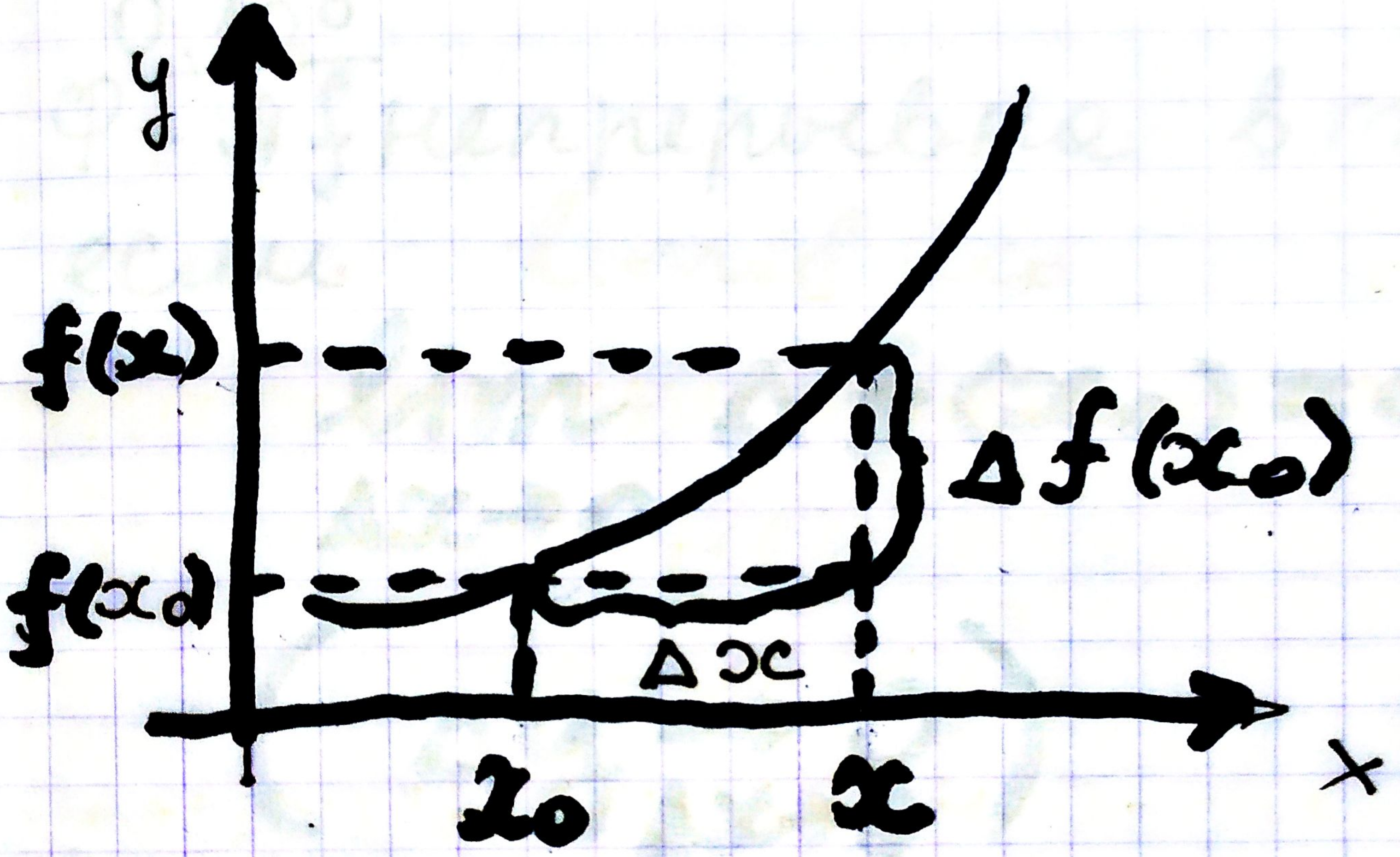
$$\exists \underbrace{\lim_{x \to x_0}}_{\text{кон.}} f(x) = f(x_0)$$

0.10^{a} f непрер. в т. x_0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех x, удов-х нер-ву

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

выполняется нер-во

$$|f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{=A}| < \varepsilon.$$



$\Delta x = x - x_0$ – приращение арг.

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$

Δy

О.10б

Ф-я f неперервна в т. x_0, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

$$\left(\Delta y \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0 \right)$$

IV. Теоремы о пределах

Т.1. Если предел ф-ции в т. x_0 $\exists$, то он единственный.

Т.2. Если ф-я имеет конечный предел в т. x_0, то $\exists\, U(x_0)$ (м.б. $\overset{\circ}{U}(x_0)$), в которой ф-я ограничена.

Д-во.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$: для всех x : $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ (т.е. для $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_\varepsilon)$), выполняется и

$$|f(x) - A| < \varepsilon \iff$$

$$\iff -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \iff$$

$$\iff \underbrace{A - \varepsilon}_{m} < f(x) < \underbrace{A + \varepsilon}_{M}$$

Т.3. (Об инверсии знака ф-ции).

Если ф-я имеет в т. x_0 предел, отличный от нуля, то $\exists$ окрестность этой т-ки (м.б. $\mathring{U}(x_0)$), в которой ф-ция не равна нулю и имеет тот же знак, что и её предел.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0:$

для всех $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_\varepsilon)$

выполняется и

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{A - \varepsilon \overset{1)}{<} f(x)}\underbrace{< A + \varepsilon}_{2)} \quad (*)$$

1) Если $A > 0$, то возьмем

$\varepsilon = A$. Тогда из (*):

1) $\underline{0 < f(x)}$.

2) Если $A<0$, то возьмем $\varepsilon=-A$ и тогда из (*): $f(x)<0$.

T.4. Если $\exists$ кон. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$, то ф-я $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена в $U(x_0)$

б. м.

§2. Функции, бесконечно малые в точке.

О1. Функция $\alpha(x)$ наз. б. м. в т. x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

<u>0.1</u>[a] $\alpha(x)$ — б.м. в т. $x_0 \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ \delta=\delta_\varepsilon>0$ такое, что для всех x, уд-х нер-ву

$$0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$$

выполняется и

$$|\alpha(x)|<\varepsilon$$

Упр. $\alpha(x)$ — б.м. в т. $\pm\infty$.

Зам.

Т. 1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \underset{\text{КОН}}{\Leftrightarrow}$

$f(x) = A + \alpha(x)$, где

$\alpha(x)$ – б. м. в т. x_0

Д-во. По опр. предела

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$: для всех

x, уд-х нер-ву $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

выполняется: $|f(x) - A| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \alpha(x) = f(x) - A$ — б.м. в т. x_0.

Т.2. Сумма конечного числа ф-й, б.м. в т. x_0 есть ф-я, б.м. в т. x_0.

Д-во. $\rceil$ $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — б.м. в т. x_0, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_{1\varepsilon}, \delta_{2\varepsilon} > 0$:

для всех x, уд-х нер-ву

$$0 < |x - x_0| < \delta_{1\varepsilon}$$

выполняется и

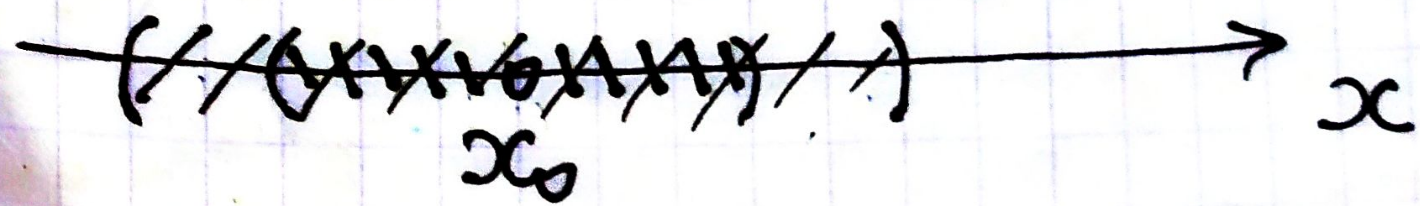
$$|\alpha_1(x)| < \varepsilon, \quad (*)$$

а для всех x, уд-х нер-ву

$$0 < |x - x_0| < \delta_{2\varepsilon}$$

выполняется и

$$|\alpha_2(x)| < \varepsilon. \quad (**)$$



тогда для всех x, уд-х нер-ву $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$.

($\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{1\varepsilon}, \delta_{2\varepsilon}\}$) выполняются и (*) и (**) и $\Rightarrow$

$$|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

т.е.

$$|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| < 2\varepsilon; \quad \lim_{x \to x_0} (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = 0$$

Т.3. Ф-я, б.м. в т. x_0, ограничена в некоторой $U(x_0)$.

Т.4. Произведение ф-ции, ограниченной в окрестности т. x_0, на ф-ю, б.м. в т. x_0 есть ф-я, б.м. в т. x_0.

Т.5. Произведение конечного числа ф-й; б.м. в т. x_0

Og. $\beta(x)$ – б.б. в т. x_0

$$\lim_{x\to x_0} \beta(x) = \infty$$

Og.[a]: $\beta(x)$ – б.б. в т. $x_0 \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0:$

$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$|\beta(x)| > \varepsilon$

Т.6. Ф-я $\alpha(x)$ - б.м. в т. x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - б.б. в т. x_0.

] $\alpha(x)$ - б.м. в т. x_0, т.е. $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta_\varepsilon > 0$:

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

$$|\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha(x)|} = \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$$

есть ф-я, б.м. в т. x_0.

§3. Сравнение б.м.

(см. конец б.ф.)

<u>О.1.</u> $\rceil$ $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – ф-ции, б.м. в т. x_0. Операция вычисления

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$$

наз. сравнением б.м.

1. $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$$

в т. x_0

$\alpha_1(x) = o(\alpha_2(x))$ ~~при $x \to x_0$~~

2. $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$$

$\alpha_2(x) = o(\alpha_1(x)), \ x \to x_0$

3. $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = K \quad (K \neq 0, K \neq \infty)$$

$\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – б.м.
одного порядка малости.

3[a]. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$,

$$\alpha_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha_2(x)$$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^{n}(x)} = k$, $k\neq 0;\ k\neq\infty$

$\alpha_1(x)$ – б.м. n-го порядка

малости по отношению к б.м. $\alpha_2(x)$ в т. x_0.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$ - не $\exists \Rightarrow$

б.м. $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ не сравнимы.

<u>Т. 1.</u> $\alpha_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha_2(x) \Leftrightarrow$

$(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)) = o(\alpha_1(x))$

$(\alpha_1(x)-\alpha_2(x)) = o(\alpha_2(x))$

Т.2. Пусть $\alpha_1(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \alpha_2(x)$ и $\beta_1(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \beta_2(x)$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то $\exists$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$$

О.2. Если б.м. в т. x_0 $\alpha(x)$ представима в виде

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)), \quad (+)$$

то $\beta(x)$ наз. главной частью б.м. $\alpha(x)$.

Зам.

1) $A(x-x_0)^k$, $A = const$, $k = const$

2) $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ , т.е.}$$

$$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$$

$$a^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \ln a$$

$$\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x$$

§ 4. Операции над ф-ями, имеющими предел в точке.

Т. 1. Пусть $\exists$ кон. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$. Тогда $\exists$

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) \overset{\text{И}}{=} A_1 + A_2$$

Д-во.

$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x)$,

$f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x)$, где

$\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ – б.м. в т. x_0.

Тогда

$$f_1(x) + f_2(x) = \overbrace{A_1 + A_2}^{\text{число}} + \underbrace{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)}_{\text{б.м. в т. } x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2$$

Следствие 1. Сумма кон. числа ф-й, непрер. в т. x_0 есть ф-я, непрер. в т. x_0.

Д-во $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) \overset{Т. 1.}{=}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) + \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) \overset{О. непр}{=}$

$= f_1(x_0) + f_2(x_0) = (f_1(x) + f_2(x))\Big|_{x_0}$.

Т.2. $\rceil$ $\exists$ кон. $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=A_1$

$\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A_2$. Тогда $\exists$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)\overset{\text{и}}{=}A_1\cdot A_2$$

Сл. 2. Произведение кон. числа ф-й, непрер. в т. x_0, непрер. в т. x_0.

Сл. 3. $C\,f(x)$

Т.3. Пусть $\exists$ кон. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$,

$\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2 \neq 0$. Тогда

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ и $= \dfrac{A_1}{A_2}$

Сл.4. ..... $f_2(x_0) \neq 0$

$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

§5. О пределе последовательности.

$\{x_n\}$, $\{a_n\}$

<u>О.1.</u> Последовательность $\{x_n\}$ наз.

1) ограниченной сверху, если $\exists$ число M:

$$x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2). ограниченной снизу, если $\exists$ число m:

$$x_n \geqslant m \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) ограниченной, если....

$$m \leq x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

О.2. Последовательность $\{x_n\}$ наз.

1) монотонно возрастающей, если $x_{n+1} \geqslant x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) монотонно убывающей, если $x_{n+1} \leqslant x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3) монотонной, ...

4) строго монотонной, ...

I. 1) Монотонно возрастающая, огр. сверху последовательность имеет кон. предел;

2) монотонно возрастающая, неограниченная сверху последовательность имеет предел, равный „$+\infty$"

3)

4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

a , a

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\ln a$