## §11. Вещественное линейное пространство.

**О.1.** Мн-во $M$ эл-ов произвольной природы, в к-ром заданы 2 операции:

1) $\forall\, x_1, x_2 \in M$ задан элемент

$$x_1 + x_2 \in M,$$

называемый суммой эл-ов $x_1$ и $x_2$;

2) $\forall\, x \in M$ и $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ задан эл-т $\lambda x \in M$,

наз. . . . ,

причем выполняются
след. аксиомы:

1) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

2) $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$

3) $\exists$ эл-т $\tilde{0} \in M$:

$x + \tilde{0} = x \quad \forall\, x \in M$

4) $\forall\, x \in M \quad \exists\, -x \in M$:

$$x + (-x) = \theta$$

5) $1 \cdot x = x \quad \forall\, x \in M$

6) $\lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1 \lambda_2) x$

7) $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$

8) $(\lambda_1 + \lambda_2) x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$

наз. линейным вещественным пространством и обозначается $\mathcal{L}$. Элементы $x \in M$ наз. векторами.

Примеры

О.2.] Векторы $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{L}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Выражение вида

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \qquad (1)$$

наз. линейной комбинацией в-ров.

О.3. Система в-ров наз. линейно зависимой, если $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 > 0,$

а $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \tilde{0}$ (2)

в противном случае система в-ров наз. линейно независимой.

0.4. Базисом линейного пр-ва $L$ наз. любая упорядоченная система в-ров

$e_1, e_2, \dots, e_n$:

1) она линейно независима;

2) $\forall x \in \mathcal{L}$ представим в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, \quad (3)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$.

Коэффициенты разл. (3) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ наз. координатами в-ра $x$ в данном базисе.

Будем писать:

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

<u>Зам.</u> Базис есть максимальное число лин.

нез. в-ров простран-
ства $\mathcal{L}$.

2. . . .

0.5. Число в-ров базиса наз. размерностью линейного пр-ва.

0.6. Линейное пр-во столбцов, состав-

ленных из $n$ вещ.
чисел

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$ для кото-

рых

$$x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} \xi_1^1 + \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_n^1 + \xi_n^2 \end{pmatrix},$$ а

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 \\ \vdots \\ \lambda \xi_n \end{pmatrix}$$

наз. $n$-мерным арифметическим пр-вом и обозн. $\mathbb{R}^n$.

Пример базиса $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>О.7.</u> Если $\forall$ в-ров $x$ и $y \in \mathcal{L}$ поставлено в соответствие число $xy$, причем

1) $xy = yx$;

2) $(\lambda x)y = \lambda(x \cdot y)$

3) $(x+y)z = xz + yz$,

то говорят, что задано скалярне произведение в-ров

**О.8.** Вещественное линейное пр-во $L$

наз. евклидовым, если в нем задано скалярное произведение так, что

$$xx \geq 0 \text{ и } xx = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}.$$

<u>09</u>. В-ры $x$ и $y$ наз. ортогональ-

ными, если $xy=0$.

О.10. Базис $e_1, \ldots, e_n$ наз. ортонормированным, если

$$e_i e_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$x_1 x_2 = \xi_1^1 \xi_1^2 + \xi_2^1 \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^1 \xi_n^2$$

в ортонорм. базисе

# §12. Линейные отображения и матрицы

<u>О.1.</u> ] $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ – линейные пр-ва. Отображение

$$\widetilde{A} : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2 \quad (1)$$

наз. оператором, действующим из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$.

<u>О.2.</u> Оператор $\widetilde{A}: L_1 \to L_2$ наз. линейным, если

1. $\widetilde{A}(x_1 + x_2) = \widetilde{A}(x_1) + \widetilde{A}(x_2)$
2. $\widetilde{A}(\lambda x) = \lambda \widetilde{A}(x)$

] $\widetilde{A}$ – линейное отобр.

$L^n \to L^m$ и

$e_1, \dots, e_n$ — базис $\mathcal{L}^n$

$p_1, \dots, p_m$ — базис $\mathcal{L}^m$

и $\exists$

$$\begin{cases} \tilde{A}e_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \\ \tilde{A}e_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{A}e_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \end{cases} \quad (2)$$

т.е.

$$(2^a)\quad \tilde{A}e_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \quad j=1,2,\dots,n$$

<u>О.3.</u> Прямоугольная таблица из $mn$ чисел, содержащая $m$ строк и $n$ столбцов наз. $m\times n$ матрицей и

обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Числа $a_{ij}$ наз. элементами матрицы

Т. обр., коэффициенты разложений (2) образуют матрицу

---

$\exists\ x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$

а

$\tilde{A}x = \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \ldots + \eta_m p_m$

(+)

С другой стороны,

$$\tilde{A}x = \tilde{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = [\text{лин}] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \tilde{A}(e_j) = [2^{\text{а}}] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i\right) = [\dots] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \left( \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_{ij} \right) \quad (++)$$

Сравнивая (+) и (++), получим

$$(4) \begin{cases} \eta_1 = \xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{12} + \ldots + \xi_n a_{1n} \\ \eta_2 = \xi_1 a_{21} + \xi_2 a_{22} + \ldots + \xi_n a_{2n} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \eta_m = \xi_1 a_{m1} + \xi_2 a_{m2} + \ldots + \xi_n a_{mn} \end{cases}$$

## §13. Операции над линейными операторами и матрицами.

$\tilde{A}: \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$

$\tilde{B}: \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$

$\tilde{A} = \tilde{B} \Longleftrightarrow \tilde{A}x = \tilde{B}x \quad \forall x \in \mathcal{L}^n$

$\forall x \in \mathbb{Z}^n$.

Зам. $\tilde{A} = \tilde{B} \Longleftrightarrow$

$A = B$, т. е.

$a_{ij} = b_{ij}$

$i = 1, 2, \ldots, m,$

$j = 1, 2, \ldots, n,$

**О.2.** ] $\tilde{A}, \tilde{B} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$, линейные. Отображение

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$$

наз. суммой отображений $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, если

$$\tilde{C}x = \tilde{A}x + \tilde{B}x$$

$$\forall x \in \mathcal{L}^n$$

__Зам.__

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B:$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

# Свойства сложения

1) $A+B=B+A$

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

3) $A+\mathbb{O}=A$

$$\mathbb{O}=\left.\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}^{n}\right\}m$$

4) $A + (-A) = \mathbb{O}$

<u>О.4.</u> Произведением линейного оператора $\tilde{A}: \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ наз. оператор $\tilde{B} = \lambda \tilde{A}$:

$$\tilde{B} x = (\lambda \tilde{A}) x = \lambda (\tilde{A} x)$$

$\forall x \in \mathbb{Z}^n$.

Зам.

$B = \lambda A \Leftrightarrow$

$b_{ij} = \lambda a_{ij}$

$i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$

Св-ва:

1) $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2) A$

2) $(\lambda_1 + \lambda_2) A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$

3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

4) $1 \cdot A = A$

5) $(-1) A = -A$

**0.5.** ] $\widetilde{B}: \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^p$

$$\widetilde{A}: \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^m$$

Произведением отображения $\widetilde{A}$ на отображение $\widetilde{B}$ наз. отображение $\widetilde{C} = \widetilde{A}\widetilde{B}$:

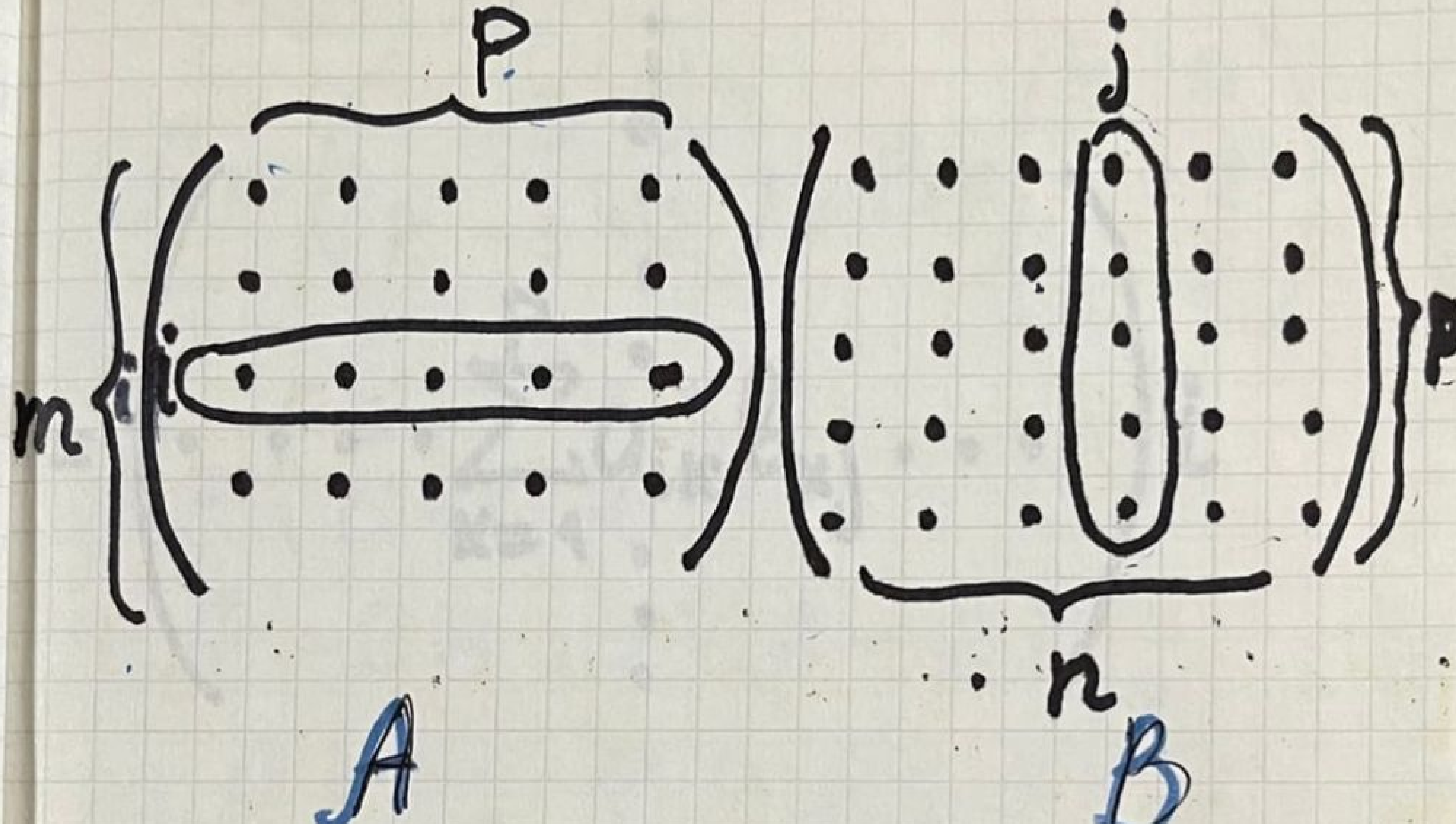
$$\widetilde{C}x = \widetilde{A}(\widetilde{B}x) \quad \forall x \in \mathcal{L}^n$$

Замечание.

$A[m \times p]$ ; $B[p \times n]$

$AB = C[m \times n]$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \; ; \; \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$


p
j
m
i
p
n
A
B

$$= \begin{array}{cccc} & j & & \\ \left( \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \right. & \begin{array}{c} \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \\ \vdots \end{array} & \left. \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \right) & i \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

1) $A-2B$; 2) $A-2C$,

3) $AB$; 4) $BA$; 5) $AC$

## Свойства :

1) $AB \neq BA$

2) $(AB)C = A(BC)$

3) $(A+B)C = AC+BC$

4) $A\,[m \times n]$, $\quad E_m A = A$

$$E_m \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

~~$E_m A = A$,~~

а для $E_n$:

$$AE_n = A.$$

Для $A[n \times n]$:

$$AE_n = E_n A = A \quad (E_n = E)$$

# § 14. Определители $n$-го порядка.

__О.1.__ 1) $n = 1$, $A = (a_{11})$,

$\det A = a_{11}$

2) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} -$$

$-a_{12}a_{21}$

3) $A[n\times n]$

$$\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (*),$$ где

$A_{ij}$ – алгебраические дополнения эл-ов $a_{ij}$.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

Св-ва определителей

см. методич. № 185

„Определители. Формулы Крамера"

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0 \quad (**)$$
$$i \neq k$$

# § 15. Обратные отображения и матрицы

**О.1.** ] $\widehat{A} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^n$.
Отображение
$\widehat{A}^{-1} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^n$
наз. обратным к $\widehat{A}$,

если

$$\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}\tilde{A} = \tilde{E} \quad (1),$$

где $\tilde{E}$ : $\tilde{E}x = x \ \forall x \in I^n$

(тождественное)

<u>Т-ма 1</u>. $\tilde{A}^{-1}$ – единственно.

<u>Д-во</u> (от противного)

] $\exists\ \tilde{A}_1^{-1}$ и $\tilde{A}_2^{-1}$

$$\underline{\underline{\tilde{A}_2^{-1}}} = \tilde{E}\tilde{A}_2^{-1} = \overbrace{(\tilde{A}_1^{-1}\tilde{A})}^{\tilde{E}}\tilde{A}_2^{-1} =$$

$$= \tilde{A}_1^{-1}(\tilde{A}\tilde{A}_2^{-1}) = \tilde{A}_1^{-1}\tilde{E} = \underline{\underline{\tilde{A}_1^{-1}}}$$

Зам. $(\tilde{A}^{-1})^{-1} = \tilde{A}$

$$(\tilde{A}\tilde{B})^{-1} = \tilde{B}^{-1}\tilde{A}^{-1}$$

**О.2.** Отображение $\tilde{A}: \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^n$ наз. обратимым, если $\exists \tilde{A}^{-1}$.

**Т.2.** $\rceil \tilde{A}: \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^n$ и $A[n \times n]$ - матрица отображения $\tilde{A}$. Если $\det A \neq 0$, то

$\tilde{A}$ – обратимо, причем

$A^{-1}$: