Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

Кафедра систем автоматизированного проектирования
и управления

В.И. Халимон, А.Ю. Рогов, О.В. Проститенко

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2008

УДК 51

Дискретная математика: учебное пособие / В.И. Халимон, А.Ю. Рогов, О.В. Проститенко - СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2008.- 81 с.

Учебное пособие посвящено изучению разделов: «Теория множеств», «Теория графов», и «Булевая алгебра», входящих в стандартную программу учебной дисциплины «Дискретная математика». Понятия и методы этих теорий широко используются в различных разделах учебных дисциплин, изучаемых на кафедре САПРиУ. В пособии даются базовые понятия из теории множеств, теории графов, и булевой алгебры, приводится обзор различных задач и методов их решения, и рассматриваются практические примеры.

Учебное пособие составлено в соответствии с учебной программой дисциплины «Дискретная математика». В учебное пособие включены задания для контрольных работ и примеры их решения.

Учебное пособие предназначено для студентов второго курса, обучающихся по специальностям 23.01.04 "Системы автоматизированного проектирования и управления" и 23.01.00 "Информатика и вычислительная техника", а также для слушателей факультета переподготовки кадров по новым направлениям науки и техники.

Рис. 37, табл. 5, формул 10, библиогр. 10 назв.

Рецензенты:

1 Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г.В. Плеханова (технический университет) заведующий кафедрой АТПП, д-р техн. наук, профессор И.Н. Белоглазов

2 В.Г. Харазов, д-р техн. наук, профессор по кафедре АПХП СПбГТИ(ТУ)

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии факультета Информатики и Управления 22.12.2008.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ 4
1 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1...5
2 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2...19
3 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3..56
4 Рабочая программа учебной дисциплины «Дискретная математика».74
5 ЛИТЕРАТУРА 811

ВВЕДЕНИЕ

Целью дисциплины «Дискретная математика» является изучение и освоение методов дискретной математики, и формирование практических навыков разработки и анализа алгоритмов над объектами дискретной математики.

Настоящее пособие представляет собой руководство к выполнению лабораторно-практических работ по дискретной математике.

Пособие позволяет выдавать индивидуальное задание каждому учащемуся. Все задания имеют одинаковую степень сложности.

Весь материал разбит на главы, в которых дается набор работ по соответствующей теме. Каждая работа начинается с задания, которое одинаково для любого из вариантов. В конце работы приводится образец ее выполнения.

1 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задание множеств и осуществление операций над ними.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

МНОЖЕСТВО, ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ И ПОДМНОЖЕСТВА

Совокупность свойств и отношений (т.е. признаков) предметов, отражаемых в понятии, составляет содержание понятия. Всякому понятию соответствует множество предметов, каждый из которых обладает признаками, зафиксированными в содержании понятия. Это множество называют *объемом понятия*.

Множество есть любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое. Здесь существенно прежде всего то, что собрание предметов само рассматривается как один предмет (мыслится как единое целое).

Не следует понимать множество (класс) как совокупность действительно существующих предметов, обладающих всеми реальными характеристиками, скажем, определенными пространственными или временными свойствами. Принадлежность к множеству не требует, например, существования во времени и в пространстве: все сторонники мира образуют один класс, хотя и живут в разных странах; Аристотель и Г.Гегель принадлежат к множеству выдающихся философов, хотя они и жили в разное время.

Множество в логике – это «абстрактный объект», в котором каждый составляющий его предмет рассматривается с точки зрения признаков, образующих содержание определенного понятия. Поэтому они (эти предметы) становятся неразличимыми (ибо мы приписываем им одни и те же признаки), отличие же их друг от друга определяется теперь уже не по свойствам и отношениям, а по их именам Предмет, принадлежащий данному множеству, называется его *элементом.* Элементы множества обозначаются обычно – $x, y, z, ...$ (или $x_1, x_2, x_3, \dots$), а сами множества – $A, B, C, \dots$

Если множество содержит конечное число элементов, его называют *конечным,* если в нем бесконечно много элементов, то – *бесконечным.*

Множества могут состоять из предметов самой различной природы. Этим и объясняется чрезвычайная широта теории множеств и ее применимость в самых различных областях знания – математике, физике, химии, биологии, лингвистике и т.д.

Знаком $\in$ обозначается отношение принадлежности одного элемента тому или иному множеству. Выражение $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству A. Если x не является элементом множества A, то это записывается $x \notin A$..

Если два множества A *и* B состоят из одних и тех же элементов, то они считаются равными. Если A *и* B равны, то пишем $A = B$, в противном случае – $A \neq B$. Так, совокупность $\{2,4,6\}$ есть множество, состоящее из трех первых положительных четных целых чисел. Поскольку $\{2,4,6\}$ и $\{2,6,4\}$ состоят из одних и тех же элементов, они являются равными множествами. По этой же причине $\{2,4,6\}=\{2,4,4,6\}$.

Множества $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ и $\{1,2,3\}$ не равны, ибо элементами первого являются $\{1,2\}$ и $\{2,3\}$, а элементами второго – 1,2,3.

Множества $\{\{1,2\}\}$ и $\{1,2\}$ также не равны, поскольку первое множество, состоящее из одного и только одного элемента $\{1,2\}$ (одноэлементное множество), а второе имеет своими элементами 1 и 2. Поэтому, в общем виде, следует различать предмет и множество, единственным элементом которого является этот предмет.

Множество считают *заданным* (известным), если мы владеем способом, позволяющим для любого данного предмета решить, принадлежит ли он этому множеству или нет, т.е. определить, истинно или ложно выражение $x \in A$ (при соответствующем значении переменных x и A). Задать множество можно различным способами. Один из них состоит в том, что задается полный список элементов, входящих в данное множество. Если мы хотим сказать, что данное множество A состоит из элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, то обычно записываем $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$. Например, множество арифметических действий состоит из элементов {сложение, вычитание, умножение, деление}.

Однако этот способ применим только для задания конечных множеств, да и то далеко не всех. Например, хотя множество рыб конечно, его вряд ли можно задать списком. Тем более список невозможен в случае бесконечного множества.

Тогда применяют другой способ, который состоит в задании множества его характеристическим свойством, т.е. указанием такового свойства, которое принадлежит любому предмету, являющемуся элементом данного множества, и не принадлежит ни одному предмету, который не является его элементом ($M = \{x \mid P(x)\}$– «множество всех x, обладающих свойством P»).

Разграничение объектов на принадлежащие и не принадлежащие данному множеству затрудняется еще и наличием большого числа промежуточных форм.

Особо выделяют, во-первых, *универсальное множество,* т.е. такое множество, которое состоит из *всех* элементов исследуемой области (обозначается буквой U, а в геометрической интерпретации изображается множеством точек внутри некоторого прямоугольника), во-вторых, *пустое множество,* т.е. множество, не содержащее ни одного элемента (обозначается символом $\varnothing$).

Любую часть множества называют *подмножеством.* Если некоторое универсальное множество U задать характеристическим свойством P, а именно: $U = \{x / P(x)\}$, то множества $A, B, C, \ldots$, являющиеся частями U, определяются свойствами P_a, P_b, $P_c, \ldots$.

Следовательно, подмножество A определяется: $A \overset{Df}{=} \{x \mid x \in U$ и $P_a(x)\}$ («A есть по определению множество всех тех и только тех x, которые принадлежат U и обладают свойством P_a»). Если, например, U – множество людей, а P_a – быть учащимися высшего учебного заведения, то A – множество студентов.

Если свойства, которыми заданы некоторое множество и его подмножество, совпадают (одни и те же), то эти множества будут равны. Поэтому считается, что множество является частью самого себя (иногда говорят, что «полной частью»).

Если свойство, которым задается некоторое подмножество, противоречит свойству, с помощью которого задано само множество, то данное подмножество будет пустым. Пустое множество поэтому также считают частью любого множества (иногда говорят «пустой частью»).

Полную и пустую части называют *несобственными* подмножествами. Все остальные подмножества являются *собственными.*

Если известно число элементов данного множества, то общее число подмножеств будет 2^n (где n – число элементов). Из пустого множества можно образовать только одно подмножество – само пустое множество (при $n = 0$, $2^0=1$).

Содержание понятий отражает свойства предметов или отношений между ними. Если предмет обозначить через x, а свойство предмета P, тогда объемом понятия, отражающего свойства, будет множество, каждый элемент которого, подставленный на место переменной *x* в формуле Р(х), будет давать истинное суждение. Ясно, что в формулу подставляются не сами предметы, а только их имена.

Пусть в формуле Р(х) Р означает свойство «быть нечетным», тогда вместо *x* могут быть подставлены предметы (в данном случае числа) 1,3,5,7 и т.д., ибо при этом мы получим истинные суждения («1-нечетное число», «3-нечетное число» и т.п.).

Следует заметить, что выражение Р(х) близко по смыслу выражению $x \in P$. Так, говоря о свойстве «быть нечетным», мы подразумеваем множество предметов, каждый из которых обладает этим свойством.

Говоря о любом предмете, мы часто высказываемся не только о том, какими свойствами он обладает, но и о том, какие связи он имеет с другими предметами, какие *отношения* к другим предметам его характеризуют.

Отношения обозначаются буквой *R* (первая буква латинского слова Relatio – отношение). Выражение *xRy* (или *R(x,y))* читается: «предмет *x* находится к предмету *y* в отношении *R*». Такие понятия, как «больше», «меньше», «равно», «причина», «функция» и т.д. отражают определенные отношения между предметами. Например, для отношения «меньше» нужно иметь два предмета, чтобы образовать осмысленное предложение («2 меньше 3», «5 меньше 4» - осмысленные предложения, первое из которых выражает истинное высказывание, а второе – ложное).

Следует подчеркнуть, что пары предметов (чисел), образующие объем понятия «меньше», являются *упорядоченными,* ибо пара 2 и 3 входит в объем данного понятия, а 5 и 4 нет. В общем виде это обстоятельство можно записать $\langle x,y \rangle \in R$, что означает «упорядоченная пара x, y есть элемент R». В этом случае мы рассматриваем отношение R как множество упорядоченных пар элементов. Такого рода отношения называются двухместными. Могут быть разумеется, трехместные, четырехместные и т.д.) отношения.

Знаком $\subseteq$ обозначается *отношение включения* множества, т.е. $A \subseteq B$ («множество A включено в B») означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B. При этом A называется *подмножеством*, а B – *надмножеством*. $A \subseteq B$ – это включение в широком смысле, ибо не исключено, что $A = B$. Если A включено в *B* и при этом $A \neq B$ (т.е. существуют элементы *B*, не принадлежащие *A*), то *A* строго включается в *B*. В этом случае *A* будет *собственным* подмножеством B, что записывается $A \subset B$. Иногда употребляют выражение $B \supset A$ – «B содержит в себе A».

Содержание понятий отражает свойства предметов или отношений между ними. Если предмет обозначить через x, а свойство предмета P, тогда объемом понятия, отражающего свойства, будет множество, каждый элемент которого, подставленный на место переменной x в формуле P(x), будет давать истинное суждение. Ясно, что в формулу подставляются не сами предметы, а только их имена.

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Пусть $A, B, C, \ldots$ – подмножества некоторого универсального множества U. В множестве всех возможных подмножеств универсального множества (включая Ø и U) определим четыре операции: *дополнение, пересечение, объединение* и *разность*.

В традиционной логике операцией над понятиями называется такое логическое действие, которое приводит к образованию нового понятия. В современной логике понятие операции (над множествами) уточняется в терминах функций: операция над произвольными элементами (в том числе и над множествами) есть однозначная функция, которая каждому элементу ставит в соответствие другой элемент, который называется результатом операции. Результаты операций над множествами обычно изображают графически на диаграммах Эйлера – Венна.

Дополнение

Дополнением множества A (обозначается A' или $\overline{A}$, читается «не – A») называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов из U, которые не принадлежат множеству A.

Это определение можно записать так:

$$\overline{A} \overset{Df}{=} \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin \mathrm{A}\} \tag{1}$$

(Не – A равно по определению множеству всех элементов x из U, которые не принадлежат множеству A). Графически результат операции дополнения множества A изображен на рисунке 1.

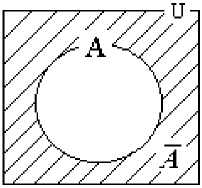


Рисунок 1

Видно, что любой элемент универсального множества принадлежит либо A, либо $\bar{A}$, но не может принадлежать им обоим.

Дополнению множества соответствует операция над понятиями, которую называют *отрицанием* понятия.

Пересечение

Пересечением множеств A и B (обозначается $A \cap B$, иногда AB; читается «пересечение A и B» или «A крышка B», можно читать «A *и* B») называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Это определение можно записать следующим образом:

$$A \cap B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} \tag{2}$$

(Пересечение A и B равно по определению множеству элементов x, где x есть элемент и A, и B). Иначе говоря, по определению $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \in B$. Например, $\{1,2,3\} \cap \{1,3,4\} = \{1,3\}$.

На рисунке 2 изображен результат операции пересечения множеств A и B.

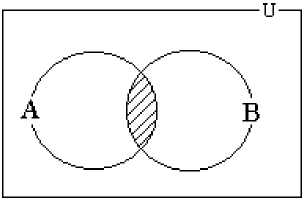


Рисунок 2

Точно так же определяется результат пересечения любого числа n множеств $A_1, A_2, \dots A_n$ – как множество всех элементов, принадлежащих и A_1, *и*… A_n. Это множество обозначается $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

Если множества A и B выделены из универсального множества характеристическими свойствами, скажем P_a и P_b, то пересечение $A \cap B$ – это множество, состоящее из элементов, которые обладают обоими этими свойствами.

Пересечение множеств есть операция всюду определенная, т.е. она имеет место для множеств, находящихся в любых отношениях. Так, если взять два непустых множества (A и B), то существует пять взаимоисключающих способов, которыми могут быть логически связаны эти два множества (рисунок 3).

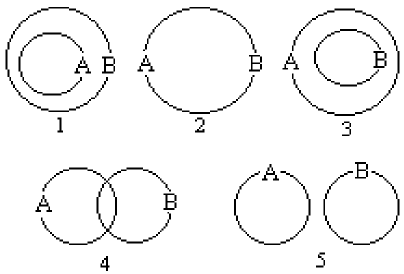


Рисунок 3

По существу они уже рассмотрены ранее, но там не был помещен рисунок, соответствующий диаграмме 3. Это отношение называют правосторонним включением, тогда как отношение, изображенное на диаграмме 1 – левосторонним.

Операция пересечения множеств, таким образом, имеет целью нахождение общих элементов двух и более множеств.

Пересечению множеств соответствует операция над понятиями, которую называют *умножением* понятий.

Объединение

Объединением множеств A и B (обозначается $A \cup B$, читается «объединение А с В» или «А чашка В», можно читать «А или В») называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В.

Это определение можно записать следующим образом:

$$A \bigcup B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\} \qquad (3)$$

(Объединение *A* с *B* равно по определению множеству элементов х, где х есть элемент А или элемент В). Нужно при этом иметь в виду, что союз «или» здесь употреблен в смысле «и/или».

Таким образом, по определению $x \in A \bigcup B$ тогда и только тогда, когда х есть элемент хотя бы одного из множеств *A* или *B*.

Например, {1,2,3} ⋃ {1,3,4} = {1,2,3,4}.

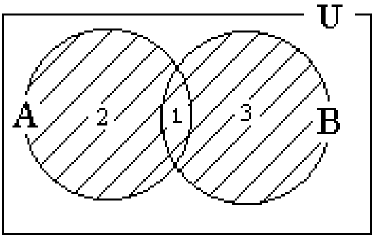


Рисунок 4

Подобным же образом результатом объединения любых n множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$ называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из них. Это множество обозначается $A_1 \bigcup A_2 \ldots A_n$.

Объединению множеств соответствует операция над понятиями, которую называют *сложением* понятий.

Операция объединения множеств является всюду определенной также, как и операция пересечения множеств.

Объединяемые множества могут иметь общий элемент, т.е. их пересечение не будет пустым. Тогда повторяющие элементы в объединении считаются только по одному разу. Поэтому для конечных множеств число элементов объединения может оказаться меньше, чем сумма чисел элементов объединяемых множеств.

Например, если мы объединим всех студентов кибернетического факультета (А) и всех студентов экономического факультета (В), при этом известно, что некоторые студенты одновременно учатся на двух факультетах, то количество $A \bigcup B$ будет представляться суммой трех чисел:

количество студентов, которые учатся на обоих факультетах;

количество студентов, которые учатся только на кибернетическом факультете;

количество студентов, которые учатся только на экономическом факультете.

Разность

Разностью множеств А и В (обозначается $A \setminus B$ либо $A \cap \overline{B}$, иногда $A - B$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В.

(Пересечение A с не – B равно по определению множеству элементов x, где x есть элемент множества A и x не есть элемент множества B).

Следовательно, по определению $x \in A \cap \overline{B}$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \notin B$.

Диаграмма Эйлера – Венна на рисунке 5 представляет графическое изображение результата этой операции.

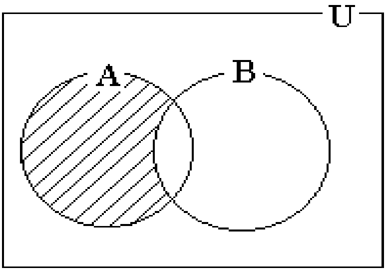


Рисунок 5

Ясно, что множества А и В имеют и вторую разность - $\bar{A} \cap$ B, состоящую из элементов множества В, которые не принадлежат множеству А.

Таким образом по определению $x \in \bar{A} \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \notin A$ и $x \in B$.

Над множествами, полученными в результате описанных четырех операций, можно в свою очередь производить те же самые операции. Так, можно образовывать дополнения пересечения $(\overline{A \cap B})$, объединения $(\overline{A \cup B})$ или разности $(\overline{A \cap \overline{B}})$; можно образовать пересечение объединений $(A \cup B) \cap (C \cup D)$ или объединение пересечений $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ и т.д..

Для указания порядка операций применяются скобки. Отношение между скобками, знаками $\bigcup$ и $\bigcap$ такое же, как между скобками, знаками * и + в алгебре. Дополнение берется от всего выражения, над которым стоит черта (или от всего выражения, стоящего в скобках, рядом с которыми стоит знак штрих).

Нужно помнить, что все эти операции можно производить только над множествами, принадлежащими одному и тому же универсальному множеству.

<u>УКАЗАНИЯ</u>

Данная контрольная работа может быть выполнена от руки на листах формата А4 или представлена в распечатанном варианте в результате использования программы «Множества».

Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Халимон В.И., Комаров П.И., Туманова Е.В. Понятия, отношения, множества, операции над множествами.: Метод. указания.- СПб., СПбГТИ(ТУ), 2002.-36 с.
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. – М.: Энергия, 1980. – 814 с.
3. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика: Учебник для взузов. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 544 с.
4. Белоусов А.И., Ткачев С.В. Дискретная математика: Учеб. для вузов/ под. ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 744 с.

ЗАДАНИЕ: <u>Осуществить операции объединения, пересечения, разности и дополнения на множествах используя диаграммы Эйлера – Венна</u>.

Вариант 1	**Вариант 8**
1.1 $((A\bigcup B)\bigcap C)\setminus D=M$ 1.2 $\overline{(A\setminus B)\bigcup C}=M$ 1.3 $\overline{((A\bigcap B)\bigcap C)}\bigcup D=M$	8.1 $((A\bigcup B)\setminus C)\setminus D=M$ 8.2 $A\bigcup B\bigcap C=M$ 8.3 $(A\bigcup B)\bigcap(C\setminus D)=M$
Вариант 2	**Вариант 9**

2.1 $\overline{(A\bigcup B)\bigcup C}=M$ 2.2 $(B\bigcup C)\setminus(K\bigcap N)=M$ 2.3 $(A\setminus B)\bigcup C=M$	9.1 $(A\setminus B)\bigcap(C\setminus D)=M$ 9.2 $(A\bigcup B)\bigcap C=M$ 9.3 $(\overline{A}\bigcup B)\setminus C=M$
Вариант 3 3.1 $\overline{(A\setminus B)\bigcap C}=M$ 3.2 $((A\bigcap D)\setminus B)\bigcup C=M$ 3.3 $((A\bigcup\overline{C})\bigcap(C\setminus D)=M$	**Вариант 10** 10.1 $((A\bigcap B)\setminus C)\bigcap D=M$ 10.2 $A\bigcap B\bigcap C=M$ 10.3 $((A\setminus(B\bigcup D))\bigcap C=M$
Вариант 4 4.1 $(B\bigcup C)\setminus(A\bigcap D)=M$ 4.2 $\overline{(A\bigcup B)}\setminus D=M$ 4.3 $((\overline{A\bigcup B)}\setminus C)\bigcup D=M$	**Вариант 11** 11.1 $(A\bigcap B)\setminus(C\bigcup D)=M$ 11.2 $(A\bigcap B)\bigcap D=M$ 11.3 $\overline{(A\bigcup B)}\bigcap D=M$
Вариант 5 5.1 $(A\setminus B)\bigcup(C\setminus D)=M$ 5.2 $\overline{(A\setminus B)}\bigcap D=M$ 5.3 $((A\bigcup B)\bigcap C)\bigcup\overline{D}=M$	**Вариант 12** 12.1 $((A\bigcup B)\setminus C)\setminus D=M$ 12.2 $(A\setminus B)\bigcap C=M$ 12.3 $(A\bigcup B)\bigcap(C\setminus D)=M$
Вариант 6 6.1 $((A\bigcup B)\bigcap C)\setminus\overline{D}=M$ 6.2 $A\bigcap\overline{(B\bigcup C)}=M$ 6.3 $(A\bigcup B\bigcup C)\bigcap D=M$	**Вариант 13** 13.1 $(A\bigcap B)\bigcup(C\bigcap D)=M$ 13.2 $A\bigcup(B\bigcap C)=M$ 13.3 $((A\setminus B)\bigcap C)\bigcup D=M$
Вариант 7 7.1 $\overline{A\bigcap B\bigcup C}=M$ 7.2 $A\setminus C\bigcup B=M$ 7.3 $(A\bigcap B\bigcap C)\setminus D=M$	**Вариант 14** 14.1 $((A\setminus D)\setminus C)\bigcap D=M$ 14.2 $(A\setminus B)\bigcap C=M$ 14.3 $((A\setminus B)\bigcup C)\bigcap D=M$

Образец выполнения задания

Цель работы:

Целью работы является изучение основ математической логики, а именно определение понятий и отношений между понятиями, множеств и операций над ними, а также освоение компьютерных способов реализации этих операций.

Задание на работу

Используя методические указания, освоить полный перечень операций на множествах и решить ряд задач. Подготовить отчет с распечаткой реализованных решений и анализом этих результатов.

2.1 $\overline{(A \cup B)} \cup C = M$

2.2 $(B \cup C) \setminus (K \cap N) = M$

2.3 $(A \setminus B) \cup C = M$

Решение: Решение будем искать в виде диаграмм Эйлера-Венна.

2.1. Найдем $\overline{A \cup B} \cup C = M$

Первый этап решения: находим ($A \cup B$).

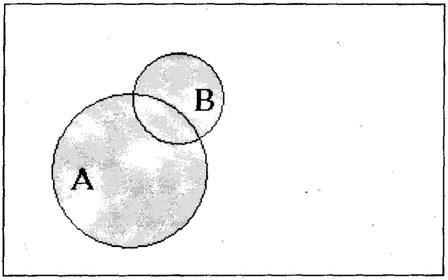


Рисунок 6

Второй этап: находим $\overline{A \cup B}$ это дополнение к множеству ($A \cup B$), т.е. универсальное множество.

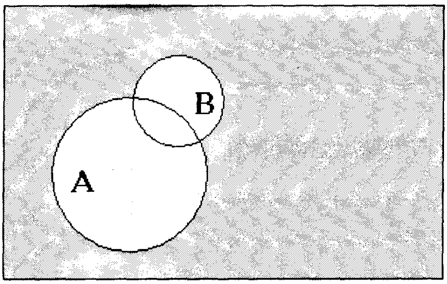


Рисунок 7

Третий этап: найдем $\overline{(A \cup B)} \cup C$, что и является решением данной задачи, т.е. множество M.

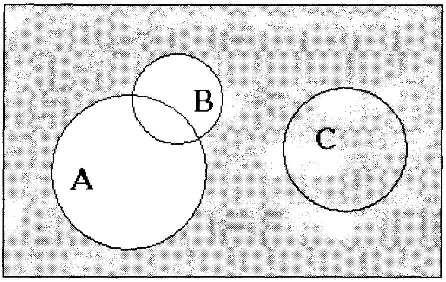


Рисунок 8

2.2. Найдем $(B \cup C) \setminus (K \cap N) = M$

Сначала найдем $(B \cup C)$.

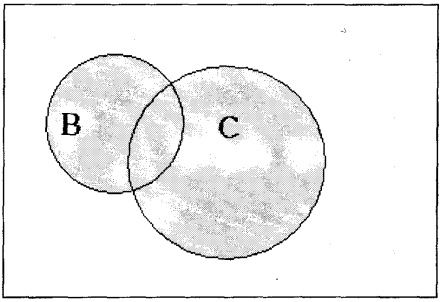


Рисунок 9

Затем найдем $(K \cap N)$.

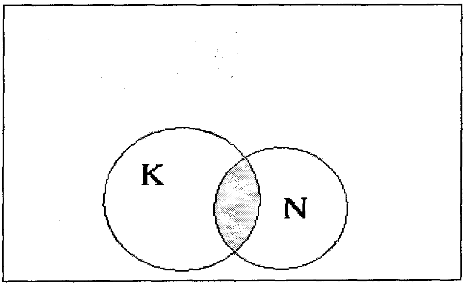


Рисунок 10

Теперь из $(B \bigcup C)$ вычитаем $(K \bigcap N)$, что и является ответом, то есть множеством M.

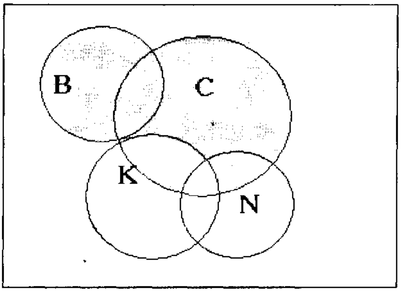


Рисунок 11

2.3. Найдем $(A \setminus B) \bigcup C = M$.

В начале вычислим *(A \ B)*.

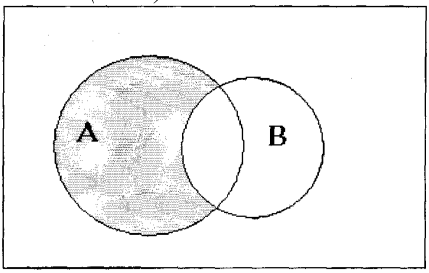


Рисунок 12

Далее находим объединение множества *(A \ B)* с множеством С. В итоге получаем множество *М*.

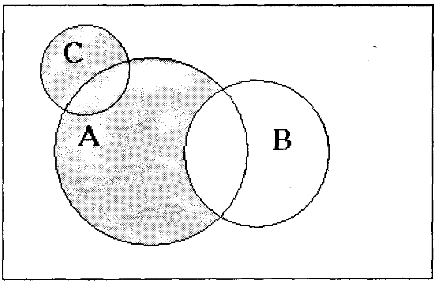


Рисунок 13

Вывод:

В данной лабораторной работе мы находили множество *M*, заданное в условиях задания, выполняя с помощью диаграмм Эйлера-Венна операции над множествами объединения ($\bigcup$), пересечения ($\bigcap$), дополнения ($\overline{}$) и разности(\).

2 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Изучение основ теории графов, базовых понятий и определений; ознакомление с задачами, возникающими в теории графов и методами их решения.

<u>ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ</u>

ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ, МЕТОДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Граф G представляет собой двойку вида: G = (X , U), где X — множество вершин графа; U — множество ребер графа.

Множество вершин обычно представляет собой множество элементов системы, а множество ребер — связи между элементами системы или отношения элементов. Пусть множество X имеет размерность N, а множество U — размерность Q. Понятие графа опирается на понятие инцидентности. Если некоторому элементу из множества U сопоставлен элемент из множества X, то говорят, что некоторое ребро u инцидентно вершине x. Данное сопоставление может быть единственным, т.е. данному ребру u может быть сопоставлена вершина x только один раз, и множественным, т.е. данному ребру вершина сопоставляется несколько раз. В зависимости от того, сколько вершин сопоставлено ребру и сколько раз производится сопоставление, графы делятся на обычные графы, мультиграфы, гиперграфы и мультигиперграфы.

При изучении взаимосвязей между объектами исследуемая система представляется в виде графа. Для построения графа системы достаточно знать состав элементов и связи между ними. Топологический анализ проходит в несколько этапов:

- анализ элементов;
- анализ путей и контуров в системе;
- анализ связанности структуры;
- определение обобщенных структурных характеристик системы;
- оценка быстродействия;

- проверка достижимости элементов;
- анализ надежности;
- определение степени централизации элементов.

Графы можно задавать: *матрицей смежности, матрицей инциденций, списком дуг, списком окрестностей вершин графа.* Пусть дан граф G = (X , U), где X — множество вершин графа, а U — множество связей в графе, и пусть P — число вершин графа, Q — число связей в графе. Рассмотрим базовые представления графов наследующем примере (P=13, Q=16):

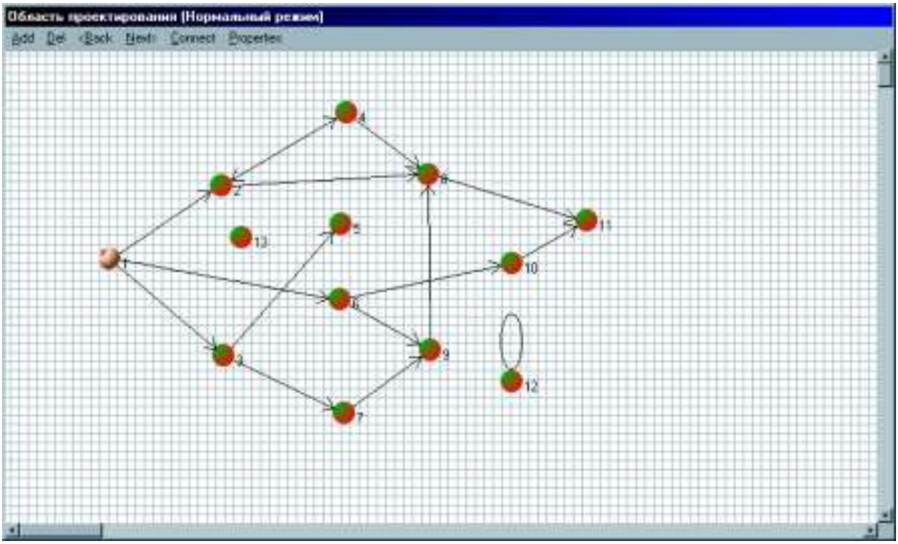


Рисунок 14. Пример графа

Матрицей смежности графа называется матрица V, имеющая размерность P*P, каждый элемент которой определяется следующим образом:

$$V(i,j) = \begin{cases} 1\text{, если между i-ой вершиной и j-ой вершиной есть дуга;} \\ 0\text{, в противном случае.} \end{cases} \qquad (4)$$

Если на главной диагонали этой матрицы стоит единица, то это соответствует наличию петли в графе. Для графа представленного на рис. 1 представление имеет вид (см. рис. 15)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 15. Матрица смежности графа

Данное представление является очень удобным и широко используемым на практике. Однако, в случае, когда Q < P*P это представление является не экономичным, поскольку требует много памяти для хранения нулей.

Матрицей инциденций графа называется матрица W, имеющая размерность P*Q, каждый элемент которой определяется следующим образом:

$$W(i,j) = \begin{cases} -1, \text{ если i-ая вершина — начало j-ой дуги;} \\ 1, \text{ если i-ая вершина — конец j-ой дуги;} \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (5)$$

В неориентированном графе каждое ребро представляется как две противоположно направленные дуги. Для графа представленного на рис. 1 представление имеет вид (см. рис. 16):

Матрица инциденций графа

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

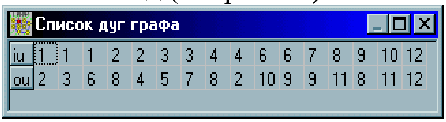
Рисунок 16. Матрица инциденций графа

Это представление также является не экономичным, поскольку требует много памяти для хранения нулей. *Задание графа списком дуг* включает массивы IU и OU. Оба массива имеют размерность Q для ориентированного графа и 2Q для неориентированного графа. Массив IU хранит номера вершин, являющихся началом дуг, а массив OU — концы дуг. Для I-ых элементов массивов IU и OU, т.е. для I-ой дуги, справедливо:

IU[i] — начало дуги,

OU[i] — конец дуги.

В неориентированном графе каждое ребро представляется как две противоположно направленные дуги. Для графа представленного на рис. 1 представление имеет вид (см. рис. 17):

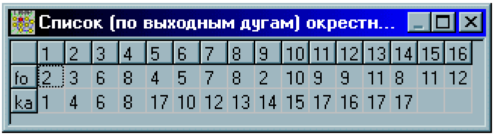


Список дуг графа

iu	1	1	1	2	2	3	3	4	4	6	6	7	8	9	10	12
ou	2	3	6	8	4	5	7	8	2	10	9	9	11	8	11	12

Рисунок 17. Список дуг графа

Задание графа окрестностью вершин включает массивы FO и KAO. Массив FO имеет размерность Q для ориентированного графа и 2Q для неориентированного графа. В нем хранятся номера вершин, являющихся выходами (входами) дуг. Массив KAO имеет размерность P+1. В нем хранятся номера элементов массива FO, с которых начинается новая окрестность. I-ый элемент KAO хранит номер элемента массива FO, с которого начинается окрестность I-ой вершины графа. В неориентированном графе каждое ребро представляется как две противоположно направленные дуги. Для графа представленного на рис. 1 представление имеет вид (см. рис. 18):



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
fo	2	3	6	8	4	5	7	8	2	10	9	9	11	8	11	12
ka	1	4	6	8	17	10	12	13	14	15	17	16	17	17		

Рисунок 18. Список по выходным дугам

АНАЛИЗ СТРУКТУР СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ГРАФОВЫМИ МЕТОДАМИ

Анализ структур сложных систем графовыми методами рассматривается по следующим пунктам:

- выявление ошибок в структуре системы;
- анализ связей структуры;
- анализ быстродействия системы;
- анализ надежности системы.

Выявление ошибок в структуре системы

При проектировании сложных систем в проектах могут появляться различные ошибки структурного характера.

Существуют наиболее общие грубые ошибки, свойственные практически всем системам. Наиболее типичные из них следующие:

- появление в структуре элементов, не связанных ни с какими другими элементами системы;
- несоответствие числа входов и выходов в системе заданию;
- отсутствие достижимости выходов системы из входов системы.

Рассмотрим эти типичные ошибки. Появление несвязанных элементов является одной из грубых ошибок синтеза системы потому, что элементы включаются в систему для того, чтобы они несли какую-то функцию в ней, взаимодействовали с другими элементами путем передачи потоков энергии, вещества, информации. Если элемент существует в системе сам по себе, не оказывая влияния на другие элементы системы или на внешнюю среду, то для чего такой элемент включается в систему? Выявление *несвязанных элементов* графовым методом состоит в поиске в графе системы *изолированных вершин.* Например, для графа, представленного на рис. 1, вершина с номером 13 является изолированной. Вершина с номером 12 хотя и связана, но она связана только сама с собой, что тоже можно рассматривать как ошибку в структуре.

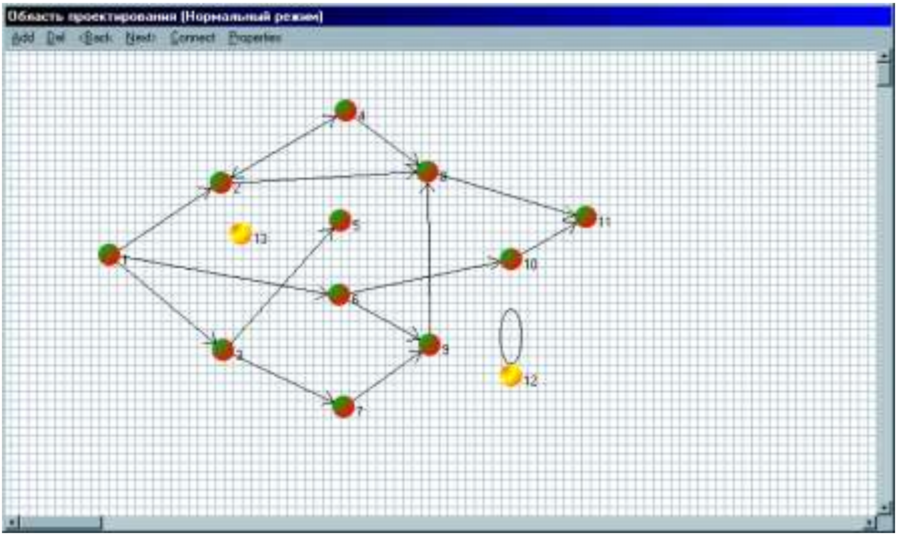


Рисунок 19. Изолированные вершины

Входами системы будем называть элементы, которые получают из внешней среды вещество, энергию, информацию или воспринимают какое-то воздействие. *Выходами* системы будем называть элементы, которые отдают во внешнюю среду вещество, энергию, информацию или оказывают на нее какое-то воздействие. Несоответствие числа входов системы обычно свидетельствует о том, что в ней имеются какие-то внутренние источники веществ, энергии, информации. Эти источники оказывают определенное воздействие на другие элементы системы и могут вносить различные помехи в работу системы. Несоответствие числа выходов системы обычно свидетельствует о том, что в ней имеются элементы, через которые происходит утечка вещества, энергии, информации. Появление дополнительных выходов может привести к каким-то побочным эффектам в работе системы при взаимодействии ее с внешней средой.

Выявление входов и выходов системы графовым методом состоит в поиске в графе системы *антитупиковых* и *тупиковых* вершин соответственно. Например, для графа, представленного на рис. 6, входной вершиной будет только вершина с номером 1 (см. рис. 20), а выходными — 5 и 11 (см. рис. 21).

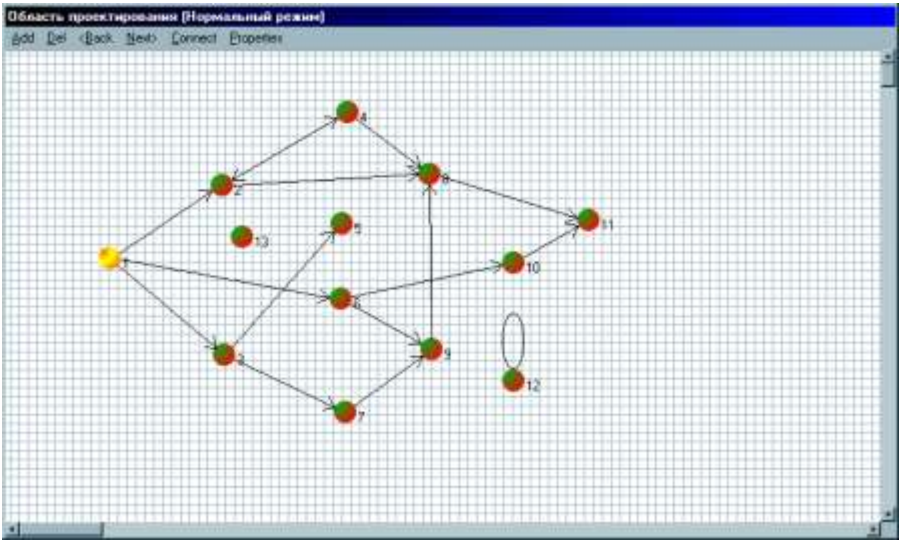


Рисунок 20. Входная вершина

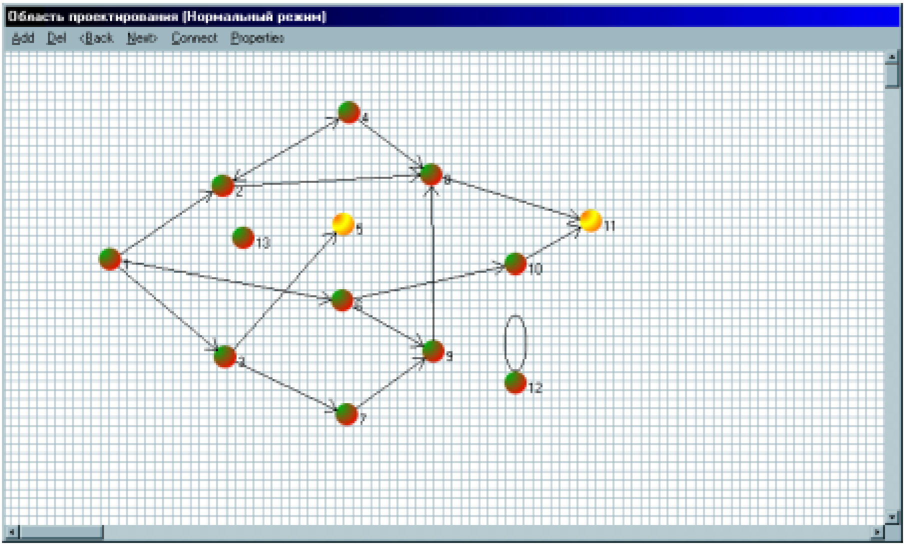


Рисунок 21. Выходные вершины

Анализ связей структуры (достижимость)

Отсутствие достижимости выходов системы из входов системы обычно свидетельствует о том, что в ней нарушается прохождение потоков вещества, энергии, информации от входов к выходам. Система обычно должна преобразовывать входные воздействия в выходные. Воздействия в системе проходят от входов через элементы системы к ее выходам. Если сигнал не может пройти от определенного входа к выходу системы, а должен проходить, то проектировщик должен найти ошибку. Причиной такой ошибки может быть, например, неправильное соединение элементов. Эта задача в терминах теории графов формулируется как *задача проверки достижимости одного множества вершин графа из другого множества вершин, при условии, что эти множества не пересекаются.* Например, для графа, представленного на рисунке 19, выходная вершина 11 достижима из входной вершины 1. Вершина 8 достижима из входа 1 и недостижима из вершины 11.

Анализ быстродействия системы

Быстродействие элементов, составляющих систему, определяется по их техническим характеристикам. Определить быстродействие больших систем довольно сложно, поскольку их быстродействие зависит не только от быстродействия элементов, но и от способа соединения элементов, характера связей. Если в систему входят быстродействующие элементы, то это еще не означает, что быстродействие системы в целом будет хорошее. Необходимо проанализировать характер связей между элементами и порядок прохождения сигналов через систему. Этот анализ можно выполнить на графе структурной схемы системы. Известно, что чем короче цепь, по которой сигнал проходит от одного элемента системы к другому, тем меньше времени тратится на передачу данного сигнала и тем выше быстродействие системы. Длину проходимой цепи можно оценивать числом устройств системы, числом связей. Если ввести в граф некоторые технические характеристики самих элементов системы такие, как время прохождения сигнала через элемент, скорость прохождения сигнала, задержка сигнала в элементе, инерционность элемента, то можно провести более точный анализ быстродействия системы.

Таким образом, во многих задачах анализа сложных систем, связанных с повышением быстродействия системы возникает потребность нахождения путей минимальной или максимальной длины. При этом возможны различные постановки задачи: найти кратчайшую (максимальную) цепь между двумя вершинами, найти все кратчайшие цепи между двумя вершинами, найти дерево кратчайших цепей с корнем в заданной вершине и т.д. По числу приложений задача о кратчайшей цепи занимает первое место среди других задач теории графов. Прежде чем перейти к рассмотрению этой задачи необходимо ввести понятие расстояния на графе, т. е. определить метрику графа.

Пусть задан граф $G = (X, U)$ и на графе определена функция расстояния $d(x_i, x_j)$ между двумя вершинами x_i, x_j таким образом, что длина цепи между двумя вершинами равна числу дуг, входящих в эту цепь. При таком определении каждой дуге сопоставляется единица условной длины. Под условной единицей можно понимать устройство в системе управления, единицу оборудования в технологической схеме и т. д. *Задача нахождения кратчайшего пути формулируется как задача нахождения такого маршрута между вершинами* x_i *и* x_j*, что* $d(x_i,x_j)=min$. Эта задача связана с нахождением такого пути в системе между двумя заданными элементами, при котором сигнал проходит наименьшее число устройств. Например, для графа системы, представленного на рис. 6, кратчайшим путем будет путь: 1, 2, 8, 11 По этому пути сигналу нужно пройти наименьшее число устройств от входа 1 до выхода 11.

Другой важной задачей является нахождение дерева кратчайших цепей с корнем в заданной вершине. В этой задаче находятся кратчайшие пути из заданной вершины до всех остальных вершин графа. По этим путям сигнал из данной точки системы распространяется быстрее, чем по другим путям. Далее можно определить максимальное и минимальное значение этих путей и, таким образом, оценить скорость передачи сигналов от данного элемента системы.

При решении задач, связанных с повышением быстродействия систем результаты исследования удобно представить некоторыми обобщенными характеристиками графа, которыми являются *радиус и диаметр графа*. Прежде чем дать определение этим характеристикам необходимо ввести понятие *эксцентриситета* вершины. *Эксцентриситетом вершины* называется длина максимального из наикратчайших путей от этой вершины до других вершин графа, т. е.:

$$e(x) = \max (d(x, x_i)),\ i=1, \dots, n, \tag{6}$$

где $e(x)$ — эксцентриситет вершины x;
$d(x, x_i)$ — расстояние от заданной вершины x до другой вершины x_i графа;
n — число вершин графа.

Разные вершины в графе имеют разный эксцентриситет, поэтому интересно знать верхнее и нижнее значение эксцентриситетов вершин.

Радиусом графа называется минимальный из эксцентриситетов его вершин, т. е.:

$$R(G) = \min (e(x_i)) , i=1, \dots , n, \tag{7}$$

где $R(G)$ — радиус графа G;
$e(x_i)$ — эксцентриситет x_i вершины графа;
n — число вершин графа.

Радиус графа дает нижнюю оценку скорости прохождения сигнала в системе. Однако, если $R(G)=0$, то это означает, что граф содержит вершины-тупики, из которых сигналы не поступают.

Диаметром графа называется максимальный из эксцентриситетов его вершин, т. е.:

$$D(G) = \max (e(x_i)) , i=1, \dots , n , \tag{8}$$

где $D(G)$ — диаметр графа G;
$e(x_i)$ — эксцентриситет x_i вершины графа;
n — число вершин графа.

Диаметр графа дает верхнюю оценку скорости прохождения сигнала в системе, т. е. сигнал от произвольной точки системы пройдет меньшее либо равное диаметру число устройств.

С эксцентриситетами вершин связана еще одна графовая задача — задача нахождения вершин графа, эксцентриситет которых равен радиусу или диаметру графа. Такие вершины называются центральными. *Центром графа* $G = (X, U)$ называется такое подмножество вершин X' из X, что для всех вершин x входящих в X' их эксцентриситет равен радиусу графа, т.е. $e(x) = R(G)$. Если $R(G)=0$, то это множество вершин-тупиков, т. е. стоков информации, иначе это множество точек системы, от которых сигнал до самой удаленной точки распространяется быстрее, чем от других точек системы. Эти точки лежат как бы в центре системы.

Периферией графа $G = (X , U)$ называется такое подмножество вершин X' из X, что для всех вершин x входящих в X' их эксцентриситет равен диаметру графа, т.е. $e(x) =D(G)$. Это подмножество критических точек системы, от которых сигнал до самой удаленной точки распространяется дольше всего, хотя до некоторых ближних точек сигнал может доходить достаточно быстро (например смежная точка). Поэтому при повышении быстродействия системы анализ нужно начинать с этих точек.

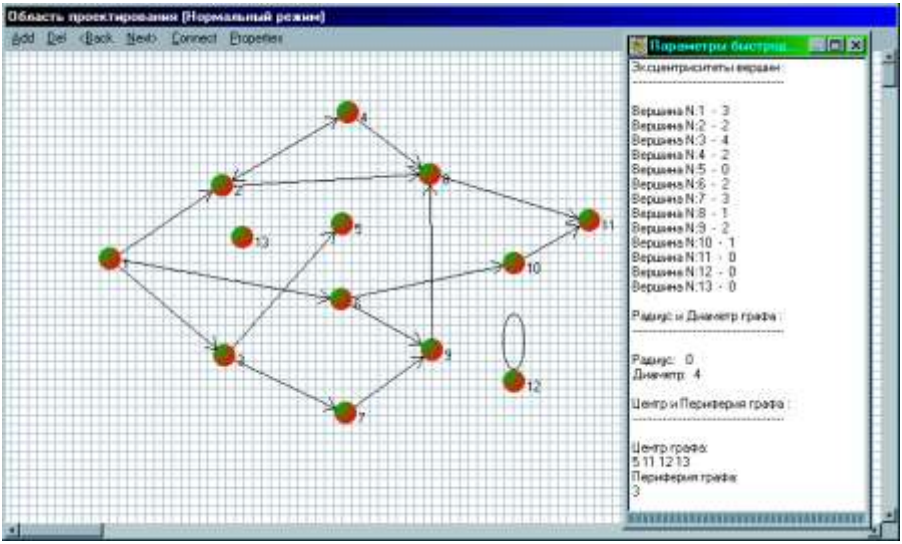


Рисунок 22. Параметры быстродействия

При данном выше определении расстояния имеется один недостаток. Дело в том, что на практике сигнал через разные устройства распространяется не с одинаковой скоростью. Поэтому естественнее было бы ввести расстояние другим образом. Пусть дан граф G = (X, U). Каждой дуге u (вершине x) графа G сопоставим вещественное неотрицательное число w(u)>0 (w(x) > 0), которое называется весом дуги (вершины). Если каждая дуга графа является некоторым устройством в системе, то число w может иметь значение скорости или времени прохождения сигнала через данное устройство. Таким образом, в граф системы включаются технические характеристики элементов системы. Данные выше определения будут сформулированы следующим образом. Длиной маршрута, проходящего через заданные дуги, называется сумма весов дуг, входящих в этот маршрут. Функция расстояния d(x, y) между двумя вершинами x и y определяется аналогично, как длина цепи с началом в x и концом в y. Задача нахождения кратчайшего пути формулируется как задача нахождения такого маршрута между вершинами x и y, что d(x,y)=min.

Аналогичные определения получаются и для обобщенных характеристик: радиуса, диаметра, центра и периферии. Например, для графа системы, представленного на рис. 6, кратчайший путь из входа 1 в выход 11 проходит через вершины: 1, 6, 10, 11:

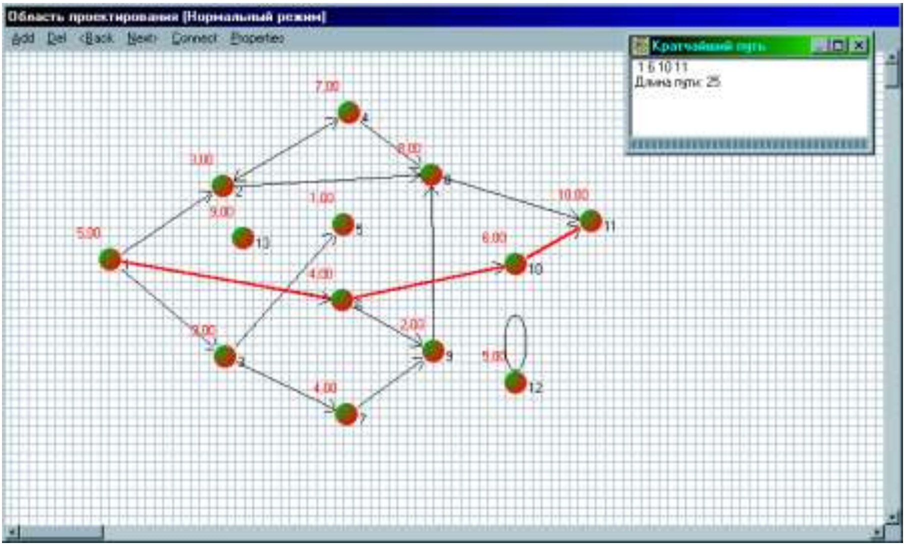


Рисунок 23. Поиск кратчайшего пути

Анализ надежности структуры

Надежность систем рассматривают в трех направлениях:

- надежность элементов системы;
- надежность структуры системы;
- исследование условий функционирования системы.

В теории графов рассматриваются вопросы, связанные со структурной надежностью. Представляя структурную схему системы в виде графа необходимо располагать методикой, позволяющей выделить и определить некоторые структурные параметры и дать им количественную оценку. В качестве параметров, определяющих качество структурной схемы при представлении ее графом, можно рекомендовать следующее:

- связанность графа;
- ранг элемента;
- множество точек сочленения;
- независимое подмножество;
- полное подмножество (клика).

Связанный граф — это граф, у которого любая пара вершин *взаимодостижима. Достижимость* некоторой вершины x графа из вершины y означает, что из вершины y существует маршрут в вершину x. Граф связан тогда и только тогда, когда любая пара вершин соединяется маршрутом. Этот параметр должен выявить в структуре наличие обрывов, отсутствие необходимых связей, «узкие» места в системе, слабосвязанные подсистемы, «висячие» вершины. Данный параметр достаточно прост для понимания, однако его оценка включает несколько подзадач. Как видно из определения, понятие связанности включает понятие достижимости. Поэтому необходимо сначала проверить достижимость вершин графа. Это является самостоятельной подзадачей анализа. Для определения достижимости всех вершин графа, т.е. элементов системы, используется матрица непосредственных путей графа.

Результаты проверки достижимости удобно представлять в виде **матрицы достижимости $\mathbf{A}^{д}$** графа. Элементы матрицы достижимости строятся следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из вершины i к вершине j существует путь ;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (9)$$

<u>УКАЗАНИЯ</u>

Данная контрольная работа может быть выполнена от руки на листах формата А4 или представлена в распечатанном варианте в результате использования программы «GRAF TOOLBOX». Все примеры в основных положениях к данной работе выполнены в программе «GRAF TOOLBOX».

Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Халимон В.И., Рогов А.Ю., Проститенко О.В., Крюков А.В. Использование программного комплекса «Комплекс ГРАФ» для исследования структур сложных систем: Методические указания / СПбГТИ(ТУ).- СПб, 2001.- 43 с.

2. Халимон В.И., Рогов А.Ю., Зайцева В.С. Анализ структур сложных систем графовыми методами: Учебное пособие / СПбГТИ(ТУ).- СПб, 2001.- 88 с.
3. Нечепуренко М.И. Алгоритмы и программя решения задач на графах и сетях.- Новосибирск: Наука, 1990.- 515 с.
4. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. – М.: Энергия, 1980. – 814 с.
5. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика: Учебник для взузов. – М.: Наука.
6. Белоусов А.И., Ткачев С.В. Дискретная математика: Учеб. для вузов/ под. ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 744 с

ЗАДАНИЕ: Необходимо изучить теоретический материал учебного пособия и решить следующие задачи:

1. Построить граф, состоящий из **Z** изолированных компонент мощностью $\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\ldots,\mathbf{N}_Z$ и **T** изолированных вершин. Во всём графе должно быть **I** истоков, **S** стоков, **V** висячих вершин, **R** регулярных вершин, три из которых имеют степени $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$. Максимальная степень кратности дуг графа должна быть **K**. В графе должно быть не меньше, чем **M** пар противоположных дуг.

   В отчете представить построенный граф с выделением всех построенных элементов. Надписать полустепени исхода и захода для каждой вершины. (*1 картинка*)

2. Построить ориентированный граф из **7** вершин и **14** дуг, содержащий один исток, один сток, одну изолированную вершину, одну регулярную вершину, одну петлю, пару одинаково направленных дуг, пару противоположно направленных дуг. С истоком и со стоком должно быть связано более двух дуг.

   Построить и проанализировать следующие способы представления графов: матрица смежности, матрица инцидентности, матрицы окрестностей вершин по входам и по выходам, список дуг. В отчете представить построенный граф и матричные представления графа с описанием. (*1 граф и 5 матриц*)

3. Построить связанный граф из **N** вершин, не содержащий висячих и изолированных вершин, но содержащий **T** точек сочленения так, чтобы они не были смежны. Рассчитать ранги вершин этого графа.

   В отчете представить построенный граф с выделенными точками сочленения и подписанными рангами каждой вершины. (*1 картинка*)

4. Построить связанный ориентированный граф, содержащий **K** сильных компонент связанности мощностью $\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\ldots,\mathbf{N}_K$. Свернуть граф по найденным компонентам.

   В отчете представить граф, раскрашенный по компонентам и граф-свертку. (*2 картинки*)

5. Построить связанный ориентированный ациклический непоследовательный граф, состоящий из **L** порядковых уровней мощностью $\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\ldots,\mathbf{N}_L$. Граф содержит N_1 истоков и N_L стоков. Свернуть граф по найденным уровням.

   В отчете представить граф, упорядоченный по уровням слева направо и граф-свертку. (*2 картинки*)

6. Построить связанный граф из **P** вершин и **Q** дуг. Используя метод, описанный в учебном пособии, перечислить все маршруты этого графа длиной **1**, **2**, **3**. В отчете привести граф и выкладки по вычислению матриц. (*1 граф и 3 матрицы*)

7. Построить связанный ориентированный граф из **N** вершин, содержащий один исток и один сток, не содержащий петель. Задать веса на дугах графа и пронумеровать все вершины. Между истоком и стоком построить **P** путей через остальные вершины, длиной больше **k**-дуг.

   Изменяя веса на дугах модифицировать граф так, чтобы кратчайшие пути по сумме весов и по количеству дуг между истоком и стоком не имели ни одной общей дуги (не совпадали). В отчете представить граф с выделенными путями, указать длину путей по весам и по количеству дуг. (*1 картинка*)

   На этом же графе построить исходящее дерево кратчайших путей с корнем в истоке и заходящее дерево кратчайших путей с корнем в стоке. (*2 картинки*)

8. Построить связанный ориентированный граф имеющий как <u>минимум **две** центральные</u> вершины, как <u>минимум **две** периферийные</u> вершины,

как <u>минимум **две** обычные</u> вершины так, чтобы его радиус был не равен нулю и не равен диаметру. Начать построение с 6 вершин, добиться результата добавлением и удалением дуг и вершин. Построить максимальное покрывающее **дерево** кратчайших путей.

В отчете представить построенный граф с выделенным деревом, центром и периферией, над вершинами надписать их эксцентриситеты, указать значения радиуса и диаметра графа. (*1 картинка*)

9.Придумать **Q** свойств некой системы из **N** элементов. Построить ориентированный граф системы, задать в качестве вспомогательного веса вершин текстовые идентификаторы, а в качестве основного веса – бинарные цепочки (ширина равна количеству свойств). Проставить на вершинах основные веса в виде цепочки нулей и единиц в зависимости от того обладает вершина соответствующим свойством (1) или нет (0). Используя метод «свертка по кодам» выполнить три свертки построенного графа при различных сочетаниях нулей и единиц в маске макро-свойств. В отчете представить описание свойств, описание элементов системы, исходный граф системы с бинарными весами, три графа свертки по трем маскам макросвойств. (*1 граф и 3 свертки*).

Выполнение почти всех частей данной работы возможно на домашнем персональном компьютере. Для этого необходимо получить разрешение у преподавателя на установку программного обеспечения дома. Запрещается распространение полученных программ или какое-либо коммерческое их использование.

Вариант № 1.

1. T=1 и Z=3 : N1=6, N2=8, N3=9 // I=2, S=3, V=2 // R=4 : r1=2, r2=3, r4=4 K=4 и M>2

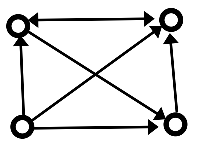
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=17 и T=4

4. K=5 : N1=2, N2=3, N3=4, N4=5, N5=6

5. L=5 : N1=2, N2=3, N3=4, N4=3, N5=2

6. Перечислить маршруты:



7. N=20 // P>4 и k>4

9. Q=6 и N=12

Вариант № 2.

1. T=1 и Z=4 : N1=2, N2=5, N3=6, N4=7 // I=3, S=3, V=3 // R=4 r1=2,r2=3, r4=4 // K=4 и M>3

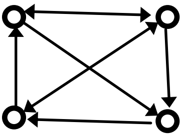
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=12 и T=3

4. K=5 : N1=4, N2=3, N3=1, N4=5, N5=6

5. L=5 : N1=3, N2=4, N3=2, N4=4, N5=3

6. Перечислить маршруты:



7. N=23 // P>5 и k>4

9. Q=6 и N=14

Вариант № 3.

1. T=2 и Z=4 : N1=3, N2=4, N3=5, N4=6 // I=2, S=2, V=2 // R=5 : r1=3, r2=4, r4=5 // K=5 и M>3

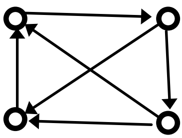
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=11 и T=3

4. K=4 : N1=4, N2=5, N3=6, N4=7

5. L=5 : N1=3, N2=1, N3=2, N4=4, N5=2

6. Перечислить маршруты:

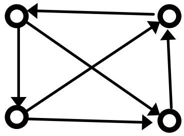


7. N=20 // P>4 и k>5

9. Q=7 и N=16

Вариант № 4.

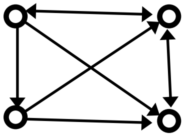
1. T=2 и Z=4 : N1=4, N2=5, N3=6, N4=7 // I=2, S=3, V=3 // R=5 : r1=1, r2=2, r4=3 // K=3 и M>3
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.
3. N=9 и T=2
4. K=4 : N1=3, N2=4, N3=5, N4=6
5. L=5 : N1=3, N2=2, N3=4, N4=2, N5=3
6. Перечислить маршруты:



7. N=20 // P>4 и k>4
9. Q=7 и N=14

Вариант № 5.

1. T=2 и Z=3 : N1=6, N2=7, N3=8 // I=3, S=2, V=3 // R=4 : r1=2, r2=3, r4=4 // K=5 и M>4
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.
3. N=8 и T=2
4. K=5 : N1=3, N2=4, N3=5, N4=6, N5=7
5. L=5 : N1=2, N2=1, N3=4, N4=4, N5=2
6. Перечислить маршруты:

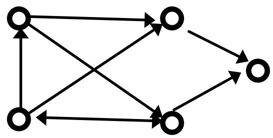


7. N=22 // P>3 и k>6
9. Q=7 и N=15

Вариант № 6.

1. T=3 и Z=3 : N1=5, N2=6, N3=7 // I=2, S=2, V=2 // R=3 : r1=2, r2=3, r4=4 // K=5 и M>3
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.
3. N=18 и T=4
4. K=5 : N1=4, N2=5, N3=6, N4=7, N5=1
5. L=5 : N1=3, N2=4, N3=5, N4=3, N5=2

6. Перечислить маршруты:



7. N=25 // P>5 и k>5

9. Q=6 и N=15

Вариант № 7.

1. T=1 и Z=5 : N1=2, N2=4, N3=5, N4=6, N5=7 // I=4, S=3, V=3 // R=5 : r1=3, r2=4, r4=5 // K=5 и M>4

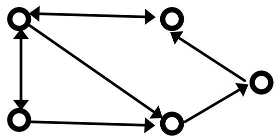
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=14 и T=4

4. K=6 : N1=4, N2=4, N3=3, N4=3, N5=5, N6=5

5. L=5 : N1=1, N2=3, N3=1, N4=2, N5=2

6. Перечислить маршруты:



7. N=25 // P>6 и k>4

9. Q=8 и N=14

Вариант № 8.

1. T=2 и Z=5 : N1=3, N2=4, N3=5, N4=6, N5=7 // I=3, S=4, V=3 // R=5 : r1=2, r2=3, r4=4 // K=4 и M>4

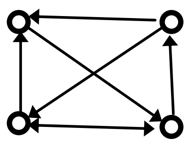
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=15 и T=4

4. K=4 : N1=2, N2=3, N3=4, N4=5

5. L=6 : N1=2, N2=2, N3=1, N4=3, N5=3, N6=2

6. Перечислить маршруты:

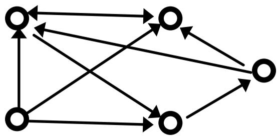


7. N=23 // P>4 и k>6

9. Q=8 и N=12

Вариант № 9.

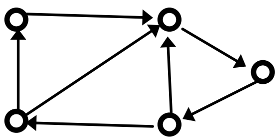
1. T=3 и Z=5 : N1=3, N2=5, N3=5, N4=6, N5=6 // I=3, S=3, V=2 // R=4 : r1=3, r2=4, r4=5 // K=5 и M>3
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.
3. N=13 и T=3
4. K=6 : N1=3, N2=3, N3=4, N4=4, N5=5, N6=5
5. L=5 : N1=2, N2=3, N3=4, N4=3, N5=2
6. Перечислить маршруты:



7. N=25 // P>6 и k>4
9. Q=6 и N=13

Вариант № 10.

1. T=3 и Z=5 : N1=2, N2=5, N3=5, N4=7, N5=7 // I=2, S=2, V=2 // R=4 : r1=2, r2=4, r4=6 // K=6 и M>4
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.
3. N=11 и T=2
4. K=6 : N1=4, N2=4, N3=5, N4=5, N5=6, N6=6
5. L=5 : N1=2, N2=3, N3=4, N4=3, N5=2
6. Перечислить маршруты:



7. N=25 // P>7 и k>4
9. Q=7 и N=13

Вариант № 11.

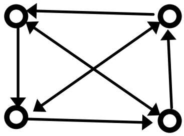
1. T=2 и Z=6 : N1=3, N2=5, N3=5, N4=6, N5=6, N6=7 // I=3, S=4, V=3 // R=5 : r1=4, r2=5, r4=6 // K=5 и M>4
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=14 и T=3

4. K=6 : N1=2, N2=3, N3=3, N4=4, N5=4, N6=5

5. L=4 : N1=2, N2=4, N3=3, N4=2

6. Перечислить маршруты:



7. N=22 // P>6 и k>6

9. Q=8 и N=13

Вариант № 12.

1. T=3 и Z=6 : N1=4, N2=4, N3=5, N4=5, N5=6, N6=6 // I=4, S=4, V=3 // R=5 : r1=3, r2=4, r4=5 // K=5 и M>4

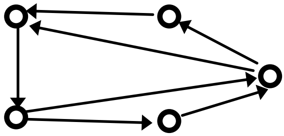
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=10 и T=2

4. K=6 : N1=1, N2=2, N3=3, N4=4, N5=5, N6=6

5. L=4 : N1=3, N2=2, N3=4, N4=3

6. Перечислить маршруты:



7. N=22 // P>3 и k>7

9. Q=8 и N=15

Вариант № 13.

1. T=1 и Z=3 : N1=5, N2=6, N3=7 // I=2, S=2, V=1 // R=3 : r1=1, r2=2, r4=3 // K=3 и M>2

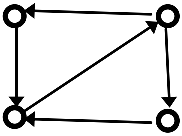
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=10 и T=2

4. K=5 : N1=3, N2=4, N3=5, N4=6, N5=6

5. L=5 : N1=2, N2=1, N3=2, N4=3, N5=2

6. Перечислить маршруты:



7. N=18 // P>3 и k>3

9. Q=5 и N=12

Вариант № 14.

1. T=2 и Z=5 : N1=3, N2=8, N3=4, N4=5, N5=6 // I=4, S=3, V=2 // R=6 : r1=1, r2=2, r4=3 // K=5 и M>3

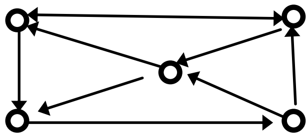
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=20 и T=5

4. K=6 : N1=3, N2=3, N3=4, N4=4, N5=5, N6=5

5. L=7 : N1=2, N2=3, N3=4, N4=3, N5=2, N6=3, N7=2

6. Перечислить маршруты:



7. N=24 // P>6 и k>5

9. Q=6 и N=15

Вариант № 15.

1. T=2 и Z=4 : N1=6, N2=6, N3=5, N4=5 // I=3, S=3, V=1 // R=4 : r1=2, r2=3, r4=4 // K=4 и M>2

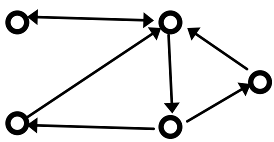
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=12 и T=3

4. K=5 : N1=4, N2=4, N3=5, N4=5, N5=6

5. L=7 : N1=2, N2=1, N3=3, N4=2, N5=1, N6=3, N7=2

6. Перечислить маршруты:



7. N=25 // P>5 и k>4

9. Q=6 и N=20

Вариант № 16.

1. T=3 и Z=3 : N1=8, N2=9, N3=10 // I=3, S=4, V=3 // R=5 : r1=2, r2=3, r4=4 // K=5 и M>3

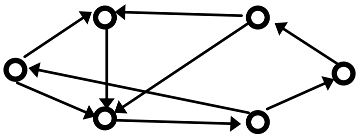
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=20 и T=4

4. K=6 : N1=3, N2=3, N3=4, N4=4, N5=5, N6=5

5. L=7 : N1=2, N2=3, N3=1, N4=2, N5=4, N6=3, N7=3

6. Перечислить маршруты:



7. N=22 // P>4 и k>5

9. Q=7 и N=15

Вариант № 17.

1. T=2 и Z=5 : N1=5, N2=6, N3=7, N4=8, N5=9 // I=4, S=4, V=3 // R=6 : r1=3, r2=4, r4=6 // K=6 и M>4

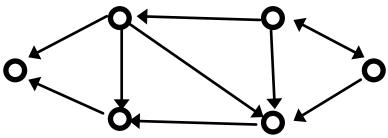
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=20 и T=5

4. K=8 : N1=3, N2=3, N3=4, N4=4, N5=5, N6=5, N7=6, N8=6

5. L=8 : N1=2, N2=3, N3=1, N4=4, N5=2, N6=2, N7=3, N8=3

6. Перечислить маршруты:



7. N=26 // P>6 и k>5

9. Q=7 и N=20

Вариант № 18.

1. T=3 и Z=5 : N1=4, N2=5, N3=6, N4=7, N5=8 // I=5, S=3, V=3 // R=6 : r1=3, r2=4, r4=5 // K=6 и M>3

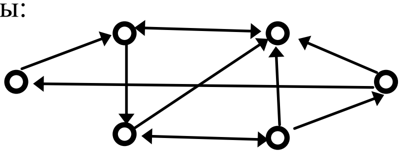
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=22 и T=6

4. K=7 : N1=3, N2=3, N3=4, N4=4, N5=5, N6=5, N7=6

5. L=8 : N1=3, N2=2, N3=4, N4=1, N5=2, N6=3, N7=2, N8=3

6. Перечислить маршруты:



7. N=27 // P>7 и k>4

9. Q=5 и N=10

Вариант № 19.

1. T=1 и Z=5 : N1=2, N2=4, N3=6, N4=8, N5=10 // I=3, S=5, V=3 // R=6 : r1=3, r2=4, r4=5 // K=6 и M>4

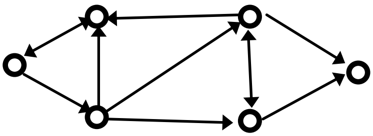
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=23 и T=6

4. K=6 : N1=4, N2=4, N3=5, N4=5, N5=6, N6=6

5. L=9 : N1=2, N2=2, N3=3, N4=1, N5=2, N6=2, N7=3, N8=4, N9=3

6. Перечислить маршруты:



7. N=25 // P>4 и k>7

9. Q=4 и N=10

Вариант № 20.

1. T=3 и Z=5 : N1=6, N2=6, N3=7, N4=7, N5=8 // I=4, S=4, V=2 // R=5 : r1=3, r2=4, r4=5 // K=6 и M>3

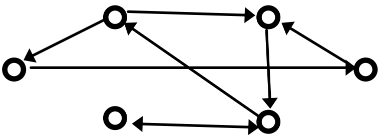
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=25 и T=6

4. K=6 : N1=3, N2=6, N3=5, N4=5, N5=4, N6=8

5. L=8 : N1=3, N2=2, N3=1, N4=2, N5=4, N6=3, N7=4, N8=3

6. Перечислить маршруты:



7. N=25 // P>4 и k>5

9. Q=7 и N=15

Вариант № 21.

1. T=2 и Z=3 : N1=10, N2=9, N3=8 // I=4, S=4, V=2 // R=5 : r1=3, r2=4, r4=5 // K=5 и M>3

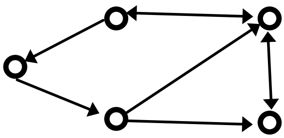
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=14 и T=2

4. K=6 : N1=2, N2=3, N3=4, N4=5, N5=6, N6=7

5. L=7 : N1=2, N2=3, N3=2, N4=4, N5=3, N6=2, N7=3

6. Перечислить маршруты:



7. N=20 // P>3 и k>5

9. Q=6 и N=12

Вариант № 22.

1. T=2 и Z=2 : N1=12, N2=14 // I=2, S=2, V=2 // R=4 : r1=1, r2=2, r4=3 // K=5 и M>4

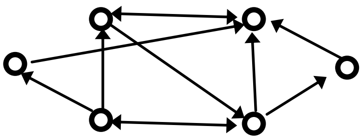
2. Матрицы: VV, VU, FO, FI, IO.

3. N=14 и T=2

4. K=5 : N1=2, N2=3, N3=4, N4=5, N5=6

5. L=8 : N1=3, N2=2, N3=4, N4=3, N5=2, N6=4, N7=3, N8=2

6. Перечислить маршруты:



7. N=29 // P>5 и k>7

9. Q=6 и N=18

О б р а з е ц   в ы п о л н е н и я   з а д а н и я

Цель работы

Изучение основ теории графов, базовых понятий и определений; ознакомление с задачами, возникающими в теории графов и методами их решения; освоение компьютерных способов представления графов и алгоритмов машинной обработки графов.

Освоение компьютерных технологий обработки графов; изучение специализированных программных продуктов для ввода, редактирования и анализа графов на ЭВМ.

Практическая часть

Практическая часть работы была реализована с помощью программы GRAPH TOOLBOX 1.3 (build 3010.20.02) с использованием материалов методического пособия «Анализ структур сложных систем графовыми методами».

Задание 1

Построить граф, состоящий из 3 изолированных компонент мощностью 4, 5, 6 и 1 изолированных вершины. Во всём графе должно быть 2 истока, 2 стока, 1 висячие вершины, 3 регулярных вершин, три из которых имеют степени 1, 2, 3. Максимальная степень кратности дуг графа должна быть 3. В графе должно быть не меньше, чем 2 пар противоположных дуг.

В отчете представить построенный граф с выделением всех построенных элементов. Надписать полустепени исхода и захода для каждой вершины.

Вершины изолированных компонент:

2, 3, 4, 5 (мощность 4);

6, 7, 8, 9, 10 (мощность 5);

11, 12, 13, 14, 15, 16 (мощность 6).

Изолированные вершины: 1.

Вершины-истоки: 4, 6.

Вершины-стоки: 5, 16.

Висячие вершины: 16.

Регулярные вершины:

2 (степень 1), 8 (степень 2), 11 (степень 3).

Пары противоположных дуг:

9-11, 12-13, 18-19, 20-23, 16-24.

Полустепени исхода и захода вершин:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
p+	**0**	**1**	**1**	**0**	**3**	**0**	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**1**	**3**	**1**	**2**	**1**
p-	**0**	**1**	**2**	**2**	**0**	**3**	**1**	**2**	**1**	**1**	**3**	**2**	**2**	**3**	**1**	**0**

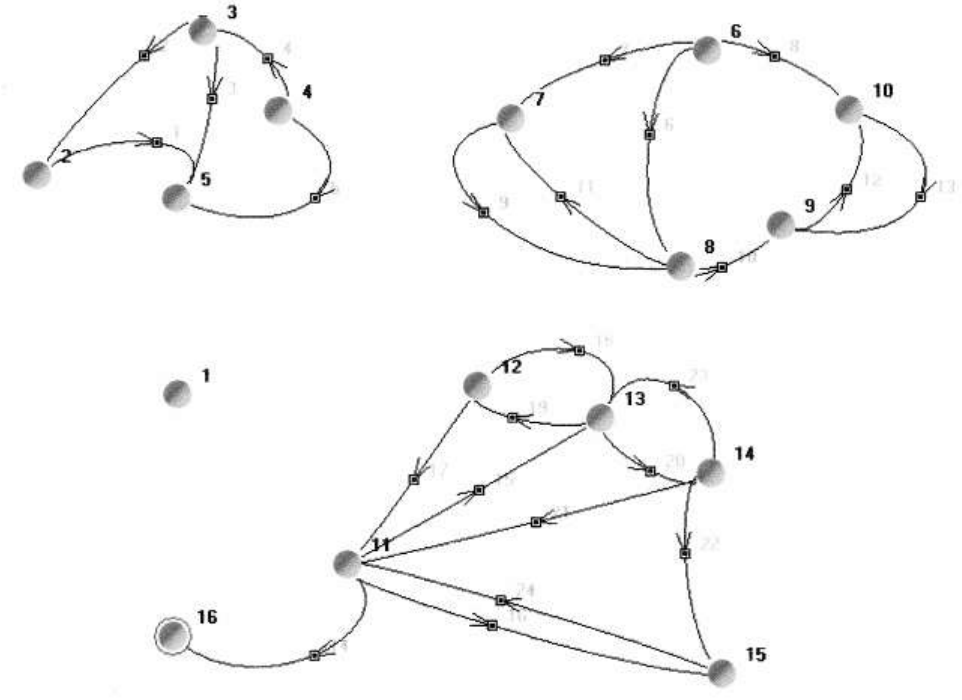


Рисунок 24

Задание 2

Построить ориентированный граф из 7 вершин и 14 дуг, содержащий один исток, один сток, одну изолированную вершину, одну регулярную вершину, одну петлю, пару одинаково направленных дуг, пару противоположно направленных дуг. С истоком и со стоком должно быть связано более двух дуг.

Построить и проанализировать следующие способы представления графов: матрица смежности, матрица инцидентности, матрицы окрестностей вершин по входам и по выходам, список дуг. В отчете представить построенный граф и матричные представления графа с описанием. (1 граф и 5 матриц)

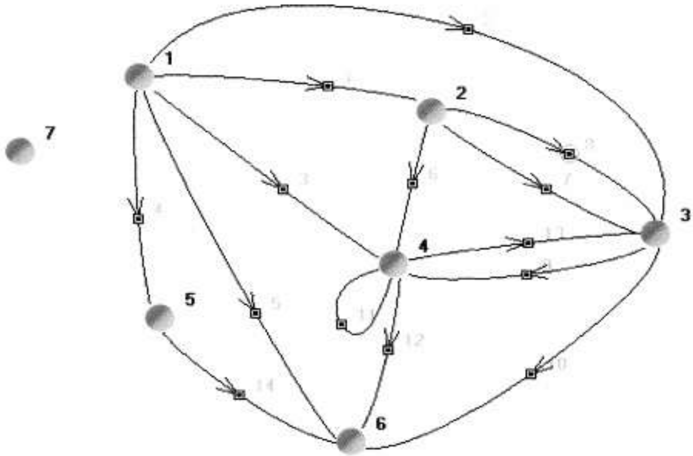


Рисунок 25

Матрица смежности:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	1	1	0
2	0	0	2	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	1	0
4	0	0	1	1	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Матрица инцидентности:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	-1	-1	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Матрица окрестностей вершин по входам:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
FI	1	1	4	2	2	1	4	3	2	1	1	5	4	3
KAO	1	1	2	6	10	11	15	15						

Матрица окрестностей вершин по выходам:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
FO	2	3	4	5	6	4	3	3	4	6	4	6	3	6
KAO	1	6	9	11	14	15	15	15						

Список дуг:

IU	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5
OU	2	3	4	5	6	4	3	3	4	6	4	6	3	6

Из матрицы смежности:

Единица в четвертой строке на главной диагонали говорит о том, что четвертая вершина имеет дугу-петлю. Вершины 4 и 3 имеют противоположно направленные дуги, т. к. соответствующие элементы матрицы, симметричные главной диагонали, заполнены. Т.к. число во второй строке третьего столбца - 2, то в графе имеются две кратные дуги, направленные от 2-ой к 3-ей вершине. Строки матрицы соответствуют выходным окрестностям вершин, а столбцы - входным окрестностям. Сумма элементов по строке равна полустепени исхода соответствующей вершины, а сумма элементов по столбцу - полустепени захода. Вершине-истоку 1 соответствует нулевой столбец 1 и ненулевая строка 1, а вершине-стоку 6 соответствует нулевая строка 6 и ненулевой столбец 6. Изолированной вершине 7 соответствует нулевая строка 7 и нулевой столбец 7.

Из матрицы инцидентности:

Дуге-петле 11 в матрице инцидентности соответствует единственная единица в 11-ом столбце, расположенная в строке с номером вершины, которой она принадлежит. Столбцы 7 и 8 одинаковы, следовательно, соответствующие дуги являются кратными. Столбцы 13 и 9 станут одинаковыми, если в них поменять местами -1 и 1, следовательно, соответствующие им дуги противоположно направлены. Количество -1 в любой строке равно полустепени исхода соответствующей вершины, а количество 1 равно полустепени захода. Изолированной вершине 7 соответствует нулевая 7-ая строка. Вершине-истоку 1 соответствует 1-ая строка, в которой имеются -1 и нет 1. Вершине-стоку 6 соответствует 6-ая строка, в которой имеются 1 но нет -1.

Из списка дуг:

Дуге-петле 11 графа соответствует столбец матрицы списка дуг, в котором элементы равны между собой и равны номеру вершины, которой эта дуга принадлежит. Т.к. дуги 7 и 8 кратны, им соответствуют одинаковые столбцы 7 и 8 матрицы. Противоположно направленным дугам 9 и 13 соответствуют 9 и 13 столбцы матрицы, которые оказываются одинаковыми, если в одном из них переставить местами элементы. Полустепень исхода любой вершины - количество повторений ее номера в первой строке матрицы, а полустепень захода - количество повторений ее номера во второй строке матрицы. Изолированная вершина 7 имеет номер, который не встречается ни в первой, ни во второй строке. Вершина-исток 1 имеет номер, который встречается в первой и не встречается во второй строке, а вершина-сток 6 имеет номер, который встречается во второй и не встречается в первой строке.

Из матриц окрестностей вершин:

Если в графе имеются кратные дуги, то в i-ой окрестности массива FO (FI) имеются повторяющиеся номера вершин. Противоположные дуги между вершинами i и j находятся как номер j встречается в окрестности i-ой вершины и одновременно номер i есть в окрестности j-ой вершины.

Задание 3

Построить связанный граф из 20 вершин, содержащий 5 точек сочленения, и не содержащий висячих и изолированных вершин. Рассчитать ранги вершин этого графа.

В отчете представить построенный граф с выделенными точками сочленения и подписанными рангами каждой вершины.

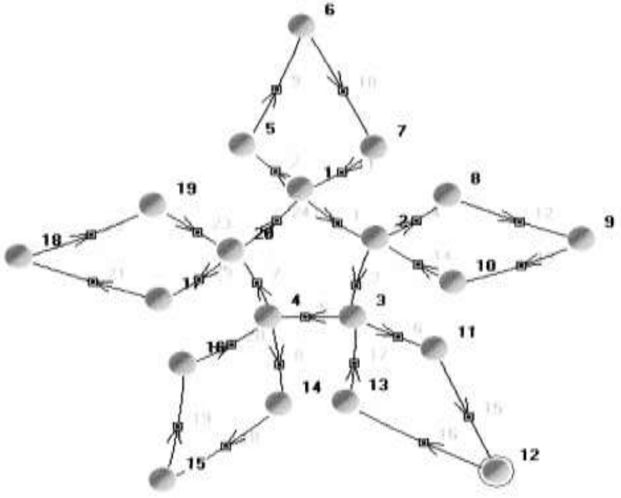


Рисунок 26

Матрица достижимости графа A и ранги вершин графа.

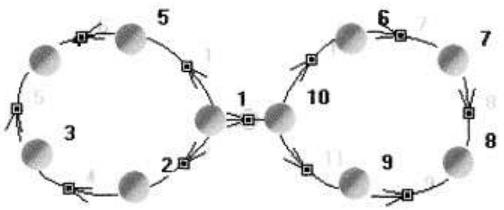
Очевидно, в матрице достижимости графа все элементы - единицы, следовательно матрица достижимости - единичная матрица 20x20. Следовательно, все элементы матрицы $R = A + AA$ будут равны 21.

Т.к. ранг вершины графа равен отношению суммы элементов соответствующей строки к сумме элементов всей матрицы, то ранги всех вершин графа будут равны:

$$r = \frac{21*20}{21*20*20} = \frac{1}{20} = 0.05$$

Построить связанный граф из 10 вершин, содержащий 2 точек сочленения, и не содержащий висячих и изолированных вершин. Рассчитать ранги вершин этого графа.

В отчете представить построенный граф с выделенными точками сочленения и подписанными рангами каждой вершины.



Матрица достижимост...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
10	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Рисунок 27

Матрица достижимости графа А и ранги вершин графа:

Ранги элементов вычисляются по следующей формуле: $R = A + AA$, где А - матрица достижимости графа.

R =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	3	4	5	3	4	5	6	4	3
1	0	2	3	3	0	0	0	0	0	0
2	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	2	3	3	0	0
6	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0
9	0	0	0	0	0	3	4	5	3	2

$Rang := A + A \cdot A$

$i := 0..9$

$R_i := \sum_{j=0}^{9} Rang_{i,j}$

$Res := \sum_i R_i$

$Res = 88$

$r_i := \frac{R_i}{Res}$

R =

	0
0	39
1	8
2	4
3	0
4	4
5	8
6	4
7	0
8	4
9	17

Рисунок 28

Т.к. ранг вершины графа равен отношению суммы элементов соответствующей строки к сумме элементов всей матрицы, то ранги вершин графа будут равны:

r =

	0
0	0.443
1	0.091
2	0.045
3	0
4	0.045
5	0.091
6	0.045
7	0
8	0.045
9	0.193

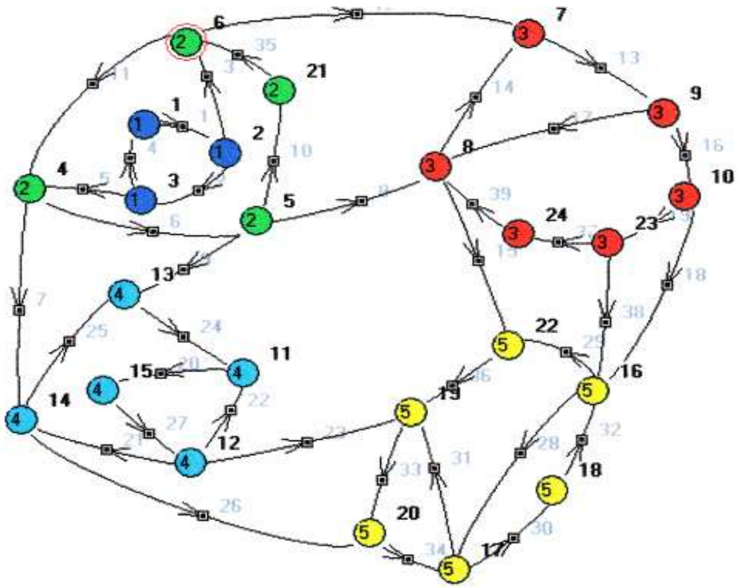
Вершины 4 и 8 не имеют путей к остальным вершинам графа и они являются выходами системы. У данных элементов отсутствует влияние на остальные элементы, поэтому ранги равны нулю. Элементы 2 и 6, 3, 5, 7 и 9 имеют одинаковые ранги, что свидетельствует о их одинаковой значимости в системе. Выход из строя любого из элементов 2 и 6; 3, 5, 7 и 9 будет иметь примерно одинаковые последствия - система лишится одной из своих функций, но будет продолжать функционировать.

Задание 4

Построить связанный ориентированный граф, содержащий 5 сильных компонент связанности мощностью 3,4, 5, 6, 6. Свернуть граф по найденным компонентам.

В отчете представить граф, раскрашенный по компонентам и граф-свертку.

Сильные компоненты :



Свертка графа:

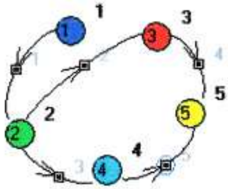
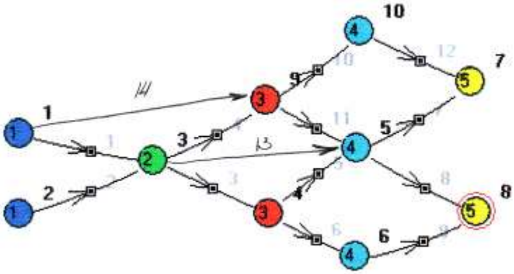


Рисунок 29

Задание 5

Построить связанный ориентированный ациклический непоследовательный граф, состоящий из 5 порядковых уровней мощностью 2, 1,3, 3, 2. Граф содержит 2 истоков и 2 стока. Свернуть граф по найденным уровням. В отчете представить граф, упорядоченный по уровням слева направо и граф-свертку.



Свертка графа:

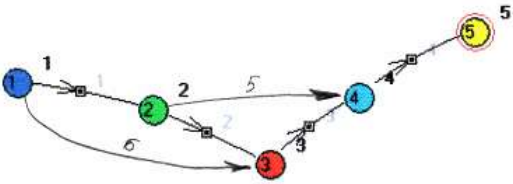
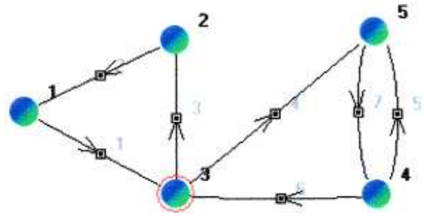


Рисунок 30

Задание 6

Построить связанный граф из 5 вершин и 7 дуг. Используя метод, описанный в учебном пособии, перечислить все маршруты этого графа длиной 1, 2, 3. В отчете привести граф и выкладки по вычислению матриц. (1 граф и 3 матрицы)

Матрица маршрутов  длины 1, Mc^1:

•

Рисунок 31

	V1	V2	V3	V4	V5
V1			v1u1v3		
V2	v2u2v1				
V3		v3u3v2			v3u4v5
V4			v4u6v3		v4u5v5
V5				v5u7v4	

Матрица маршрутов длины 2, $Mc^2 = Mc^1Mc^1$:

	V1	V2	V3	V4	V5
V1		v1u1v3u3v2			v1u1v3u4v5
V2			v2u2v1u1v3		
V3	v3u3v2u2v1			v3u4v5u7v4	
V4		v4u6v3u3v2		v4u5v5u7v4	v4u6v3u4v5
V5			v5u7v4u6v3		v5u7v4u5v5

Матрица маршрутов длины 2, $Mc^3 = Mc^2Mc^1$:

	V1	V2	V3	V4	V5
V1	v1u1v3u3v2u2v1			v1u1v3u4v5u7v4	
V2		v2u2v1u1v3u3v2			v2u2v1u1v3u4v5
V3			v3u3v2u2v1u1v3 v3u4v5u7v4u6v3		v3u4v5u7v4u5v5
V4	v4u6v3u3v2u2v1		v4u5v5u7v4u6v3	v4u6v3u4v5u7v4	
V5		v5u7v4u6v3u3v2			v5u7v4u6v3u4v5

Задание 7

Построить связанный ориентированный граф из 22 вершин, содержащий один исток и один сток, не содержащий петель. Задать веса на дугах графа и пронумеровать все вершины. Между истоком и стоком построить P>6 путей через остальные вершины, длиной больше 5 дуг.

Изменяя веса на дугах модифицировать граф так, чтобы кратчайшие пути по сумме весов и по количеству дуг между истоком и стоком не имели ни одной общей дуги (не совпадали). В отчете представить граф с выделенными путями, указать длину путей по весам и по количеству дуг. (1 картинка)

На этом же графе построить исходящее дерево кратчайших путей с корнем в истоке и заходящее дерево кратчайших путей с корнем в стоке.

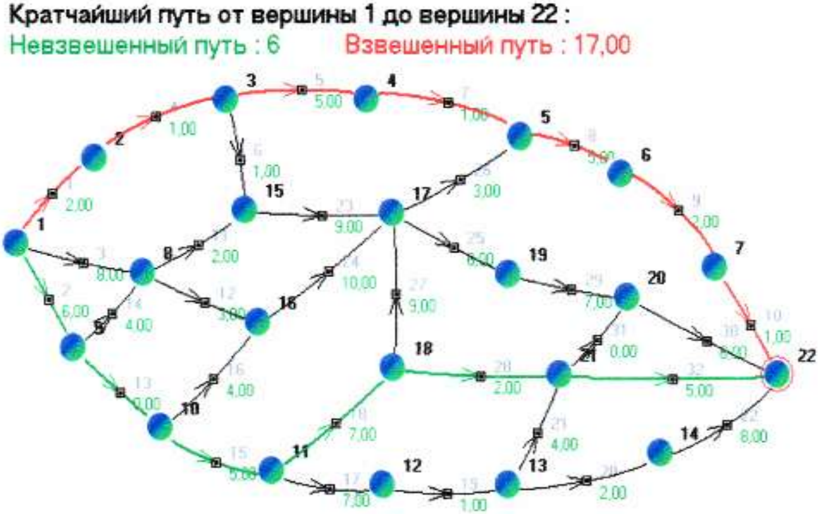


Рисунок 32

Вершина-исток - 1, вершина сток - 22. Между истоком и стоком существует более 6-ти путей, длиной более 5-и дуг. Кратчайший путь по количеству дуг (6 дуг, вес 25) и кратчайший путь по весам дуг (7 дуг, вес 17) не имеют ни одной общей дуги.

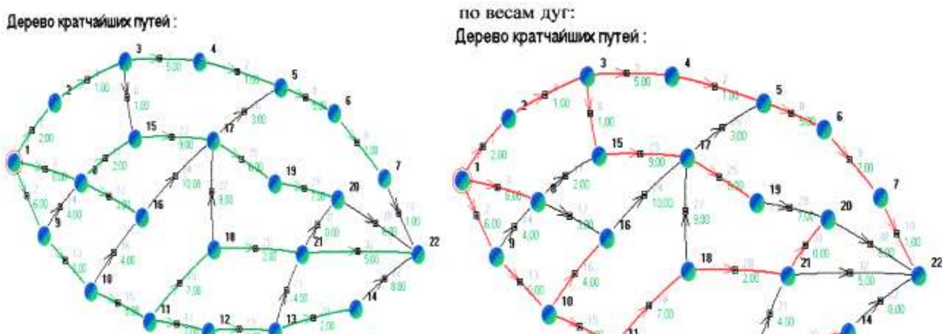


Рисунок 33

Заходящее дерево кратчайших путей в корнем в вершине-стоке (22):

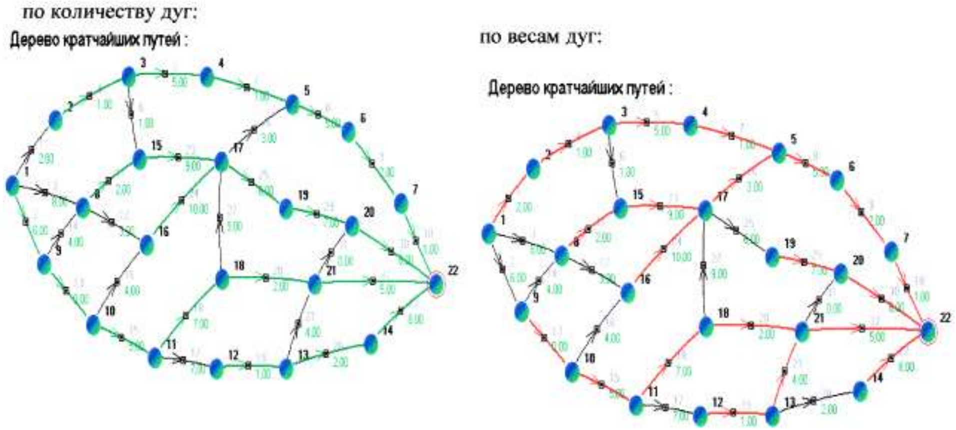


Рисунок 34

Задание 8

Построить связанный ориентированный граф, имеющий как минимум **две** центральные вершины, как минимум **две** периферийные вершины, как минимум **две** обычные вершины так, чтобы его радиус был не равен нулю и не равен диаметру. Начать построение с 6 вершин, добиться результата добавлением и удалением дуг и вершин. Построить максимальное покрывающее дерево кратчайших путей.

В отчете представить построенный граф с выделенным деревом, центром и периферией, над вершинами надписать их эксцентриситеты, указать значения радиуса и диаметра графа.

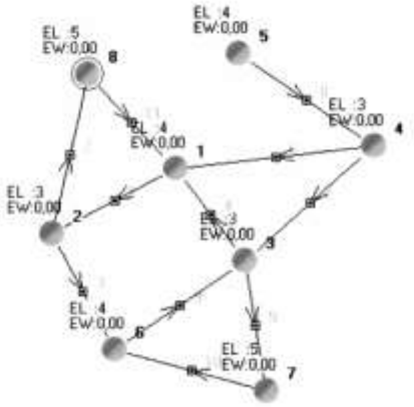


Рисунок 35

Эксцентриситеты вершин:

exc(1)=4;   exc(2)=3;   exc(3)=3;   exc(4)=3;

exc(5)=4;   exc(б)=4;   exc(7)=5;   exc(8)=5.

Центральные вершины:

2,   3,   4   (exc=3).

Периферийные вершины:

7,   8   (exc=5).

Обычные вершины:

1,   5,   6   (exc=4).

Радиус графа:

$R=exc(2)=exc(3)=exc(4)=3\neq 0$.

Диаметр графа:

$D=exc(7)=exc(8)=5\neq R$.

Вывод:

В данной лабораторной работе были изучены различные способы представления графов и методы исследования топологических структур с использованием основных положений теории графов.

3 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Основные законы булевой алгебры и правила преобразований

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

ЛОГИЧЕСКИЕ (БУЛЕВЫ) ФУНКЦИИ

Основные понятия

В курсе математического анализа изучаются функции, определённые на числовой прямой или на отрезке числовой прямой или на плоскости и т.п. Так или иначе область определения – *непрерывное* множество. В курсе дискретной математики изучаются функции, область определения которых – *дискретное* множество. Простейшим (но нетривиальным) таким множеством является множество, состоящее из двух элементов. Таким образом, частным случаем функции $y=f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ является функция, значения которой и значения компонент её аргумента принадлежат множеству $\{0;1\}$. Такую функцию называют *логической.* Аргумент логической функции $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ часто называют *двоичным(или булевым)* вектором, а его компоненты-*двоичными(или булевыми) переменными.*

Логическую функцию также называют *логической операцией*, т.к. значения функции и её аргументов принадлежат одному множеству $\{0;1\}$. *Знаки логических операций называют логическими связками.*

Алгебру, носителем которой является множество $X=(x_1;x_2;\ldots\ldots x_n,y\}$, элементы которого принимают значения на множестве $\{0;1\}$, а сигнатура которой определена множеством логических связок(логических операций), называют алгеброй логики.

Два возможных значения логических переменных называют **ИСТИНА (TRUE)** и **ЛОЖЬ (FALSE)**, иногда их называют **ДА** и **НЕТ,** а чаще всего их обозначают **1** и **0**. При этом следует помнить, что эти логические 0 и 1 нельзя трактовать как числа, над ними нельзя производить арифметические действия.

Логическая функция может быть задана четырьмя способами:
– словесно (описанием ситуации),
– алгебраическим выражением,
– таблицей истинности
– электрической схемой, состоящей из контактов переключателей.

Например:

1.Лифт можно вызвать, если закрыты двери лифта на первом этаже и на втором этаже и на третьем этаже.
2.Если закрытые двери на первом этаже обозначить как A = 1, на втором – B = 1, на третьем – C = 1, возможность вызвать лифт обозначить как F = 1, а логическую функцию И обозначить знаком умножения " × ", то алгебраическое выражение будет иметь вид :

$$F = A\times B\times C \tag{10}$$

3.В таблицу истинности заносятся все возможные комбинации входных аргументов и соответствующие этим комбинациям значения выходной функции. Входные комбинации записываются в порядке возрастания их значений от всех нулей до всех единиц сверху вниз. Таблица истинности, соответствующая данному примеру будет иметь следующий вид:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

4.Электрическая контактная схема обладает хорошей наглядностью, но может быть легко построена лишь для самых простых логических функций. Для нашего примера эта схема может иметь следующий вид:

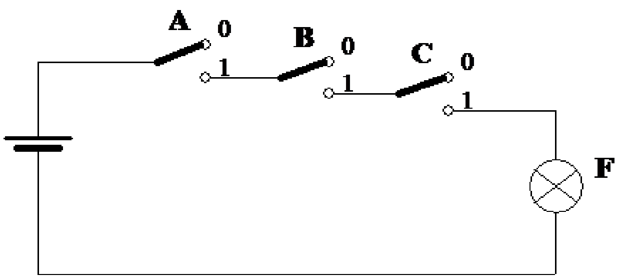


Рисунок 36

Многообразие значений логической функции $f(x_1;x_2;\ldots;.x_n)$ определено многообразием значений её аргумента, т.е. $|y|=2^{|(x1;x2;\ldots..xn)|}$.

Например, для вектора $(x_1;x_2;x_3)$ имеем: $|\{(x_1;x_2;x_3)\}|=2^3=8$, т.е. $\{(0;0;0);(0;0;1);(0;1;0);(0;1;1);(1;0;0);(1;0;1);(1;1;0);(1;1;1)\}$. Для функции $y=f(x_1;x_2;\ldots x_8)$ имеем: $|y|=2^8=256$.

Для изображения аргумента логической функции, используют n-мерный куб с длиной ребра 1. Так, для вектора $(x_1;x_2;x_3)$, представленного на рис. 37-а), каждая вершина графа куба имеет единственный набор значений компонент этого вектора. Для вектора $(x_1;x_2;x_3;x_4)$, представленного на рис. 37-б), каждая вершина 4-мерного куба также имеет единственный набор значений компонент вектора.

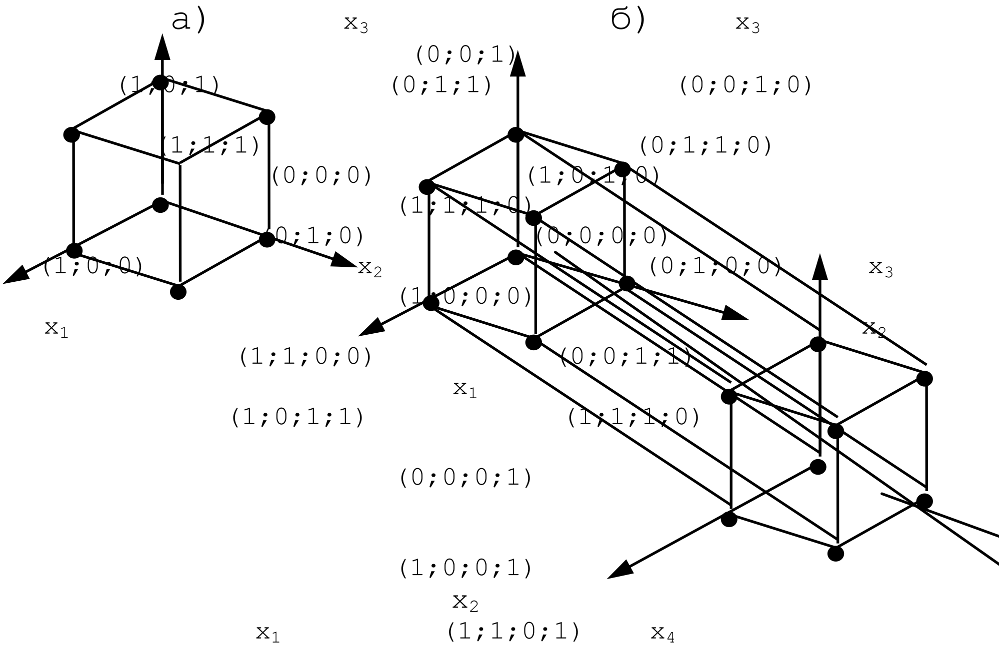


Рис. 37. Единичные кубы для векторов $(x_1;x_2;x_3)$ и $(x_1;x_2;x_3;x_4)$.

Булевый вектор $(x_1;x_2;x_3;x_4)$ часто называют тетрадой, как содержащий четыре компоненты.

Следует обратить внимание, что две вершины куба, принадлежащие одному ребру, отличаются между собой только значениями одной компоненты; четыре вершины, принадлежащие одной плоскости, отличаются между собой только значениями двух компонент булевого вектора.

При табличном задании функции необходимо для каждого набора двоичного вектора, т.е. аргумента логической функции, указать её значение (см. таблицу 1). Если значение функции определено не для всех наборов двоичного вектора, то функция называется частично определённой. Число строк полностью определённой функции от n компонентов аргумента равно 2^n.

Таблица 1

x_1	x_2	……	x_n	$f(x_1;x_2;……x_n)$
0	0	……	0	0
1	0	……	0	0
0	1	…	0	1
1	1	……	0	1
……	……	……	……	……
1	1	……	1	0

При аналитическом задании логической функции используют элементарные унарные и бинарные операции , а также правила подстановки и замещения при формировании формул логической функции.

Описание логической функции одной и двух двоичных переменных.

Как уже было отмечено, число логических функций для n компонентов аргумента определяется выражением: 2^p, где $p=2^n$.
Для n=1 число возможных значений логической функции равно 4 (см. табл. 2).

Таблица 2.

X	y=f(x)			
	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Анализ таблицы 2 позволяет дать определение каждой из четырёх логических функций:

- $f_0(x)$ - функция-константа “0”, т.к. она не изменяет своего значения при изменении аргумента, т.е. $(y=0)$, переменная x для этой функции несущественна;
- $f_1(x)$ - функция повторитель, т.к. она принимает значения, равные значению аргумента, т.е. $(y=x)$;
- $f_2(x)$ – функция отрицания, т.к. она принимает значения противоположные значению аргумента, т.е. $(y=\overline{x})$, эта функция может еще обозначаться: $\rceil x$, $\neg x$, \`x;
- $f_3(x)$ - функция-константа “1”, т.к. она не изменяет своего значения при изменении аргумента, т.е. $(y=1)$ и, как для функции $f_0(x)$, переменная x для этой функции несущественна.

Все функции таблицы 22 – унарные, т.к. это функции от одной переменной.

Для n=2 число возможных значений логической функции равно 16 (см. табл. 3).

Таблица 3

Аргум.		Функция $y=f_i(x_1,x_2)$															
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

В таблице 4 приведены имена всех логических функций.

Таблица 4

№№	имя логической функции	формула логической функции	“чтение” логической функции
f_0	константа “0”	0	“любой ноль”
f_1	**конъюнкция (логическое “И” совпадение)**	**$(x_1 \cdot x_2)$**	**“x_1 и x_2“**
f_2	отрицание импликации	$\rceil(x_1 \to x_2)=x_1 \cdot \overline{x_2}=\rceil(\overline{x_1} \vee x_2)$	“не если x_1, то x_2”
f_3	повторитель первого аргумента	x_1	“как x_1“

f_4	отрицание обратной импликации	$\urcorner(x_2 \to x_1) = \bar{x}_1 \cdot x_2 = \urcorner(x_1 \vee \bar{x}_2)$	“не если x_2, то x_1”
f_5	повторитель второго аргумента	x_2	“как x_2“
$\mathbf{f_6}$	**отрицание эквивалентности (сложение по модулю 2)**	$\urcorner(x_1 \leftrightarrow x_2) = (x_1 \oplus x_2) = (\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2)$	**“или x_1,или x_2“**
$\mathbf{f_7}$	**дизъюнкция (логическое “ИЛИ”, разделение)**	$(x_1 \vee x_2)$	**“x_1 или x_2”**
$\mathbf{f_8}$	**отрицание дизъюнкции (стрелка Пирса)**	$\urcorner(x_1 \vee x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	**“не x_1 и не x_2”**
$\mathbf{f_9}$	**эквиваленция (равнозначность)**	$(x_1 \leftrightarrow x_2) = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2)$	**“x_1 как x_2”**
f_{10}	отрицание второго аргумента	$\bar{x}_2$	“не как x_2”
f_{11}	обратная импликация	$(x_2 \to x_1) = \bar{x}_2 \cdot x_1$	“если x_2,то x_1”
f_{12}	отрицание первого аргумента	$\bar{x}_1$	“не как x_1”
$\mathbf{f_{13}}$	**прямая импликация**	$(x_1 \to x_2) = \bar{x}_1 \cdot x_2$	**“если x_1, то x_2”**
$\mathbf{f_{14}}$	**отрицание конъюнкции (штрих Шеффера)**	$\urcorner(x_1 \cdot x_2) = x_1 \mid x_2 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$	**“не x_1 или не x_2”**
f_{15}	константа “1”	1	“любая единица”

Перечислим 7 важнейших функций:

1) $\mathbf{f_1}$ - конъюнкция (функция **И**), конъюнкция – это фактически обычное *умножение* (нулей и единиц). Иногда эту функцию обозначают $\mathbf{x_1 \& x_2}$ или $\mathbf{x_1 \wedge x_2}$.

2) $\mathbf{f_7}$ - дизъюнкция (функция **ИЛИ**).

3) $\mathbf{f_{13}}$ - импликация (следование).

Иногда импликацию обозначают $\mathbf{x_1 \supset x_2}$, это очень важная функция, особенно в логике. Ее можно рассматривать следующим образом: если $\mathbf{x_1} = 0$ (т. е. $\mathbf{x_1}$ “ложно”), то из этого факта можно вывести и “ложь”, и “истину” (и это будет правильно), если $\mathbf{x_2} = 1$ (т. е. $\mathbf{x_2}$ “истинно”), то истина выводится и из “лжи” и из “истины”, и это тоже правильно. Только вывод “из истины ложь” является неверным.

4) $\mathbf{f_6}$ - сложение по модулю 2. Иногда эту функцию обозначают $\mathbf{x_1 \Delta x_2}$ или $\mathbf{x_1 \not\equiv x_2}$.

5) $\mathbf{f_9}$ - эквивалентность или подобие. Эта функция $\mathbf{f_9 = 1}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x_1 = x_2}$. Иногда эту функцию обозначают $\mathbf{x_1 \equiv x_2}$ или $\mathbf{x_1 \sim x_2}$.

6) $\mathbf{f_{14}}$ - штрих Шеффера.

7) $\mathbf{f_8}$ - стрелка Пирса (иногда эту функцию называют штрих Лукасевича).

Анализ логических функций одной и двух переменных показывает, что среди множества значений существуют функции от меньшего числа переменных. Так, для n=2 имеем : $f_0(x_1;x_2)$ и $f_{15}(x_1;x)$ вообще не зависят от двоичных переменных, а функции $f_3(x_1;x_2)$,$f_5(x_1;x)$,$f_{10}(x_1;x_2)$ и $f_{12}(x_1;x_2)$ зависят только от значений одной переменной.

Функция, которая сводится к зависимости от меньшего числа двоичных переменных, называется вырожденной, а функция, существенно зависящая от всех двоичных переменных, - невырожденной.

Двоичная переменная x_i в функции $f(x_1;x_2;\ldots;x_{i-1};x_i;x_{i+1};\ldots;x_n)$ называется фиктивной, если выполняется условие:

$$f(x_1;x_2;\ldots\ldots;x_{i-1};0;x_{i+1};\ldots\ldots;x_n)=f(x_1;x_2;\ldots\ldots;x_{i-1};1;x_{i+1};\ldots\ldots;x_n).$$

Удаление фиктивной переменной упрощает анализ функции, а её введение позволяет всякую функцию сделать функцией от большего числа переменных.

Суперпозиция логических функций. Формулы.

Часто рассматриваются функции от функций, т. е. *суперпозиции* перечисленных выше функций. Функция f, получаемая из функций

$f_1;f_2;\ldots;f_n$ с помощью операций подстановки их друг в друга и переименования аргументов, называется суперпозицией функций.

Алгебраическое выражение, описывающее логическую функцию и содержащее только двоичные переменные и логические связки, называют формулами F над $\mathcal{F}_0$, где $\mathcal{F}_0$– сигнатура(множество операций) алгебры логики. Двоичные переменные иногда называют формулами глубины 0, а элементарные формулы, аргументами которых являются только двоичные переменные, - формулами глубины 1. При этом последовательность действий указывается (как обычно) скобками. Исключение составляет конъюнкция (которая на самом деле является обычным умножением в двоичной системе).Поэтому конъюнкция совершается первой даже если отсутствуют скобки. Например, запись $\mathbf{x_1 \,\&\, x_2} \vee \mathbf{x_2} \,\&\, \mathbf{x_3}$ означает $(\mathbf{x_1 \,\&\, x_2}) \vee (\mathbf{x_2} \,\&\, \mathbf{x_3})$.

Всякая формула, выражающая функцию f как суперпозицию других функций $f_1;f_2;\ldots.\ .;f_n$, задаёт способ её вычисления: формулу можно вычислить, только если уже вычислены значения всех её подформул. Значение подформулы можно вычислить по известному набору значений двоичных переменных.

По каждой формуле можно восстановить таблицу логической функции, но не наоборот, т.к. каждой логической функции можно представить несколько формул.

Формулы F_i и F_j представляющие одну и ту же логическую функцию f_i, называются эквивалентными или равносильными. Так, эквивалентными формулами являются:

$$f_8(x_1;x_2)=(\overline{x_1}\cdot\overline{x_2})=\neg(x_1\vee x_2)=x_1\downarrow x_2;$$

$$f_{14}(x_1;x_2)=(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})=\neg(x_1\cdot x_2)=x_1 \mid x_2.$$

Равенство $F_i=F_j$ означает, что формулы F_i и F_j описывают одну и ту же логическую функцию.

Если какая-либо формула F содержит в качестве подформулы F_i, то замена F_i на эквивалентную F_j не изменяет значения формулы F при любом наборе булевого вектора, но изменяет форму её описания. Вновь полученная формула F` эквивалентна формуле F.

При формировании формул следует придерживаться следующих правил

Число левых скобок равно числу правых скобок;

Нет двух стоящих рядом логических связок, т.е. между ними должны быть формулы;

Нет двух стоящих рядом формул, т.е. между ними должны быть логические связки;

Логическая связка “ $\overline{\ }$ “ сильнее любой двухместной операции и выполняется прежде всего;

Логическая связка “& “ сильнее любой двухместной логической связки;

Эти правила облегчают запись формул и их преобразование.

Из перечисленных функций особую роль играют три функции, а именно конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, поэтому рассмотрим более подробно их свойства.

Булева алгебра и минимизация булевых функций

Алгебру, носителем которой является множество $X=(x_1;x_2;\ldots\ldots x_n,y\}$, элементы которого принимают значения на множестве {0;1}, а сигнатура которой определена логическими операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания называют булевой алгеброй в честь английского математика Дж. Буля.

Таким образом булева алгебра есть: $\mathcal{A}=\langle X;\ \&;\ \vee;\ \overline{\ };\ 0;\ 1\rangle$, где

X - множество, элементы которого принимают значения “1” или “0”;

$\overline{\ }$ - унарная операция отрицания значения x;

& - бинарная операция конъюнкции двух элементов множества X;

$\vee$ - бинарная операция дизъюнкции двух элементов множества X;

. Особая роль двух функций (из этих трех) определяется тем обстоятельством, что определение этих функций легко может быть перенесено на любое число переменных:

Конъюнкцией n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \,\&\, x_2 \ldots \,\&\, x_n$ называется функция, которая принимает значение 1, если и только если все переменные равны 1 (и, значит, равна 0, если хотя бы одна из этих переменных равна 0).

Дизъюнкцией n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee x_2 \ldots \vee x_n$ называется такая функция, которая равна 0 если и только если все переменные равны 0 (и, значит, равна 1 тогда и только тогда, когда хотя бы одна переменная равна 1).

Из этих определений видно, что конъюнкция и дизъюнкция *коммутативны,* т. е. обе функции не зависят от порядка переменных. Опираясь на законы булевой алгебры, можно выполнять эквивалентные преобразования любых алгебраических выражений, усложняя или упрощая их описание. Эквивалентные преобразования алгебраических выражений необходимы для поиска наименьшего числа вычислительных операций или достижения результатов вычислений за меньшее число шагов. Последовательное применение законов булевой алгебры, формирующее минимальное по вычислительной сложности алгебраическое выражение, называют стратегией преобразования. Для облегчения исполнения преобразований формул булевой алгебры в единой таблице представлены основные законы и правила (см. табл. 5).

Таблица 5

Наименование закона, правила	Эквивалентные формулы
1. коммутативности	1. $(x_1 \vee x_2) = x_2 \vee x_1$; $(x_1 \cdot x_2) = x_2 \cdot x_1$;
2. ассоциативности	2. $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$; $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \times x_3$;
3. дистрибутивности	3. $x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$; $x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3)$;
4.идемпотентности	4. $x \vee x = x$; $x \cdot x = x$;
5. поглощения	5. $x_1 \vee (x_1 \cdot x_3) = x_1$; $x_1 \cdot (x_1 \vee x_3) = x_1$;
6. противоречия	6. $x \vee \neg x = 1$; $x \cdot \neg x = 0$;
7. де Моргана	7. $\neg(x_1 \vee x_2) = \neg x_1 \cdot \neg x_2$; $\neg(x_1 \cdot x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$;
8. свойство “1”	8. $x \vee 1 = 1$; $x \cdot 1 = x$;
9. свойство “0”	9. $x \vee 0 = x$; $x \cdot 0 = 0$;
10. двойное отрицание	10. $\neg(\neg x) = x$.

Рассмотрим стратегию преобразования формулы F:

$$\mathbf{F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_3) \cdot \neg(x_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee x_2 \cdot x_3);}$$

1) выполним преобразование по закону дистрибутивности

$$\mathbf{F = x_1 \cdot x_2 \vee (\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_1 \cdot x_3) \cdot \neg(x_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee x_2 \cdot x_3);}$$

2) используем закон противоречия

$$\mathbf{F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \neg(x_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3) \vee x_2 \cdot x_3);}$$

3) воспользуемся законом де Моргана

$$\mathbf{F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot (\neg(x_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_3)) \cdot \neg(x_2 \cdot x_3));}$$

4) повторим использование закона де Моргана

$$\mathbf{F = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot ((\bar{x}_1 \vee \neg(x_2 \vee x_3)) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3));}$$

5) используем еще раз закон де Моргана

$\mathbf{F=x_1{\cdot}x_2\vee\ \bar{x}_1{\cdot}x_2{\cdot}((\ \bar{x}_1\vee(\rceil(\rceil x_2){\cdot}\ \bar{x}_3)){\cdot}(\ \bar{x}_2\vee\ \bar{x}_3));}$

6) используем закон двойного отрицания

$\mathbf{F=x_1{\cdot}x_2\vee\ \bar{x}_1{\cdot}x_2{\cdot}(\ \bar{x}_1\vee x_2{\cdot}\ \bar{x}_3){\cdot}(\ \bar{x}_2\vee\ \bar{x}_3));}$

7) выполним преобразование по закону дистрибутивности

$\mathbf{F=x_1{\cdot}x_2\vee(\ \bar{x}_1{\cdot}x_2{\cdot}\ \bar{x}_1\vee x_1{\cdot}x_2{\cdot}x_2{\cdot}\ \bar{x}_3){\cdot}(\ \bar{x}_2\vee\ \bar{x}_3);}$

8) используем закон идемпотентности

$\mathbf{F=x_1{\cdot}x_2\vee(\ \bar{x}_1{\cdot}x_2\vee x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ \bar{x}_3){\cdot}(\ \bar{x}_2\vee\ \bar{x}_3);}$

9) выполним преобразование по закону дистрибутивности

$\mathbf{F=x_1{\cdot}x_2\vee\ \bar{x}_1{\cdot}x_2{\cdot}\ \bar{x}_2\vee\ \bar{x}_1{\cdot}x_2{\cdot}\ \bar{x}_3\vee x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ \bar{x}_3{\cdot}\ \bar{x}_2\vee x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ \bar{x}_3{\cdot}\ \bar{x}_3;}$

10) используем закон поглощения и идемпотентности

$\mathbf{F=x_1{\cdot}x_2\vee\ \bar{x}_1{\cdot}x_2{\cdot}\ \bar{x}_3;}$

Итак, сложное алгебраическое выражение в результате эквивалентных преобразований, содержит меньшее число операций для тех же трех элементов множества x_1,x_2,x_3.

Используя некоторые дополнительные преобразования, можно еще упростить формулу F.

11) выполним преобразование по закону дистрибутивности

$\mathbf{F=x_2{\cdot}(x_1\vee\ \bar{x}_1{\cdot}\ \bar{x}_3);}$

12) исполним процедуру обобщенного склеивания и поглощения

$\mathbf{F=x_2{\cdot}(x_1\vee\ \bar{x}_1{\cdot}\ \bar{x}_3\vee\ \bar{x}_3)=x_2{\cdot}(x_1\vee\ \bar{x}_3);}$

Окончательное выражение формулы имеет вид: $\mathbf{F=\ x_2{\cdot}(x_1\vee\ \bar{x}_3).}$

На шаге 12) было использовано одно из правил Блейка- Порецкого, а именно обобщенного склеивания:

Если K_1 и K_2 - какие-то логические функции, тогда:

$$\mathbf{x{\cdot}K_1\vee\ \bar{x}{\cdot}K_2=x{\cdot}K_1\vee\ \bar{x}{\cdot}K_2\vee K_1\cdot K_2}\ ,$$

Следствием из этого правила являются следующие выражения:

$$\mathbf{x{\cdot}K\vee\ \bar{x}{\cdot}K = K;}\qquad \mathbf{x\vee\ \bar{x}{\cdot}K = x\vee K.}$$

При этом **К**, **К$_1$**, **К$_2$** быть как логическими функциями, так и

простыми переменными, что можно представить, например, в следующих равнозначных записях:

$$\mathbf{x{\cdot}y\vee\ \bar{x}{\cdot}y=y}\quad \text{или}\quad \mathbf{x{\cdot}y\vee\ \rceil x{\cdot}y=y}\quad \text{или}\quad \mathbf{x{\cdot}y\vee\neg\ x{\cdot}y=y}$$

Точно также равнозначными являются записи:

$$\overline{a\wedge(\bar{b}\vee\bar{c}\wedge d)}=\bar{a}\vee(\bar{\bar{b}}\wedge\bar{\bar{c}}\vee\bar{d})=\bar{a}\vee(b\wedge c\vee\bar{d})$$

и

$$\neg(a \,\&\, (\neg b \vee \neg c \,\&\, d) = \neg a \vee (\neg\neg b \,\&\, \neg\neg c \vee \neg d).$$

Дизъюнктивная и конъюнктивной нормальная формы

Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза. Например, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ является простой конъюнкцией.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) *называется дизъюнкция простых конъюнкций*. Например, $\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2$ является ДНФ.

Простой дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза. Например, $x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$ является простой дизъюнкцией.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) *называется конъюнкция простых дизъюнкций.* Например, $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 \vee x_3)$ – КНФ.

<u>УКАЗАНИЯ</u>

Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. – М.: Энергия, 1980. – 814 с.
2. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика: Учебник для взузов. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 544 с.
3. Белоусов А.И., Ткачев С.В. Дискретная математика: Учеб. для вузов/ под. ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 744 с.
4. Пономарев В.Ф. Основы дискретной математики. Учебное пособие. -Калининград: КГТУ, 1997. – 152 с.

ЗАДАНИЕ: ***<u>Опираясь на законы булевой алгебры, выполнить эквивалентные преобразования алгебраических выражений.</u>***

Вариант № 1.

1. $(\overline{(\overline{(p\vee\bar{q})}\vee r)}\vee(p\,\&\,r)$
2. $(a\,\&\,b)\vee(a\,\&\,\bar{b})\vee(\bar{a}\,\&\,b)$

Вариант № 2.

1. $(a\vee b)\,\&\,(a\vee\bar{b})\,\&\,(\bar{a}\vee b)$
2. $a\,\&\,((a\,\&\,b)\vee(\overline{b\,\&\,c})\vee(\overline{b\vee(c\,\&\,\bar{d}}))$

Вариант № 3.

1. $(a\vee(\overline{b\,\&\,c\,\&\,d}))\,\&\,(\overline{a\vee c})$
2. $((a\,\&\,\bar{b})\vee c)\,\&\,((\bar{a}\vee b)\vee\bar{c})$

Вариант № 4.

1. $(a\,\&\,\bar{b}\,\&\,\bar{a})\vee(c\,\&\,\bar{a})\vee(a\,\&\,\bar{b}\,\&\,b)\vee(c\,\&\,b)\vee\bar{c}$
2. $((a\,\&\,\bar{b})\vee c)\,\&\,((\bar{a}\vee b)\vee\bar{c})$

Вариант № 5.

1. $(x_1\,\&\,x_2)\vee(x_1\,\&\,x_2\,\&\,x_3)\vee(x_1\,\&\,x_2\,\&\,x_4)$
2. $(a\,\&\,\bar{b}\,\&\,c)\vee(a\,\&\,b\,\&\,\bar{c})$

Вариант № 6.

1. $((\overline{(\bar{a}\,\&\,\bar{b})}\vee\bar{a})\,\&\,a)\vee\overline{(\bar{a}\,\&\,b)}$
2. $\overline{(a\,\&\,b)}\vee(c\,\&\,(b\vee d))\vee c$

Вариант № 7.

1. $(a \& b \& c) \vee (a \& (\overline{b \& c})) \vee (a \& \bar{b})$
2. $\bar{a} \vee (\bar{\bar{a}} \& \bar{b}) \vee b$

Вариант № 8.

1. $(\bar{a} \vee b) \& (\bar{a} \vee c) \& (a \vee \bar{b}) \& (a \vee \bar{c}) \& (b \vee \bar{c}) \& (\bar{b} \vee c)$
2. $(\overline{a \& b \& c}) \& ((\overline{a \& b}) \vee (a \& \bar{b} \& \bar{c}))$

Вариант № 9.

1. $(\overline{\bar{a} \vee b}) \vee (\overline{\bar{a} \vee c}) \vee (\bar{a} \vee (b \& c))$
2. $(\bar{a} \vee b) \& (\overline{\bar{a} \vee c}) \& (\bar{a} \vee \bar{b}) \& (\overline{a \vee \bar{c}})$

Вариант № 10.

1. $(\bar{a} \vee b) \& (\overline{\bar{a} \vee c}) \& (\bar{a} \vee \bar{b}) \& (\overline{a \vee \bar{c}})$
2. $(\overline{\bar{a} \vee b}) \vee (\overline{\bar{a} \vee c}) \vee (\bar{a} \vee (b \& c))$

Вариант № 11.

1. $(\bar{a} \& \bar{b}) \vee (\overline{c \& (b \vee d)}) \vee c$
2. $(\overline{\bar{a} \vee (\bar{\bar{a}} \& \bar{b})}) \vee b$

Вариант № 12.

1. $((\overline{(\bar{a} \& \bar{b}) \vee a}) \vee \bar{a}) \vee (\bar{a} \& \bar{b})$
2. $(\bar{a} \& \bar{b}) \vee (\overline{c \& (b \vee d)}) \vee c$

Вариант № 13.

1. $(\overline{a \& b \& c}) \vee (\bar{a} \& b \& c) \vee (\overline{a \& \bar{b} \& c})$
2. $(\overline{x_1} \& x_2) \vee (\overline{x_1 \& x_2 \& x_3}) \vee (\overline{x_1 \vee x_2}) \vee x_3$

Вариант № 14.

1. $(\overline{a\,\&\,\bar{b}\,\&\,\bar{a}})\vee(c\,\&\,\bar{a})\vee(\overline{c\,\&\,b})\vee c$
2. $(\overline{(a\,\&\,\bar{b})\vee c})\,\&\,((\overline{a\vee b})\vee\bar{c})$

Вариант № 15.

1. $\bar{a}\,\&\,(\overline{(a\,\&\,b)\vee(b\,\&\,c)})\vee(b\vee(c\,\&\,a))$
2. $(\overline{a\vee(b\,\&\,c\,\&\,d)})\,\&\,(a\vee c)$

Вариант № 16.

1. $(\overline{a\vee b})\,\&\,(a\vee\bar{b})\,\&\,(\bar{a}\vee\bar{b})$
2. $(\overline{a\,\&\,b})\vee(a\,\&\,\bar{b})\vee(\overline{\bar{a}\,\&\,b})$

Вариант № 17.

1. $(\overline{(p\vee\bar{q})\vee r})\vee(\overline{p\,\&\,r})$
2. $(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})\,\&\,(\overline{\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3}})$

Вариант № 18.

1. $(x_1\vee x_2)\vee(\overline{x_2}\vee x_1\vee x_3)\vee x_3$
2. $\overline{x_1}\,\&\,\overline{x_2}\,\&\,x_3\vee\overline{x_1}\,\&\,x_2\,\&\,x_3\vee(\overline{x_1\,\&\,x_2\,\&\,x_3})$

Вариант № 19.

1. $\overline{x_1}\,\&\,\overline{x_2}\,\&\,x_3\vee\overline{x_1}\,\&\,x_2\,\&\,x_3\vee(\overline{x_1\,\&\,x_2\,\&\,x_3})$
2. $(\bar{a}\vee b)\,\&\,(\overline{(\overline{\bar{a}\vee c})\,\&\,(\overline{a\vee\bar{b}})})$

Вариант № 20.

1. $(\bar{a}\vee b)\,\&\,(\overline{(\overline{\bar{a}\vee c})\,\&\,(\overline{a\vee\bar{b}})})$
2. $(\overline{(a\vee\bar{b})\,\&\,(\bar{a}\vee b)})\,\&\,(\bar{a}\vee\bar{b})$

Вариант № 21.

1. $(\overline{\bar{a} \vee \bar{b}}) \,\&\, (\overline{a \vee b \vee c})$
2. $(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \,\&\, (\bar{a} \vee \bar{b} \vee a) \,\&\, (\bar{a} \vee \bar{b} \vee b) \,\&\, (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$

Вариант № 22.

1. $(\bar{a} \,\&\, \bar{b} \,\&\, c) \vee (\overline{\bar{a} \,\&\, \bar{b} \,\&\, \bar{c}}) \vee (\bar{a} \,\&\, \bar{b} \,\&\, \bar{c}) \vee (\overline{a \,\&\, b \,\&\, c})$
2. $(x \,\&\, \bar{y} \vee x \,\&\, (\overline{y \vee x \,\&\, z}) \,\&\, (x \,\&\, (\bar{y} \vee z) \vee y \,\&\, z)$

Вариант № 23.

1. $(\bar{a} \,\&\, \bar{b} \,\&\, c) \vee (\overline{\bar{a} \,\&\, \bar{b} \,\&\, \bar{c}}) \vee (\bar{a} \,\&\, \bar{b} \,\&\, \bar{c}) \vee (\overline{a \,\&\, b \,\&\, c})$
2. $(x \,\&\, \bar{y} \vee x \,\&\, (\overline{y \vee x \,\&\, z}) \,\&\, (x \,\&\, (\bar{y} \vee z) \vee y \,\&\, z)$

Вариант № 24.

1. $\overline{(x \,\&\, \bar{y} \vee (\overline{\bar{x} \vee \overline{y \,\&\, z}}))}$
2. $\overline{(x \,\&\, y \vee x \,\&\, \bar{y})} \,\&\, (\overline{\bar{y} \vee \bar{z}}) \vee (\overline{z \,\&\, y})$

Вариант № 25.

1. $\overline{(\overline{\bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2})(\overline{x_2 \vee x_1})}$
2. $\overline{((\bar{x} \vee y) \,\&\, (\overline{\bar{x} \vee \bar{y}}))} \,\&\, (\overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z})$

Вариант № 26.

1. $\overline{(\overline{\bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_3}) \vee (\overline{\bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2})} \vee (\overline{x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3})$
2. $(\overline{x \,\&\, \bar{y} \vee x \,\&\, y}) \vee (\overline{x \,\&\, z}) \vee x$

Вариант № 27.

1. $\overline{(\overline{\bar{a} \vee b}) \vee (\overline{a \,\&\, \bar{b}})}$
2. $\bar{a} \vee (\overline{(\overline{\bar{a} \vee b}) \vee (\overline{\bar{b} \,\&\, \bar{a}})}) = \bar{a} \vee b$

Вариант № 28.

1. $(\overline{(\bar{a} \vee b) \,\&\, b}) \vee \bar{a} \vee (\overline{b \,\&\, a})$
2. $(\bar{a} \,\&\, \bar{b}) \,\&\, (\overline{(\bar{a} \vee b) \,\&\, (a \vee \bar{b})})$

Вариант № 29.

1. $(\overline{(\bar{a} \vee b) \,\&\, (\bar{c} \vee b) \,\&\, b}) \vee (a \vee c)$
2. $(\bar{a} \vee b) \,\&\, (\bar{b} \vee c) \,\&\, (\overline{\bar{a} \vee c})$

Вариант № 30.

1. $(\overline{(\bar{a} \vee b) \,\&\, (\bar{b} \vee c) \,\&\, (a \vee \bar{a})}) \vee c$
2. $(\overline{\bar{a} \,\&\, \bar{b}}) \,\&\, (\overline{(\bar{a} \vee b) \,\&\, (a \vee \bar{b})})$

Вариант № 31.

1. $(\overline{\bar{a} \vee b}) \,\&\, (\bar{\bar{b}} \vee c) \,\&\, (\overline{\bar{\bar{c}} \vee a}) \vee a$
2. $(a \vee \bar{b}) \,\&\, \bar{b} \,\&\, a \,\&\, (a \vee \bar{b}) = \bar{b} \,\&\, a$

Вариант № 32.

1. $(\overline{(\overline{\bar{a} \vee b}) \vee (\bar{\bar{b}} \vee c)}) \,\&\, (\bar{\bar{c}} \vee a) \vee a$
2. $\overline{(\bar{a} \vee b) \,\&\, (\bar{b} \vee c) \,\&\, (\overline{\bar{a} \vee c})}$

Образец выполнения задания

Цель работы:

Целью работы является изучение основ алгебры логики и особенностей булевой алгебры и минимизация булевых функций.

Задание на работу:

Используя методические указания, освоить последовательное применение законов булевой алгебры, формирующее минимальное по вычислительной сложности алгебраическое выражение

Упростить следующее выражение и указать, какие правила и законы булевой алгебры были применены на каждом шаге преобразований:

Решение:

$$\overline{((a \vee b) \wedge \overline{c}) \vee ((a \vee c) \wedge \overline{b})} =$$

$$= \overline{((a \vee b) \wedge \overline{c})} \wedge \overline{((a \vee c) \wedge \overline{b})} =$$

$$= (\overline{(a \vee b)} \vee \overline{\overline{c}}) \wedge (\overline{(a \vee c)} \vee \overline{\overline{b}}) =$$

$$= (\overline{(a \vee b)} \vee c) \wedge (\overline{(a \vee c)} \vee b) =$$

$$= ((\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee c) \wedge ((\overline{a} \wedge \overline{c}) \vee b) =$$

$$= (((\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee c) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{c})) \vee (((\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee c) \wedge b) =$$

$$= ((\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{a} \wedge \overline{c}) \vee (c \wedge \overline{a} \wedge \overline{c})) \vee ((\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge b) \vee (c \wedge b)) =$$

$$= ((\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (c \wedge \overline{a} \wedge \overline{c})) \vee ((\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge b) \vee (c \wedge b)) =$$

$$= ((\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (\overline{a} \wedge 0)) \vee ((\overline{a} \wedge 0) \vee (c \wedge b)) =$$

$$= ((\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee 0) \vee (0 \vee (c \wedge b)) =$$

$$= (\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (c \wedge b)$$

Шаги преобразования исходного выражения:

1. правило де Моргана
2. правило де Моргана
3. закон двойного отрицания
4. правило де Моргана
5. закон дистрибутивности
6. закон дистрибутивности
7. закон идемпотентности
8. закон противоречия
9. свойство «0»
10. свойство «0»

Вывод:

В результате проведенных преобразований исходное выражение булевой функции приведено к дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

4 Рабочая программа учебной дисциплины «Дискретная математика»

Утверждаю:

Проректор по учебной работе

Профессор___________И.Г.Масленников

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«Дискретная математика»

для направления подготовки бакалавров науки и техники

230100/552800 «Информатика и вычислительная техника»

Курс	3	
Курс лекций	36 ч.	Зачет.
Лабораторные занятия	36 ч.	Экзамен.
Самостоятельная работа	68 ч.	
Всего часов	140 ч.	

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры системы автоматизированного проектирования и управления.

«_______»______________2006 года, протокол №_________

Заведующий кафедрой_____________Т.Б.Чистякова

Одобрено на заседании методической комиссии факультета информатики и управления «_______»______________2006 года

Председатель комиссии Т.В.Иванова

Программу составил В.И. Халимон

1. Цели и задачи дисциплины

Целью дисциплины является изучение и освоение методов дискретной математики, наиболее применяемых при проектировании и эксплуатации вычислительных машин, комплексов, систем и сетей. Формирование практических навыков разработки и анализа алгоритмов над объектами дискретной математики.

2. Требование к уровню освоения содержания дисциплины

В результате изучения дисциплины студенты должны:

- *знать*:
- способы задания, свойства множеств, отношений, функций и отображнений;
- канонические формы представления, методы преобразования и минимизации булевых функций;
- методы осуществления операций над графами и выполнения количественных оценок их характеристик;
- *уметь*:
- использовать методы дискретной математики при решении задач синтеза цифровых устройств и разработке программного обеспечения;
- *иметь опыт*:
- использования символики дискретной математики для выраженпия количественных и качественных отношений объектов;
- *иметь представление*:
- о перспективах использования методов дискретной математики при разработке моделей систем автоматики и вычислительной техники.

3. Содержание разделов дисциплины

Введение в дискретную математику

Роль дискретной математики при разработке и эксплуатации техногенных систем

Множества, отношения

Задание множеств и осуществление операций над ними.

Способы задания. Операции объединения, пересечения, разности, дополнения и декартова произведения

Минимизация представлений множеств

Аксиоматика теории множеств. Алгебра Кантора. Минимизация представления множеств.

Отношения и их свойства

Бинарные отношения. Способы задания бинарных отношений. Свойства бинарных отношений. Разбиения. Отношения эквивалентности и порядка. Представление n-арных отношений бинарными. Алгебра отношений.

Отображения и их свойства.

Понятие отображения. Отображения, заданные на одном множестве.

Функции

Определение функции. Представление функции с помощью массива. Обратная функция. Функция времени. Понятие функционала. Понятие оператора.

Графы

Задание и характеристика графов

Виды графов. Подграфы. Матрицы, ассоциированные с графами. Степени вершин. Маршруты, цепи и циклы. Расстояние между вершинами. Диаметр и радиус графа.

Операции над графами

Унарные и бинарные операции над графами. Дополнение графа. Удаление и добавление вершин. Удаление и добавление ребер. Отождествление вершин. Расщепление вершин. Объединение графов. Пересечение графов.

Связность графов

Компоненты связности. Точки сочленения. Мосты. Вершинная и реберная связность. Связность ориентированных графов. Алгоритмы вычисления связности.

Независимость и покрытия

Внутренняя устойчивость. Вершинное число независимости. Реберное число независимости. Вершинное и реберное покрытие графа. Внешняя устойчивость. Вершинное и реберное число внешней устойчивости.

Циклы и разрезы

Определения. Матрицы циклов и разрезов. Независимые множества циклов и разрезов (коциклов). Эйлеровы циклы.

Деревья.

Ориентированные деревья. Упорядоченные деревья. Бинарные деревья. Деревья сортировки. Алгоритмы поиска в дереве сортировки.

Алгебра логики.

Булевы функции

Булевы или двоичные функции. Способы задания. Булевы функции одной и двух переменных и их свойства.

Булева алгебра

Формулы булевой алгебры. Основные законы булевой алгебры. Эквивалентность формул. Принцип двойственности.

Нормальные формы представления

Конституенты единицы и нуля. Разложение булевых функций по переменным. Совершенные дизъюнктивные (СДНФ) и совершенные конъюнктивные нормальные формы (СКНФ). Переход от СДНФ к СКНФ и наоборот. Геометрическое представление булевых функций.

Функциональная полнота и замкнутость

Системы элементарных булевых функций. Определение функционально полной системы элементарных булевых функций. Примеры функционально полных базисов. Важнейшие замкнутые классы. Теорема о функциональной полноте.

Минимизация булевых функций

Основные понятия и определения: каноническая задача минимизации; импликанта и простая импликанта; сокращенная, тупиковая и минимальная формы; операции элементарного и неполного склеивания; операция поглощения. Метод Квайна – Мак-Клоски. Метод карт Карнау или диаграмм Вейча. Минимизация неполностью определенных функций. Минимизация конъюнктивных нормальных форм. Проблема факторизации при упрощении функций. Совместная минимизация систем функций. Минимизация функций в других базисах.

Схемы из функциональных элементов

Представление булевых функций в виде структурных элементов инвертора, конъюнктора, дизъюнктора.

Обзор приложений дискретной математики

Применение методов дискретной математики при проектировании

Разработка эффективного математического, программного, информационного и технического обеспечения на основе методов дискретной математики.

4. Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ
1.	2.	Представление и выполнение операций над множествами в виде диаграмм Эйлера-Венна.
2.	4	Представление отношений на ЭВМ
3.	9	Формы представления графовых структур
4.	10	Вершинная и реберная связность графов
5.	11	Внешняя устойчивость и покрытия в графах
6.	12	Циклы и разрезы в графах
7.	19	Формирование функциональных схем реализующих булевы функции

5. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.

Расчетные компьютерные программы: Комплекс ГРАФ; Операции над множествами.

Персональные ЭВМ типа Pentium I, Pentium II.

6. Самостоятельная работа студентов.

-68 часа.

1. Элементы общей алгебры. Решетки, полугруппы, группы - 10 часов
2. Законы логики высказываний - 20 часов
3. Транспортные сети - 16 часов
4. Преобразование логических схем алгоритмов - 12 часов
5. Язык логики предикатов -10 часов

5 ЛИТЕРАТУРА

1. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика: Учебник для взузов. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 544 с.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000.- 304 с.
3. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. – М.: Энергия, 1980. – 814 с.
4. Белоусов А.И., Ткачев С.В. Дискретная математика: Учеб. для вузов/ под. ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 744 с.
5. Халимон В.И., Проститенко О.В., Рогов, А.Ю., Крюков А.В. Использование программного комплекса «Комплекс ГРАФ» для исследования структур сложных систем.: Метод. указания.- СПб., СПбГТИ(ТУ), 2001.-42 с.
6. Халимон В.И., Рогов А.Ю., Зайцева В.С. Анализ структур сложных систем графовыми методами.: Метод. указания.- СПб., СПбГТИ(ТУ), 2001.-32 с.
7. Халимон В.И., Комаров П.И., Туманова Е.В. Понятия, отношения, множества, операции над множествами.: Метод. указания.- СПб., СПбГТИ(ТУ), 2002.-36 с.
8. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику.- М.: Наука, 1979. – 271 с.
9. Котов В.Е., Сабельфельд В.К. Теория схем программ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 248 с.
10. Пономарев В.Ф. Основы дискретной математики. Учебное пособие. - Калининград: КГТУ, 1997. – 152 с.

Кафедра систем автоматизированного
проектирования и управления

Учебное пособие

Дискретная математика

Виктория Ивановна Халимон
Александр Юрьевич Рогов
Олег Владимирович Проститенко

Отпечатано с оригинал-макета. Формат $60\times90\ ^1/_{16}$.
Печ. л. 4,25 Тираж 40 экз.

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26