Свойства отношений.

Для обозначения некоторых специальных видов отображений, заданных на одном и том же множестве, применяют термин **ОТНОШЕНИЕ.**

Отображение, заданное между двумя или несколькими элементами одного множества X, называют отношением. Например, между объектами математической природы такими отношениями могут быть “быть равным”, “быть большим”, “быть неравным” и т.п.. Все множество отношений между числами может быть {=; <}, а между объектами “нематематической” природы такими отношениями могут быть: “быть родственником”, “быть соседом”, “находиться рядом с ...”, “быть частью” и т.п.≤.

Формальная запись отношения не отличается от записи для отображений, если принять вместо Y множество X. Множество пар отношений обозначают символом R.

Например,

$R=\{(x_1;x_2)|x_{1,2}X\subseteq X\}\in^2X;$

$R=\{(x_1;x_2;...;x_{n+1})|x_iX\subseteq X\}\in^nX..$

Если **(n+1)=1**, то отношение называют унарным или одноместным. Такое отношение выделяет в множестве подмножество, удовлетворяющее заданному свойству.

Задание отношение **r(x)** равносильно заданию предиката $\mathbf{P^1(x)}$ на области определения. Например, на множестве целых чисел можно задать предикат $\mathbf{P^1Z.\in(x)}$**:- “быть четным числом”.**

В результате будет сформировано множество

$R(x)=\{2;4;6;8;...\}$

Если **(n+1)=2**, то отношение называют бинарным или двухместным. Такое отношение позволяет сравнить или упорядочить попарно элементы заданного множества.

Для математических объектов это могут быть отношения:

$r_1(x_1;x_2)$:-” x_1 больше x_2”,

$r_2(x_1;x_2)$:-” x_1 равен x_2”,

$r_3(x_1;x_2)$:-” x_1 меньше x_2”,

$r_4(x_1;x_2)$:-" имеют общий делитель" и др.

Правило $r_j(x_1;x_2)$ позволяет формировать подмножества **$R_j(x_1;x_2)$** опираясь на вычисление предиката: **$P_1^2(x_1;x_2)$:-" x_1 больше x_2",**

$P_2^2(x_1;x_2)$:-" x_1 равен x_2",

$P_3^2(x_1;x_2)$:-" x_1 меньше x_2",

$P_4^2(x_1;x_2)$:-" имеют общий делитель".

Например, на множестве целых чисел Z эти отношения сформируют следующие подмножества:

$R_1(x_1;x_2Z;\otimes Z\subseteq)$={(10;6);(8;5);(3;1);...}

$R_2(x_1;x_2Z;\otimes Z\subseteq)$={(10;10);(8;8);(5;5);(3;3);...}

$R_3(x_1;x_2Z;\otimes Z\subseteq)$={(6;10);(5;8);(3;%);(1;3);...}

$R_4(x_1;x_2Z.\otimes Z\subseteq)$={(10;2);(10;5);(8;4);(6;3);...}

Если **(n+1)=3,** то отношение называют тернарным или трехместным, если **равно 4, то четырехместным** и т.д.. Наибольшее распространение имеют бинарные отношения в связи с удобством их описания.

Анализ различных бинарных отношений позволяет выделить наиболее характерные свойства, что необходимо для классификации всего множества отношений. Такими свойствами являются: рефликсивность, симметричность и транзитивность.

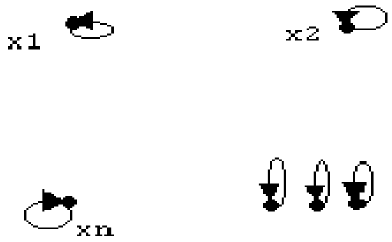
Бинарное отношение рефликсивно, если для любого $\mathbf{x_i}$ имеем

$$\mathbf{r(x_i;x_i)=1},$$

т.е. отношение имеет значение **“истины”** при применении к одному элементу x_i; такими отношениями являются **“быть равным”, “быть похожим”, “быть изоморфным”, “быть эквивалентным**” и т.п.; при матричном задании такого отношения это означает, что на главной диагонали матрицы находятся только “1”, а при графическом представлении - петли при каждой вершине графа(см. рис.2а)).

а)

r	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	**...**	$\mathbf{x_n}$
$\mathbf{x_1}$	**1**	*	*	*
$\mathbf{x_2}$	*	**1**	*	*
...	*	*	**1**	*
$\mathbf{x_n}$	*	*	*	**1**



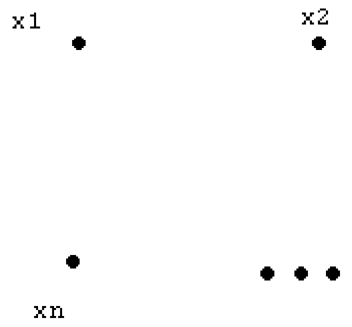
Бинарное отношение антирефлексивно, если для любого $\mathbf{x_i}$ имеем

$$\mathbf{r(x_i;x_i)=0,}$$

т.е. отношение имеет значение **“ложь”** применительно к одному элементу $\mathbf{x_i}$**;** такими отношениями являются **“быть больше”, “быть меньше”, “быть родителем”** и т.п.; при матричном задании такого отношения это означает, что на главной диагонали матрицы находятся только “0”, а при графическом представлении -отсутствие петель при каждой вершине графа(см. рис.2б)).

б)

r	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	**...**	$\mathbf{x_n}$
$\mathbf{x_1}$	**0**	*	*	*
$\mathbf{x_2}$	*	**0**	*	*
...	*	*	**0**	*
$\mathbf{x_n}$	*	*	*	**0**



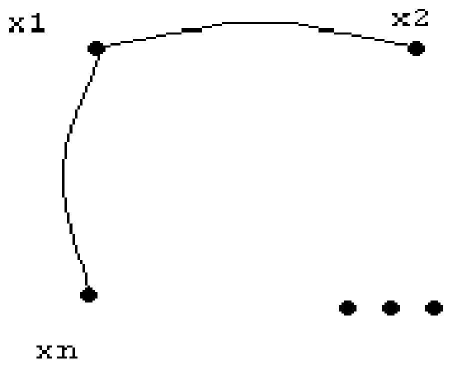
Бинарное отношение симметрично, если для любой пары $(x_i;x_j)$ имеем

$$r(x_i;x_j)=r(x_j;x_i)=1;$$

это могут быть такие отношения: **“быть похожим”, “быть эквивалентным”, “быть родственником”** и т.п.; при матричном задании такого отношения это означает симметричное расположение **“1”** относительно главной диагонали, при графическом представлении - отсутствие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j, или их наличия, но в обе стороны(см. рис.2в)).

в)

r	**x_1**	**x_2**	**...**	**x_n**
x_1	*	**1**	*	**1**
x_2	**1**	*	*	*
...	*	*	*	*
x_n	**1**	*	*	*



Бинарное отношение антисимметрично, если для любой пары $(x_i;x_j)$ имеем

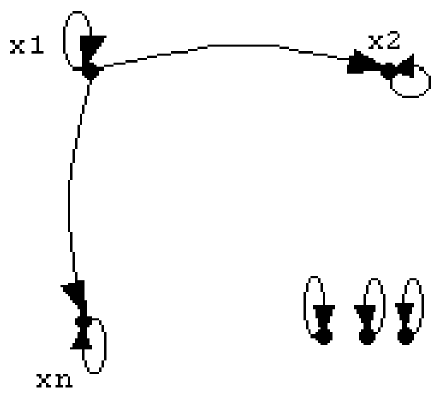
$r(x_i;x_j) = 0$ **при** $i \neq j$, **а**

при $i = j$ $\quad r(x_i;x_j) = 1;$

такими отношениями являются **“быть больше или равным”, “быть меньше или равным”** и т.п.; при матричном задании такого отношения это означает несимметричное расположение “1” относительно главной диагонали, но наличие их на главной диагонали, при графическом представлении - наличие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j и наличие петель у вершин графа (см. рис.2г)).

г)

r	x_1	x_2	**...**	x_n
x_1	**1**	**1**	*	**1**
x_2	*	**1**	*	*
...	*	*	**1**	*
x_n	*	*	*	**1**



Бинарное отношение асимметрично (**не**симметрично), если для любой пары **(x_i;x_j)** имеем

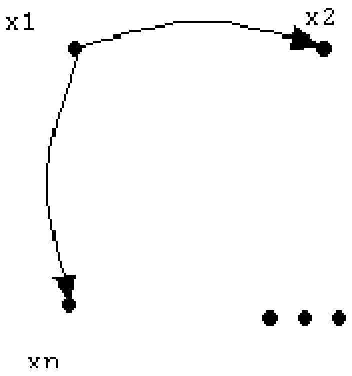
$$\mathbf{r(x_i;x_j r(x\neq)_j;x_i);}\ \textbf{или}$$

если $r(x_i;x_j)=1$, то $r(x_j;x_i)=0$

такими отношениями являются **“быть больше”, “быть меньше”, “быть родителем**” и т.п.; при матричном задании такого отношения это означает только несимметричное расположение **“1”** относительно главной диагонали и наличие только **“0”** на ней, а при графическом представлении -наличие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j и отсутствие петель у вершин графа (см. рис.2д)). Следует обратить внимание, что *антисимметричное отношение отличается от асимметричного только наличием “1” на главной диагонали или наличием петель у вершин графа.*

д)

r	**x_1**	**x_2**	**...**	**x_n**
x_1	**0**	**1**	*****	**1**
x_2	*****	**0**	*****	*****
...	*****	*****	**0**	*****
x_n	*****	*****	*****	**0**



Бинарное отношение транзитивно, если для любых **трех** элементов $\mathbf{x_i, x_j, x_k}$ имеем

$r(x_i;x_j)=1$ только при условии $r(x_i;x_k)=1$ и $r(x_k;x_j)=1$;

такими отношениями являются “быть больше”, “быть меньше”, “быть родственником” и т.п.; при матричном представлении это означает, что если **$r(x_i;x_k)=1$ и $r(x_k;x_j)=1$,** то это же отношение можно установить между вершинами **x_i и x_j** через промежуточную вершину **x_k**, т.е. найти $r(x_i;x_j)=1$; при графическом представлении –

наличие пути из вершины x_i в вершину x_j через промежуточную вершину x_k, используя ребра $(x_i;x_k)$ и $(x_k;x_j)$ (см. рис. е)).

е)

r	x_1	x_2	...	x_n
x_1	*	1	*	1
x_2	*	*	*	1
...	*	*	*	*
x_n	*	*	*	*