

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
«Модели, методы и программные средства»

Абросимов Н.А.

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ
(Учебно-методическое пособие)

Мероприятие 2.2. Развитие сетевой интеграции с ведущими университетами страны, научно-исследовательскими институтами Российской академии наук, предприятиями-партнерами, создание новых форм взаимодействия

Учебные дисциплины: «Механика композиционных материалов»

Специальности, направления: «Прикладная математика и информатика», «Механика».

ННГУ, 2010

Абросимов Н.А. Методика построения разрешающей системы уравнений динамического деформирования композитных элементов конструкций. Учебно-методическое пособие. Н. Новгород: 2010. 40 с.

В пособии излагаются теоретические основы построения математических моделей динамики слоистых пластин и оболочек, выполненных из композиционных материалов.

Пособие предназначено для научных работников, преподавателей, аспирантов, а также студентов магистратуры университета по специальности «Прикладная математика» и «Механика».

Рис.7. Библиограф. 26 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Краткий обзор по инженерной механике композитных материалов.....	5
2. Построение моделей определяющих соотношений композитных материалов.	11
2.1 Модель упругого деформирования однонаправленного слоя композитного материала на полимерной основе.....	13
2.2 Модель упругого деформирования перекрестно-армированного композитного материала на полимерной основе.....	17
3. Построение разрешающей системы уравнений динамического деформирования композитных оболочечных элементов конструкций.	23
3.1. Элементы теории упругости ортотропной среды в ортогональной криволинейной системе координат.....	23
3.2 Разрешающая система уравнений динамики однородных композитных оболочек.....	26
3.3. Метод и алгоритм решения начально-краевой задачи.....	34
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	38

Введение

Композиционные материалы находят широкое применение в инженерной практике, так как позволяют создавать конструкции с уникальными весовыми, прочностными и диссипативными характеристиками, которых практически невозможно достичь использованием традиционных конструкционных материалов.

Использование композиционных материалов при создании современных аппаратов и устройств потребовало учета их характерных особенностей, таких как: анизотропия жесткости и прочности; вязкоупругие свойства; неоднородность упругих и прочностных параметров; опасность разрушения вдоль поверхностей раздела слоев, определяющих несущую способность конструкции. Решение этой проблемы невозможно без комплексных теоретико-экспериментальных исследований, направленных на выяснение физической картины процессов, протекающих в конструкции и в материале, при предполагаемых эксплуатационных нагрузках. Важным звеном в таких исследованиях является разработка математических моделей рассматриваемых явлений, удовлетворяющих требованиям точности и информативности с одной стороны, экономической и практической применимости к инженерным расчетам — с другой.

Настоящее учебно-методическое пособие посвящено изложению основ механики композитных материалов и некоторых вопросов их применения в задачах динамического деформирования оболочечных элементов конструкций, выполненных из композитных материалов.

1. Краткий обзор по инженерной механике композитных материалов

Механика композитов как самостоятельная ветвь механики деформируемых сред находится в стадии роста, развития и становления. Ее разделы разработаны с разной глубиной, многие вопросы еще далеки до завершения

Композиты возникли как естественная реакция на потребности современной техники. В их основе лежит уникальная по простоте идея армирования, когда соединяют «полярные» по свойствам материалы — податливую матрицу и жесткую и прочную арматуру. Важно подчеркнуть, что идея армирования глубже, чем просто прочность и технологичность. Это еще и повышение надежности материала [1]. По-видимому, композиты — единственные материалы, у которых рост прочности сопровождается ростом вязкости разрушения.

Композиты, строго говоря, не являются материалами в классическом смысле, т.е. конечным продуктом, например, металлургии, с заданными и практически неизменными в процессе переработки свойствами. Они составляют обширную семью материалов, создаваемых из полуфабрикатов совместно с конструкцией. Именно механика композитов является научной основой для понимания, описания, предсказания и контроля конструкционных свойств всего многообразия материалов и технологии формования изделий из них [2].

При создании конструкций из композитов вопросы проектирования (понимаемого в традиционном смысле), оптимального армирования и разработка технологического процесса являются тремя сторонами единой проблемы и не могут рассматриваться изолированно, что допускается при создании конструкций из металлов [3]. Реализация перспектив, которые

открываются в связи с разработкой и внедрением композитных материалов, обуславливает необходимость развития методов расчета, проектирования и испытаний конструкций на их основе. Решением этого комплекса вопросов занимается инженерная механика композитов [4].

Принципиальный вклад в развитие инженерной механики композитов внесли Ю.Н. Работнов, его ученики и сотрудники [5].

В настоящее время появились специализированные монографии по механике композитов. В частности, это книги Р. Кристенсена [6], Б.Е. Победри [7] и В.В. Васильева [8].

Современные волокнистые композиты являются неоднородными анизотропными материалами. Упругость и неупругость волокнистых композитов определяются типом арматуры (стекло-, боро-, угле- и органические волокна) и матриц (полимерных, углеродных, металлических, керамических), степенью их взаимодействия в композите, а также углом нагружения относительно направлений армирования. Композиты обладают двумя уровнями неоднородности — микронеоднородностью (монослой, составленный из волокон и связующего) и макронеоднородностью (слоистая структура, составленная из монослоев, с произвольной укладкой по толщине пакета). Отсюда два направления в механике композитов: микро- и макро- механика.

Структурно-неоднородная среда по своему физико-механическому поведению значительно богаче однородного материала. Разнообразие возможных ситуаций в процессе деформирования и разрушения композитов делает изучение этих материалов привлекательным для специалистов из разных областей механики твердого тела. Например, в волокнистых композитах на уровне армирующих элементов всегда имеются микродефекты — трещины, обусловленные не только несовершенством технологии, но и отступлением от идеализированной модели материала.

Центральным моментом в механике волокнистых композитов, является существенный учет структуры материала на уровне армирующих элементов — обстоятельство, нехарактерное для классической механики твердого тела. На уровне армирующих элементов создаются механические свойства материала; управляя, укладкой волокон, можно в определенных пределах управлять полями сопротивления материала, «подстраивая» их под действующие усилия. Более того, на этом пути открываются возможности разработки принципов оптимального проектирования самого материала. Именно композиты материализовали эту ветвь механики твердого тела, интенсивно развивающуюся в последнее время. Достаточно указать на работы В.В. Васильева и И.Ф. Образцова [8], Г.А. Тетерса и Р.Б. Рикардса [9]. Необходимо подчеркнуть, что формирование физических свойств и истоки теоретических основ технологических процессов формования композитов — современных и будущих — также лежат на структурном уровне армирующих элементов. На этом же уровне проявляются многочисленные особенности разрушения (такие, как расслоение, отслоение, дробление волокон и др.), специфические особенности свойств композитов, такие, как вязкоупругость для полимерных и пластичность для металлических матриц. На представлениях о физико-механических явлениях, происходящих на структурном уровне, основано прогнозирование ресурса и надежности конструкций из композитов [10].

В науке о композитных материалах наметились новые тенденции, связанные со стремлением к созданию конструкций многофункционального назначения. Отсюда исследования в области микромеханики композитов, изучающие внутренние поля в средах с дискретной структурой (с учетом несовершенств), изменение эффективных свойств материалов в процессе эксплуатации, связь между структурой на уровне армирующих элементов и теплофизическими, электрическими, магнитными и другими свойствами. Большой цикл работ этого направления Г.А. Ванина обобщен в [11].

Введение принципа энергетического сглаживания [12] оживило интерес к хорошо разработанной теории упругости анизотропного тела.

При описании монослоя и материалов, составленных из однородных по толщине слоев, неоднородность удавалось исключить из рассмотрения путем сведения волокнистых композитов к приведенной анизотропной среде; определение эффективных деформативных характеристик составило предмет теории армированных сред [6, 12, 13]

Разработке методов расчета предшествовало изучение конструкционных свойств современных типов композитов. Были получены надежные численные данные; наиболее полные приведены в книге Г.М. Гуняева [14]. Эти данные позволили оценить не только свойства в направлении армирования, но и сопротивление сдвигу и поперечному отрыву. Оказалось, что большинство волокнистых композитов обладает существенной анизотропией упругих и прочностных свойств и наряду с рекордными свойствами при растяжении вдоль арматуры плохо сопротивляется межслойному сдвигу и поперечному отрыву.

Прием замены неоднородного композита эффективным однородным анизотропным телом удачно используется для решения задач жесткости, устойчивости, колебаний балок, пластин и оболочек. Характерный момент — отказ от традиционных кинематических гипотез типа Кирхгофа — Лява и поиски уточненных решений, способных «почувствовать» плохое сопротивление композитов сдвигу и поперечному отрыву. Определяющими в этой области являются работы С.А. Амбарцумяна [15]. Главное внимание было уделено изучению сопротивления волокнистых композитов сдвигу, особенно в плоскостях, где оно в основном определяется матрицей (так называемый межслойный сдвиг). Разработаны и доведены до практической реализации методы численного анализа слоистых конструкций с учетом специфических особенностей композитов [15].

Специфические свойства современных композитов — неоднородность, анизотропия, неупругость — требуют поиска путей построения теорий более специализированного характера, чем теория упругости и реология анизотропного тела, учитывающих реальную структуру. Трудности, стоящие на пути этой задачи, очевидны. Поэтому необходим инженерный подход к решению указанной задачи. Глубина моделей должна соответствовать точности информации о свойствах компонентов, их упаковке и взаимодействии в материале. В этой связи необходимо отметить работы по структурной теории армированных пластиков [16].

Для ряда задач, когда траектория армирующих волокон и главных напряжений не совпадают, существенным стал учет вязкоупругости материала. Большую роль сыграли работы Ю.Н. Работнова в области механики наследственных тел, обобщенные в монографии [17]. Дело в том, что полимерная матрица делает композиты крайне чувствительными к силовой и температурной предыстории образца — технологии изготовления и режиму последующей эксплуатации. Технологические преимущества композитов в ряде случаев, особенно при аналитическом решении задач оптимизации, были неоправданно расширены. Возможности технологии велики [1], но не безграничны. Технологические ограничения играют при проектировании конструкций из композитов значительно большую роль, чем из металлов. Особенно чувствительны к параметрам формования характеристики, определяемые матрицей, такие, например, как сопротивление межслойному сдвигу и поперечному отрыву. Отсюда интерес к проблеме «технология — прочность» [3, 18], созданию теории «растущего» тела, механике намотки и последующего отверждения, а также поиски оптимальных законов укладки арматуры, режимов формования и отверждения; работы этого направления подробно рассмотрены в [19, 20].

В последнее время много внимания уделяется проблеме разрушения, в том числе специфическим видам разрушения композитов, таким, как

расслоение и отслоение, растрескивание волокон в матрице и т. д., пониманию разных механизмов и формулировке условий разрушения. Достаточно указать на цикл работ Ю.Н. Работнова [21] и работы Ю.В. Суворовой [22] по нелинейным моделям деформирования и разрушения композитов.

Модели деформирования и разрушения композитов во многом опираются на исходную информацию, полученную из механических испытаний монослоя или пакета в целом. Отсюда повышенные требования к точности и достоверности этой информации. Механические свойства композитов в отличие от металлов характеризуются большим числом экспериментальных постоянных. Их определение связано с существенными методическими трудностями. На практике используются много различных форм, размеров и технологии изготовления образцов, методик эксперимента. Это приводит к несопоставимости результатов и создает обстановку противоречивых суждений о конструкционных возможностях композитов. Реалистический подход к проблеме механических испытаний требует четкой регламентации числа определяемых характеристик и методов определения прочности и жесткости композитов, усиливает необходимость в критическом анализе существующих методов, их оценке и обобщении.

2. Построение моделей определяющих соотношений композитных материалов.

Композиционные материалы состоят из различных компонент существенно отличающихся по физико-механическим характеристикам. Неоднородность свойств и сложность структуры являются причиной больших трудностей, с которыми связан анализ напряженного состояния элементов конструкций из композиционных материалов. Типовые структуры композитных материалов представлены на рис. 1.

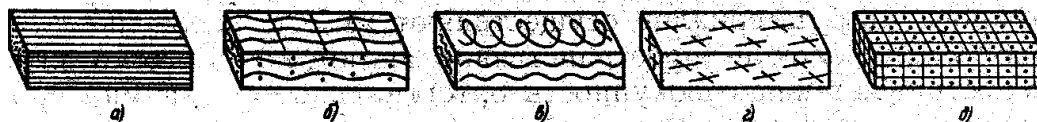


Рис. 1 Материалы, армированные прямолинейными волокнами (а) и тканями (б); хаотические, армированные непрерывными (в) и дискретными (г) волокнами; пространственно армированные (д)

Построение моделей упругого деформирования однонаправленных и перекрестно-армированных композитных материалов основывается на структурно-феноменологическом подходе к построению определяющих соотношений. Композитные материалы обладают двумя уровнями неоднородности: микронеоднородностью, связанной с наличием двух фаз (волокон и матрицы), и макронеоднородностью, связанной с наличием в материале различным образом ориентированных микронеоднородных слоев.

На первом уровне неоднородности решается задача микромеханики композитов, которая заключается в определении эффективных модулей упругости, т.е. коэффициентов, связывающих усредненные по объему напряжения и деформации. Решение задачи микромеханики осуществляется либо на основе микромодели композитов, учитывающей только упругие

свойства и объемные содержания компонентов, либо используется экспериментальный подход, согласно которому эффективные упругие постоянные типовых структур композита определяются при соответствующих испытаниях плоских, кольцевых или трубчатых образцов.

На втором уровне неоднородности решается задача отыскания жесткостных упругих характеристик для всего многослойного пакета. Осреднение проводится в сочетании с некоторыми гипотезами о полях напряжений, перемещений и деформаций. При формулировке этих гипотез учитывается фактический способ взаимодействия слоев в многослойном композите.

Определение жесткостных характеристик тонкостенных элементов конструкций базируется на различных вариантах гипотез теории оболочек (как правило, это гипотеза о недеформируемости материала в трансверсальном направлении). При этом осредненные жесткостные характеристики слоистого пакета определяются в результате интегрирования по толщине элемента конструкции с учетом ориентации элементарных слоев и оболочечных гипотез, наложенных на весь пакет слоев.

При решении задач динамического деформирования в рамках концепции эффективных модулей, которая позволяет реальный гетерогенный материал заменить гипотетическим гомогенным материалом, появляются дополнительные трудности, обусловленные необходимостью анализа волновых процессов, протекающих в конструкциях. Очевидно, что такой подход правомерен только тогда, когда длина волны на порядок и более превосходит характерный размер структуры.

2.1 Модель упругого деформирования однонаправленного слоя композитного материала на полимерной основе.

Рассмотрим слой, отнесенный к координатам 1,2,3, связанным с направлением армирования. В однонаправленном материале ось 1 совместим с направлением волокон (см. рис. 2), а в случае армирования тканью направим оси 1 и 2 вдоль нитей основы и утка. Ось 3 ортогональна плоскости армирования.

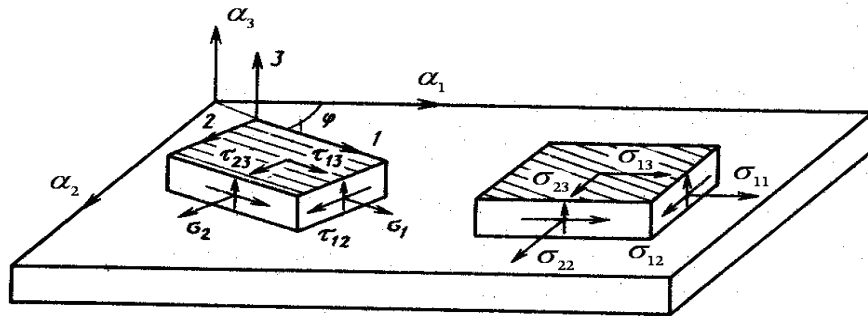


Рис. 2 Элемент однонаправленного слоя композита

Предположим, что элемент слоя находится в условиях плоского напряженного состояния (см. рис. 2). Поскольку оси координат 1, 2 являются осями ортотропии, закон Гука для слоя может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \bar{E}_1(e_1 + \nu_{12}e_2); \\ \sigma_2 &= \bar{E}_2(e_2 + \nu_{21}e_1); \\ \tau_{12} &= G_{12}\gamma_{12}.\end{aligned}\tag{1}$$

$$\bar{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \bar{E}_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

где e_1, e_2, γ_{12} - деформации в направлениях 1, 2 и плоскости 12, соответственно, E_1, E_2 и G_{12} - модули упругости в направлениях 1, 2 и модуль сдвига в плоскости слоя, ν_{12}, ν_{21} - коэффициенты Пуассона.

Здесь имеет место условие симметрии упругих постоянных

$$E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21} \quad (2)$$

В дальнейшем понадобятся также соотношения закона Гука в плоскостях, ортогональных плоскости армирования.

$$\tau_{13} = G_{13} \gamma_{13}, \quad \tau_{23} = G_{23} \gamma_{23} \quad (3)$$

где G_{13} и G_{23} , γ_{13} и γ_{23} – модули сдвига и деформации в плоскостях 13 и 23 соответственно.

Упругие постоянные в (1), (3) определяются либо экспериментально, либо вычисляются в рамках теории армирования [40].

Так как установить фактическое распределение напряжений и деформаций в композитном теле, где основной материал имеет более жесткие включения, весьма затруднительно, то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения упругих постоянных E_1 , E_2 , ν_{12} , $G_{12} = G_{13}$, G_{23} однонаправлено армированного материала необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок.

1. Однонаправлено армированный материал представляет собой сплошное макроскопически однородное моноотропное (трансверсально-изотропное) тело.
2. Основной материал (в дальнейшем называемы связующим) и материал арматуры линейно упруги, изотропны и однородны: связь между деформациями и напряжениями в связующем и арматуре следует закону Гука.
3. Между связующим и арматурой существует идеальное сцепление.
4. Поперечно направленные к арматуре дополнительные напряжения, которые в общем случае, ввиду различных значений коэффициентов Пуассона для арматуры и связующего, могут возникать при действии напряжений, ничтожно малы.

5. При нагружении образца поперек направления армирования напряжения в связующем и арматуре одинаковы, а доля деформаций составляющих материалов, подсчитанных с таким допущением, в общей деформации композитного материала пропорциональна объемному содержанию каждого составляющего.
6. Композитный материал армирован прямолинейными волокнами.

При достаточно густом равномерном насыщении основного материала (связующего) волокнами первая предпосылка вполне допустима. К такому выводу приходят все исследователи, изучающие механические свойства дисперсно-армированных сред. Для того, чтобы с достаточной для практических целей точностью можно было пользоваться такой предпосылкой, необходимо знать, каким должно быть наименьшее количество волокон на единицу площади поперечного сечения однонаправленного армированного материала

Вторая предпосылка вводится из-за необходимости упростить решение задачи, ограничиваясь только упругой стадией работы, что справедливо для многих композитных материалов.

Из третьей предпосылки следует, что составляющие материалы по направлению арматуры деформируются совместно. Использование этого допущения почти исключает погрешности, если напряжения, действующие вдоль армирующих волокон, не меняются по его длине.

Четвертая предпосылка очень близка к реальной ситуации и при равенстве коэффициентов Пуассона связующего и волокон вообще отпадает.

При обсуждении пятой предпосылки следует помнить, что фактические напряжения в основном материале вблизи арматурного стержня возрастают, поскольку для армирования применяется более жесткий материал, но это увеличение имеет локальный характер и по мере удаления от арматуры постепенно исчезает вследствие упругого

перераспределения. Фактическое распределение напряжений – очень сложный вопрос, требующий специального рассмотрения. При определении усредненных упругих деформационных характеристик композитного материала мы будем оперировать усредненными напряжениями для всего объема рассматриваемого элемента.

В предположении, что размещение волокон в элементарном объеме однородно, а диаметр волокна мал по сравнению с расстояниями, на которых усредненные поля напряжений и деформаций заметно меняются, с достаточной для практических целей точностью эффективные жесткостные характеристики однонаправленного композитного материала можно вычислить по следующим формулам [23]

$$E_1 = \mu E_s + (1 - \mu) E_c \quad (4)$$

$$E_2 = \frac{E_s E_c E_1}{E_1 [\mu E_c + (1 - \mu) E_s] - \mu (1 - \mu) (\nu_c E_s - \nu_s E_c)^2} \quad (5)$$

Пренебрегая членами, имеющими порядок квадрата коэффициентов Пуассона в сравнении с единицей, можно привести (5) к более простому виду

$$E_2 \approx \frac{E_s E_c}{\mu E_c + (1 - \mu) E_s} \quad (6)$$

Для модуля сдвига в плоскости армирования имеем аналогичную по структуре формулу

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_s (1 + \mu) + G_c (1 - \mu)}{G_c (1 + \mu) + G_s (1 - \mu)} G_c, \quad (7)$$

где модули сдвига изотропных волокна и связующего соответственно равны

$$G_s = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)}, \quad G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)}. \quad (8)$$

Коэффициенты Пуассона однонаправленного материала имеют вид

$$\nu_{12} = \mu \nu_s + (1 - \mu) \nu_c; \quad \nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \quad (9)$$

Простейшая формула для модуля поперечных сдвигов запишется в виде.

$$G_{23} = \frac{G_6 G_c}{\mu G_c + G_6 (1 - \mu)} \quad (10)$$

Здесь E_6, E_c, ν_6, ν_c – модули упругости и коэффициенты Пуассона волокон и связующего (матрицы) соответственно, μ – коэффициент армирования.

Формулы для модуля упругости E_1 и коэффициента Пуассона ν_{12} достаточно точны для использования в инженерных расчетах. Соотношения (6), (7), (10) для модулей $E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ могут быть рекомендованы для прикидочных расчетов. Целесообразно их уточнение по результатам экспериментов с использованием материала.

2.2 Модель упругого деформирования перекрестно-армированного композитного материала на полимерной основе.

Введем ортогональные координаты α_i ($i = \overline{1,3}$) и предположим, что ось 1 армированного слоя составляет с осью α_1 угол φ (рис. 2). Статические соотношения, связывающие напряжения в системах координат α_1, α_2 и 1, 2, следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi - \tau_{12} \sin 2\varphi; \\ \sigma_{22} &= \sigma_1 \sin^2 \varphi + \sigma_2 \cos^2 \varphi + \tau_{12} \sin 2\varphi; \\ \sigma_{12} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{12} \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

а геометрические соотношения, позволяющие выразить деформации в системе координат 1, 2 через деформации в осях α_1, α_2 , можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
e_1 &= e_{11} \cos^2 \varphi + e_{22} \sin^2 \varphi + e_{12} \sin \varphi \cos \varphi; \\
e_2 &= e_{11} \sin^2 \varphi + e_{22} \cos^2 \varphi - e_{12} \sin \varphi \cos \varphi; \\
\gamma_{12} &= (e_{22} - e_{11}) \sin 2\varphi + e_{12} \cos 2\varphi.
\end{aligned} \tag{12}$$

Получим теперь соотношения, связывающие напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ с деформациями e_{11}, e_{22}, e_{12} . С этой целью подставим деформации e_1, e_2, γ_{12} (12) в закон Гука (1), а полученные в результате этой подстановки напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ – в соотношения (11). После некоторых преобразований с помощью условия симметрии (2) запишем физические соотношения для слоя, армированного под углом φ к оси α_1 :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= A_{11}e_{11} + A_{12}e_{22} + A_{13}e_{12} \\
\sigma_{22} &= A_{21}e_{11} + A_{22}e_{22} + A_{23}e_{12} \\
\sigma_{12} &= A_{31}e_{11} + A_{32}e_{22} + A_{33}e_{12}
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \bar{E}_1 \cos^4 \varphi + \bar{E}_2 \sin^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
A_{12} &= A_{21} = \bar{E}_1 \nu_{12} + [\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2(\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
A_{22} &= \bar{E}_1 \sin^4 \varphi + \bar{E}_2 \cos^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
A_{13} &= A_{31} = \sin \varphi \cos \varphi [\bar{E}_1 \cos^2 \varphi - \bar{E}_2 \sin^2 \varphi - (\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12}) \cos 2\varphi] \\
A_{23} &= A_{32} = \sin \varphi \cos \varphi [\bar{E}_1 \sin^2 \varphi - \bar{E}_2 \cos^2 \varphi + (\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12}) \cos 2\varphi] \\
A_{33} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_1 \nu_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12} \cos^2 2\varphi
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее запишем соотношения, связывающие касательные напряжения и деформации сдвига в координатах α_i ($i = \overline{1,3}$) и 1, 2, 3 (см. рис. 2):

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} &= \tau_{13} \cos \varphi - \tau_{23} \sin \varphi, \\
\sigma_{23} &= \tau_{23} \cos \varphi + \tau_{13} \sin \varphi;
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{13} &= e_{13} \cos \varphi + e_{23} \sin \varphi, \\
\gamma_{23} &= e_{23} \cos \varphi - e_{13} \sin \varphi.
\end{aligned} \tag{16}$$

С помощью равенств (3), (15), (16) можно получить соотношения типа (13), т.е.

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= A_{44}e_{13} + A_{45}e_{23} \\ \sigma_{23} &= A_{54}e_{13} + A_{55}e_{23}\end{aligned}\quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}A_{44} &= G_{13} \cos^2 \varphi + G_{23} \sin^2 \varphi \\ A_{55} &= G_{13} \sin^2 \varphi + G_{23} \cos^2 \varphi \\ A_{45} &= A_{54} = \sin \varphi \cos \varphi (G_{13} - G_{23})\end{aligned}\quad (18)$$

В слоистых композитах и элементах конструкций слою с углом армирования $+\varphi$, как правило, соответствует такой же слой с углом армирования $-\varphi$ (рис. 3).

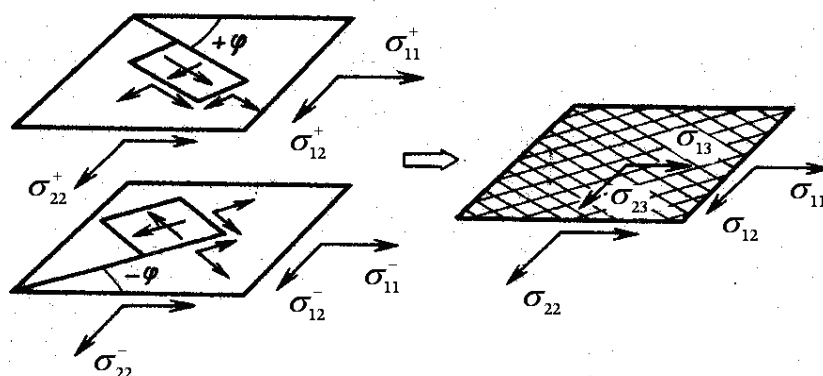


Рис. 3 Взаимодействие симметрично армированных слоев

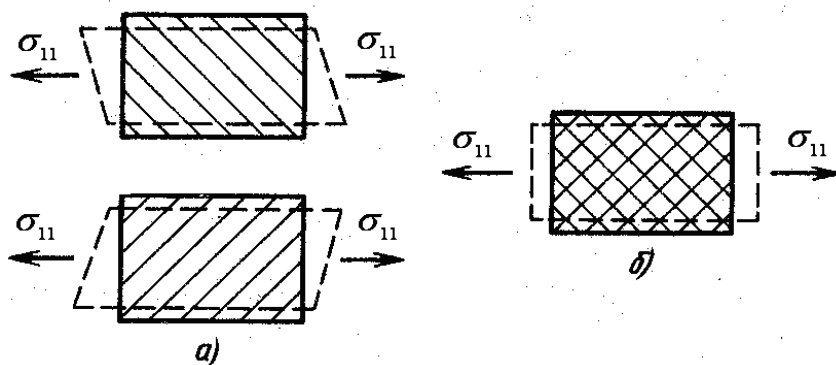


Рис. 4 Деформации отдельных (а) и связанных (б) симметрично армированных слоев

Практически все автоматизированные технологические процессы формирования слоистого пакета обеспечивают укладку, а в некоторых случаях и взаимное переплетение смежных симметричных слоев с углами $\pm \varphi$. Такие

два слоя естественно считать при расчете как один симметрично армированный слой. Такое предположение вполне соответствует реальной структуре слоистых композитов и значительно упрощает соотношения, связывающие напряжения и деформации. Если каждый из симметричных слоев, показанных на рис. 3, является анизотропным в координатах α_i ($i = \overline{1,3}$), то, работая совместно, они образуют ортотропный слой, закон Гука для которого имеет более простую форму записи, чем соотношения (13), (17) для отдельного слоя.

Для получения этого закона запишем равенства (1), (11) и (12) для слоев с углами армирования $\pm \varphi$:

$$\begin{aligned}\sigma_1^\pm &= \bar{E}_1(e_1^\pm + \nu_{12}e_2^\pm); \\ \sigma_2^\pm &= \bar{E}_1(e_2^\pm + \nu_{21}e_1^\pm); \\ \tau_{12}^\pm &= G_{12}\gamma_{12}^\pm;\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^\pm &= \sigma_1^\pm \cos^2 \varphi + \sigma_2^\pm \sin^2 \varphi \mp \tau_{12}^\pm \sin 2\varphi; \\ \sigma_{22}^\pm &= \sigma_1^\pm \sin^2 \varphi + \sigma_2^\pm \cos^2 \varphi \pm \tau_{12}^\pm \sin 2\varphi; \\ \sigma_{12}^\pm &= \pm(\sigma_1^\pm - \sigma_2^\pm) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{12}^\pm \cos \varphi;\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}e_1^\pm &= e_{11} \cos^2 \varphi + e_{22} \sin^2 \varphi \pm e_{12} \sin \varphi \cos \varphi; \\ e_2^\pm &= e_{11} \sin^2 \varphi + e_{22} \cos^2 \varphi \mp e_{12} \sin \varphi \cos \varphi; \\ \gamma_{12}^\pm &= \pm(e_{22} - e_{11}) \sin 2\varphi + e_{12} \cos 2\varphi.\end{aligned}\tag{21}$$

Здесь знаки \pm соответствуют слоям с углами $\pm \varphi$. В соотношениях (19) учтено, что свойства материала обоих слоев одинаковы, а равенства (21) учитывают условия совместности деформаций слоев: $e_{11}^\pm = e_{11}$; $e_{22}^\pm = e_{22}$; $e_{12}^\pm = e_{12}$. Подставляя деформации (21) в закон Гука (19), а напряжения σ_1^\pm , σ_2^\pm , τ_{12}^\pm – в соотношения (20), получим напряжения σ_{11}^\pm , σ_{22}^\pm , σ_{12}^\pm выраженные через деформации e_{11} , e_{22} , e_{12} . Осредняя напряжения по формулам (рис. 3):

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_{11}^+ + \sigma_{22}^-);$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^+ + \sigma_{11}^-);$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\tau_{12}^+ + \tau_{12}^-),$$

получим физические соотношения, связывающие средние напряжения симметричной пары слоев с соответствующими деформациями:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= A_{11}e_{11} + A_{12}e_{22} \\ \sigma_{22} &= A_{21}e_{11} + A_{22}e_{22} \\ \sigma_{12} &= A_{33}e_{12}\end{aligned}\tag{22}$$

где A_{mn} ($mn = 11, 12, 21, 22, 33$,) определяются равенствами (14).

Выведем теперь соотношения, связывающие касательные напряжения σ_{13} и σ_{23} с соответствующими деформациями симметрично армированных слоев (см. рис. 3). Для слоев с углами $\pm \varphi$, согласно равенствам (17), имеем

$$\sigma_{13}^\pm = A_{44}e_{13}^\pm \pm A_{45}e_{23}^\pm;\tag{23}$$

$$\sigma_{23}^\pm = \pm A_{54}e_{13}^\pm + A_{55}e_{23}^\pm.\tag{24}$$

Рассмотрим симметричную пару слоев, нагруженную напряжениями σ_{13} . Тогда $\sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^- = \sigma_{13}$, и, поскольку система является ортотропной (см. рис. 3), в соотношении (23) следует принять $e_{13}^+ = e_{13}^- = e_{13}$ и $e_{23}^+ = e_{23}^- = 0$. Аналогично, при нагружении касательными напряжениями σ_{23} в равенстве (24) имеем: $\sigma_{23}^+ = \sigma_{23}^- = \sigma_{23}$; $e_{13}^+ = e_{13}^- = 0$; $e_{23}^+ = e_{23}^- = e_{23}$. В результате получим

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= A_{44}e_{13} \\ \sigma_{23} &= A_{55}e_{23}\end{aligned}\tag{25}$$

где A_{44} , A_{55} определяются равенствами (18).

Отметим, что система связанных симметрично армированных слоев в общем случае обладает большей жесткостью, чем несимметрично армированный слой такой же толщины (рис. 4).

Таким образом, физические соотношения для перекрестно-армированного композиционного материала определяются равенствами (22) и (25).

3. Построение разрешающей системы уравнений динамического деформирования композитных оболочечных элементов конструкций.

Рассматривается постановка задачи динамического деформирования композитных элементов оболочечных конструкций при импульсном нагружении. Полагается, что элемент конструкции имеет регулярную структуру по толщине и образован жесткой склейкой композитных слоев. При этом кинематическая модель деформирования элементов конструкции базируется на гипотезах типа Тимошенко для всего пакета в целом. Связь между тензорами напряжений и деформаций в композитных слоях устанавливается на основе закона Гука для ортотропного тела с эффективными упругими характеристиками. Вывод системы уравнений движения базируется на принципе возможных перемещений.

3.1. Элементы теории упругости ортотропной среды в ортогональной криволинейной системе координат

Введем, следуя [24], декартову систему координат x, y, z и связанную с рассматриваемой средой ортогональную криволинейную систему координат α_i ($i = \overline{1,3}$). При этом параметры α_i ($i = \overline{1,3}$) выбираются так, что зависимости $\alpha_i = \alpha_i(x, y, z)$ ($i = \overline{1,3}$) взаимно однозначны. Положение точек упругого тела в декартовой системе координат может быть задано их радиусом-вектором $\bar{r}(x, y, z)$. Однако для тел, ограниченных криволинейными поверхностями или обладающих криволинейной анизотропией, более удобным является использование криволинейной системы координат. В этом случае каждой точке тела будет соответствовать значение радиуса-вектора $\bar{r} = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

причем α_i ($i = \overline{1,3}$) рассматриваются как координаты точки в криволинейной системе координат. Единичные векторы касательных к координатным линиям α_i ($i = \overline{1,3}$) в заданной точке определяются равенствами

$$\bar{k}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_i}, \quad (i = \overline{1,3}) \quad (26)$$

$$\text{где } H_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_i} \right)^2} — \text{параметры Ламе,}$$

показывающие сколько единиц длины содержится в единице координаты α_i ($i = \overline{1,3}$). Эти функции не могут быть выбраны произвольно. Для того чтобы они определяли метрические свойства сплошной среды, должны выполняться уравнения Ламе

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} = 0, \quad (1, \overset{\rightarrow}{2}, \underset{\leftarrow}{3}) \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3}. \quad (1, \overset{\rightarrow}{2}, \underset{\leftarrow}{3})$$

Символ $(1, \overset{\rightarrow}{2}, \underset{\leftarrow}{3})$ здесь и далее означает, что из записанного соотношения можно получить еще два, если заменить α_1 на α_2 , α_2 на α_3 , α_3 на α_1 и 1 на 2, 2 на 3 и 3 на 1.

В случае если одна из осей криволинейной системы координат, например α_3 , является прямой линией, то $H_3 = 1$.

После деформации положение точек рассматриваемого упругого тела определяется радиусом-вектором

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \vec{U}, \quad (28)$$

где \vec{U} — вектор перемещения соответствующей точки. Координатные линии α_i ($i = \overline{1,3}$) в соответствии с методом Лагранжа деформируются вместе с телом.

Нормальные e_{ii} и сдвиговые e_{ij} деформации связаны с перемещениями U_i ($i = \overline{1,3}$) вдоль соответствующих координатных линий геометрическими соотношениями:

$$e_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} U_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} U_3, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ (1,2,3) \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (29)$$

$$e_{12} = \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{U_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{U_1}{H_1} \right), \quad (30)$$

В криволинейно-ортотропной упругой среде, оси ортотропии которой совпадают с координатными линиями α_i ($i = \overline{1,3}$), связь между тензорами напряжений и деформаций определяется обобщенным законом Гука, который можно записать в виде

$$e_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{12} \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{13} \frac{\sigma_{33}}{E_3}, \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ (1,2,3) \\ \leftarrow \end{matrix} \quad (31)$$

$$e_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ (1,2,3) \\ \leftarrow \end{matrix}.$$

Здесь имеют место условия симметрии упругих постоянных

$$E_1 \nu_{12} = \nu_{21} E_2 \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ (1,2,3) \\ \leftarrow \end{matrix}. \quad (32)$$

Для вывода уравнения движения элемента сплошной среды воспользуемся принципом возможных перемещений, который в ортогональных криволинейных координатах формулируется следующим образом

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \delta e_{ii} + \sigma_{12} \delta e_{12} + \sigma_{13} \delta e_{13} + \sigma_{23} \delta e_{23} \right) dV + \\ & + \iiint_V \left(\sum_{i=1}^3 \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \delta U_i \right) dV - \iint_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 F_i \delta U_i \right) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора обобщенных напряжений; δU_i — геометрически возможные бесконечно малые перемещения; δe_{ij} —

соответствующие им приращения компонентов деформации; F_i — компоненты вектора равнодействующей поверхностных сил, отнесенных к единице площади тела до деформации; V, Ω — объем и площадь поверхности тела до деформации; ρ — плотность материала; t — время.

Из принципа возможных перемещений (33) следуют уравнения движения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(H_2 H_3 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(H_1 H_3 \sigma_{21}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}(H_1 H_2 \sigma_{31}) + \\ & + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{13} - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \sigma_{33} = H_1 H_2 H_3 \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \quad (1, \overset{\rightarrow}{2}, \underset{\leftarrow}{3}) \end{aligned} \quad (34)$$

и краевые условия для тех участков ограничивающих тело поверхности, где заданы внешние силы

$$\sigma_{11} \cos(\bar{n}, \bar{k}_1) + \sigma_{21} \cos(\bar{n}, \bar{k}_2) + \sigma_{31} \cos(\bar{n}, \bar{k}_3) = F_1, \quad (1, \overset{\rightarrow}{2}, \underset{\leftarrow}{3}) \quad (35)$$

где $(\bar{n}, \bar{k}_1), (\bar{n}, \bar{k}_2), (\bar{n}, \bar{k}_3)$ — углы, образуемые нормалью к рассматриваемой площадке до деформации и единичными векторами $\bar{k}_i (i = \overline{1,3})$.

3.2 Разрешающая система уравнений динамики однородных композитных оболочек

Предлагается вариант уравнений динамики композитных оболочек с учетом поперечных сдвигов. Считаем, что оболочка получена укладкой достаточно большого числа композитных слоев с углами армирования $\pm \varphi_n (n = \overline{1, K})$. При этом слоистая конструкция заменяется эквивалентной однородной оболочкой из ортотропного материала. При формулировке

геометрических соотношений используется метод гипотез для пакета в целом. Уравнения движения оболочек вместе с краевыми условиями получены вариационным методом, исходя из принципа возможных перемещений.

Пусть оболочка толщиной h занимает область U евклидова пространства E_3 и ограничена поверхностью $\partial U = S^+ \cup S^- \cup \Lambda$, где S^+, S^- — лицевые поверхности оболочки; Λ — цилиндрическая поверхность, образующие которой перпендикулярны к поверхности $S^* = S \cup \Gamma$, выбранной в качестве основной (координатной); Γ — контур области S .

Отнесем основную поверхность S к ортогональной криволинейной системе координат $\alpha_i (i = \overline{1,3})$, совпадающей с линиями главных кривизн и внешней нормалью к внутренней поверхности оболочки (рис. 5).

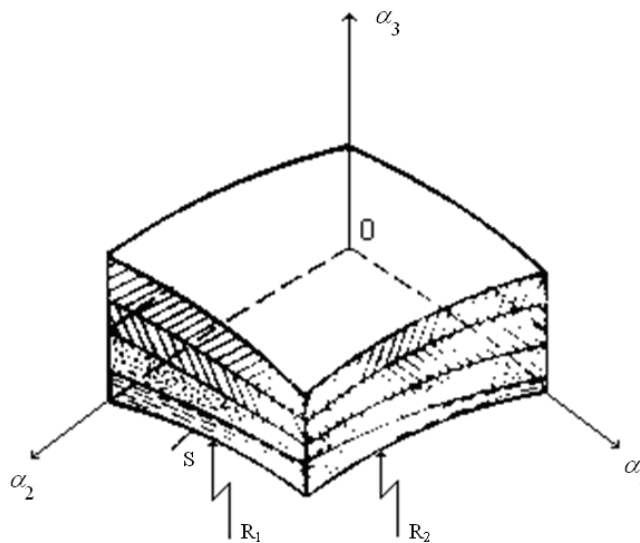


Рис. 5

Коэффициенты Ламе, определяющие метрические свойства рассматриваемого элемента конструкции равны:

$$H_1 = A_1 z_1, H_2 = A_2 z_2, H_3 = 1 \quad (36)$$

где $z_1 = (1 + k_1 \alpha_3)$, $z_2 = (1 + k_2 \alpha_3)$, $A_1, A_2, k_1 = \frac{1}{R_1}, k_2 = \frac{1}{R_2}$ — параметры

Ламе и главные кривизны внутренней поверхности S .

С учетом (36) уравнения Ламе (27) позволяют записать важное для дальнейшего геометрическое соотношение. Из второго уравнения (27) при $H_3 = 1$ получим

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \quad (1 \Leftrightarrow 2).$$

Здесь и далее символ $(1 \Leftrightarrow 2)$ означает, что второе соотношение можно получить заменой 1 на 2.

С учетом первого равенства (36) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) = \frac{A_2}{H_2 R_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}.$$

Ввиду того, что это соотношение справедливо при $\alpha_3 = 0$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \quad (1 \Leftrightarrow 2). \quad (37)$$

В дальнейшем будем считать, что правомерна гипотеза согласно которой геометрические и механические характеристики оболочки и действующие на нее нагрузки таковы, что справедливо линейное распределение по толщине пакета тангенциальных компонент вектора перемещений, а нормальное перемещение постоянно по толщине

$$\begin{aligned} U_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= u_j(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \varphi_j(\alpha_1, \alpha_2, t), \\ U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= u_3(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (j = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь величины $u_i(\alpha_1, \alpha_2, t)$ представляют собой перемещения координатной поверхности в направлениях $\alpha_i (i = \overline{1, 3})$ соответственно; $\varphi_j(\alpha_1, \alpha_2, t) (j = \overline{1, 2})$ — углы поворота нормали к основной поверхности.

Деформации оболочки относительно координатных линий $\alpha_i (i = \overline{1,3})$ получим в результате подстановки равенства (38) в геометрические соотношения (29), (30).

После некоторых преобразований с учетом (37) будем иметь

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{z_1} (\varepsilon_{11} + \alpha_3 \mathcal{Q}_{11}), \quad (1 \leftrightarrow 2) \\ e_{12} &= \frac{1}{z_1} (\varepsilon_{12} + \alpha_3 \mathcal{Q}_{12}) + \frac{1}{z_2} (\varepsilon_{21} + \alpha_3 \mathcal{Q}_{21}), \quad (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 u_3, \quad (1 \leftrightarrow 2) \\ \mathcal{Q}_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\varphi_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad (1 \leftrightarrow 2) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad (1 \leftrightarrow 2) \\ \mathcal{Q}_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\varphi_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (40)$$

Кроме того, будем предполагать, что трансверсальные компоненты сдвиговых деформаций заданы следующим образом [25]

$$e_{13} = \frac{\varepsilon_{13}}{z_1}, \quad e_{23} = \frac{\varepsilon_{23}}{z_2} \quad (41)$$

где

$$\varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1, \quad (1 \leftrightarrow 2). \quad (42)$$

Запишем теперь физические соотношения. С учетом принятых гипотез, деформации связаны с напряжениями соотношениями аналогичными (22) и (25) для перекрестно-армированного композитного материала.

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= A_{11}e_{11} + A_{12}e_{22} \\
\sigma_{22} &= A_{21}e_{11} + A_{22}e_{22} \\
\sigma_{12} &= A_{33}e_{12} \\
\sigma_{13} &= A_{44}e_{13} \\
\sigma_{23} &= A_{55}e_{23}
\end{aligned}
\tag{43}$$

Здесь считается, что коэффициенты A_{mn} являются некоторыми гладкими или ступенчато изменяющимися (для слоистого материала) функциями переменной α_3 . Если подставить деформации (39), (41) в соотношение (43), то напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ можно выразить через функции переменных α_1 и α_2 : $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \mathcal{E}_{11}, \mathcal{E}_{22}, \mathcal{E}_{12}, \mathcal{E}_{21}$, представляющие собой некоторые обобщенные деформационные характеристики. Однако для описания напряженного состояния представляется более естественным ввести аналогичные этим характеристикам обобщенные силовые факторы – усилия и моменты, показанные на рис. 6.,

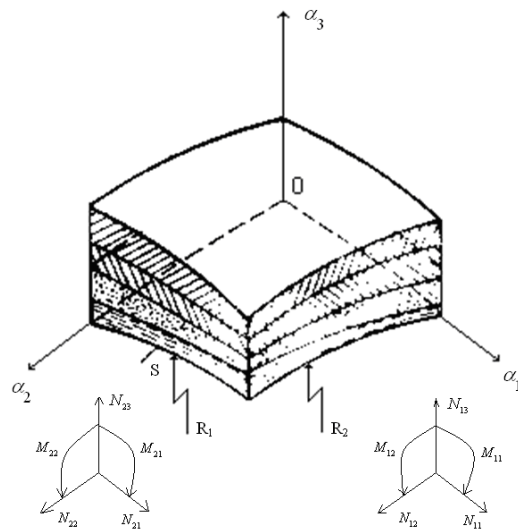


Рис. 6

которые в предположении $H_1 \approx A_1$, $H_2 \approx A_2$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
N_{11} &= B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} + C_{11}\textcircled{3}_{11} + C_{12}\textcircled{3}_{22}, \\
N_{12} &= B_{33}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + C_{33}\textcircled{3}_{12} + \textcircled{3}_{21}, \\
M_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + D_{11}\textcircled{3}_{11} + D_{12}\textcircled{3}_{22}, \\
M_{12} &= C_{33}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + D_{33}\textcircled{3}_{12} + \textcircled{3}_{21}, \\
N_{13} &= K_1\varepsilon_{13},
\end{aligned} \tag{1 \Leftrightarrow 2} \tag{44}$$

где

$$B_{jj} = I_{jj}^{(0)}, \quad B_{12} = B_{21} = J_{12}^{(0)}, \quad C_{jj} = I_{jj}^{(1)}, \quad C_{12} = C_{21} = J_{12}^{(1)} \quad j=1,2$$

$$B_{33} = I_{33}^{(0)}, \quad C_{33} = I_{33}^{(1)},$$

$$D_{jj} = I_{jj}^{(2)}, \quad D_{12} = D_{21} = J_{12}^{(2)}, \quad D_{33} = I_{33}^{(2)},$$

$$K_j = h^2 \left[\sum_{\kappa=1}^K \frac{z_{\kappa} - z_{\kappa-1}}{G_{j3}^{(\kappa)}} \right]^{-1}, \quad (1 \Leftrightarrow 2) \quad (j=1,2)$$

$$I_{11}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{\kappa=1}^K A_{11}^{(\kappa)} (z_{\kappa}^{i+1} - z_{\kappa-1}^{i+1}), \quad (i=0,1,2) \quad (1 \Leftrightarrow 2)$$

$$I_{33}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{\kappa=1}^K A_{33}^{(\kappa)} (z_{\kappa}^{i+1} - z_{\kappa-1}^{i+1}),$$

$$J_{12}^{(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{\kappa=1}^K A_{12}^{(\kappa)} (z_{\kappa}^{i+1} - z_{\kappa-1}^{i+1}),$$

z_{κ} — координаты слоев, отсчитываемые от внутренней поверхности оболочки (см. рис 7),

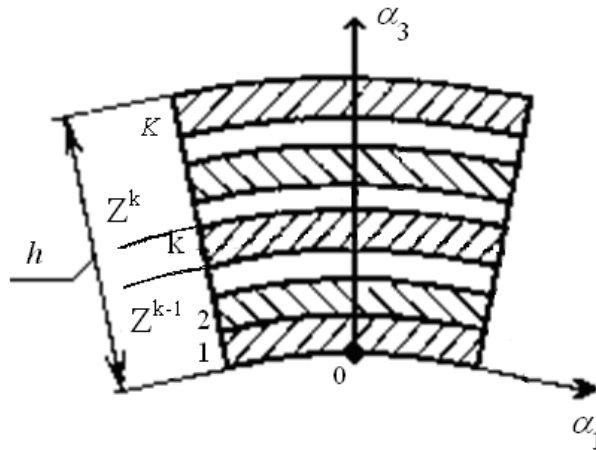


Рис. 7

$A_{ij}^{(k)}$ - жесткости армированного k -го слоя, определяемые равенствами аналогичными (14), т.е.

$$\begin{aligned}
A_{11}^{(k)} &= \bar{E}_1^{(k)} \cos^4 \varphi + \bar{E}_2^{(k)} \sin^4 \varphi + 2(\bar{E}_1^{(k)} \nu_{12}^{(k)} + 2G_{12}^{(k)}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
A_{12}^{(k)} &= A_{21}^{(k)} = \bar{E}_1^{(k)} \nu_{12}^{(k)} + [\bar{E}_1^{(k)} + \bar{E}_2^{(k)} - 2(\bar{E}_1^{(k)} \nu_{12}^{(k)} + 2G_{12}^{(k)})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
A_{22}^{(k)} &= \bar{E}_1^{(k)} \sin^4 \varphi + \bar{E}_2^{(k)} \cos^4 \varphi + 2(\bar{E}_1^{(k)} \nu_{12}^{(k)} + 2G_{12}^{(k)}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
A_{13}^{(k)} &= A_{31}^{(k)} = \sin \varphi \cos \varphi [\bar{E}_1^{(k)} \cos^2 \varphi - \bar{E}_2^{(k)} \sin^2 \varphi - (\bar{E}_1^{(k)} \nu_{12}^{(k)} + 2G_{12}^{(k)}) \cos 2\varphi] \\
A_{23}^{(k)} &= A_{32}^{(k)} = \sin \varphi \cos \varphi [\bar{E}_1^{(k)} \sin^2 \varphi - \bar{E}_2^{(k)} \cos^2 \varphi + (\bar{E}_1^{(k)} \nu_{12}^{(k)} + 2G_{12}^{(k)}) \cos 2\varphi] \\
A_{33}^{(k)} &= (\bar{E}_1^{(k)} + \bar{E}_2^{(k)} - 2\bar{E}_1^{(k)} \nu_{12}^{(k)}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi.
\end{aligned}$$

Важным свойство прикладной теории является ее энергетическая согласованность, т.е. возможность получения исходных уравнений как условий стационарности некоторого энергетического функционала.

Поэтому для вывода уравнений движения оболочек, выполненных из композиционных материалов, воспользуемся принципом возможных перемещений (33). После интегрирования в (33) по толщине оболочки с учетом (39) – (44) получим

$$\begin{aligned}
& \iint_S (N_{11} \delta \varepsilon_{11} + N_{12} \delta \varepsilon_{12} + N_{21} \delta \varepsilon_{21} + N_{22} \delta \varepsilon_{22} + N_{13} \delta \varepsilon_{13} + N_{23} \delta \varepsilon_{23} + \\
& + M_{11} \delta \mathcal{Q}_{11} + M_{12} \delta \mathcal{Q}_{12} + M_{21} \delta \mathcal{Q}_{21} + M_{22} \delta \mathcal{Q}_{22}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& \iint_S \left[\sum_{i=1}^2 (B_{11} \ddot{u}_i + B_{12} \ddot{\varphi}_i) \delta u_i + B_{11} \ddot{u}_3 \delta u_3 + \right. \quad (45) \\
& \left. + \sum_{i=1}^2 (B_{22} \ddot{\varphi}_i + B_{21} \ddot{u}_i) \delta \varphi_i \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \iint_S \left(\sum_{i=1}^3 F_i \delta u_i + \sum_{i=1}^2 M_i \delta \varphi_i \right) d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i^0} (N_{11}^0 \delta u_1^0 + N_{12}^0 \delta u_2^0 + N_{13}^0 \delta u_3^0 + M_{11}^0 \delta \varphi_1^0 + M_{12}^0 \delta \varphi_2^0) A_2 d\alpha_2 - \\
& - \sum_{i=3}^4 \int_{\Gamma_i^0} (N_{22}^0 \delta u_2^0 + N_{21}^0 \delta u_1^0 + N_{23}^0 \delta u_3^0 + M_{21}^0 \delta \varphi_1^0 + M_{22}^0 \delta \varphi_2^0) A_1 d\alpha_1 = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \rho [h + (k_1 + k_2) h^2 / 2 + k_1 k_2 h^3 / 3], \\
B_{12} &= B_{21} = \rho [h^2 / 2 + (k_1 + k_2) h^3 / 3 + k_1 k_2 h^4 / 4], \\
B_{22} &= \rho [h^3 / 3 + (k_1 + k_2) h^4 / 4 + k_1 k_2 h^5 / 5],
\end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= A_1 A_2 p_1 + B_1 B_2 q_1, \quad (1 \leftrightarrow 2) \\
F_3 &= A_1 A_2 p_3 - B_1 B_2 q_3, \\
M_1 &= h B_1 B_2 q_1, \quad (1 \leftrightarrow 2)
\end{aligned} \tag{47}$$

ρ - плотность; $q_i, p_i (i = \overline{1,3})$ - нагрузки по направлениям координатных осей α_i ; S - область интегрирования на внутренней поверхности оболочки; $B_j (j = 1, 2)$ - коэффициенты первой квадратичной формы внешней поверхности; Γ_i^0 - граничные линии области S ; N_{ij}^0, M_{ij}^0 - усилия и моменты, приложенные к соответствующим граничным линиям.

Принимая во внимание формулы (38), (40), (42) представим вариационное уравнение (45) в форме

$$\begin{aligned}
& \iint_S \left[\frac{N_{11}}{A_1} \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{N_{21}}{A_2} \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{N_{22}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{N_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_{13} k_1 \right) \delta u_1 + \right. \\
& + \frac{N_{22}}{A_2} \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{N_{12}}{A_1} \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{N_{11}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{N_{21}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{23} k_2 \right) \delta u_2 + \\
& + \frac{N_{13}}{A_1} \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial \alpha_1} + \frac{N_{23}}{A_2} \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial \alpha_2} + (N_{11} k_1 + N_{22} k_2) \delta u_3 + \frac{M_{11}}{A_1} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_1} + \\
& + \frac{M_{21}}{A_2} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{M_{22}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{M_{12}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + N_{13} \right) \delta \varphi_1 + \frac{M_{22}}{A_2} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_2} + \\
& + \frac{M_{12}}{A_1} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{M_{11}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{M_{21}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + N_{23} \right) \delta \varphi_2 + \left. \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& - \iint_S \left[\sum_{i=1}^2 (B_{11} \ddot{u}_i + B_{12} \ddot{\varphi}_i) \delta u_i + B_{11} \ddot{u}_3 \delta u_3 + \right. \\
& + \sum_{i=1}^2 (B_{22} \ddot{\varphi}_i + B_{21} \ddot{u}_i) \delta \varphi_i \left. \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \iint_S \left(\sum_{i=1}^3 F_i \delta u_i + \sum_{i=1}^2 M_i \delta \varphi_i \right) d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i^0} (N_{11}^0 \delta u_1^0 + N_{12}^0 \delta u_2^0 + N_{13}^0 \delta u_3^0 + M_{11}^0 \delta \varphi_1^0 + M_{12}^0 \delta \varphi_2^0) A_2 d\alpha_2 - \\
& - \sum_{i=3}^4 \int_{\Gamma_i^0} (N_{22}^0 \delta u_2^0 + N_{21}^0 \delta u_1^0 + N_{23}^0 \delta u_3^0 + M_{21}^0 \delta \varphi_1^0 + M_{22}^0 \delta \varphi_2^0) A_1 d\alpha_1 = 0.
\end{aligned} \tag{48}$$

Интегрируя в (48) по частям и учитывая произвольность вариаций получим уравнения движения оболочки:

$$\begin{aligned}
L_1(N) + N_{13}k_1A_1A_2 + F_1 &= A_1A_2(B_{11}u_1 + B_{12}\phi_1), \\
L_2(N) + N_{23}k_2A_1A_2 + F_2 &= A_1A_2(B_{11}u_2 + B_{12}\phi_2), \\
\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2} - A_1A_2(N_{11}k_1 + N_{22}k_2) + F_3 &= A_1A_2B_{11}u_3, \quad (49) \\
L_1(M) - N_{13}A_1A_2 + M_1 &= A_1A_2(B_{22}\phi_1 + B_{21}u_1), \\
L_2(M) - N_{23}A_1A_2 + M_2 &= A_1A_2(B_{22}\phi_2 + B_{21}u_2), \\
L_1(K) = \frac{\partial(A_2K_{11})}{\partial\alpha_1} - K_{22}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1K_{21})}{\partial\alpha_2} + K_{12}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}, \quad (1 \leftrightarrow 2)
\end{aligned}$$

естественные граничные условия

$$\begin{aligned}
N_{11} &= N_{11}^0; N_{12} = N_{12}^0; N_{13} = N_{13}^0; M_{11} = M_{11}^0; \\
M_{12} &= M_{12}^0; \quad (1 \leftrightarrow 2)
\end{aligned} \quad (50)$$

Дополняя соотношения (49), (50) необходимым числом начальных условий

$$\begin{aligned}
u_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= u_i^0(\alpha_1, \alpha_2); \phi_j(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \phi_j^0(\alpha_1, \alpha_2); \\
\dot{u}_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{u}_i^0(\alpha_1, \alpha_2); \dot{\phi}_j(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \dot{\phi}_j^0(\alpha_1, \alpha_2), \\
(i = \overline{1,3}, j = 1,2).
\end{aligned} \quad (51)$$

получим полную систему уравнений для анализа динамического деформирования произвольных оболочек, выполненных из композиционных материалов.

3.3. Метод и алгоритм решения начально-краевой задачи

Численный метод решения сформулированной задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме [26]. В результате преобразования вариационного уравнения динамики (48) с использованием известных разностных процедур [26] придем к системам сеточных уравнений, описывающим движение внутренних и граничных узлов:

$$\begin{aligned}
B_{11}\ddot{u}_1 + B_{12}\ddot{\varphi}_1 &= F_{u_1}, \\
B_{11}\ddot{u}_2 + B_{12}\ddot{\varphi}_2 &= F_{u_2}, \\
B_{11}\ddot{u}_3 &= F_{u_3}, \\
B_{22}\ddot{\varphi}_1 + B_{21}\ddot{u}_1 &= F_{\varphi_1}, \\
B_{22}\ddot{\varphi}_2 + B_{21}\ddot{u}_2 &= F_{\varphi_2}.
\end{aligned} \tag{52}$$

где F_{u_i} ($i = \overline{1,3}$), F_{φ_j} ($j = 1,2$) – разностные аналоги левых частей системы (49)

Полученная полудискретная система имеет одинаковый вид для внутренних и граничных узлов, а по структуре совпадает с исходной системой уравнений движения (49).

Разрешая систему алгебраических уравнений (52) относительно обобщенных ускорений \ddot{u}_i ($i = \overline{1,3}$), $\ddot{\varphi}_j$ ($j = 1,2$) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_i &= F_{u_i}^* \quad (i = \overline{1,3}), \\
\ddot{\varphi}_j &= F_{\varphi_j}^* \quad (j = 1,2).
\end{aligned} \tag{53}$$

Для интегрирования (53) применяется явная схема «крест» [26]. В результате решение системы (53) сводится к рекуррентному счету по формулам:

$$\begin{aligned}
(\dot{u}_i)^{k+1/2} &= (\dot{u}_i)^{k-1/2} + F_{u_i}^* \cdot \Delta t \\
(\dot{\varphi}_j)^{k+1/2} &= (\dot{\varphi}_j)^{k-1/2} + F_{\varphi_j}^{*m} \cdot \Delta t
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
(u_i)^{k+1} &= (u_i)^k + (\dot{u}_i)^{k+1/2} \cdot \Delta t \\
(\varphi_j)^{k+1} &= (\varphi_j)^k + (\dot{\varphi}_j)^{k+1/2} \cdot \Delta t
\end{aligned} \tag{54}$$

где Δt – шаг интегрирования по времени.

Укрупненный алгоритм решения сформулированной выше начально-краевой задачи деформирования композитных оболочечных элементов конструкций при импульсном нагружении состоит в следующем.

Процесс вычислений разделяется на два этапа: вспомогательный и основной. Вспомогательный этап заключается в задании и вычислении информации, остающейся неизменной в процессе решения системы уравнений (49). Основной этап состоит в численном интегрировании разрешающей системы уравнений и вычислении необходимой информации, изменяющейся на каждом временном шаге и формировании на ее основе базы данных решения задачи. Остановимся более подробно на основных моментах реализации алгоритма.

Вспомогательный этап вычислений:

1. Вводится информация о кинематической модели элемента конструкции, количестве материалов, используемых в конструкции и ряд других.

2. Вводится управляющая информация по записи результатов решения задачи в файлы одномерной и трехмерной графики и файл результатов ("на печать").

3. Вводится информация, характеризующая геометрию элемента конструкции, число слоев для многослойных элементов конструкций, физико-механические характеристики материалов, граничные и начальные условия, вид нагружения, разностную сетку и ряд других параметров.

4. Вычисляются эффективные характеристики композитных лент.

5. Вычисляются координаты узлов основной сетки, коэффициенты Ламе, кривизны; производится кодировка ячеек основной сетки.

6. Задаются списки граничных узлов расчетной области; кодируется тип граничного условия для каждого узла, задаются статические (усилия, моменты) или кинематические (перемещения, углы поворота и т.д.) характеристики для граничных узлов.

7. Задаются внешние нагрузки в виде произведения двух функций с разделяющимися переменными по пространству и времени.

8. Вычисляются коэффициенты операторов численного дифференцирования, значения производных от параметров Ламе, подсчитываются площади ячеек основной и промежуточной сеток, определяются массы и моменты инерции ячеек.

9. Из условия устойчивости разностной схемы вычисляется шаг интегрирования по времени.

10. Задаются начальные условия.

11. Осуществляется запись начальной базы данных решения задачи на внешний носитель.

Основной этап вычислений:

1. Ввод управляющей информации о задаче, считывание с внешнего носителя начальной базы данных решения.

2. В цикле по ячейкам основной разностной сетки вычисляются деформации.

3. Реализуются физические соотношения и на их основе определяются усилия и моменты по формулам (44).

4. Формируются дискретные аналоги уравнений движения (49).

5. В цикле по узлам при помощи рекуррентных соотношений явной схемы интегрирования во времени находятся новые значения скоростей и перемещений на новом временном слое.

6. После выполнения пункта 5 происходит возврат на пункт 2 и осуществляется процесс вычислений на следующем временном шаге.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милейко С.Т., Работнов Ю.Н. Механика волокнистых композитов. — Успехи механики, «Advances in Mechanics», 1980, т. 3, вып. 1, с. 3—55.
2. Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. 2-е изд. — М.: Стройиздат, 1972.— 191 с.
3. Протасов В. Д. Механика в машиноведении композитных конструкций.— Механика композитных материалов, 1987, с. 490—493.
4. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетере Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. 3-е изд. — Рига: Зинатне, 1980.— 572 с.
5. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1979. —744 с.
6. Кристенсен Р. М. Введение в механику композитов. Пер. с англ. под ред. Ю. М. Тарнопольского. — М.: Мир, 1982. — 334 с.
7. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. — М.: МГУ, 1984. —336 с.
8. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. Н. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1977. — 144 с.
9. Тетере Г. А., Рикардс Р. Б., Нарусберг В. А. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. — Рига: Зинатне, 1978.— 240 с.
10. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. — М.: Машиностроение, 1984. — 312 с.
11. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. — Киев: Наукова думка, 1985.— 304 с.

12. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций.— М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
13. Ванин Г. А. (Ван Фо Фы Г. А.). Конструкции из армированных пластмасс.— Киев: Техника, 1971. — 220 с.
14. Гуняев Г. М. Структура и свойства полимерных волокнистых композитов.—М.: Химия, 1981.—232 с.
15. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1984, — 264 с
16. Скудра А. М., Булаве Ф. Я. Структурная теория армированных пластиков. — Рига: Зинатне, 1978.— 192 с; Скудра А. М., Булаве Ф. Я. Прочность армированных пластиков. — М.: Химия, 1982.— 216 с.
17. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердого тела — М.: Наука, 1977. —384 с.
18. Тарнопольский Ю. М., Скудра А. М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. — Рига: Зинатне, 1966.— 260 с.
19. Скудра А. М., Булаве Ф. Я., Роценс К. А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. — Рига: Зинатне, 1971 —238 с
20. Тарнопольский Ю. М., Кинцис Т. Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. Изд. 3-е. — М.: Химия, 1981. —272 с.
21. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука 1966. — 752 с.
22. Суворова Ю. В. Нелинейно-наследственные модели деформирования и разрушения конструкционных материалов. — Автореф дисс докт техн. наук, Москва, ИМАШ, 1979.— 35 с.
23. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
24. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: Гостехиздат, 1948.

25. Шаповалов Л.А. Об учете поперечного обжатия в уравнениях нелинейной динамики оболочек. // Известия РАН МТТ. №3, 1997. С. 156-168.
26. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.