① З якою точністю можна обчислити найменший корінь рівняння $x^2 - 2tg2x + e = 0$, якщо $tg\,2$ та $e \to 3$ пр. зн. ц.

$$D = 4tg^2 2 - 4e$$

найменший з коренів, тому тут $\ominus$

$$x = \frac{2tg\,2 - \sqrt{4tg^2 2 - 4e}}{2} = tg\,2 - \sqrt{tg^2 2 - e}$$

$$\Delta(x) = \left(1 - \frac{1 \cdot 2tg\,2}{2\sqrt{(tg^2 2) - e}}\right) \cdot \Delta(tg\,2) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\sqrt{tg^2 2 - e}}\right) \cdot \Delta(e)$$

② Зробити 2 кроки для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $x^3+6x^2+9x+2=0$ методом Ньютона, $\varepsilon=10^{-1}$

-4	-3	-2	-1	0	1
+	+	−	−	+	+

• найменший корінь належить проміжку $[-3;-2]$.

$f'(3)=0$, зменшуємо проміжок до $[-2,5;-2]$

$f(x)=x^3+6x^2+9x+2$

$f'(x)=3x^2+12x+9<0$

$f''(x)=6x+12<0$

$$m_1=\min_{x\in[-2,5;-2]}|f'(x)|=|f'(-2,5)|=2,5$$

$$M_2=\max_{x\in[-2,5;-2]}|f''(x)|=|f''(-2,5)|=3$$

Виберемо $x_0=-2,5$. Знайдемо q:

$$q=\frac{M_2|x_0-x^*|}{2m_1}=\frac{3\cdot 0,5}{2\cdot 2,5}=\frac{1,5}{5}=0,1<1$$

умови збіжності виконані.

Тоді

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-2,5-\frac{f(-2,5)}{f'(-2,5)}$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\ldots$$

③ Розв'язати системи методом прогонки

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Перевіримо діагональну перевагу:

$|1| \geqslant |-1|$

$|-2| \geqslant |-1| + |1|$ => метод стійкий

$|2| \geqslant |1|$

A - тридіагональна

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\beta_1 = \frac{f_0}{c_0} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$z_1 = c_1 - \alpha_1 a_1 = 2 - 1 \cdot 1 = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{b_1}{z_1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\beta_2 = \frac{f_1 + \alpha_1 \beta_1}{z_1} = \frac{2 + 1 \cdot 4}{1} = 6$$

$$z_2 = c_2 - \alpha_2 a_2 = -2 + 1 \cdot 1 = -1$$

$$x_2 = \frac{f_2 + a_2 \beta_2}{z_2} = \frac{0 + 1 \cdot 6}{-1} = -6$$

$$x_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 = -1 \cdot (-6) + 6 = 12$$

$$x_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 = 1 \cdot 12 + 4 = 16$$

Відп: $x^T = (16; 12; -6)$

④ Зробити одну ітерацію методом Зейделя для 2 завдання (навіть якщо немає збіжності)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) $A \neq A^T$ → не виконується дост. ум.

2) $Det(1) > 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2+1 < 0$$ → не виконується дост. ум.

$$x_1^{k+1} = (x_2^k - 4)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}(x_1^{k+1} - x_3^k - 2)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{2}(-x_2^{k+1})$$

1 ітерація:

$x_0 = (0; 0; 0)^T$

$x_1^1 = 0 - 4 = -4$

$x_2^1 = \frac{1}{2}(-4-2) = -3$

$x_3^1 = \frac{1}{2} \cdot (-(-3)) = 3/2$

5) Відомі значення $\sin 0, \sin\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{2}$. Оцінити похибку при наближеному обчисленні синуса при $x = \frac{\pi}{5}$.

Похибка інтерполяції:

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

$f(x) = \sin x$

Вузли: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

$\tilde{x} = \frac{\pi}{5}$, $M_5 = \max|f^{(n+1)}(x)| = 1$ (тому що синус)

$$|f(\tilde{x}) - L(\tilde{x})| \le \frac{M_5}{5!}\left|\left(\frac{\pi}{5} - 0\right)\left(\pi/5 - \frac{\pi}{6}\right)(\pi/5 - \pi/4) \cdot (\pi/5 - \pi/3)(\pi/5 - \pi/2)\right|$$