Zusammenfassung Information Theory and Coding

Markus Velm

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Informationstheorie

Bit: binary unit → Einheit für Information

bit: binary digit → bit als binäres Symbol

Informationgehalt

je unwahrscheinlicher ein Symbol x auftritt, desto mehr Information enhält es:

$$I(x) = ld\left(\frac{1}{P(x)}\right) = -ld(P(x))$$

P: Wahrscheinlichkeit eines Symbols
I: Informationsgehalt $[I] = Bit$

Entropie

gemittelter Informationsgehalt einer Quelle X:

$$H(X) = \sum_i P(x_i) \cdot I(x_i) = -\sum_i P(x_i) \cdot ld(P(x_i))$$

H: Entropie $[H] = Bit/Symbol$

Entscheidungsgehalt

Entropie wird maximal, wenn alle Symbole gleichwahrscheinlich sind → Entscheidungsgehalt

$H_0 = ld(N)$

H_0: Entscheidungsgehalt $[H_0] = Bit/Symbol$
N: Anzahl der Symbole eines Alphabets

Redundanz

$R = H_0 - H$

$r = \frac{R}{H_0}$

R: Redundanz $[R] = Bit/Symbol$
r: relative Redundanz

1.2. Quellcodierung

1.2.1. Huffman-Code

ist **Präfixcode:** ein Codewort ist niemals Anfang eines anderen Codewortes

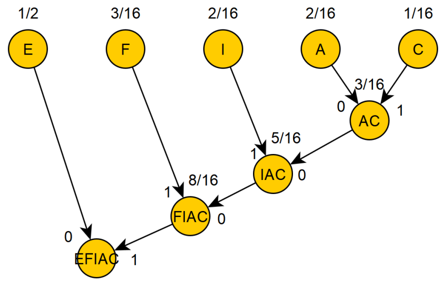
Codebaum aufbauen:

1. Ordne die Symbole nach Auftrittswahrscheinlichkeit

2. Fasse Symbole mit niedrigster Wahrscheinlichkeit zu einem Symbol zusammen und addiere die Wahrscheinlichkeiten

3. Wiederhole bis nur ein Symbol übrig bleibt

Beschrifte die Pfade mit 1 und 0
→ Codewort ergibt sich, indem man von Wurzel bis zum Blatt geht



<u>Hinweis</u>: Beschriftung der 0; 1 theoretisch egal aber für Überprüfung mit Onlinerechnern sollte konsistent der Pfad mit der geringeren und höheren Wahrscheinlichkeit gleich beschriftet werden

1.2.2. Arithmetische Codierung

Codierung eines Wortes (oder Textes) durch Zahl

Endezeichen notwendig, da keine natürliche Terminierung des Codes

1.3. Kanalmodell

1.4. Kanalkapazität

1.5. Shannon-Theoreme

2. Blockcodes

Code beschrieben durch $C(n, k, d)$

n: Länge Codewort
k: Länge Informationswort
d: Mindestabstand

Coderate: $CR = \frac{k}{n}$

2.1. Generelles

Generatormatrix

Erzeugung eines Codewortes über Multiplikation eines Informationsvektors

$\vec{c} = i \cdot G$

c: Codewort
i: Informationswort
G: Generatormatrix

Prüfmatrix

$\vec{c}^T H = 0$

$H \cdot G^T$

H: Prüfmatrix

Syndrom

wenn Empfangswort r fehlerhaft ist (damit nicht zum Coderaum gehört) dann ist das Produkt aus Prüfmatrix und Empfangswort das *Syndrom* und nicht mehr 0

$\vec{r}^T H = \vec{s} \neq 0$

Systematische Codes

Systematischer Code: Einheitsmatrix I ist Teil der Generatormatrix

$G = [I|G']$

Bsp.: C(7, 4, 3): $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lineare Codes

Gewicht

Gewicht eines Codewortes: Anzahl der von 0 verschiedenen Stellen

Mindestgewicht: Minimale Anzahl an Stellen, die von 0 verschieden sind

Distanz/Abstand

Hamming-Distanz: Anzahl an verschiedenen Stellen zweier Codewörter

Mindestdistanz: Mindestanzahl an verschiedenen Stellen zweier beliebiger Codewörter eines Codes

bei linearen Codes: Mindestgewicht = Mindestabstand

Fehlerkorrigierbarkeit/Fehlererkennung

2.2. Hamming-Codes

immer $d = 3$

$n = 2^h - 1$

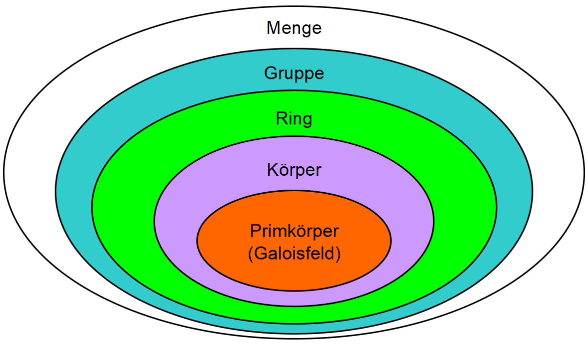
$k = n - h$

h	n	k	d
2	3	1	3
3	7	4	3
4	15	11	3
5	31	26	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Konstruktion

3. Galois-Felder

3.1. Algebraische Strukturen



Menge

Verbund von Elementen, welche keine Operationen beinhalten (Möbel können eine Menge sein, es kann aber nicht Tisch + Stuhl gerechnet werden)

Halbgruppe

Menge A mit Verknüpfung »+« ist eine Halbgruppe, wenn

- Abgeschlossenheit (+ zweier Elemente von A ergibt wieder ein Element von A)
- Assoziativität (Reihenfolge der Operation mit + spielt keine Rolle, $a + (b + c) = (a + b) + c$)
- Existenz eines neutralen Elements (Element a + neutrales Element n ergibt wieder Element a)

Gruppe

Halbgruppe plus

- Existenz eines additiven inversen Elements ($a+b = n$)

Abelsche oder kommutative Gruppe

Gruppe plus

- Kommutativität (Reihenfolge der Operanden spielt keine Rolle, $a + b = b + a$)

Ring

abelsche Gruppe plus

- Abgeschlossenheit bezüglich »·«
- Assoziativität bezüglich »·«
- Distributivität ($a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$)

Körper

Ring plus

- Kommutativität bezüglich »·«($a \cdot b = b \cdot a$)
- Neutrales Element bezüglich »·«
- Inverses Element bezüglich »·«für jedes Element

Primkörper/Galois-Feld

Körper, indem Addition und Multiplikation $\mod p$ gerechnet wird (p muss dabei eine Primzahl sein)
$\hookrightarrow GF(p)$

3.2. Eigenschaften Galois-Felder

Primitives Element

Element α, welches durch ihre $p-1$ Potenzen alle Elemente (außer 0) des $GF(p)$ erzeugt

Bsp. $GF(5), \alpha = 2$:

$2^0 = 1 \mod 5 = 1$
$2^1 = 2 \mod 5 = 2$
$2^2 = 4 \mod 5 = 4$
$2^3 = 8 \mod 5 = 3$

ab hier zykische Wiederholung:
$2^4 = 16 \mod 5 = 1$

Polynome

Folge an n Zahlen im Galois-Feld wird als Polynom vom Grad $n - 1$ geschrieben

$\hookrightarrow \{1; 4; 3; 1\} \rightarrow A(x) = 1x^3 + 4x^2 + 3x + 1$

Auswertung des Polynoms an verschiedenen Stellen von α^i ergibt ihre Fouriertransformierte $a(x)$

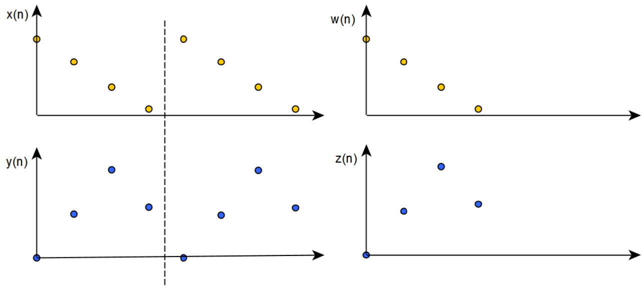
$a_i = A(\alpha^i)$

Zyklische Faltung

Polynommultiplikation im Galois-Feld $\rightarrow$ zyklische Faltung

Normale Faltung mit endlichen Signalen $\rightarrow$ endliches Faltungsergebnis

Zyklische Faltung: Signale sind periodisch, damit Faltungsergebnis ebenfalls periodisch (und damit unendlich lang)



links: zyklische Faltung rechts: normale Faltung

4. Reed-Solomon-Code

4.1. Wunsch und Idee

Wunsch

Konstruktion eines Codes mit vorgegebener Korrekturfähigkeit
$\rightarrow$ Vorgabe des Mindestabstandes d

$$e = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$
$$d = 2e + 1$$

bei linearem Code ist Mindestabstand = Mindestgewicht

$\rightarrow$ Codeworte haben mind. d von 0 verschiedene Koeffizienten

d'Alembert: Polynom vom Grad n hat n komplexe (oder höchstens n reelle) Nullstellen; auch im Galois-Feld

Idee

Konstruktion des Informationswortes als Polynom $A(x)$ mit Grad $k-1$ (damit höchstens $k-1$ Nullstellen)

Im $GF(p)$ mit Ordnung $n = p - 1$ kann man $A(x)$ an n Stellen auswerten, danach wiederholen sich die Werte

$\rightarrow$ Auswertung des Polynoms für verschiedene x (bzw. α^i) ergeben die Koeffizienten a_i des Polynoms $a(x)$

$a_i = A(\alpha^i)$ IDFT

von diesen sind höchstens $k-1$ Null (weil $grad(A(x)) = k-1$)
von diesen sind also mind. $n-(k-1)$ von Null verschieden
$\rightarrow$ Mindestgewicht d

$$d = n - (k-1) = n - k + 1$$

4.2. Codierung

Verschiedene Möglichkeiten aus einem Informationswort ein Codewort zu generieren

4.2.1. Generatorpolynom

$$g(x) = \prod_{i=k}^{n-1} \left(x - \alpha^{-i}\right)$$

Syndromstellen beginnen hier bei k, es sind aber alle anderen Stellen möglich, solange sie zusammenhängen

$grad(g(x)) = d - 1 = n - k =$ Anzahl Syndromstellen

$g(x)$: Generatorpolynom
$i(x)$: Informationspolynom

4.2.2. IDFT (nicht systematisch)

$a_i = A(\alpha^i)$

$A(x)$: Informationswort
a_i: Koeff. des Codewortes

4.2.3. Polynommultiplikation (nicht systematisch)

$a_i = g(x) \cdot i(x)$

4.2.4. Polynomdivision (systematisch)

Informationswort ist Teil des Codewortes (an den hohen Potenzen)

$$a^*(x) = i_{k-1}x^{n-1} + i_{k-2}x^{n-2} + ... + i_1 x^{n-k+1} + i_0 x^{n-k}$$

jedes Codewort muss durch Generatorpolynom teilbar sein
$\rightarrow$ ist für $a^*(x)$ i.A. nicht der Fall

$$\frac{a^*(x)}{g(x)} = b(x) + \frac{rest(a^*(x))}{g(x)}$$
$$\rightarrow \frac{a^*(x) - rest\left(a^*(x)\right)}{g(x)} = b(x)$$
$$a(x) = a^*(x) - rest\left(a^*(x)\right)$$

$rest\left(a^*(x)\right)$: Divisionsrest

4.2.5. Über Prüfpolynom (systematisch)

Prüfpolynom:

$$h(x) = \prod_{i=0}^{k-1} \left(x - \alpha^{-i}\right)$$

Produkt aus Generator- und Prüfpolynom ist 0

$g(x) \cdot h(x) = 0$

und Produkt aus Codepolynom und Prüfpolynom ist 0

$a(x) \cdot h(x) = 0$

genau da, wo $g(x)$ (oder $a(x)$) Nullstellen hat (also G_i 0 ist) hat das Prüfpolynom $h(x)$ keine Nullstellen (ist also H_i nicht 0) und umgekehrt

4.2.6. Zyklischer Code

Multiplikation eines Polynoms mit x^i verschiebt Koeff. des Polynoms um i-Stellen

durch mod-Rechnung des Exponenten verschieben sich höhere Exponenten wieder an den Anfang des Polynoms

Bsp.:

$x \cdot a(x) = x \cdot (2x^2 + x + 1) = 2x^3 + x^2 + x = x^2 + x + 2$

4.3. Decodierung

Idee:

Addition des Fehlerpolynoms $f(x)$ mit t Koeffizienten (d.h. t Fehler sind auf dem Kanal aufgetreten) zum gesendeten Codewort $a(x)$

im Zeitbereich:

$r(x) = a(x) + f(x)$

im Frequenzbereich:

$R(x) = A(x) + F(x)$

gedanklich wird ein Polynom $c(x)$ aufgestellt, welches t Nullen an den Fehlerstellen hat

Da die Koeffizienten von $c(x)$ die Auswertung ihrer Fouriertransformierten $C(x)$ ist, ist der Grad von $C(x)$ t

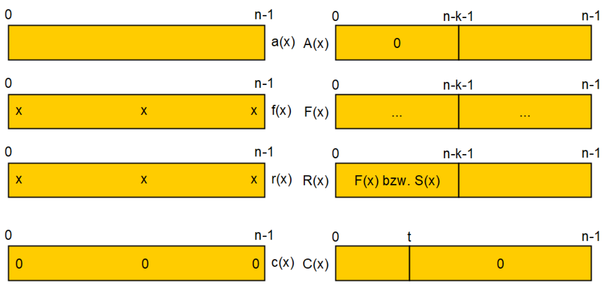
Da $c(x)$ gerade dort 0 ist, wo $f(x)$ ungleich 0, ist das Produkt $f_i \cdot c_i$ immer 0 (Achtung, keine Polynommultiplikation gemeint, sondern punktweise Multiplikation)

$f_i \cdot c_i = 0$

wenn Zeitbereich $= 0 \to$ Frequenzbereich $= 0$

$F(x) \cdot C(x) = 0$

Achtung: hier Polynommultiplikation/ Faltung/ Filterung gemeint
$\hookrightarrow$ Aufstellen der Schlüsselgleichungen



4.3.1. Vorgehen

1. Fouriertransformation des empfangenen Codewortes $r(x) \to R(x)$
2. Auslesen der Koeff. des Syndrompolynoms $(S_0, ..., S_n)$ aus $R(x)$ und Aufstellen des Syndrompolynoms
3. Berechnung des $C(x)$ aus Schlüsselgleichungen oder euklidschem Algorithmus
4. Berechnung der Fehlerstellen durch Nullstellensuche von $C(x)$
5. Berechnung des Fehlerwertes über Schlüsselgleichungen oder Forney-Algorithmus

4.3.2. Schlüsselgleichungen

beschreiben, dass Faltung von $C(x)$ und $F(x)$ Null ist (Achtung: zyklische Faltung, siehe Abschnitt 3)

F_0 bis F_{n-k-1} (bzw. F_{d-2}) sind bekannt, da diese direkt an den Syndromstellen von $R(x)$ stehen

Alle C-Koeff. sind unbekannt, außer C_t, dieser wird zu 1 gesetzt

$C_t = 1$

da Anzahl der Fehler (t) unbekannt ist, muss ausprobiert werden, welche minimale Anzahl an Fehlern die Schlüsselgleichungen widerspruchsfrei erfüllt

Lösen der Schlüsselgleichungen nach $C(x)$

$\hookrightarrow$ Nullstellensuche von $C(x)$ ergibt die Nullen des $c(x)$

$\hookrightarrow$ wenn Grad von $C(x)$ nicht mit Anzahl der Nullstellen übereinstimmt $\to$ Decodierversagen

Lösen der Schlüsselgleichungen nach $F(x)$

$\hookrightarrow$ $f(x)$ aus Rücktransformation von $F(x)$

$\hookrightarrow$ $f(x)$ von $r(x)$ abziehen, man erhält $a(x)$

$a(x) = r(x) - f(x)$

4.3.3. Euklidscher Algorithmus

Suche des ggT zweier Zahlen

Kann zur Lösung der Schlüsselgleichungen verwendet werden

Rest:

$r_n = v_n a_n + w_n b_n$

Rekursionsformeln für v_n und w_n:

$v_n = v_{n-2} - q_n v_{n-1}$

$w_n = w_{n-2} - q_n w_{n-1}$

q_n: Quotient des vorherigen Schrittes

Initialisierung:

$v_{-1} = 1 \quad v_0 = 0$
$w_{-1} = 0 \quad w_0 = 1$

Suche des $C(x)$ und damit den Fehlerstellen

Polynomdivision von x^{d-1} und des Syndrompolynoms $S(x)$

$x^{d-1} : S(x)$

Wenn Rest der Division im Grad nicht kleiner ist als die Anzahl der Fehler e, die maximal korrigiert werden können $\to$ weiter: $S(x) : r_1(x)$

usw.

ist Grad des Restes kleiner als $e \to$ Berechnung des $C(x)$ und des $T(x)$

$\hookrightarrow C(x) = w_n$

$\hookrightarrow T(x) = -r_n$

4.3.4. Forney-Algorithmus

Fehlerwertberechnung aus gegebenem $C(x)$ und $T(x)$

$$f_i = x^q \cdot n \cdot x^{-1} \left.\frac{T(x)}{C'(x)}\right|_{x=\alpha^i}$$

q: Verschiebung der Syndromstellen ($q = 5$, wenn Syndrom an Stelle 5)

Achtung: Fehlerwert an den Stellen, an dem keine Fehler passiert sind, ist i.A. nicht 0

4.4. Kürzere Codes

Verkürzung

Streichen von Informationswortstellen und Codewortstellen

Distanz und damit Fehlerkorrigierbarkeit bleibt gleich

Code ist nicht mehr zyklisch

Bsp.: Verkürzung eines $C(6, 2, 5)$ um 1 auf $C(5, 1, 5)$

Punktierung

5. Erweiterungskörper

5.1. Idee

Erweitern des Grundkörpers (z.B. 2) mit Exponent (z.B. 4) $\rightarrow GF(2^4)$

Irreduzibles Polynom ist die Primzahl des Erweiterungskörpers z.B. in $GF(2^4)$:
$p(x) = x^4 + x + 1$

Irreduzibles Polynom: $ggT(p(x), b(x)) = 1$

größter gemeinsamer Teiler mit einem beliebigen Polynom $b(x)$ ist 1

d.h. $p(x)$ kann nicht in Linearfaktoren zerlegt werden

für irreduzible Polynome gilt:
- ist durch kein Polynom ohne Rest teilbar
- hat keine Nullstellen

aber: Nullstellen sind wichtig für Nutzung des RS-Codes, daher «Erfindung« des Elements α, welches Nullstelle von $p(x)$ ist

$p(\alpha) = 0$

am Beispiel:
$p(\alpha) = \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$

Analogie: «Erfindung« von j, sodass gilt:

$j^2 + 1 = 0$

primitives Polynom: Nullstelle (α) des primitiven Polynoms erzeugt alle Elemente (außer 0) des Erweiterungskörpers

primitives Element: Nullstelle α des primitiven Polynoms

5.2. Eigenschaften von Erweiterungskörpern

Ordnung des primitiven Elements: $2^m - 1$ im $GF(2^m)$

Erzeugung der Elemente über Potenzieren des primitiven Elements α

zum Körper $GF(2^m)$ gehören 2^m Elemente ($2^m - 1$ dieser wird durch Potenzieren von α erzeugt)

Elemente der Erweiterungskörper sind Polynome

Darstellung

Erzeugung von bspw. α^3 in $GF(2^4)$ mit irreduziblem Polynom $p(x) = x^4 + x + 1$:

$\alpha^3 = 1 \cdot \alpha^3 + 0 \cdot \alpha^2 + 0 \cdot \alpha^1 + 0 \cdot \alpha^0$

dazugehörige Binärdarstellung:

1000

6. BCH-Codes

6.1. Idee

Für Erweiterungskörper war α die Nullstelle des primitiven Polynoms

ABER: d'Alembert: Polynom vom Grad m hat m Nullstellen

Wo sind die restlichen Nullstellen der primitiven Polynome höheren Grades?

$\hookrightarrow$ wenn α Nullstelle von $p(x)$ ist, dann sind auch $\alpha^2, \alpha^{2^2}, \alpha^{2^3}, ..., \alpha^{2^{m-1}}$ Nullstellen ($\rightarrow$ konjugiert komplexe Nullstellen)

6.2. Kreisteilungsklassen

7. Faltungscodes

Filterung der Eingangssequenz mit FIR-Filter

Beschreibung durch $C(n, k, [z])$

n: Anzahl Ausgänge
k: Anzahl Eingänge
z: Anzahl an Speicherzellen

7.1. Ein Ausgang

Faltungscoder ohne Redundanz

Normaler FIR-Filter mit binären Koeffizienten, Generatorsequenz ist Impulsantort

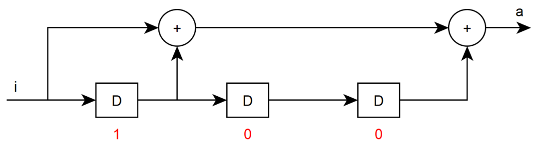
Delay: $z^{-1} = D$

Impulsantort: $\vec{g}$

Inhalt der Speicherzellen: $\vec{d}$

Ausgang: $a = \vec{g} \cdot \begin{pmatrix} i \\ \vec{d} \end{pmatrix}$

Beispiel



Impulsantort: $g = 1 + 1D + 0D^2 + D^3 = 1 + D + D^3$

Generatorsequenz: $\vec{g}^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Von links nach rechts steht (100) in den Speicherzellen und es wird $i = 1$ hineingeschrieben

$$\hookrightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

7.2. Mehrere Ausgänge

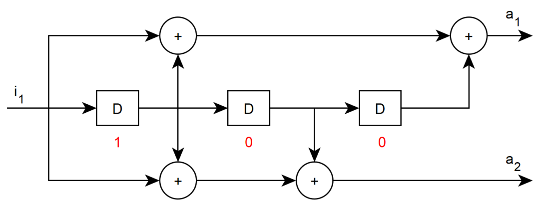
Filter mit mehreren Ausgängen

2 Impulsantorten des Filters geben 2 verschiedene Ausgänge

Generatorsequenz wird zu Generatormatrix mit 2 Generatorsequenzen

$$\vec{a} = G^T \cdot \begin{pmatrix}i\\\vec{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix}\vec{g_1}^T\\\vec{g_2}^T\end{pmatrix}$$

Beispiel



Im Speicher steht wieder von links nach rechts (100) und es wird $i = 1$ hineingeschrieben

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

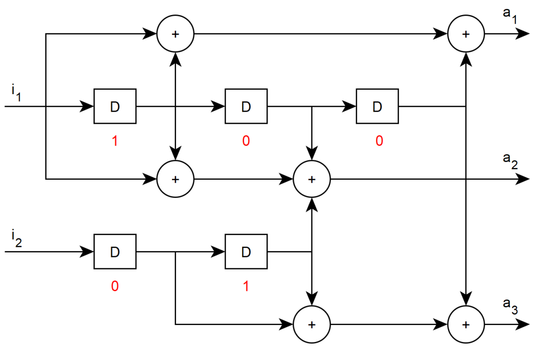
7.3. Mehrere Ausgänge

Mehrere Eingänge (i_1, i_2) um Coderate anzupassen

für jeden Ausgang gibt es jeweils 2 Generatorsequenzen (g_{ij})

i: Eingang
j: Ausgang

Beispiel



$$\vec{g_{11}}^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \vec{g_{21}}^T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\vec{g_{12}}^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \vec{g_{22}}^T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\vec{g_{13}}^T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \vec{g_{23}}^T = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Zusamenfassung in G

$$\begin{array}{ccl} & \begin{matrix}\text{E1} & \text{E2} & \text{E1} & \text{E2} & \text{E1} & \text{E2} & \text{E1} & \text{E2}\end{matrix} & \\ G = & \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix}\}\ \text{Ausgang 1}\\\}\ \text{Ausgang 2}\\\}\ \text{Ausgang 3}\end{matrix} \\ & \begin{matrix}\underbrace{\qquad\quad}_{D^0} & \underbrace{\qquad\quad}_{D^1} & \underbrace{\qquad\quad}_{D^2} & \underbrace{\qquad\quad}_{D^3}\end{matrix} & \end{array}$$

A. Hilfreiches

A.1. Inverse in Galois-Feldern

Additive Inverse

gegeben: -3 in $GF(5)$

gesucht: additive Inverse

bedeutet: $3 + x \mod 5 = n = 0$

n: neutrales Element der Addition ($= 0$)

$x = 2$, da $3 + 2 = 5$ und $5 \mod 5 = 0$

daher: $-3 = 2$

oder: mit Tabelle

gegebene Zahl als Index behandeln, passenden Wert raussuchen

Index	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Wert	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1

Multiplikative/modulare Inverse

gegeben: 2^{-1} in $GF(7)$

gesucht: multiplikative Inverse

bedeutet: $2^1 \cdot x \mod 7 = n = 1$

n: neutrales Element der Multiplikation ($= 1$)

$x = 4$, da $2^1 \cdot 4 = 8$ und $8 \mod 7 = 1$

daher: $2^{-1} = 4$

oder: mit Logarithmentafel

gegebene Potenz als Index behandeln, passenden Wert raussuchen

Index	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Wert	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1

A.2. Rechnen im Erweiterungskörper

Bsp.: $GF(2^4)$ mit $p(x) = x^4 + x + 1$

Addition

Multiplikation

gegeben $5 \cdot 6 = (\alpha^2 + 1) \cdot (\alpha^2 + \alpha)$

A.3. Syndromstellen aus Generatorpolynom

Bsp.: $GF(5)$ mit $\alpha = 2$

gegeben $g(x) = x^2 + 5x + 4$

$\hookrightarrow$ 2 Syndromstellen

Suchen über stures Einsetzen der Elemente des $GF(5)$:

$g(\alpha^{-0}) = \alpha^{-0^2} + 3\alpha^{-0} + 2 = 1 + 3 + 2 = 1$

$\hookrightarrow$ Position 0 keine Syndromstelle

$g(\alpha^{-1}) = \alpha^{-1^2} + 3\alpha^{-1} + 2 = 3^2 + 3 \cdot 3 + 2 = 0$

$\hookrightarrow$ Position 1 ist Syndromstelle

$g(\alpha^{-2}) = \alpha^{-2^2} + 3 \cdot \alpha^{-2} + 2 = 4^2 + 3 \cdot 3^2 + 2 = 0$

$\hookrightarrow$ Position 2 ist Syndromstelle

A.4. ABC/PQ-Formel

ABC: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

PQ: $x^2 + px + q$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

B. Polynome

B.1. Polynommultiplikation

B.2. Polynomdivision

allgemein:

gegeben: $(6x^3 - 2x^2 + x + 3) : (x^2 - x + 1)$

$$\begin{array}{rl}
6x^3 - 2x^2 \quad + x + 3 & \big| \; x^2 - x + 1 \\
-\,6x^3 + 6x^2 - 6x \qquad & \big| \; 6x + 4 \\
\hline
4x^2 - 5x + 3 & \\
-\,4x^2 + 4x - 4 & \\
\hline
-x - 1 &
\end{array}$$

Quotient $q(x) = 6x + 4$

Rest $r(x) = -x - 1$

Horner-Schema

zur Polynomdivision mit Linearfaktor

Rest der Division mit $(x - x_0)$ ist Wert des Polynoms an der Stelle x_0

gegeben: $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & 2 \\
 & 3 & 2 & -5 & -10 & \\
 & & 6 & 16 & 22 & \\
\hline
 & 3 & 8 & 11 & 12 &
\end{array}$$

Quotient: $q(x) = 3x^2 + 8x + 11$

Rest: $r(x) = 12 = p(2)$

C. Lineare Algebra

Matrix-Multiplikation

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}_{3,2} \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix}_{2,2} = \begin{pmatrix} ag + bi & ah + bj \\ cg + di & ch + dj \\ eg + fi & eh + fj \end{pmatrix}_{3,2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot d & a \cdot e & a \cdot f \\ b \cdot d & b \cdot e & b \cdot f \\ c \cdot d & c \cdot e & c \cdot f \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$\vec{v}^T \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$$

bei komplexen Vektoren: $\vec{v}^H \cdot \vec{w}$

Transponieren

Zeilen werden Spalten, Spalten werden Zeilen

$$A^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Invertieren

für 2x2-Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Diagonale Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Spalten der Matrix sind Eigenvektoren

1; -5; 3 sind die Eigenwerte der Eigenvektoren

Hermitesche Matrix

nur für quadratische Matrizen

$$A = A^H = (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 5-j & 3j \\ 5+j & 2 & 3-2j \\ -3j & 3+2j & 3+4j \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren von hermiteschen Matrizen sind orthogonal

Unitäre Matrix

$A \cdot A^H = k \cdot I$

k: Skalierungsfaktor (bei skaliert unitären Matrizen)

Toeplitz-Struktur

Eine Matrix hat Toeplitz-Struktur, wenn alle Diagonalen parallel zur Hauptdiagonalen, die gleichen Elemente enthalten:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hermitesche Toeplitz-Matrizen sind positiv oder negativ definit, abhängig vom Vorzeichen der Elemente auf der Hauptdiagonalen

Vandermonde-Matrix

Spalten: Indezes gleich
Zeilen: Potenzen gleich

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0^1 & x_1^1 & ... & x_{N-1}^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & ... & x_{N-1}^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_0^{N-1} & x_1^{N-1} & ... & x_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix}$$

Determinante

nur für quadratische Matrizen

für 2×2-Matrix:

$$det(A) = det\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = a \cdot d - b \cdot c$$

für 3×3-Matrix:

$$det(C) = det\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right]$$

$$= a \cdot det\left[\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}\right] - b \cdot det\left[\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}\right] + c \cdot det\left[\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}\right]$$

Rang einer Matrix

Eine Matrix hat vollen Rang, wenn die Determinante ungleich 0 ist

Ist die Determinante gleich 0, ist die Matrix/das Gleichungssystem überbestimmt

Eigenvektoren/ Eigenwerte

Eigenvektoren einer Matrix werden bei einer Matrixtransformation nur in ihrer Länge geändert, nicht in ihrer Richtung

Faktor, um den ein Eigenvektor gedehnt oder gestaucht wird, ist der zum Eigenvektor zugehöriger Eigenwert λ

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

A: Matrix
$\vec{v}$: Eigenvektor
λ: Eigenwert(e)
I: Einheitsmatrix

Eigenwerte von positiv (oder negativ) definiten Matrix sind immer positiv (oder negativ)

D. Digitale Signalverarbeitung

Diskretisierung und Fensterung

Diskretisierung $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Periodische Fortsetzung
Diskretisierung $\bullet\!\!-\!\!\circ$ Periodische Fortsetzung
Begrenzung $\rightarrow$ Leck-Effekt

Fourier-Transformation (kontinuierlich)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt$$

DFT

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

n: Frequenzindex
k: Zeitindex

Auflösung DFT

$$\Delta f = \frac{f_a}{N} = \frac{1}{t_a \cdot N} = \frac{1}{\Delta t}$$

Δf: spektrale Auflösung
f_a: Abtastfrequenz
t_a: Abtastrate
N: Anzahl Abtastwerte
Δt: Messdauer

Fensterung

Fensterung im Zeitbereich $\rightarrow$ Multiplikation mit Fensterfunktion $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Faltung mit zur Fensterfunktion zugehörigem Spektrum

Dirichlet-Kern

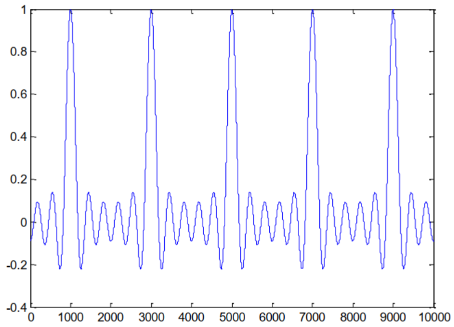
abgetastete Rechteckfunktion $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Dirichlet-Kern

Definition der Dirichlet-Kerns der Länge $N+1$:

$$D(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{jnx} = \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$x = 2\pi f T_a$

Bsp: 11:



Eigenschaften:

Hauptwert hat Höhe $N+1$
Nullstellen, bei $f = \frac{f_a}{N+1} \cdot k$ für $k \in \mathbf{N}$
Hauptwert periodisch mit f_a

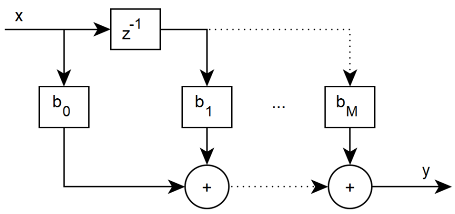
z-Transformation

$z = e^{j2\pi \frac{f}{f_a}}$

$H(f) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi \frac{f}{f_a}}}$

Reiner FIR-Filter

kanonische Form

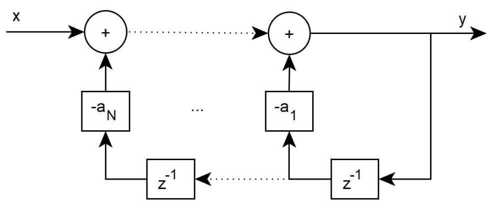


$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + ... + b_M \cdot z^{-M}$$

$$y(t) = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot x(t-1) + ... + b_M \cdot x(t-M)$$

Reiner IIR-Filter

kanonische Form



$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + ... + a_N \cdot z^{-N}}$$

$$y(t) = x(t) - a_1 \cdot y(t-1) - ... - a_n \cdot y(t-N)$$

E. Wahrscheinlichkeitstheorie

E.1. Satz von Bayes

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)}{P(B)} \cdot P(A)$$

E.2. Kombinatorik

E.2.1. Permutation

Ohne Wiederholung

Anordung <u>aller</u> möglicher, unterscheidbarer Ereignisse, kein Ereignisse tritt doppelt auf

$M = N!$

Beispiel: In einem Glas sind 5 verschiedenfarbige Bonbons. Wie viele Möglichkeiten gibt es, alle aus dem Glas zu nehmen? (ohne Zurücklegen)

$\hookrightarrow M = N! = 5! = 120$

Mit Wiederholung

Anordung aller möglicher Ereignisse, von welchen manche nicht unterscheidbar sind

$$M = \frac{N!}{K_1! \cdot ... \cdot K_s!}$$

K_x: Gibt an, wie viele ununterscheidbare Ereignisse es pro Ereignis gibt

Beispiel: In einem Glas liegen 2 blaue, 2 rote und ein grünes Bonbon. Wie viele Möglichkeiten gibt es alle aus dem Glas zu nehmen? (Ohne Zurücklegen)

$$\hookrightarrow \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$$

N: Anzahl der möglichen Ereignisse
M: Anzahl der Permutationen

E.2.2. Variation

Ohne Wiederholung

Zusammenstellung von K Ereignissen; Reihenfolge relevant

$$M = \frac{N!}{(N-K)!}$$

Beispiel: In einem Glas liegen 5 verschiedenfarbige Bonbons. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Bonbons herauszunehmen? (Ohne Zurücklegen)

$$\hookrightarrow M = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Mit Wiederholung

$M = N^K$

Beispiel: In einem Glas liegen 5 verschiedenfarbige Bonbons. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Bonbons herauszunehmen? (Mit Zurücklegen)

$\hookrightarrow M = 5^3 = 125$

M: Anzahl der Variationen
N: Anzahl der möglichen Ereignisse
K: Anzahl der zusammengestellten Ereignisse (Ordnung)

E.2.3. Kombination

Wie Variation, Reihenfolge aber irrelevant (vgl. Lottoziehung)

Ohne Wiederholung

$$M = \binom{N}{K} = \frac{N!}{K! \cdot (N-K)!}$$

Mit Wiederholung

$$M = \binom{N+K-1}{K} = \frac{(N+K-1)!}{K! \cdot (N-1)!}$$

M: Anzahl der Kombinationen
N: Anzahl der möglichen Ereignisse
K: Anzahl der zusammengestellten Ereignisse (Ordnung)