

# Zusammenfassung Information Theory and Coding

Markus Velm

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Informationstheorie . . . . .	1
1.2. Quellcodierung . . . . .	1
1.2.1. Huffman-Code . . . . .	1
1.2.2. Arithmetische Codierung . . . . .	1
1.3. Kanalmodell . . . . .	1
1.4. Kanalkapazität . . . . .	1
1.5. Shannon-Theoreme . . . . .	1
<b>2. Blockcodes</b>	<b>1</b>
<b>3. Galois-Felder</b>	<b>1</b>
3.1. Algebraische Strukturen . . . . .	1
3.2. Eigenschaften Galois-Felder . . . . .	2
<b>4. Reed-Solomon-Code</b>	<b>2</b>
4.1. Wunsch und Idee . . . . .	2
4.2. Codierung . . . . .	2
4.2.1. IDFT (nicht systematisch) . . . . .	3
4.2.2. Generatorpolynom (nicht systematisch) . . . . .	3
4.2.3. Polynomdivision (systematisch) . . . . .	3
4.2.4. Über Prüfpolynom (systematisch) . . . . .	3
4.2.5. Zyklischer Code . . . . .	3
4.3. Decodierung . . . . .	3
4.3.1. Schlüsselgleichungen . . . . .	3
<b>5. Erweiterungskörper</b>	<b>4</b>
5.1. Idee . . . . .	4
5.2. Eigenschaften von Erweiterungskörpern . . . . .	4
<b>6. BCH-Codes</b>	<b>4</b>
<b>A. Hilfreiches</b>	<b>4</b>
A.1. Inverse in Galois-Feldern . . . . .	4
A.2. Syndromstellen aus Generatorpolynom . . . . .	4
A.3. ABC/PQ-Formel . . . . .	4
<b>B. Polynome</b>	<b>4</b>
B.1. Polynommultiplikation . . . . .	4
B.2. Polynomdivision . . . . .	4
<b>C. Lineare Algebra</b>	<b>5</b>
<b>D. Digitale Signalverarbeitung</b>	<b>5</b>

## 1. Einleitung

### 1.1. Informationstheorie

Bit: binary unit → Einheit für Information

bit: binary digit → bit als binäres Symbol

#### Informationsgehalt

je unwahrscheinlicher ein Symbol  $x$  auftritt, desto mehr Information enthält es:

$$I(x) = \log_2 \left( \frac{1}{P(x)} \right) = -\log_2(P(x))$$

$P$ : Wahrscheinlichkeit eines Symbols

$I$ : Informationsgehalt  $[I] = \text{Bit}$

#### Entropie

gemittelter Informationsgehalt einer Quelle  $X$ :

$$H(X) = \sum_i P(x_i) \cdot I(x_i) = - \sum_i P(x_i) \cdot \log_2(P(x_i))$$

$H$ : Entropie  $[H] = \text{Bit/Symbol}$

#### Entscheidungsgehalt

Entropie wird maximal, wenn alle Symbole gleichwahrscheinlich sind → Entscheidungsgehalt

$$H_0 = \log_2(N)$$

$H_0$ : Entscheidungsgehalt  $[H_0] = \text{Bit/Symbol}$

$N$ : Anzahl der Symbole eines Alphabets

#### Redundanz

$$R = H_0 - H$$

$$r = \frac{R}{H_0}$$

$R$ : Redundanz  $[R] = \text{Bit/Symbol}$

$r$ : relative Redundanz

### 1.2. Quellcodierung

#### 1.2.1. Huffman-Code

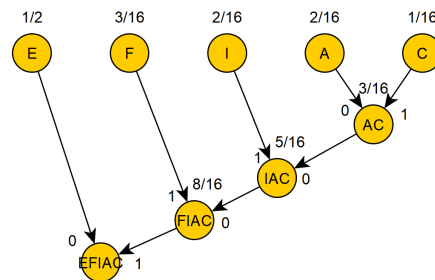
ist **Präfixcode**: ein Codewort ist niemals Anfang eines anderen Codewortes

Codebaum aufbauen:

1. Ordne die Symbole nach Auftretswahrscheinlichkeit
2. Fasse Symbole mit niedrigster Wahrscheinlichkeit zu einem Symbol zusammen und addiere die Wahrscheinlichkeiten
3. Wiederhole bis nur ein Symbol übrig bleibt

Beschrifte die Pfade mit 1 und 0

→ Codewort ergibt sich, indem man von Wurzel bis zum Blatt geht



Hinweis: Beschriftung der 0; 1 theoretisch egal aber für Überprüfen mit Onlinerechner sollte konsistent der Pfad mit der geringeren und höheren Wahrscheinlichkeit gleich Beschriftet werden

#### 1.2.2. Arithmetische Codierung

Codierung eines Wortes (oder Textes) durch Zahl

Endezeichen notwendig, da keine natürliche Terminierung des Codes

### 1.3. Kanalmodell

### 1.4. Kanalkapazität

### 1.5. Shannon-Theoreme

## 2. Blockcodes

Code beschrieben durch  $C(n, k, d)$

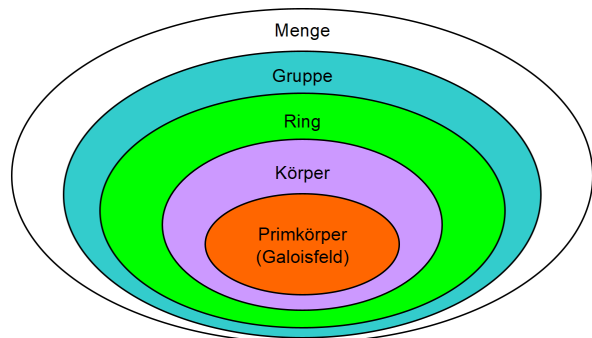
$n$ : Länge Codewort

$k$ : Länge Informationswort

$d$ : Mindestabstand

## 3. Galois-Felder

### 3.1. Algebraische Strukturen



#### Menge

Verbund von Elementen, welche keine Operationen beinhalten (Möbel können eine Menge sein, es kann aber nicht Tisch + Stuhl gerechnet werden)

## Halbgruppe

Menge  $A$  mit Verknüpfung  $\gg\ll$  ist eine Halbgruppe, wenn

- Abgeschlossenheit (+ zweier Elemente von  $A$  ergibt wieder ein Element von  $A$ )
- Assoziativität (Reihenfolge der Operation mit  $+$  spielt keine Rolle,  $a + (b + c) = (a + b) + c$ )
- Existenz eines neutralen Elements (Element  $a +$  neutrales Element  $n$  ergibt wieder Element  $a$ )

## Gruppe

Halbgruppe plus

- Existenz eines additiven inversen Elements ( $a + b = n$ )

## Abelsche oder kommutative Gruppe

Gruppe plus

- Kommutativität (Reihenfolge der Operanden spielt keine Rolle,  $a + b = b + a$ )

## Ring

abelsche Gruppe plus

- Abgeschlossenheit bezüglich  $\gg\ll$
- Assoziativität bezüglich  $\gg\ll$
- Distributivität ( $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ )

## Körper

Ring plus

- Kommutativität bezüglich  $\gg\ll$  ( $a \cdot b = b \cdot a$ )
- Neutrales Element bezüglich  $\gg\ll$
- Inverses Element bezüglich  $\gg\ll$  für jedes Element

## Primkörper/Galois-Feld

Körper, indem Addition und Multiplikation mod  $p$  gerechnet wird ( $p$  muss dabei eine Primzahl sein)  
 $\hookrightarrow GF(p)$

### 3.2. Eigenschaften Galois-Felder

#### Primitives Element

Element  $\alpha$ , welches durch ihre  $p - 1$  Potenzen alle Elemente (außer 0) des  $GF(p)$  erzeugt

Bsp.  $GF(5)$ ,  $\alpha = 2$ :

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 \mod 5 = 1 \\ 2^1 &= 2 \mod 5 = 2 \\ 2^2 &= 4 \mod 5 = 4 \\ 2^3 &= 8 \mod 5 = 3 \end{aligned}$$

ab hier zyklische Wiederholung:

$$2^4 = 16 \mod 5 = 1$$

#### Polynome

Folge an  $n$  Zahlen im Galois-Feld wird als Polynom vom Grad  $n - 1$  geschrieben

$$\hookrightarrow \{1; 4; 3; 1\} \rightarrow A(x) = 1x^3 + 4x^2 + 3x + 1$$

Auswertung des Polynoms an verschiedenen Stellen von  $\alpha^i$  ergibt ihre Fouriertransformierte  $a(x)$

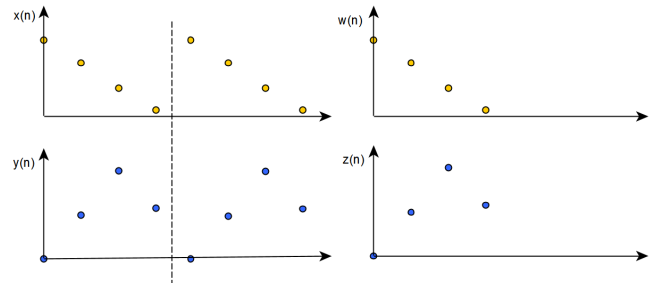
$$a_i = A(\alpha^i)$$

#### Zyklische Faltung

Polynommultiplikation im Galois-Feld  $\rightarrow$  zyklische Faltung

Normale Faltung mit endlichen Signalen  $\rightarrow$  endliches Faltungsergebnis

Zyklische Faltung: Signale sind periodisch, damit Faltungsergebnis ebenfalls periodisch (und damit unendlich lang)



links: zyklische Faltung

rechts: normale Faltung

## 4. Reed-Solomon-Code

### 4.1. Wunsch und Idee

#### Wunsch

Konstruktion eines Codes mit vorgegebener Korrekturfähigkeit  
 $\rightarrow$  Vorgabe des Mindestabstandes  $d$

$$e = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$
$$d = 2e + 1$$

bei linearem Code ist Mindestabstand = Mindestgewicht

$\rightarrow$  Codeworte haben mind.  $d$  von 0 verschiedene Koeffizienten

d'Alembert: Polynom vom Grad  $n$  hat  $n$  komplexe (oder höchstens  $n$  reelle) Nullstellen; auch im Galois-Feld

#### Idee

Konstruktion des Informationswortes als Polynom  $A(x)$  mit Grad  $k - 1$  (damit höchstens  $k - 1$  Nullstellen)

Im  $GF(p)$  mit Ordnung  $n = p - 1$  kann man  $A(x)$  an  $n$  Stellen auswerten, danach wiederholen sich die Werte

$\rightarrow$  Auswertung des Polynoms für verschiedene  $x$  (bzw.  $\alpha^i$ ) ergeben die Koeffizienten  $a_i$  des Polynoms  $a(x)$

$$a_i = A(\alpha^i) \quad \text{IDFT}$$

von diesen sind höchstens  $k - 1$  Null (weil  $\text{grad}(A(x)) = k - 1$ )

von diesen sind also mind.  $n - (k - 1)$  von Null verschieden  
 $\rightarrow$  Mindestgewicht  $d$

$$d = n - (k - 1) = n - k + 1$$

### 4.2. Codierung

Verschiedene Möglichkeiten aus einem Informationswort ein Codewort zu generieren

#### 4.2.1. IDFT (nicht systematisch)

$$a_i = A(\alpha^i)$$

$A(x)$ : Informationswort  
 $a_i$ : Koeff. des Codewortes

#### 4.2.2. Generatorpolynom (nicht systematisch)

$$a_i = g(x) \cdot i(x)$$

mit Generatorpolynom

$$g(x) = \prod_{i=k}^{n-1} (x - \alpha^{-i})$$

$g(x)$ : Generatorpolynom  
 $i(x)$ : Informationspolynom

#### 4.2.3. Polynomdivision (systematisch)

Informationswort ist Teil des Codewortes (an den hohen Potenzen)

$$a^*(x) = i_{k-1}x^{n-1} + i_{k-2}x^{n-2} + \dots + i_1x^{n-k+1} + i_0x^{n-k}$$

jedes Codewort muss durch Generatorpolynom teilbar sein  
 $\rightarrow$  ist für  $a^*(x)$  i.A. nicht der Fall

$$\frac{a^*(x)}{g(x)} = b(x) + \frac{\text{rest}(a^*(x))}{g(x)}$$

$$\rightarrow \frac{a^*(x) - \text{rest}(a^*(x))}{g(x)} = b(x)$$

$$a(x) = a^*(x) - \text{rest}(a^*(x))$$

$\text{rest}(a^*(x))$ : Divisionsrest

#### 4.2.4. Über Prüfpolynom (systematisch)

Prüfpolynom:

$$h(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - \alpha^{-i})$$

Produkt aus Generator- und Prüfpolynom ist 0

$$g(x) \cdot h(x) = 0$$

und Produkt aus Codepolynom und Prüfpolynom ist 0

$$a(x) \cdot h(x) = 0$$

genau da, wo  $g(x)$  (oder  $a(x)$ ) Nullstellen hat (also  $G_i = 0$  ist) hat das Prüfpolynom  $h(x)$  keine Nullstellen (ist also  $H_i$  nicht 0) und umgekehrt

#### 4.2.5. Zyklischer Code

Multiplikation eines Polynoms mit  $x^i$  verschiebt Koeff. des Polynoms um  $i$ -Stellen

durch mod-Rechnung des Exponenten verschieben sich höhere Exponenten wieder an den Anfang des Polynoms

Bsp.:

$$x \cdot a(x) = x \cdot (2x^2 + x + 1) = 2x^3 + x^2 + x = x^2 + x + 2$$

#### 4.3. Decodierung

Idee:

Addition des Fehlerpolynoms  $f(x)$  mit  $t$  Koeffizienten (d.h.  $t$  Fehler sind auf dem Kanal aufgetreten) zum gesendeten Codewort  $a(x)$

im Zeitbereich:

$$r(x) = a(x) + f(x)$$

im Frequenzbereich:

$$R(x) = A(x) + F(x)$$

gedanklich wird ein Polynom  $c(x)$  aufgestellt, welches  $t$  Nullen an den Fehlerstellen hat

Da die Koeffizienten von  $c(x)$  die Auswertung ihrer Fourier-transformierten  $C(x)$  ist, ist der Grad von  $C(x)$   $t$

Da  $c(x)$  gerade dort 0 ist, wo  $f(x)$  ungleich 0, ist das Produkt  $f_i \cdot c_i$  immer 0 (Achtung, keine Polynommultiplikation gemeint, sondern punktweise Multiplikation)

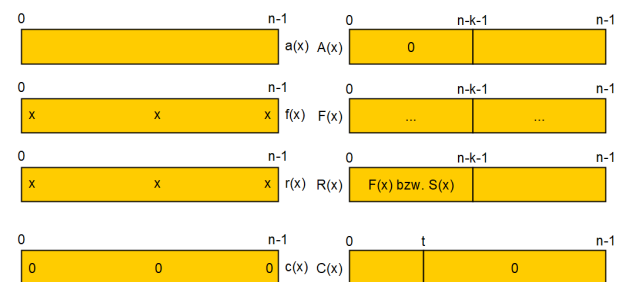
$$f_i \cdot c_i = 0$$

wenn Zeitbereich = 0  $\rightarrow$  Frequenzbereich = 0

$$F(x) \cdot C(x) = 0$$

Achtung: hier Polynommultiplikation/ Faltung/ Filterung gemeint

$\hookrightarrow$  Aufstellen der Schlüsselgleichungen



#### 4.3.1. Schlüsselgleichungen

beschreiben, dass Faltung von  $C(x)$  und  $F(x)$  Null ist (Achtung: zyklische Faltung, siehe Abschnitt 3)

$F_0$  bis  $F_{n-k-1}$  (bzw.  $F_{d-2}$ ) sind bekannt, da diese direkt an den Syndromstellen von  $R(x)$  stehen

Alle  $C$ -Koeff. sind unbekannt, außer  $C_t$ , dieser wird zu 1 gesetzt

$$C_t = 1$$

da Anzahl der Fehler ( $t$ ) unbekannt ist, muss ausprobiert werden, welche minimale Anzahl an Fehlern die Schlüsselgleichungen widerspruchsfrei erfüllt

Lösen der Schlüsselgleichungen nach  $C(x)$

$\hookrightarrow$  Nullstellensuche von  $C(x)$  ergibt die Nullen des  $c(x)$

$\hookrightarrow$  wenn Grad von  $C(x)$  nicht mit Anzahl der Nullstellen übereinstimmt  $\rightarrow$  Decodierungsversagen

Lösen der Schlüsselgleichungen nach  $F(x)$

$\hookrightarrow f(x)$  aus Rücktransformation von  $F(x)$

$\hookrightarrow f(x)$  von  $r(x)$  abziehen, man erhält  $a(x)$

$$a(x) = r(x) - f(x)$$

**Euklidischer Algorithmus**

Suche des ggT zweier Zahlen

Kann zur Lösung der Schlüsselgleichungen verwendet werden

## 5. Erweiterungskörper

### 5.1. Idee

Erweitern des Grundkörpers (z.B. 2) mit Exponent (z.B. 4)  
 $\rightarrow GF(2^4)$

Irreduzibles Polynom ist die Primzahl des Erweiterungskörpers z.B. in  $GF(2^4)$ :

$$p(x) = x^4 + x + 1$$

Irreduzibles Polynom:  $ggT(p(x), b(x)) = 1$

größter gemeinsamer Teiler mit einem beliebigen Polynom  $b(x)$  ist 1

d.h.  $p(x)$  kann nicht in Linearfaktoren zerlegt werden

für irreduzible Polynome gilt:

- ist durch kein Polynom ohne Rest teilbar
- hat keine Nullstellen

**aber:** Nullstellen sind wichtig für Nutzung des RS-Codes, daher «Erfindung» des Elements  $\alpha$ , welches Nullstelle von  $p(x)$  ist

$$p(\alpha) = 0$$

am Beispiel:

$$p(\alpha) = \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$$

Analogie: «Erfindung» von  $j$ , sodass gilt:

$$j^2 + 1 = 0$$

primitives Polynom: Nullstelle ( $\alpha$ ) des primitiven Polynoms erzeugt alle Elemente (außer 0) des Erweiterungskörpers

primitives Element: Nullstelle  $\alpha$  des primitiven Polynoms

### 5.2. Eigenschaften von Erweiterungskörpern

Ordnung des primitiven Elements:  $2^m - 1$  im  $GF(2^m)$

Erzeugung der Elemente über Potenzieren des primitiven Elements  $\alpha$

zum Körper  $GF(2^m)$  gehören  $2^m$  Elemente ( $2^m - 1$  dieser wird durch Potenzieren von  $\alpha$  erzeugt)

Elemente der Erweiterungskörper sind Polynome

#### Darstellung

Erzeugung von bspw.  $\alpha^3$  in  $GF(2^4)$  mit Irreduziblem Polynom  $p(x) = x^4 + x + 1$ :

$$\alpha^3 = 1 \cdot \alpha^3 + 0 \cdot \alpha^2 + 0 \cdot \alpha^1 + 0 \cdot \alpha^0$$

dazugehörige Binärdarstellung:

1000

## 6. BCH-Codes

## A. Hilfreiches

### A.1. Inverse in Galois-Feldern

#### Additive Inverse

gegeben:  $-3$  in  $GF(5)$

gesucht: additive Inverse

bedeutet:  $3 + x \mod 5 = n = 0$

$n$ : neutrales Element der Addition ( $= 0$ )

$x = 2$ , da  $3 + 2 = 5$  und  $5 \mod 5 = 0$

daher:  $-3 = 2$

oder: mit Tabelle

gegebene Zahl als Index behandeln, passenden Wert rausuchen

Index	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Wert	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1

#### Multiplikative/modulare Inverse

gegeben:  $2^{-1}$  in  $GF(7)$

gesucht: multiplikative Inverse

bedeutet:  $2^1 \cdot x \mod 7 = n = 1$

$n$ : neutrales Element der Multiplikation ( $= 1$ )

$x = 4$ , da  $2^1 \cdot 4 = 8$  und  $8 \mod 7 = 1$

daher:  $2^{-1} = 4$

oder: mit Logarithmentafel

gegebene Potenz als Index behandeln, passenden Wert rausuchen

Index	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Wert	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1

### A.2. Rechnen im Erweiterungskörper

Bsp.:  $GF(2^4)$  mit  $p(x) = x^4 + x + 1$

### A.3. Syndromstellen aus Generatorpolynom

Bsp.:  $GF(5)$  mit  $\alpha = 2$

gegeben  $g(x) =$

### A.4. ABC/PQ-Formel

**ABC:**  $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**PQ:**  $x^2 + px + q$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## B. Polynome

### B.1. Polynommultiplikation

### B.2. Polynomdivision

### Horner-Schema

## C. Lineare Algebra

### Matrix-Multiplikation

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag+bi & ah+bj \\ cg+di & ch+dj \\ eg+fi & eh+fj \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot d & a \cdot e & a \cdot f \\ b \cdot d & b \cdot e & b \cdot f \\ c \cdot d & c \cdot e & c \cdot f \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$\vec{v}^T \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$$

bei komplexen Vektoren:  $\vec{v}^H \cdot \vec{w}$

### Transponieren

Zeilen werden Spalten, Spalten werden Zeilen

$$A^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

### Invertieren

für 2x2-Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

### Diagonale Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Spalten der Matrix sind Eigenvektoren

1; -5; 3 sind die Eigenwerte der Eigenvektoren

### Hermiteische Matrix

nur für quadratische Matrizen

$$A = A^H = (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 5-j & 3j \\ 5+j & 2 & 3-2j \\ -3j & 3+2j & 3+4j \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren von hermiteschen Matrizen sind orthogonal

### Unitäre Matrix

$$A \cdot A^H = k \cdot I$$

k: Skalierungsfaktor (bei skaliert unitären Matrizen)

### Toeplitz-Struktur

Eine Matrix hat Toeplitz-Struktur, wenn alle Diagonalen parallel zur Hauptdiagonalen, die gleichen Elemente enthalten:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hermiteische Toeplitz-Matrizen sind positiv oder negativ definit, abhängig vom Vorzeichen der Elemente auf der Hauptdiagonalen

### Vandermonde-Matrix

Spalten: Indizes gleich

Zeilen: Potenzen gleich

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_{N-1}^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{N-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{N-1} & x_1^{N-1} & \dots & x_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix}$$

### Determinante

nur für quadratische Matrizen

für 2 × 2-Matrix:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

für 3 × 3-Matrix:

$$\det(C) = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$= a \cdot \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \cdot \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \cdot \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

### Rang einer Matrix

Eine Matrix hat vollen Rang, wenn die Determinante ungleich 0 ist

Ist die Determinante gleich 0, ist die Matrix/das Gleichungssystem überbestimmt

### Eigenvektoren/ Eigenwerte

Eigenvektoren einer Matrix werden bei einer Matrixtransformation nur in ihrer Länge geändert, nicht in ihrer Richtung

Faktor, um den ein Eigenvektor gedehnt oder gestaucht wird, ist der zum Eigenvektor zugehöriger Eigenwert  $\lambda$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

A: Matrix

$\vec{v}$ : Eigenvektor

$\lambda$ : Eigenwert(e)

I: Einheitsmatrix

Eigenwerte von positiv (oder negativ) definiten Matrizen sind immer positiv (oder negativ)

## D. Digitale Signalverarbeitung

### Diskretisierung und Fensterung

Diskretisierung  $\circ \rightarrow \bullet$  Periodische Fortsetzung  
 Diskretisierung  $\bullet \rightarrow \circ$  Periodische Fortsetzung  
 Begrenzung  $\rightarrow$  Leck-Effekt

### Fourier-Transformation (kontinuierlich)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

### DFT

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$n$ : Frequenzindex

$k$ : Zeitindex

### Auflösung DFT

$$\Delta f = \frac{f_a}{N} = \frac{1}{t_a \cdot N} = \frac{1}{\Delta t}$$

$\Delta f$ : spektrale Auflösung

$f_a$ : Abtastfrequenz

$t_a$ : Abtastrate

$N$ : Anzahl Abtastwerte

$\Delta t$ : Messdauer

### Fensterung

Fensterung im Zeitbereich  $\rightarrow$  Multiplikation mit Fensterfunktion  $\circ \rightarrow \bullet$  Faltung mit zur Fensterfunktion zugehörigem Spektrum

### Dirichlet-Kern

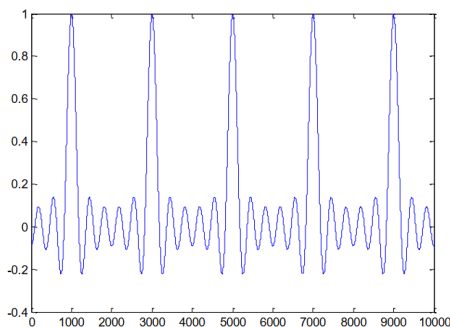
abgetastete Rechteckfunktion  $\circ \rightarrow \bullet$  Dirichlet-Kern

Definition der Dirichlet-Kerns der Länge  $N + 1$ :

$$D(x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{jnx} = \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$x = 2\pi f T_a$$

Bsp: 11:



Eigenschaften:

Hauptwert hat Höhe  $N + 1$

Nullstellen, bei  $f = \frac{f_a}{N+1} \cdot k$  für  $k \in \mathbb{N}$

Hauptwert periodisch mit  $f_a$

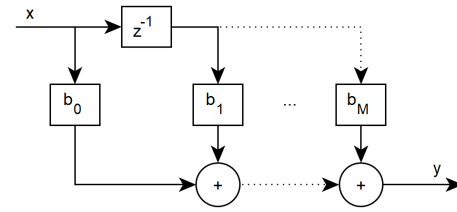
### z-Transformation

$$z = e^{j2\pi \frac{f}{f_a}}$$

$$H(f) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi \frac{f}{f_a}}}$$

### Reiner FIR-Filter

kanonische Form

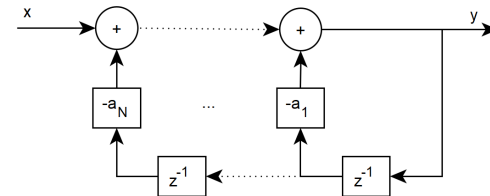


$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_M \cdot z^{-M}$$

$$y(t) = b_0 \cdot x(t) + b_1 \cdot x(t-1) + \dots + b_M \cdot x(t-M)$$

### Reiner IIR-Filter

kanonische Form



$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}}$$

$$y(t) = x(t) - a_1 \cdot y(t-1) - \dots - a_n \cdot y(t-N)$$