Multi Modal Logiken

Theoretische Informatik Seminar
Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
SS 2011

Waldemar Schwan <waldemar.schwan@smail.inf.h-brs.de>

Betreuer: Prof. Dr. Martin Eric Müller <martin.mueller@h-brs.de>
Betreuer: Prof. Dr. Alexander Asteroth <alexander.asteroth@h-brs.de>

Stand: 6. September 2011

Inhaltsverzeichnis

1. Eigenschaften, Anwendungsfelder

Wahrheits-Modi Die Aussagenlogik und Prädikatenlogik kennen nur eine Art von Wahr oder Falsch. Im realen Leben unterscheiden wir jedoch ganz intuitiv zwischen einer Vielzahl von unterschiedlichen Wahrheiten. Die Aussage "Frau Merkel ist die Bundeskanzlerin der BRD" ist **im Moment** wahr es kann sich jedoch bei der nächsten Wahl ändern. Die Aussage "Die Erde hat einen Mond" ist jetzt wahr und wird mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit auch in Zukunft wahr sein. Sie ist aber nicht notwendiger Weise Wahr, denn es hätten ja auch 2 oder 3 Monde sein können. Ein Beispiel für eine notwendigerweise wahre Aussage ist "ein Junggeselle ist unverheiratet". Wir können uns keinen verheirateten Junggestellen vorstellen. todo Zitat einfüger

Anwendungsfelder In der Informatik ist das Schlussfolgern über verschiedene Arten der Wahrheit nützlich in Bereichen wie Model Checking und AI (Artificial Intelligence).
Im Model Checking kommen vor allem Temporal Logiken zum Einsatz, um Wahrheitsaussagen zu unterschiedlichen Zeiten im Programmablauf treffen zu können.
Im Bereich der AI, werden Multi-Modal-Logiken in Multi-Agent-Systemen verwendet. Solche Systeme sind in der Lage Schlussfolgerungen, nicht nur aus dem eigenen Wissen, sondern auch aus dem Wissen über das Wissen anderer und deren Wissen zu ziehen.
Einfache Logiken modellieren nur eine Modularität von Wahrheit, z.B. notwendigerweise wahr, komplizierte Logiken modellieren auch mehrere, z.B. wahr nach allem was Agent i weis, für $0 < i < k$. [HR04, S.306f]

Struktur der Arbeit Diese Arbeit ist in zwei Bestandteile aufgeteilt.
Kapitel 2 beschäftigt sich mit dem Grundlagen von Modal-Logiken. Es erklärt Syntax, Semantik die Modellierung in Form von Kripke-Strucktures und die possible Word Semantik. Es werden wichtige Eigenschaften von Modal-Logiken aufgeführt und erklärt, sowie der Zusammenhang zwischen der Relation R im Kipke-Model und den vorher beschriebenen Eigenschaften verdeutlicht, bekannt als Ähnlichkeitstheorie. Am Ende wird das Thema anhand der Modal-Logik $KT45$ (für Wissen) konkretisiert. todo stimmt das sc
Kapitel 3 erklärt Multi-Modal-Logiken, als Modal-Logiken die mehr als nur eine Modalität vereinen. Das Kapitel beginnt mit der Darstellung der the wise men und muddy children Rätsel. Anhand dieser Beispiele wird die Verallgemeinerung der Modal-Logik $KT45$ verdeutlicht und zur Anwendung gebracht um diese Rätsel formal zu lösen. Im Zuge dieser Lösung wird genauer auf die Multi-Modal-Logik $KT45^n$ eingegangen und deren Unterschiede und Erweiterungen im Vergleich zur Logik $KT45$ erklärt.

2. Modal-Logik (K)

2.1. Syntax

Die Syntax der Modal Logik entspricht der der Aussagenlogik mit den Erweiterungen $\Box$ und $\Diamond$. Wie die Negation sind diese unär, das heißt sie beziehen sich nur auf die ihr folgende Formel. Im Folgenden werden die Zeichen p, q, r, p_3 für atomare Formeln verwendet. [HR04, S.307f]

Definition 1 *Die folgende BNF (Backus Naur Form) beschreibt die Syntax der möglichen multi modal Formeln ϕ.*

$$\phi ::= \bot|\top|p|(\neg\phi)|(\phi \wedge \phi)|(\phi \vee \phi)|(\phi \rightarrow \phi)|(\phi \leftrightarrow \phi)|(\Box\phi)|(\Diamond\phi) \tag{2.1}$$

[HR04, S.307]

Die Formeln

$$(p \wedge \Diamond(p \rightarrow \Box\neg r)) \tag{2.2}$$

und

$$\Box((\Diamond q \wedge \neg r) \rightarrow \Box p) \tag{2.3}$$

sind Beispiele für syntaktisch korrekte Multi-Modal-Logik Formeln. Ihre Parse-Trees sind abgebildet in Abbildung 2.1. Wie auch bei der Aussagenlogik binden die unären Operatoren stärker als die Binären. Sodass unnötige Klammern weggelassen werden können um die Leserlichkeit zu verbessern.

Die folgende Liste sortieren die Operatoren nach ihrer Bindungsstärke. Beginnend mit den am stärksten bindenden.

- $\neg, \Box, \Diamond$
- $\wedge, \vee$
- $\rightarrow, \leftrightarrow$

Im allgemeinen werden die Symbole $\Box$ und $\Diamond$ als Box und Raute gelesen. Spezifiziert man eine konkrete Logik so werden diese entsprechend ihrer interpretation gelesen. In der Logik für Notwendigkeit wird $\Box$ als notwendig und $\Diamond$ als möglich gelesen. In Logik für über das Wissen eines Agenten Q, wird $\Box$ als Q weis und $\Diamond$ als soweit Q weis, gelesen.

2.2. Semantik

Dieses Kapitel beschreibt die Semantik von Modal-Logik-Aussagen. Die Semantik wird dabei formal beschrieben. Die grundlegende Frage ist wann evaluiert eine Modal-Logik-Formel zu wahr bzw. falsch.

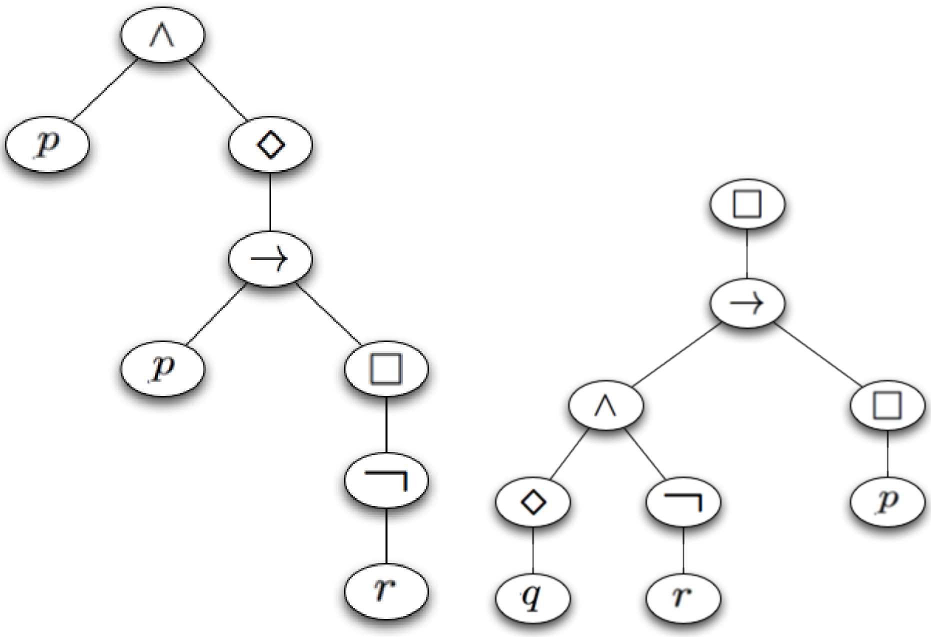

Abbildung 2.1.: Parse-Tree für $(p \wedge \Diamond(p \rightarrow \Box\neg r))$ und $\Box((\Diamond q \wedge \neg r) \rightarrow \Box p)$

Zur Erinnerung: In der Aussagenlogik ist eine Interpretation eine mögliche Belegung der Variablen mit den Wahrheitswerten Wahr oder Falsch. Dabei muss jeder der Variablen einen dieser Werte annehmen. Die Formel $a \wedge b$ hat $2^2 = 4$ mögliche Interpretationen. Siehe Ab-

a	b	$a \wedge b$
1	1	Wahr
1	0	Falsch
0	1	Falsch
0	0	Falsch

Abbildung 2.2.: Alle möglichen Interpretationen der Aussagenlogik-Formel $a \wedge b$

bildung 2.2 [Hun73]
Die Modal-Logik erfordert ein komplexeres Model für die Auswertung von Formeln, da verschiedene Arten von Wahr modelliert werden können. [HR04, S.308f] Ein Model in Modal-Logik wird deswegen durch eine Kripkestruktur beschrieben.

Definition 2 *Ein Model M einer Modal Logik wird durch 3 Bestandteile beschrieben:*

- *Einer Menge von Welten W*
- *einer Erreichbarkeitsfunktion R auf W $(R \subseteq W \times W)$*
- *einer Labelingfunktion $L : W \rightarrow P(Atome)$*

Man schreibt $R(x, y)$ um zu kennzeichnen, dass (x, y) in R enthalten ist.

[HR04, S.309]

Nehmen wir an die Menge der Welten W sei

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

die Relation R sei definiert als

$$\{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_2, x_2), (x_4, x_5), (x_5, x_4), (x_5, x_6)\}$$

und die Labelfunktion L liefere,

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$L(x)$	$\{q\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{\}$	$\{p\}$

dann ist Abbildung 2.3 die graphische Darstellung der beschriebenen Kripke-Struktur.

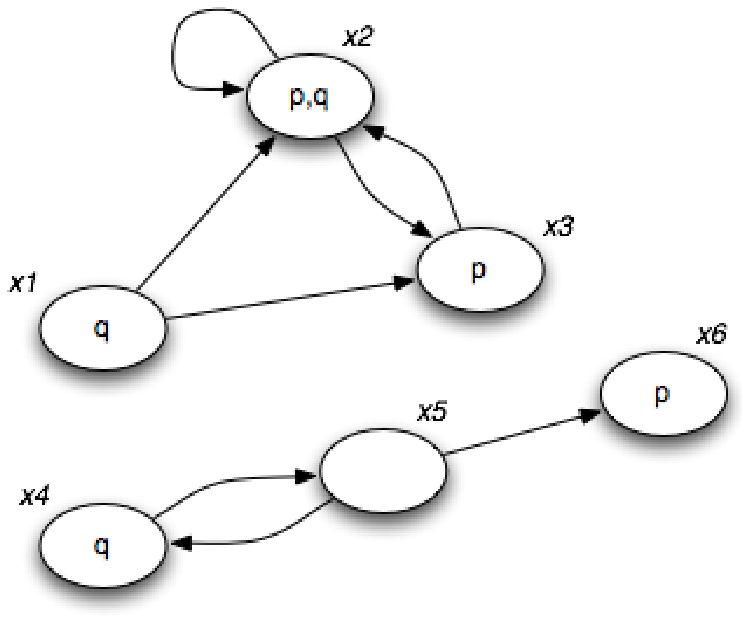

Abbildung 2.3.: Beispiel einer Kripke-Struktur

Definition 3 *Sei $M = (W, R, L)$ ein Model einer Modal Logik und ϕ sei eine Formel nach (2.1). Dann lässt sich nach folgenden Regeln schließen ob ϕ in einer Welt x Wahr oder Falsch ist.*

$$x \Vdash \top \tag{2.4}$$

$$x \nVdash \bot \tag{2.5}$$

$$x \Vdash p \textit{ gdw. } p \in L(x) \tag{2.6}$$

$$x \Vdash \neg\phi \textit{ gdw. } x \nVdash \phi \tag{2.7}$$

$$x \Vdash \phi \wedge \psi \textit{ gdw. } x \Vdash \phi \textit{ und } x \Vdash \psi \tag{2.8}$$

$$x \Vdash \phi \vee \psi \textit{ gdw. } x \Vdash \phi, \textit{ oder } x \Vdash \psi \tag{2.9}$$

$$x \Vdash \phi \to \psi \textit{ gdw. } x \Vdash \psi, \textit{ immer wenn gilt } x \Vdash \phi \tag{2.10}$$

$$x \Vdash \phi \leftrightarrow \psi \textit{ gdw. } (x \Vdash \phi \textit{ gdw. } x \Vdash \psi) \tag{2.11}$$

$$x \Vdash \Box\psi \textit{ gdw. } \forall y \in W \textit{ gilt } R(x, y), \textit{ und } y \Vdash \psi \tag{2.12}$$

$$x \Vdash \Diamond\psi \textit{ gdw. } \exists y \in W \textit{ sodass } R(x, y) \textit{ und } y \Vdash \psi \tag{2.13}$$

[HR04, S.310]

Die Formeln (2.4) und (2.5) besagt, dass die Werte Wahr und Falsch enthalten sind.
Die Formel (2.6) besagt, dass wir Aussagen folgern können die Teil der Wissensbasis sind.
Die Formeln (2.8) bis (2.11) sind ähnlich zu denen aus der Aussagenlogik.
Besonders zu beachten sind die Formeln (2.12) und (2.13). (2.12) besagt, dass die Aussage $\Box\psi$ für eine Welt x gefolgert werden kann, wenn diese in allen Welten die von x aus erreichbar sind, folgerbar ist. Dies beinhaltet x nur wenn $R(x, x)$ gilt. Wichtig ist das die Aussage lediglich fordert, das eine Aussage in allen erreichbaren Welten gefolgert werden kann. $x \Vdash \Box\bot$ ist also Wahr wenn x mit keiner anderen Welt verbunden ist.
Die Formel (2.12) ist ähnlich, nur das sie einen Existenz-Charakter hat. Aus x lässt sich $\Diamond\psi$ folgern, wenn es min. eine Welt gibt die von x erreichbar ist, in der sich ψ folgern lässt. Wichtig ist die Aussage es existiert eine Welt. $x \Vdash \Diamond\top$ ist also Falsch wenn es keine Welt x' gibt für die gilt $R(x, x')$.

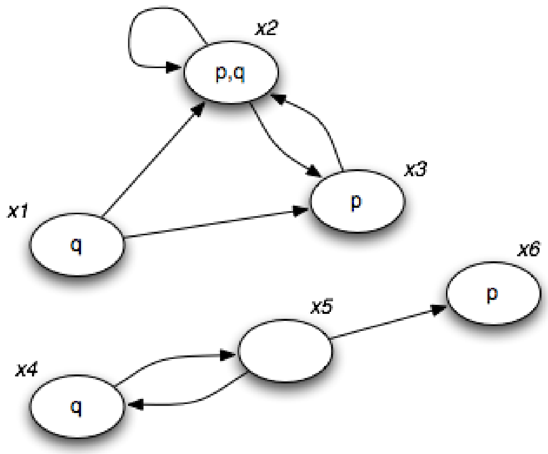

Abbildung 2.4.: Kripke Model Beispiel für Model Folgerungsbeispiele

Definition 4 *Ein Model $\mathcal{M}$ einer Modal Logik erfüllt eine Formel ϕ wenn jeder Zustand im Model die Formel erfüllt. Wir schreiben für diesen Fall $\mathcal{M} \vDash \psi$ gdw. $\forall x \in W, x \Vdash \psi$ gilt. [HR04, S.310f]*

Anhand des Kripke Models in Abbildung 2.4 auf Seite 10 werden nun ein paar Beispielformeln diskutiert um die Definitionen zu veranschaulichen:

- $x_1 \Vdash q$, gilt weil $q \in L(Lx_1)$
- $x_1 \Vdash \Diamond q$, weil es einen erreichbare Welt (hier x_2) $q \in L(x_2)$ gibt. Mathematisch formuliert: es gilt $R(x_1, x_2)$ und $x_2 \Vdash q$
- $x_1 \nVdash \Box q$, weil $R(x_1, x_3)$ und $x_3 \nVdash q$. $\Box$ setzt voraus, dass alle erreichbaren Welt die Bedingung erfüllen.
- $x_5 \nVdash \Box p$ und $x_5 \nVdash \Box q$ sogar $x_5 \nVdash \Box p \vee \Box q$, allerdings gilt $x_5 \Vdash \Box(p \vee q)$. $x_5 \nVdash \Box p$ gilt, weil x_4 erreichbar ist, aber nicht p enthält. $x_5 \nVdash \Box q$ gilt weil, x_6 erreichbar ist aber kein q enthält. Damit gilt auch $x_5 \nVdash \Box p \vee \Box q$. $x_5 \Vdash \Box(p \vee q)$ gilt hingegen, weil alle erreichbaren Welten (x_5, x_6) entweder p oder q enthalten.

- Die Welten die $\Box p \to p$ erfüllen sind: x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Die Welten x_2, x_3, x_6 erfüllend die Formeln mit Wahr , weil sei p enthalten und $\Box p$ gilt. Für x_6 gilt $\Box q$ weil es keine erreichbaren Welten hat (vgl. Formel (2.12)). Die Welten x_4, x_5 erfüllen die Formel mit Falsch , weil sie p nicht enthalten und nicht alle von ihnen erreichbaren Welten p enthalten. $x_5 \nVdash \Box p$ ist der Fall, weil $x_4 \nVdash p$ zutrifft.

Welten wie x_6 die keine Verbindungen zu anderen Welten erfordern besonderes Augenmerk. Die Formel $x_6 \nVdash \Diamond\phi$ gilt z.B. immer, auch wenn $\phi = \top$ weil $\Diamond$ min eine verbundene Welt voraussetzt. $x \nVdash \Diamond\top$ gilt z.B. immer wenn x min. eine erreichbare Welt hat, weil $\top$ per Definition in jeder Welt erfüllt ist. Ähnlich verhält es sich mit $x_6 \Vdash \Box\phi$. Diese Aussage gilt immer egal welchen Wert ϕ besitzt. Das gilt auch für die Aussage $x_6 \Vdash \Box\bot$. Auch wenn $\bot$ per Definition in jeder Welt Falsch ist, ist die Aussage $x_6 \Vdash \Box\bot$ Wahr , wenn es keine anderen verbundenen Welten gibt. Es ist schlicht weg nicht möglich das Gegenteil zu beweisen, weil es keine Gegenbeispiele geben kann. Auch wenn diese Interpretationen nicht intuitiv sind, sichern sie die de Morgan Bedingung , siehe (2.12).

Formel-Schemata Formel-Schemata beschreiben eine generelle Form, ein Pattern, von Formeln. Ihr Parse-Tree ist unvollständig, an jedem Blatt ist platz für eine weitere valide Modal-Logik Formel. Jede Belegung eines solchen Formel-Schema wird Instanz genannt. Die Anzahl der möglichen Instance ist unendlich.

Hier ein paar Instanzen-Beispiele für das Formel-Schema $\psi \to \Box\Diamond\psi$:

- $p \to \Box\Diamond p$
- $q \to \Box\Diamond q$
- $(p \wedge r \to q) \to \Box\Diamond(p \wedge r \to q)$

Man sagt eine Welt / ein Model erfüllt ein Formelschema wenn es alle seine Instanzen erfüllt. Es reicht nicht aus wenn nur eine Instanz erfüllt wird. Bsp.: Wenn alle Welten eines Models die Formel $\neg p \wedge q$ aber aber nur eine die Formel $\neg q \wedge p$ nicht erfüllt, dann ist das Schema $\neg\phi \wedge \psi$ nicht erfüllt.

Gleichheit zwischen modal logischen Formeln

Definition 5
- *Eine Menge von modal logischen Formeln Γ folgert eine modal logische Formel ψ, gdw. wenn für jede Welte w aus jedem Model $\mathcal{M}$ gilt $x \Vdash \psi$ immer wenn gilt $x \Vdash \phi$ $\forall \phi \in \Gamma$. Dies wird notiert durch $\Gamma \vDash \psi$.*
- *Wir bezeichnen zwei modal logische Formeln ϕ und ψ als semantisch äquivalente wenn sowohl $\psi \vDash \phi$ als auch $\psi \vDash \phi$ gilt und notieren dies mit $\psi \equiv \phi$.*
  [HR04, S.313]

$\phi \equiv \psi$ gilt sobald eine Welt in einem Model sowohl die eine als auch die andere Formel erfüllt. Alle Äquivalenzen aus der Aussagenlogik gelten auch für die Modal-Logik wenn man sie in das selbe Schema überträgt.
Zudem gelten für $\Box$ und $\Diamond$ die de Morgan Regeln regeln.

$$\neg\Box\phi \equiv \Diamond\neg\phi \text{ und } \neg\Diamond\phi \equiv \Box\neg\phi \tag{2.14}$$

Außerdem distributiert $\Box$ über $\wedge$ und $\Diamond$ über $\vee$, aber nicht umgekehrt. [HR04, S.314]

$$\Box(\phi \wedge \psi) \equiv \Box\phi \wedge \Box\psi \text{ und } \Diamond(\phi \vee \psi) \equiv \Diamond\phi \vee \Diamond\psi \tag{2.15}$$

valide Formeln

Definition 6 *Eine modal logische Formel ψ wird valide genant wenn sie in jeder Welt in jedem Model Wahr ist, also gdw. $\vDash \psi$ gilt.*

[HR04, S.314] Alle Tautologien sind valide Formeln. Dies ist z.B.: bei $\neg\Box\phi \leftrightarrow \Diamond\neg\psi$ der Fall. (Beweis siehe [HR04, S.314]).
Eine besonders wichtige Formel ist die K Formel: $\Box(\phi \to \psi) \land \Box\phi \to \Box\psi$. Sie wird in der Literatur zu Ehren des Erfinders der Kripke-Strukturen und der hier behandelten possible world semantics (siehe Formel-Block (3)), S. Kripke mit K abgekürzt.

Um K zu beweisen gehen wir davon aus das es ein Model $\mathbb{M} = (W, R, L)$mit einer Welt x gibt und für x $\Box(\phi \to \psi) \land \Box\phi$ gilt.
Um die Formel zu beweisen müssen wir mit Hilfe der Regeln aus (3) $x \Vdash \Box\psi$ nachweisen.
Dies ist der Fall:
gdw. $x \Vdash \Box(\phi \to \psi)$ und $x \Vdash \Box\phi$
gdw. $\forall y$ mit $R(x, y)$ gilt: $y \Vdash \phi \to \psi$ und $y \Vdash \phi$. Woraus $y \Vdash \psi$ folgt.
gdw. $x \Vdash \Box\psi$

In der einfachen Modal Logik K gibt es keine weiteren interessanten validen Formeln. [HR04, S.314]

Dadurch das man bestimme Formeln als valide voraussetzt, kann man eigene Logiken und damit andere modale von Wahr erzeugen. Die normale Modal-Logik K schreibt nur die Validität von K vor.
Im nächsten Kapitel werden weitere Formeln, die als valide vorausgesetzt werden können, vorgestellt und deren Auswirkungen diskutiert.

2.3. Attribute einer Modal-Logik

Die Attribute einer Modal-Logik werden dadurch bestimmt welche Formeln als valide vorausgesetzt werden. Alle normale Modal-Logik setzen die Validität der Formel K, die Formel für die Logische Konsequentz , voraus. nicht-normale Modal-Logik sind nicht Teil dieser Arbeit. Der interessierte Leser sein an Priest [Pri08, S.75ff] verwiesen. Will man eine eigene Modal-Logik kreieren ist es wichtig sich genaue Gedanken darüber zu machen, welcher Formeln die als valide voraussetzt, weil das die Eigenschaften der zu modellierenden Wahrheit bestimmt. Im Folgenden wird erst das für normale Modal-Logik zwingend erforderliche Basisattribut K vorgestellt und danach auf die anderen optionalen Eigenschaften eingegangen. Zum Schluss werden ein paar normale Modal-Logik und deren Eigenschaften beschrieben und erklärt warum die gewählten Eigenschaften für die Modalität wünschenswert / wichtig / notwendig sind.

todo Quelle referenzieren

Das Basis Atribute K Die Formel K $\Box(\phi \to \psi) \land \Box\phi \to \Box\psi$besagt, dass es nur normale Welten gibt. Das heißt die Wahrheitsmodulation $\Box$ verhält sich immer gleich im Gegensatz zu nicht-normale Modal-Logik wo es nicht normale Welten geben kann. In nicht normalen Welten ist vereinfacht formuliert alles möglich und nichts notwendig. [Pri08, S.75]

Weitere Attribute Neben der Formel für K gibt es weitere typische Formeln die, sofern sie als valide vorausgesetzt werden einer normale Modal-Logik gewissen Eigenschaften verleihen.

Name	Formel Schema
T	$\Box\phi \to \phi$
B	$\phi \to \Box\Diamond\phi$
D	$\Box\phi \to \Diamond\phi$
4	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$
5	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$

Tabelle 2.1.: Attribut Bezeichnungen und entsprechende Formel-Schemata

$\Box\phi$	$\Box\phi \to \phi$	$\phi \to \Box\Diamond\phi$	$\Box\phi \to \Diamond\phi$	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$
Es ist notwendig, dass	✓	✓	✓	✓	✓
Es wird immer wahr sein, dass	×	✓	×	✓	×
Es ist sollte sein, dass	×	×	✓	×	×
Agent Q glaubt, dass	×	✓	✓	✓	✓
Agent Q weis, dass	✓	✓	✓	✓	✓

Tabelle 2.2.: Verschiedenen Modulationen von Wahrheit und ihre Eigenschaften

Will man z.B.: eine Logik für die Notwendigkeit erstellen, so will man das die Formel T $\Box\phi \to \phi$ für alle Welten zutrifft. Den etwas das notwendigerweise Wahr ist sollte auch einfach Wahr sein. Das selbe gilt für Wissen: Wenn man etwas weis, dann ist das auch wahr oder anders man hat kein falsches Wissen. Das mag nicht der Realität entsprechen, ist aber eine Idealisierung die man für Multi-Agent-System i.d.R. haben möchte. Will man hingegen die Wahrheitsmodalität Glauben modellieren, so wäre es unklug T aufzunehmen. Der Glaube zeichnet sich nämlich dadurch aus, das man auch Dinge glauben kann die Falsch sind.
Tabelle (**??**) auf Seite 13 zeigt welche Eigenschaften typischerweise für welche Art der Wahrheitsmodulation wünschenswert sind. todo Professionelle formulieren

Im Folgenden werden die Gründe für die Voraussetzung verschiedener Eigenschaften für verschiedene Modulationen für Wahrheit kurz angesprochen. Der Fokus liegt auf den Eigenschaften 4, 5 und T, weil diese in der Modulation von Wissen vorkommen und Bestandteil von Multi-Agent-Systemesind. Eine detaillierter Diskussion findet sich in Huth [HR04, S.318f].

Betrachen wir zunächst wie die Formel $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ und $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$ in der Modalität Notwendigkeit zu interpretieren sind, um einen Eindruck davon zu bekommen wie man modal-logische Formeln in einem Modulationskontext setzt.
Sie besagt, dass das was notwendig ist notwendigerweise notwendig ist. Im Falle von physikalischer Notwendigkeit ist dies z.B. nicht der Fall. Denn es würde bedeuten, das die physikalischen Formeln selbst ihre Notwendigkeit fordern würden. Für die logische Notwendigkeit ist dies allerdings zutreffend (vgl. [HR04, S.318]).
Wissen unterscheidet sich vom Gauben nur durch die Voraussetzung T $\Box\phi \to \phi$. Es besagt, das ein Agent zwar Dinge glauben kann die Falsch sind, aber nur Dinge weis die auch wirklich Wahr sind. Die Formel 4 $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ nennt man im Kontext des Wissens auch positive Introspektion. Wenn ein Agent etwas weis, dann weis er, dass er es weis. 5 $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$ ist die negative Introspektion. Wenn er etwas nicht weis, dann weis er auch, dass er es nicht weis.
Dabei handelt es sich um eine Idealisierte Modulation von Wissen. Menschen erfüllen diese Eigenschaften nicht.

Die Formel $K\ \Box(\phi \to \psi) \wedge \Box\phi \to \Box\psi$wird im Kontext des Wissen auch als logische Allwissenheit bezeichnet. Die besagt, dass das Wissen des Agenten abgeschlossen gegenüber der logischen Konsequenz ist. Es besagt, das der Agent alle Konsequenzen seines Wissen weis. Dieser Umstand ist natürlich nicht wahr für menschliches Wissen (vgl. [HR04, S.319f]).

todo
er stellen, das dieser Absatz entlich in den Textfluss integriert

Festlegung von Attributen mithilfe von R Wir haben gesehen, dass wenn man eine Modalität der Logik modelliert, man sich überlegt welche Formel-Schemata als valide vorausgesetzt werden sollen.
Im Gegenzug kann man sich auch überlegen wie die Kripke-Struktur aufgebaut sein soll.
Nach den Regeln in Definition (3) auf Seite 9 besagt die Formel

$$x \Vdash \Box\psi \text{ gdw. } \forall y \in W \text{ gilt } R(x, y), \text{ und } y \Vdash \psi$$

dass ψ notwendig ist wenn es in allen irgendwie erreichbaren Welten von x Wahr ist.
Wie genau dieses irgendwie zu lesen ist hängt von der zu modellierenden Modal-Logik ab. Im Falle der Notwendigkeit kann man sich überlegen, das etwas notwendig ist, wenn es in allen möglichen Welten der fall ist. Oder anders: basierend auf der Welt x kann man sich **keine** andere Welt y vorstellen, in der ψ **nicht** gilt.
Im Falle von Wissen für einen Agenten Q beschreibt $R(x, y)$ y die eigentliche Welt entsprechend des Wissens in x (vgl. [HR04, S.320f]) .
Welche Eigenschaften soll R nun also haben um die Intention der Modularität abzubilden?
Zur Erinnerung: eine binäre Relation kann die folgenden Eigenschaften besitzen:

- reflexiv: wenn für $\forall x \in W, R(x, x)$ gilt
- symmetrisch: wenn für $\forall x, y \in W, R(x, y)$, $R(y, x)$ folgt
- seriell: wenn für jedes x es auch ein y gibt, sodass $R(x, y)$
- transitiv: wenn für $\forall x, y, z \in W | R(x, y)R(y, z)$, $R(x, z)$ folgt
- euklidisch:
- funktional
- vorwärts funktional
- total
- eine Äquivalentz-Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv

todo
ist das die korrekte Übesetzung?

todo
fertig machen

Betrachten wir nun welche Eigenschaften R haben sollte um Wissen nach unseren Wünschen zu modellieren.
Reflexibilität, würde besagen, dass die aktuelle Welt x die eigentliche Welt ist. Mit anderen Worten x kann nur Wissen enthalten, das auch wirklich so ist. Oder: Ein Agent Q kann nichts falsches Wissen.
Transitivität, würde besagen, dass wenn y möglich ist nach allem was Agent Q in x weis und z möglich ist nach allem was er in y weis, dass ist es auch möglich nach allem was er in x weis. Mit anderen Worten x darf nichts enthalten was z unmöglich macht, denn wäre dies der Fall gewesen, dann hätte Q dies in x gewusst und folglich auch in y. Das Hauptargument ist also die positive Introspektion $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ (vgl. [HR04, S. 321f]) .
Im folgenden Abschnitt wird näher auf die Zusammenhänge zwischen Eigenschaften der R Relation und der Menge an vorausgesetzter Formel-Schemata eingegangen.

todo
Absatz in ribute Absatz verschieben

2.4. Ähnlichkeitstheorie

Die Ähnlichkeitstheorie besagt, das sich die Eigenschaften einer Modal-Logik in der Relation der entsprechenden Kripkestrucktur widerspiegeln und vis versa. Dies schafft einen neuen Zugang zum Design von Modal-Logiken. In manchen Fällen mag es einfacher sein in den notwendigen Eigenschaften in Form von Formel-Schemata zu denken, in anderen ist es evtl. einfacher das Problem über die Relation zu verstehen. Im Folgenden wird gezeigt, wie die einzelnen Eigenschaften mit der Kripke-Struktur-Relation zusammen hängen.

Zusammenhang zwischen der Relation R und den validen Formel-Schemata Wir haben in Abschnitt 2.3 auf Seite 14 den Zusammenhang zwischen der Transitivität von R und der Validität der Formel $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ durch die Intuition begründet, dass die positive Introspektion gilt. Es wird nun gezeigt, dass sich dieser Zusammenhang mathematisch beweisen lässt. Dazu muss zunächst der Begriff Frame eingeführt werden:

Definition 7 *Ein Frame $\mathcal{F} = (W, R)$ ist eine Menge von Welten W und eine binäre Relation R auf W. [HR04, S.322]*

Frames kann man sich also als Kripke-Struktur ohne Labeling-Funktion vorstellen. Damit beschreiben sie die selbe Struktur, jedoch unabhängig von der Konkreten Wissensbasis, sprich den geltenden Facken in jeder Welt. Damit übernehmen sie in Kripke-Strukturen die selbe Rolle wie Formel-Schemata in modal-logische Formeln .

Definition 8 *Ein Frame $\mathcal{F}$ erfüllt eine modal logische Formal ψ, wenn für jede Labelfunktion $L : W \to \mathcal{P}(Atome)$ und jedes $w \in W$, es der Fall ist, dass $\mathcal{M}, w \vDash \psi$ gilt. $\mathcal{M}$ ist das Model: $\mathcal{M} = (W, R, L)$. In diesem Falle schreiben wir $\mathcal{F} \vDash \psi$. [HR04, S.322f]*

Wenn ein Frame eine Formel erfüllt erfüllt es auch das entsprechende Schema und umgekehrt (vgl. [HR04, S.323]) .

Example 9 *Das Beispiel-Frame auf Abbildung **??** auf Seite 15 erfüllt die $\Box\phi \to \phi$. Um das zu beweisen muss man zeigen, dass jede Welt mit beliebiger Labeling-Funktion die Bedingung: wenn $x \Vdash \Box p$ der Fall ist, dann gilt auch $x \Vdash p$. Betrachten wie nun eine beliebige Welt $x \in W$ und setzen $x \Vdash \Box p$, dann folgt aufgrund der Tatsache dass $R(x, x)$ gilt und der Regel für $\Box$ aus der Definition (3) auf Seite 9 , dass $x \Vdash p$ der Falls ein muss. Den x zeigt auf sich selbst und ist damit in den von x erreichbaren Welten enthalten*

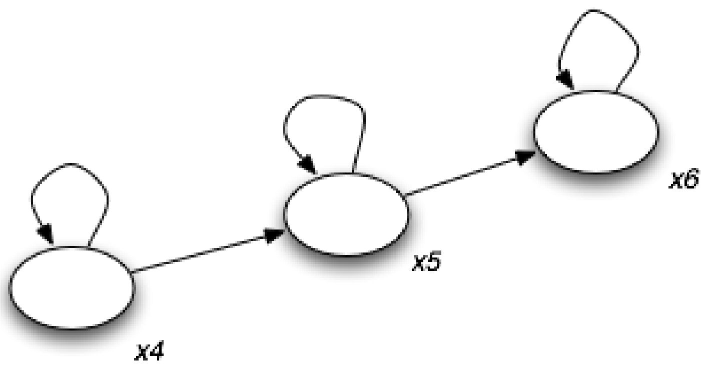

Abbildung 2.5.: Beispielframe

Da ein Frame keine Annahme über eine konkrete Labeling-Funktion macht und wir gerade nachgewiesen haben, dass $\Box p \to p$ gilt, ist auch $\Box\phi \to \phi$ der Fall.

Die $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ wird hingegen nicht erfüllt. Das Model in Abbildung **??** *auf Seite 16 beweist dies durch ein Gegenbeispiel (vgl. [HR04, S.324f]) .*

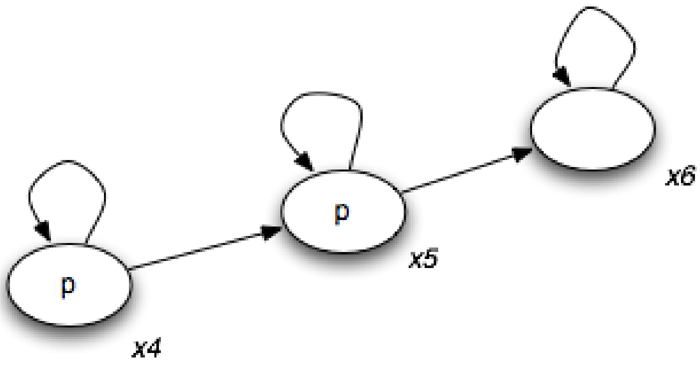

Abbildung 2.6.: Gegenbeispiel

Auf Basis des Beispiels lässt sich folgendes Theorem aufstellen:

Theorem 10 *Gegeben ein Frame $\mathcal{F} = (W, R)$.*

1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalient:*
   - *R ist reflexiv*
   - *$\mathcal{F}$ erfüllt $\Box\phi \to \phi$*
   - *$\mathcal{F}$ erfüllt $\Box p \to p$*
2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalient:*
   - *R ist transitiv*
   - *$\mathcal{F}$ erfüllt $\Box\phi \to \Box\Box\phi$*
   - *$\mathcal{F}$ erfüllt $\Box p \to \Box\Box p$*

(vgl. [HR04, S.324f]) .

Beweis. Um die Behauptungen zu beweisen wird ein Ring-Schluss geführt.
Für jede Behauptung wird a) davon ausgegangen, dass R die Eigenschaft besitzt und das daraus folgt, dass $\mathcal{F}$ das Schema erfüllt, b) das $\mathcal{F}$ das Schema erfüllt und daraus folgt, dass $\mathcal{F}$ auch die Formel-Instanz erfüllt und c) dass wenn $\mathcal{F}$ die Instanz erfüllt, dass R die entsprechende Eigenschaft besitzt.

1. a) Gehen wir davon aus, dass R reflexiv ist, L eine Labeling-Funktion und $\mathcal{M} = (W, R, L)$ ein Model der normale Modal-Logik . Wir müssen zeigen das $\mathcal{M} \vDash \Box\phi \to \phi$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $x \Vdash \Box\phi \to \phi$ für alle Welten $x \in W$. Man beachte die Regel der Implikation in der Definition (3) auf Seite 9 . Gehen wir also davon aus, das $x \Vdash \Box\phi$ der Fall ist, dann folgt aus der Regel für $\Box$ in Definition (3) auf Seite 9 und der Tatsache das $R(x, x)$, dass $x \Vdash \phi$ zutrifft, womit dieser Schritt bewiesen ist.

   b) Es ist ausreichend für ϕ p einzusetzen um dies zu zeigen.

   c) Gehen wir davon aus, dass das Framen $\Box p \to p$ erfüllt. Wir wollen zeigen, dass $R(x, x)$ dann ebenfalls gilt.
   Wir definieren die Label-Funktion L, so dass: $p \notin L(x)$ und $p \in L(y)$ für alle Welten y

außer x.
Beweis durch Wiederspruch. Gehen wir davon aus $R(x,x)$ gilt nicht. Dann gilt $x \Vdash \Box p$ weil alle Welten außer x p erfüllen. Da aber $\mathcal{F}$ $\Box p \rightarrow p$ erfüllt ergibt sich $x \Vdash p$. Das ist ein Wiederspruch zu der Annahme, das $R(x,x)$ nicht gilt. In der Folge muss $R(x,x)$ der Fall sein.

2. a) Gehen wir davon aus, dass R transitiv ist, L eine Labeling-Funktion und $\mathcal{M} = (W, R, L)$ ein Model der normale Modal-Logik . Wir müssen zeigen das $\mathcal{M} \vDash \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $x \Vdash \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$ für alle Welten $x \in W$.
Nehmen wir an $x \Vdash \Box\phi$ gilt so müssen wir zeigen dass auch $x \Vdash \Box\Box\phi$ gilt. Nach der Regel $\Box$ nach der Definition (3) auf Seite 9 ist dies der Fall, wenn $y \Vdash \Box\phi$ für alle $R(x,y)$, was wiederum der Fall ist wenn $z \Vdash \phi$ für alle $R(y,z)$ gilt. Nemen wir also an es gäbe y und z, sodass $R(x,y)$ und $R(y,z)$. Weil R transitiv ist wissen wir das es auch $R(x,z)$ gibt. Nach der Voraussetzung $x \Vdash \Box\phi$ und $R(x,z)$ gilt also $z \Vdash \phi$, was nachzuweisen war.

   b) Wir setzen wieder für ϕ p ein und sind fertig.

   c) Gehen wir davon aus, dass das Framen $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ erfüllt. Wir wollen zeigen, dass wenn $R(x,y)$ und $R(y,z)$ gilt $R(x,z)$ der Fall sein muss.
Wir definieren die Label-Funktion L, so dass: $p \notin L(z)$ und $p \in L(w)$ für alle Welten w außer z.
Beweis durch Wiederspruch. Gehen wir davon aus $R(x,z)$ sei nicht der Fall. Dann gilt $x \Vdash \Box p$, denn alle Welten w außer z erfüllen p. Aus dem Axion $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ folgt $x \Vdash \Box\Box p$, woraus folgt $y \Vdash \Box p$ woraus nach $R(y,z)$ $z \Vdash p$ was der Annahme widerspricht. Weshalb $R(x,z)$ der Fall sein muss.

(vgl. [HR04, S.324f]) ■
Die Tabelle Tabelle (**??**) auf Seite 17 vervollständigt die Zusammenhänge zwischen Formel-Schemata und Relationseigenschaften.

Theorem 11 *Ein Frame $\mathcal{F} = (W, R)$ erfüllt ein Formel-Schema in Tabelle* (**??**) *auf Seite 17 gdw. R die entsprechende Eigenschaft aufweist. [HR04, S.325]*

Name	Formel Schema	
T	$\Box\phi \rightarrow \phi$	reflexiv
B	$\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$	symmetrisch
D	$\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$	seriell
4	$\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$	transitiv
5	$\Diamond\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$	euklidisch
	$\Box\phi \leftrightarrow \Diamond\phi$	funktional
	$\Box(\phi \wedge \Box\phi \rightarrow \psi) \vee \Box(\psi \wedge \Box\psi \rightarrow \phi)$	vorwärts funktional

Tabelle 2.3.: Attribut Bezeichnungen und entsprechende Formel-Schemata so wie R Eigenschaften. Quelle: [HR04, [] S.325]

2.5. Die Modal-Logik $KT45$ (Wissen)

Die Modal-Logik wird definiert durch eine Menge an gültigen Formel-Schemata $\mathbb{L}$. Die Tabelle (**??**) auf Seite 17 zeigt einige der wichtigsten dieser Formel-Schemata .

Definition 12 *Sei $\mathbb{L}$ eine Menge von Formel-Schemata der Modal Logik und $\Gamma \cup \psi$ eine Menge von modal logischen Formeln.*

- *Die Menge* Γ *ist abgeschlossen gegenüber der Substitution von Instanzen gdw.* $\psi \in \Gamma$*. Dann gilt auch, dass jede Substitutionsinstanz von* ψ *auch in* Γ *ist.*
- *Sei* $\mathbb{L}_c$ *die kleinste Menge die alle Instanzen von* $\mathbb{L}$ *enthält.*
- *Aus* Γ *folgt semantisch* ψ *in* $\mathbb{L}$ *gdw. alle Modelle, deren Frame* $\mathbb{L}$ *erfüllt und alle Welten* x *in diesem Modell,* x *erfüllt* Γ*, gilt. In diesem Fall sagen wir* $\Gamma \vDash_{\mathbb{L}} \psi$ *gilt.*

[HR04, S.326]

Bei der Modal-Logik $KT45$ handelt es sich um eine wohl bekannte Logik zur Modellierung von Wissen. Sie wird in der Literatur auch mit S bezeichnet. Die Formel $\Box\phi$ bezeichnet also dass ein Agent Q die Tatsache ϕ weis. Die Menge der vorausgesetzten Formel-Schemata ist $\mathbb{L} = \{T, 4, 5\}$. **T** bedeutet in diesem Zusammenhang, dass nur Dinge gewusst werden können die auch Wahr sind.
4 Positive Introspektion bedeutet, dass wenn man etwas weiß, dann weiß man, das man es weiß.
5 Negative Introspektion bedeute, dass wenn man etwas nicht weiß, dann weiß man, das man es nicht weiß. **K** Logische Allwissenheit bedeutet, dass dem Agenten alle möglichen Folgerungen aus seinem Wissen ebenfalls bekannt sind.
Es ist wichtig anzumerken, dass es sich hierbei um eine stark idealisierte Modellierung von Wissen handelt. Auf menschliches Wissen treffen diese Eigenschaften nicht zu. Nicht einmal alle Agenten-System erfüllen all diese Eigenschaften. [HR04, S. 326f]

Fakt 13 *Eine Relation ist reflexiv, transitiv und euklidisch gdw. sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, es sich also um eine Gleichheits-Relation handelt. [HR04, S.327]*

Die Modal-Logik $KT45$ ist simpler als K, weil weniger sich tatsächlich unterscheidende Aussagen möglich sind.

Theorem 14 *Jede Folge von modal Operatoren und Negationen in* $KT45$ *ist gleichbedeutend zu einer der folgenden Kombinationen:* $-$, $\Box$, $\Diamond$, $\neg$, $\neg\Box$ *und* $\neg\Diamond$*, wobei* $-$ *bedeutet, dass keien modal Operator und keine Negation verwendet wird. [HR04, S. 327]*

2.6. Intuistische Modal-Logik

todo
ehr schreiben

Definition 15 *Ein Modell der intuitionistischen Aussagenlogik ist ein Model* $\mathbb{M} = (W, R, L)$ *der Logik* $KT45$*, sodass* $R(x, y)$ *immer* $L(x) \subseteq L(y)$ *impliziert. Gegeben einer modal logische Formel nach* (2.1)*, definieren wir* $x \Vdash \psi$ *wie in Definition* (3) *mit Außnahme der Reglen für* $\rightarrow$ *und* $\neg$*.*

- $\psi \rightarrow \phi$ *definierten wir als* $x \Vdash \psi \rightarrow \phi$ *gdw.* $\forall y R(x, y)$ *auch* $y \Vdash \phi$ *gilt, immer wenn* $y \Vdash \psi$ *gilt.*
- $\neg\psi$ *definierten wir als* $x \Vdash \neg\psi$ *gdw.* $\forall y R(x, y)$ $y \nVdash \psi$ *der Fall ist.*

[HR04, S.328]

2.7. Natürliche Deduktion

Natürliche Deduktion ist ein Kalkül um aus einer Menge von aussagen-logischen Formeln andere Formeln abzuleiten. Dazu gibt es eine Menge von Regeln die hier aufgelistet aber nicht im Detail erklärt werden. Eine gute Erklärung der Grundlagen des Systems findet sich in Huth [HR04, Kapitel 1.2 (natural deduction)] in englischer Sprache.

Das System wurde für aussagen-logische Formeln entwickelt. Es lässt sich jedoch erweitern um in der Modal-Logik Beweise der Form $\Gamma \vDash_{\mathbb{L}} \psi$ führen zu können.

2.7.1. Natürliche Deduktion Aussagenlogik

Die Natürliche Deduktion erlaubt das formelle folgern von Aussagen anhand eines festen Regelsatzes. Die Gleichung (2.16) auf Seite 19 zeigt eine solche Regel.

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i \tag{2.16}$$

Aufbau der Regeln Jede Regel hat drei Bestandteile:

- Die Voraussetzung befindet sich über dem Bruchstrich.
- Die Folgerung lässt sich unter dem Bruchstrich finden.
- Der Name oder der Bezeichner wird rechts an die Gleichung angehangen.

Es lässt sich dabei zwischen Einführungs- (gekenzeichnet durch ein i) und Eliminierungsregeln (gekenzeichnet durch ein e) unterscheiden. Die Gleichung (2.16) auf Seite 19 ist also ein Beispiel für eine Einführungsregel. Sie führt die Konjunktion $\phi \wedge \psi$ ein.
Für die Konjunktion gibt es zwei Eliminierungsregeln Gleichung (2.17) auf Seite 19 und Gleichung (2.18) auf Seite 19 . Die erste extrahiert ersten Teil der Konjunktion, die zweite den zweiten Teil. Weil man bei der Erfüllung einer Konjunktion weis, dass beide Teile gelten müssen ist die Eliminierungsregel einfach.

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \tag{2.17}$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2 \tag{2.18}$$

Die Regeln der Disjunktion sind schwieriger. Sie benötigen Annahmen um nachgewiesen zu werden.

Forumlieren von Annahmen Manchmal ist es notwendig Formeln temporär als gegeben anzunehmen um einen allgemein gültigen Schluss ziehen zu können. Huth [HR04, S.11] erklärt dies sehr verständlich.
Die Gültigkeit einer solchen temporären Annahme wird durch eine Box um den Teil des entsprechenden Beweises gekennzeichnet.

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to i \tag{2.19}$$

Ein Box kann selbst wieder weitere Boxen enthalten. Ein Box kann alle Formeln verwenden die über Annahmen in dieser Box erzeugt wurden und die vor der Box bereits verfügbar waren. Annahmen dürfen eine Box nicht verlassen. Lediglich die Folgerungen können danach verwendet werden.

$$\boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ a_1 \\ \boxed{\begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \end{array}} \\ f_1 \\ \vdots \\ a_2 \\ \boxed{\begin{array}{c} B_2 \\ b_{2_1} \\ \boxed{\begin{array}{c} C \\ \vdots \end{array}} \\ \vdots \end{array}} \end{array}} \tag{2.20}$$

Die Sichtbarkeit von Formeln ist sehr wichtig, deswegen hier noch ein Beispiel um dies zu verdeutlichen.
Innerhalb der Box B_1 sind alle Formeln der Box A sichtbar die bis dahin deklariert wurden, weil B_1 eine Box innerhalb der Box A ist. In diesem Falle ist das die Variable a_1.
Innerhalb der Box B_2 sind ebenfalls alle Formeln aus A verfügbar (a_1 a_2 f_1), allerdings nicht die aus B_1, weil B_2 nur innerhalb von A liegt, nicht jedoch innerhalb von B_1. Weil die Folgerung aus B_1 nun teil von A ist kann B_2 diese ebenfalls verwenden.
Die Box C liegt innerhalb von A und B_2 und kann damit alle Formeln von A und B_2 verwenden (a_1 f_1 a_2 b_{2_1}).

Die Regeln der Disjunktion Die Einführenden Regeln der Disjunktion sind einfach. Sie erfordern noch nicht den Einsatz von Annahmen. Kennt man einen Teil der Aussage kann man den anderen Teil frei wählen, weil man ja schon weis, dass der erste Teil Wahr ist und damit die Aussage als ganzes Wahr sein muss. Die Gleichung (2.21) auf Seite 20 und die Gleichung (2.22) auf Seite 20 formalisieren diese Aussagen.

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee i_1 \tag{2.21}$$

$$\frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee i_2 \tag{2.22}$$

Die Eliminierungsregeln für die Disjunktion gestallten sich aufwendiger. Will man aus der Formel $\phi \vee \psi$ eine Aussage χ folgern, so muss man zeigen, das χ gilt egal ob ϕ oder ψ der Fall ist. Es wird als erst versucht χ unter der Annahme von ϕ zu folgern und danach unter der Annahme von ψ. Nur wenn in beiden Fällen χ gefolgert werden kann darf χ danach als gültig angenommen werden kann. Die Gleichung (2.23) auf Seite 21 beschreibt dies formal. Huth [HR04, S.16ff] beschreibt diese Regeln ausführlicher und führt auch einen Beispielhaften Beweis.

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi} \vee e \tag{2.23}$$

2.7.2. Natürliche Deduktion Modal-Logik

Der direkte Beweis von $\Gamma \vDash_{\mathbb{L}} \psi$ auf Basis der Definition wäre sehr umständlich und auswendig. Denn es müsste für jede Mögliche Kripkestruktur die alle Formeln in Γ erfüllt und für alle die Welten darin, untersucht werden ob ψ gilt.
Statt dessen kann man die Regeln der Natürliche Deduktion erweitern, sodass sie auch in der Modal-Logik eingesetzt werden können.
Dafür werden gestrichelten Boxen als neues Syntax-Element eingeführt, siehe Gleichung (2.24) auf Seite 21 und Gleichung (2.25) auf Seite 21 . Die gestrichelte Box steht für das folgern in einer beliebigen erreichbaren Welt.
Eine gestrichelten Box erlaubt es also die Formel ϕ in eine gestrichelte Box aufzunehmen wenn es vorher die Formel $\Box\phi$ gab und eine Formel $\Box\psi$ zu verwenden wenn vorher eine gestrichelte Box mit der Formel ψ endete.
Es gibt keine extra Box für $\Diamond$, weil dies zu $\neg\Box\neg$ äquivalent ist [HR04, 329f].

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array}}\text{make this box dashed}}{\Box\phi}\Box i \tag{2.24}$$

$$\frac{\Box\phi}{\boxed{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi\\ \vdots\end{array}}\text{make this box dashed}}\Box e \tag{2.25}$$

Extra Regeln für $KT45$ Die Regeln $\Box i$ und $\Box e$ sind für das Folgern in K ausreichend. Stärkere Sprachen wie $KT45$ brauchen hingegen weiter Regeln um ihre semantischen Besonderheiten mit einzubeziehen.

todo Regeln aufschreiben

Anstatt der Regeln könnte man auch die Restriktionen für das Importieren von Formeln in gestrichelte Boxen lockern. Dadurch das 4 es erlaubt um eine gestrichelte Box eine weiter gestrichelte Box zu zeichnen könnte man sich auch überlegen das es im alg. erlaubt ist Formeln der Form $\Box\phi$ unverändert in gestrichelte Boxen aufzunehmen. Das Gleiche gilt analog für 5 und Formeln der Form $\neg\Box\phi$.

todo Definition 5.2 aufschreiben

Definition 16 *Sei $\mathbb{L}$ eine Menge von Formel-Schemata . $\Gamma \Vdash_{\mathbb{L}} \psi$ ist valide, wenn es einen Beweis im Natürliche Deduktion System der normale Modal-Logik , erweitert um die Axiome aus $\mathbb{L}$, und den Voraussetzungen von Γ gibt [HR04, S.330].*

todo folge Beispiel bringen

3. Multi-Modal-Logic

Multi-Modal-Logik sind normale Modal-Logik die mehr als eine Modularität der Wahrheit enthalten. Ein Beispiel dafür sind Multi-Agent-Systeme. In einem solchen System, kann ein Agent nicht nur Folgerungen auf Basis seines Wissens, sonder auch auf Basis des Wissen über das Wissen der anderen anstellen. Also Aussagen der Art: Weil ich weis das er **A** weis kann ich **B** folgern. Im realen Leben begegnen uns solche Situationen z.B. bei Verhandlungen. Dabei ist es wichtig nicht nur über den Sachverhalt bescheid zu wissen, sondern auch wissen darüber zu besitzen, was der Gegenüber weis und was er über uns unser Wissen weis. Technische Anwendung findet diese Art des Folgern in den Bereichen: Spieleentwicklung, Wirtschaft, Verschlüsselung und beim Protokollen [HR04, S. 331f] . Konkret wird dieses Kapitel die Logik $KT45^n$, den allgemeinen Fall der Wissenslogik $KT45$, anhand der klassischen Logik Rätsel Wise-Men und Muddy-Children, darstellen.

3.1. Das Wise-Men Rätsel

Das Wise-Men-Puzzle ist ein klassisches Beispiel dafür wie ein Agent aufgrund von Allgemeinwissen und das Wissen über das Wissen oder Unwissen andere Folgerungen ziehen kann.

Rätsel 1 *Es gibt 3 weise Männer. Es gehört zum Allgemeinwissen - etwas das jeder weis, und jeder weis, dass es jeder weis, was wiederum jeder weis usw. -, dass es 3 rote und 2 weise Hüte gibt. Der König setzt jedem der weisen Männer einen Hut auf, sodass jeder nur die Hüter der anderen, nicht jedoch seinen eigenen sehen kann. Danach fragt er der Reihe nach jeden ob er weis welche Farbe sein Hut hat. Gehen wir davon aus, das sowohl der Erste als auch der Zweite es nicht weis, dann folgt daraus, dass der Dritte Wissen muss welche Farbe sein Hut hat.*
Warum?
Welche Farbe hat sein Hut?

Das Rätsel setzt folgendes Vorraus:

- Alle Beteiligten sind ehrlich
- Alle Beteiligten sind schlau (übersehen keine Folgerungen)
- Alle Beteiligten wissen das die anderen schlau sind
- Alle Beteiligten besitzen das selbe Allgemeinwissen

Im folgenden wird das Rätsel umgangssprachlich und durch Überlegungen gelöst. In Abschnitt 3.2 auf Seite 24 wird das Rätsel in der Multi-Modal-Logik $KT45^n$ formalisiert und formal gefolgert.

Beginnen wir damit alle möglichen Kombinationen zu notieren:

`R R R`	`W R R`
`R R W`	`W R W`
`R W R`	`W W R`
`R W W`	

Wobei die Notation `R R W` bezeichnet, dass der Erste und Zweite einen roten und der Dritte einen weißen Hut tragen. Der Fall `W W W` kann nicht auftreten, weil es keine 3 weißen Hüte gibt.

Betrachten wir das Rätsel mal aus der Perspektive des 2. und 3. Weisen. Nach der negativ Aussage vom Ersten kann der Zweite folgern, dass `R W W`, nicht der Fall ist, sonst wüste der 1. das er einen roten Hut trägt. Mit der selben Argumentation kann der 3. den Fall `W R W` ausschließen. Damit bleiben folgende Kombinationen:

R R R	W R R
R R W	~~W R W~~
R W R	W W R
~~R W W~~	

Der 3. kann außerdem den Fall `R R W` ausschließen, denn wäre dies der Fall gewesen hätte der 2. gefolgert, dass es einer der beiden Kombinationen `R R W` oder `R W W` zutreffen muss. Der Fall `R W W` konnte aber schon durch die Aussage des Ersten ausgeschlossen werden. Wäre also `R R W` der Fall gewesen, so hätte der Zwei gewusst, dass er einen roten trägt. Da er das aber nicht sagt, kann dieser Fall ausgeschlossen werden. Damit bleiben übrig:

R R R	W R R
~~R R W~~	~~W R W~~
R W R	W W R
~~R W W~~	

Wie man sehen kann, trägt der 3. in jedem der Fällt einen roten Hut. Deswegen kann er folgern, dass er einen roten Hut aufhaben muss, weil sonst einer der anderen anders geantwortet hätte.
Das zeigt, warum es notwendig ist, das alle Beteiligten schlau sind, nichts übersehen, nicht lügen und all dies zum Allgemeinwissen der Beteiligten zählt.

3.2. Die Modal-Logik $KT45^n$ (Multi-Agent-Wissen)

Die Multi-Modal-Logik $Kt45^n$ ist eine Verallgemeinerung der Modal-Logik $KT45$, in der Hinsicht als dass es mehrerer $\Box$ ähnliche Operatoren gibt. Jeder Agent einer Menge $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$ hat seine eigene Relation R_i auf W. Der Operator eines Agenten i wird notiert als K_i mit K für Knowlage (Wissen). Wir verwenden weiterhin p, q, r für atomare Terme. Die $K_i p$ bedeutet das Agent i die Tatsache p weis. Hier nun eine komplexeres Beispiel einer Formel in $KT45^n$: $K_1 p \wedge K_1 \neg K_2 K_1 p$. Sie besagt: Agent 1 weis p, außerdem weis Agent 1, das Agent 2 nicht weis, dass er p weis. Mit G beschreiben wir eine Gruppe von Agenten $G = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Will man nun Aussagen das eine Gruppe G von Agenten einen Umstand p weis : $K_1 p \wedge K_2 p \wedge \dots K_n p$ benutzt man dafür die Formulierung $E_G p$. Es gelden die selben Bindungsstärke der Operatoren wie in der Auflistung 2.1 auf Seite 7 . Wobei K_i wie der $\Box$-Operator behandelt wird. [HR04, S.335ff]
Bei erster Betrachtung mag man annehmen, dass eine Tatsache ϕ nicht bekannter sein kann als $E_G \phi$. $E_G E_G \phi$ stellt jedoch mehr Wissen dar als $E_G \phi$, denn es besagt nicht nur das jeder etwas weis, sondern auch das jeder weis, dass es jeder weis. Genauso stellt $E_G E_G E_G \phi$ wiederum noch mehr Wissen dar, denn jeder Weis, dass alle etwas wissen und das ist wiederum bekannt. Dies lässt sich ins unendliche fortsetzen $E_G E_G \dots \phi$. Da es aber nur möglich ist finite Aussagen zu machen, für diesen Umstand des Allgemeinwissens ein extra Operator C_G eingeführt und über seine Semantik definiert. Wir bezeichnen als mit C_G das Allgemeinwissen innerhalb einer Gruppe G. Mit D_G wollen wir verteiltes Wissen beschreiben. Verteiltes wissen ist dem Einzelnen evtl. nicht bekannt, kann jedoch gefolgert werden, sobald alle Beteiligten der Gruppe ihr Wissen vereinen. Die Buchstaben C und D stammen aus dem Englischen für common-knowlage und distributed-knowlage.
multi agent systeme

Definition 17 *Eine Formel ψ der multi modal Logik $KT45^n$ ist definiert durch folgende Grammatik:*

$$\phi ::= \bot | \top | p | (\neg \phi) | (\phi \wedge \phi) | (\phi \vee \phi) | (\phi \rightarrow \phi) | (\phi \leftrightarrow \phi) | (K_i \psi) | (E_G \psi) | (C_G \psi) | (D_G \psi) \tag{3.1}$$

wobei p irgendeine atomare Formel ist und $i \in \mathcal{A}$ sowie $G \subseteq \mathcal{A}$ gilt. $E_\mathcal{A}, C_\mathcal{A}, D_\mathcal{A}$ werden zur Einfachheit ohne den extra Index geschrieben E, C, D. [HR04, S.335f]

Vergleicht man diese Definition mit der von Definition (1) auf Seite 7 so stellt man fest, dass anstelle des $\Box$ Operator nun eine Vielzahl von Operatoren gibt: K_i, E_G, C_G, D_G für alle $G \subseteq \mathcal{A}$. Im Folgenden wird gezeigt das sich diese Operatoren $\Box$ ähnlich verhalten. Es gibt kein explizites Analogon zu $\Diamond$. Es ist aber entsprechend gleichbedeutend mit $\neg K_i\neg, \neg E_G\neg, \neg C_G\neg, \neg D_G\neg$.

Definition 18 *Ein Model $\mathcal{M} = (W, (R_i)_{i\in\mathcal{A}}, L)$ der Multi-Modal-Logik $KT45^n$ mit der Menge $\mathcal{A}$ von n Agenten wird beschrieben durch drei Dinge:*

1. *einer Menge W von möglichen Welten*
2. *für jedes $i \in \mathcal{A}$, der Gleichheitsrelation R_i auf W $R_i \subseteq W \times W)$ auch Erreichbarkeitsrealtion gennant und*
3. *der Labeling-Funktion $L : W \to \mathcal{P}(Atome)$*

[HR04, S.336f]

Vergleicht man diese Definition mit der Definition (2) auf Seite 8 , aus der Modal-Logik so lässt sich folgendes feststellen. Es sind nur mehrere Relationen R_i, eine für jeden Agenten i definiert. Außerdem wird vorausgesetzt, dass R eine Gleichheitsrelation ist, also reflexiv und symmetrisch. Dieser Umstand wird bei der graphischen Darstellung von $KT45^n$ Modellen ausgenutzt. So sind die Kanten mit den Relationen beschriftet für die sie gelten, außerdem gibt es keine Notwendigkeit für Pfeile, weil eine Verbindung durch die Symmetrie-Eigenschaft immer in beide Richtungen besteht. Streng genommen müsste auch jede Welt, aufgrund der Transitivität, eine Verbindung auf sich selbst haben, die in jeder Relation definiert ist. Weil dieser Umstand stand aber für alle Welten außnahmslos gilt, wird zugunsten der Übersichtlichkeit auf die Verbindungen verzichtet.

todo Abbildung verlinken todo Bsp: grphic a huth S. 336 erstellen

Definition 19 *Gegeben ein Model $\mathbb{M} = (W, (R_i)_{i\in\mathbb{A}}, L)$ der $KT45^n$ und eine Welt $w \in W$, so definieren ψ als Wahr durch die Erfüllung der Relation $x \vDash \psi$ durch folgende Regeln:*

$$x \Vdash p \text{ gdw. } p \in L(x) \tag{3.2}$$
$$x \Vdash \neg\phi \text{ gdw. } x \nVdash \phi \tag{3.3}$$
$$x \Vdash \phi \wedge \psi \text{ gdw. } x \Vdash \phi \text{ und } x \Vdash \psi \tag{3.4}$$
$$x \Vdash \phi \vee \psi \text{ gdw. } x \Vdash \phi, \text{ oder } x \Vdash \psi \tag{3.5}$$
$$x \Vdash \phi \to \psi \text{ gdw. } x \Vdash \psi, \text{ immer wenn gilt } x \Vdash \phi \tag{3.6}$$
$$x \Vdash K_i\psi \text{ gdw. } \forall y \in W, R_i(x,y),\ y \Vdash \psi \text{ impliziert} \tag{3.7}$$
$$x \Vdash E_G\psi \text{ gdw. } \forall i \in G, x \Vdash K_i\psi \tag{3.8}$$
$$x \Vdash C_G\psi \text{ gdw. } \forall k \geq 1, \text{ und es gilt } x \Vdash E_G^k\psi. \text{Wobei } E_G^k \text{ meint } E_G E_G \ldots E_G \text{ k-mal.} \tag{3.9}$$
$$x \Vdash D_G\psi \text{ gdw. } \forall y \in W, y \Vdash \psi \text{gilt, immer wenn auch } R_i(x,y), \forall i \in G \text{gilt.} \tag{3.10}$$
$$\tag{3.11}$$

[HR04, S.337]

Wir wollen wieder diese Definition der Multi-Modal-Logik mit ihrem Analogon in der Modal-Logik (Definition (3) auf Seite 9) vergleichen. Die typischen Boolean Operatoren sind identisch definiert. Alle K_i verhalten sich wie der $\Box$ Operator, nur jeweils bezogen auf ihre Relation R_i. E_G ist auf Basis von K definiert und C_G wiederum auf Basis von E_G.
Es gibt keinen Definition für $\Diamond$ weil dies über $\neg K\neg$ ausgedrückt werden kann.
Viele der festgestellen Eingenschaften der Modal-Logik gelten auch in der Multi-Modal-Logik nur jeweils mit Bezug auf die entsprechende Relation R_i:

1. Ein **Frame** $\mathcal{F} = (W, (R_i)_{i \in \mathcal{A}})$ besteht aus einer Menge von Welten W und einer Gleichheitsrelation R_i für jedes $i \in \mathcal{A}$.

2. Ein Frame $\mathcal{F} = (W, (R_i)_{i \in \mathcal{A}})$ erfüllt eine Formel ϕ gdw. für jede Labeling-Funktion $L : W \to \mathcal{P}(Atome)$ in jeder Welt $w \in W$, $\mathcal{M}, w \vDash \phi$ gilt, mit $\mathcal{M} = (W, (R_i)_{i \in \mathcal{A}}, L)$. Dann schreiben wir $\mathcal{F} \vDash \phi$.

Das Theorem (20) auf Seite 26 ist nützlich wenn es um die Beantwortung von Formel geht, die E oder C enthalten. Wir wollen nun den Begriff der G-Erreichbarkeit erklären. Seit $\mathcal{M} = (W, (R_i)_{i \in \mathcal{A}}, L)$ ein Model für $KT45^n$ und $x, y \in W$. Wir nennen y G-erreichbar in k Schritten von x wenn es $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1} \in W$ und $i_1, i_2, \ldots, i_k$ in G gibt, sodass

$$xR_{i1}w_1R_{i2}w_2 \ldots R_{ik} - 1w_k - 1R_{ik}y$$

gilt. Die Formulierung meint $R_{i1}(x, w_1)m, R_{i2}(w_1, w_2), \ldots, R_{ik}(w_k, w_y)$. Eine Welt y wird einfach nur G-erreichbar von x genannt, wenn diese durch eine feste Anzahl an Schritten k von x G-erreichbar in k Schritten ist.

Theorem 20 *1. $x \Vdash E_G^k\phi$, gdw. für alle y, die in k Schritten von x G-erreichbar sind, $y \Vdash \phi$ gilt.*

2. $x \Vdash C_G\phi$, gdw. für alle y, die von x G-erreichbar sind, $y \Vdash \phi$ gilt.

notiz
eweis führen?

Valide Formeln in $KT45^n$ Das Schema K gilt für alle Operatoren. Alle Ebenen des Wissens sind also abgeschlossen gegenüber der logischen Konsequentz. Wenn z.B. eine Zusammenhang ϕ Allgemeinwissen ist dann sind auch alle logischen Folgerungen daraus wieder Teil des Allgemeinwissens.
Die Operatoren E, C, D sind boxähnlich weil sie Universallquantoren über die Relationen $R_{E_G}, R_{D_G}, R_{C_G}$ sind.

$$\begin{aligned}
R_{E_G}(x, y) &\text{ gdw. } R_i(x, y) \text{ für einige } i \in G \\
R_{D_G}(x, y) &\text{ gdw. } R_i(x, y) \text{ für alle } i \in G \\
R_{C_G}(x, y) &\text{ gdw. } R_{E_G}^k(x, y) \text{ für jedes } k \geq 1
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass E_G, D_G, C_G das Schema K im Bezug auf $R_{E_G}, R_{D_G}, R_{C_G}$ erfüllen. Was ist mit den anderen Schemata $T, 4, 5$?
Da R_i eine Gleichheitsrelation ist folgt nach Theorem (11) auf Seite 17 und Tabelle (**??**) auf Seite 17 das für jedes K_i gilt:

- $K_i\phi \to K_iK_i\phi$ positive Introspektion
- $\neg K_i\phi \to K_i\neg K_i\phi$ negative Introspektion
- $K_i\phi \to \phi$ Wahrheit

R_{D_G} erfüllt die die Schemata $T, 4, 5$, weil sie ebenfalls eine Gleichheitsrelation ist. Die Schemata gelten aber nicht automatisch für E_G und E_C. $E_G\phi \to E_GE_G\phi$ gilt z.B. nicht sonst wäre Allgemeinwissen lediglich, das was jeder weiß. $\neg E_G\phi \to E_G\neg E_G\phi$ gilt ebenfalls nicht.
Die Ursache für diese Sachverhalte ist die Tatsache, dass R_{E_G} ist nicht notwendigerweise eine Gleichheitsrelation ist, obwohl dies für jedes R_i gilt.
$E_G\phi \to \phi$ ist hingegen der Fall, weil R_{E_G} reflexiv ist. Für den Fall $G \neq \emptyset$ ist $E_G\phi$ immer leer, auch wenn $\phi = \bot$, sprich $E_G\bot \to \emptyset$.
todo
R_{C_G} ist eine Gleichheitsrelation, daraus folgt, dass $T, 4, 5$ gelten, wobei 5 $G \neq \emptyset$ fordert.
n man das so
schreiben?

3.2.1. Natürliche Deduktion in $KT45^n$

- D weglassen - KT45 wird erweitert um die neuen Operatoren
- getrichelte Boxen haben nun verschiedenen Art (abhängig vom Operator) - wie im oberen abscnitt gesehn könne Axiome T 4 5 für jeded K_i eingesetzte werden - 4,5 können für C_G aber nicht für E_G eigenutzt werden - Die Regeln CE und CK sind genau genommen eine Menge von Regeln für jede Wahl eines bestimmten k, der Einfachheit halber werden sie aber nur mit CE und CK bezeichnet - EK_i wird als eine Art gennerelle und-Elimination und KE wie eine gennerelle und-Einführung - Wie auch bei den Regeln zur KT45 kann man sich die Regeln K4 K5 C4 und C5 als eine Art Stricktheits Entschärfung für das Importieren und exportieren von Formeln in bestimme Boxen vorstellen. Weil K4 es erlaubt um jedes K$_i einweitersK_i zuerg\ddot{a}nzenerlaubteseffektivdasunver\ddot{a}nderteImportierenvonK_i\phi FormelninK_iBoxen.\ddot{A}hnli$
Formeln in C_G Boxen zu importieren.
Das Öffnen einer Box kann man sich intuitiv als das folgern auf Basis des Wissens des entsprechenden Agenten vorstellen. Unter dieser Betrachtung ist es ebenfalls intuitiv einleuchtend, dass eine Tatsache ϕ nicht einfach in eine Box gebracht werden kann, denn die existent der Tatsache bedeutet nicht gleichzeitig, dass der entsprechende Agent diese auch weis.
Wir erinnern uns, dass ein Agent nicht falsches wissen kann. Daher gilt besondere Sorgfalt mit der Regel . Sie darf nicht angewendet werden, wenn eine der verwendeten Annahmen außerhalb der Box existiert.
$C\phi$ ist besonders mächtig, weil es erlaubt die Formel ϕ in jeder Box zu verwenden unanbhängig von dessen Schachtelungstiefe. Die Regel $E^k\phi$ hingegen erlaub die Verwendung von ϕ nur in Boxen der Schachtelungstiefe $\leq k$. [HR04, S.339ff]

3.2.2. Formalisierung des Wise Men Rätsels in $KT45^n$

Anwendung auf Rätsel. keien temporaler Aspekt -¿ snapshots kurz bsp zusammenfassung
es gibt 2 weiße und 3 rote
p_i ... Mann i hat einen roten hut auf $\neg p_i$ ... Mann i hat einen weißen Hut auf
Menge an Formeln:

$$\{C(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \tag{3.12a}$$
$$C(p_1 \rightarrow K_2 p_1), C(\neg p_1 \rightarrow K_2 \neg p_1), \tag{3.12b}$$
$$C(p_1 \rightarrow K_3 p_1), C(\neg p_1 \rightarrow K_3 \neg p_1), \tag{3.12c}$$
$$C(p_2 \rightarrow K_1 p_2), C(\neg p_2 \rightarrow K_1 \neg p_2), \tag{3.12d}$$
$$C(p_2 \rightarrow K_3 p_2), C(\neg p_2 \rightarrow K_3 \neg p_2), \tag{3.12e}$$
$$C(p_3 \rightarrow K_1 p_3), C(\neg p_3 \rightarrow K_1 \neg p_3), \tag{3.12f}$$
$$C(p_3 \rightarrow K_2 p_3), C(\neg p_3 \rightarrow K_2 \neg p_3)\} \tag{3.12g}$$

- beschreibt allgemein wissen
- erste Ansage:

C$(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1)$ (3.13)

zweite Ansage - erste Ansage:

C$(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2)$ (3.14) naiver ansatz:

$$\Gamma, C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1), C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \Vdash K_3 p_3 \tag{3.15}$$

4. Zusammenfassung

Literaturverzeichnis

[HR04] M. Huth and M. Ryan. Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems. Cambridge Univ Pr, 2004.

[Hun73] G. Hunter. Metalogic: an introduction to the metatheory of standard first order logic. Univ of California Pr, 1973.

[Pri08] Graham Priest. Einführung in die nicht-klassische Logik; An introduction to non-classical logic. mentis, Paderborn, 2008.

A. Regeln der Natürliche Deduktion

todo
Hier Regeln übernehmen. Huth S. 27

	einführend	eliminierend
$\wedge$	r2c2	r2c3
$\vee$	r3c2	r3c3
$\rightarrow$	r4c2	r4c3
$\neg$	r5c2	r5c3
$\bot$	r6c2	r6c3
$\neg\neg$	r7c2	r7c3
$\square$	r8c2	r8c3