1.1. Размити множества. Основни понятия в размитата логика.

1.1. Теория на размитите множества. Същност.

Решаването на реални задачи е свързано с формализация на обекта или системата и прилагане на абстрактен метод за търсене на решение върху построения математически модел. Процесът на решение неминуемо се съпровожда с голяма степен на абстракция, на идеализация на реалните обекти и явления, които често се оказват твърде сложни, за да се вместят в тесните рамки на традиционната логика, в която централна роля играят точните, строги, количествени разсъждения.

В същото време експертите в дадена област са способни да намират оптимални или близки до оптималните решения, независимо от сложността на задачата, големия брой решения, непълнотата на входните данни, неточността на критериите и др., произтичащи от неизчерпаемата сложност на реалния свят.

Анализът на мисловния процес на експерта в процеса на вземане на решение дава възможност да заключим, че човешкото мислене е способно да работи в условията на неопределеност, неточност от различен характер, да използва размити понятия и методи на разсъждение и да взема правилни решения в размита информационна среда.

Опит за преодоляване на тези противоречия е създаването на теорията на размитите множества на Заде . Тя възниква като реакция на неудовлетвореност от методите на класическата математика, която принуждава специалистите да прибягват до изкуствена точност, неуместна при много реални задачи.

Теорията на размитите множества (ТРМ) представлява формален апарат за описание и анализ на сложни обекти и явления в условията на неопределеност от различен тип. Тя дава схема за решаване на проблеми, в които значителна роля за отчитане на факторите на неопределеност играе субективната оценка. Централно място в ТРМ заемат функциите за принадлежност, представляващи субективна мяра за съответствие на обект от

Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

дадено множество обекти към понятие, смисълът на което се формализира чрез размито множество.

Човешките разсъждения в процеса на вземане на решения са по-скоро приблизителни, отколкото точни. Построяването на модели на приближени разсъждения и използването им в компютърните системи се разглежда като "един от най-важните проблеми на съвременната наука". При това моделите, в които се използват размити формализми за моделиране на човешките разсъждения, дават по-добра познавателна имитация от моделите, в които се използват традиционни методи.

Предимствата на моделите, базирани върху ТРМ, се оценяват в две основни насоки:

От една страна, се базират върху идеята за размитост (неясност, неточност, неистинност, недостатъчност, противоречивост) на входните данни, което е напълно адекватно на реалните ситуации.

От друга страна, дават възможност за формализация и теоретична обосновка на неясните, неточни, размити човешки разсъждения в процеса на вземане на решения.

1.3. Основни понятия в размитата логика.

Основен принцип в класическата теория на множествата е това, че определен елемент може или да принадлежи, или да не принадлежи на дадено множество. В ТРМ Заде се отказва от този принцип и въвежда понятието функция на принадлежност (Membership function), аналогична на понятието характеристична функция на множество, но приемаща стойности в интервала [0, 1].

Нека X е множество с елементи $x \in X$ и нека A да е подмножество на X, съдържащо елементи, които притежават някакво свойство p. Ако характеристичната функция $\mu A(x)$ приема стойности в интервала [0, 1], то за елементите $x \in X$ по отношение на свойството p са възможни следните случаи:

$\mu A(x) = 0$ - не притежава свойството p;

$\mu A(x) \in (0,1)$ - притежава p в някаква степен;

Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника", финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж", съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

$\mu A(x) = 1$ - напълно притежава р.

Съвкупността от всички двойки (x, μA(x)), за които $x \in X$, а μA(x) е функция, дефинирана върху X и приемаща стойности в интервала [0, 1], се нарича **размито множество** (РМ) A над множеството X.

Функцията $\mu A(x){:}X \to [0, 1]$ се нарича **функция на принадлежност**, а множеството от стойности, които тя приема - **множество на принадлежност**. Множеството X се нарича **базово множество**, а стойността на μA(x) - **степен на принадлежност** на елемента x към РМ A.

Размитото множество A над X се задава по един от следните начини:

$A = \{x \in X: \mu A(x)\}$,

$A = \{x1/\mu A(x1),...,xi/\mu A(xi),...,xn/\mu A(xn)\}$,

или таблично:

x_1	x_2	…	xi	…	xn
$\mu A(x_1)$	$\mu A(x_2)$	…	$\mu A(x_i)$	…	$\mu A(x_n)$

където x1 ... xn са елементи на X, а μA(xi) е степента на принадлежност на елемента xi към размитото множество A.

Празно размито множество се нарича размитото множество A над X, за което $\mu A(x) = 0$ за всяко $x \in X$. Означава се с 0.

Универсално размито множество се нарича размитото множество A над X, за което $\mu A(x) = 1$ за всяко $x \in X$. Означава се с U.

Носител на размито множество A над X се нарича обикновеното множество $\{ x: x \in X, \mu A(x) > 0\}$. Означава се със supp A.

Размитото множество A над X се нарича **нормално**, ако съществува $x \in X$, за който $\mu A(x) = 1$. Ако едно размито множество A над X не е нормално, то се нарича субнормално.

Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

Нека A и B са две размити множества над X.

Размитото множество A над X се нарича **подмножество** на размитото множество B над X, ако $\mu A(x) \leq \mu B(x)$ за всяко $x \in X$. Означава се с $A \subseteq B$.

Размитите множества се наричат **равни**, A = B, ако $\mu A(x) = \mu B(x)$ за всяко $x \in X$. Ако A и B не са равни, те се наричат **различни**. Означава се с $A \neq B$.

Ниво α на размитото множество A над X ще наричаме **обикновено множество** A^{α}, чиито елементи са от X и степента им на принадлежност към A не е по-малка от α, т.е.:

$A^{\alpha} = \{ x : x \in X, \mu A(x) \geq \alpha \}$.

1.4. Операции върху размити множества.

В съответствие с операциите над обикновени множества, се въвеждат операциите допълнение, сечение и обединение на размити множества. Аксиоматичното им задаване дава възможност да се дефинират по различен начин в реалните задачи, за да могат най-точно да отразят разнообразната семантика на логическите връзки “и”, “или”, “не” в практиката.

Операции на Заде

Заде предлага операциите допълнение, сечение, и обединение върху размити множества да се дефинират по следния начин:

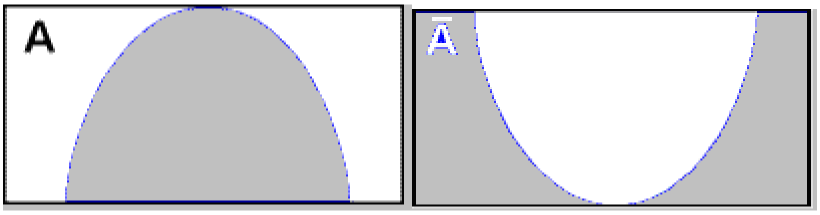
Нека A, B и C са размити множества над X.

Допълнение на размитото множество A над X ще наричаме размитото множество B над X, ако:

$\mu B(x) = 1 - \mu A(x)$ за всяко $x \in X$.

Означава се $B = \bar{A}$.

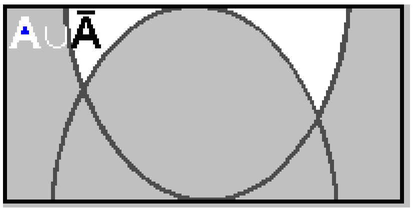
Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.



Фиг. 1.1. Допълнение на размито множество

Обединение на размитите множества A над X и B над X ще наричаме размито множество C над X, ако:

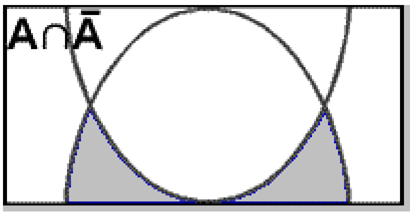
$\mu C(x) = \max(\mu A(x), \mu B(x))$ за всяко $x \in X$. Означава се $C = A \cup B$.



Фиг. 1.2. Обединение на на размити множества

Сечение на размитите множества A над X и B над X ще наричаме размито множество C над X, ако:

$\mu C(x) = \min(\mu A(x), \mu B(x))$ за всяко $x \in X$. Означава се $C = A \cap B$.



Фиг. 1.3. Сечение на размити множества.

Мини-максните операции на Заде дават добри резултати, ако РМ са дефинирани върху един и същ универсум. В практиката обаче се налага да се извършват операции върху РМ, свързани с различни универсуми, за които операциите на Заде не винаги дават възможност за адекватно моделиране на логическите връзки “и”, “или”, “не”.

--- www.eufunds.bg ---

Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

Триъгълни норми и конорми

Един от подходите за построяване на обобщени оператори за сечение и обединение е задаването им в класа на триъгълните норми и конорми.

Триъгълна норма (Т-норма) се нарича функцията:

$T:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$,

удовлетворяваща следните условия:

1. ограниченост

$T(0, 0) = 0$ $T(1, \mu A) = T(\mu A,1) = \mu A$

2. монотонност

$T(\mu A, \mu B) \leq T(\mu C, \mu D)$ ако $\mu A \leq \mu C$, $\mu B \leq \mu D)$

3. комутативност

$T(\mu A, \mu B) = T(\mu B, \mu A)$

4. асоциативност

$T(\mu A, T(\mu B, \mu C))=T(T(\mu A, \mu B), \mu C)$.

Частни случаи на триъгълните норми са:

- $\min(\mu A, \mu B)$
- $\mu A.\mu B$
- $\max(0, \mu A + \mu B - 1)$.

Триъгълна конорма (Т-конорма) се нарича функцията:

$T:[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

удовлетворяваща следните условия:

1. ограниченост

$T(1, 1) = 1$ $T(0, \mu A) = T(\mu A, 0) = \mu A$

2. монотонност

$T(\mu A, \mu B) \geq T(\mu C, \mu D)$ ако $\mu A \geq \mu C, \mu B \geq \mu D)$

3. комутативност

$T(\mu A, \mu B) = T(\mu B, \mu A)$

4. асоциативност

$T(\mu A, T(\mu B, \mu C)) = T(T(\mu A, \mu B), \mu C)$.

Частни случаи на триъгълните конорми са:

- $\max(\mu A, \mu B)$
- $\mu A + \mu B - \mu A.\mu B$
- $\min(1, \mu A + \mu B)$.

В практиката триъгълните норми се използват за моделиране на операцията сечение, а конормите – за моделиране на операцията обединение на размити множества. Изборът е експертен и зависи от семантиката на използваните в лингвистичните модели размити данни и умозаключения.

Алгебрични операции над размити множества

Нека X е универсум, а A и B са РМ над X.

Алгебрична сума A + B на РМ A и B се определя чрез следната ФП:

$\mu A{+}B(x) = \mu A(x) + \mu B(x) - \mu A(x)\mu B(x))$, за всяко $x \in X$.

Алгебрично произведение A.B на РМ A и B се задава чрез ФП:

$\mu A.B(x) = \mu A(x).\mu B(x)$, за всяко $x \in X$.

На базата на операцията алгебрично произведение се дефинира и операцията **степенуване** на РМ. Ако $\alpha \geq 0$, то A^α се задава чрез ФП:

$\mu A\alpha(x) = (\mu A(x))^\alpha$, за всяко $x \in X$.

Частни случаи на степенуване са:

концентриране – $CON(A) = A^2$

разтягане – $DIL(A) = A^{0.5}$,

Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

които се използват за моделиране на лингвистични неопределености.

Ако A_1, A_2,….A_n са РМ над X_1, X_2,….X_n съответно, то декартово произведение на размитите множества $A = A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$ се нарича РМ над $X = X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ с ФП:

$\mu A(x1,x2,\ldots xn) = \min(\mu A_1(x1), \mu A_2(x2),\ldots\mu A_n(xn))$, за $\forall\ xi \in X_i$, $i=1,2,\ldots n$.

Размито моделиране на реални задачи

Размити и лингвистични променливи

Размитите и лингвистични променливи се използват за моделиране на размити понятия и обекти.

Размитата променлива α се задава с тройката (α, X, A), където:

α е име на променливата;

X - дефиниционна област на α;

A - размито множество, описващо ограниченията, налагани върху стойностите на α.

Лингвистичните променливи (ЛП) се задават чрез (β, T, X, G, M), където:

β е име на лингвистичната променлива;

T е множество от стойности на ЛП, което се нарича терм-множество. Стойностите на ЛП са лингвистични терми. Всяка стойност на ЛП от T представлява име на РП, дефинирана върху универсума X;

X - дефиниционна област на β;

G – съвкупност от правила за генериране на нови значения на ЛП на базата на термите от T. Ако G(T) е множество от генерирани терми, то G(T) U T се нарича разширено терм-множество на ЛП;

M – съвкупност от правила за преобразуване на всяко ново значение на ЛП, получено по правилата G, в размита променлива.

Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

Понятието „размита логика“ в научната литература се използва с две различни значения. В тесен смисъл, размита логика е логическа система, развитие на математическата логика. В по-широк смисъл размитата логика се основава класове от обекти с неточни граници в които принадлежността е въпрос на степен.

Лингвистичната променлива (ЛП), въведена от американския математик Лотфи Заде, е главно понятие в размитата логика и представлява такава променлива, значението на която определя набор от вербални характеристики на някакво свойство (например производителност : „ниска“, „средна“ и „висока“). Значението на ЛП се определя чрез така наречените размити множества (РМ), които от своя страна се определят като няколко базови набора значения или като базова числова скала, имащи размерност. Всяко значение на ЛП се определя като размито множество (например „висока производителност“). Дефинирането на понятието размито множество най-естествено се случва с въвеждането на понятието функция на принадлежност по аналогия на понятието характеристична функция на обикновено множество. По този начин ако X е множество от обекти и $A \sqsubseteq X$, характеристичната функция $\mu_A(x)$ на множеството A може да приема произволни стойности в интервала [0,1]. Ако X е крайно множество с елементи x_1, x_2 ,…, x_n , то подмножеството A, представено чрез функцията $\mu_A(x)$ се нарича размито множество A над множеството X. Размитото множество се определя чрез някаква базова скала B и функцията му за принадлежност $\mu(x)$, $x \in B$, приемащи значения в интервала [0:1]. Размитото множество B – това е съвкупността от вида $(x, \mu(x))$, където $x \in B$ или:

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mu(x_i)}, \tag{1.1.}$$

където x_i е i - тото значение на базовата скала.

Размито множество A над X се нарича съвкупността от всички наредени двойки $(x, \mu_A(x))$, за които $x \in X$, а $\mu_A(x)$ е функция, приемаща стойности в интервала [0,1]. Функцията се нарича функция на принадлежност, а множеството от стойности, които тя приема – множество на принадлежност. Множеството X се нарича базово множество. За $x \in X$, числото $\mu_A(x)$ се нарича степен на принадлежност на x към A.

Функцията на принадлежност определя субективната степен на увереност на експертната система в това, че на данните за конкретното значение на базовата скала съответства определено размито множество.

Особена популярност в последните години е придобило съчетанието на размита логика и неврокомпютинг, което води до изграждането на хибридни системи. В съвременната теория на изкуствения интелект подобни системи се използват при нужда от обратна връзка и адаптация на системите в реално време. На тази основа е разработен ефективен метод, наречен Адаптивна Невро-Размита Инферентна Система или ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System). С инструментариума за прилагане на размита логика могат да се моделират нелинейни функции с произволна сложност и да се създават системи с размита логика, които да свързват произволен набор от входно-изходни данни.

Изхождайки от възможностите за приложение на размитата логика на размитата логика при обработката на нееднотипни входни данни и нейната адаптивност, често в практиката се предлага резултатите от работата на невронни мрежи за някакъв вид разпознаване да се анализират от архитектура система за вземане на крайно решение, реализирана на базата на размита логика.

1.5. Избор на средства за изграждане на система за вземане на крайно решение на базата на размита логика.

Инструментариумът на размитата логика, дава възможност за използването на два подхода за реализиране на система за вземане на решение. Използват се различни функции на принадлежност - функционални зависимости, които определят начинът, по който всяка точка от входното пространство формира съответна изходна стойност на принадлежност (степен на принадлежност) в рамките на диапазона от нула до единица. Най-често се използват функции на принадлежност класифицирани в групи, както следва:

- частично-линейни функции;

Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.

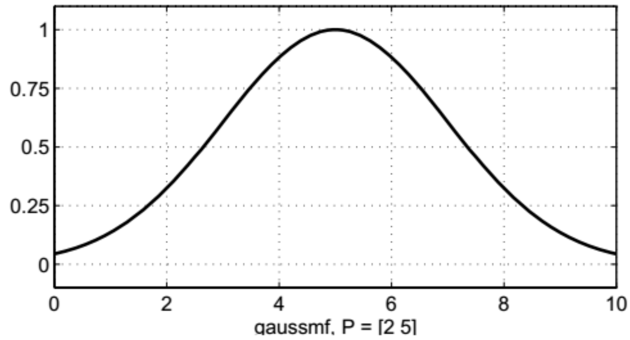
- функции с гаусово разпределение;
- сигмоидални функции;
- квадратични и кубични полиномиални функции.

Широко се предлага използването на функции на принадлежност от гаусов тип, обусловено от следните фактори:

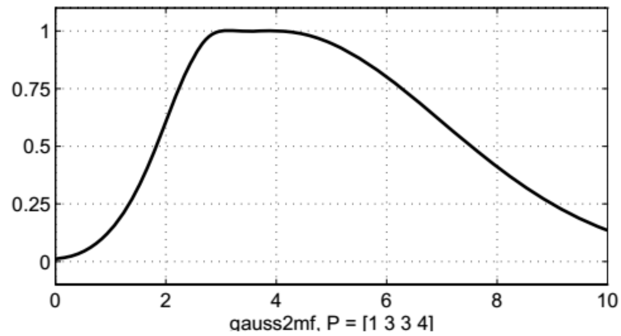
- спецификата на разпознаването на изображения;
- универсалността на приложението на гаусовите функции;
- наличието на сходство в моделите самолетите.
- гладкост на формата;
- ясно изразен максимум;
- стойности, различни от нула за всички точки.

Гаусовите криви се подразделят на два вида в зависимост от тяхната форма: обикновена гаусова крива и двустранна комбинация от две различни гаусови криви.

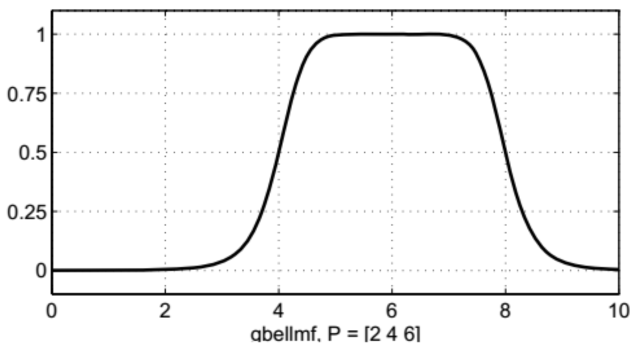
Подобна на тях е функцията на принадлежност от тип „камбана“, определена от три параметъра (фиг. 1.4.).



(а)



(б)



(в)

Фиг. 1.4. Графично описание на функции на принадлежност с гаусово разпределение – обикновена (а), двустранна (б) и тип „камбана“ (в).

Степента на принадлежност на даден обект към размитата структура от функции на принадлежност се определя от стойност на принадлежност в диапазона от нула до едно. По този начин функцията на принадлежност, асоциирана с даден размит набор от входни величини, позиционира изходната стойност в съответната за нея стойност на принадлежност.

1.5.1. Основни методи за вземане на решение с размита логика.

Разграничават се два основни типа методи за вземане на решение с размита логика.

Често използван метод за вземане на решение с размита логика е методът на Мамдани. Методът се базира на класическата постановка на Лотфи Заде. При Мамдани изходните функции за принадлежност се очаква да бъдат размити множества. След процес на обединяване на различните резултати е необходимо размито множество за всяка изходна променлива, което следва да се преобразува в число.

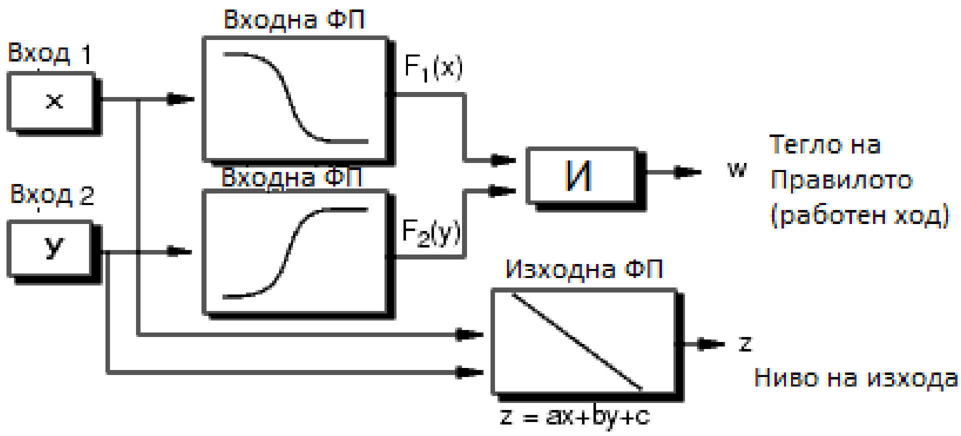
Метода за вземане на решения Сугено или Такаги-Сугено-Канг е в общи линии подобен на метода Мамдани. Общи за двата метода са размиването на входните величини и прилагането на размит оператор. Основната разлика между двата метода се състои в това, че при Сугено изходните функции на принадлежност са линейни или константни. Основно значение тук се дава на теглата на всяко правило, които могат значително да се изменят в зависимост от входните величини, както и да се адаптират с прилагането на невронна структура до получаването на Адаптивна Невро-Размита Инферентна Система (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System).

Крайният изход на системата е претеглена стойност, формирана от всички изходи на правилата (фиг. 1.5):

(1.2.)

$$\text{Краен изход} = \frac{\sum_{i=1}^{N} W_i Z_i}{\sum_{i=1}^{N} W_i}$$

Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.



Фиг. 1.5. Схема на вземане на решение от размита логика тип Сугено.

Възможните функции за преобразуване на крайния резултат в число могат да бъдат няколко типа:

- „Центроид“: при тази функция образуването на крайното числото на изхода става с намиране на центъра на баланс на плътностите на полученото изходно размито множество;

- „Бисектор“: крайното число се образува от стойността, при която размитото множество на изхода е разделено на две равни по площ половини;

- „Средна“, „най-малка“ и „най-голяма стойност при максимума“: Тези три функции претърсват кривата на функцията за принадлежност на изхода за конкретно положение на нейния максимум и заемат една и съща позиция, ако този максимум е с форма на уникален глобален екстремум.

Предвид факта че търсенето на максимално сходство с даден еталонен модел е характерно за всяка от изградените и обучени невронни мрежи, е избрана функцията за формиране на крайния резултат от типа „най-голяма стойност при максимума“.

Правила на размитата логика.

Характерни за размитата логика са правилата, структурирани да формулират условните конструкции, от които е съставена размитата логика.

Простото размито правило **ако…-то…** (if-then) от вида:

Ако x е A, то y е B , където A и B са лингвистични стойности, дефинирани от размити множества на диапазоните съответно X и Y. Частта от правилото „Ако…“ или „ x е A “ се нарича априорна или предварително условие (предпоставка), докато частта „ ,то …“ от правилото или „ y е B “ се нарича следствие или заключение. Въвеждането на правилата се извършва на три основни етапа:

- Размиване на входните величини: Поставяне на всички размити конструкции на входа в нива на принадлежност от 0 до 1. Ако на входа има само една величина, то това е теглото на правилото.

- Прилагане на размит оператор за множеството от предварителни условия: Ако са налице повече от едно предварителни условия, се прилагат размити оператори и се разрешава обобщената стойност в число от 0 до 1. Това е теглото на конкретното правило.

- Прилагане на метод за вземане на решение: Използва се теглото на всяко правило, за да се формира цялостният набор величини на изхода на системата. Това размито множество е представено с функция на принадлежност, избрана да покаже качествата на резултантната величина на изхода. На практика само едно правило не е ефективно за системата. Необходими са две и повече правила, които да се комбинират, като изхода от всяко правило е размито множество. Изходните размити множества за всяко правило се обобщават в едно единствено изходно размито множество. Резултантното множество следва да се преобразува от размита величина в еднозначно избрано конкретно число.

Проект BG05M2OP001-2.016-0003„Модернизация на Национален военен университет "В. Левски" - гр. Велико Търново и Софийски университет "Св. Климент Охридски" - гр. София, в професионално направление 5.3 Компютърна и комуникационна техника“, финансиран от Оперативна програма „Наука и образование за интелигентен растеж“, съфинансирана от Европейския съюз чрез Европейските структурни и инвестиционни фондове.