

Programowanie matematyczne

Laboratorium 5

Piotr Widomski, grupa D

06.01.2023

1 Postać ZPN

Rozwiązywane zadanie programowania nieliniowego ma następującą postać:

$$\min_{x \in \Omega} \|Ax - b\|_2^2$$
$$\Omega : \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq c, \ x \geq 0\}$$
$$x \in \mathbb{R}^n; \ b \in \mathbb{R}^m; \ A \in \mathbb{R}^{m \times n}; \ m = 2n; \ 0,1 < c \leq 1$$

Macierz A oraz wektor b składają się z wartości całkowitoliczbowych z zakresu $[-10, 10]$.

2 Zastosowane algorytmy

Do znalezienia referencyjnego rozwiązania problemu użyta została metoda **fmincon** rozwiązująca zadanie programowania nieliniowego przy użyciu algorytmu punktu wewnętrznego z tolerancją 10^{-8} . Wynik uzyskany z tej metody rozstał porównany z wynikiem otrzymanym z zaimplementowanej metody zewnętrznej funkcji kar z użyciem metody **fminsearch** oraz zaimplementowanego algorytmu Nelder-Meada.

2.1 Zewnętrzna funkcja kary

Metoda zewnętrznej funkcji kary rozwiązuje zadanie

$$\min_{x \in \Omega} f(x)$$
$$\Omega : \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \\ h_j(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

poprzez iteracyjne rozwiązywanie problemu pomocniczego minimalizacji funkcji

$$F_k(x, r_k) = f(x) + P_k(x, r_k)$$

gdzie $F_k(x, r_k) = r_k \left(\sum_j \phi(h_j(x)) + \sum_i \psi(g_i(x)) \right)$ nazywamy zewnętrzną funkcją kary z parametrem kary r_k będącym ciągiem rosnącym zbieżnym do nieskończoności. Przyjęta została funkcja $\psi(y) = \max(0, y)^2$. Rozwiązywany problem ma tylko ograniczenia nierównościowe, dlatego funkcja ϕ została pominięta.

W metodzie tej iteracyjnie wyszukujemy minimum zadanego problemu powiększonego o funkcję kary. Wartość funkcji kary dla zadanego argumentu rośnie w kolejnych iteracjach i przyjmuje wartości większe od 0 dla rozwiązań nie spełniających ograniczeń. Jeżeli minimum zadania leży na ograniczeniu, to w kolejnych iteracjach metoda znajduje rozwiązanie znajdujące się coraz bliżej RO problemu przysuwając się do ograniczenia od zewnątrz.

Zaimplementowany algorytm przebiega następująco:

1. x_0 - punkt startowy, $r_0 > 0$ - startowy parametr kary, $\omega > 1$ mnożnik parametru kary, $k = 0$.
2. Używając x_k jako punktu startowego znaleźć $x_{k+1} = \min_{x \in R^n} F_k(x, r_k)$.
3. Sprawdzić warunki stopu $P_k(x_{k+1}, r_k) < \epsilon$ lub $\|\nabla F_k(x_{k+1}, r_k)\| < \epsilon$.
4. $r_{k+1} = \omega$; $k = k + 1$. Powtórzyć krok 1.

2.2 Algorytm Neldera-Meada

Metoda Neldera-Meada znajduje minimum funkcji nieliniowej bez ograniczeń. W tym celu tworzony jest n wymiarowy sympleks oparty na $n+1$ punktach. W każdej iteracji punkt sympleksu o największej wartości modyfikowany jest w najbardziej obiecującym kierunku za pomocą operacji geometrycznych tworząc nowy sympleks. Kolejne sympleksy zbliżają się do lokalnego RO.

W każdym sympleksie wyróżniamy punkty o minimalnej i maksymalnej wartości p_{min} i p_{max} . Obliczając środek ciężkości sympleksu nie uwzględniamy punktu maksymalnego.

Zaimplementowany algorytm przebiega następująco:

1. p_0 - punkt startowy, $\alpha \in (0, 1]$ - współczynnik odbicia, $\beta > 1$ - współczynnik ekspansji, $\gamma \in (0, 1)$ - współczynnik kontrakcji, $\delta \in (0, 1)$ - współczynnik redukcji.
2. Obliczyć $p_i = p_0 + e_i$, gdzie e_i jest i -tym wektorem głównym R^n .
3. Wyznaczyć p_{min} , p_{max} .
4. Sprawdzić warunek stopu $\max(\|p_{min} - p_i\|_{max}) < \epsilon$.
5. Wyznaczyć środek ciężkości $\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i \neq max} p_i$
6. Wyznaczyć nowy punkt sympleksu za pomocą odbicia, ekspansji, kontrakcji lub redukcji. Powtórzyć krok 3.

2.3 Mnożniki Lagrange’a

Optymalność wyniku uzyskanego z metody zewnętrznej funkcji kary została sprawdzona za pomocą warunków Kuhna-Tuckera dla zadania ZPN. Warunki te są następujące:

1. $\nabla f(\bar{x}) + \sum_i \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$
2. $g_i(\bar{x}) \leq 0$
3. $\lambda_i \geq 0$
4. $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$

Warunki KT są warunkami koniecznymi optymalności \bar{x} . Dla zadanego ZPN ograniczenia oraz funkcja są wypukłe, zatem WKT są warunkami wystarczającymi. Funkcja f jest wypukła, ponieważ $\nabla^2 f(x) = 2 * A^T * A \geq 0$.

ZPN posiada łącznie $n + 1$ ograniczeń nierównościowych. Wykorzystując n równań z warunku 1. oraz równanie z warunku 4. otrzymujemy $n + 1$ równań na $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$. Rozwiązując układ $n + 1$ równań liniowych otrzymujemy mnożniki Lagrange’a odpowiadające otrzymanemu rozwiązaniu. Podstawiając otrzymane mnożniki do warunków 2. i 3. możemy sprawdzić optymalność rozwiązania. Jeżeli nie ma żadnych sprzeczności, to rozwiązanie jest RO.

3 Przykład obliczeniowy

Dla przykładowej instancji problemu o wartościach:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 1 & -9 \\ -5 & -2 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}^T$$
$$c = 0,2653$$
$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Rozwiązanie referencyjne znalezione przez metodę `fmincon` wynosi:

$$x = \begin{bmatrix} 0,4057 \cdot 10^{-9} & 0,3626 \end{bmatrix}^T$$

z mnożnikami Lagrange’a równymi:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0,1494 \cdot 10^{-6} & 49,2967 & 0,5515 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

Wartości λ_1 i λ_3 bliskie 0 i $\lambda_2 \gg 0$ wskazują, że RO znajduje się na ograniczeniu $x_1 \geq 0$, a pozostałe ograniczenia są spełnione z nierównością.

Rozwiązanie znalezione przez metodę zewnętrznej funkcji kary z użyciem metody `fminsearch` wynosi:

$$x = \begin{bmatrix} -0,161\,6 \cdot 10^{-9} & 0,362\,6 \end{bmatrix}^T$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0,175\,3 \cdot 10^{-5} & 49,296\,7 & 0,669 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Znalezione rozwiązanie spełnia wszystkie ograniczenia oprócz drugiego $x_0 \geq 0$, co można odczytać z wyniku. Jest to jednak poniżej dokładności $\epsilon = 10^{-8}$, a błąd rozwiązania wynosi $5,456\,9 \cdot 10^{-9}$, zatem znalezione rozwiązanie jest w granicy błędu. Z wartości mnożników Lagrange’a można odczytać, że znalezione rozwiązanie nie jest dokładnym RO, gdyż $\lambda_1 < 0$.

Rozwiązanie znalezione przez metodę zewnętrznej funkcji kary z użyciem metody Nelder-Meada wynosi:

$$x = \begin{bmatrix} 0,437\,141\,2 \cdot 10^{-8} & 0,362\,5 \end{bmatrix}^T$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0,05 & 49,3 & -0,018\,4 \end{bmatrix}$$

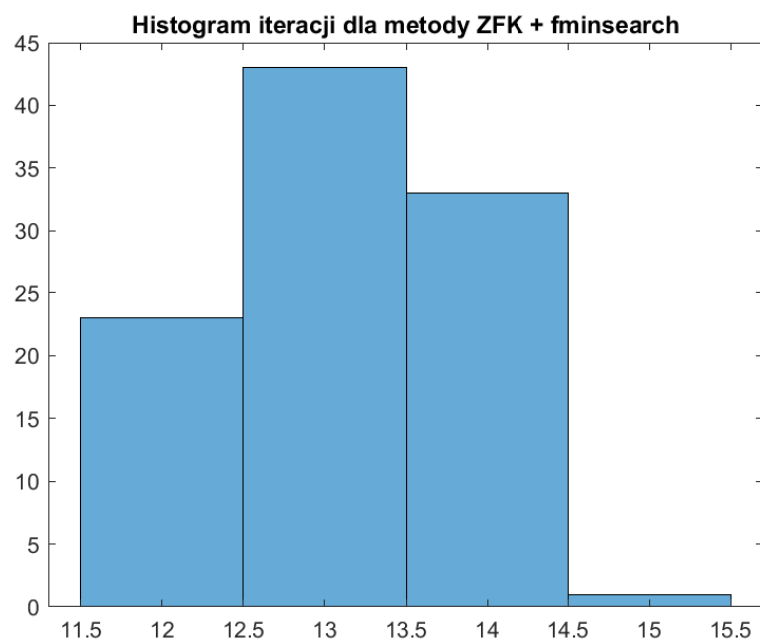
Znalezione rozwiązanie spełnia wszystkie ograniczenia. Z wartości mnożników Lagrange’a można odczytać, że znalezione rozwiązanie nie jest dokładnym RO, gdyż $\lambda_3 < 0$. Błąd rozwiązania wynosi $1,503\,6 \cdot 10^{-4}$. W przypadku mnożników Lagrange’a ciężko jest stwierdzić, jak duża wartość ujemna mnożnika może być uznana za znajdującą się w granicy błędu. W przypadku obu wariantów metody ZFK użycie wartości ϵ takiej samej jak dla reszty zadania będzie skutkować informacją o nie osiągnięciu RO.

4 Analiza wyników

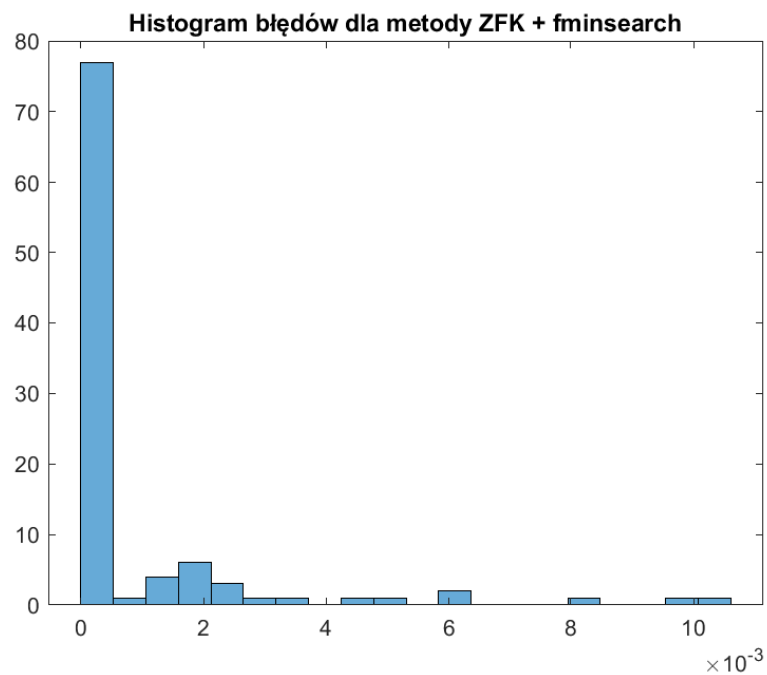
W celu sprawdzenia poprawności wyników zaimplementowanych algorytmów przeprowadzone zostały testy dla $N = 100$ instancji problemu o rozmiarze $n = 10$. Dla każdej instancji zapisana została ilość wykonanych iteracji oraz norma różnicy otrzymanego rozwiązania oraz rozwiązania otrzymanego metodą `fmincon`.

4.1 ZFK + `fminsearch`

Średnia ilość iteracji wyniosła 13,12, a średni błąd - $8,090\,8 \cdot 10^{-4}$. Metoda `fmincon` wykonała średnio 24,58 iteracji, jednak iteracje metody ZFK nie uwzględniają ilości iteracji metody użytej do rozwiązywania zadań pomocniczych.



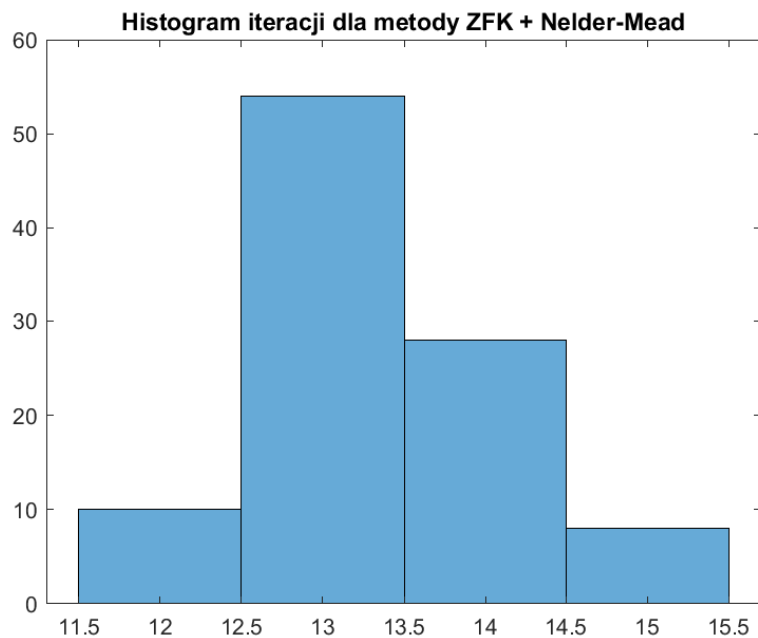
Rysunek 1: Histogram ilości iteracji dla algorytmu ZFK z użyciem `fminsearch`.



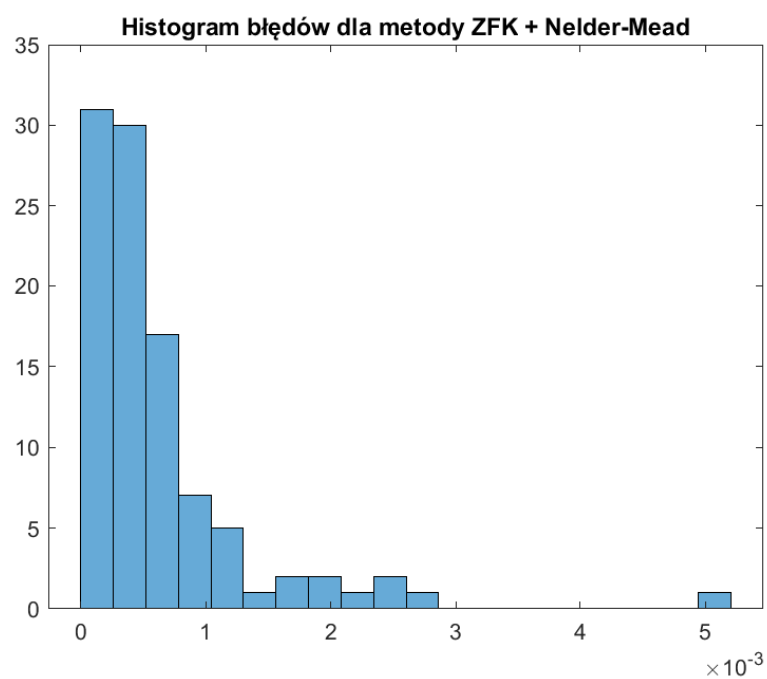
Rysunek 2: Histogram błędów dla algorytmu ZFK z użyciem `fminsearch`.

4.2 ZFK + Nelder-Mead

Średnia ilość iteracji wyniosła 13,34, a średni błąd - $6,0669 \cdot 10^{-4}$. Rozkład liczby iteracji jest porównywalny z tym uzyskanym przez zastosowanie metody `fminsearch`, jednak zaimplementowana metoda Neldera-Meada ma dużo większy rozkład błędu.



Rysunek 3: Histogram ilości iteracji dla algorytmu ZFK z użyciem metody Neldera-Meada.



Rysunek 4: Histogram błędów dla algorytmu ZFK z użyciem metody Nelder-Meada.

5 Oświadczenie

Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do uzyskania osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu “Programowanie Matematyczne” została wykonana przeze mnie samodzielnie.

Piotr Widomski
298919