

Programowanie matematyczne

Laboratorium 7

Piotr Widomski, grupa D

19.01.2023

1 Postać ZPL

Rozwiązywany problem jest następujący: mając dwa czworościany P, Q w przestrzeni \mathbb{R}^3 zdefiniowane przez wierzchołki $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3, i = 1 \dots 4$, należy sprawdzić, czy czworościany posiadają część wspólną.

Czworościany P, Q (z wnętrzem) definiujemy jako:

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{p}_i \lambda_i, \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1, \forall i \lambda_i \geq 0\}$$
$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{q}_i \lambda_i, \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1, \forall i \lambda_i \geq 0\}$$

Jeżeli problem ma rozwiązanie, to będzie nim dowolny punkt \mathbf{x} należący jednocześnie do P i Q . Z definicji P i Q otrzymujemy następujące ograniczenia:

$$\Omega : \begin{cases} \mathbf{p}_1 \lambda_1 + \mathbf{p}_2 \lambda_2 + \mathbf{p}_3 \lambda_3 + \mathbf{p}_4 \lambda_4 = \mathbf{q}_1 \lambda_5 + \mathbf{q}_2 \lambda_6 + \mathbf{q}_3 \lambda_7 + \mathbf{q}_4 \lambda_8 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8 \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie programowania liniowego w postaci standardowej rozwiązujące przedstawiony problem wygląda następująco:

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} x_1 + 2x_3 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8$$
$$\Omega : \begin{cases} p_{1,1}x_1 + p_{2,1}x_2 + p_{3,1}x_3 + p_{4,1}x_4 - q_{1,1}x_5 - q_{2,1}x_6 - q_{3,1}x_7 - q_{4,1}x_8 = 0 \\ p_{1,2}x_1 + p_{2,2}x_2 + p_{3,2}x_3 + p_{4,2}x_4 - q_{1,2}x_5 - q_{2,2}x_6 - q_{3,2}x_7 - q_{4,2}x_8 = 0 \\ p_{1,3}x_1 + p_{2,3}x_2 + p_{3,3}x_3 + p_{4,3}x_4 - q_{1,3}x_5 - q_{2,3}x_6 - q_{3,3}x_7 - q_{4,3}x_8 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{cases}$$

Niezerowa funkcja celu nie jest konieczna, lecz ułatwia porównywanie wyników zaimplementowanej metody z wynikami funkcji bibliotecznych. Zastosowanie pustej funkcji celu mogłoby doprowadzić do wykrycia różnych punktów przecięcia czworoboków przez różne metody.

Zadania prymalne (ZP) będzie dalej rozważane w następującej postaci:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in \Omega} c^T x \\ \Omega : & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \\ & c, x \in R^8 \quad b \in R^5 \quad A \in R^{5 \times 8} \end{aligned}$$

Funkcja Lagrange'a ZPL wynosi:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = c^T x + \lambda_1^T (Ax - b) - \lambda_2^T x$$

gdzie λ_1 oznacza mnożniki Lagrange'a odpowiadające ograniczeniu $Ax = b$, a λ_2 ograniczeniu $x \geq 0$. ZP ma postać $\max_x \min_{\lambda_1, \lambda_2} L(x, \lambda_1, \lambda_2)$. Zadanie dualne ZD będzie miało postać $\min_{\lambda_1, \lambda_2} \max_x L(x, \lambda_1, \lambda_2)$. Maksimum po x będzie osiągnięte w miejscu odpowiadającym $\nabla_x L(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0$. Podstawiając to do ZD otrzymujemy postać:

$$\begin{aligned} & \min_{y \in \Omega} b^T y \\ \Omega : & \begin{cases} A^T y \geq c \\ y \in R^5 \end{cases} \\ & c \in R^8 \quad b, y \in R^5 \quad A \in R^{5 \times 8} \end{aligned}$$

Rozwiązanie ZD odpowiada mnożnikom Lagrange'a dla RO ZP.

2 Zastosowany algorytm

2.1 Algorytm punktu wewnętrznego

Dla zadania postaci:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in \Omega} c^T x \\ \Omega : & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \\ & c, x \in R^8 \quad b \in R^5 \quad A \in R^{5 \times 8} \end{aligned}$$

Algorytm punktu wewnętrznego definiuje zadanie barierowe, które będzie rozwiązywane:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in \Omega} c^T x + r_k \sum_j \ln(x_j) \\ \Omega : & \begin{cases} Ax = b \end{cases} \\ & c, x \in R^8 \quad b \in R^5 \quad A \in R^{5 \times 8}, r_k > 0, x > 0 \end{aligned}$$

Parametr r_k musi zbiegać do 0 wraz ze wzrostem k . Będzie to gwarantować zbieżność rozwiązania ZB do ZPL.

Funkcja Lagrange'a zadania barierowego wynosi

$$L(x, y) = c^T x + r_k \sum_j \ln(x_j) + y^T (b - Ax)$$

Warunku KT dla funkcji Lagrange'a prowadzą do następujących równań (*):

$$\begin{cases} Ax = b \\ A^T y - z = c \\ z = r_k X^{-1} e \end{cases}$$

$X = \text{diag}(x)$, e - pionowy wektor jedynek. Z warunków zadania $x > 0$, co implikuje $z > 0$. y jest nie ograniczone, gdyż reprezentuje mnożniki Lagrange'a odpowiadające ograniczeniom równościowym.

Przy użyciu algorytmu punktu wewnętrznego wynik otrzymywany jest w następujących krokach:

0. Punkt startowy $t_0 = (x_0, y_0, z_0)$. W implementacji użyty został wektor jedynek o odpowiednim rozmiarze; $k = 0$; $\delta = 0.1$.
1. Sprawdzenie warunków stopu. Jeżeli spełnione to t_k jest RO. Wpp wykonaj krok 2.
2. Obliczyć wartość parametru $r_k = \delta * z^T x / n$ i uaktualnić wartość parametru $\delta = 0, 2\delta$.
3. Wyznaczenie kierunku poprawy $d_k = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.
4. Wyznaczenie długości kroku α_p, α_d .
5. Obliczenie nowego punktu $t_{k+1} = (x_k + \alpha_p \Delta x, y_k + \alpha_d \Delta y, z_k + \alpha_d \Delta z)$; $k = k + 1$; wykonaj krok 1.

2.2 Warunki stopu

- $\|x\|_{max} > M$ - prymalne zadanie nieograniczone.
- $\|y\|_{max} > M$ - dualne zadanie nieograniczone.
- $\|b - Ax\| < \epsilon$ (spełnienie ograniczeń ZP),
 $\|c - A^T y + z\| < \epsilon$ (spełnienie ograniczeń ZD),
 $z^T x < \epsilon$ (spełnienie warunku komplementarności) - rozwiązanie jest RO.

M - parametr dużo większy od 0.

2.3 Kierunek poprawy

Kierunek poprawy obliczany jest z podstawienia $x = x + \Delta x$, $x = x + \Delta x$, $x = x + \Delta x$ do układu równań (*). Po uproszczeniu otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & X^{-1}Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - Ax - r_k Y^{-1}e \\ c - A^T y + r_k X^{-1}e \end{bmatrix} \\ \Delta z = X^{-1}(r_k e - XZe - Z\Delta x) \end{cases}$$

2.4 Długość kroku

Długość kroku wyznaczana jest w taki sposób, aby nie naruszyć ograniczeń

$$x_k + 1 = x_k + \alpha_p \Delta x > 0, z_k + 1 = z_k + \alpha_d \Delta z > 0$$

Wynika z tego, że α_p musi być nie większa niż $\frac{x_i}{\Delta x_i}$ dla $\Delta x_i < 0$ (i odpowiednio dla α_d). Ostateczny wzór na długość kroku wynosi:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \min\{1; -\beta \frac{x_i}{\Delta x_i}, \Delta x_i < 0, i = 1, \dots, n\} \\ \alpha_d &= \min\{1; -\beta \frac{z_i}{\Delta z_i}, \Delta z_i < 0, i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

2.5 Sprawdzenie WKT

Wynik otrzymany z algorytmu jest sprawdzany pod kątem spełnienia WKT. Spełnione są następujące warunki:

- $\|c - A^T y + z\| < \epsilon$ - zerowanie gradientu funkcji Lagrange'a,
- $x \geq -\epsilon$ - spełnienie ograniczeń nierównościowych,
- $\|b - Ax\| < \epsilon$ - spełnienie ograniczeń równościowych,
- $z \geq -\epsilon$ - mnożniki Lagrange'a odpowiadające ograniczeniom nierównościowym nieujemne,
- $|x' * z| < \epsilon$ - spełnienie warunku komplementarności.

3 Przykłady obliczeniowe

Dla następujących wierzchołków czworościanów:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

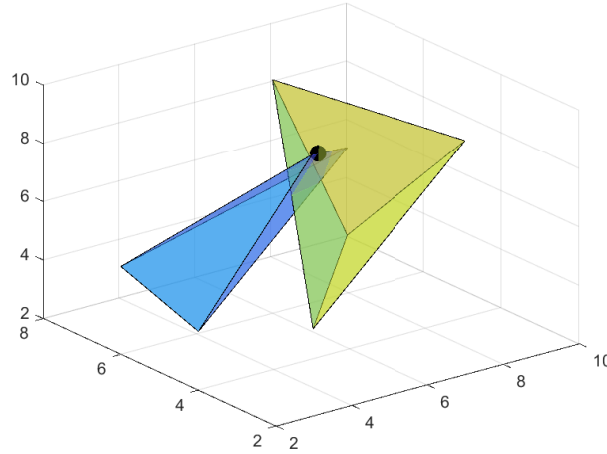
Wszystkie kolejne obliczenia wykonane zostały z dokładnością 10^{-8} oraz maksymalną ilością iteracji 1000.

Rozwiązanie znalezione przez funkcję `linprog` wynosi

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0,17 & 0,83 & 0 & 0 & 0,252 & 0,565 & 0,184 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0,429 & 0,143 & -0,095 & 5,429 & 4,334 \end{bmatrix}$$

z wartością funkcji $f(x) = 9,762$. Odpowiada to punktowi $p = [5,7; 4,5; 8,5]$.



Rysunek 1: Punkt wspólny czworościanów wyznaczony funkcją `linprog`.

Rozwiązanie wyżej zdefiniowanego zadania dualnego do naszego problemu primalnego znalezione przez funkcję `linprog` wynosi

$$y = \begin{bmatrix} -0,429 & 0,143 & -0,095 & 5,429 & 4,334 \end{bmatrix}$$

z wartością funkcji $f(x) = 9,762$. Wartość funkcji dla ZP i ZD jest zgodna. Mnożniki Lagrange'a z ZP odpowiadają rozwiązaniu ZD.

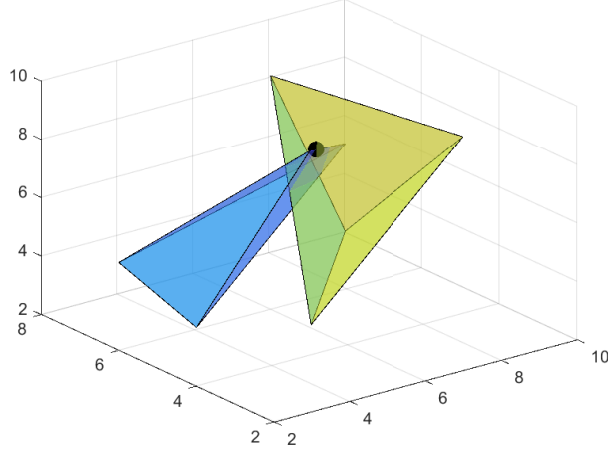
Wynik dla zaimplementowanego algorytmu punktu wewnętrznego otrzymywany jest przez zastosowanie wyżej opisanych kroków. Jako wartość parametru M przyjęto 1000. Wynik wyniósł:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0,17 & 0,83 & 0 & 0 & 0,252 & 0,565 & 0,184 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0,429 & 0,143 & -0,095 & 5,429 & 4,334 \end{bmatrix}$$

z wartością funkcji $f(x) = 9,762$.

Wyniki dla IPM są zgodne z wynikami otrzymanymi z funkcji `linprog`. Normy różnicy rozwiązania i różnicy mnożników Lagrange'a wynosi odpowiednio $2,07 \cdot 10^{-11}$ i $2,2 \cdot 10^{-9}$.



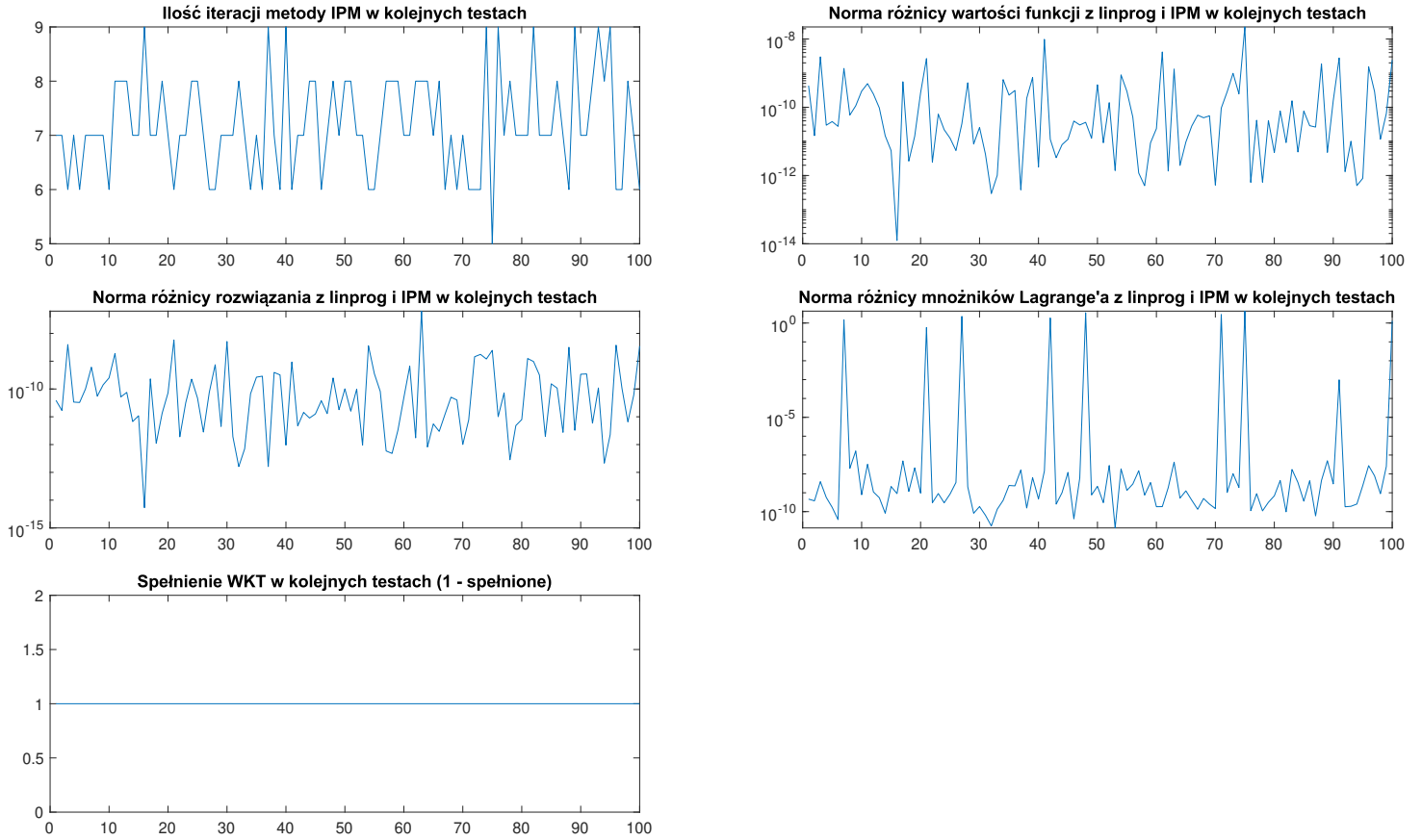
Rysunek 2: Punkt wspólny czworościanów wyznaczony własną implementacją algorytmu punktu wewnętrznego.

4 Analiza wyników

W celu sprawdzenia poprawności wyników zaimplementowanego algorytmu przeprowadzony zostały dwa testy dla $N = 100$ instancji problemu.

4.1 Test kolizji

Wylosowane zostało $N = 100$ instancji problemu, dla których algorytm `linprog` wykrył kolizję. Wyniki otrzymane z `linprog` porównane zostały z tymi otrzymanymi przez zaimplementowany algorytm punktu wewnętrznego. Na wykresach przedstawione zostały liczba iteracji, normy różnicy wartości funkcji, rozwiązania i mnożników Lagrange’a obliczonych przez oba algorytmy oraz spełnienie WKT przez rozwiązanie znalezione metodą punktu wewnętrznego.

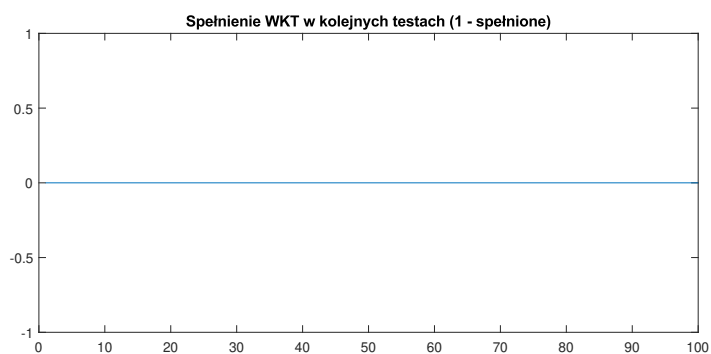
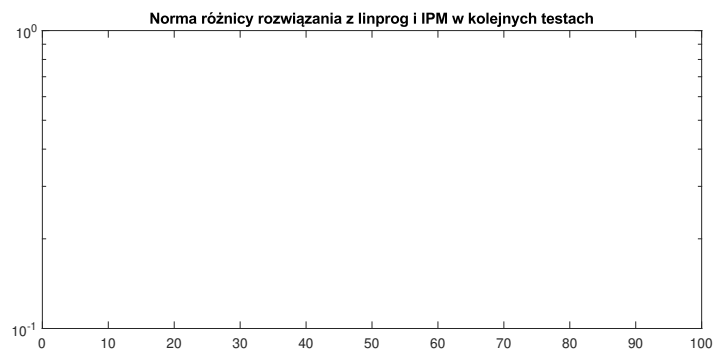
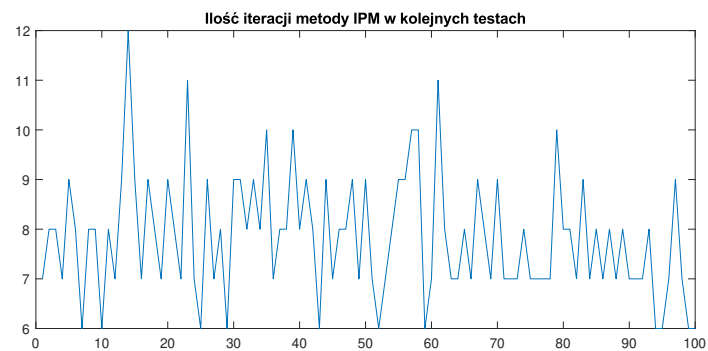


Rysunek 3: Wykresy wyników metody punktu środkowego w porównaniu z metodą `linprog` dla kolizji.

Dla wszystkich przypadków testowych otrzymany wynik zgadzał się z wynikiem funkcji `linprog`. Norma różnicy wartości funkcji i rozwiązania mieści się w granicy dokładności $1 \cdot 10^{-8}$. Dla większości instancji mnożniki Lagrange'a są zgodne, jednak istnieją przypadki, gdzie norma różnicy była rzędu jedności.

4.2 Test braku kolizji

Wysolowane zostało $N = 100$ instancji problemu, dla których algorytm `linprog` nie wykrył kolizję. Wyniki otrzymane z `linprog` porównane zostały z tymi otrzymanymi przez zaimplementowany algorytm punktu środkowego. Na wykresach przedstawione zostały liczba iteracji, normy różnicy rozwiązania oraz spełnienie WKT przez rozwiązanie znalezione metodą punktu wewnętrznego.



Rysunek 4: Wykresy wyników metody punktu środkowego w porównaniu z metodą `linprog` dla braku kolizji.

Dla wszystkich przypadków testowych otrzymany wynik zgadzał się z wynikiem funkcji `linprog`. Jako iż każdy z problemów nie ma rozwiązania, to brak rozwiązania jest jednoznaczny z niespełnieniem WKT.

5 Oświadczenie

Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do uzyskania osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu “Programowanie Matematyczne” została wykonana przeze mnie samodzielnie.

Piotr Widomski
298919