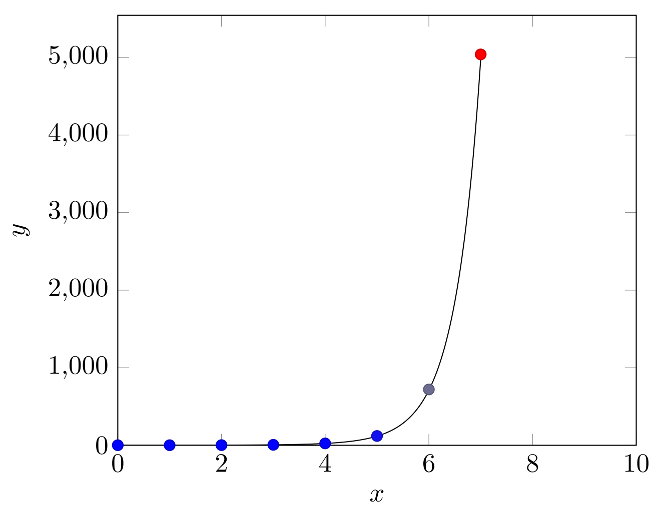
0.1 Асимптотика

Часто случается, что нужно вычислить определенную величину. Однако её вычисление потребует чрезвычайно большое число дорогостоющих действий, что может привести к невозможности узнать нужную величину. В таких случаях может понадобиться какой-то иной метод, позволяющий найти хотя бы достойное приближение. В подобном случае мы можем говорить об асимптотическом приближении. Типичной асимптотической формулой является формула Стирлинга:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}} = 1$$

Факториал и его приближение



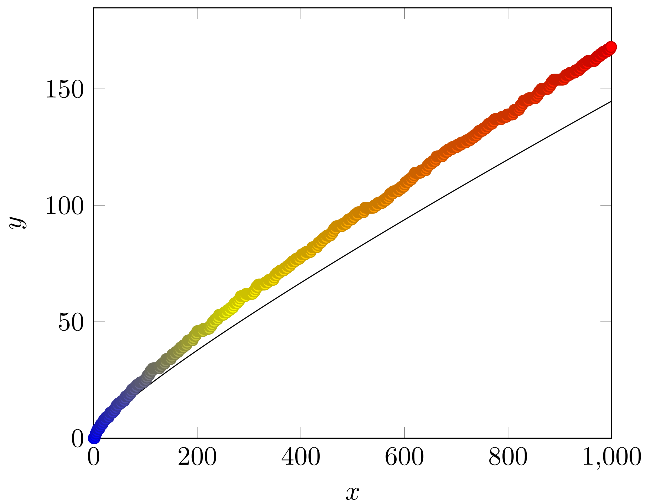
Формула Стирлинга даёт удобное приближение, и чем больше n, тем меньше относительная погрешность:

$\delta = 100\% * \dfrac{f(x) - A}{A}$, где A-истинная виличина в точке x, $f(x)$-вычисленное значение

Существует одна знаменитая асимптотическая формула, намного глубокая чем предыдущая. Для $\forall x > 0$ обозначим через $\pi(x)$ число простых чисел, не превосходящих x. Существует оценка, что:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

Функция простых чисел и её приближение



Приведённые выше формулы не помогут нам в вычислительных целях. Чтобы полнее исследовать это явление, перепишем формулу для факториала в виде $\lim_{n\to\infty} f(n) = 1$. Эта формула говорит нам только о существовании фукнции $N(\varepsilon)$ со следующим свойством:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(n) - 1| < \varepsilon$$

Знание фукнции $N(\varepsilon)$ на самом деле даёт некоторую численную информацию. Однако, используя обозначение $f(n) \to 1$, мы отбрасываем информацию о существовании конкретного вида такой функции на утверждения, что такая фукнция существует.

0.2 Большая O

Если S-какое-либо множество, а f и φ-действительные или комплексные функции, определённые на S, то формула

$$f(s) = O(\varphi(s)), s \in \mathcal{S}$$

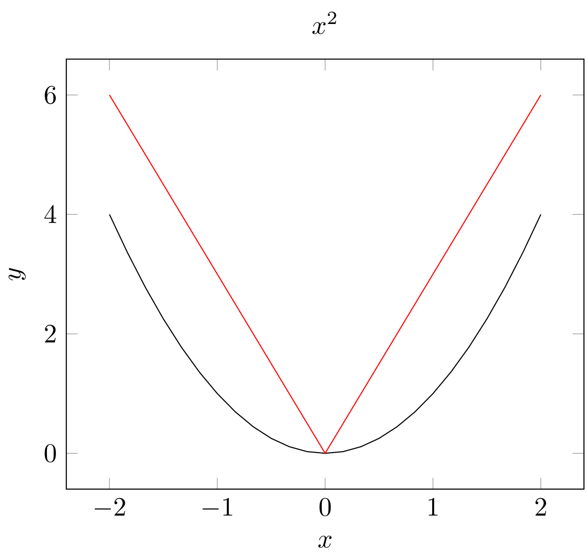
означает, что

$$\exists A = const > 0 : |f(s)| \leq A|\varphi(s)|, s \in \mathcal{S}$$

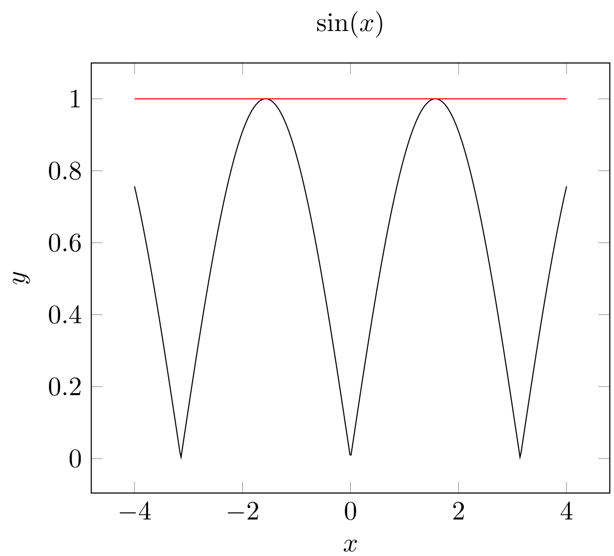
если, в частности, $\varphi(s) \neq 0, \forall s \in \mathcal{S}$, то из определения большого O очевидно, что

$$\frac{f(s)}{\varphi(s)} \text{ ограничено на } \mathcal{S}$$

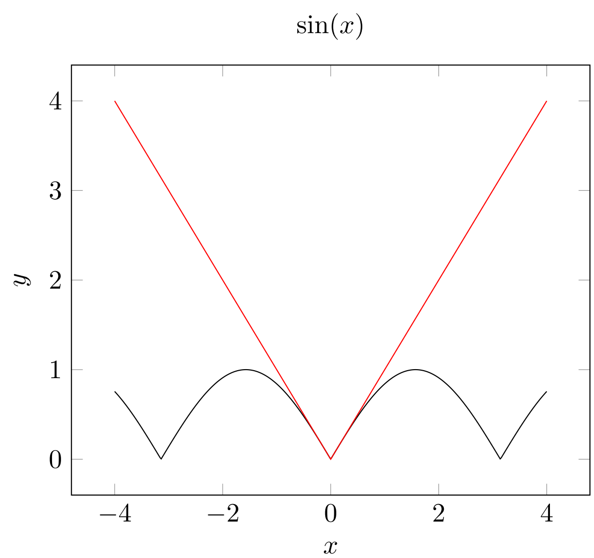
Несколько примеров: 1. $x^2 = O(x)$ $(|x| < 2)$



2. $\sin(x) = O(1)$ $(-\infty < x < \infty)$



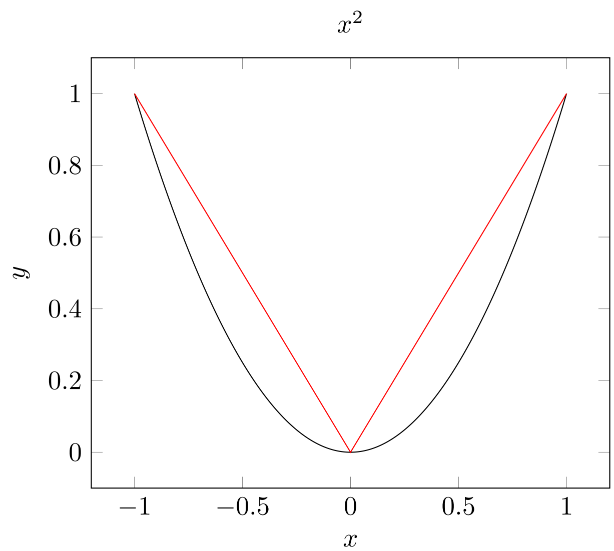
3. $\sin(x) = O(x)$ $(-\infty < x < \infty)$



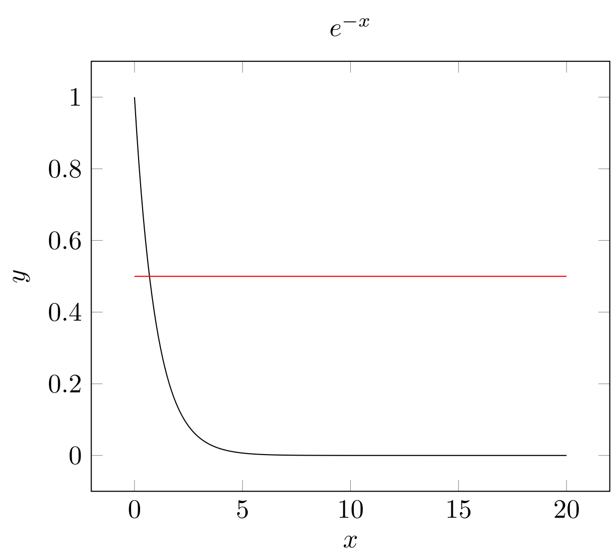
Иногда свойство выполняется на некотором интервале, тогда, чтобы избавиться от этих мелких неприятностей, пользуются видоизменением обозначения O. Объясним это значени для случая, когда нас интересуют большие положительные значения x $(x \to \infty)$. Именно, мы будем писать $f(x) = O(\varphi(x))$ $(x \to \infty)$ Если $\exists a : f(x) = O(\varphi(x))$ $(a < x < \infty)$ Другими словами:

$$\exists A > 0 \exists a > 0 : |f(x)| \leq A|\varphi(x)| \text{при } a < x < \infty$$

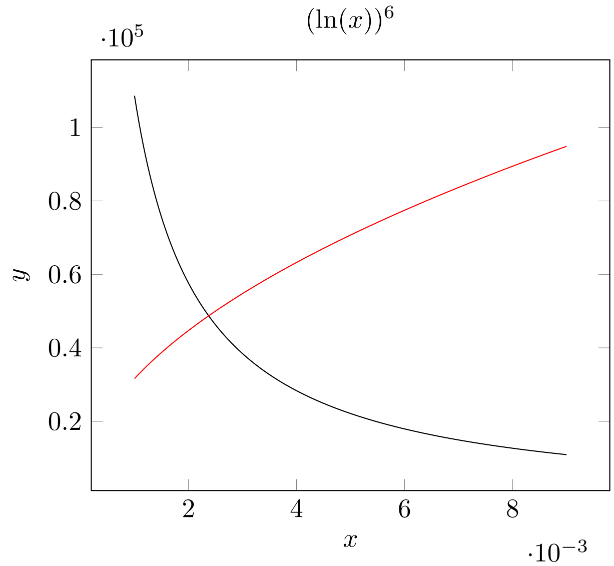
Примеры: 1. $x^2 = O(x)$ $(x \to 0)$;



2. $e^{-x} = O(1)$ $(x \to \infty)$;



3. $\ln(x)^6 = O(\sqrt[2]{x})$ $(x \to \infty)$;



Рассмотрим несколько примеров применения символа O:

$$O(x) + O(x^2) = O(x) \quad (x \to 0)$$

$$O(x) + O(x^3) = O(x^3) \quad (x \to \infty)$$

$$e^{O(1)} = O(1) \quad (-\infty < x < \infty)$$

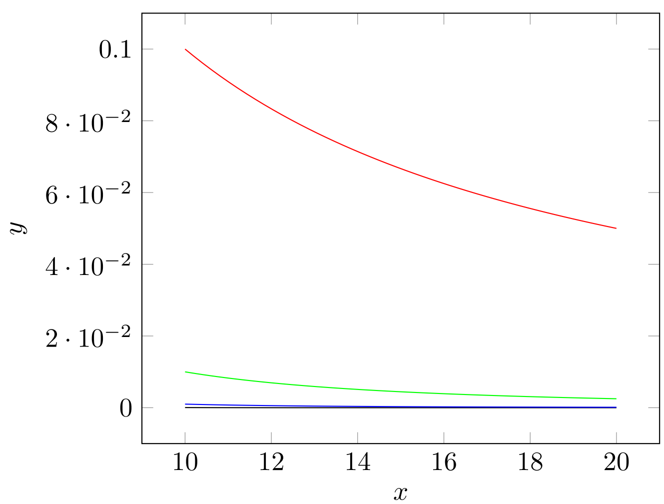
$$e^{O(x)} = e^{O(x^2)} \quad (x \to \infty)$$

$$\frac{1}{x}O(1) = O(1) + O(\frac{1}{x^2}) \quad (0 < x < \infty)$$

Последняя запись показывает, что если для фукнции $f(x)$ справедливо $f(x) = O(1)(0 < x < \infty)$, то фукнцию $\frac{f(x)}{x}$ можно разбить на сумму двух слагаемых $g(x)$ и $h(x)$ таких, что $g(x) = O(1)$,$h(x) = O(\frac{1}{x^2})$.
Доказать это можно просто:
положим $g(x) = 0 \quad$ при $0 < x \leq 1$, $g(x) = x^{-1}f(x) \quad$ при $x > 1$
положим $h(x) = x^{-1}f(x) \quad$ при $0 < x \leq 1$, $h(x) = 0 \quad$ при $x > 1$
Можно дать следующее толкование формул: любое выражение, содержащее символ O, следует рассматривать как класс фукнций. Например, на отрезке $0 < x < \infty$ сумма $O(1) + O(x^{-2})$ означает класс всех фукнций вида $f(x) + g(x)$, где $f(x) = O(1)(0 < x < \infty)$, $g(x) = O(x^{-2})(0 < x < \infty)$. Иногда в левой части может стоять отдельная фукнция. это означает, что она, стоящяя в левой части, входит в класс, стоящий в правой части.
Знак равенства не совсем подходит для такого рода отношение, так как, например, соотношение
$O(x) = O(x^2)(x \to \infty)$
справедливо, а соотношение
$O(x^2) = O(x)(x \to \infty)$ не справедливо.

Пусть φ и ψ-функции такие, что $\varphi(x) = O(\psi(x))(x \to \infty)$ выполняется и обратное неверно.
Если третья функция f удовлетворяет условию $f(x) = O(\varphi(x))(x \to \infty)$, то она удовлетворяет условия $f(x) = O(\psi(x))(x \to \infty)$
Если справедливо отношение $\varphi(x) = O(\psi(x))(x \to \infty)$, то мы назовём его уточнением соотношения $f(x) = O(\varphi(x))(x \to \infty)$
Соотношение
$\varphi(x) = O(\psi(x))(x \to \infty)$ назовём наилучшим возможным, если оно не может быть уточнено, т.е. если
$\exists A \geq a > 0 : a|\varphi(x)| \leq |f(x)| \leq A|\varphi(x)| \forall x$ достаточно больших
Например, соотношение
$2x + x\sin(x) = O(x) \quad (x \to \infty)$ является наилучшим возможным, так как
$x \leq 2x + x\sin(x) \leq 3x$
Также наилучшим соотноешнием является
$\ln(e^{2x\cos(x)} + e^x) = O(x) \quad (x \to \infty)$,
т.к. $\ln(e2x\cos(x) + e^x) \geq \ln(e^x) = x$ и $\ln(e2x\cos(x) + e^x) \leq \ln(e2x + e^x) \leq \ln(2e^{2x}) = 2x + \ln 2$
Пусть $m \in \mathbb{Z}$, то можно привести оценку $e^{-x} = O(x^{-m})(x \to \infty)$

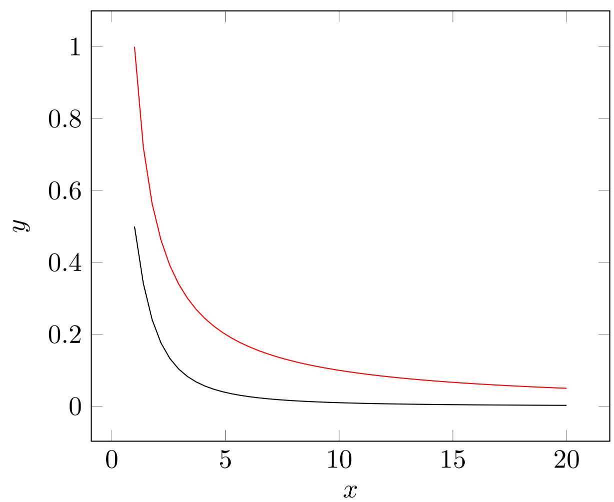
При m = 1,2,3



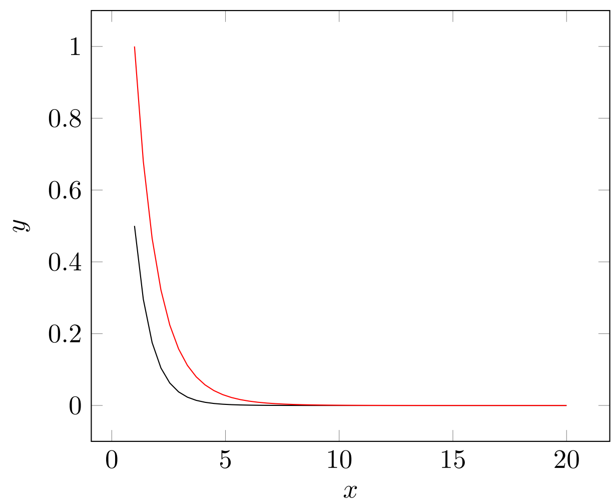
Однако ни одна из оценок не будет наилучшей возможной, т.к. всегда возможно улучшение
$e^{-x} = O(x^{-m-1})(x \to \infty)$
Разберёмся с вопросом равномерности:
Пусть S-множество значений x, k-положительное число, $f(x)$ и $g(x)$-произвольные.Тогда
$(f(x) + g(x))^k = O((f(x))^k) + O((g(x))^k)$
В самом деле,
$|f + g|^k \leq (|f| + |g|)^k \leq (2\max(|f|, |g|))^k \leq 2^k \max(|f|^k, |g|^k) \leq 2^k(|f|^k + |g|^k)$
Итого получаем, что $\exists A > 0 B > 0 : |f(x) + g(x)|^k \leq A|f(x)|^k + B|g(x)|^k$,

причём мы не знаем существуют ли A и B, не зависящие от k.
С другой стороны, в соотношении
$(\frac{k}{x^2+k^2})^k = O(x^{-k}) \quad (1 < x < \infty)$
Причём постоянная A может быть выбрана не зависящей от $k (0 < k < \infty)$, т.к.
$(\frac{k}{x^2+k^2})^k \leq \frac{1}{(2x)^k}$
$\forall k > 0 \Rightarrow 2^{-k} < 1$, следовательно, можно выбрать число A, не зависящее от k, так, чтобы
$(\frac{k}{x^2+k^2})^k \leq \frac{A}{x^k} \quad (1 < x < \infty, k > 0)$

k=1, A=1



k=sqrt(x), A=1



Этот факт можно выразить, сказав, что оценка равномерна по k.
Равномерность оценки важна в ситуации, когда мы хотим получить O-оценку для какой-нибудь фукнции, например
Пусть $f(x)$-фукнция, для который мы хотим получить оценку, и мы имеем для $f(x)$ некоторое выражение, которое мы разбиваем на два слагаемых, т.е.
$f(x) = O(x^2 t) + O(x^4 t^{-2}) \quad (x > 1, t > 1)$, где t-параметр, от которого зависит разбиение
Далее мы хотим выбрать t таким образом, чтобы правая часть стала наименьше возможной. Поскольку оценка равномерна, можно считать t равным некоторой фукнции от x.
Это приводит к задаче: найти минимум $x^2 t + x^4 t^{-2}$ при данном x
Решив эту задачу, получаем, что минимум достигается при $t = (2x^2)^{\frac{1}{3}}$, причём при таком t оба слагаемые имеют один и тот же порядок.
Итого получаем, что $f(x) = O(x^{\frac{8}{3}})(x > 1)$
В O-оценках, содержащих условия вида $x \to \infty$, имеются две постоянные A и a. Мы будем говорить, что такая оценка равномерна по k лишь в том случае, когда обе постоянные A и a могут быть выбраны независимо от k.
Пример:
$\frac{k^2}{1+kx^2} = O(\frac{1}{x}) \quad (x \to \infty)$
Эта оценка не является равномерной по, т.к. иначе $\exists A > 0 \exists a > 0$ не зависящие от k такие, что $\frac{k^2}{1+kx^2} < \frac{A}{x} \quad (x > a, k > 0)$
Однако тогда, положив $k = x^2$, мы получили бы, что $A(1 + x^4) > x^5$ при любом $x > a$, что невозможно.

0.3 Малая o

Формула $f(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \to \infty)$ означает, что отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ стремится к нулю при $x \to \infty$.

Это более сильная оценка, чем O-оценка. В асимптотических оценках символы o имеют меньшее значение, чем O, поскольку они несут в себе меньше информации. Если какая-либо величина стремится к нулю, мы хотим знать, с какой скоростью это происходит.

0.4 Асимптотическое равенство

Мы будем говорить, что $f(x)$ и $g(x)$ асимптотически равны при $x \to \infty$, если отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ стремится к единице. Записывать этот факт мы будем формулой $f(x) \sim g(x)$

Это обозначение будет также использоваться и при любом другом способе стремления переменной к пределу.

Примеры:

1. $x+1 \sim x \quad (x \to \infty)$
2. $sh(x) \sim \frac{1}{2}e^x \quad (x \to \infty)$
3. $n! \sim (\frac{n}{e})^{-n}\sqrt{2n\pi} \quad (n \to \infty)$

Говоря об "асимптотическим поведением"данной фукнции $f(x)$, можно иметь в виду асимптотическую информацию любого рода. Однако обычно подразумевают "простую"фукнцию $g(x)$ асимптотически равную $f(x)$. Здесь "простая"означает, что способ точного вычисления её значений не становится исключительно сложен, когда x очень велико.

Слова "асимптотическая формула для $f(x)$"обычно употребляются в том же узком смысле, т.е. в них речь идёт о формуле $f(x) \sim g(x)$.

0.5 Асимптотические ряды

Часто бывает так, что для фукнции $f(x)$ при $x \to \infty$ и меется бесконечная последовательность O-оценок, причём каждая следующая оценка как бы усовершенствует предыдущую. Особенно часто встречается последовательность такого вида: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, удовлетворяющих условиям
$\varphi_1(x) = o(\varphi_0(x))(x \to \infty), \varphi_2(x) = o(\varphi_1(x))(x \to \infty), \dots$
и последовательность постоянных $c_0, c_1, c_2, \dots$ таких, что для $f(x)$ имеет место последовательность O-оценок:

$$\begin{cases} f(x) = O(\varphi_0(x)) \quad (x \to \infty) \\ f(x) = c_0\varphi_0(x) + O(\varphi_1(x)) \quad (x \to \infty) \\ f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + O(\varphi_2(x)) \quad (x \to \infty) \\ \dots \\ f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + O(\varphi_n(x)) \quad (x \to \infty) \\ \dots \end{cases}$$

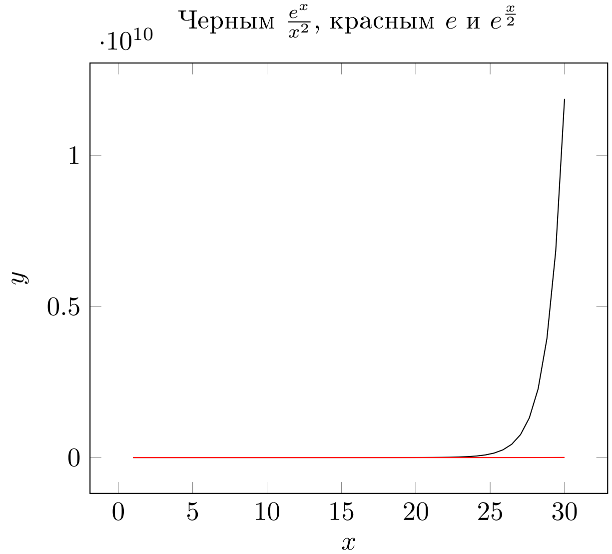
Очевидно, что вторая формула усовершенствует первую, поскольку $c_0\varphi_0(x)+$ $O(\varphi_1(x)) = (c_0 + o(1))\varphi_0(x) = O(\varphi_0(x))(x \to \infty)$, аналогично и для других
Чтобы записать все множество формула одной формулой, воспользуемся следующим обозначением:
$f(x) \approx c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots \quad (x \to \infty)$
Правую часть этого выражения мы назовём асимптотическим рядом для $f(x)$, или асимптотическим разложением фукнции $f(x)$.
Нетрудно убедиться, что при данных φ_k и f величины c_k определяются единственным образом, если асимптотическое разложение f по φ_k существует.
Допустим, что имеется другой асимптотический ряд: $f(x) \approx d_0\varphi_0(x) + d_1\varphi_1(x) + d_2\varphi_2(x) + \dots \quad (x \to \infty)$
Обозначим за k-наименьшее число такое, что $c_k \neq d_k$, после вычитания получим:
$0 = (c_k - d_k)\varphi_k(x) + O(\varphi_{k+1}(x)) \Rightarrow \varphi_k(x) = O(\varphi_{k+1}(x))$ А это противоречит условию, что $\varphi_{k+1}(x) = o(\varphi_k(x))$
Иногда вычисленные коэффициенты равны нулю, тогда условимся писать:
$f(x) \approx 0 \cdot \varphi_0(x) + 0 \cdot \varphi_1(x) + 0 \cdot \varphi_2(x) + \dots \quad (x \to \infty)$
Это значит, что $f(x) = O(\varphi_n(x))(x \to \infty)\forall n$ (но не обязательно равномерно по n)
Например, поскольку $e^{-x} = O(x^{-n})(x \to \infty)\forall n$, то мы можем написать
$e^{-x} \approx 0 \cdot 1 + 0 \cdot x^{-1} + 0 \cdot x^{-2} + \dots$
Асимптотический ряд не обязательно сходится. Причина этого заключается в том, что сходимость является некоторым свойством ряда при фиксированном x_0, в то время как O-оценки относятся не к фиксированному x, а к $x \to \infty$. Сходимость асимптотического ряда, $\forall x > 0$, означает, что $\forall x$ ряд обладает некоторым свойством при $n \to \infty$. С другой стороны, утверждение, что ряд является асимптотическим разложением функции $f(x)$, означает, что этот ряд обладает тем же свойством при фиксированном n и при $x \to \infty$.
Более того, даже если асимптотический ряд сходится, его сумма не обязана

быть равной $f(x)$ (пример с e^{-x}). Можно даже подобрать такие фукнции $f(x), \varphi_i(x)$ таким образом, чтобы асимптотический ряд сходился $\forall x$ и в то же время не являлся бы асимптотическим рядом своей суммы.
Рассмотрим пример расходящегося асимптотического ряда:

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$$
$$f(x) = \frac{e^t}{t}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt$$
$$\int_1^{\frac{x}{2}} t^{-2}e^t\,dt < \int_1^{\frac{x}{2}} e^t\,dt < e^{\frac{x}{2}}$$
$$\int_{\frac{x}{2}}^x t^{-2}e^t\,dt < \int_{\frac{x}{2}}^x \left(\frac{x}{2}\right)^{-2} e^t\,dt < 4x^{-2}e^x$$

Видно, что $e = O(x^{-2}e^x)$, $e^{\frac{x}{2}} = O(x^{-2}e^x)$, $4x^{-2}e^x = O(x^{-2}e^x)$

Черным $\frac{e^x}{x^2}$, красным e и $e^{\frac{x}{2}}$



А потому можно сказать, что $f(x) = \frac{e^x}{x} + O\left(\frac{e^x}{x^2}\right) \quad (x \to \infty)$

Дальнейшее усовершенствование оценки можно получить, повторяя ту же операцию интегрирования по частям:

$$f(x) = \frac{e^t}{t}\Big|_1^x + \frac{e^t}{t^2}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{2e^t}{t^3}\,dt$$
$$f(x) = \frac{e^t}{t}\Big|_1^x + \frac{e^t}{t^2}\Big|_1^x + \frac{2e^t}{t^3}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{3!e^t}{t^4}\,dt$$

Итого можно получить: $f(x) = e^t\left(\frac{1}{t} + \frac{1!}{t^2} + \frac{2!}{t^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{t^n}\right)\Big|_1^x + \int_1^x \frac{n!e^t}{t^{n+1}}\,dt$

Последний интеграл равен $O(x^{-n-1}e^x)$ при $x \to \infty$ и при фиксированном n. Это можно доказать, разбив его на две части, а именно на $\left(1, \frac{x}{2}\right)$ и $\left(\frac{x}{2}, x\right)$.
Итого при каждом n имеем:
$\frac{f(x)}{e^x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$
откуда следует:

$\frac{f(x)}{e^x} \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \dots$
Ряд в правой части не сходится ни при одном значении x. Простым и тривиальным классом асимптотических рядов является класс сходящихся степенных рядов.
Пусть $f(z)$-сумма сходящегося степенного ряда $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ причём $|z| \le \rho$, где $\rho > 0$ и меньше радиуса сходимости, тогда
$f(x) \approx a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (|z| \to 0)$ Доказать это очень просто.
Из сходимости ряда при $z = \rho \Rightarrow |a_n|\rho^n \le A \forall n$

$$\forall n \forall z : |z| \le \frac{\rho}{2} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k = |z|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^{k-n-1} \le$$
$$\le |z|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{k-n-1} = |z|^{n+1} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{\rho}\right)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{k-n-1} =$$
$$= \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \rho^k \frac{1}{2^{k-n-1}} = A \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-n-1}} \le$$
$$\le A \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2A \left(\frac{|z|}{\rho}\right) \quad (1)$$

откуда:
$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + O(z^{n+1}) \quad (|z| < \frac{\rho}{2})$

0.6 Элементарные действия с асимптотическими рядами

Для простоты ограничимся асимптотическими рядами вида
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (x \to 0)$
хотя аналогичные выводы можно сделать и для рядов других видов.
Рассматриваемый ряд является степенным рядом и независимо от его сходимости мы будем называть его формальным степенным рядом.
Если для таких рядов определить сложение и умножение, то множество таких рядов станет коммутативным кольцом, единицей которого будет $I = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$
$A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ и $B = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$
Определим сумму и произведение равенствами:
$A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$
$A \cdot B = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$
Если $a_0 \neq 0$, то $\exists! C : A \cdot C = I$. Его коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \dots$ определяются из уравнений:
$a_0c_0 = 1, \quad a_0c_1 + a_1c_0 = 0, a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0 = 0, \dots$ Предположим, что $b_0 = 0$, тогда можно определить формальный степенной рял, получающийся в результате подстановки ряда B в ряд A, этот ряд обозначим $A(B)$.
Определим его следующим образом:
Пусть c_{kn}-коэффициент при x^k в ряде $a_0I + a_1B + a_2B^2 + \dots + a_nB^n = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \dots$
Следующей операцией над формальными рядами является дифференцирование. Производную ряда $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ определим формулой:
$A' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$
Если A и B-степенные ряды с отличным от нуля радиусом сходимости, то все эти формальные действия в точности соответсвтуют тем же действиям над суммами $A(x)$ и $B(x)$ этих рядов.
Например, если $A(B) = C$, то ряд C имеет отличный от нуля радиус сходимости, и внутри круга этого радиуса $A\{B(x)\} = C(x)$.
Если говорить об асимптотических рядах вместо сходящихся степенных рядов, то мы имеем совершенно аналогичное положение, за исключением того, что вопрос о дифференцировании требует особой осторожности.
Пусть $A(x)$ и $B(x)$-фукнции, определённые в окрестности $x = 0$ и имеющие асимптотические разложения $A(x) \approx A(x \to 0)$, $B(x) \approx B(x \to 0)$, тогда: $A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + O(x^n) \approx (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots = A + B \quad (x \to 0)$
$A(x)B(x) = (a_0 + \dots + a_nx^n)(b_0 + \dots + b_nx^n) + O(x^{n+1}) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + O(x^{n+1}) \approx c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = AB \quad (x \to 0)$
$\{A(x)\}^{-1} \approx A^{-1} \quad (x \to 0)$
$A\{B(x)\} \approx A(B) \quad (x \to 0)$
Предположим, что $f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (x \to 0)$ и что $\exists \int_0^x f(t)\,dt \forall x$достаточно малых, тогда законно почленное интегрирование:
$\int_0^x f(t)\,dt \approx a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \dots \quad (x \to 0)$

Это легко доказать. $\forall n \exists A > 0 \exists a > 0 : |f(t) - a_0 - a_1 t - \dots - a_{n-1} t^{n-1}| < A|t|^n \quad (|t| < a)$ откуда при $|x| < a$ получаем:
$\left|\int_0^x f(t)\,dt - a_0 x - \frac{1}{2} a_1 x^2 - \dots - \frac{1}{n} a_{n-1} x^n\right| < \frac{A}{n+1} |x|^{n+1}$ и соотношение доказано.
При дифференцировании даже, если $A(x)$ имеет асимптотическое разложение, то производная $A'(x)$ не обязательно существует, а если она и существует, то может не иметь асимптотического разложения. Однако почленное дифференцирование асимптотических рядов все же является законным, если удается показать, что производная тоже имеет асимптотическое разложение. Действительно, предположим, что
$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (x \to 0)$
$f'(x) \approx b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \quad (x \to 0)$
$g_n(x) = f(x) - (b_0 x + \frac{1}{2} b_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n} b_{n-1} x^n)(n > 0)$
$g'_n(x) = O(x^n) \quad (x \to 0)$ Из теоремы о среднем следует, что $g_n(x) - g_n(0) = O(x^{n+1})(x \to 0)$
Поскольку n произвольно, то:
$f(x) \approx f(0) + b_0 x + \frac{1}{2} b_1 x^2 + \frac{1}{3} b_2 x^3 + \dots \quad (x \to 0)$
Теперь формула $b_k = (k+1) a_{k+1}$ следует из единственности коэффициентов асимптотического ряда.

0.7 Неявные фукнции

Пусть фукнциональная зависимость x от t задана уравнением $f(x,t) = 0$, причём если уравнение имеет больше одного корня, то для каждого значения t указано, какой из корней должент быть выбран. Этот корень мы будем обозначать $x = \varphi(t)$. Задача состоит в определении асимптотического поведения функции $\varphi(t)(t \to \infty)$.

В общем случае задача довольно неопределённа, так на самом деле мы хотим выразить асимптотическое поведение данной фукнции $\varphi(t)$ в терминах элементарных функций или по крайней мере в терминах явных функций. При этом существенно, какие фукнции считать элементарными. Во многих встречающихся в практике случаях можно выразить асимптотическое поведение неявной фукнции в терминах элементарных функций. Приведём любопытный пример, когда такого выражения нет. Если x задано уравнением:

$x(\ln x)^t - t^{2t} = 0 \quad (x > 1)$

то легко убедиться, что $x = e^{t\varphi(t)}$, где $\varphi(t)$-решение уравнения $\varphi e^{\varphi} = t$. При $t \to \infty$ мы имеем для φ асимптотическое разложение, позволяющее определить $\varphi(t)$ с ошибкой порядка $(\ln t)^{-k}$, где k произвольное, но фиксированное число. Это значит, что мы имеем асимптотическую формулу для $\ln x$, но не для x. Иными словами, у нас нет такой элементарной фукнции $\psi(t) : \frac{x}{\psi(t)} \to 1$ при $t \to \infty$, иначе бы существовала оценка с ошибкой порядка $o(t^{-1})$.

0.8 Формула обращения Лагранжа

Пусть фукнция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности $z = 0$ комплексной плоскости. Предположив, что $f(0) \neq 0$, рассмотрим уравнение:
$\omega = \frac{z}{f(z)}$, где z-неизвестное
$\exists a > 0 \exists b > 0$: при $|\omega| < a$ уравнение имеет единственное решение в области $|z| < b$ и это решение является аналитической фукнцией ω:
$z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega^k \quad (|\omega| < a)$
при этом коэффициенты можно найти по формулам: $c_k = \frac{1}{k!} \left\{ \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} (f(z))^k \right\}_{z=0}$
Обобщённая формула даёт значения $g(z)$, где g-любая фукнция z, аналитическая в окрестности точки $z = 0$:
$g(z) = g(0) + \sum_1^{\infty} d_k \omega^k$
$d_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \left\{ g'(x)(f(z))^k \right\}_{z=0}$
Формула $z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega^k \quad (|\omega| < a)$ обычно называемя формулой обращения Лагранжа, является частным случаем более обшей теоремы о неявной фукнции.
Если $f(z, \omega)$-аналитическая фукнция z и ω в некоторой области $|z| < a_1$, $|\omega| < b_1$, причём $f(0, 0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ при $z = \omega = 0$, то существуют положительные числа a и b, такие, что для любого ω в круге $|\omega| < a$ уравнение $f(z, \omega) = 0$ имеет единственное решение в круге $|z| < b$ и это решение может быть разложено в степенной ряд:
$z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega^k$

0.9 Применения

Рассмотрим положительные решения уравнения $xe^x = t^{-1}$ при $t \to \infty$. Так как t^{-1} стремится к нулю, можно применить формулу Лагранжа к уравнению $ze^z = \omega$, при этом $f(z) = e^{-z}$, т.е. $\omega = \frac{z}{e^{-z}}$. Тогда можно утверждать, что $\exists a > 0 \exists b > 0$: при $|w| < a \exists!$ решение $z : |z| < b$ и $z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k^{k-1}}{k!} \omega^k$.
Ряд сходится при $|\omega| < e^{-1}$. Отсюда , что при $t > a^{-1}$ существует единственное решение в круге $|x| < b$. Но поскольку xe^x возрастает от 0 до ∞, когда x возрастает от 0 до ∞, уравнение имеет положительное решение и оно не может превосходить b, если t достаточно далеко. Значит, при достаточно больших t это положительное решение разлагается в ряд:
$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k^{k-1}}{k!} t^{-k}$
и этот степенной ряд служит также асимптотическим разложением.
Вторым примером будет положительное решение уравнения
$x^t = e^{-x}$ при $t \to \infty$
Функция x^t возрастает при $x > 0$, а функция e^{-x} убывает. Если заметить, что x^t мало на отрезке $0 \le x \le 1$, за исключением x, очень близких к 1, то из рассмотрения графиков x^t и e^{-x} становится ясно, что наше уравнение имеет ровно один положительный корень, который не превосходит 1 и стремится к 1 при $t \to \infty$.
ВСТАВИТЬ ГРАФИК
Положим теперь $x = 1 + z$, $t^{-1} = \omega$ и получим уравнение:
$f(z) = -\frac{z(1+z)}{\ln(1+z)}$
Фукнция $f(z)$ аналитична в $z = 0 : f(z) = -1 + c_1 z + \dots$, следовательно:
$x = 1 - \frac{1}{t} - c_1 \frac{1}{t^2} + \dots$
удовлетворяет уравнению при достаточно больших t. Существование единственного положительного решения, стремящегося к 1 при $t \to \infty$, обеспечивает разложимость этого решения в степенной ряд при достаточно больших t.
Рассмотрим уравнение:
$\cos x = x \sin x$
Из графиков функций x и $\coth x$ видно, что это уравнение имеет ровно по одному корню в каждом из интервалов $\pi n < x < \pi(n+1)$.
ВСТАВИТЬ ГРАФИК
Обозначая эти корни через x_n, поставим вопрос об асимптотическом поведении x_n при $n \to \infty$. Так как $\coth(x_n - \pi n) = x_n$ при $x_n \to \infty$, имеем $x_n - \pi n \to 0$. Полагая $x = \pi n + z$,$(\pi n)^{-1} = \omega$, находим, что $\cos z = (\omega - 1 + z) \sin z$ и, следовательно:
$f(x) = \frac{z(\cos z - z \sin z)}{\sin z}$, где $f(z)$ аналитична в точке $z = 0$ и $f(0) = 1$.
Поэтому z разлагается в степенной ряд по степеням ω, и мы получаем $z = \omega + c_2\omega^2 + c_3\omega^3 + \dots$. Следовательно, при достаточно большом n:
$x_n = \pi n + \frac{1}{\pi n} + \frac{c_2}{(\pi n)^2} + \dots$
Заметим, что $c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0$, т.к. $f(z)$-четная фукнция.
Рассмотрим уравнение $xe^x = t$, которое при положительном t имеет един-

ственное положительное решение x, поскольку фукнция xe^x возрастает от 0 до ∞. Это решение мы будем обозначать просто x и будем интересоваться его поведением при $t \to \infty$.
Преобразовать это уравнение трудно, поэтому будет использовать метод итераций. Запишем уравнение в виде: $x = \ln t - \ln x$
Имея какое-либо приближенное выражение для x, мы можем подставить его в правую часть уравнения $x = \ln t - \ln x$ и получить новое приближение, более точное, чем прежнее. Заметим, что погрешность Δ в значении x даёт нам погрешность примерно $\frac{\Delta}{x}$ в значении $\ln x$.
Поскольку $t \to \infty$, то можно считать, что $t > e$ и, следовательно, $x > 1$. Действительно, при $0 < x \leq 1$ мы имели бы $\ln t - \ln x \leq \ln t > \ln e = 1$, в то время как левая часть $x = \ln t - \ln x$ по предположению не превосходит единицы.
Из неравенства $x > 1$ следует, что $x = \ln t - \ln x < \ln t$, и мы начинаем с неравенства $1 < x < \ln t$.
Отсюда в силу уравнения $x = \ln t - \ln x$ следует $\ln x = O(\ln \ln t)$.
Следовательно $x = \ln t + O(\ln \ln t) \quad (t \to \infty)$
Логарифмируя находим, что
$\ln x = \ln \ln t + \ln \left(1 + O(\frac{\ln \ln t}{\ln t})\right) = \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)$
Подставив в уравнение получаем:
$x = \ln t - \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)$
Снова логарифмируя полученное уравнение, получаем третье приближение:

$$
\begin{aligned}
x = \ln t - \ln\left(\ln t - \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)\right) = \\
= \ln t - \ln \ln t + \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)^2 + O\left(\frac{\ln \ln t}{(\ln t)^2}\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Введём сокращённые обозначения $\ln t = L_1, \quad \ln \ln t = L_2$, тогда получаем $\ln x = L_2 + \ln\left(1 - \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2}{L_1^2} + \frac{1}{2}\frac{L_2^2}{L_1^3} + O\left(\frac{L_2}{L_1^3}\right)\right)$ поскольку член $O\left(\frac{L_2}{L_1^3}\right)$ поглащает все члены вида $\frac{L_2^p}{L_1^q}$ при $q > 3$, имеем

$$
\begin{aligned}
x = L_1 - L_2 - \left(-\frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2}{L_1^2} + \frac{1}{2}\frac{L_2^2}{L_1^3} + O\left(\frac{L_2}{L_1^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2}{L_1^2}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{L_2^3}{L_1^3} = \\
= L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \left(\frac{1}{2}L_2^2 - L_2\right)\frac{1}{L_1^2} + \left(-\frac{1}{3}L_2^3 - \frac{3}{2}L_2^2 + O(L_2)\right)\frac{1}{L_1^3}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

На следующем шагу получим

$$x = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \left(\frac{1}{2}L_2^2 - L_2\right)\frac{1}{L_1^2} + \left(-\frac{1}{3}L_2^3 - \frac{3}{2}L_2^2 + L_2\right)\frac{1}{L_1^3} + \\ + \left(\frac{1}{4}L_2^4 - \frac{11}{6}L_2^3 + 3L^2 + O(L_2)\right)\frac{1}{L_1^4} \quad (4)$$

При взгяде на эти формулы создаётся впечатление, что существует асимптотический ряд
$x \approx L_1 - L_2 + L_2 P_0(L_2)\frac{1}{L_1} + L_2 P_1(L_2)\frac{1}{L_1^2} + L_2 P_2(L_2)\frac{1}{L_1^3} + \ldots$, где $P_k(L_2)$-многочлен степени k
Это можно доказать, тщательно исследуя операции, которые приводят к полученному выражению и к последующим приближенным формулам такого вида.
Однако мы пойдём иным путём, а именно докажем, что если t достаточно велико, то x представляет собой сумму сходящегося ряда такого вида. Для этого нам понадобится теорема Руше:
Пусть D-ограниченная область комплексной плоскости, её граница C-замкнутая жорданова кривая. Пусть, далее, фукнции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в D и на C, причём $|f(z)| < |g(z)|$ на C. Тогда $f(z) + g(z)$ имеет в D то же число нулей, что и $g(z)$, считая все нули с их кратностью.
Наш метод исследования уравнения $x = \ln t - \ln x$ построен по образцу обычного доказательства теоремы Лагранжа. Для сокращения записи введём обозначения

$$x = \ln t - \ln\ln t + v\ \tfrac{1}{\ln t} = \sigma, \quad \tfrac{\ln\ln t}{\ln t} = \tau$$

В этих обозначениях получается
$e^{-v} - 1 - \sigma v + \tau = 0$
На время мы забудем о связи между τ и σ, и будем рассматривать их как малые независимые комплексные параметры. Мы покажем, что $\exists a > 0 \exists b > 0 :$ $|\sigma| < a, |\tau| < a$ уравнение имеет единственное решение в области $|v| < b$ и что это решение является аналитической функцией σ и τ в области $|\sigma| < a, |\tau| < a$.
Обозначим через $\sigma = \inf_{z \in \{|z| = \pi\}} |e^{-z} - 1|$. Ясно, что $\sigma > 0$, а $e^{-z} - 1$ имеет ровно одни нуль внутри этой окружности, именно $z = 0$. Затем выберем положительное число $a = \frac{\sigma}{2}(\pi + 1)$. Тогда
$|\sigma z - \tau| < \frac{\sigma}{2} \quad (|\sigma| < a, |\tau| < a, |z| = \pi)$
Отсюда $|e^{-z} - 1| > |\sigma z - \tau|$ на окружности $|z| = \pi$, и по теореме Руше уравнение $e^{-z} - 1 - \sigma z + \tau = 0$ имеет ровно один корень в круге $|z| < \pi$. Обозначая этот корень через v, имеем по теореме Коши
$v = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\pi} \frac{-e^{-z} - \sigma}{e^{-z} - 1 - \sigma z + \tau} z\, dz$
Для всех z на пути интегрирования $|\sigma z| + |\tau| < \frac{1}{2}|e^{-z} - 1|$, так что можно написать разложение в ряд

$\frac{1}{e^{-z}-1-\sigma z+\tau} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(m+k)!}{m!k!}\frac{z^k\sigma^k\tau^k}{(e^{-z}-1)^{k+m+1}}$
сходящийся абсолютно и равномерно, когда $|z|=\pi, |\sigma|<a, |\tau|<a$. Следовательно, можно подставить этот ряд в формулу $v=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\pi}\frac{-e^{-z}-\sigma}{e^{-z}-1-\sigma z+\tau}z\,dz$ и проинтегрировать почленно, что даст нам выражение для v в виде абсолютно сходящегося двойного степенного ряда. Заметим, что члены, не содержащие τ, отсуствуют. Таким образом, мы доказзали, что при $|\tau|<a, |\tau|<a$ уравнение $e^{-v}-1-\sigma v+\tau=0$ имеет единственное решение v, удовлетворяющее условию $|v|<\pi$, и это решение имеет вид
$v=\tau\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{km}\sigma^k\tau^m$, где c_{km}-постоянные.
Для достаточно больших t имеем $|\sigma|=|\frac{1}{\ln t}|<a, |\tau|=|\frac{\ln\ln t}{\ln t}|<a$, кроме того, решение, которое нам нужно, мало: из оценки $x=\ln t-\ln\ln t+O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)$ следует, что $v=O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)$. Это значит, что оно совпадает при больших t с найденным решением. Итаг, окончательный результат
$x=\ln t-\ln\ln t+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{km}(\ln\ln t)^{m+1}(\ln t)^{-k-m-1}$ и ряд абсолютно сходится для всех достаточно больших значений t.

0.10 Метод итераций

Пусть мы хотим знать асимптотическое поведение некоторой фукнции $f(t)$ при $t \to \infty$. Обычно, прежде чем начинать что-либо доказывать, очень важно иметь какие-то разумные предположения об этом поведении. И чем лучше мы угадаем аппроксимируем для $f(t)$, тем легче доказать, что это и в самом деле есть некоторая аппроксимация.

Пусть $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots$-последовательность фукнций, и предположим, что асимптотическое поведение $\varphi_k(t)$ при каждом отдельном k известно.

Пусть, далее, мы имеем основания полагать, что свойства $\varphi_0(t)$ в некотором смысле близки к свойствам $f(t)$. Предположим ещё, что имеется операция, преобразующая φ_0 в φ_1, φ_1 в φ_2 и т.д., и мы имеем основания полагать, что эта операция превращает хорошее приближение в ещё лучшее. При этом мы надеемся на то, что φ_k может при некотором k оказаться настолько близким к f (в некотором специальном смысле), что мы сможем уже доказать этот факт. Может случиться и так, что сама эта операция приведёт к доказательству.

Именно: это будет так, если мы сумеем доказать два утверждения:

1. $\forall n \varphi_n$ даёт в некотором смысле n-е приближение $\Rightarrow \varphi_{n+1}$ даёт в некотором смысле (n+1)-е приближен

2. При некотором фиксированном k фукнция φ_k даёт k-е приближение.

Простым примером такой ситуации может служить процесс, который привёл нас к выражению

$$x = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \left(\frac{1}{2}L_2^2 - L_2\right)\frac{1}{L_1^2} + \left(-\frac{1}{3}L_2^3 - \frac{3}{2}L_2^2 + L_2\right)\frac{1}{L_1^3} + \\ + \left(\frac{1}{4}L_2^4 - \frac{11}{6}L_2^3 + 3L^2 + O(L_2)\right)\frac{1}{L_1^4} \quad (5)$$

Нам повезло, что у нас оказалась полезная информация: $0 < x < \ln t$, правильная с самого начала, и в догадках необходимости не было.

0.11 Корни уравнений

Мы хотим получить приближённое значение для некоторого корня ξ уравнения $f(x) = 0$. В этом случае хороший результат даёт метод Ньютона. Он состоит в том, что берется грубое приближение x_0 и строится последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots$ по формуле
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Это означает, что x_{n+1} является корнем линейной фукнции график которой-касательная в точке $P_n = (x_n, f(x_n))$ к графику $f(x)$.
При этом обычно $\exists$ интервал J : точка $\xi \in J$ и если $x_0 \in J$, $x_1, x_2, \dots \in J$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.
Достаточным условием существования J может служить, например, следующее:
1. $f(x)$ имеет непрерывную производную в окрестности точки ξ
2. $f'(\xi) \neq 0$
При выполнении этих условий процесс сходится очень быстро, а именно $x_{n+1} - \xi$ имеет порядок $(x_n - \xi)^2$.
Часто о функции $f(x)$ известно очень мало, иначе говоря, для каждого x можно найти значение $f(x)$, но информация относительно верхних и нижних границ $f(x), f'(x), \dots$ для больших интервалов оси x не очень велика. Такую информацию обычно можно получить для очень малых интервалов.
Чтобы найти корень уравнения $f(x) = 0$, мы просто выбираем более или менее случайно некоторое число x_0 и строим последовательность $x_1, x_2, \dots$ при помощи итерационного процесса Ньютона.
Если эта последовательность обнаруживает тенденцию сходиться, это ещё ничего не означает, поскольку сходимость не может быть установлена с помощью конечного числа наблюдений.
Однако может случиться, что рано или поздно мы попадём в малый интервал J, в которой информация о $f(x)$ уже достаточно велика, чтобы доказать, что все следующие x_n остаются в интервале J и сходятся к некоторой точке этого интервала, что эта точка-корень уравнения $f(x) = 0$ и что внутри J не существует других корней.
Добившись этого, мы будем значть не точное значение корня, а лишь малый интервал, в котором оно заключено; кроме того, мы имеем способ безграничного уменьшения этого интервала.
Имеются однако и неблагоприятные возможности, некоторые из них:
1. Последовательность $x_0, x_1, \dots$ стремится к бесконечности.
2. Последовательность сходится, но не к нужному корню.
3. Последовательность колеблится
4. Последовательность сходится к нужному корню, но мы не в состоянии это доказать.

0.12 Асимптотические итерации

Возвращаясь к асимптотическим задачам, связанным с неявными функциями, заметим, что метод Ньютона вполне хорош для задач с малым параметром, подобных тем, которые рассматривались в главе "Применение". Также корень уже не число, а фукнция от t и нам нужна асимптотическая информация об этой функции.
Имеется два различных вопроса:
1. Даёт ли метод Ньютона последовательность достаточно хороших приближений.
2. Можем ли мы доказать, что эти приближения действительно являеются приближениями.
Рассмотрим пример на уравнении $xe^x = \frac{1}{t}$.
В качестве первого приближения к корню возьмём $\varphi_0 = 0$.
$f'(x) = (x+1)e^x$ $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{x_n} - \frac{1}{t}}{(x_n+1)e^{x_n}} = \frac{x_n^2 e^{x_n} + x_n e^{x_n} - x_n e^{x_n} - \frac{1}{t}}{(x_n+1)e^{x}} = \frac{x_n^2 + \frac{1}{te^{x_n}}}{x_n+1}$
и, полагая $\varphi_1 = \frac{1}{t}$ получим, что
$\varphi_2 = \frac{1}{t} - \frac{\frac{1}{t}(e^{\frac{1}{t}}-1)}{e^{\frac{1}{t}}(1+\frac{1}{t})} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{t^3} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \quad (t \to \infty)$
Перейдём теперь к уравнению $xe^x = t$ и применим метод Ньютона на этом этапе, до ввода малого параметра.
Разумно начать приближение с $\varphi_0 = 0$. Имеем
$\varphi_1 = t$
$\varphi_2 = t - 1 + O(\frac{1}{t}) \quad (t \to \infty)$
$\varphi_3 = t - 2 + O(\frac{1}{t}) \quad (t \to \infty)$
$\dots$
Ясно, что это ни к чему на не приведёт. Ни одна из фукнций φ_k совершенно непохожа асимптотически на истинный корень $x = \ln t - \ln\ln t + o(1)$.
То же самое произойдёт, если мы начнём с $\varphi_0 = \ln t$, мы опять получим, что $\varphi_n = \ln t - n + o(1)$. Можно показать, что мы всегда получим $\varphi_n = \varphi_0 - n + o(1)$, если начнём с фукнции $\varphi_0 : \frac{\varphi_0 e^{\varphi_0}}{t} \to \infty \quad (t \to \infty)$.
Основной целью было подчеркнуть тот факт, что для многих асимптотических задач важно начинать с хорошей гипотезы или с хорошего первого приближения.

0.13 Суммирование

Мы будем рассматривать суммы вида $\sum_{k=1}^{n} a_k(n)$, где каждое слагаемое и число членов зависят от n. Нас будет интересовать асимптотическая информация о значении суммы при больших значениях n. Во многих приложениях $a_k(n)$ не зависят от n.

Подобные асимптотические задачи моугт быть весьма сложными, особенно в случаях, когда не все a_k одного знака и когда сумма $\sum_1^n a_k(n)$ может быть много меньше суммы $\sum_1^n |a_k(n)|$.

С другой стороны, имеется класс шаблонных задач, когда все a_k одного знака и "довольно гладкие". Эти задачи мы разделим на четыре типа в зависимости от того, какие слагаемые дают основной вклад в сумму:

1. Сравнительно небольшое число членов в начале или в конце суммы
2. один член в начале или в конце
3. сравнительно небольшое число членов в середине
4. небольшой группы членов, преобладающих на остальными, просто нет

0.14 Случай 1

В качестве первого примера рассмотрим сумму $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.
Первым приближением к s_n является сумма $S = \sum 1^\infty \frac{1}{k^3}$ бесконечного ряда, а погрешность равна $-\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k^3}$.
Для этой суммы легко получается оценка $O(\frac{1}{n^2})$, например, с помощью такого неравенства:
$\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k^3} < \sum_{n+1}^\infty \int_{k-1}^k \frac{1}{t^3}\,dt = \int_n^\infty \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{2n^2}$
и, следовательно,
$s_n = S + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to \infty)$
Результаты такого типа вполне удовлетворительны для многих задач анализа, но с точки зрения вычислительной математики это ничего не даёт, если мы не знаем значения S.
Рассмотрим сумму $s_n = \sum_1^n 2^k \ln k$.
В ней сравнительно небольшое количества последних слагаемых даёт вклад, значительно больший, чем все остальные члены. Если мы отбросим $\lfloor \ln n \rfloor$, то сумма оставшихся слагаемых не превзойдёт:
$\sum_1^{n-\lfloor \ln n \rfloor} 2^k \ln n \le 2^{n+1-\ln n} \ln n$
что намного меньше одного только последнего слагаемого.
Заметим, что $\ln k$ мало меняется, когда k пробегает последние $\lfloor \ln n \rfloor$ номеров. Поэтому разложим $\ln k$ по степеням $\frac{n-k}{n}$; при этом можно считать, что $\frac{n}{2} < k \le n$. Нас удовлетворит оценка
$\ln k = \ln(n-h) = \ln n - \frac{h}{N} + O\left(\frac{h^2}{n^2}\right) \quad (n \to \infty)$, которая справедлива равномерно по $0 \le h < \frac{n}{2}$.
Теперь проведём следующие оценки:
$\sum_{1 \le k \le \frac{n}{2}} 2^k \ln k = O\left(2^{\frac{n}{2}} \ln n\right)$
$\sum_{\frac{n}{2} < k \le n} 2^k \ln n = 2^{n+1} \ln n + O(2^{\frac{n}{2}} \ln n)$
$\sum_{\frac{n}{2} < k < \le n} 2^k \frac{h}{n} = \frac{2^n}{n} \sum_{h=1}^\infty 2^{-h} h + O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$
$\sum_{\frac{n}{2} < k \le n} 2^k O\left(\frac{h^2}{n^2}\right) = O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) \sum_{h=1}^\infty \frac{h^2}{2^h}$
ДОБАВИТЬ ПОЯСНЕНИЯ
Главная часть отстаточного члена равна $O(\frac{2^n}{n^2})$; члены, содержащие $2^{\frac{n}{2}}$, значительно меньше.
Таким образом, мы получаем
$\frac{1}{2^n} \sum_1^n 2^k \ln k = 2 \ln n - \frac{1}{n} \sum_1^\infty \frac{h}{2^h} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
Нетрудно получить асимптотический ряд по степеням $\frac{1}{n}$
$\frac{1}{2^n} \sum_1^n 2^k \ln k - 2 \ln n \approx \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots \quad (n \to \infty)$, где $c_k = -\frac{1}{k} \sum_{h=1}^\infty \frac{h^m}{2^h}$

0.15 Случай 2

Часто приходится сталкиваться с суммами положительных членов, в которых каждый член имеет по крайней мере тот же порядок, что и сумма всех предыдущих.
Рассмотрим пример $s_n = \sum_{k=1}^{n} k!$
Разделив на последний член получим
$\frac{s_n}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{1}{n!}$
Если мы остановимся, скажем, после пятого члена и пренебрежём последними $(n-5)$, каждый из которых не привосходит $\frac{(n-5)!}{n!}$, то мы сделаем ошибку порядка $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.
Но пятый член сам имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, так что
$\frac{s_n}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (n \to \infty)$
Заменим число 5 произвольным целым числом, мы легко убедимся, что существует асимптотический ряд
$\frac{s_n}{n!} \approx c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots \quad (n \to \infty)$
Ряд $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ расходится при любом ненулевом x.
Ряд $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ возник как формальная сумма степенных рядов для фукнций
$1, x, \frac{x^2}{1-x}, \frac{x^3}{(1-x)(1-2x)}, \frac{x^4}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}, \ldots$ каждый из которых имеет неотрицательные коэффициенты.
Таким образом, для любого целого k коэффициенты ряда $c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$ больше коэффициентов ряда для фукнции $\frac{x^{k+1}}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-kx)}$.
Последний ряд расходится при $x = \frac{1}{k}$, следовательно, и ряд $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ расходится при $x = \frac{1}{k}$.
Так как k произвольно, радиус сходимости этого ряда равен нулю.
ПОПРОБОВАТЬ

0.16 Случай 3

Типичный пример:
$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n), \quad a_k(n) = 2^{2k}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2$
Имеем $\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} = \left(\frac{2(n-k)}{k+1}\right)^2$
Следовательно, максимальный член встретится при первом значении k, для которого $2(n-k) < k+1$, т.е. около $k = \frac{2n}{3}$.
Заметим, в что в этом случае, в отличие от наших прежних примеров, сумма велика по сравнению с максимальным членом.
В самом деле, если мы будем изменять k в любом направлении от максимального члена, то $a_k(n)$ менятеся очень медленно при фиксированном n.
НАРИСОВАТЬ ГРАФИК
Другими методами, например с помощью формулы Стирлинга для факториала, иожно показать, что число членов, превосходящих $\frac{1}{2}\max_k a_k(n)$ имеет порядок $\sqrt[2]{n}$.
Если же $|k - \frac{2n}{3}|$ много больше $\sqrt[2]{n}$, то $a_k(n)$ очень мало по сравнению с максимумом и общая сумма всех таких членов относительно мала.
Поэтому наше внимание должно быть сосредоточено на тех k, для которых $|k - \frac{2n}{3}| < A\sqrt[2]{n}$.
С помощью формулы Стирлинга $a_k(n)$ при таких значениях k можно достаточно хорошо аппроксимировать.

0.17 Случай 4

В качестве первого примера рассмотрим $a_k(n) = \sqrt[2]{k}$.
Имеются два этапа: 1. Приближение a_k последовательностью u_k, для которой сумма $\sum_1^n u_k$ точно известна, и оно должно быть достаточно хорошим, чтобы обеспечивать сходимость $\sum 1^\infty (a_k - u_k)$
2. Имеем дело с $\sum_{k=1}^n (a_k - u_k)$
Первым приближением к этой сумме служит сумма ряда $S = \sum_1^\infty (a_k - u_k)$ и мы имеем
$s_n = \sum_1^n a_k = \sum_1^n u_k + S + \sum_{n+1}^\infty (u_k - a_k)$
В последней сумме мы пытаемся приблизить $u_k - a_k$ последовательностью v_k, для которой сумма $\sum_{n+1}^\infty v_k$ точно известна, а относительно погрешности $\sum_{n+1}^\infty (u_k - a_k - v_k)$ известно, что она мала.
Этот процесс можно продолжить и дальше.
Слабым местом этого процесса является то, что наша информация о значении S очень незначительна.
В нашем примере мы можем получить первое приближение к сумме s_n при помощи интеграла
$\int_0^n \sqrt[2]{t}\, dt = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$
Однако если мы выберем u_k так, чтобы
$\sum_1^n u_k = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$
этого будет ещё недостаточно.
Действительно, ряд с общим членом $k^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(k-1)^{\frac{3}{2}}\right)$ ещё не будет сходящимся, так как, разлагая $(1 - \frac{1}{k})^{\frac{3}{2}}$ по степеням $\frac{1}{k}$, мы находим, что верхнее выражение равно $\frac{1}{4} k^{-\frac{1}{2}} + O\left(k^{-\frac{3}{2}}\right)$, а ряд $\sum_1^\infty k^{-\frac{1}{2}}$ расходится.
Но мы опять приблизим частные суммы $\sum_1^n k^{-\frac{1}{2}}$ интегралом, что даст нам $2\sqrt[2]{n}$. // Если мы возьмём теперь новые u_k, именно $u_k = U_k - U_{k-1}$, $U_k = \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt[2]{k}$,
мы без труда найдём, что
$u_k - a_k = \frac{1}{48\sqrt[2]{k^3}} + O\left(\frac{1}{\sqrt[2]{k^5}}\right) \quad (k \to \infty)$
откуда видно, что ряд $\sum_1^\infty (u_k - a_k)$ сходится.
На втором этапе мы должны приблизить $u_k - a_k$ при помощи v_k. Возьмём $v_k = V_{k-1} - V_k$, где
$V_k = \frac{1}{24\sqrt[2]{k}}, \quad \sum_{n+1}^\infty v_k = V_n$
как посказывает нам интеграл
$\int_n^\infty \frac{1}{48\sqrt[2]{k^3}}\, dt = \frac{1}{24\sqrt[2]{n}}$
Таким образом, получим
$u_k - a_k - v_k = O\left(k^{-\frac{5}{2}}\right)$
итого получаем
$\sum_1^n k^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} + S + \frac{1}{24} n^{-\frac{1}{2}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (n \to \infty)$
Остаточный член $O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$ можно заменить асимптотическим рядом, поскольку процесс может быть продолжен и мы можем при желании полу-

чить любое число членов.
Для этого, конечно, необходимо уточнить оценку $u_k - a_k - v_k = O\left(k^{-\frac{5}{2}}\right)$
, что легко сделать, так как $(u_k - a_k)k^{\frac{3}{2}}$ можно разложить по степеням $\frac{1}{k}$, сходящийся при $k > 1$.
Остаётся ещё вопрос о значении S. Очевидно, имеем
$S = \sum_1^{\infty}\left(\sqrt[2]{k} - \frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt[2]{k} + \frac{2}{3}(k-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt[2]{k-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n \sqrt{k} - U_n\right)$
но можно получить и более простое выражение.
Этот метод использует аналитичность и поэтому не всегда применим.
Сначала обощим выражение $\sum_1^n k^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}} + S + \frac{1}{24}n^{-\frac{1}{2}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (n \to \infty)$, введя комплексный параметр z.
Тем же способом мы получим, что
$\sum_1^n k^{-z} = \frac{n^{1-z}}{1-z} + \frac{1}{2}n^{-z} + S(z) + O\left(n^{-z-1}\right) \quad (n \to \infty)$ при $Rez > -1, z \neq 1$.
Здесь $S(z)$-сумма сходящегося ряда, аналогичного ряду
$S = \sum_1^{\infty}\left(\sqrt[2]{k} - \frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt[2]{k} + \frac{2}{3}(k-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt[2]{k-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n \sqrt{k} - U_n\right)$.
Кроме того нетрудно показать, что эта сумма является аналитической фукнцией z в области $Rez > -1, z \neq 1$.
Если $Rez > 1$, то она совпадает с дзета-фукнцией Римана $\zeta(z) = \sum_1^{\infty} n^{-z}$, в чём нетрудно убедиться, устремив $n \to \infty$.

0.18 Формула суммирования Эйлера-Маклорена

При рассмотрении вышенаписанного примера мы использовали метод скорее для демонстрации. Однако, по-видимому, кратчайшим и наиболее эффективным способом исследования в таких случаях является формула Эйлера-Маклорена.
Основная формула имеет вид

$$\frac{g(0)+g(1)}{2}-\int_0^1 g(x)\,dx=(g'(1)-g'(0))\frac{B_2}{2!}+(g'''(1)-g'''(0))\frac{B_4}{4!}+\dots$$
$$+(g^{(2m-1)}(1)-g^{(2m-1)}(0))\frac{B_{2m}}{(2m)!}-\int_0^1 g^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x)}{(2m)!}\,dx \quad (6)$$

Здесь $m\geq 1$-любое целое число, а g-фукнция, имеющая $2m$ непрерывных производных на интервале $0\leq x\leq 1$.
Величины B_k-числа Бернулли-определяются равенством $\frac{z}{e^z-1}=\sum_0^\infty \frac{B_n}{n!}z^n \quad (|z|<2\pi)$.
Наконец, $B_n(t)$ означает многочлен Бернулли, который определяется равенством $\frac{ze^{zt}}{e^z-1}=\sum_0^\infty \frac{B_n(t)}{n!}z^n$
Если мы напишем формулу для функции $g(x)=f(x+1), g(x)=f(x+2), /dots, g(x)=f(x+n-1)$ и сложим полученные результаты, то многие слагаемые взаимно уничтожаются, и мы придём к формуле суммирования Эйлера-Маклорена.
Запишем её в виде

$$f(1)+\dots+f(n)=\int_1^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(n)+\frac{B_2}{2!}f'(n)+\frac{B_4}{4!}f'''(n)+\dots+$$
$$+\frac{B_{2m}}{(2m)!}f^{(2m-1)}(n)-\int_1^n f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)}{(2m)!}\,dx \quad (7)$$

Функцию $f(x)$ мы будем предполагать имеющей $2m$ непрерывных производных при $x\geq 1$. Символ $\lfloor x\rfloor$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x, $B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)$-это значение $2m$-го многочлена Бернулли в точке.
Число C не зависит от n:
$C=\frac{1}{2}f(1)-\frac{B_2}{2!}f'(1)-\dots-\frac{B_{2m}}{(2m)!}f^{(2m-1)}(1)$
Известно, что
$B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)=2(2m)!(2\pi)^{-2m}(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^\infty k^{-2m}\cos 2k\pi x$ при $m=1,2,3,\dots$,
откуда следует, что
$|B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)|\leq|B_{2m}|=2(2m)!(2\pi)^{-2m}\sum_{k=1}^\infty k^{-2m}$
Это даёт нам удовлетворительную оценку для остаточного члена для основной формулы в начале главы.
Если фукнция $f(x)$ такова, что $\int_0^\infty |f^{(2m)}(x)|\,dx<\infty$, то мы сразу получаем асимптотическую формулу

$$f(1)+\cdots+f(n)=\int_1^n f(x)\,dx+S+\frac{1}{2}f(n)+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(n)+$$
$$+O\left(\int_n^\infty |f^{(2m)}(x)|\,dx\right)\quad (n\to\infty)\quad (8)$$

где $m\geq 1$-фиксированное целое число, а $S=C-\int_1^\infty f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)}{(2m)!}\,dx$.
Рассмотрим несколько примеров.
1. Пусть $f(x)=x^{-z}\ln x,\ z\in\mathbb{C}$.
Тогда полученная нами выше оценка применима при $2m>1-Rez$и даёт нам
$\sum_{k=1}^n k^{-z}\ln k=\int_1^n x^{-z}\ln x\,dx+C(z)+\frac{1}{2}n^{-z}\ln n+R(n,z)$, где $C(z)$ зависит только от z, а $R(n,z)$ имеет асимптотическое разложение
$R(n,z)\approx\frac{B_2}{2!}(n^{-z}\ln n)'+\frac{B_4}{4!}(n^{-z}\ln n)^m+\ldots\quad (n\to\infty)$
Здесь берётся производная по n, по предположению, что n меняется непрерывно.
$C(z)$ можно найти, использовав аналитичность по z, и получить, что $C(z)=-\zeta'(z)-\frac{1}{(1-z)^2}$.
Замечание:
Грубо говоря, метод Эйлера-Маклорена не приводит к цели, если наибольший член, скажем $f(n)$, не мал по сравнению со всей суммой $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$.
В этом случае нельзя ожидать, что порядок $f^{(2m)}(n)$ меньше, чем порядок $f(n)$, и формула Эйлера-Маклорена не может дать ничего лучшего, чем $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=O(f(n))$.
Это можно проиллюстрировать на примере $\sum_1^n k!$.
2. Метод Эйлера-Маклорена можно применять и к суммам вида $\sum_{k=1}^n a_k(n)$, где каждое слагаемое зависит от k и от n.
Однако в этом случае не имеет смысле переходить от формулы (6) к (7), потому что тогда S будет зависеть от n.
Неопределённая постоянная в асимптотической формуле часто вполне допустима, но иметь в такой формуле неопределённую фукнцию от n-это значит не иметь никакой формулы вообще.
Однако имеются случаи, когда
$\frac{1}{(2m)!}\int_1^n f^{(2m)}(x)B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)\,dx$
не доставляет трудностей, например когда интеграл $\int_1^n |f^{(2m)}(x)|\,dx$ сравнительно мал.
В качестве такого примера возьмём
$s_n=\sum_{k=-n}^n e^{-k^2\frac{@a}{n}}$, где $@a$-положительная постоянная
Формула Эйлера-Маклорена при $f(x)=e^{-k^2\frac{@a}{n}}$ даёт
$s_n=\int_{-n}^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(n)+\frac{1}{2}f(-n)+\frac{B_2}{2!}(f'(n)-f'(-n))+\cdots+\frac{B_{2m}}{(2m)!}(f^{(2m-1)}(n)-f^{(2m-1)}(-n))+R_m$
где $R_m=-\int_{-n}^n f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)}{(2m)!}\,dx$

откуда $|R_m| \leq \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_{-n}^{n} |f^{(2m)}(x)|\, dx$
Имеем
$\int_{-n}^{n} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx + \varepsilon_n = \sqrt{\frac{\pi\, n}{\alpha}} + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = O\left(e^{-bn}\right), b > 0$.
Про такой остаточный член говорят, что он экспоненциально мал.
Остальные слагаемые в формуле для s_n тоже экспоненциально малы. Таким образом, все зависит от того, насколько хорошо нам удастся оценить R_m.
Делая замену $x = y\sqrt{\frac{n}{2\alpha}}$, получаем
$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2m)}(x)|\, dx = \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^{m-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^{2m}}{dy^{2m}} e^{-\frac{y^2}{2}} \right| dy$
и, следовательно, $|R_m| < C_m n^{\frac{1}{2}-m} > 0$ и не зависит от n. Поэтому при любом m имеем
$s_n = \sqrt{\frac{\pi\, n}{\alpha}} + O\left(n^{\frac{1}{2}-m}\right)$
Здесь мы случайно можем получить информацию из формулы преобразования θ-фукнции, дающее хорошую оценку для s_n.
Формула преобазования θ-фукнции даёт
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \frac{k^2}{n}} = \sqrt{\frac{\pi\, n}{\alpha}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 \frac{n}{\alpha}}$
откуда
$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x-\lfloor x \rfloor)}{(2m)!}\, dx = -2\sqrt{\frac{\pi\, n}{\alpha}} e^{\pi^2 \frac{n}{\alpha}} + O\left(n^{\frac{1}{2}} e^{-4\pi^2 \frac{n}{\alpha}}\right) \quad (n \to \infty)$ Если сравнить обе оценки, то видно, что полученная новая оценка лучше при фиксированном m, однако мы всё ещё можем методом Эйлера-Маклорена получить оценку $O\left(ne^{-\pi^2 \frac{n}{\alpha}}\right)$, отличающуюся от истинной на множитель $n^{\frac{1}{2}}$.
Если воспользоваться определением многочленов Эрмита
$H_k(y) = (-1)^k e^{\frac{y^2}{2}} \left(\frac{d}{dy}\right)^k e^{-\frac{y^2}{2}}$
то подинтегральную фукнцию в правой части, когда мы делали замену, можно записать в виде $e^{-\frac{y^2}{2}} |H_{2m}(y)|$.
Используя интегральной представление

$$H_{2m}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \left(\frac{d}{dy}\right)^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2 + ivy}\, dv = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (iv)^{2m} e^{-\frac{1}{2}v^2 + ivy + \frac{1}{2}y^2}\, dv = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y - iu)^{2m} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \quad (9)$$

находим
$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2m)}(x)| dx \leq \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^{m-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2+u^2}{2}} (y^2 + u^2)^m\, du\, dy$
Вводя полярные координаты в плоскости (u, y) находим, что повторный интеграл равне $2^{m+1}\pi m!$.
Множитель $\frac{|B_{2m}|}{(2m)!} = \frac{2}{2m\sqrt{2\pi}} \zeta(2m) \Rightarrow \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} < \frac{C}{2m\sqrt{2\pi}}$, где C-постоянная.
Поэтому получается, что

$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)}{(2m)!}\,dx < \frac{C}{\sqrt[2m]{2\pi}}\left(\frac{2\alpha}{n}\right)^{m-\frac{1}{2}}2^{m+1}\pi m!$
Используя формулу Стирлинга для факториала, мы заключаем, что
$\exists C_1 = const : \forall m \forall n \Rightarrow |\int_{-\infty}^{\infty} f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)}{(2m)!}\,dx| < C_1\left(\frac{\alpha m}{\pi^2 ne}\right)^m\sqrt{\frac{nm}{2\alpha}}$
Теперь выберем значение m. Нетрудно убедиться, что минимум выражения
$\min\left(\frac{\alpha t}{\pi^2 ne}\right)^t = e^{-\frac{pi^2 n}{\alpha}}$ достигается при $t = \frac{\pi^2 n}{\alpha}$.
Однако m-целое, а потому мы должны взять $m = m_0 = \left\lfloor\frac{pi^2 n}{\alpha}\right\rfloor$.
Чтобы исследовать как изменится при это оценка для интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)}{(2m)!}\,dx$, положим
$\psi(\rho) = \rho\ln\frac{\alpha\rho}{\pi^2 e}$
$\min\psi(\rho) = -\frac{\pi^2}{\alpha}$ при $\rho = \rho_0 = \frac{pi^2}{\alpha}$.
Имеем $\psi'(\rho_0) = 0 \Rightarrow \psi\left(\frac{m_0}{n}\right) = \psi\left(\rho_0 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{\pi^2}{\alpha} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Теперь видно, что если $m = m_0$, то мы получим, что
$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)}{(2m)!}\,dx = O\left(ne^{-\frac{\pi^2 n}{\alpha}}\right)$

0.19 Формула Стирлинга для Г-фукнции в комплексной плоскости

Наша сумма будет содержать параметр z, при фиксированном z мы будем безгранично увеличивать число слагаемых и только после этого заставим $|z|$ стремиться к бесконечности. Пусть z-действительное или комплексное числи такое, что $Rez \leq 0$ и $z \neq 0$.
Применим формулу Эйлера-Маклорена к сумме
$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \ln(z+k-1)$, где для логарифма берётся главное значение.
При произвольном целом $m \leq 1$ получаем

$$S_n(z) = \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}\ln(z+n-1) + \int_1^n \ln(z+x-1)\,dx +$$
$$+\sum_{k=1}^{m}((z+n-1)^{1-2k} - z^{1-2k})\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} + \int_1^n (z+x-1)^{-2m}\frac{B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)}{2m}\,dx \tag{10}$$

При фиксированном z мы без труда получаем асимптотическую формулу с остаточным членом $o(1)$: $S_n(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln n - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + n\ln n + z - n - \rho(z) + o(1) \quad (n\to\infty)$
где
$\rho(z) = \sum_{k=1}^{m} z^{1-2k}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} - \int_0^\infty (z+x)^{-2m}\frac{B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)}{2m}\,dx$
Поскольку фукнция $\rho(z)$ не зависит от n. Интегрируя по частям в правой части равенства, можно убедиться, что $\rho(z)$ не зависит и от m.
Используя полученные формулы, получим

$$S_n(z) - S_n(1) = (z-1)\ln n - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + z - 1 + \rho(1) - \rho(z) + o(1) \quad (n\to\infty) \tag{11}$$

Эта разность связана с формулой Эйлера для Г(z):
$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{z-1}n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)}$ логарифмируем
$\ln\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}((z-1)\ln n + S_n(1) - S_n(z))$
$\ln\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \rho(z) + 1 - \rho(1)$
Следует заметить, что $\ln\Gamma(z)$ не обязательно является главным значением логарифма.
Из этого тождества уже нетрудно вывести асимптотическую формулу при $|z|\to\infty$.
Пусть $\delta = const : 0 < \delta < \pi$, $R_\delta = z||\arg z| < \pi - \delta$, $m \in \mathbb{Z} \geq 1$.
Тогда $B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)$ ограничено, откуда следует, что

$$\int_0^\infty \left|(z+x)^{-2m}\frac{B_{2m}(x-\rfloor x \lfloor)}{2m}\right| dx < C\int_0^\infty |z+x|^{-2m}\,dx =$$
$$= C|z|^{-2m+1}\int_0^\infty \left|y+\frac{z}{|z|}\right|^{-2m} dy \quad (12)$$

причём C не зависит от z.
Величина $\left|y+\frac{z}{|z|}\right|$ равна расстоянию от точки $-y$ до некоторой точки единичного круга, принадлежащей области R_δ.
НАРИСОВАТЬ
Из геометрических соображений ясно, что расстояние не меньше, чем $\left|y+e^{i(\pi-\delta)}\right|$.
Так как интеграл $\int_0^\infty \left|y+e^{i(\pi-\delta)}\right|^{-2m} dy$ сходится, то
$\int_0^\infty (z+x)^{-2m}\frac{B_{2m}(x-\rfloor x\lfloor)}{2m}\,dx = O(|z|^{1-2m})$
Поскольку m произвольно, мы получаем асимптотический ряд для $\rho(z)$. Получаем

$$\ln\Gamma(z) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + z \approx$$
$$\approx 1-\rho(1)+\sum_{k=1}^{\infty} z^{1-2k}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \quad (|\arg z| < \pi-\delta, |z|\to\infty) \quad (13)$$