

---

# ECUACIONES DE ESTADO DE ESTRELLAS DE NEUTRONES MEDIANTE LA TEORÍA RELATIVISTA DE CAMPO MEDIO

---

*Nicolas Mantilla Molina*

*Trabajo de grado para optar por el título de:*

***Físico***

*Directora:*

*Laura Marcela Becerra Bayona, PhD*

*Co-directores:*

*José Fernando Rodríguez Ruiz, PhD*

*Luis Alberto Núñez de Villavicencio, PhD*

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2025

## *Dedicatoria*

Cuerpo de la dedicatoria

# Agradecimientos

Cuerpo de los agradecimientos

# Tabla de contenido

<b>Lista de figuras</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>Resumen</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>1. Introducción</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1. Notación y Convenciones . . . . .	9
<b>2. Macrofísica: Objetos Compactos</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1. Relatividad General . . . . .	12
2.1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein . . . . .	12
2.2. Simetría Esférica . . . . .	13
2.3. Ecuaciones de Estructura . . . . .	14
2.4. Observaciones de Estrellas de Neutrones . . . . .	16
2.4.1. Mediciones de Masa . . . . .	16
2.4.2. Mediciones de Radio . . . . .	17
<b>3. Microfísica: Ecuaciones de Estado</b> . . . . .	<b>19</b>
3.1. Ecuaciones de Estado y Ejemplos . . . . .	20
3.1.1. Ecuación Politrópica . . . . .	20
3.1.2. Gas Ideal Degenerado . . . . .	20
3.2. Teoría Relativista de Campo Medio . . . . .	22
3.2.1. Simetrías y Conservaciones . . . . .	23
3.3. Modelo del Estudio . . . . .	25
3.3.1. Materia en Saturación Nuclear . . . . .	29
3.4. Corteza de la Estrella . . . . .	32
<b>4. Resultados y discusión</b> . . . . .	<b>34</b>
4.1. Sobre el Modelo Nuclear . . . . .	35
4.1.1. Soluciones de Autoconsistencia . . . . .	35
4.1.2. Descomposición de la Energía de Enlace . . . . .	36

4.1.3. Condiciones de Aceptabilidad Física . . . . .	37
4.2. Estudio del Espacio de Parámetros . . . . .	39
4.2.1. Correlaciones entre Parámetros y Observables . . . . .	40
4.2.2. Regiones Válidas en el Espacio de Parámetros . . . . .	45
4.2.3. Masa Máxima . . . . .	50
4.2.4. Comparación de Regiones . . . . .	51
<b>5. Conclusiones . . . . .</b>	<b>55</b>
5.1. Principales hallazgos . . . . .	55
5.2. Limitaciones y recomendaciones . . . . .	56
<b>6. Apéndices . . . . .</b>	<b>58</b>
6.1. Valores esperados de los operadores . . . . .	58
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>60</b>

# Lista de figuras

2.1.	Geometría del espacio-tiempo esférico . . . . .	13
2.2.	Cementerio estelar . . . . .	18
3.1.	Propiedades del gas ideal degenerado . . . . .	22
3.2.	Relaciones masa-radio de gas ideal degenerado . . . . .	23
3.3.	Ecuación de estado para el núcleo de estrellas de neutrones. . . . .	29
3.4.	Energía de enlace por nucleón en saturación nuclear . . . . .	30
3.5.	Ecuación de estado unificada y causalidad. . . . .	33
4.1.	Soluciones autoconsistentes del modelo relativista de campo medio . . . . .	35
4.2.	Descomposición de la energía de enlace por nucleón . . . . .	37
4.3.	Verificación de condiciones de aceptabilidad física . . . . .	38
4.4.	Correlaciones entre parámetros y observables . . . . .	41
4.5.	Ecuaciones de estado y curvas masa-radio al variar los parámetros de acoplamiento	43
4.6.	Ecuaciones de estado y curvas masa-radio al variar los parámetros de autointeracción escalar . . . . .	44
4.7.	Diagrama de flujo del método de exploración del espacio de parámetros . . . . .	46
4.8.	Regiones del espacio de parámetros que satisfacen las restricciones nucleares . . . . .	47
4.9.	Propiedades estelares para diferentes conjuntos de parámetros . . . . .	49
4.10.	Región de mayor masa máxima en el espacio de parámetros . . . . .	50
4.11.	Región no válida astrofísicamente . . . . .	51
4.12.	Comparación de regiones en el plano $A_\sigma$ - $A_\omega$ . . . . .	52
4.13.	Comparación de ecuaciones de estado y curvas masa-radio de diferentes regiones . .	53
4.14.	Energía de enlace y fracción de neutrones para diferentes regiones . . . . .	54

# Resumen

En este trabajo se estudió la ecuación de estado de la materia nuclear en condiciones de alta densidad, que describe la materia al interior de estrellas de neutrones, utilizando la Teoría Relativista de Campo Medio con acoplamientos no lineales. El objetivo principal fue construir ecuaciones de estado para estrellas de neutrones que satisfagan las restricciones astrofísicas actuales y examinar la viabilidad de estrellas de neutrones masivas que puedan reproducir las observaciones más recientes. Se exploró el espacio de parámetros del modelo relativista de campo medio, analizando las correlaciones entre los acoplamientos de los campos mesónicos  $(\sigma, \omega, \rho)$  junto con los parámetros de autointeracción escalar, y las propiedades macroscópicas estelares obtenidas mediante la integración de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

Los resultados mostraron una jerarquía en la influencia de los parámetros: los acoplamientos isoescalares  $A_\sigma, A_\omega$  y los términos de autointeracción  $b$  y  $c$  gobiernan la rigidez de la ecuación de estado y la masa máxima, mientras que el acoplamiento isovectorial  $A_\rho$  afecta el radio de la estrella y la energía de simetría, sin alterar las propiedades de saturación ni el límite de masa máxima. El modelo construido permitió encontrar configuraciones que satisfacen simultáneamente las restricciones nucleares y astrofísicas. Se obtuvieron estrellas con masas máximas de hasta  $2.79 M_\odot$ , compatibles con el componente secundario de *GW190814*, y radios para estrellas canónicas ( $1.4 M_\odot$ ) consistentes con las observaciones de NICER. Finalmente, se verificó el cumplimiento de las condiciones de aceptabilidad física, garantizando la causalidad y estabilidad mecánica de las soluciones.

# Capítulo 1

## Introducción

Las estrellas de neutrones presentan uno de los estados más extremos de la materia en el universo observable, empleándose como laboratorios naturales para el estudio de la física fundamental. Estos objetos compactos, remanentes del colapso gravitacional de estrellas masivas (sugeridos por primera vez en 1934 por Baade y Zwicky [1]), poseen masas comparables o superiores a la del Sol en radios de apenas unos pocos kilómetros. En su interior, la materia alcanza densidades que superan varias veces la densidad de saturación nuclear ( $n_0 \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$ ), creando condiciones de presión y densidad aún imposibles de reproducir en experimentos terrestres [2]. Nuestro mejor intento, las colisiones de núcleos pesados en aceleradores, permiten estudiar la materia nuclear a densidades cercanas a  $2 - 5 n_0$  [3], inferiores a las que se encuentran en el núcleo de las estrellas de neutrones y que además generan estados de materia altamente dinámicos y calientes, en contraste con las condiciones de equilibrio frío presentes en estrellas de neutrones. En consecuencia, el estudio de estos objetos permite poner a prueba las teorías de la interacción fuerte y la gravedad en regímenes de energía aún no explorados experimentalmente.

El vínculo entre la física nuclear microscópica y la estructura astrofísica macroscópica reside en la ecuación de estado, la cual describe la relación termodinámica entre las variables de estado, como la presión y la densidad de energía, del material estelar. Esta relación es el ingrediente faltante para resolver las ecuaciones de estructura estelar en Relatividad General, conocidas como ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, determinando las propiedades observables de la estrella como la masa y el radio. Sin embargo, la determinación de la ecuación de estado a densidades supranucleares permanece como una gran incógnita de la física moderna. Mientras que las propiedades de la materia nuclear están restringidas cerca de la densidad de saturación gracias a experimentos de laboratorio, la extrapolación hacia densidades superiores depende fuertemente de los modelos teóricos empleados y de los grados de libertad considerados [4].

En la última década, la astrofísica de objetos compactos ha experimentado una revolución gracias a la astronomía de ondas gravitacionales y a las observaciones de rayos X de alta precisión. La detección de fusiones de estrellas de neutrones por las colaboraciones LIGO y Virgo [5], como el evento *GW170817*

[6], y el descubrimiento de objetos en el rango de masas entre las estrellas de neutrones más pesadas y los agujeros negros más ligeros, como el secundario en *GW190814* [7], han motivado el estudio de sus implicaciones en las propiedades de la materia densa en su interior. Simultáneamente, la medición precisa de masas de púlsares, como PSR J0740+6620 [8] y PSR J0952-0607 [9], junto con las estimaciones de radio obtenidas por la misión NICER, exigen que los modelos teóricos sean capaces de soportar masas elevadas sin violar las restricciones de tamaño [10, 11].

Para abordar este problema, la Teoría Relativista de Campo Medio se presenta como un marco teórico robusto y eficaz [12, 13]. A diferencia de los enfoques no relativistas, este formalismo garantiza la covariancia y causalidad necesarias para una descripción física consistente de la materia ultradensa. No obstante, la teoría contiene parámetros libres asociados a los acoplamientos entre nucleones y mesones que deben ser calibrados cuidadosamente. La falta de unicidad en estos parámetros ha dado lugar a una gran variedad de modelos cuya validez debe ser confrontada continuamente con la nueva evidencia observacional [14].

El presente trabajo tiene como objetivo realizar una exploración sistemática del espacio de parámetros del modelo relativista de campo medio con interacciones no lineales, con el fin de construir ecuaciones de estado que satisfagan simultáneamente las restricciones de la física nuclear experimental y las observaciones astrofísicas más recientes. Se busca identificar las regiones del espacio de parámetros que permiten la existencia de estrellas de neutrones masivas, evaluando la capacidad de la ecuación de estado de materia estelar para explicar objetos extremos como el componente secundario de *GW190814* [15], analizando las implicaciones físicas de estas configuraciones en términos de la materia nuclear densa.

Este documento está estructurado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presentan los fundamentos macrofísicos, derivando las ecuaciones de estructura estelar desde la Relatividad General. El Capítulo 3 detalla el marco microfísico, introduciendo la Teoría Relativista de Campo Medio y el modelo específico empleado. El Capítulo 4 expone los resultados de la exploración del espacio de parámetros, el análisis de las ecuaciones de estado resultantes y las características del modelo nuclear. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y perspectivas futuras derivadas de esta investigación.

## 1.1. Notación y Convenciones

A lo largo de este trabajo empleamos convenciones de notación y diferentes sistemas de unidades dependiendo del contexto físico específico. Para el desarrollo de la Relatividad General y el estudio de la estructura macroscópica de objetos compactos, empleamos unidades geometrizadas donde la velocidad de la luz  $c$  y la constante gravitacional de Newton  $G$  se establecen igual a la unidad  $c = G = 1$ . Para el tratamiento de la física nuclear y la construcción de ecuaciones de estado microscópicas, utilizamos unidades naturales donde la velocidad de la luz  $c$  y la constante de Planck reducida  $\hbar$  se fijan como unitarias  $c = \hbar = 1$ . En cuanto a las convenciones de notación, las letras griegas  $\{\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots\}$  denotan índices

tensoriales del conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ , mientras que las letras latinas  $\{i, j, k, \dots\}$  denotan componentes del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . El tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  tiene signatura  $(+, -, -, -)$  y utilizamos la convención de suma de Einstein para índices repetidos.

## Capítulo 2

# Macrofísica: Objetos Compactos

Los objetos compactos representan uno de los laboratorios naturales más extremos del universo, en los que la materia alcanza densidades, presiones y energías extremas que permiten extender nuestra comprensión de la física fundamental. Las estrellas de neutrones, en particular, constituyen el resultado final del colapso gravitacional de estrellas masivas, comprimiendo la materia a densidades que alcanzan varios órdenes de magnitud por encima de la densidad nuclear, en entornos de presión y temperatura que son actualmente imposibles de reproducir en laboratorios terrestres [\[16\]](#).

En este capítulo desarrollamos los fundamentos teóricos necesarios para describir la estructura y propiedades de las estrellas de neutrones desde una perspectiva macroscópica. Comenzamos con una revisión de los fundamentos de la Relatividad General, estableciendo las ecuaciones de campo de Einstein que gobiernan la dinámica del espacio-tiempo. Posteriormente, exploramos la forma general de geometrías esféricamente simétricas, que proporciona un modelo básico para comprender la estructura de los objetos compactos. A partir de estos fundamentos, derivamos las ecuaciones de estructura que relacionan las propiedades microscópicas de la materia con las características macroscópicas observables de las estrellas de neutrones. Todas las secciones están fundamentadas en base al texto de Misner et al. [\[17\]](#). Finalmente, presentamos una revisión de las observaciones astronómicas más relevantes que han refinado nuestro entendimiento de estos objetos en la última década.

## 2.1. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General, formulada por Einstein en 1915 [18], es la descripción más exitosa de la gravitación como manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Esta teoría establece que la presencia de materia y energía modifica la geometría del espacio-tiempo, y que esta curvatura, a su vez, determina el movimiento de la materia y la propagación de la energía. La Relatividad General se fundamenta en dos principios básicos: el principio de equivalencia, según el cual los efectos de un campo gravitacional uniforme son localmente indistinguibles de los efectos de una aceleración uniforme, permitiendo que la gravitación pueda ser “eliminada” localmente mediante la elección apropiada de un sistema de coordenadas en caída libre; y el principio de covariancia general, el cual exige que las leyes de la física tengan la misma forma en todos los sistemas de coordenadas, requiriendo que las ecuaciones de la teoría sean expresadas en términos de tensores para asegurar su invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas.

### 2.1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales cuya forma compacta es:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein construido a partir del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y el escalar de curvatura  $R$ , y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento que describe las propiedades de la materia y energía presentes en el espacio-tiempo. Este conjunto de ecuaciones describe cómo la distribución de materia y energía determina la curvatura del espacio-tiempo, y cómo esta curvatura afecta el movimiento de la materia y la energía de vuelta. Las ecuaciones de Einstein satisfacen automáticamente las leyes de conservación del momentum y la energía a través de la identidad de Bianchi  $G_{\mu\nu}{}^{;\rho} = 0$ , lo que implica:

$$\nabla_\rho T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}{}_{;\rho} = 0. \quad (2.2)$$

Para describir la materia en el interior de las estrellas de neutrones, consideramos un modelo de fluido perfecto. El tensor de energía-momento es:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - Pg_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

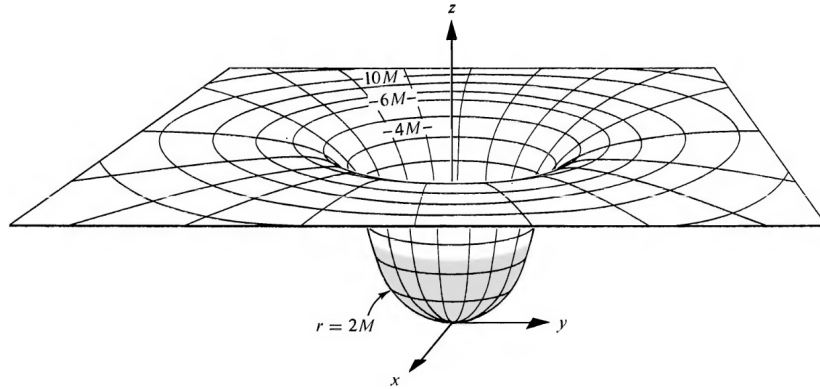
donde  $\rho$  es la densidad de energía del fluido,  $P$  es la presión isotrópica, y  $u^\mu$  es la cuadrivelocidad del fluido, normalizada según  $u^\mu u_\mu = 1$ . Esta descripción asume que no hay flujos de calor, viscosidad, ni esfuerzos de corte en el fluido, aproximación válida para escalas de tiempo mucho mayores que los tiempos de relajación hidrodinámicos.

## 2.2. Simetría Esférica

Para describir la estructura de las estrellas de neutrones, vamos a resolver las ecuaciones de Einstein asumiendo simetría esférica y condiciones estáticas. El elemento de línea de un sistema estático y esféricamente simétrico puede escribirse como:

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.4)$$

donde  $\phi(r)$  y  $\lambda(r)$  son funciones arbitrarias de la coordenada radial  $r$ , y hemos utilizado coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \varphi)$ . La simetría esférica impone que la métrica sea invariante bajo rotaciones en el grupo  $SO(3)$ , mientras que la condición estática requiere la ausencia de términos cruzados  $dt dr$ ,  $dt d\theta$ , y  $dt d\varphi$ , así como independencia explícita de la coordenada temporal. La métrica (2.4) representa la forma más general compatible con estas simetrías [17]. Una representación gráfica de la geometría del espacio-tiempo que contiene una estrella con simetría esférica, estática, puede apreciarse en la figura 2.1, donde la región blanca representa la geometría exterior (fuera de la estrella), y la zona gris la región interior (dentro de la estrella).



**Figura 2.1:** Esquema de la geometría del espacio-tiempo de una estrella con simetría esférica. Tomado de [17].

La solución general esférica (2.4) incluye varios casos de interés físico. En la región de vacío, cuando  $T_{\mu\nu} = 0$ , las ecuaciones de Einstein  $G_{\mu\nu} = 0$  determinan completamente las funciones  $\phi(r)$  y  $\lambda(r)$ , conduciendo a la solución exterior de Schwarzschild [19]. En el interior estelar, en presencia de materia con tensor de energía-momento (2.3), las ecuaciones de Einstein proporcionan relaciones diferenciales entre  $\phi(r)$ ,  $\lambda(r)$ , y las variables del fluido  $\rho(r)$  y  $P(r)$ . En la superficie estelar, en  $r = R$ , las soluciones interior y exterior deben coincidir de manera continua, imponiendo condiciones de frontera específicas.

Para que la solución sea físicamente aceptable, las funciones métricas deben satisfacer condiciones de regularidad apropiadas. En el centro ( $r = 0$ ) se requiere que  $m(0) = 0$  y  $\phi'(0) = 0$  para evitar posibles

singularidades físicas o de coordenadas. En todo el espacio se debe cumplir que  $e^{2\lambda} > 0$  y  $e^{2\phi} > 0$  para mantener la signatura métrica consistentemente en el espacio-tiempo. En el infinito se exige que  $\phi(\infty) = 0$  y  $\lambda(\infty) = 0$  para recuperar la métrica de Minkowski, es decir, que en el infinito no haya influencia gravitacional de la estrella y el espacio-tiempo sea plano.

## 2.3. Ecuaciones de Estructura

Las ecuaciones de Einstein determinan la relación entre la distribución de materia en el interior de una estrella y la geometría del espacio-tiempo que genera. Para estrellas de neutrones, estas ecuaciones conectan las propiedades microscópicas de la materia densa con las características macroscópicas observables. Vamos a utilizar estas ecuaciones para encontrar las ecuaciones de estructura que describen el equilibrio hidrostático de una estrella esféricamente simétrica y estática. Las componentes del tensor de energía-momento en coordenadas esféricas son:

$$T_t^t = -\rho(r), \quad (2.5)$$

$$T_r^r = T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = P(r). \quad (2.6)$$

Ahora, sustituyendo la métrica (2.4) y el tensor de energía-momento en las ecuaciones de Einstein (2.1), obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para las funciones métricas  $\phi(r)$  y  $\lambda(r)$ :

- Componente  $(t, t)$ : 
$$e^{-2\lambda} \left( \frac{2\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho. \quad (2.7)$$

- Componente  $(r, r)$ : 
$$e^{-2\lambda} \left( \frac{2\phi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi P. \quad (2.8)$$

- Componente  $(\theta, \theta)$ : 
$$e^{-2\lambda} \left[ \phi'' + \phi'^2 - \phi'\lambda' + \frac{\phi' - \lambda'}{r} \right] = 8\pi P. \quad (2.9)$$

Para geometrías esféricamente simétricas es posible expresar la función métrica  $\lambda(r)$  en términos de una función de masa  $m(r)$ . Definiendo:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (2.10)$$

y utilizando esta parametrización en la ecuación (2.7), obtenemos:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (2.11)$$

donde se ha empleado la definición de la “ $\rho$ -masa” [20] para la función  $m(r)$ , que representa la masa

inercial total contenida dentro de una esfera de radio  $r$ , y su interpretación física se hace clara al integrar la ecuación (2.11):

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr',$$

donde al evaluar en la superficie  $r = R$  se obtiene la masa inercial total de la estrella. Para sistemas planos en el infinito como en este caso, la masa inercial coincide con la masa gravitacional activa del límite Newtoniano [20], la cual contiene la masa en reposo total, la energía interna total y la energía potencial gravitacional dentro del radio  $r$  [17]. De la ecuación (2.8) y usando la parametrización (2.10), la función métrica  $\phi(r)$  satisface:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}. \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) determina la componente temporal de la métrica una vez conocidas las funciones  $m(r)$  y  $P(r)$ . Finalmente, utilizando (2.10), (2.11) y (2.12) para sustituir  $\phi''$ ,  $\phi'$  y  $\lambda'$  de (2.9), obtenemos la ecuación de equilibrio hidrostático relativista, también llamada ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [21]:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}. \quad (2.13)$$

Esta importante ecuación describe el equilibrio entre la presión del fluido y la atracción gravitacional, incluyendo correcciones relativistas necesarias para sostener objetos compactos y permitir su estabilidad. Para resolver el sistema de ecuaciones de estructura (2.11 - 2.13), se requiere de una ecuación de estado que relacione la presión y la densidad:

$$P = P(\rho) \quad \text{o,} \quad \rho = \rho(P). \quad (2.14)$$

La solución se obtiene integrando numéricamente desde el centro hacia afuera, comenzando con una densidad central  $\rho(0) = \rho_c > 0$  dada. El radio estelar  $R$  se determina por la condición  $P(R) = 0$ , y la masa total  $M = m(R)$  resulta de la integración de la ecuación de masa. En el límite no relativista ( $\frac{m}{r} \ll 1$  y  $P \ll \rho$ ), la ecuación TOV se reduce a la ecuación clásica de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{m}{r^2}. \quad (2.15)$$

Para estrellas de neutrones, las correcciones relativistas en el sistema de ecuaciones son necesarias debido a su alta compacidad  $M/R \sim 0.2-0.4$ . Este sistema proporciona la base teórica para predecir las propiedades macroscópicas de las estrellas de neutrones a partir de modelos microscópicos de la materia nuclear densa.

## 2.4. Observaciones de Estrellas de Neutrones

Las observaciones astronómicas de estrellas de neutrones han experimentado una revolución en las últimas décadas [22], proporcionando restricciones cada vez más precisas sobre las propiedades de la materia densa. Estas mediciones permiten contrastar los modelos teóricos de ecuaciones de estado con la realidad física de estos objetos extremos. Las estrellas de neutrones se observan a través de múltiples canales electromagnéticos [2] y, recientemente, mediante ondas gravitacionales [23]. Los principales métodos observacionales incluyen:

- **Cronometraje de Pulsares:** Los pulsares son estrellas de neutrones altamente magnetizadas que emiten haces de radiación electromagnética. La precisión extrema en la medición de sus períodos de rotación permite determinar masas través del análisis orbital en sistemas binarios.
- **Astronomía de Rayos X:** Las estrellas de neutrones en sistemas binarios acretantes o como objetos aislados calientes pueden ser observadas en rayos X. Las misiones como NICER han revolucionado las mediciones de radio a través del modelado de puntos calientes superficiales.
- **Ondas Gravitacionales:** Las fusiones de estrellas de neutrones binarias, detectadas por LIGO-Virgo, proporcionan información sobre las propiedades de marea y la ecuación de estado a través de las modificaciones que introducen en la forma de onda gravitacional.

### 2.4.1. Mediciones de Masa

Las mediciones de masa de estrellas de neutrones se basan principalmente en el efecto Shapiro en sistemas binarios de pulsares. Este efecto relativista permite determinar las masas con alta precisión a partir del retraso temporal que experimenta la señal del pulsar al atravesar el campo gravitacional de su compañera. Las mediciones más precisas incluyen:

- **PSR J0740+6620:** Con una masa de  $2.08 \pm 0.07 M_{\odot}$  [8], representa la medición más precisa de una estrella de neutrones masiva.
- **PSR J0348+0432:** Una estrella de neutrones con masa  $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$  [10].
- **PSR J0952-0607:** Con una masa reportada de  $2.35 \pm 0.17 M_{\odot}$  [9], aunque con mayor incertidumbre debido al método de determinación basado en espectrofotometría.

Estas observaciones establecen que las estrellas de neutrones pueden alcanzar masas superiores a  $2 M_{\odot}$ , imponiendo restricciones sobre las ecuaciones de estado que deben ser suficientemente rígidas para soportar estas configuraciones. Otras estimaciones se han realizado empleando datos de ondas gravitacionales. Sin

embargo, para mediciones de masa mayores a  $2.5 M_{\odot}$  aún se discute la naturaleza del objeto observado (estrella de neutrones o agujero negro), como en el caso de *GW190814* [7, 15], con una masa del objeto secundario estimado en  $2.59^{+0.08}_{-0.09} M_{\odot}$ .

### 2.4.2. Mediciones de Radio

La misión NICER (Neutron star Interior Composition ExploreR) ha proporcionado algunas de las primeras mediciones simultáneas de masa y radio para estrellas de neutrones específicas. Estas mediciones se basan en el modelado de puntos calientes en la superficie de pulsares de milisegundo, analizando las modulaciones en el flujo de rayos X.

Los resultados más significativos incluyen, a  $1\sigma$  de confiabilidad:

- **PSR J0740+6620:** Análisis independientes con NICER y X-ray Multi-Mirror han proporcionado valores  $R = 13.7^{+2.6}_{-1.5}$  km con  $M = 2.08 \pm 0.07 M_{\odot}$  [24] y  $R = 12.39^{+1.30}_{-0.98}$  km con  $M = 2.072^{+0.067}_{-0.066} M_{\odot}$  [25]. En [24] se reporta además un radio canónico  $R_{1.4} = 12.45 \pm 0.65$  km.
- **PSR J0030+0451:**  $M = 1.44^{+0.15}_{-0.14} M_{\odot}$  y  $R = 13.02^{+1.24}_{-1.06}$  km [26];  $M = 1.34^{+0.15}_{-0.16} M_{\odot}$  y  $R = 12.71^{+1.14}_{-1.19}$  km [27].
- **PSR J0437-4715:**  $M = 1.418 \pm 0.037 M_{\odot}$  y  $R = 11.36^{+0.95}_{-0.63}$  km [28].

Adicionalmente, se han realizado estimaciones de radio mediante la medición del parámetro de deformación de marea en ondas gravitacionales [29], sin embargo, estas estimaciones son modelo-dependientes. Para el caso de *GW190814* y asumiendo el objeto secundario como una estrella de neutrones en rotación rápida (frecuencia de rotación  $\nu_{\max}^{\text{obs}} = 716$  Hz), se estimó un radio ecuatorial de  $R_e = 14.1^{+1.5}_{-2.0}$  km, mientras que asumiendo una estrella no rotante, se estimó un radio canónico de  $R_{1.4} = 13.3^{+0.5}_{-0.6}$  km, ambos en el intervalo de confianza a 90 % [30].

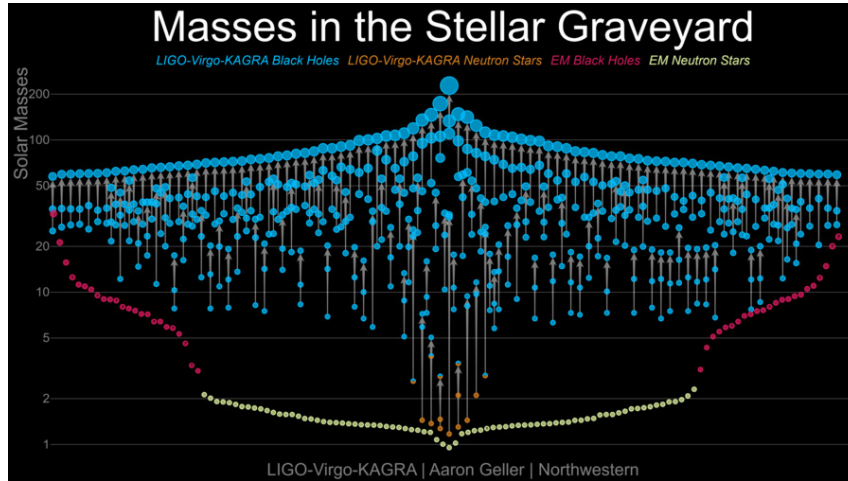
Las observaciones combinadas de masa y radio imponen restricciones consistentes sobre las posibles ecuaciones de estado de la materia nuclear densa. Estas restricciones pueden resumirse como:

- **Rigidez Suficiente:** La ecuación de estado debe ser lo suficientemente rígida para soportar masas  $\geq 2 M_{\odot}$ .
- **Radios Consistentes:** Los radios estelares deben estar en el rango  $\sim 11 - 14$  km para masas típicas/canónicas de  $\sim 1.4 M_{\odot}$ .

Estas restricciones observacionales permiten restringir las posibles ecuaciones de estado de la materia nuclear densa. Al resolver el sistema de ecuaciones de estructura (2.11 - 2.13) junto con una ecuación

de estado específica (2.14), es posible predecir la masa y radio de las estrellas de neutrones a partir de modelos microscópicos. De esta manera, las observaciones astronómicas establecen el puente entre la física microscópica de la materia nuclear densa y las características macroscópicas observables de estos objetos compactos, guiando la construcción y validación de modelos teóricos.

Las próximas generaciones de detectores de ondas gravitacionales, junto con misiones espaciales mejoradas y telescopios de nueva generación, prometen expandir significativamente nuestro conocimiento observacional de las estrellas de neutrones. Se espera que estas observaciones proporcionen restricciones aún más precisas sobre las ecuaciones de estado y posiblemente revelen nueva física en el régimen de densidades ultra-altas. Es claro que, a mayor número de observaciones, mayores son los requerimientos de nuestras teorías, lo que permite filtrar modelos físicos que pretendan describir la masa a densidades tan altas. En particular, la detección de estrellas de neutrones con masas en el rango  $2.5 - 3 M_{\odot}$  o la confirmación de transiciones de fase en el interior estelar a través de observaciones de estrellas, prometen descubrimientos de impacto para nuestra comprensión de la materia nuclear densa. En la figura 2.2 se pueden apreciar las estimaciones de masa hasta enero de 2024, así como la posible naturaleza del objeto. Cabe destacar que en el rango de 2 a  $5 M_{\odot}$  hay incertidumbre en la naturaleza de varios objetos detectados, resaltando la relevancia científica de futuras observaciones en este rango de masas [31].



**Figura 2.2:** Masas en el cementerio estelar. Contiene las masas estimadas mediante diferentes fuentes y su (posible) naturaleza, a enero de 2024. Tomado de [ligo.caltech.edu](https://ligo.caltech.edu).

## Capítulo 3

# Microfísica: Ecuaciones de Estado

La descripción microscópica de la materia en entornos extremos de densidad es un problema de gran complejidad en la física moderna. En estas condiciones, con densidades que exceden significativamente la densidad nuclear de saturación, la materia exhibe comportamientos que requieren marcos teóricos que incorporen efectos relativistas y de muchos cuerpos, asegurando causalidad en el fluido y modelando las interacciones nucleares relevantes. Los modelos que describen esta materia establecen la conexión directa entre la física microscópica de las interacciones nucleares y las propiedades macroscópicas observables de las estrellas de neutrones [21].

Diferentes teorías han sido propuestas para describir la materia en este régimen, desde enfoques no-relativistas basados en potenciales nucleares ajustados a datos experimentales [32, 33], hasta teorías fundamentales como la cromodinámica cuántica (QCD) y sus extensiones efectivas [34]. Sin embargo, para obtener una extrapolación adecuada a densidades extremas, es necesario contar con un marco teórico que respete la causalidad y cuya complejidad computacional sea manejable. Es así como la teoría relativista de campo medio surge como una herramienta particularmente adecuada para abordar este régimen, brindando un tratamiento consistente que respeta la causalidad mientras incorpora las interacciones nucleares fuertes [2]. Este formalismo permite extrapolar desde las propiedades conocidas de materia nuclear simétrica hacia las condiciones asimétricas y de alta densidad relevantes para objetos compactos

### 3.1. Ecuaciones de Estado y Ejemplos

Una ecuación de estado define la relación termodinámica entre las variables que caracterizan el estado de equilibrio de un sistema físico. Para materia estelar a temperatura cero, consideramos ecuaciones de estado barotrópicas que relacionan la presión  $P$  con la densidad de energía  $\rho$ . Esta relación contiene toda la información termodinámica necesaria para determinar la estructura de equilibrio hidrostático de estrellas de neutrones a través de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (2.11 - 2.13). La aproximación barotrópica es válida cuando los tiempos y escalas característicos de los procesos térmicos son despreciables comparados con las escalas hidrodinámicas y gravitacionales que determinan la estructura estelar. Se desprecia la temperatura debido a que la energía térmica y sus efectos son varios órdenes de magnitud inferiores a las energías internas de la materia en estrellas de neutrones [35].

#### 3.1.1. Ecuación Politrópica

La ecuación de estado politrópica es uno de los modelos más sencillos para describir materia estelar, estableciendo una relación de ley de potencias entre la presión  $P$  y la densidad de masa  $\rho_m$ :

$$P = K(\rho_m)^\gamma, \quad (3.1)$$

donde  $K$  es una constante politrópica y  $\gamma$  es el índice adiabático. Esta forma funcional, aunque fenomenológica, captura comportamientos asintóticos importantes de sistemas físicos más complejos y brinda soluciones analíticas o semi-analíticas para las ecuaciones de estructura estelar. El índice politrópico  $n = 1/(\gamma - 1)$  determina las características de compresibilidad del material: valores bajos de  $n$  corresponden a materia incompresible, mientras que valores altos describen sistemas altamente compresibles. Para materia ultra-relativista, el índice adiabático es  $\gamma = 4/3$  ( $n = 3$ ), mientras que para materia no-relativista degenerada, es  $\gamma = 5/3$  ( $n = 3/2$ ) [36]. Este modelo de ecuación de estado es ampliamente utilizada en su versión politrópica a trozos (Piecewise Polytopic) para aproximar ecuaciones de estado más complejas mediante segmentos con diferentes índices politrópicos, lo que facilita su implementación en simulaciones numéricas [4, 28, 37, 38]. En particular, es empleada para realizar estimaciones sobre el impacto de las mediciones astrofísicas de estrellas de neutrones en la ecuación de estado de la materia nuclear densa [38].

#### 3.1.2. Gas Ideal Degenerado

Para densidades suficientemente bajas tal que se pueda despreciar la interacción nuclear, un modelo más realista consiste en gases degenerados de fermiones, el modelo físico más simple frecuentemente empleado como referencia. Para materia nuclear compuesta por neutrones, protones y electrones, la ecuación de estado completa debe incluir las contribuciones de todas las especies presentes [35]:

$$\rho = \rho_n + \rho_p + \rho_e, \quad (3.2)$$

$$P = P_n + P_p + P_e, \quad (3.3)$$

donde cada componente fermiónica contribuye según:

$$\rho_i = \frac{g_i}{8\pi^2} \int_0^{p_{Fi}} p^2 \sqrt{p^2 + m_i^2} dp, \quad (3.4)$$

$$P_i = \frac{g_i}{24\pi^2} \int_0^{p_{Fi}} \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m_i^2}} dp, \quad (3.5)$$

con masas  $m_n = 939.6$  MeV,  $m_p = 938.3$  MeV,  $m_e = 0.511$  MeV para los neutrones, protones y electrones respectivamente, y degeneraciones estadísticas (de espín)  $g_i = 2$  para todas las especies. Los momentos de Fermi  $p_{Fi}$  están determinados por las densidades de número mediante  $n_i = \frac{g_i p_{Fi}^3}{6\pi^2}$ . Para resolver el sistema, se imponen restricciones adicionales sobre la composición de la materia garantizando el equilibrio termodinámico: la neutralidad de carga eléctrica

$$n_p = n_e, \quad (3.6)$$

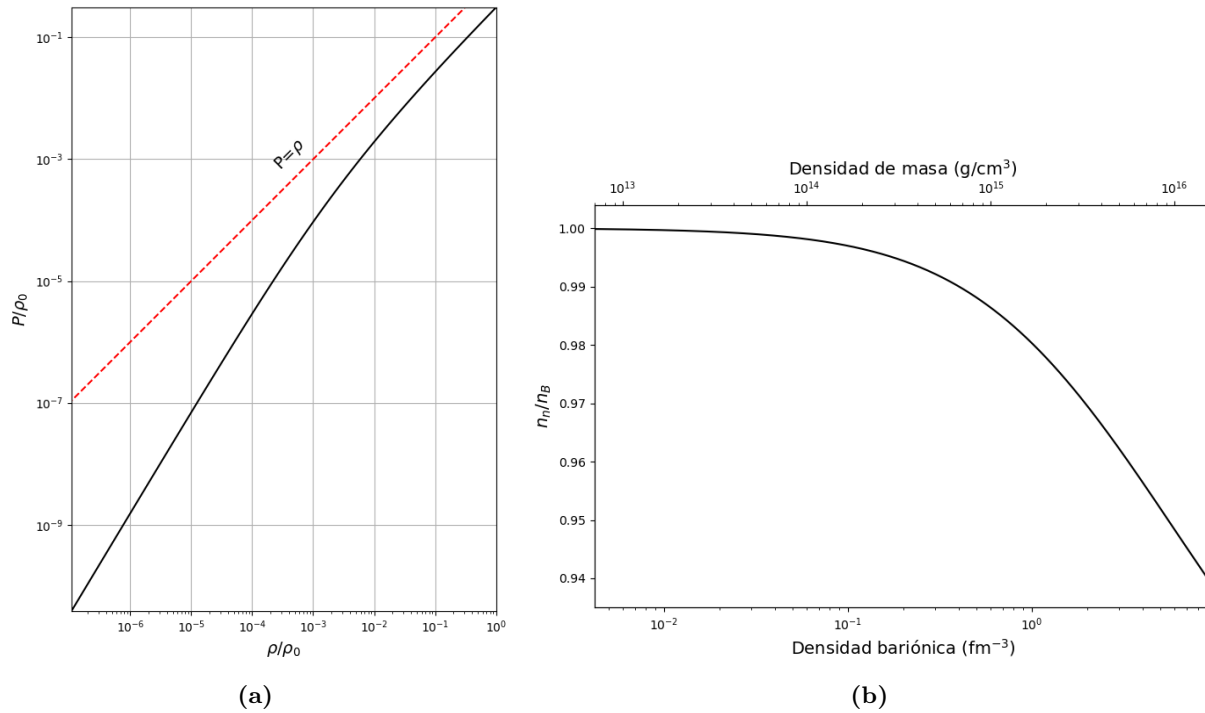
y el equilibrio beta débil

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e \implies \mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad (3.7)$$

entre los potenciales químicos  $\mu_i$ , suponiendo que los neutrinos escapan del sistema sin alterar su energía. Estas restricciones permiten expresar todas las densidades en función de un parámetro libre como el momento de Fermi del electrón  $p_{Fe}$ , lo que reduce el sistema a una parametrización unidimensional.

La figura 3.1a muestra la ecuación de estado adimensionalizada para un gas ideal de neutrones, protones y electrones libres, obtenida tras resolver el sistema de integrales (3.4) y (3.5) e interpolar, verificando que es causal ( $c_s^2 < 1$ ). Adicionalmente, la figura 3.1b muestra la fracción de neutrones respecto al número total de nucleones (bariones)  $n_n/n_B = n_n/(n_n + n_p)$  como función de la densidad bariónica  $n_B$ . Se muestra la fracción de neutrones en el rango de densidades de  $7.0 \times 10^{12}$  g/cm<sup>3</sup> a  $1.6 \times 10^{16}$  g/cm<sup>3</sup>. La fracción de neutrones en este rango de densidades inicia muy cercana al 100 %, disminuyendo lentamente a medida que la densidad aumenta, alcanzando aproximadamente un 94.5 % al llegar a  $10^{16}$  g/cm<sup>3</sup>, consistente con lo esperado para materia nuclear en equilibrio beta [35].

Luego de obtener la ecuación de estado e integrando las ecuaciones TOV (2.11 - 2.13) obtenemos las masas y radios de estrellas construidas con este material, como se muestra en la figura 3.2. Este modelo sencillo predice una masa máxima de apenas  $0.7 M_\odot$ , muy inferior a las masas que se han observado de estrellas



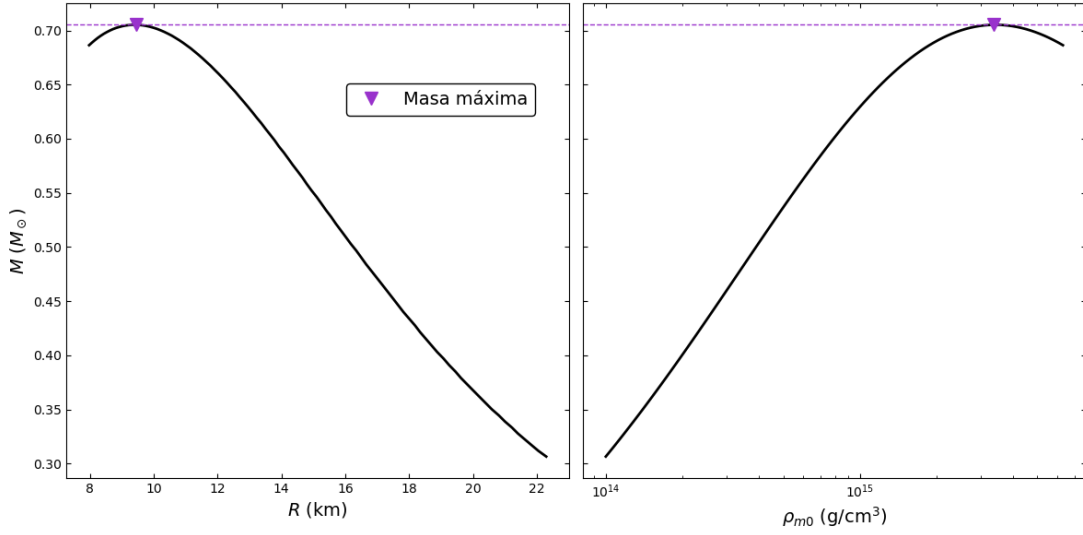
**Figura 3.1:** Propiedades del gas ideal degenerado de neutrones, protones y electrones. (a) Ecuación de estado normalizada. La ecuación de estado es causal ( $c_s^2 = dP/d\rho < 1$ ).  $\rho_0$  es el parámetro de adimensionalización y corresponde a la densidad de energía a  $\rho_m = 10^{18} \text{ g/cm}^3$ . (b) Fracción de neutrones respecto al número de nucleones  $n_n/n_B$  como función de la densidad bariónica  $n_B$ .

de neutrones (listadas en la sección 2.4), motivando la búsqueda de modelos más realistas que incluyan las interacciones nucleares para lograr replicar las observaciones.

### 3.2. Teoría Relativista de Campo Medio

La teoría relativista de campo medio, formulada por Walecka en 1974 [12], es un marco teórico que describe las interacciones nucleares mediante el intercambio de mesones efectivos, extendiendo el modelo de gas degenerado (discutido en 3.1.2) e incorporando naturalmente los efectos relativistas cuando los nucleones alcanzan velocidades comparables a la velocidad de la luz en condiciones de alta densidad. Esta aproximación ofrece ventajas significativas respecto a enfoques no-relativistas basados en potenciales fenomenológicos, ya que es una teoría covariante y reproduce simultáneamente las propiedades de saturación nuclear, el comportamiento asintótico a alta densidad, y la consistencia causal relativista. Además, al ser una teoría efectiva, requiere de un menor esfuerzo computacional respecto a teorías más fundamentales como QCD.

El formalismo se construye a partir de un lagrangiano que describe nucleones interactuando a través de campos mesónicos: los campos fermiónicos representan los grados de libertad nucleónicos y leptónicos,



**Figura 3.2:** Relaciones de masa - radio (izquierda) y masa - densidad central de masa (derecha) de estrellas de neutrones constituidas por un gas ideal de neutrones, protones y electrones libres.

mientras que los campos bosónicos representan mesones que median las interacciones fuertes. La aproximación de campo medio consiste en reemplazar los operadores de campo mesónicos por sus valores esperados en el estado base degenerado:

$$\langle \phi_i(x^\mu) \rangle = \phi_i^0 \equiv \text{constante}, \quad (3.8)$$

donde  $\phi_i$  denota los diferentes campos mesónicos del modelo. Esta aproximación es válida cuando las fluctuaciones cuánticas son pequeñas comparadas con los valores esperados de los campos, condición que se satisface para materia nuclear densa cuanto mayor es la densidad del sistema [13].

### 3.2.1. Simetrías y Conservaciones

El formalismo de la teoría relativista de campo medio se construye sobre la teoría cuántica de campos. La densidad lagrangiana  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \phi_a, \partial_\mu \phi_a)$  describe las interacciones entre campos fermiónicos  $\psi$  y campos bosónicos  $\phi_a$  junto con sus términos libres. Esta densidad lagrangiana debe satisfacer los requerimientos de localidad, covariancia de Lorentz, y las simetrías internas relevantes para las interacciones nucleares fuertes [2]. La acción del sistema se define como la integral de la densidad lagrangiana sobre el volumen espaciotemporal:

$$S[\psi, \phi_a] = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \phi_a, \partial_\mu \phi_a), \quad (3.9)$$

donde  $d^4x$  es el elemento de volumen en coordenadas de Minkowski. El principio de acción estacionaria establece que las configuraciones físicas de los campos corresponden a los extremos de este funcional, lo

que conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange para todos los campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_b} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_b)} \right) = 0, \quad (3.10)$$

donde  $\varphi_b$  representa todos los campos presentes. La teoría presenta simetrías externas e internas que determinan sus leyes de conservación y sus consecuencias físicas. Las simetrías externas son las transformaciones del grupo de Poincaré: traslaciones espaciotemporales  $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + a^\mu$  y boosts de Lorentz  $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ . Las simetrías internas relevantes incluyen la simetría de gauge global  $U(1)$   $\psi \mapsto e^{-i\lambda} \psi$  asociada con la conservación del número bariónico, y la simetría de isospín  $SU(2)$   $\psi \mapsto e^{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\lambda}} \psi$  asociada con la relación entre neutrones y protones, en la aproximación de iguales masas.

El teorema de Noether establece una correspondencia entre simetrías continuas del lagrangiano y cantidades conservadas. Para cada simetría continua existe una corriente conservada correspondiente que satisface una ecuación de continuidad. El tensor de energía-momento, asociado a la simetría externa, se define como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_j)} \partial^\nu \varphi_j - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \implies \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.11)$$

garantizando que la energía total  $\int d^3x T^{00}$  del sistema se conserve en el tiempo en ausencia de fuerzas externas (flujos de momento en la frontera).

La corriente bariónica, asociada a la simetría interna  $U(1)$ , se define como:

$$J_B^\mu = \sum_N \bar{\psi}_N \gamma^\mu \psi_N \implies \partial_\mu J_B^\mu = 0, \quad (3.12)$$

donde  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac y la suma se extiende sobre todas las especies de bariones presentes. Esto implica que el número bariónico  $\int d^3x J_B^0$  integrado sobre el volumen total del sistema permanece constante en el tiempo, reflejando el hecho experimental de que los bariones no se crean ni se destruyen en interacciones fuertes como se ha evidenciado por ALICE en el LHC [39] y se ha probado desde su postulación en 1940 [40].

La corriente de isospín, asociada a la simetría interna  $SU(2)$ , se define como:

$$\mathbf{J}_I^\mu = \sum_N \bar{\psi}_N \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_N \implies \partial_\mu \mathbf{J}_I^{\mu a} = 0, \quad (3.13)$$

donde  $\boldsymbol{\tau} = \tau^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) son las matrices de Pauli en el espacio de isospín. La simetría de isospín ha sido ampliamente utilizada para describir las interacciones nucleares. En la realidad física esta simetría está ligeramente rota por las diferencias de masa entre neutrones y protones, y por las interacciones electromagnéticas. Sin embargo, dado que estas violaciones son pequeñas en la escala de interacciones fuertes, pueden tratarse como pequeñas correcciones e ignorarse en una primera aproximación [41]. La conservación aproximada de isospín justifica el tratamiento unificado de neutrones y protones en modelos

de materia nuclear.

### 3.3. Modelo del Estudio

El modelo empleado en este trabajo incorpora nucleones (protones y neutrones) interactuando mediante campos mesónicos, y electrones libres. El lagrangiano total incluye términos para nucleones acoplados a los mesones, términos libres para electrones, un mesón escalar neutro  $\sigma$  con autointeracciones no-lineales hasta cuarto orden, un mesón vectorial neutro  $\omega^\mu$ , y un mesón vectorial isovectorial  $\rho^\mu$  [2]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi} \left[ \gamma^\mu (i\partial_\mu - g_\omega \omega_\mu - \tfrac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu) - (m - g_\sigma \sigma) \right] \psi \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3} b m (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 \\
& - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
& - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \\
& - g_\rho \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot [\boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{\rho}^{\nu\mu} + 2g_\rho (\boldsymbol{\rho}^\mu \times \boldsymbol{\rho}^\nu) \times \boldsymbol{\rho}_\nu] \\
& + \bar{\psi}_e (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e) \psi_e,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde  $\psi$  es una representación conveniente de los campos nucleónicos como un espinor de ocho componentes,  $\psi_e$  es el campo del electrón,  $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$  y  $\boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\rho}_\mu$  son los tensores antisimétricos de campo asociados a los mesones  $\omega$  y  $\boldsymbol{\rho}$  respectivamente,  $m \approx 938.92 \text{ MeV}$  es la masa de un nucleón considerada igual para protones y neutrones, y  $m_i$  es la masa de la especie  $i$ . Los parámetros adimensionales de acoplamiento  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$ ,  $g_\rho$  cuantifican la intensidad de las interacciones nucleón-mesón, y los parámetros adimensionales  $b$ ,  $c$  regulan la autointeracción del mesón sigma. En la construcción de este lagrangiano se acopla el campo escalar con la densidad escalar, el campo vectorial con la corriente bariónica, y el campo isovectorial con la 3-corriente de isospín. Esta última corriente contiene no solo una contribución por los nucleones, sino también una contribución por la corriente propia del campo  $\boldsymbol{\rho}$  y otra por la interacción del mesón con su propia 3-corriente.

Las ecuaciones de movimiento para los campos se obtienen mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.10). Para los campos mesónicos, se satisfacen:

$$(\square + m_\sigma^2) \sigma = g_\sigma [\bar{\psi} \psi - b m (g_\sigma \sigma)^2 - c (g_\sigma \sigma)^3], \tag{3.15}$$

$$(\square + m_\omega^2) \omega^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
(\square + m_\rho^2) \boldsymbol{\rho}^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \boldsymbol{\rho}^\nu = & \tfrac{1}{2} g_\rho \bar{\psi} \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \psi - 2g_\rho [\boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{\rho}^{\nu\mu} + \partial_\nu (\boldsymbol{\rho}^\mu \times \boldsymbol{\rho}^\nu) \\
& + 4g_\rho [(\boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu) \boldsymbol{\rho}^\nu - (\boldsymbol{\rho}_\nu \cdot \boldsymbol{\rho}^\nu) \boldsymbol{\rho}^\mu]].
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Para los campos fermiónicos se obtienen las ecuaciones de Dirac, acoplada a los campos mesónicos para los nucleones y libre para los electrones:

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_\omega \omega_\mu - \tfrac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu) - (m - g_\sigma \sigma)] \psi &= 0, \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e) \psi_e &= 0. \end{aligned}$$

Hasta el momento tenemos un conjunto de ecuaciones de movimiento diferenciales, no lineales y acopladas que describen la dinámica completa del sistema. Aplicamos la aproximación de campo medio descrita en la sección 3.2, considerando que tenemos materia estática y uniforme en su estado base, de modo que los valores esperados de los campos mesónicos son constantes en el espacio y el tiempo. En este caso, las derivadas espaciales y temporales de los campos mesónicos se anulan, simplificando las ecuaciones de movimiento a un sistema algebraico acoplado. Mantendremos las etiquetas para los campos, recordado que ahora son el valor esperado en el estado base. Para los mesones (3.15 - 3.17), sustituyendo consistentemente las fuentes de corriente por su valor esperado, se obtiene:

$$\begin{aligned} m_\sigma^2 \sigma &= g_\sigma [\langle \bar{\psi}_p \psi_p \rangle + \langle \bar{\psi}_n \psi_n \rangle - bm(g_\sigma \sigma)^2 - c(g_\sigma \sigma)^3], \\ m_\omega^2 \omega^\mu &= g_\omega [\langle \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p \rangle + \langle \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n \rangle], \\ m_\rho^2 \rho_3^\mu &= g_\rho [\tfrac{1}{2} \langle \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p \rangle - \tfrac{1}{2} \langle \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n \rangle], \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $\psi_i$  representa el campo fermiónico para la especie  $i = \{p, n\}$ , y las primeras dos componentes del mesón  $\boldsymbol{\rho}^\mu$  son escritas en términos de los operadores de creación y aniquilación para mesones rho cargados  $\rho_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_1^\mu \pm i\rho_2^\mu)$ , luego su valor esperado se anula en el estado base del sistema [2], anulando el término fuente de la corriente propia del campo.

Para los campos fermiónicos se tienen ecuaciones sin dependencia de las coordenadas de espacio-tiempo, siendo estados propios de momento:

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu (p_\mu - g_\omega \omega_\mu - g_\rho I_3 \rho_{3\mu}) - (m - g_\sigma \sigma)] \psi(p^\nu) &= 0, \\ (\gamma^\mu p_\mu - m_e) \psi_e(p^\nu) &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde  $I_3 = \{+\frac{1}{2}$  para protones,  $-\frac{1}{2}$  para neutrones} es el isospín de la partícula. En analogía con la ecuación de Dirac libre, definimos las cantidades de 4-momento y masa efectivas para nucleones:

$$\begin{aligned} P^\mu &= p^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho I_3 \rho_3^\mu, \\ m^* &= m - g_\sigma \sigma, \end{aligned} \quad (3.20)$$

obteniendo entonces la relación de dispersión relativista:

$$(P_\mu P^\mu - m^{*2}) \psi(P^\nu) = 0, \quad (3.21)$$

luego los valores propios de energía para los nucleones son:

$$\epsilon(\vec{p})_{I_3} = \sqrt{(\vec{p} - g_\omega \vec{\omega} - g_\rho I_3 \vec{\rho}_3)^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2} + g_\omega \omega_0 + g_\rho I_3 \rho_{30}. \quad (3.22)$$

Ahora, los valores esperados de los operadores en (3.18) se calculan con el método descrito en el Apéndice 6.1. Luego, las ecuaciones de movimiento quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m_\sigma^2 \sigma &= g_\sigma \sum_N \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_{FN}} \frac{p^2 (m - g_\sigma \sigma) dp}{\sqrt{p^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2}} - g_\sigma b m (g_\sigma \sigma)^2 - g_\sigma c (g_\sigma \sigma)^3, \\ m_\omega^2 \omega_0 &= \frac{1}{3\pi^2} g_\omega (p_{Fp}^3 + p_{Fn}^3), \\ m_\rho^2 \rho_{30} &= \frac{1}{6\pi^2} g_\rho (p_{Fp}^3 - p_{Fn}^3), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $N$  indica la suma sobre protones y neutrones. Observamos que las componentes espaciales de los campos vectoriales se anulan debido a la isotropía del sistema en su estado base.

Para hallar la ecuación de estado, calculamos el tensor de energía-momento canónico (3.11) en el marco de referencia del fluido en reposo e isotrópico, utilizando el lagrangiano (3.14). Luego, hallamos el valor esperado de sus componentes empleando el mismo método del Apéndice 6.1 y las identificamos con las cantidades termodinámicas de densidad de energía y presión para un fluido perfecto (2.3). Las expresiones para densidad de energía y presión son:

$$\begin{aligned} \rho = \langle T^{00} \rangle &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{3} b m (g_\sigma \sigma)^3 + \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{30}^2 \\ &+ \sum_N \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_{FN}} p^2 dp \sqrt{p^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_{Fe}} p^2 dp \sqrt{p^2 + m_e^2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{3} \sum_i \langle T^{ii} \rangle &= -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{3} b m (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{30}^2 \\ &+ \sum_N \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{p_{FN}} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2}} + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{p_{Fe}} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + m_e^2}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ahora, con el fin de resolver numéricamente el sistema, nos interesa reescribir las ecuaciones necesarias en términos de variables adimensionales. Definimos entonces las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{m}, & \tilde{x}_\sigma &= 1 - \frac{g_\sigma \sigma}{m} = \frac{m^*}{m}, \\ A_i &= \left( \frac{g_i}{m_i} \right)^2 m^2, & \tilde{n} &= \frac{n_B}{m^3} = \frac{1}{3\pi^2} (x_{Fp}^3 + x_{Fn}^3), \\ \tilde{\rho} &= \frac{2\rho}{m^4}, & \tilde{P} &= \frac{2P}{m^4}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde  $i = \{\sigma, \omega, \rho\}$ . Usando estas variables, la ecuación de movimiento para el campo escalar (3.23) se escribe como:

$$(1 - \tilde{x}_\sigma) - A_\sigma \left[ \frac{1}{\pi} \sum_N \int_0^{x_{FN}} \frac{\tilde{x}_\sigma x^2 dx}{\sqrt{x^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} - b(1 - \tilde{x}_\sigma)^2 - c(1 - \tilde{x}_\sigma)^3 \right] = 0, \quad (3.27)$$

donde  $x_{Fi} = p_{Fi}/m$  son los momentos de Fermi adimensionales. Las expresiones para densidad de energía (3.24) y presión (3.25), utilizando las expresiones para la densidad bariónica (6.5) y la densidad de 3-isospín (6.6), quedan:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = & \frac{1}{A_\sigma}(1 - \tilde{x}_\sigma)^2 + \frac{2}{3}b(1 - \tilde{x}_\sigma)^3 + \frac{1}{2}c(1 - \tilde{x}_\sigma)^4 + A_\omega \tilde{n}^2 + \frac{1}{36\pi^4} A_\rho (x_{Fp}^3 - x_{Fn}^3)^2 \\ & + \sum_N \frac{2}{\pi^2} \int_0^{x_{FN}} \sqrt{x^2 + \tilde{x}_\sigma^2} x^2 dx + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{x_{Fe}} \sqrt{x^2 + \left(\frac{m_e}{m}\right)^2} x^2 dx, \end{aligned} \quad (3.28)$$

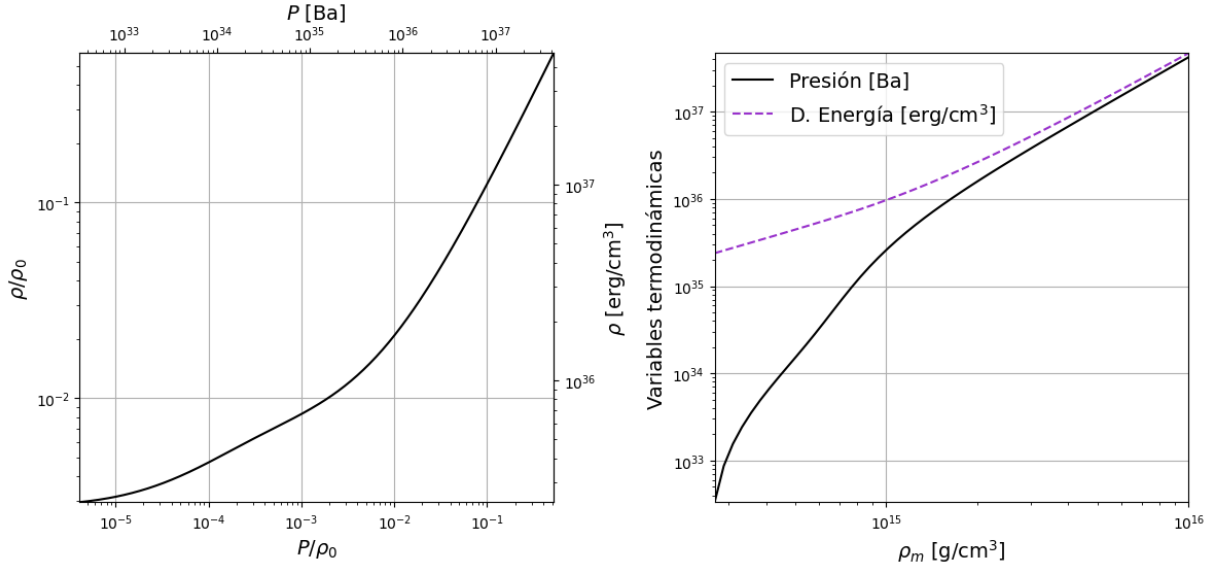
$$\begin{aligned} \tilde{P} = & -\frac{1}{A_\sigma}(1 - \tilde{x}_\sigma)^2 - \frac{2}{3}b(1 - \tilde{x}_\sigma)^3 - \frac{1}{2}c(1 - \tilde{x}_\sigma)^4 + A_\omega \tilde{n}^2 + \frac{1}{36\pi^4} A_\rho (x_{Fp}^3 - x_{Fn}^3)^2 \\ & + \sum_N \frac{2}{3\pi^2} \int_0^{x_{FN}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} + \frac{2}{3\pi^2} \int_0^{x_{Fe}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{m_e}{m}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Estas expresiones son funciones de la densidad de número de protones, neutrones y electrones. Si queremos describir la materia en el interior de estrellas de neutrones, debemos considerar ligaduras que nos permitirán cerrar el sistema de ecuaciones. Es necesario imponer las mismas condiciones de neutralidad local de carga (3.6) y equilibrio beta (3.7) discutidas para el gas ideal degenerado en la Sección 3.1.2, así como la conservación del número de bariones  $n_B = n_p + n_n$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} x_{Fp} &= x_{Fe}, \\ \sqrt{x_{Fn}^2 + \tilde{x}_\sigma^2} - \sqrt{x_{Fp}^2 + \tilde{x}_\sigma^2} - \frac{1}{6\pi^2} A_\rho - \sqrt{x_{Fe}^2 + \left(\frac{m_e}{m}\right)^2} &= 0, \\ x_{Fp} &= (3\pi^2 \tilde{n} - x_{Fn}^3)^{1/3}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

De las expresiones adimensionalizadas (3.27 - 3.30) podemos entender el sistema físico descrito por el modelo. Primero, es importante notar que, si bien definimos ocho constantes inicialmente ( $g_i$ ,  $m_i$  con  $i = \{\sigma, \omega, \rho\}$ ,  $b, c$ ), las ecuaciones solo dependen de cinco combinaciones adimensionales de estas constantes: los cocientes  $A_i$ , y los parámetros de autointeracción escalar  $b$  y  $c$ . Por lo tanto, el modelo tiene cinco parámetros libres que deben ser ajustados para reproducir datos experimentales o teóricos adicionales. En segundo lugar, podemos deducir de las integrales en las ecuaciones para el campo escalar, la densidad de energía y la presión que el campo escalar  $\sigma$  actúa para reducir la masa efectiva de los nucleones disminuyendo la energía por partícula a mayores densidades, mientras que el campo vectorial  $\omega_0$  aumenta la energía por partícula debido a su acoplamiento con la densidad bariónica total. Esto indica que el mesón  $\sigma$  genera una interacción atractiva entre nucleones, mientras que el mesón  $\omega$  genera una interacción repulsiva. Finalmente, el mesón  $\rho$  actúa para ajustar la diferencia entre las densidades de protones y

neutrones con un efecto “repulsivo” ante la asimetría del sistema.



**Figura 3.3:** Ecuación de estado (izquierda) y variables termodinámicas en función de la densidad de masa (derecha) para el núcleo de estrellas de neutrones empleando teoría relativista de campo medio.  $\rho_0 = m^4/2$  es el factor de adimensionalización. Se usaron los parámetros  $\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = 12.684 \text{ fm}^2$ ,  $\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 = 7.148 \text{ fm}^2$ ,  $\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 = 4.410 \text{ fm}^2$ ,  $b = 5.610 \times 10^{-3}$  y  $c = -6.986 \times 10^{-3}$  como referencia.

Dados los parámetros libres del modelo, tenemos un sistema cerrado que podemos resolver numéricamente para cada valor de  $n_B$ , obteniendo la ecuación de estado  $\tilde{\rho}(\tilde{P})$ , como se muestra en la figura 3.3. Sin embargo, aún es necesario restringir los parámetros que hacen al modelo físicamente consistente. Para ello, acudimos a las propiedades empíricas de la materia nuclear en saturación, descritas a continuación.

### 3.3.1. Materia en Saturación Nuclear

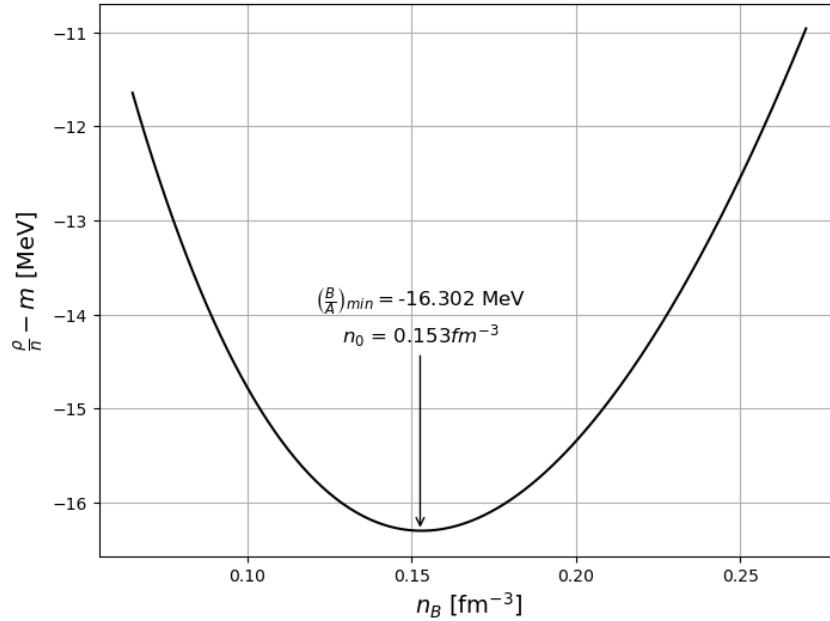
Si suprimimos los electrones libres del modelo (3.14) y consideramos materia nuclear simétrica ( $n_p = n_n$ ), el sistema se reduce a un fluido de nucleones interactuando mediante los campos mesónicos. Este sistema debe reproducir las propiedades de la materia nuclear en saturación, caracterizada por parámetros empíricos que añaden restricciones obligatorias para cualquier teoría microscópica válida [29]. De estos parámetros, consideraremos cinco que pueden determinarse experimentalmente mediante mediciones en laboratorios terrestres, siendo una herramienta de calibración para los modelos teóricos nucleares.

La densidad de saturación nuclear,  $n_0$ , define la densidad a la cual la materia nuclear simétrica alcanza su estado de mínima energía de enlace por nucleón,  $\frac{B}{A}$ . Tras aplicar un análisis bayesiano a una colección de ligaduras de la Teoría Funcional de la Densidad, que incluyen modelos relativistas de campo medio y de Skyrme, se obtienen valores [42]:

$$n_0 = 0.157 \pm 0.010 \text{ fm}^{-3}, \quad (3.31)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho(n_0)}{n_0} - m = -15.97 \pm 0.40 \text{ MeV}. \quad (3.32)$$

Este resultado empírico es consistente con estimaciones realizadas a partir de mediciones de dispersión de electrones con violación de paridad en  $^{208}\text{Pb}$  en el experimento PREX [43] y ajustes de 1654 núcleos atómicos a un modelo de gota líquida [29, 32]. En nuestro modelo (3.14), estas propiedades de saturación se determinan hallando el mínimo de la función  $\frac{B}{A}(n_B)$  en ausencia de electrones, como se muestra de ejemplo en la figura 3.4.



**Figura 3.4:** Energía de enlace por nucleón en función de la densidad bariónica para materia nuclear simétrica sin electrones. La densidad de saturación  $n_0$  y la energía de enlace por nucleón en saturación  $\frac{B}{A}$  se señalan en el mínimo. Se usaron los parámetros  $\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = 12.684 \text{ fm}^2$ ,  $\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 = 7.148 \text{ fm}^2$ ,  $\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 = 4.410 \text{ fm}^2$ ,  $b = 5.610 \times 10^{-3}$ ,  $c = -6.986 \times 10^{-3}$ .

El módulo de compresibilidad nuclear,  $K_0$ , caracteriza la rigidez de la materia nuclear ante compresiones alrededor del punto de saturación. Este parámetro es determinante para la extrapolación de la ecuación de estado a densidades supranucleares, y es estimado mediante las resonancias monopoles en núcleos pesados. Considerando un modelo de cadena de núcleos para esta resonancia en  $^{208}\text{Pb}$ , se obtiene [29, 44]:

$$K_0 = 9n_0^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \frac{\rho}{n} \right) \Big|_{n=n_0} = 230 \pm 40 \text{ MeV}. \quad (3.33)$$

Esta cantidad está relacionada algebraicamente con cantidades de nuestro modelo de materia simétrica en saturación mediante:

$$\begin{aligned} \frac{K_0}{3m} &= \frac{2}{\pi^2} A_\omega x_F^3 + \frac{x_F^2}{\sqrt{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} - \frac{2A_\sigma}{\pi^2} \frac{x_F^3 \tilde{x}_\sigma^2}{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2} F^{-1}, \\ F &= 1 + A_\sigma(1 - \tilde{x}_\sigma)[2b + 3c(1 - \tilde{x}_\sigma)] + \frac{2A_\sigma}{\pi^2} \int_0^{x_F} \frac{x^4 dx}{(x^2 + \tilde{x}_\sigma^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde  $x_F p = x_F n = x_F$ .

La energía de simetría,  $a_{\text{sym}}$ , cuantifica el costo energético de desviarse de la composición simétrica. Esta cantidad determina la composición de protones y neutrones en materia nuclear densa, afectando directamente las propiedades de las estrellas de neutrones. La pendiente de la energía de simetría,  $L_0$ , describe la dependencia de la energía de simetría con la densidad de bariones alrededor de la densidad de saturación.

Para estas dos cantidades, tras una revisión de 28 estimaciones tanto de experimentos terrestres como de observaciones astronómicas de estrellas de neutrones, se estiman valores representativos [29, 45]:

$$a_{\text{sym}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{E}{A} \right) \bigg|_{t=0} = 31.6 \pm 2.7 \text{ MeV}, \quad (3.35)$$

$$L_0 = 3n_0 \frac{\partial a_{\text{sym}}}{\partial n} \bigg|_{n=n_0} = 58.9 \pm 16 \text{ MeV}, \quad (3.36)$$

donde  $t = (n_n - n_p)/n_B$  es el parámetro de asimetría de isospín. Es de notar que, si bien el valor fiduciario tiene una baja incertidumbre, las estimaciones individuales de  $L_0$  varían ampliamente con intervalos de confianza que se estiman entre 20 y 120 MeV debido a la dificultad para acceder a materia altamente asimétrica en el laboratorio [46]. En nuestro modelo, estas cantidades pueden calcularse como:

$$\frac{a_{\text{sym}}}{m} = \frac{x_F^2}{6\sqrt{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} + \frac{1}{12\pi^2} A_\rho x_F^3, \quad (3.37)$$

$$\frac{L_0}{m} = \frac{x_F^2}{6\sqrt{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} \left( 1 + \frac{\tilde{x}_\sigma^2}{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2} \right) + \frac{1}{4\pi^2} A_\rho x_F^3. \quad (3.38)$$

Estas cinco propiedades empíricas ( $n_0$ ,  $\frac{B}{A}$ ,  $K_0$ ,  $a_{\text{sym}}$ ,  $L_0$ ) definen restricciones que cualquier ecuación de estado microscópica debe satisfacer para ser físicamente viable. En el contexto de la teoría relativista de campo medio, estas propiedades y sus incertidumbres se utilizan para determinar las regiones en el espacio de parámetros que producen ecuaciones de estado físicamente aceptables frente a mediciones nucleares experimentales.

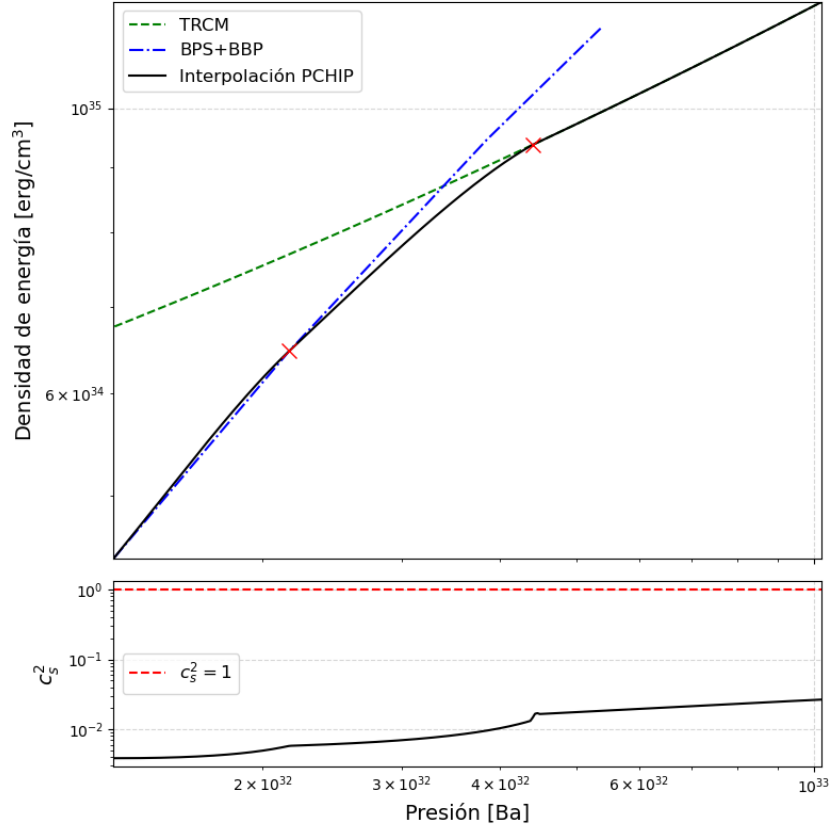
### 3.4. Corteza de la Estrella

El modelo de teoría relativista de campo medio desarrollado es una descripción de la materia nuclear en el régimen de alta densidad, específicamente para densidades bariónicas superiores a aproximadamente  $0.1 \text{ fm}^{-3}$  o  $\rho_m \gtrsim 1.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ , donde las interacciones nucleón-nucleón dominan la dinámica del sistema y la aproximación de campo medio tiene sentido. Sin embargo, las estrellas de neutrones presentan una estructura estratificada que incluye regiones de menor densidad donde esta aproximación deja de ser aplicable. La corteza de la estrella, que se extiende desde la superficie hasta el núcleo denso, abarca un rango de densidades de varios órdenes de magnitud y requiere tratamientos teóricos distintos según el régimen de densidad considerado [35].

El alcance del presente estudio se concentra en la descripción microscópica de la materia nuclear en el régimen de altas energías en las estrellas de neutrones, donde las densidades superan varias veces la densidad de saturación  $n_0$ . Para la descripción de la corteza utilizamos las ecuaciones de estado estándar BPS y BBP. Para densidades inferiores al punto de goteo de neutrones ( $n_{\text{drip}} \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$  o  $\rho_m \approx 4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ), la materia se compone de una red cristalina de núcleos pesados embebidos en un gas degenerado de electrones, configuración conocida como corteza externa. En este régimen, la ecuación de estado BPS (Baym, Pethick y Sutherland, 1971) [47] es una descripción consistentemente basada en la minimización de la energía del estado base de núcleos atómicos para cada densidad, junto con la contribución del gas de electrones relativista. El modelo BPS determina la composición nuclear óptima mediante la competencia entre la energía de masa nuclear, la energía de Coulomb de la red, y la presión del gas electrónico. Por encima de la densidad de goteo de neutrones y hasta densidades del orden de  $0.2 \text{ fm}^{-3}$  o  $\rho_m \approx 3.2 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$  se encuentra la corteza interna, donde los núcleos coexisten con un gas de neutrones libres además del gas de electrones. En este régimen, la ecuación de estado BBP (Baym, Bethe y Pethick, 1971) [48] describe la materia mediante un modelo de gota líquida que considera las contribuciones energéticas de los núcleos, el gas de neutrones libres, y las interacciones nucleares efectivas de la red. Este modelo determina autoconsistentemente la composición nuclear y la fracción de neutrones libres mediante la minimización de la energía total del sistema, que incluye términos de energía de superficie, energía de Coulomb, y energía de simetría nuclear.

Para construir una ecuación de estado unificada que abarque todo el rango de densidades presente en la estrella, desde la superficie hasta el núcleo, empleamos el método de interpolación PCHIP (Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial), que garantiza una transición suave y monótona entre las diferentes ecuaciones de estado. Este método de interpolación preserva la forma de los datos y evita oscilaciones no físicas que podrían introducir otros métodos de interpolación polinómica. Definimos la densidad de empalme entre la ecuación de estado BBP y nuestro modelo de teoría relativista de campo medio entre  $n_B = 0.043 \text{ fm}^{-3}$  y  $n_B = 0.063 \text{ fm}^{-3}$ , correspondiente a una densidad de masa de entre  $7.20 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$

y  $1.05 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Esta elección se fundamenta en la necesidad de garantizar la causalidad del fluido en toda la estrella, es decir, que la velocidad del sonido  $c_s^2 = dP/d\rho$  no exceda la velocidad de la luz  $c$  en ningún punto. El resultado de esta interpolación para un conjunto de parámetros de ejemplo y su comprobación de causalidad se muestra en la figura 3.5.



**Figura 3.5:** Ecuación de estado unificada para la estrella de neutrones, construida mediante interpolación PCHIP entre las ecuaciones de estado BPS, BBP y el modelo TRCM. Las X marcan los límites de la región de empalme. El panel inferior muestra el cuadrado de la velocidad del sonido  $c_s^2$  para verificar la condición de causalidad. Se usaron los parámetros  $\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = 12.684 \text{ fm}^2$ ,  $\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 = 7.148 \text{ fm}^2$ ,  $\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 = 4.410 \text{ fm}^2$ ,  $b = 5.610 \times 10^{-3}$ ,  $c = -6.986 \times 10^{-3}$ .

## Capítulo 4

# Resultados y discusión

Este capítulo se estructura en dos partes complementarias. Primero, se realiza un análisis del comportamiento del modelo, examinando las soluciones autoconsistentes para el campo escalar (3.27) y los momentos de Fermi del neutrón y protón (3.30), la descomposición de la energía de enlace en sus contribuciones mesónicas y las condiciones de aceptabilidad física, basadas en los criterios recopilados por Ospino et al. [49] y Hernández et al. [50].

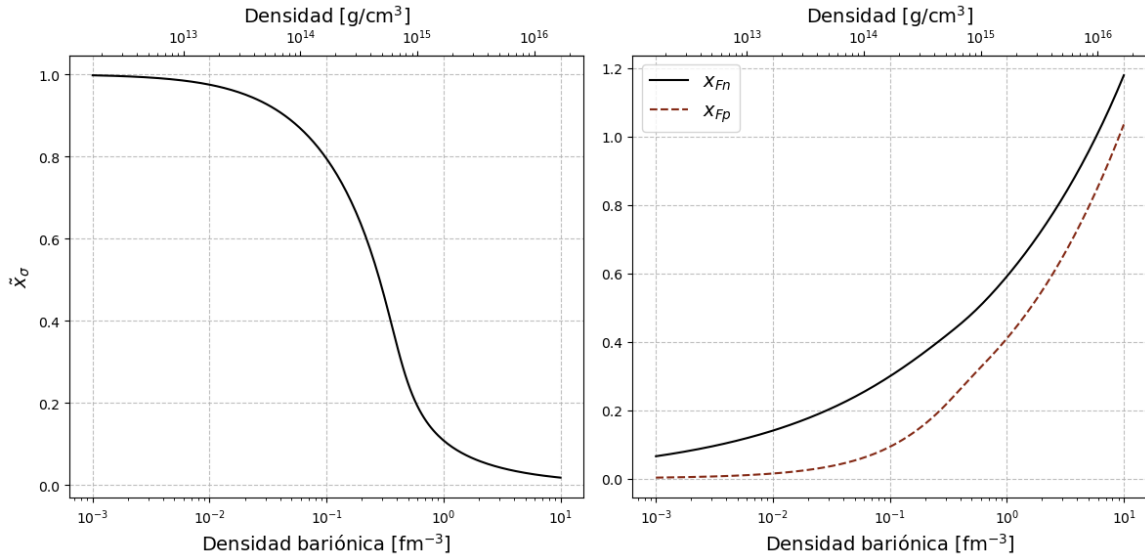
La segunda parte aborda la caracterización sistemática del espacio de parámetros. El objetivo central es identificar los conjuntos de parámetros que satisfacen simultáneamente las restricciones nucleares y las observaciones astrofísicas actuales. Este estudio establece relaciones directas entre los parámetros microscópicos de la materia (3.14) y las propiedades macroscópicas observables, permitiendo comprender cómo las interacciones nucleares determinan la estructura de las estrellas de neutrones. En particular, se busca determinar el conjunto de parámetros que maximiza la masa estelar, estableciendo así límites superiores que puedan ser confrontados con las observaciones de los objetos más masivos detectados hasta la fecha.

## 4.1. Sobre el Modelo Nuclear

Antes de explorar el espacio de parámetros, es importante analizar el comportamiento de las variables dinámicas del modelo y cómo estas determinan las propiedades de la materia nuclear. A continuación, se discuten algunas características relevantes.

### 4.1.1. Soluciones de Autoconsistencia

La ecuación del movimiento para el campo escalar (3.27) junto con la condición de equilibrio beta y neutralidad de carga (3.30) forman un sistema de ecuaciones acopladas no lineales que deben resolverse de manera autoconsistente para cada valor de densidad bariónica,  $n_B$ . Para un conjunto de parámetros específico, en la figura 4.1 se muestran la masa efectiva adimensional  $\tilde{x}_\sigma = (1 - g_\sigma \sigma / m) = m^* / m$  y los momentos de Fermi adimensionales del neutrón  $x_{Fn}$  y el protón  $x_{Fp}$  en función de la densidad bariónica  $n_B$ . Las soluciones se muestran para densidades bariónicas desde  $n_B = 0.001 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 1.7 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ ) hasta  $10 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 1.7 \times 10^{16} \text{ g cm}^{-3}$ ), mostrando el comportamiento de estas variables en el rango relevante para la materia nuclear y las estrellas de neutrones.



**Figura 4.1:** Soluciones autoconsistentes para la masa efectiva adimensional  $\tilde{x}_\sigma$  (izquierda) y los momentos de Fermi adimensionales del neutrón  $x_{Fn}$  y el protón  $x_{Fp}$  (derecha) en función de la densidad bariónica  $n_B$ . Se usaron los parámetros  $\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = 12.684 \text{ fm}^2$ ,  $\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 = 7.148 \text{ fm}^2$ ,  $\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 = 4.410 \text{ fm}^2$ ,  $b = 5.610 \times 10^{-3}$ ,  $c = -6.986 \times 10^{-3}$ .

La masa efectiva de los nucleones disminuye con la densidad en el medio y el valor de  $\tilde{x}_\sigma$  esta acotado tanto superior como inferiormente. A densidades bajas ( $n_B \ll n_0 = 0.157 \text{ fm}^{-3}$ ) la masa efectiva tiende a la masa del nucleón en el vacío,  $m^* \rightarrow m$ , mientras que a densidades altas ( $n_B \gg n_0$ ) la masa efectiva

tiende a cero,  $m^* \rightarrow 0$ . Esta disminución de la masa efectiva con la densidad implica que el mesón escalar  $\sigma$  disminuye la energía  $e(p) = \sqrt{p^2 + m^{*2}}$  de los nucleones en el medio cuando los nucleones se acercan entre sí, reflejando la naturaleza atractiva de esta interacción. En cuanto a los momentos de Fermi, se observa que ambos aumentan con la densidad bariónica, siendo  $x_{Fn}$  siempre mayor a  $x_{Fp}$  debido a la condición de equilibrio beta y neutralidad de carga. A medida que la densidad aumenta, la diferencia entre ambos momentos de Fermi disminuye, indicando que la materia se hace más simétrica en isospín a altas densidades, aunque siempre con exceso de neutrones. Comparando los comportamientos de  $\tilde{x}_\sigma$ ,  $x_{Fn}$  y  $x_{Fp}$ , se observa que la disminución de la masa efectiva está correlacionada con la tasa de aumento de los momentos de Fermi, ya que una masa efectiva menor implica una mayor energía cinética para los nucleones a un mismo nivel de Fermi, favoreciendo la ocupación de estados de mayor momento.

#### 4.1.2. Descomposición de la Energía de Enlace

La energía de enlace por nucleón de materia simétrica,  $B/A$  (3.32), contiene información relevante sobre las interacciones nucleares y la estructura de la materia nuclear. Es posible descomponer esta energía (3.28) en términos de las contribuciones individuales de los campos mesónicos  $\sigma$  y  $\omega$  (al ser materia simétrica, la contribución del mesón  $\rho$  es nula). La descomposición se realiza separando los términos que contienen cada campo mesónico, de modo que la contribución del mesón  $\omega$  es:

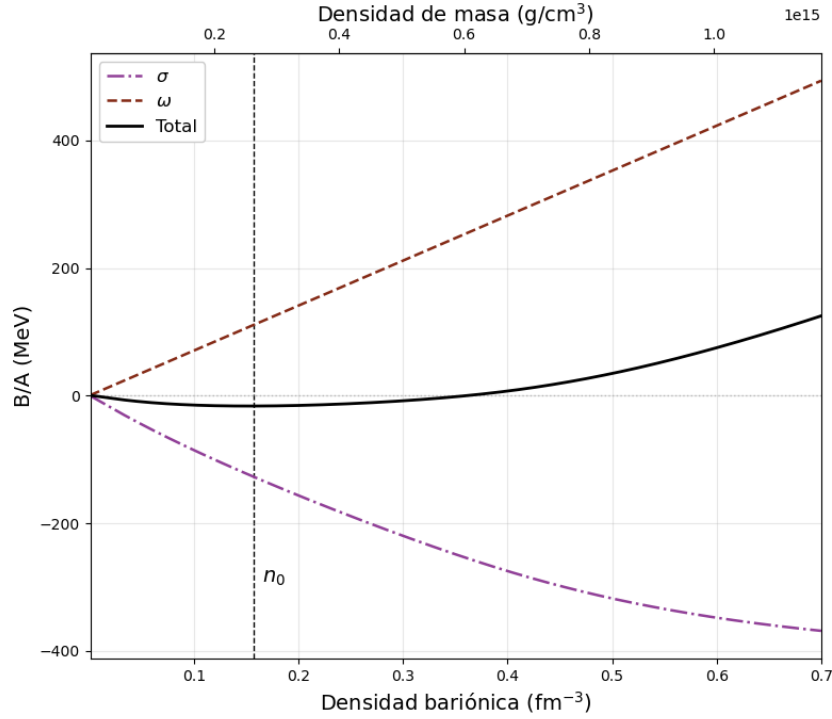
$$\frac{B_\omega}{A} = \frac{A_\omega}{2m^2} n_B, \quad (4.1)$$

y la contribución del mesón  $\sigma$  es:

$$\frac{B_\sigma}{A} = \frac{m^4}{2n_B} \left( \frac{1}{A_\sigma} (1 - \tilde{x}_\sigma)^2 + \frac{2}{3} b (1 - \tilde{x}_\sigma)^3 + \frac{1}{2} c (1 - \tilde{x}_\sigma)^4 + \sum_N \frac{2}{\pi^2} \int_0^{x_{FN}} \sqrt{x^2 + \tilde{x}_\sigma^2} x^2 dx \right) - m. \quad (4.2)$$

En la figura 4.2 se muestra la descomposición de la energía de enlace por nucleón  $B/A$  y sus contribuciones mesónicas en función de la densidad bariónica a partir de  $n_B = 0.001 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 1.7 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ ) hasta  $n_B = 0.75 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 1.3 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ), mostrando su comportamiento alrededor de saturación y a densidades varias veces superiores. Se observa que la contribución del mesón  $\sigma$  es negativa mientras que la contribución del mesón  $\omega$  es positiva. Como es de esperar por la naturaleza de cada campo, el mesón  $\sigma$  favorece la unión de los nucleones disminuyendo la energía total del sistema al aumentar la densidad, mientras que el mesón  $\omega$  actúa aumentando la energía total linealmente con la densidad, lo que favorece la separación de los nucleones. A bajas densidades, la contribución del mesón  $\sigma$  domina el sistema, resultando en una interacción atractiva. Sin embargo, a medida que la densidad aumenta, la contribución repulsiva del mesón  $\omega$  crece más rápidamente, superando eventualmente a la contribución atractiva. Este comportamiento implica la existencia de una densidad crítica  $n_0$  donde la interacción neta cambia

de atractiva a repulsiva y la energía de enlace tiene un mínimo, lo cual es necesario para reproducir las propiedades de saturación de la materia nuclear. Es también notorio que alrededor de esta densidad la energía de enlace es negativa, indicando que la materia nuclear es más estable que los nucleones libres (materia ligada), mientras que a densidades más altas la energía de enlace se vuelve positiva, mostrando la naturaleza repulsiva de la interacción nuclear a densidades extremas.



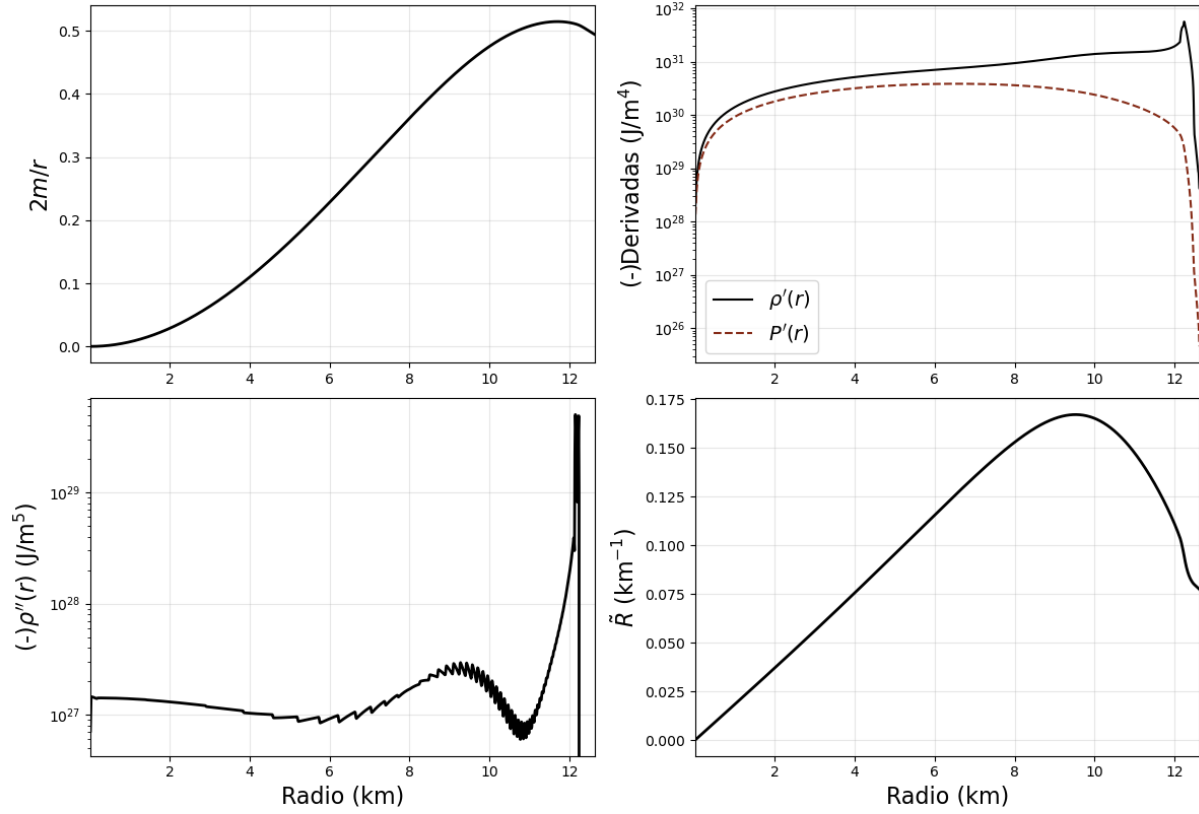
**Figura 4.2:** Descomposición de la energía de enlace por nucleón  $B/A$  en sus contribuciones mesónicas del mesón escalar  $\sigma$  y el mesón vectorial  $\omega$  en función de la densidad bariónica  $n_B$ . Se usaron los parámetros  $\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = 12.684 \text{ fm}^2$ ,  $\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 = 7.148 \text{ fm}^2$ ,  $b = 5.610 \times 10^{-3}$ ,  $c = -6.986 \times 10^{-3}$ .

#### 4.1.3. Condiciones de Aceptabilidad Física

En Ospino et al. [49] y Hernández et al. [50] se recopilan una serie de criterios teóricos que un modelo estelar debe satisfacer para ser considerado físicamente admisible en el contexto de las estrellas de neutrones. Estos criterios incluyen condiciones sobre la estabilidad mecánica, la causalidad, la monotonía de la densidad y presión, entre otros.

Para verificar el cumplimiento de estas condiciones en el presente modelo, se evaluaron numéricamente para una configuración estelar generada con los parámetros de la figura 3.3 y una densidad central de  $\rho_{m0} = 1 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ . Los resultados se presentan en la figura 4.3, donde se muestran la compacidad  $2m(r)/r$ , los gradientes de presión y densidad de energía, la segunda derivada de la densidad de energía

y la perturbación en las fuerzas radiales en función del radio estelar.



**Figura 4.3:** Verificación de condiciones de aceptabilidad física para una estrella con densidad central  $\rho_{m0} = 1 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$  y los parámetros de la figura 3.3. Se muestran la compacidad  $2m(r)/r$  (panel superior izquierdo), los gradientes de presión y densidad de energía por -1 (panel superior derecho), la segunda derivada de la densidad de energía por -1 (panel inferior izquierdo) y la perturbación en las fuerzas radiales (panel inferior derecho).

De la figura 4.3, se observa que la condición **C1** se satisface, ya que  $2m(r)/r < 1$  en todo el interior, garantizando que la métrica es positiva y regular. La condición **C2** de regularidad en el origen, que exige presión y densidad positivas y finitas en el centro, se satisface como se aprecia en la figura 3.3 y por construcción de las condiciones de frontera de las ecuaciones TOV. La figura muestra que tanto la presión como la densidad de energía decrecen monotonamente ( $\rho' < 0$  y  $P' < 0$ ) desde el centro hacia la superficie, satisfaciendo la condición **C3**.

Respecto a la estabilidad ante agrietamientos **C7**, el panel inferior derecho muestra la perturbación en las fuerzas radiales  $\tilde{R}$ . La condición de estabilidad requiere que  $\tilde{R} > 0$  y  $\tilde{R}$  no cambie de signo en la estrella ante perturbaciones de densidad positivas. La perturbación se define, en unidades geometrizadas, como:

$$\tilde{R} = 2 \frac{m + 4\pi P r^3}{r(r - 2m)} + \frac{4\pi r^3 (\rho + P)(1 + 8\pi P r^2)}{3(r - 2m)^2}, \quad (4.3)$$

donde se siguen las definiciones de Abreu et al. [51]. Como se observa en la figura, la condición se cumple en todo el interior estelar.

La condición de estabilidad convectiva **C8** requiere que la densidad de energía sea una función convexa del radio, o equivalentemente, que su segunda derivada sea negativa. En la figura se observa que esta condición se satisface en aproximadamente el 97 % de la estrella, hasta un radio de 12.25 km. Cerca de la superficie la condición se viola, un comportamiento que también ha sido reportado [52] para otros modelos relativistas de campo medio, como el propuesto por Lalazissis et al. [53].

Adicionalmente, como se observó en las figuras 3.3 y 3.5, la condición dominante de energía  $\rho \geq P$  y la condición de causalidad  $v_s \leq c$  **C4** se cumplen para este modelo. La condición de Harrison-Zeldovich-Novikov **C6** se satisface si  $dM/d\rho_c > 0$ , de modo que sólo consideramos válidas las configuraciones estelares que cumplen esta condición, aún cuando se muestran en las curvas de masa-radio configuraciones inestables para tener mayor visión del comportamiento del modelo. Para el conjunto de parámetros empleados en la figura 3.3, la densidad de masa central máxima permitida por esta condición es  $\rho_{m0} = 1.5 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ , correspondiente a una masa máxima de  $M_{\text{max}} = 2.33 M_{\odot}$ . Finalmente, se ha demostrado que la condición en el índice adiabático **C5** es válida sólo en el límite Newtoniano [54], por lo que no se evalúa en este trabajo.

## 4.2. Estudio del Espacio de Parámetros

Como se estableció en el capítulo anterior (sección 3.3), el modelo considerado para la ecuación de estado en el marco de la teoría relativista de campo medio contiene cinco parámetros libres: los tres acoplamientos mesón-nucleón  $A_{\sigma}, A_{\omega}$  y  $A_{\rho}$ , junto con los parámetros de autointeracción del mesón escalar  $b$  y  $c$ . Estos parámetros determinan completamente la ecuación de estado de la materia nuclear y, consecuentemente, las propiedades macroscópicas de las estrellas de neutrones a través de las ecuaciones de estructura TOV (2.13). El ajuste de estos parámetros se realiza imponiendo que el modelo reproduzca las propiedades empíricas de la materia nuclear en saturación, descritas en la sección 3.3.1, y las observaciones astrofísicas, descritas en la sección 2.4.

Múltiples métodos son empleados para el ajuste de parámetros: algunos estudios utilizan análisis bayesianos [55, 56], mientras que otros aplican herramientas de aprendizaje de máquina y redes neuronales [57]. Cada conjunto de parámetros que satisface estas restricciones nucleares produce una ecuación de estado diferente a altas densidades, generando predicciones distintas para las propiedades estelares observables como la masa máxima y el radio. Por esta misma razón, dentro de este mismo formalismo han sido propuestos una gran variedad de modelos de ecuaciones de estado, los cuales se filtran añadiendo cada vez más restricciones físicas [14]. Esta falta de unicidad en el espacio de parámetros refleja la incertidumbre en la extrapolación desde la densidad de saturación nuclear hacia los regímenes de densidad extrema

presentes en el interior de las estrellas de neutrones.

En este estudio, se realiza una exploración sistemática del espacio de parámetros del modelo relativista de campo medio con el fin de identificar los conjuntos de parámetros que satisfacen simultáneamente las restricciones nucleares y las observaciones astrofísicas actuales.

#### 4.2.1. Correlaciones entre Parámetros y Observables

Debido a que los parámetros del modelo representan las intensidades físicas de las interacciones nucleares, es posible establecer correlaciones directas entre variaciones en estos parámetros y cambios en las propiedades nucleares y estelares. Por ejemplo, un aumento en el acoplamiento vectorial  $A_\omega$  incrementa la repulsión entre nucleones, resultando en una disminución de la densidad de saturación  $n_0$ . Del mismo modo, un incremento en el acoplamiento isovectorial  $A_\rho$  eleva la energía de simetría  $a_{\text{sym}}$ , afectando la composición protón-neutrón de la materia nuclear.

Consideremos el conjunto de parámetros [2]:

$$\begin{aligned} A_\sigma &= 12.684 \, m^2, & A_\omega &= 7.148 \, m^2, \\ A_\rho &= 4.410 \, m^2, & b &= 5.610 \times 10^{-3}, \\ c &= -6.986 \times 10^{-3}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

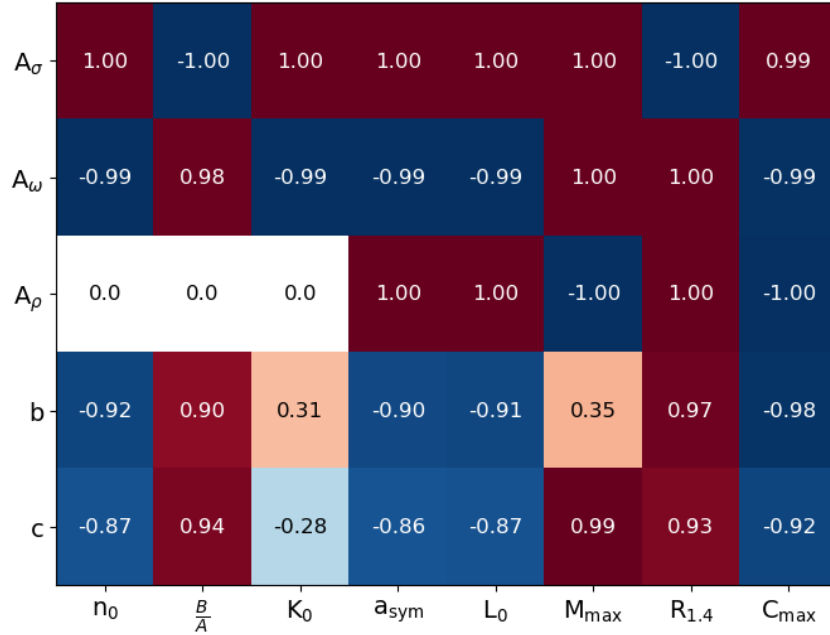
cuyas propiedades nucleares y estelares son:

$$\begin{aligned} n_0 &= 0.153 \, \text{fm}^{-3}, & \frac{B}{A} &= -16.30 \, \text{MeV}, \\ K_0 &= 201.23 \, \text{MeV}, & a_{\text{sym}} &= 32.54 \, \text{MeV}, \\ L_0 &= 79.63 \, \text{MeV}, & M_{\text{max}} &= 2.33 \, M_\odot, \\ R_{1.4} &= 13.76 \, \text{km}, & C_{\text{max}} &= 0.298, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde  $C_{\text{max}} = GM_{\text{max}}/c^2 R_{(M_{\text{max}})}$  es la compacidad de la estrella de masa máxima, cuyo límite superior se establece alrededor de  $C_{\text{max}} \lesssim 0.33$  [58].

Realizando variaciones de estos parámetros alrededor de los valores en (4.4), se observan las tendencias recopiladas en la figura 4.4. La figura muestra el coeficiente de correlación de Pearson entre cada parámetro y cada propiedad nuclear y estelar. Los valores representan la fuerza y dirección de la relación lineal entre dos variables: valores cercanos a 1.0 indican una correlación positiva fuerte (si aumento el parámetro, aumenta la propiedad), mientras que valores cercanos a -1.0 indican una correlación negativa fuerte (si aumento el parámetro, disminuye la propiedad). Los valores intermedios reflejan correlaciones más débiles o nulas, en las que el parámetro tiene poca o ninguna influencia en la propiedad considerada. Es necesario notar que estas correlaciones son válidas localmente alrededor del conjunto de parámetros elegido, pero pueden variar en otras regiones del espacio de parámetros. Además, este coeficiente cuantifica la fuerza

de la correlación, más no la pendiente de la relación entre las variables.



**Figura 4.4:** Correlaciones cualitativas entre variaciones en los parámetros del modelo relativista de campo medio alrededor de los valores en (4.4), y cambios en las propiedades nucleares y estelares. Valores cercanos a 1.0 indican una correlación positiva fuerte, mientras que valores cercanos a -1.0 indican una correlación negativa fuerte. Los valores intermedios reflejan correlaciones más débiles o nulas.

Es necesario resaltar la independencia de  $n_0$ ,  $B/A$  y  $K_0$  respecto a variaciones en  $A_\rho$ , lo cual es consistente con la interpretación física de este acoplamiento como responsable únicamente de las interacciones isovectoriales. Adicionalmente, parece oportuno basar el estudio en el plano de parámetros  $A_\sigma - A_\omega$  pues ambos acoplamientos están fuertemente correlacionados con todas las propiedades nucleares y estelares, sugiriendo una mayor influencia en la determinación de la ecuación de estado. La naturaleza atractiva del acoplamiento escalar  $A_\sigma$  y la naturaleza repulsiva del acoplamiento vectorial  $A_\omega$  explican las correlaciones opuestas observadas en la figura 4.4 para estas dos interacciones, salvo para la masa máxima  $M_{\text{max}}$ , donde ambos acoplamientos muestran una correlación positiva fuerte.

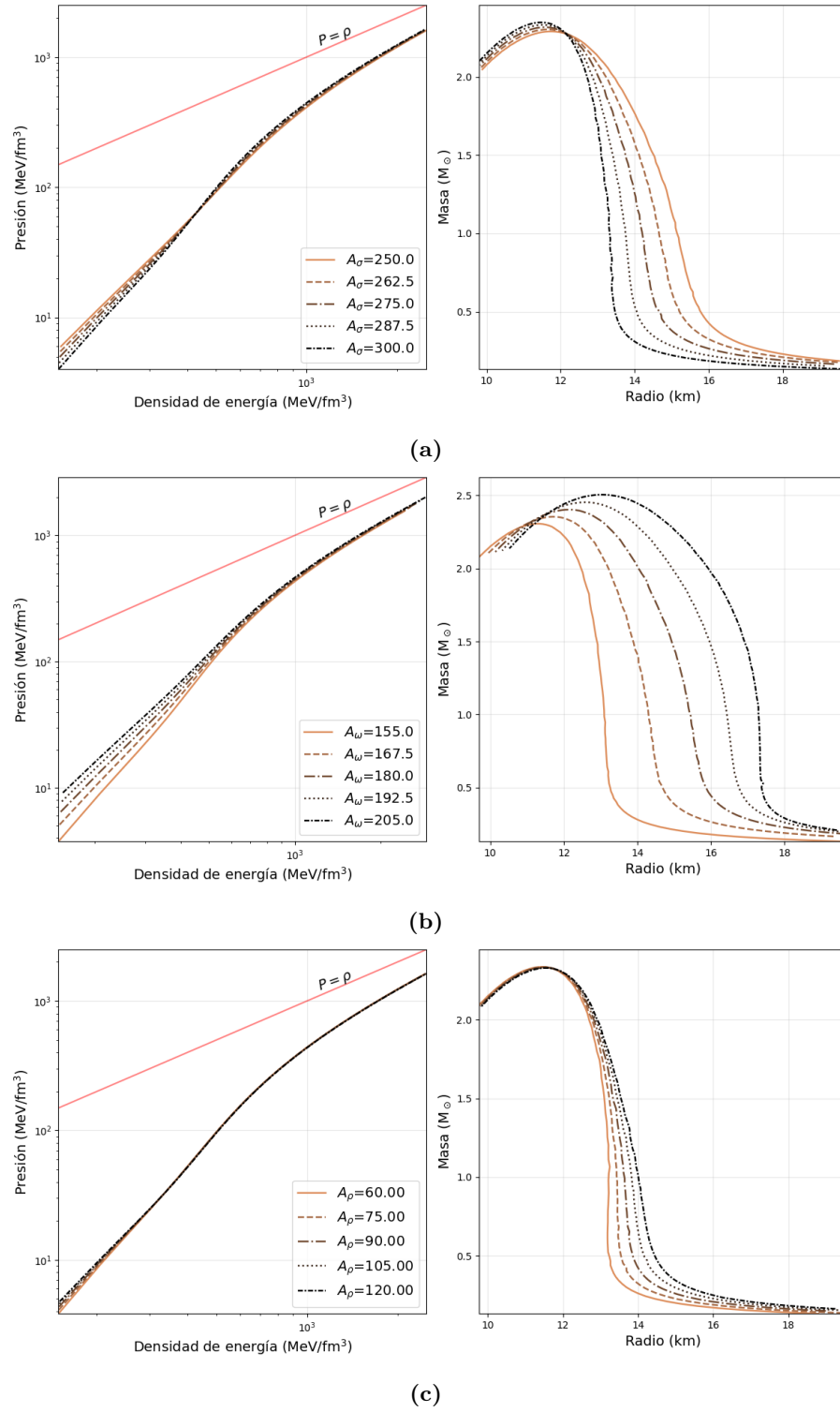
Por otro lado, la relación lineal entre los parámetros  $b$  y  $c$  con la compresibilidad  $K_0$  no es tan clara como la de  $A_\sigma$  y  $A_\omega$ , pero sigue siendo útil para ajustar esta propiedad nuclear. De igual forma, sus correlaciones con las demás propiedades nucleares y estelares son más débiles, aunque siguen siendo significativas para el ajuste del modelo. Finalmente, dado el interés en encontrar ecuaciones de estado que permitan estrellas de neutrones con masas máximas elevadas, según lo observado en la figura 4.4 parece conveniente aumentar simultáneamente los parámetros  $A_\sigma$ ,  $A_\omega$  y  $c$ , y disminuir  $A_\rho$ , siempre manteniendo las propiedades nucleares dentro de los rangos aceptables.

Para estudiar el impacto de los parámetros del modelo en la ecuación de estado y las propiedades ma-

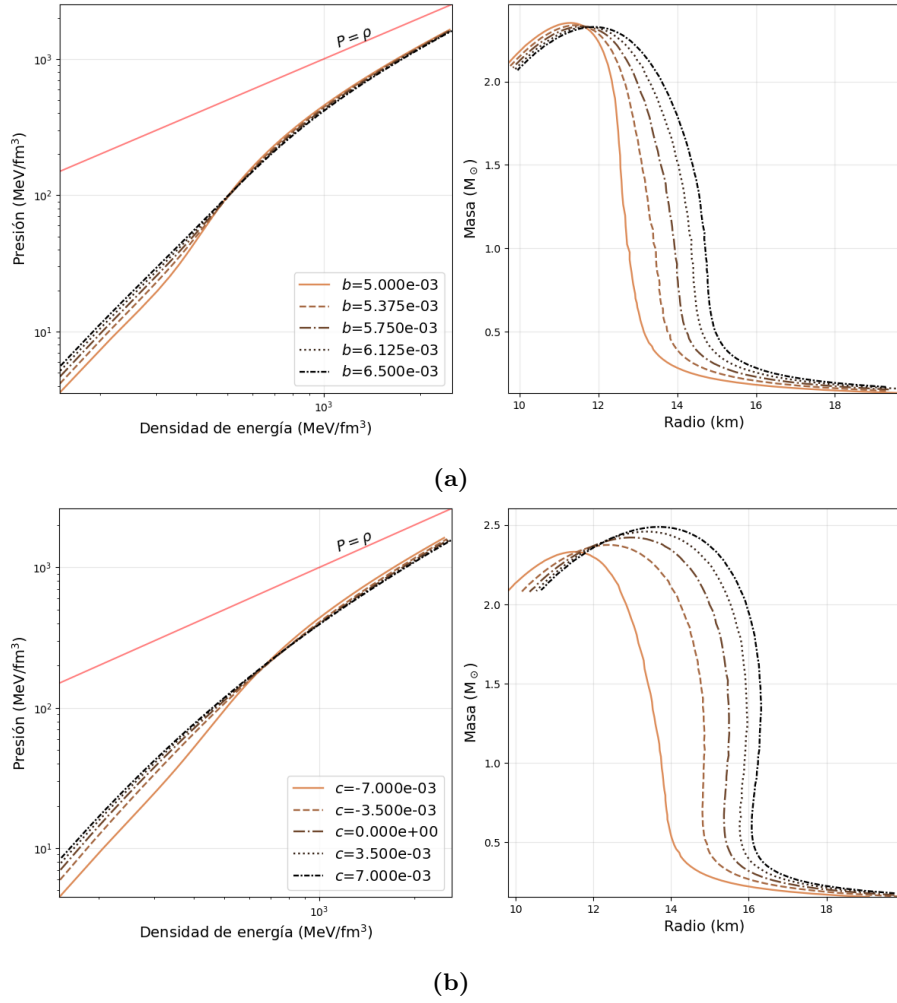
croscópicas de las estrellas de neutrones, se presentan en las figuras 4.5 y 4.6 las ecuaciones de estado y las curvas masa-radio obtenidas al variar independientemente cada uno de los parámetros alrededor de los valores en (4.4), manteniendo los demás parámetros fijos. Las ecuaciones de estado se presentan a partir de la densidad de saturación  $n_0 = 0.157 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 2.6 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ) y hasta  $1.5 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 2.5 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ), mostrando su efecto en la materia del núcleo dado que la ecuación de estado para la corteza, discutida en la sección 3.4, es independiente de estos parámetros y es igual para todos los casos. Con estas visualizaciones, podemos corroborar cómo afecta cada parámetro a la rigidez de la ecuación de estado, a la masa y al radio de las estrellas de neutrones.

En cuanto a la rigidez de la ecuación de estado, se observa que los parámetros  $A_\sigma$  y  $A_\omega$  aumentan apreciable y considerablemente la rigidez al incrementar sus valores respectivamente, mientras que el parámetro  $A_\rho$  muestra un impacto casi despreciable. Por otro lado, los parámetros de autointeracción escalar  $b$  y  $c$  reducen la rigidez de la ecuación de estado, siendo el efecto de  $c$  considerablemente más pronunciado que el de  $b$ . Respecto a la masa máxima, el parámetro  $A_\omega$  es el que tiene mayor impacto al aumentarla, seguido por  $c$  que la aumenta notoriamente y  $A_\sigma$  que la aumenta ligeramente. En contraste,  $A_\rho$  tiene un impacto despreciable en la masa máxima, mientras que  $b$  la reduce ligeramente. Por último, con relación al radio de las estrellas de neutrones,  $A_\omega$  produce el mayor aumento, seguido por aumentos considerables y notorios de  $c$  y  $b$  respectivamente, mientras que  $A_\rho$  solo produce un ligero aumento. Por el contrario,  $A_\sigma$  es el único parámetro que disminuye considerablemente el radio al aumentar su valor.

En este análisis se consideraron valores negativos para el parámetro  $c$ , siguiendo la elección en (4.4). Podría pensarse que valores negativos de este parámetro podrían permitir que la densidad de energía (3.28) esté no acotada inferiormente para valores altos del campo escalar  $\sigma$ , lo cual sería físicamente inaceptable. Glendenning [2] considera que esto es aceptable para una teoría efectiva de hadrones compuestos, ya que no es una teoría fundamental y, además, en el rango de densidades relevantes para las estrellas de neutrones la densidad de energía está bien comportada. Adicionalmente, como se verificó en la sección 4.1.1 (figura 4.1), la solución autoconsistente para la masa efectiva adimensional  $\tilde{x}_\sigma$  permanece siempre positiva y acotada entre 0 y 1, asegurando que la densidad de energía permanezca acotada inferiormente en todo el rango de densidades considerado.



**Figura 4.5:** Ecuaciones de estado (izquierda) y curvas masa-radio (derecha) obtenidas al variar los parámetros de acoplamiento mesón-nucleón alrededor de los valores en (4.4), manteniendo los demás parámetros fijos. (a) Variación de  $A_\sigma$ . (b) Variación de  $A_\omega$ . (c) Variación de  $A_\rho$ .



**Figura 4.6:** Ecuaciones de estado (izquierda) y curvas masa-radio (derecha) obtenidas al variar los parámetros de autointeracción del mesón escalar alrededor de los valores en (4.4), manteniendo los demás parámetros fijos. (a) Variación de  $b$ . (b) Variación de  $c$ .

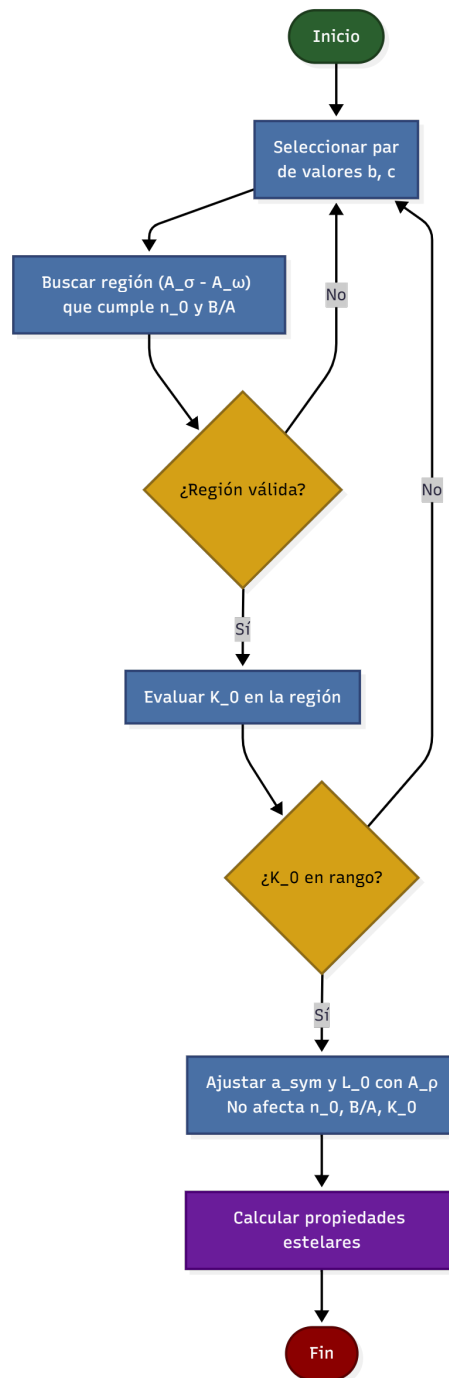
### 4.2.2. Regiones Válidas en el Espacio de Parámetros

La exploración del espacio de parámetros del modelo relativista de campo medio es un problema de optimización multidimensional bajo múltiples restricciones. El espacio completo está definido por los cinco parámetros libres:  $A_\sigma$ ,  $A_\omega$ ,  $A_\rho$ ,  $b$  y  $c$ . La metodología empleada para identificar conjuntos de parámetros físicamente aceptables consta de varias etapas sistemáticas.

Queremos identificar los conjuntos de parámetros que satisfacen las restricciones dentro de los márgenes experimentales. Estos conjuntos comprenden regiones del espacio de parámetros que son consistentes con las propiedades nucleares conocidas. Como puede evidenciarse en la figura 4.4, los parámetros del modelo que influyen claramente en todas las propiedades nucleares y estelares son  $A_\sigma$  y  $A_\omega$ . Por lo tanto, el método sistemático empleado consiste en los siguientes pasos, ilustrados en el diagrama de flujo de la figura 4.7:

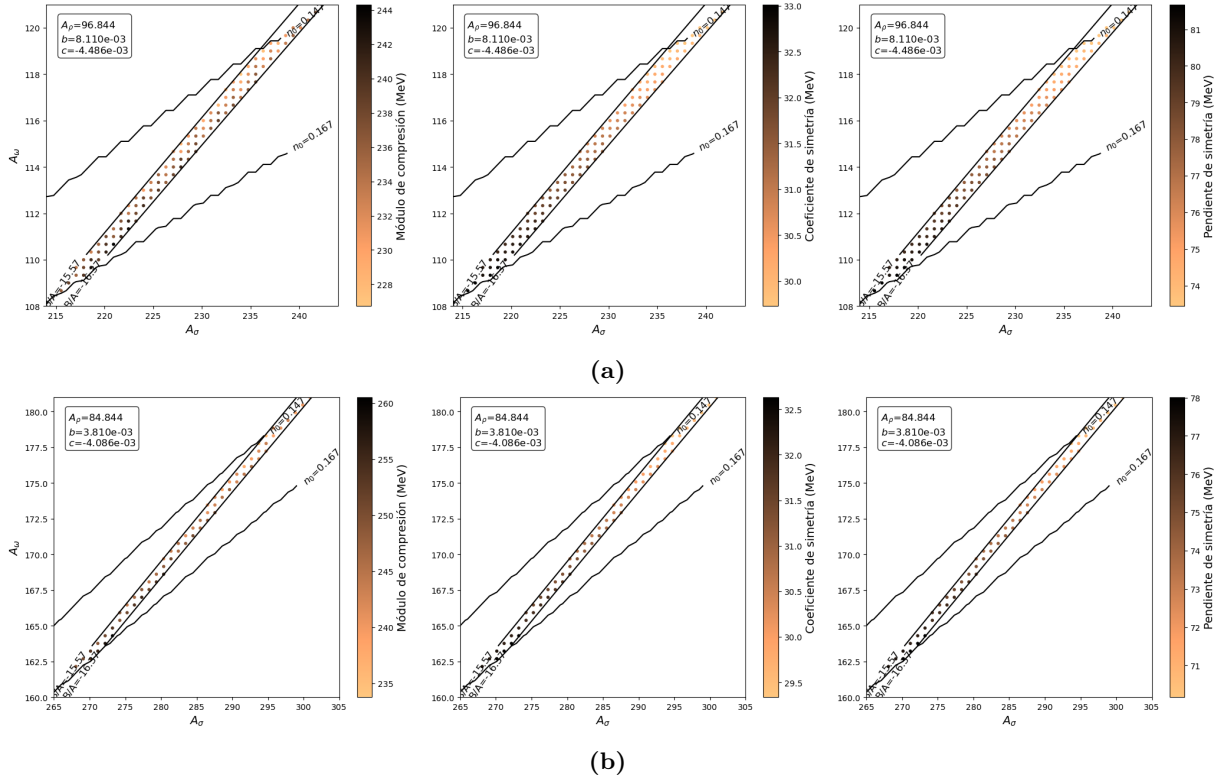
1. Se elige un par de valores específicos para los parámetros  $b$  y  $c$ , que junto con  $A_\sigma$  y  $A_\omega$  influyen en el módulo de compresibilidad  $K_0$ .
2. Se realiza un barrido sistemático en el plano  $A_\sigma - A_\omega$ , buscando la región que satisface simultáneamente las restricciones de:
  - Densidad de saturación:  $0.147 \text{ fm}^{-3} \leq n_0 \leq 0.167 \text{ fm}^{-3}$  (3.31)
  - Energía de enlace por nucleón:  $-16.37 \text{ MeV} \leq B/A \leq -15.57 \text{ MeV}$  (3.32)
3. Se verifica que los valores del módulo de compresibilidad  $K_0$  dentro de esta región cumplan con la restricción:  $190 \text{ MeV} \leq K_0 \leq 270 \text{ MeV}$  (3.33).
4. Si la región identificada satisface las tres restricciones anteriores, se ajusta el parámetro  $A_\rho$  para satisfacer las restricciones de:
  - Energía de simetría:  $28.9 \text{ MeV} \leq a_{\text{sym}} \leq 34.3 \text{ MeV}$  (3.35)
  - Pendiente de la energía de simetría:  $40 \text{ MeV} \leq L_0 \leq 100 \text{ MeV}$ . Aunque el rango experimental fiduciario es más reducido (3.36), esta propiedad tiene mayor libertad debido a la falta de consenso en su valor, permitiéndonos utilizar este intervalo más amplio en nuestro análisis [29].

Esto se realiza sin afectar las otras propiedades nucleares, pues estas no dependen de  $A_\rho$ .
5. Se repite el procedimiento para diferentes elecciones de los parámetros  $b$  y  $c$ , explorando así el espacio de parámetros del modelo.
6. Finalmente, se calculan las propiedades estelares (masa máxima  $M_{\text{max}}$ , radio canónico  $R_{1.4}$ , y compacidad máxima  $C_{\text{max}}$ ) para las regiones de parámetros que satisfacen todas las restricciones nucleares anteriores.



**Figura 4.7:** Diagrama de flujo del procedimiento sistemático para explorar el espacio de parámetros del modelo relativista de campo medio.

Aplicando este método, se identifican múltiples conjuntos de parámetros que satisfacen las restricciones nucleares. Cada conjunto produce una ecuación de estado diferente a altas densidades, generando diferentes predicciones para las propiedades estelares. Por ejemplo, tras realizar este proceso para un par de valores específicos de  $b$  y  $c$ , se obtiene la región del plano  $A_\sigma - A_\omega$  mostrada en la figura 4.8a. Cada punto en esta región corresponde a un conjunto de parámetros válido que puede ser empleado para determinar las propiedades estelares resultantes. Además, si variamos los valores de  $b$  y  $c$  de modo que  $K_0$  se mantenga dentro del rango aceptable, y ajustamos  $A_\rho$  para cumplir las propiedades de simetría, obtenemos otras regiones válidas, como la mostrada en la figura 4.8b. Esta nueva región tiene valores mayores de  $A_\sigma$ ,  $A_\omega$  y  $c$ , y valores menores de  $A_\rho$  y  $b$  en comparación con la región anterior. Asimismo, aunque la nueva región tiene valores mayores de  $K_0$  y valores ligeramente menores de  $a_{\text{sym}}$  y  $L_0$  respecto a la región anterior, ambos conjuntos cumplen con las restricciones nucleares establecidas experimentalmente, lo que demuestra la libertad en la elección de parámetros dentro del modelo.



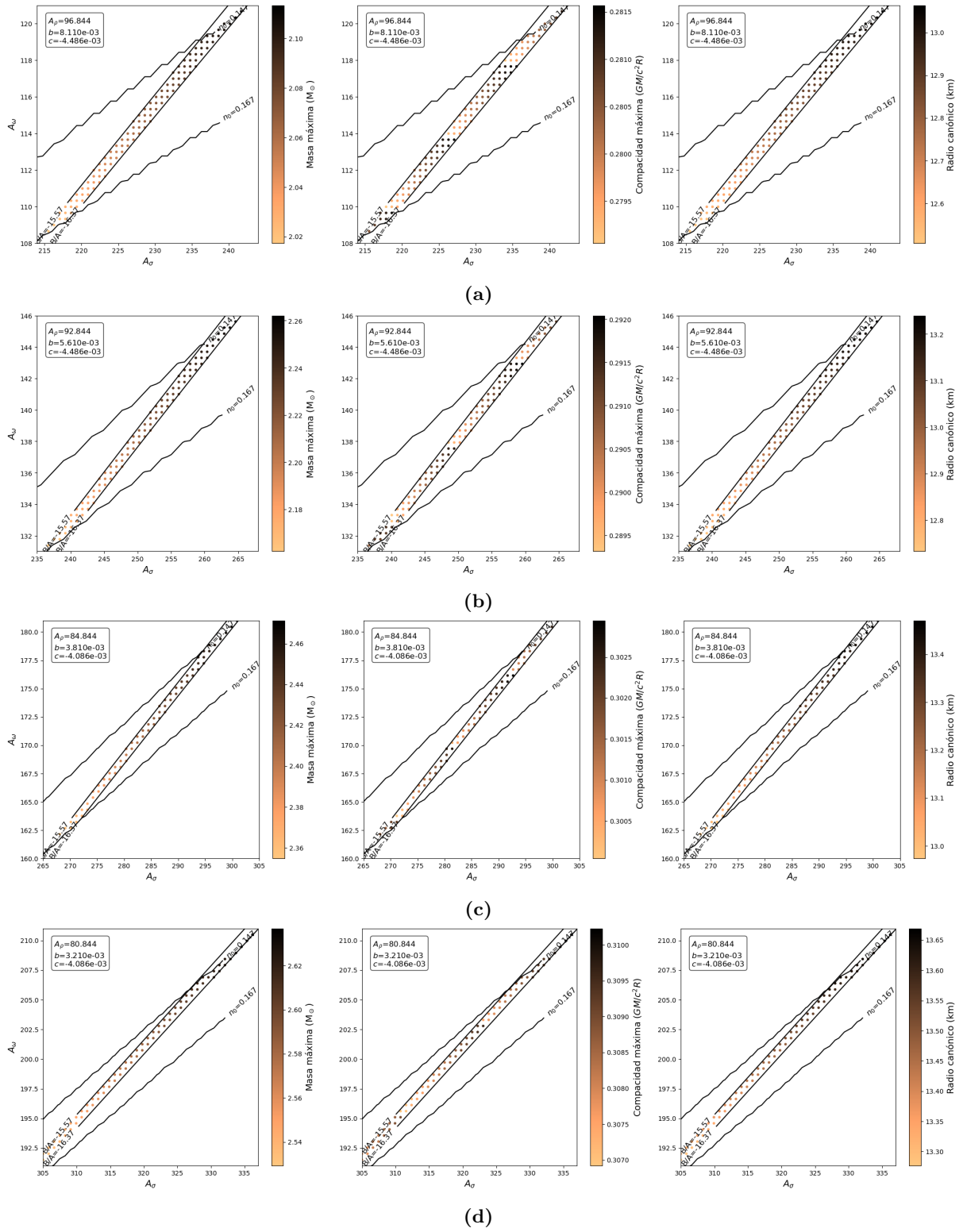
**Figura 4.8:** Región del espacio de parámetros que satisface las restricciones nucleares en el plano  $A_\sigma - A_\omega$ . (a) Conjunto de parámetros obtenido mediante la metodología descrita. (b) Región válida obtenida al variar  $b$  y  $c$  de (a) para mantener  $K_0$  en el rango aceptable, y ajustar  $A_\rho$  para las propiedades de simetría. Las figuras muestran diferentes regiones del plano para facilitar la visualización.

Siguiendo esta metodología, se consiguen diversos conjuntos de parámetros que cumplen las restricciones nucleares. Una vez obtenidos estos conjuntos, es posible calcular las propiedades estelares correspondientes,

como la masa máxima  $M_{\max}$ , la compacidad máxima  $C_{\max}$  y el radio de estrellas de neutrones de masa  $1.4 M_{\odot}$ ,  $R_{1.4}$ . Para algunos conjuntos hallados, se muestran sus propiedades estelares en la figura 4.9. La masa máxima, la propiedad de mayor interés astrofísico, varía significativamente entre los diferentes conjuntos de parámetros, con valores entre aproximadamente  $2.02 M_{\odot}$  y  $2.63 M_{\odot}$ , y aumenta con valores mayores de  $A_{\sigma}$  y  $A_{\omega}$ , al igual que el radio  $R_{1.4}$ , que toma valores entre 12.5 km y 13.7 km. En cuanto a la compacidad máxima  $C_{\max}$ , se observa una tendencia similar respecto a los parámetros  $A_{\sigma}$  y  $A_{\omega}$ , con valores entre 0.279 y 0.310. Sin embargo, esta propiedad parece tener máximos locales en el plano que indican una dependencia más compleja con los parámetros del modelo.

Estos valores predichos por el modelo son consistentes con las observaciones astrofísicas actuales. En el rango de masas máximas obtenidas, salvo por la región en la figura 4.9a, predicen valores superiores al límite inferior de la estimación en radiación electromagnética para PSR J0952-0607 de  $2.18 M_{\odot}$  [8]. Sin embargo, únicamente la región en la figura 4.9d contiene conjuntos de parámetros que superan el límite inferior del secundario en el evento de ondas gravitacionales *GW190814* de  $2.50 M_{\odot}$  [7], candidato para estrella de neutrones. En cuanto a los radios canónicos, el rango de radios calculados está en concordancia con las estimaciones recientes basadas en observaciones, sugiriendo radios de entre 11.52 km y 13.80 km para estrellas de masa  $1.4 M_{\odot}$  como PSR J0030+0451 [26, 27], PSR J0437-4715 [28] y las estimaciones de los modelos basados en PSR J0740+6620 [24] y *GW190814* [30]. Finalmente, las compacidades máximas obtenidas están por debajo del límite teórico de  $C_{\max} \lesssim 0.33$  [58]. Este análisis permite, por ejemplo, descartar el conjunto de parámetros en la figura 4.9a, que no puede reproducir estrellas de neutrones con masas superiores a  $2.18 M_{\odot}$ , inconsistente con las observaciones actuales.

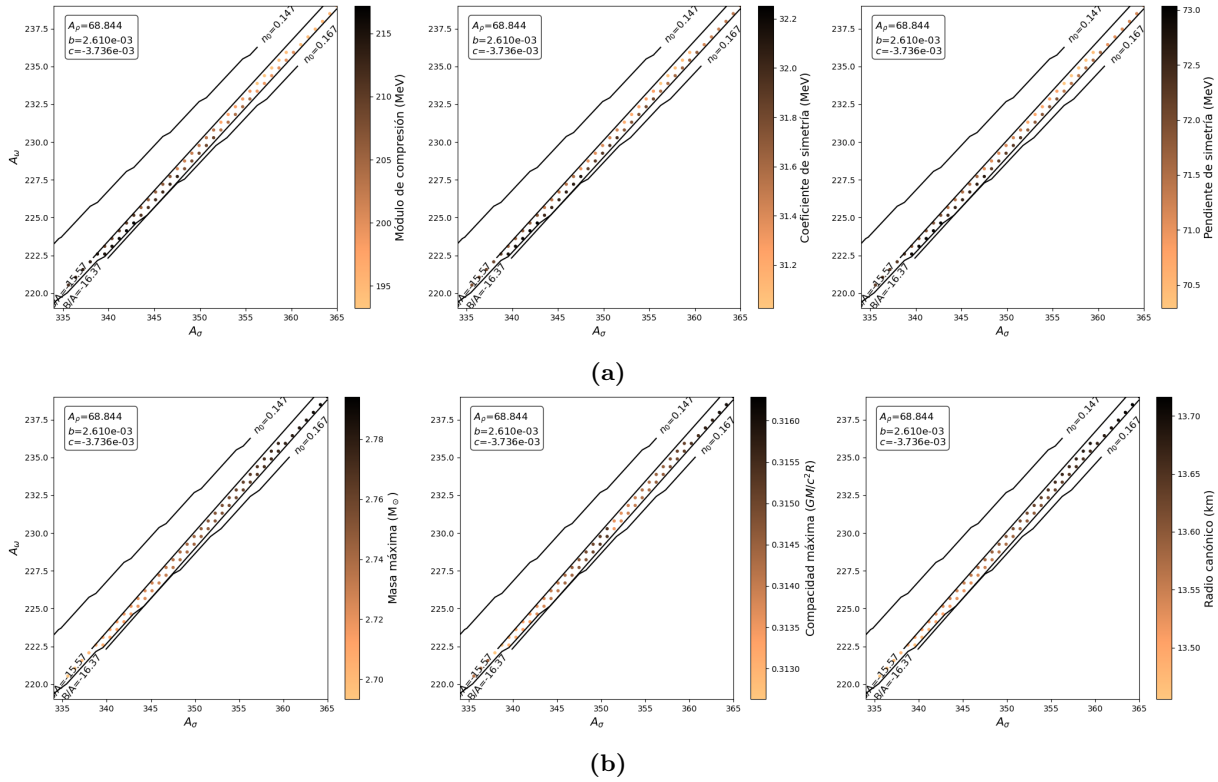
En vista de que diferentes conjuntos de parámetros presentados satisfacen las restricciones nucleares impuestas y producen propiedades estelares consistentes con las observaciones, es evidente que el modelo relativista de campo medio con los parámetros adecuados tiene la capacidad de describir materia nuclear en estrellas de neutrones. Restricciones adicionales pueden imponerse para evaluar la validez del modelo en futuras investigaciones.



**Figura 4.9:** Propiedades estelares obtenidas para diferentes conjuntos de parámetros que satisfacen las restricciones nucleares. Las figuras muestran diferentes regiones del plano  $A_\sigma - A_\omega$  para facilitar la visualización.

### 4.2.3. Masa Máxima

La búsqueda del conjunto de parámetros que maximiza la masa estelar predicha es un objetivo central del análisis. Este conjunto establece el límite superior teórico para la masa de estrellas de neutrones dentro del marco del modelo considerado, y su comparación con las observaciones de estrellas masivas como las mencionadas en la sección 2.4 permite evaluar si el modelo es capaz de explicar las configuraciones estelares más extremas observadas.

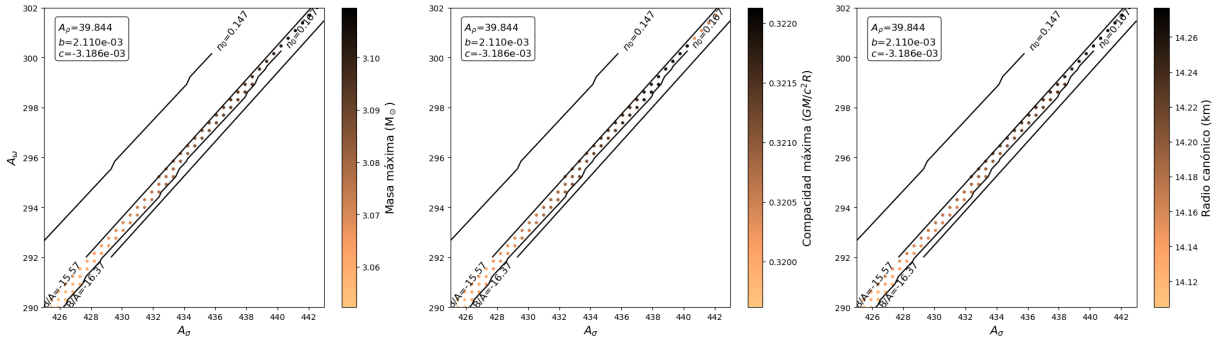


**Figura 4.10:** Región del espacio de parámetros con la mayor masa estelar predicha. (a) Propiedades nucleares para la región de parámetros que produce la mayor masa máxima. (b) Propiedades estelares correspondientes: masa máxima  $M_{\max}$ , compacidad máxima  $C_{\max}$  y radio canónico  $R_{1.4}$  para configuraciones en esta región.

La región de mayores masas obtenidas para este modelo mediante la metodología descrita, así como sus propiedades nucleares y estelares, se muestran en la figura 4.10. En este estudio, se logró obtener una masa máxima de  $M_{\max} = 2.79 M_{\odot}$ , superando ampliamente el límite observado en radiación electromagnética de  $2.35 M_{\odot}$  para PSR J0952-0607 [9], así como el observado en ondas gravitacionales de  $2.59 M_{\odot}$  para el secundario en *GW190814* [7]. Esto indica que el modelo relativista de campo medio puede reproducir estrellas de neutrones extremadamente masivas, siendo un marco teórico consistente con las observaciones astrofísicas más exigentes. No queda claro que la región de parámetros de mayor masa encontrada en este

estudio sea el límite absoluto dentro del modelo, por lo que futuros estudios y técnicas de optimización más avanzadas podrían revelar conjuntos de parámetros que produzcan masas aún mayores, sin contradecir las restricciones nucleares impuestas. De la misma forma, se halla una compacidad máxima de  $C_{\max} = 0.316$ , ligeramente inferior al límite estimado de  $C_{\max} \lesssim 0.33$  [58], y un radio canónico máximo  $R_{1.4}$  de entre 12.79 y 13.72 km para estrellas de masa  $1.4 M_{\odot}$  en esta región de parámetros. Estos valores de radio son consistentes con las estimaciones basadas en observaciones astrofísicas actuales, que sugieren un radio máximo de  $R_{1.4} \lesssim 13.8$  km [26, 27, 30].

Otras regiones con masas aún mayores pueden encontrarse, como la que se muestra en la figura 4.11, que logra una masa máxima de hasta  $M_{\max} = 3.11 M_{\odot}$  respetando las restricciones nucleares. No obstante, esta región predice radios canónicos de hasta  $R_{1.4} = 14.28$  km, que exceden las estimaciones mencionadas anteriormente. Por esta razón, esta región es descartada en el análisis, ya que no es consistente con las observaciones astrofísicas actuales. Este ejemplo ilustra la importancia de considerar múltiples restricciones al ajustar los parámetros del modelo, ya que cumplir únicamente con las propiedades nucleares no garantiza la validez astrofísica del conjunto de parámetros.

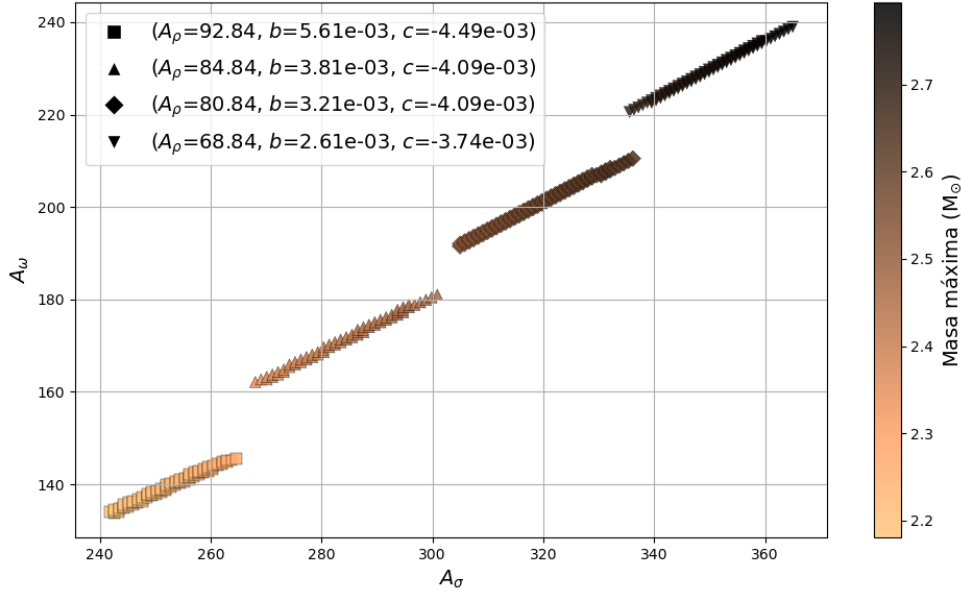


**Figura 4.11:** Región del espacio de parámetros que produce una masa máxima elevada pero radios canónicos inconsistentes con las observaciones astrofísicas actuales.

#### 4.2.4. Comparación de Regiones

Las regiones de parámetros mostradas en las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 representan diferentes áreas del espacio de parámetros que satisfacen las restricciones nucleares y producen diversas propiedades estelares. Es relevante comparar estas regiones para entender cómo las variaciones en los parámetros afectan las predicciones del modelo. En la figura 4.12 se presenta una comparación directa en el plano  $A_{\sigma}$  -  $A_{\omega}$  entre las regiones que satisfacen las restricciones nucleares y son consistentes con las estimaciones observacionales, y las masas máximas que producen. Como notamos anteriormente, el aumento en los acoplamientos  $A_{\sigma}$  y  $A_{\omega}$  conduce a un incremento en la masa máxima predicha. Más aún, para mantener las propiedades de simetría dentro de los rangos aceptables, es necesario reducir el acoplamiento isovectorial  $A_{\rho}$  al aumentar

$A_\sigma$  y  $A_\omega$ . Esto puede explicarse por la necesidad de compensar el efecto de los acoplamientos escalares y vectoriales que tienden a aumentar la energía, requiriendo una disminución en la contribución isovectorial. Esta comparación resalta la interdependencia entre los parámetros del modelo y las propiedades estelares, por lo que es importante considerar estas relaciones al ajustar el modelo a observaciones astrofísicas.

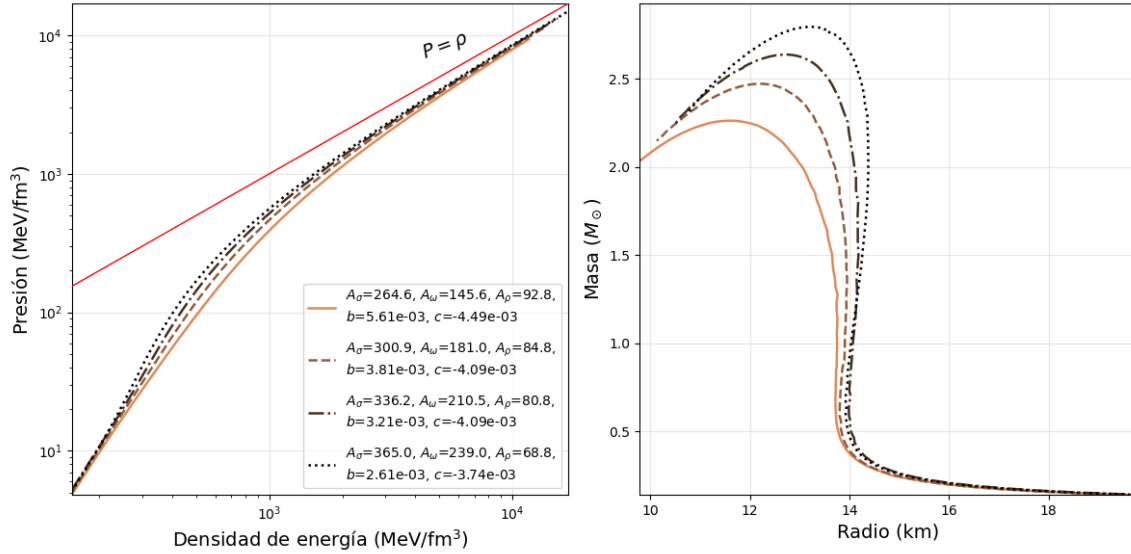


**Figura 4.12:** Comparación de las regiones del plano de parámetros  $A_\sigma$  -  $A_\omega$  que satisfacen las restricciones nucleares y son consistentes con las estimaciones observacionales, y las masas máximas que producen.

Es interesante comparar las ecuaciones de estado y las curvas masa-radio obtenidas para la configuración de mayor masa máxima en cada región válida del espacio de parámetros. Esta comparación permite evaluar cómo las diferentes elecciones de parámetros afectan la rigidez de la ecuación de estado y las propiedades macroscópicas de las estrellas de neutrones. En la figura 4.13, se presentan las ecuaciones de estado y las curvas masa-radio correspondientes a las configuraciones de mayor masa máxima en cada una de las regiones válidas discutidas anteriormente. Vale destacar que se comprobó que todas las ecuaciones de estado cumplen con el límite de velocidad de la luz, asegurando la causalidad del modelo en todas las configuraciones consideradas. Además, las ecuaciones de estado se presentan a partir de la densidad de saturación  $n_0 = 0.157 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 2.6 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ) y hasta  $4.0 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 6.7 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ), mostrando únicamente la materia del núcleo debido a que la ecuación de estado para la corteza, discutida en la sección 3.4, es independiente de los parámetros del modelo y es igual para todas las regiones.

Las ecuaciones de estado y las curvas masa-radio varían notablemente según la elección de parámetros, donde una mayor rigidez se correlaciona con mayores masas máximas y radios canónicos. Resaltamos el hecho de que todas las configuraciones presentadas satisfacen las restricciones nucleares y son consistentes con las observaciones astrofísicas actuales, demostrando la versatilidad del modelo relativista de campo

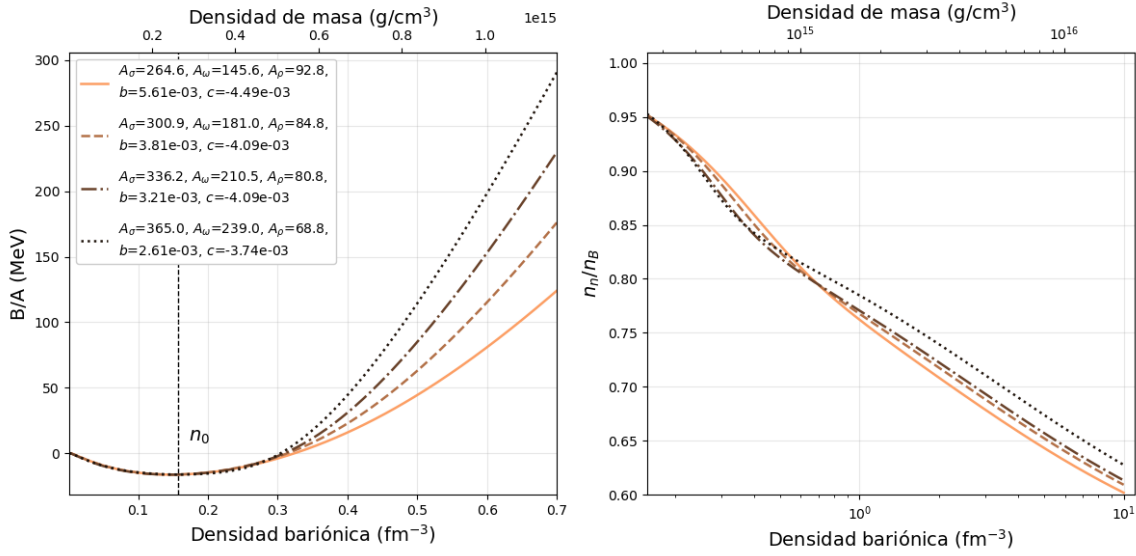
medio.



**Figura 4.13:** Comparación de las ecuaciones de estado (izquierda) y las curvas masa-radio (derecha) obtenidas para la configuración de mayor masa máxima en cada región válida del espacio de parámetros, mostradas en la figura 4.12.

Adicionalmente, es pertinente analizar el comportamiento microscópico de la materia nuclear predicha por las configuraciones de mayor masa máxima en cada región. En la figura 4.14 se presentan la energía de enlace por nucleón ( $B/A$ ) y la fracción de neutrones respecto a la densidad bariónica ( $n_n/n_B$ ) para estas configuraciones. La energía de enlace se grafica en un rango de densidades desde  $0.001 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 1.7 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ ) hasta  $0.7 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 1.2 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ), lo que permite observar el comportamiento de la materia nuclear simétrica en función de los parámetros de cada región en saturación y a densidades varias veces superior a la saturación. Por otro lado, la fracción de neutrones se presenta desde la densidad de saturación hasta  $10 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 1.7 \times 10^{16} \text{ g cm}^{-3}$ ), cubriendo las densidades supranucleares características del núcleo estelar. A partir de la gráfica de  $B/A$ , se confirma lo observado en la figura 4.13: las ecuaciones de estado que producen mayores masas máximas son efectivamente más rígidas, ya que la energía de enlace aumenta más rápidamente con la densidad. Respecto a la composición, se observa que para una región de densidades intermedia, la fracción de neutrones es mayor para las configuraciones de menor masa máxima. Sin embargo, este comportamiento se invierte a mayores densidades, donde las configuraciones de mayor masa máxima pasan a tener la mayor fracción de neutrones. Esta inflexión sucede aproximadamente entre  $0.4$  y  $0.7 \text{ fm}^{-3}$  ( $\approx 6.7 \times 10^{14}$  y  $1.2 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ).

Al comparar la fracción de neutrones obtenidas con las predichas por el gas ideal degenerado de neutrones, protones y electrones (figura 3.1b), discutido en la sección 3.1.2, se observa que las fracciones obtenidas con estas configuraciones son considerablemente menores y disminuyen más rápidamente en el mismo rango



**Figura 4.14:** Energía de enlace por nucleón (izquierda) y fracción de neutrones (derecha) para la configuración de mayor masa máxima en las regiones de la figura 4.12. La fracción de protones es entonces  $n_p/n_B = 1 - n_n/n_B$ .

de densidades. Esto muestra el impacto significativo de las interacciones nucleares incluidas en el modelo relativista de campo medio, que afectan la composición de la materia nuclear en estrellas de neutrones en comparación con un gas ideal no interactuante. En particular, la inclusión de la interacción isovectorial a través del mesón  $\rho$  regula la diferencia entre las fracciones de neutrones y protones, lo que resulta en una composición más equilibrada en comparación con el gas ideal.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se implementó y analizó un modelo de materia nuclear basado en la Teoría Relativista de Campo Medio con autointeracciones no lineales del campo escalar, aplicado al estudio de estrellas de neutrones. A través de la resolución autoconsistente de las ecuaciones de campo y las ecuaciones de estructura estelar TOV, se demostró la viabilidad del formalismo para describir configuraciones estelares que satisfacen condiciones de aceptabilidad física, restricciones nucleares empíricas y reproducen observaciones astrofísicas. La exploración sistemática del espacio de parámetros permitió identificar regiones específicas donde el modelo reproduce satisfactoriamente las propiedades de saturación de la materia nuclear y, simultáneamente, genera predicciones macroscópicas de masa y radio consistentes con las observaciones astrofísicas más recientes, incluyendo eventos de ondas gravitacionales y mediciones de púlsares masivos.

### 5.1. Principales hallazgos

Los resultados obtenidos muestran la compleja interdependencia entre los parámetros microscópicos de la interacción fuerte y las propiedades observables de las estrellas de neutrones, validando la eficacia del formalismo RMF frente a modelos más simples.

El análisis de las condiciones de aceptabilidad física demostró que el modelo satisface los criterios de estabilidad mecánica, causalidad y regularidad métrica en el interior estelar. Se verificó que la velocidad del sonido se mantiene siempre inferior a la de la luz y que la condición de energía dominante se cumple en todo el rango de densidades. Aunque se observó una violación de la condición de estabilidad convectiva en las capas más externas de la estrella, este comportamiento parece ser consistente con otros modelos relativistas de campo medio. Esto implica que las ecuaciones de estado derivadas son físicamente admisibles para la descripción de objetos compactos en equilibrio hidrostático, fortaleciendo la validez del enfoque adoptado.

La caracterización del espacio de parámetros evidenció una jerarquía clara en la influencia de los acopla-

mientos mesónicos, validando la metodología de ajuste sistemático empleada. Se confirmó el desacople del mesón isovectorial a las propiedades de materia simétrica, donde el parámetro  $A_\rho$  no afecta las propiedades  $n_0$ ,  $B/A$  y  $K_0$ , y se evidenció un impacto despreciable a la masa máxima de la estrella, limitando su influencia casi exclusivamente a la energía de simetría, su pendiente y al radio estelar. Por el contrario, los acoplamientos escalar ( $A_\sigma$ ) y vectorial ( $A_\omega$ ), en conjunto con los términos de autointeracción escalar ( $b$  y  $c$ ), resultaron determinantes para la rigidez de la ecuación de estado y el control del módulo de compresibilidad. En particular, se encontró que el parámetro  $c$  favorece significativamente el aumento de la masa máxima y el radio, mientras que  $b$  actúa como un regulador de las propiedades de saturación. Físicamente, esto refleja cómo la competencia entre la atracción escalar y la repulsión vectorial, analizada mediante la descomposición de la energía de enlace, gobierna la estructura, mientras que la interacción isovectorial ajusta la composición de isospín y el tamaño físico de la estrella sin alterar significativamente su capacidad de soporte de masa.

Finalmente, en contraste con el modelo de gas ideal degenerado cuya masa máxima no supera  $\sim 0.7 M_\odot$ , la inclusión de las interacciones fuertes permitió obtener configuraciones capaces de soportar hasta  $2.79 M_\odot$ . Este resultado es compatible con los candidatos a estrellas de neutrones más masivos observados, como el secundario en el evento de ondas gravitacionales *GW190814*. Más aún, se encontró que existen regiones del espacio de parámetros que permiten masas aún mayores ( $> 3.0 M_\odot$ ), pero generan radios canónicos ( $R_{1.4}$ ) inconsistentes con las restricciones observacionales de NICER, subrayando la necesidad de validar los modelos teóricos frente a múltiples observables astrofísicos. Adicionalmente, la comparación con el gas ideal reveló que las interacciones nucleares reducen significativamente la fracción de neutrones a altas densidades, favoreciendo una composición más equilibrada de protones y neutrones.

## 5.2. Limitaciones y recomendaciones

Este estudio se realizó bajo ciertas aproximaciones que limitan el alcance de las conclusiones. Se asumió una composición de materia nuclear constituida únicamente por nucleones (neutrones y protones) y electrones en equilibrio beta, ignorando la inclusión de otros leptones (muones) y grados de libertad exóticos como hiperones, condensados de piones o fases de quarks desconfiados que podrían aparecer a altas densidades y modificar la ecuación de estado. Además, el análisis se restringió a estrellas estáticas y esféricamente simétricas a temperatura cero, dejando de lado efectos de rotación, campos magnéticos intensos y temperatura finita, factores no despreciables en escenarios astrofísicos dinámicos como fusiones de estrellas de neutrones.

Para futuras investigaciones, se recomienda extender el modelo incluyendo el octeto de bariones para estudiar el impacto de la aparición de hiperones en la masa máxima y la estabilidad estelar. Asimismo, sería pertinente explorar la inclusión de interacciones adicionales, como el mesón isovectorial-escalar  $\delta$ , para

refinar el comportamiento de la energía de simetría a altas densidades, o términos extra de autointeracción para los mesones  $\omega$  y  $\rho$ . Adicionalmente, se pueden aplicar otros métodos de ajuste de parámetros, como técnicas bayesianas o machine learning, para optimizar la búsqueda en el espacio de parámetros y cuantificar las incertidumbres asociadas a las predicciones del modelo. Finalmente, incorporar efectos de rotación y temperatura finita permitiría una descripción más realista de las estrellas de neutrones en contextos astrofísicos variados.

# Capítulo 6

## Apéndices

### 6.1. Valores esperados de los operadores

Para calcular los valores esperados de las corrientes en (3.18), usaremos un método económico para ahorrarnos la construcción de los campos fermiónicos [2]. La forma general del valor esperado de un operador  $\Gamma$  en el estado base de un sistema de muchos fermiones es:

$$\langle \bar{\psi} \Gamma \psi \rangle = \sum_{\kappa} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\bar{\psi} \Gamma \psi)_{\vec{p}, \kappa} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(\vec{p})_{\kappa}), \quad (6.1)$$

donde  $\kappa$  representa los grados de libertad internos (espín, isospín),  $\epsilon_F$  es la energía de Fermi del sistema, y  $\Theta(x)$  la función escalón de Heaviside.  $(\bar{\psi} \Gamma \psi)_{\vec{p}, \kappa}$  es el valor esperado, en el espacio de fase, del operador  $\Gamma$  en el estado de un solo fermión con momento  $\vec{p}$  y grado de libertad interno  $\kappa$ . Para hallar el integrando acudimos al hamiltoniano de Dirac, y a su valor esperado:

$$\begin{aligned} H_D^{I_3} &= \gamma_0 [\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma^{\mu} (g_{\omega} \omega_{\mu} + g_{\rho} I_3 \rho_{3\mu}) + (m - g_{\sigma} \sigma)], \\ (\psi^{\dagger} H_D^{I_3} \psi)_{\vec{p}, \kappa} &= \epsilon(\vec{p})_{\kappa} = P_0(\vec{p}) + g_{\omega} \omega_0 + g_{\rho} I_3 \rho_{30}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Notamos que el hamiltoniano depende del isospín  $I_3$  pero no del espín, de modo que los estados de espín son degenerados con ocupación dos. Tomando la derivada del hamiltoniano respecto a cualquier variable  $\xi$  del hamiltoniano (6.2), y usando la regla de la cadena, obtenemos [2]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\psi^{\dagger} H_D^{I_3} \psi)_{\vec{p}, \kappa} = (\psi^{\dagger} \frac{\partial H_D^{I_3}}{\partial \xi} \psi)_{\vec{p}, \kappa} + \epsilon(\vec{p})_{\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi} (\cancel{\psi^{\dagger} \psi})_{\vec{p}, \kappa}, \quad (6.3)$$

donde el último término se anula porque  $\psi$  es una función propia. Tomando la derivada con respecto a  $p^i$ , se obtiene:

$$(\bar{\psi} \gamma^i \psi)_{\vec{p}, \kappa} = \frac{\partial \epsilon(\vec{p})_{\kappa}}{\partial p^i},$$

y por (6.1), la corriente de nucleones es:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi} \gamma^i \psi \rangle &= 2 \sum_{I_3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial \epsilon(\vec{p})_{I_3}}{\partial p^i} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(\vec{p})_{I_3}) \\
&= 2 \sum_{I_3} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^3} \int dp^i \frac{\partial \epsilon(\vec{p})_{I_3}}{\partial p^i} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(\vec{p})_{I_3}) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

donde la integral se anula porque los valores de energía en las fronteras del volumen (de momento) son los mismos. La componente espacial de la corriente bariónica es nula, como era de esperarse en un sistema estático y uniforme, de modo que las componentes espaciales tanto del mesón  $\omega$  como del mesón  $\rho_3$  se anulan (ver ecuaciones (3.18)). Como tenemos solo componentes temporales de estos mesones, la energía de las partículas (3.22) depende únicamente de la magnitud del momento  $\epsilon(\vec{p}) = \epsilon(p)$ , lo que implica que la superficie de Fermi es esférica en el espacio de momentos.

Ahora, tomando la derivada (6.3) con respecto a  $\omega_0$ :

$$(\bar{\psi} \gamma^0 \psi)_{\vec{p}, \kappa} = 1,$$

luego por (6.1), la densidad bariónica es:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle &= 2 \sum_{I_3} \int \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(p)_{I_3}) \\
&= \int_0^{p_{Fp}} \frac{p^2 dp}{\pi^2} + \int_0^{p_{Fn}} \frac{p^2 dp}{\pi^2} \\
&= \frac{1}{3\pi^2} (p_{Fp}^3 + p_{Fn}^3) \equiv n_p + n_n = n_B,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

donde  $p_{Fp}$  y  $p_{Fn}$  son los momentos de Fermi para protones y neutrones respectivamente, y  $n_B$  es la densidad bariónica total. De modo análogo, dado que el valor esperado es lineal y en vista de la ecuación para el campo rho (3.18), la componente temporal de la tercera componente de la corriente de isospín es:

$$\langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle = \frac{1}{2} (n_p - n_n). \tag{6.6}$$

Finalmente, tomando la derivada (6.3) con respecto a  $m^*$ :

$$(\bar{\psi} \psi)_{\vec{p}, \kappa} = \frac{m^*}{\sqrt{p^2 + m^{*2}}},$$

y por (6.1), la densidad escalar es:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi} \psi \rangle &= 2 \sum_{I_3} \int \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{\sqrt{p^2 + m^{*2}}} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(p)_{I_3}) \\
&= \sum_N \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_{FN}} \frac{p^2 (m - g_\sigma \sigma) dp}{\sqrt{p^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2}} \equiv n_s.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

# Bibliografía

- [1] W. Baade y F. Zwicky, “Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays,” *Phys. Rev.*, vol. 46, n.º 1, págs. 76-77, 1934. DOI: [10.1103/PhysRev.46.76.2](https://doi.org/10.1103/PhysRev.46.76.2).
- [2] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity* (Astronomy and Astrophysics Library), 2nd ed. New York: Springer, 2000, ISBN: 978-0-387-98977-8.
- [3] D. Oliinychenko et al., “Sensitivity of Au + Au collisions to the symmetric nuclear matter equation of state at 2–5 nuclear saturation densities,” *Phys. Rev. C*, vol. 108, n.º 3, pág. 034908, 2023. DOI: [10.1103/PhysRevC.108.034908](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.108.034908).
- [4] K. Chatziioannou et al., *Neutron Stars and the Dense Matter Equation of State: From Microscopic Theory to Macroscopic Observations*, 2024. arXiv: [2407.11153](https://arxiv.org/abs/2407.11153).
- [5] R. Abbott et al., “GWTC-2.1: Deep extended catalog of compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the first half of the third observing run,” *Phys. Rev. D*, vol. 109, n.º 2, pág. 022001, 2024. DOI: [10.1103/PhysRevD.109.022001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.022001).
- [6] T. L. S. Collaboration y T. V. Collaboration, “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, n.º 16, pág. 161101, 2017. DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.161101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101). arXiv: [1710.05832](https://arxiv.org/abs/1710.05832).
- [7] T. L. S. Collaboration et al., “GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 M Black Hole with a 2.6 M Compact Object,” *ApJL*, vol. 896, n.º 2, pág. L44, 2020. DOI: [10.3847/2041-8213/ab960f](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab960f). arXiv: [2006.12611](https://arxiv.org/abs/2006.12611).
- [8] E. Fonseca et al., “Refined Mass and Geometric Measurements of the High-mass PSR J0740+6620,” *ApJL*, vol. 915, n.º 1, pág. L12, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac03b8](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac03b8).
- [9] R. W. Romani et al., “PSR J0952-0607: The Fastest and Heaviest Known Galactic Neutron Star,” *ApJL*, vol. 934, n.º 2, pág. L17, 2022. DOI: [10.3847/2041-8213/ac8007](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac8007).
- [10] J. Antoniadis et al., “A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary,” *Science*, vol. 340, n.º 6131, pág. 1233232, 2013. DOI: [10.1126/science.1233232](https://doi.org/10.1126/science.1233232). arXiv: [1304.6875](https://arxiv.org/abs/1304.6875).

- [11] Y. Shao, “On the Neutron Star/Black Hole Mass Gap and Black Hole Searches,” *Res. Astron. Astrophys.*, vol. 22, n.º 12, pág. 122 002, 2022. DOI: [10.1088/1674-4527/ac995e](https://doi.org/10.1088/1674-4527/ac995e).
- [12] J. Walecka, “A theory of highly condensed matter,” *Annals of Physics*, vol. 83, n.º 2, págs. 491-529, 1974. DOI: [10.1016/0003-4916\(74\)90208-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(74)90208-5).
- [13] J. D. Walecka, “The Relativistic Nuclear Many-Body Problem,” en *New Vistas in Nuclear Dynamics*, P. J. Brussaard y J. H. Koch, eds., Boston, MA: Springer US, 1986, págs. 229-271, ISBN: 978-1-4684-5179-5. DOI: [10.1007/978-1-4684-5179-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-5179-5_8).
- [14] M. Dutra et al., “Relativistic Mean-Field Hadronic Models under Nuclear Matter Constraints,” *Phys. Rev. C*, vol. 90, n.º 5, pág. 055 203, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevC.90.055203](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.90.055203). arXiv: [1405.3633](https://arxiv.org/abs/1405.3633).
- [15] L. L. Lopes y D. P. Menezes, “On the Nature of the Mass-gap Object in the GW190814 Event,” *ApJ*, vol. 936, n.º 1, pág. 41, 2022. DOI: [10.3847/1538-4357/ac81c4](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac81c4).
- [16] W. Baade y F. Zwicky, “On Super-Novae,” *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 20, n.º 5, págs. 254-259, 1934. DOI: [10.1073/pnas.20.5.254](https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.254).
- [17] C. W. Misner et al., *Gravitation*. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2017, ISBN: 978-0-691-17779-3.
- [18] A. Einstein, “Die Feldgleichungen Der Gravitation,” *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, págs. 844-847, 1915.
- [19] K. Schwarzschild, “On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein’s Theory,” *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, vol. 1916, págs. 189-196, 1916.
- [20] D. N. Vollick, “On the meaning of various mass definitions for asymptotically flat spacetimes,” *Can. J. Phys.*, vol. 101, n.º 1, págs. 9-16, 2023. DOI: [10.1139/cjp-2022-0023](https://doi.org/10.1139/cjp-2022-0023).
- [21] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff, “On Massive Neutron Cores,” *Phys. Rev.*, vol. 55, n.º 4, págs. 374-381, 1939. DOI: [10.1103/PhysRev.55.374](https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.374).
- [22] E. Pian, “Mergers of Binary Neutron Star Systems: A Multimessenger Revolution,” *Front. Astron. Space Sci.*, vol. 7, pág. 609 460, 2021. DOI: [10.3389/fspas.2020.609460](https://doi.org/10.3389/fspas.2020.609460).
- [23] E. Fonseca et al., “The NANOGrav Nine-year Data Set: Mass and Geometric Measurements of Binary Millisecond Pulsars,” *ApJ*, vol. 832, n.º 2, pág. 167, 2016. DOI: [10.3847/0004-637X/832/2/167](https://doi.org/10.3847/0004-637X/832/2/167). arXiv: [1603.00545](https://arxiv.org/abs/1603.00545).
- [24] M. C. Miller et al., “The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data,” *ApJL*, vol. 918, n.º 2, pág. L28, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac089b](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac089b).

- [25] T. E. Riley et al., “A NICER View of the Massive Pulsar PSR J0740+6620 Informed by Radio Timing and XMM-Newton Spectroscopy,” *ApJL*, vol. 918, n.º 2, pág. L27, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac0a81](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac0a81). arXiv: [2105.06980](https://arxiv.org/abs/2105.06980).
- [26] M. C. Miller et al., “PSR J0030+0451 Mass and Radius from NICER Data and Implications for the Properties of Neutron Star Matter,” *ApJL*, vol. 887, pág. L24, 2019. DOI: [10.3847/2041-8213/ab50c5](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab50c5).
- [27] T. E. Riley et al., “A NICER View of PSR J0030+0451: Millisecond Pulsar Parameter Estimation,” *ApJL*, vol. 887, n.º 1, pág. L21, 2019. DOI: [10.3847/2041-8213/ab481c](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab481c).
- [28] D. Choudhury et al., “A NICER View of the Nearest and Brightest Millisecond Pulsar: PSR J0437–4715,” *ApJL*, vol. 971, n.º 1, pág. L20, 2024. DOI: [10.3847/2041-8213/ad5a6f](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ad5a6f).
- [29] R. Kumar et al., “Theoretical and experimental constraints for the equation of state of dense and hot matter,” *Living Rev Relativ*, vol. 27, n.º 1, pág. 3, 2024. DOI: [10.1007/s41114-024-00049-6](https://doi.org/10.1007/s41114-024-00049-6).
- [30] B. Biswas et al., “GW190814: On the properties of the secondary component of the binary,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 505, n.º 2, págs. 1600-1606, 2021. DOI: [10.1093/mnras/stab1383](https://doi.org/10.1093/mnras/stab1383).
- [31] J. E. Horvath et al., “Birth Events, Masses and the Maximum Mass of Compact Stars,” en *Astrophysics in the XXI Century with Compact Stars*. WORLD SCIENTIFIC, 2022, págs. 1-51, ISBN: 978-981-12-2093-7 978-981-12-2094-4. DOI: [10.1142/9789811220944\\_0001](https://doi.org/10.1142/9789811220944_0001).
- [32] W. Myers y W. Swiatecki, “Nuclear properties according to the Thomas-Fermi model,” *Nuclear Physics A*, vol. 601, n.º 2, págs. 141-167, 1996. DOI: [10.1016/0375-9474\(95\)00509-9](https://doi.org/10.1016/0375-9474(95)00509-9).
- [33] Y. Sakuragi, “Saturation of nuclear matter and roles of many-body forces: Nuclear matter in neutron stars probed by nucleus—nucleus scattering,” *Prog. Theor. Exp. Phys.*, vol. 2016, n.º 6, 06A106, 2016. DOI: [10.1093/ptep/ptw072](https://doi.org/10.1093/ptep/ptw072).
- [34] C. Drischler et al., “Towards grounding nuclear physics in QCD,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 121, pág. 103 888, 2021. DOI: [10.1016/j.pnpnp.2021.103888](https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103888).
- [35] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, 1. Auflage. Weinheim: Wiley-VCH, 2008, ISBN: 978-3-527-61767-8.
- [36] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover Books on Astronomy), Unabr. and corr. republ. of orig. publ. 1939 by Univ. of Chicago Pr. New York: Dover Publ, 1970, ISBN: 978-0-486-60413-8.
- [37] L. M. Becerra et al., “Realistic anisotropic neutron stars: Pressure effects,” *Phys. Rev. D*, vol. 109, n.º 4, pág. 043 025, 2024. DOI: [10.1103/PhysRevD.109.043025](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.043025).

- [38] G. Raaijmakers et al., “Constraints on the Dense Matter Equation of State and Neutron Star Properties from NICER’s Mass–Radius Estimate of PSR J0740+6620 and Multimessenger Observations,” *ApJL*, vol. 918, n.º 2, pág. L29, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac089a](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac089a).
- [39] S. Acharya et al., “Global baryon number conservation encoded in net-proton fluctuations measured in Pb–Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV,” *Physics Letters B*, vol. 807, pág. 135 564, 2020. DOI: [10.1016/j.physletb.2020.135564](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135564).
- [40] H. S. Gurr et al., “Experimental Test of Baryon Conservation,” *Phys. Rev.*, vol. 158, n.º 5, págs. 1321-1330, 1967. DOI: [10.1103/PhysRev.158.1321](https://doi.org/10.1103/PhysRev.158.1321).
- [41] P. Baczyk et al., “Isospin-symmetry breaking in masses of  $N \simeq Z$  nuclei,” *Physics Letters B*, vol. 778, págs. 178-183, 2018. DOI: [10.1016/j.physletb.2017.12.068](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.12.068).
- [42] C. Drischler et al., “Bayesian mixture model approach to quantifying the empirical nuclear saturation point,” *Phys. Rev. C*, vol. 110, n.º 4, pág. 044 320, 2024. DOI: [10.1103/PhysRevC.110.044320](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.110.044320).
- [43] C. J. Horowitz et al., “Insights into nuclear saturation density from parity-violating electron scattering,” *Phys. Rev. C*, vol. 102, n.º 4, pág. 044 321, 2020. DOI: [10.1103/PhysRevC.102.044321](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.102.044321).
- [44] E. Khan et al., “Constraining the Nuclear Equation of State at Subsaturation Densities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, n.º 9, pág. 092 501, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.092501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.092501).
- [45] B.-A. Li et al., “Towards understanding astrophysical effects of nuclear symmetry energy,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 55, n.º 7, pág. 117, 2019. DOI: [10.1140/epja/i2019-12780-8](https://doi.org/10.1140/epja/i2019-12780-8).
- [46] J. Estee et al., “Probing the Symmetry Energy with the Spectral Pion Ratio,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 126, n.º 16, pág. 162 701, 2021. DOI: [10.1103/PhysRevLett.126.162701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.162701).
- [47] G. Baym et al., “The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models,” *ApJ*, vol. 170, pág. 299, 1971. DOI: [10.1086/151216](https://doi.org/10.1086/151216).
- [48] G. Baym et al., “Neutron star matter,” *Nuclear Physics A*, vol. 175, n.º 2, págs. 225-271, 1971. DOI: [10.1016/0375-9474\(71\)90281-8](https://doi.org/10.1016/0375-9474(71)90281-8).
- [49] J. Ospino et al., “Relativistic non-pascalian fluid as a density contribution,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 85, n.º 4, pág. 412, 2025. DOI: [10.1140/epjc/s10052-025-14132-x](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-025-14132-x).
- [50] H. Hernández et al., “Acceptability conditions and relativistic barotropic equations of state,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 81, n.º 3, pág. 241, 2021. DOI: [10.1140/epjc/s10052-021-09044-5](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09044-5).
- [51] H. Abreu et al., “Sound Speeds, Cracking and the Stability of Self-Gravitating Anisotropic Compact Objects,” *Class. Quantum Grav.*, vol. 24, n.º 18, págs. 4631-4645, 2007. DOI: [10.1088/0264-9381/24/18/005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/18/005).

- [52] D. Ramos-Salamanca et al., *Physical Acceptability Conditions for Realistic Neutron Star Equations of State*, 2021. DOI: [10.48550/arXiv.2102.00340](https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.00340). arXiv: [2102.00340](https://arxiv.org/abs/2102.00340).
- [53] G. A. Lalazissis et al., “New parametrization for the Lagrangian density of relativistic mean field theory,” *Phys. Rev. C*, vol. 55, n.º 1, págs. 540-543, 1997. DOI: [10.1103/PhysRevC.55.540](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.55.540).
- [54] C. C. Moustakidis, “The stability of relativistic stars and the role of the adiabatic index,” *Gen Relativ Gravit*, vol. 49, n.º 5, págs. 68, 2017. DOI: [10.1007/s10714-017-2232-9](https://doi.org/10.1007/s10714-017-2232-9).
- [55] W.-C. Chen y J. Piekarewicz, “Building relativistic mean field models for finite nuclei and neutron stars,” *Phys. Rev. C*, vol. 90, n.º 4, págs. 044305, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevC.90.044305](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.90.044305).
- [56] C. Huang et al., “Constraining a relativistic mean field model using neutron star mass–radius measurements I: Nucleonic models,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 529, n.º 4, págs. 4650-4665, 2024. DOI: [10.1093/mnras/stae844](https://doi.org/10.1093/mnras/stae844).
- [57] L.-J. Guo et al., “Insights into Neutron Star Equation of State by Machine Learning,” *ApJ*, vol. 965, n.º 1, págs. 47, 2024. DOI: [10.3847/1538-4357/ad2e8d](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ad2e8d).
- [58] E. Annala et al., “Multimessenger Constraints for Ultra-Dense Matter,” *Phys. Rev. X*, vol. 12, n.º 1, págs. 011058, 2022. DOI: [10.1103/PhysRevX.12.011058](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.12.011058). arXiv: [2105.05132](https://arxiv.org/abs/2105.05132).