
ECUACIONES DE ESTADO DE ESTRELLAS DE NEUTRONES MEDIANTE LA TEORÍA RELATIVISTA DE CAMPO MEDIO

Nicolas Mantilla Molina

Trabajo de grado para optar por el título de:

Físico

Directora:

Laura Marcela Becerra Bayona, PhD

Co-directores:

José Fernando Rodríguez Ruiz, PhD

Luis Alberto Núñez de Villavicencio, PhD

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2025

Dedicatoria

Cuerpo de la dedicatoria

Agradecimientos

Cuerpo de los agradecimientos

Tabla de contenido

Lista de figuras	5
1. Introducción	7
1.1. Notación y Convenciones	8
2. Macrofísica: Objetos Compactos	9
2.1. Relatividad General	9
2.1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein	10
2.2. Simetría Esférica	11
2.3. Ecuaciones de Estructura	12
2.4. Observaciones de Estrellas de Neutrones	14
2.4.1. Mediciones de Masa	15
2.4.2. Mediciones de Radio	15
3. Microfísica: Ecuaciones de Estado	18
3.1. Ecuaciones de Estado y Ejemplos	18
3.1.1. Ecuación Politrópica	19
3.1.2. Gas Ideal Degenerado	19
3.2. Teoría Relativista de Campo Medio	21
3.2.1. Simetrías y Conservaciones	22
3.3. Modelo del Estudio	24
3.3.1. Materia en Saturación Nuclear	30
3.4. Corteza de la Estrella	33
4. Resultados y discusión	35
4.1. Estudio del Espacio de Parámetros	36
4.1.1. Correlaciones entre Parámetros y Observables	36
4.1.2. Regiones Válidas en el Espacio de Parámetros	38
4.1.3. Masa Máxima	43
4.1.4. Comparación de Regiones	44

5. Conclusiones	45
5.1. Principales hallazgos	45
5.2. Limitaciones del estudio	45
5.3. Recomendaciones para futuros trabajos	45
6. Apéndices	46

Lista de figuras

2.1.	Principio de equivalencia	10
2.2.	Geometría del espacio-tiempo esférico	12
2.3.	Cementerio estelar	16
3.1.	Ecuación de estado de gas ideal degenerado	20
3.2.	Relaciones masa-radio de gas ideal degenerado	21
3.3.	Ecuación de estado para el núcleo de estrellas de neutrones.	29
3.4.	Energía de enlace por nucleón en saturación nuclear	31
3.5.	Ecuación de estado unificada y causalidad.	34
4.1.	Correlaciones entre parámetros y observables	37
4.2.	Diagrama de flujo del método de exploración del espacio de parámetros	39
4.3.	Regiones del espacio de parámetros que satisfacen las restricciones nucleares	40
4.4.	Propiedades estelares para diferentes conjuntos de parámetros	42
4.5.	Región de masa máxima en el espacio de parámetros	43
4.6.	Comparación de regiones en el plano A_σ - A_ω	44

Resumen

En el presente trabajo se propone obtener Ecuaciones de Estado (EdE) de una Estrella de Neutrones (EN) mediante la Teoría Relativista de Campo Medio (TRCM). Las EN son objetos cuyas condiciones extremas permiten estudiar la materia nuclear a altas densidades, inalcanzables en laboratorio con la tecnología actual. A través de las EdE, se busca modelar la relación entre la presión y la densidad de energía en el núcleo estelar, lo cual resulta fundamental para describir propiedades observables de la EN como su masa, radio y deformación de marea. Este estudio responde a la necesidad de conectar modelos teóricos con datos experimentales y observacionales, especialmente aquellos obtenidos por misiones como LIGO, VIRGO y NICER.

Las EdE construidas contienen parámetros libres que describen las interacciones y propiedades microscópicas de la materia. Este proyecto tiene como objetivo construir y ajustar modelos de EdE utilizando datos astrofísicos recientes. Adicionalmente, se investigará la capacidad de la EdE hallada para predecir objetos en el Mass-Gap, un rango de valores entre estrellas de neutrones masivas y agujeros negros ligeros, cuya composición sigue siendo debatida. Este enfoque permitirá modelar la estructura de las EN y contribuir al conocimiento de la materia nuclear en condiciones extremas.

Capítulo 1

Introducción

La materia en las estrellas de neutrones (EN) alcanza uno de los estados más extremos y densos conocidos en el universo observable. Estos objetos compactos, resultado del colapso gravitacional de estrellas masivas (sugerido por primera vez en 1934 por Baade y Zwicky [1]), comprimen la materia a densidades que superan las condiciones terrestres [2]. Las propiedades y características de la materia nuclear a densidades tan altas son objeto de estudio en la actualidad. Estudiar estos objetos estelares abre las puertas a la comprensión de la materia densa, ofreciendo un laboratorio natural donde se pueden contrastar modelos teóricos mediante observaciones astrofísicas. En adición, es posible corroborar indirectamente la validez de teorías nucleares y subatómicas bajo condiciones actualmente inalcanzables en el laboratorio [3].

Para este trabajo, el estudio de las EN se centra en las Ecuaciones de Estado (EdE), que describen la relación entre presión, densidad de energía y temperatura, siendo clave para resolver las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Estas ecuaciones determinan características macroscópicas de las EN, como la relación masa-radio y las propiedades de marea, que han sido objeto de observaciones cada vez más detalladas gracias a misiones como NICER [4-6], LIGO y VIRGO [7-9]. Con estos avances, los modelos teóricos se ven enriquecidos y enfrentan desafíos, como la identificación de límites para la masa máxima de una EN posible en la naturaleza, o la existencia de una “brecha de masa” (Mass-Gap) entre las EN de mayor masa y los agujeros negros más ligeros [10].

En el desarrollo de EdE, la Teoría Relativista de Campo Medio (TRCM) surge como una teoría efectiva para modelar interacciones nucleares bajo condiciones extremas de densidad [11, 12]. La TRCM permite construir EdE que consideran distintas composiciones y acoplamientos entre partículas, posibilitando ajustes a los modelos basados en observaciones y datos experimentales cercanos a la densidad de saturación nuclear [13]. Sin embargo, la estructura interna de las EN sugiere la posible presencia de fases exóticas de materia, tales como hiperones o materia de quarks, desafiando aún más las formulaciones de EdE, especialmente en aquellas estrellas que alcanzan masas cercanas a 2.5 masas solares [14]. La búsqueda de una EdE que logre reproducir observaciones actuales es, por lo tanto, crucial no solo para describir el

comportamiento de la materia nuclear densa, sino también para realizar estudios más detallados sobre el destino y evolución final de estos objetos.

En esta propuesta de investigación, se plantea construir modelos de EdE mediante la TRCM y ajustar sus parámetros a partir de las observaciones astrofísicas actuales. La exploración del espacio de parámetros contribuirá a identificar las implicaciones físicas de la materia en su forma más extrema según las observaciones y brindará predicciones de la teoría empleada sobre la naturaleza de los objetos ubicados en el Mass-Gap.

1.1. Notación y Convenciones

A lo largo de este trabajo empleamos convenciones de notación y diferentes sistemas de unidades dependiendo del contexto físico específico. Para el desarrollo de la Relatividad General y el estudio de la estructura macroscópica de objetos compactos, empleamos unidades geometrizadas donde la velocidad de la luz c y la constante gravitacional de Newton G se establecen igual a la unidad $c = G = 1$. Para el tratamiento de la física nuclear y la construcción de ecuaciones de estado microscópicas, utilizamos unidades naturales donde la velocidad de la luz c y la constante de Planck reducida \hbar se fijan como unitarias $c = \hbar = 1$. En cuanto a las convenciones de notación, las letras griegas $\{\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots\}$ denotan índices tensoriales del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, mientras que las letras latinas $\{i, j, k, \dots\}$ denotan componentes del conjunto $\{1, 2, 3\}$. El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tiene signatura $(+, -, -, -)$ y utilizamos la convención de suma de Einstein para índices repetidos.

Capítulo 2

Macrofísica: Objetos Compactos

Los objetos compactos representan uno de los laboratorios naturales más extremos del universo, en los que la materia alcanza densidades, presiones y energías extremas que permiten extender nuestra comprensión de la física fundamental. Las estrellas de neutrones, en particular, constituyen el resultado final del colapso gravitacional de estrellas masivas, comprimiendo la materia a densidades que alcanzan varios órdenes de magnitud por encima de la densidad nuclear, en entornos de presión y temperatura que son extremadamente difíciles de reproducir en laboratorios terrestres [15]. El estudio de estos objetos requiere necesariamente del escenario de la Relatividad General de Einstein, donde la curvatura del espacio-tiempo responde al contenido energético del sistema y viceversa.

En este capítulo desarrollamos los fundamentos teóricos necesarios para describir la estructura y propiedades de las estrellas de neutrones desde una perspectiva macroscópica. Comenzamos con una revisión de los fundamentos de la Relatividad General, estableciendo las ecuaciones de campo de Einstein que gobiernan la dinámica del espacio-tiempo. Posteriormente, exploramos la forma general de geometrías esféricamente simétricas, que proporciona un modelo básico para comprender la estructura de los objetos compactos. A partir de estos fundamentos, derivamos las ecuaciones de estructura que relacionan las propiedades microscópicas de la materia con las características macroscópicas observables de las estrellas de neutrones. Todas las secciones anteriores están fundamentadas en base al texto de Misner et al. [16]. Finalmente, presentamos una revisión de las observaciones astronómicas más relevantes que han refinado nuestro entendimiento de estos objetos en la última década.

2.1. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General, formulada por Einstein en 1915 [17], es la descripción más exitosa de la gravitación como manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Esta teoría establece que la presencia de materia y energía modifica la geometría del espacio-tiempo, y que esta curvatura, a su vez, determina

el movimiento de la materia y la propagación de la energía. La Relatividad General se fundamenta en dos principios básicos: el principio de equivalencia, según el cual los efectos de un campo gravitacional uniforme son localmente indistinguibles de los efectos de una aceleración uniforme, permitiendo que la gravitación pueda ser “eliminada” localmente mediante la elección apropiada de un sistema de coordenadas en caída libre; y el principio de covariancia general, el cual exige que las leyes de la física tengan la misma forma en todos los sistemas de coordenadas, requiriendo que las ecuaciones de la teoría sean expresadas en términos de tensores para asegurar su invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas. Una representación esquemática del principio de equivalencia puede verse en la figura 2.1, donde la esfera roja aparentemente cae en ambos sistemas, uno es un cohete acelerado, el otro la superficie de la tierra, siendo los dos sistemas de referencia indistinguibles.

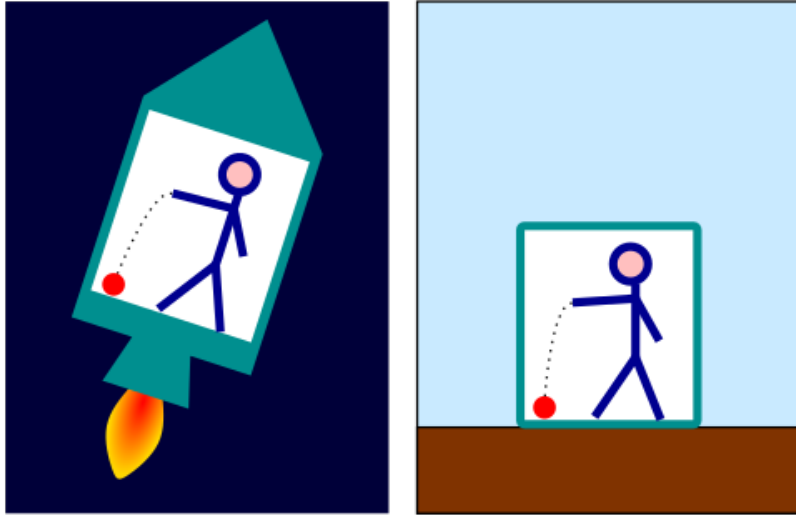


Figura 2.1: Representación esquemática del principio de equivalencia. Markus Poessel.

2.1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales cuya forma compacta es:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein construido a partir del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de curvatura R , y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento que describe las propiedades de la materia y energía presentes en el espacio-tiempo. Este conjunto de ecuaciones describe cómo la distribución de materia y energía determina la curvatura del espacio-tiempo, y cómo esta curvatura afecta el movimiento

de la materia y la energía de vuelta. Las ecuaciones de Einstein satisfacen automáticamente las leyes de conservación del momentum y la energía a través de la identidad de Bianchi $G_{\mu\nu}{}^{;\rho} = 0$, lo que implica:

$$\nabla_\rho T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}{}_{;\rho} = 0. \quad (2.2)$$

Para describir la materia en el interior de las estrellas de neutrones, consideramos un modelo de fluido perfecto. El tensor de energía-momento es:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde ρ es la densidad de energía del fluido, P es la presión isótropa, y u^μ es la cuadrivelocidad del fluido, normalizada según $u^\mu u_\mu = 1$. Esta descripción asume que no hay flujos de calor, viscosidad, ni esfuerzos de corte en el fluido, aproximación válida para escalas de tiempo mucho mayores que los tiempos de relajación hidrodinámicos.

2.2. Simetría Esférica

Para describir la estructura de las estrellas de neutrones, vamos a resolver las ecuaciones de Einstein asumiendo simetría esférica y condiciones estáticas. La forma general de estas soluciones establece el punto de partida para entender tanto el interior como el exterior de objetos compactos con simetría esférica, en el marco de la teoría de la relatividad general. El elemento de línea de un sistema estático y esféricamente simétrico puede escribirse como:

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.4)$$

donde $\phi(r)$ y $\lambda(r)$ son funciones arbitrarias de la coordenada radial r , y hemos utilizado coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) . La simetría esférica impone que la métrica sea invariante bajo rotaciones en el grupo $SO(3)$, mientras que la condición estática requiere la ausencia de términos cruzados $dt dr$, $dt d\theta$, y $dt d\varphi$, así como independencia explícita de la coordenada temporal. La métrica (2.4) representa la forma más general compatible con estas simetrías [16]. Una representación gráfica de la geometría del espacio-tiempo que contiene una estrella con simetría esférica, estática, puede apreciarse en la figura 2.2, donde la región blanca representa la geometría exterior (fuera de la estrella), y la zona gris la región interior (dentro de la estrella).

La solución general esférica (2.4) incluye varios casos de interés físico. En la región de vacío, cuando $T_{\mu\nu} = 0$, las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = 0$ determinan completamente las funciones $\phi(r)$ y $\lambda(r)$, conduciendo a la solución exterior de Schwarzschild [18]. En el interior estelar, en presencia de materia con tensor de energía-momento (2.3), las ecuaciones de Einstein proporcionan relaciones diferenciales entre $\phi(r)$, $\lambda(r)$, y las variables del fluido $\rho(r)$ y $P(r)$. En la superficie estelar, en $r = R$, las soluciones interior

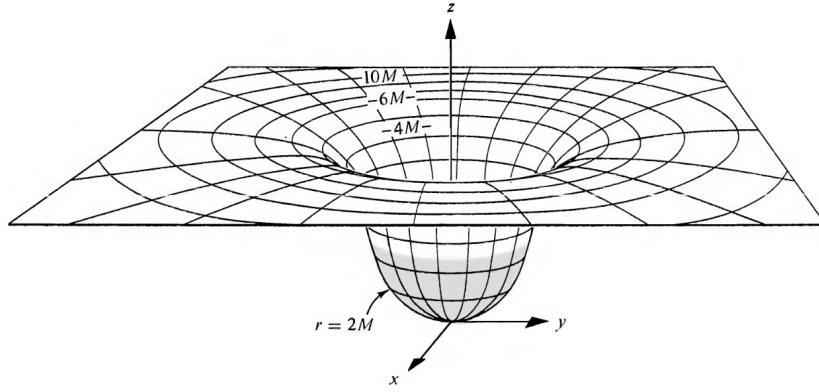


Figura 2.2: Esquema de la geometría del espacio-tiempo de una estrella con simetría esférica. Tomado de [16].

y exterior deben coincidir de manera continua, imponiendo condiciones de frontera específicas.

Para que la solución sea físicamente aceptable, las funciones métricas deben satisfacer condiciones de regularidad apropiadas. En el centro ($r = 0$) se requiere que $m(0) = 0$ y $\phi'(0) = 0$ para evitar posibles singularidades físicas o de coordenadas. En todo el espacio se debe cumplir que $e^{2\lambda} > 0$ y $e^{2\phi} > 0$ para mantener la signatura métrica consistentemente en el espacio-tiempo. En el infinito se exige que $\phi(\infty) = 0$ y $\lambda(\infty) = 0$ para recuperar la métrica de Minkowski, es decir, que en el infinito no haya influencia gravitacional de la estrella y el espacio-tiempo sea plano.

2.3. Ecuaciones de Estructura

Las ecuaciones de estructura determinan la relación entre la distribución de materia en el interior de una estrella y la geometría del espacio-tiempo que genera. Para estrellas de neutrones, estas ecuaciones conectan las propiedades microscópicas de la materia densa con las características macroscópicas observables. En este sistema físico, el tensor de energía-momento del fluido perfecto (2.3) actúa como fuente de las ecuaciones de Einstein (2.1). Las componentes del tensor de energía-momento en coordenadas esféricas son:

$$T_t^t = -\rho(r), \quad (2.5)$$

$$T_r^r = T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = P(r). \quad (2.6)$$

Las ecuaciones de campo $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ establecen un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones métricas. Las componentes independientes son:

- Componente (t, t) :
$$e^{-2\lambda} \left(\frac{2\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho. \quad (2.7)$$

- Componente (r, r) :
$$e^{-2\lambda} \left(\frac{2\phi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi P. \quad (2.8)$$

- Componente (θ, θ) :
$$e^{-2\lambda} \left[\phi'' + \phi'^2 - \phi'\lambda' + \frac{\phi' - \lambda'}{r} \right] = 8\pi P. \quad (2.9)$$

Un resultado relevante para geometrías esféricamente simétricas es la posibilidad de expresar la función métrica $\lambda(r)$ en términos de una función de masa $m(r)$. Definiendo:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (2.10)$$

y utilizando esta parametrización en la ecuación (2.7), obtenemos:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (2.11)$$

donde la función $m(r)$ representa la masa inercial total contenida dentro de una esfera de radio r , y su interpretación física se hace clara al integrar la ecuación (2.11):

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'.$$

Para sistemas asintóticamente planos como en este caso, la masa inercial coincide con la masa gravitacional activa del límite Newtoniano [19], la cual contiene la masa en reposo total, la energía interna total y la energía potencial gravitacional dentro del radio r [16]. De la ecuación (2.8) y usando la parametrización (2.10), la función métrica $\phi(r)$ satisface:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}. \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) determina la componente temporal de la métrica una vez conocidas las funciones $m(r)$ y $P(r)$. Finalmente, utilizando (2.10), (2.11) y (2.12) para sustituir ϕ'' , ϕ' y λ' de (2.9), obtenemos la ecuación de equilibrio hidrostático relativista, también llamada ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [20]:

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}. \quad (2.13)$$

Esta importante ecuación describe el equilibrio entre la presión del fluido y la atracción gravitacional, incluyendo correcciones relativistas necesarias para sostener objetos compactos y permitir su estabilidad.

Para resolver el sistema de ecuaciones de estructura (2.11 - 2.13), se requiere de una ecuación de estado que relacione la presión y la densidad:

$$P = P(\rho) \quad \text{o,} \quad \rho = \rho(P). \quad (2.14)$$

La solución se obtiene integrando numéricamente desde el centro hacia afuera, comenzando con una densidad central $\rho(0) = \rho_c > 0$ dada. El radio estelar R se determina por la condición $P(R) = 0$, y la masa total $M = m(R)$ resulta de la integración de la ecuación de masa. En el límite no relativista ($M \ll R$ y $P \ll \rho$), la ecuación TOV se reduce a la ecuación clásica de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{m}{r^2}. \quad (2.15)$$

Para estrellas de neutrones, las correcciones relativistas en el sistema de ecuaciones son necesarias debido a su alta compacidad $M/R \sim 0.2-0.4$. Este sistema proporciona la base teórica para predecir las propiedades macroscópicas de las estrellas de neutrones a partir de modelos microscópicos de la materia nuclear densa.

2.4. Observaciones de Estrellas de Neutrones

Las observaciones astronómicas de estrellas de neutrones han experimentado una revolución en las últimas décadas [21], proporcionando restricciones cada vez más precisas sobre las propiedades de la materia densa. Estas mediciones permiten contrastar los modelos teóricos de ecuaciones de estado con la realidad física de estos objetos extremos. Las estrellas de neutrones se observan a través de múltiples canales electromagnéticos [2] y, recientemente, mediante ondas gravitacionales [22]. Los principales métodos observacionales incluyen:

- **Cronometraje de Pulsares:** Los pulsares son estrellas de neutrones altamente magnetizadas que emiten haces de radiación electromagnética. La precisión extrema en la medición de sus períodos de rotación permite determinar masas través del análisis orbital en sistemas binarios.
- **Astronomía de Rayos X:** Las estrellas de neutrones en sistemas binarios acretantes o como objetos aislados calientes pueden ser observadas en rayos X. Las misiones como NICER han revolucionado las mediciones de radio a través del modelado de puntos calientes superficiales.
- **Ondas Gravitacionales:** Las fusiones de estrellas de neutrones binarias, detectadas por LIGO-Virgo, proporcionan información sobre las propiedades de marea y la ecuación de estado a través de las modificaciones que introducen en la forma de onda gravitacional.

2.4.1. Mediciones de Masa

Las mediciones de masa de estrellas de neutrones se basan principalmente en el efecto Shapiro en sistemas binarios de pulsares. Este efecto relativista permite determinar las masas con alta precisión a partir del retraso temporal que experimenta la señal del pulsar al atravesar el campo gravitacional de su compañera. Las mediciones más precisas incluyen:

- **PSR J0740+6620:** Con una masa de $2.08 \pm 0.07 M_{\odot}$ [5], representa la medición más precisa de una estrella de neutrones masiva.
- **PSR J0348+0432:** Una estrella de neutrones con masa $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ [6], crucial para establecer el límite inferior de la masa máxima.
- **PSR J0952-0607:** Con una masa reportada de $2.35 \pm 0.17 M_{\odot}$ [4], aunque con mayor incertidumbre debido al método de determinación basado en espectrofotometría.

Estas observaciones establecen que las estrellas de neutrones pueden alcanzar masas superiores a $2 M_{\odot}$, imponiendo restricciones sobre las ecuaciones de estado que deben ser suficientemente rígidas para soportar estas configuraciones. Otras estimaciones se han realizado empleando datos de ondas gravitacionales. Sin embargo, en mediciones mayores aún se discute la naturaleza del objeto observado (estrella de neutrones o agujero negro), como en el caso de GW190814 [9, 14], con una masa del objeto secundario estimado en $2.59^{+0.08}_{-0.09} M_{\odot}$.

2.4.2. Mediciones de Radio

La misión NICER (Neutron star Interior Composition ExploreR) ha proporcionado algunas de las primeras mediciones simultáneas de masa y radio para estrellas de neutrones específicas. Estas mediciones se basan en el modelado de puntos calientes en la superficie de pulsares de milisegundo, analizando las modulaciones en el flujo de rayos X.

Los resultados más significativos incluyen, a 1σ de confiabilidad:

- **PSR J0740+6620:** Análisis independientes con NICER y X-ray Multi-Mirror han proporcionado valores $R = 13.7^{+2.6}_{-1.5}$ km [23] y $R = 12.39^{+1.30}_{-0.98}$ km [24];
- **PSR J0030+0451:** $M = 1.44^{+0.15}_{-0.14} M_{\odot}$ y $R = 13.02^{+1.24}_{-1.06}$ km [25];
- **PSR J0437-4715:** $M = 1.418 \pm 0.037 M_{\odot}$ y $R = 11.36^{+0.95}_{-0.63}$ km [26].

Adicionalmente, se han realizado estimaciones de radio mediante la medición del parámetro de deformación de marea en ondas gravitacionales [27]. Sin embargo, para obtener estas estimaciones es necesario realizar

modelamiento adicional, lo que hace esta estimación modelo-dependiente. Para el caso de *GW190814* y asumiendo el objeto secundario como una estrella de neutrones de rotación rápida, se estimó un radio ecuatorial de $R_e = 14.1^{+1.5}_{-2.0}$ km, mientras que asumiendo una estrella no rotante, se estimó un radio canónico de $R_{1.4} = 13.3^{+0.5}_{-0.6}$ km, ambos en el intervalo de confianza a 90 % [28].

Las observaciones combinadas de masa y radio imponen restricciones consistentes sobre las posibles ecuaciones de estado de la materia nuclear densa. Estas restricciones pueden resumirse como:

- **Rigidez Suficiente:** La ecuación de estado debe ser lo suficientemente rígida para soportar masas $\geq 2 M_\odot$.
- **Radios Consistentes:** Los radios estelares deben estar en el rango $\sim 11 - 14$ km para masas típicas/canónicas de $\sim 1.4 M_\odot$.

Estas restricciones observacionales permiten restringir las posibles ecuaciones de estado de la materia nuclear densa. Al resolver el sistema de ecuaciones de estructura (2.11 - 2.13) junto con una ecuación de estado específica (2.14), es posible predecir la masa y radio de las estrellas de neutrones a partir de modelos microscópicos. De esta manera, las observaciones astronómicas establecen el puente entre la física microscópica de la materia nuclear densa y las características macroscópicas observables de estos objetos compactos, guiando la construcción y validación de modelos teóricos.

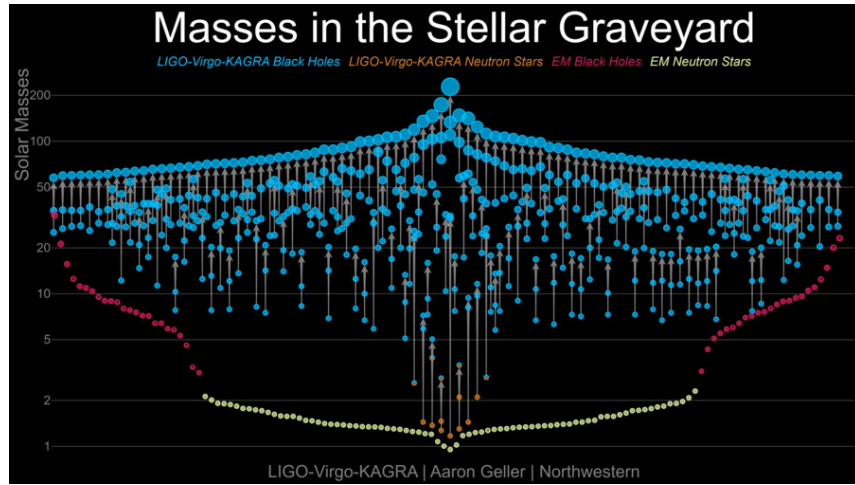


Figura 2.3: Masas en el cementerio estelar. Contiene las masas estimadas mediante diferentes fuentes y su (posible) naturaleza, a enero de 2024. Tomado de ligo.caltech.edu.

Las próximas generaciones de detectores de ondas gravitacionales, junto con misiones espaciales mejoradas y telescopios de nueva generación, prometen expandir significativamente nuestro conocimiento observacional de las estrellas de neutrones. Se espera que estas observaciones proporcionen restricciones aún más

precisas sobre las ecuaciones de estado y posiblemente revelen nueva física en el régimen de densidades ultra-altas. Es claro que, a mayor número de observaciones, mayores son los requerimientos de nuestras teorías, lo que permite filtrar modelos físicos que pretendan describir la masa a densidades tan altas. En particular, la detección de estrellas de neutrones con masas en el rango $2.5 - 3 M_{\odot}$ o la confirmación de transiciones de fase en el interior estelar a través de observaciones de estrellas, prometen descubrimientos de impacto para nuestra comprensión de la materia nuclear densa. En la figura 2.3 se pueden apreciar las estimaciones de masa hasta enero de 2024, así como la posible naturaleza del objeto. Cabe destacar que en el rango de 2 a $5 M_{\odot}$ hay incertidumbre en la naturaleza de varios objetos detectados.

Capítulo 3

Microfísica: Ecuaciones de Estado

La descripción microscópica de la materia en entornos extremos de densidad es un problema de gran complejidad en la física moderna. En estas condiciones, con densidades que exceden significativamente la densidad nuclear de saturación, la materia exhibe comportamientos que requieren marcos teóricos que incorporen efectos relativistas y de muchos cuerpos, asegurando causalidad en el fluido y modelando las interacciones nucleares relevantes. Los modelos que describen esta materia establecen la conexión directa entre la física microscópica de las interacciones nucleares y las propiedades macroscópicas observables de las estrellas de neutrones [20].

Diferentes teorías han sido propuestas para describir la materia en este régimen, desde enfoques no-relativistas basados en potenciales nucleares ajustados a datos experimentales [29, 30], hasta teorías fundamentales como la cromodinámica cuántica (QCD) y sus extensiones efectivas [31]. Sin embargo, para obtener una extrapolación adecuada a densidades extremas, es necesario contar con un marco teórico que respete la causalidad y cuya complejidad computacional sea manejable. Es así como la teoría relativista de campo medio surge como una herramienta particularmente adecuada para abordar este régimen, brindando un tratamiento consistente que respeta la causalidad mientras incorpora las interacciones nucleares fuertes [2]. Este formalismo permite extrapolar desde las propiedades conocidas de materia nuclear simétrica hacia las condiciones asimétricas y de alta densidad relevantes para objetos compactos.

3.1. Ecuaciones de Estado y Ejemplos

Una ecuación de estado define la relación termodinámica entre las variables que caracterizan el estado de equilibrio de un sistema físico. Para materia estelar a temperatura cero, consideramos ecuaciones de estado barotrópicas que relacionan la presión P con la densidad de energía ρ . Esta relación contiene toda la información termodinámica necesaria para determinar la estructura de equilibrio hidrostático de estrellas de neutrones a través de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (2.11 - 2.13). La aproximación

barotrópica es válida cuando los tiempos y escalas característicos de los procesos térmicos son despreciables comparados con las escalas hidrodinámicas y gravitacionales que determinan la estructura estelar. Se desprecia la temperatura debido a que la energía térmica y sus efectos son varios órdenes de magnitud inferiores a las energías internas de la materia en estrellas de neutrones [32].

3.1.1. Ecuación Politrópica

La ecuación de estado politrópica es uno de los modelos más sencillos para describir materia estelar, estableciendo una relación de ley de potencias entre la presión y la densidad de masa:

$$P = K(\rho_m)^\gamma, \quad (3.1)$$

donde K es una constante politrópica y γ es el índice adiabático. Esta forma funcional, aunque fenomenológica, captura comportamientos asintóticos importantes de sistemas físicos más complejos y brinda soluciones analíticas o semi-analíticas para las ecuaciones de estructura estelar. El índice politrópico $n = 1/(\gamma - 1)$ determina las características de compresibilidad del material: valores bajos de n corresponden a materia incompresible, mientras que valores altos describen sistemas altamente compresibles. Para materia ultra-relativista, $\gamma = 4/3$ ($n = 3$), mientras que para materia no-relativista degenerada, $\gamma = 5/3$ ($n = 3/2$) [33].

3.1.2. Gas Ideal Degenerado

Para densidades suficientemente bajas tal que se pueda despreciar la interacción nuclear, un modelo más realista consiste en gases degenerados de fermiones, el modelo físico más simple frecuentemente empleado como referencia. Para materia nuclear compuesta por neutrones, protones y electrones, la ecuación de estado completa debe incluir las contribuciones de todas las especies presentes [32]:

$$\rho = \rho_n + \rho_p + \rho_e, \quad (3.2)$$

$$P = P_n + P_p + P_e, \quad (3.3)$$

donde cada componente fermiónica contribuye según:

$$\rho_i = \frac{g_i}{8\pi^2} \int_0^{p_{Fi}} p^2 \sqrt{p^2 + m_i^2} dp, \quad (3.4)$$

$$P_i = \frac{g_i}{24\pi^2} \int_0^{p_{Fi}} \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m_i^2}} dp, \quad (3.5)$$

con masas $m_n = 939.6$ MeV, $m_p = 938.3$ MeV, $m_e = 0.511$ MeV para los neutrones, protones y electrones

respectivamente, y degeneraciones estadísticas (de espín) $g_i = 2$ para todas las especies. Los momentos de Fermi p_{Fi} están determinados por las densidades de número mediante $n_i = \frac{g_i p_{Fi}^3}{6\pi^2}$. Para resolver el sistema, se imponen restricciones adicionales sobre la composición de la materia garantizando el equilibrio termodinámico: la neutralidad de carga eléctrica

$$n_p = n_e, \quad (3.6)$$

y el equilibrio beta débil

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e \implies \mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad (3.7)$$

entre los potenciales químicos μ_i , suponiendo que los neutrinos escapan del sistema sin alterar su energía. Estas restricciones permiten expresar todas las densidades en función de un parámetro libre como el momento de Fermi del electrón p_{Fe} , lo que reduce el sistema a una parametrización unidimensional.

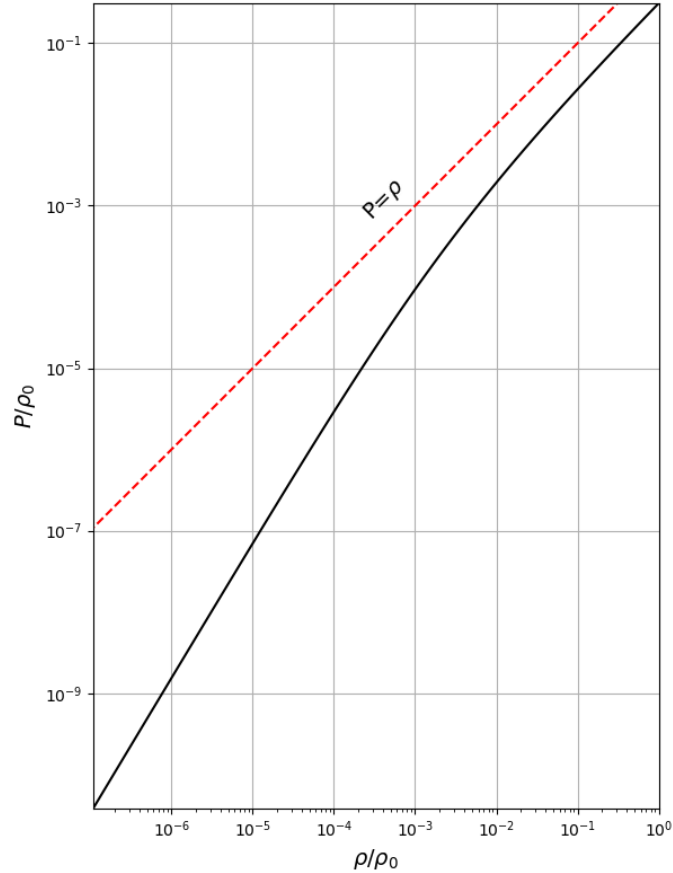


Figura 3.1: Ecuación de estado normalizada de un gas ideal degenerado de neutrones, protones y electrones. La ecuación de estado es causal ($c_s^2 = dP/d\rho < 1$). ρ_0 es el parámetro de adimensionalización y corresponde a la densidad de energía a $\rho_m = 10^{18}$ g/cm³.

La figura 3.1 muestra la ecuación de estado adimensionalizada para un gas ideal de neutrones, protones y electrones libres, obtenida tras resolver el sistema de integrales (3.4) y (3.5) e interpolar. Luego, integrando las ecuaciones TOV (2.11 - 2.13) obtenemos las masas y radios de estrellas construidas con este material, como se muestra en la figura 3.2. Este modelo sencillo predice una masa máxima de apenas $0.7 M_{\odot}$, muy inferior a las masas que se han observado de estrellas de neutrones (listadas en la sección 2.4), motivando la búsqueda de modelos más realistas que incluyan las interacciones nucleares para lograr replicar las observaciones.

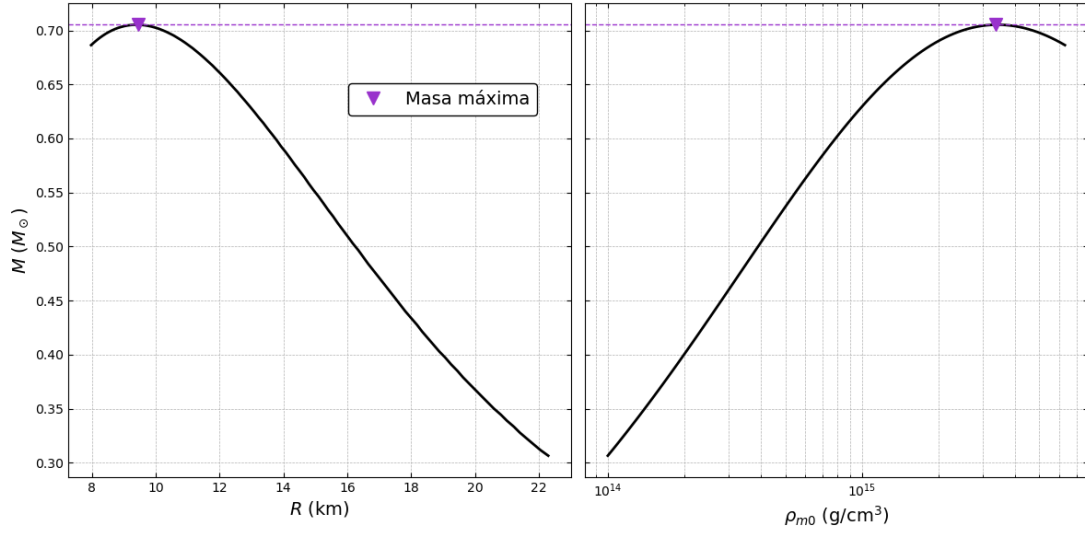


Figura 3.2: Relaciones de masa - radio (izquierda) y masa - densidad central de masa (derecha) de estrellas de neutrones constituidas por un gas ideal de neutrones, protones y electrones libres.

3.2. Teoría Relativista de Campo Medio

La teoría relativista de campo medio, formulada por Walecka en 1974 [11], es un marco teórico que describe las interacciones nucleares mediante el intercambio de mesones efectivos, extendiendo el modelo de gas degenerado (discutido en 3.1.2) e incorporando naturalmente los efectos relativistas cuando los nucleones alcanzan velocidades comparables a la velocidad de la luz en condiciones de alta densidad. Esta aproximación ofrece ventajas significativas respecto a enfoques no-relativistas basados en potenciales fenomenológicos, ya que es una teoría covariante y reproduce simultáneamente las propiedades de saturación nuclear, el comportamiento asintótico a alta densidad, y la consistencia causal relativista. Adicionalmente, al ser una teoría efectiva, requiere de un menor esfuerzo computacional respecto a teorías más fundamentales como QCD.

El formalismo se construye a partir de un lagrangiano que describe nucleones interactuando a través de campos mesónicos: los campos fermiónicos representan los grados de libertad nucleónicos y leptónicos, mientras que los campos bosónicos representan mesones que median las interacciones fuertes. La aproximación de campo medio consiste en reemplazar los operadores de campo mesónicos por sus valores esperados en el estado base degenerado:

$$\langle \phi_i(x^\mu) \rangle = \phi_i^0 \equiv \text{constante}, \quad (3.8)$$

donde ϕ_i denota los diferentes campos mesónicos del modelo. Esta aproximación es válida cuando las fluctuaciones cuánticas son pequeñas comparadas con los valores esperados de los campos, condición que se satisface para materia nuclear densa cuanto mayor es la densidad del sistema [12].

3.2.1. Simetrías y Conservaciones

El formalismo de la teoría relativista de campo medio se construye sobre la teoría cuántica de campos. La densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \phi_a, \partial_\mu \phi_a)$ describe las interacciones entre campos fermiónicos ψ y campos bosónicos ϕ_a junto con sus términos libres. Esta densidad lagrangiana debe satisfacer los requerimientos de localidad, covariancia de Lorentz, y las simetrías internas relevantes para las interacciones nucleares fuertes [2]. La acción del sistema se define como la integral de la densidad lagrangiana sobre el volumen espaciotemporal:

$$S[\psi, \phi_a] = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \phi_a, \partial_\mu \phi_a), \quad (3.9)$$

donde d^4x es el elemento de volumen en coordenadas de Minkowski. El principio de acción estacionaria establece que las configuraciones físicas de los campos corresponden a los extremos de esta funcional, lo que conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange para todos los campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_b} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_b)} \right) = 0, \quad (3.10)$$

donde φ_b representa todos los campos presentes. La teoría presenta simetrías externas e internas que determinan sus conservaciones y sus consecuencias físicas. Las simetrías externas son las transformaciones del grupo de Poincaré: traslaciones espaciotemporales $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ y boosts de Lorentz $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Las simetrías internas relevantes incluyen la simetría de gauge global $U(1)$ $\psi \mapsto e^{-i\lambda} \psi$ asociada con la conservación del número bariónico, y la simetría de isospín $SU(2)$ $\psi \mapsto e^{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\lambda}} \psi$ asociada con la relación entre neutrones y protones, en la aproximación de iguales masas.

El teorema de Noether establece una correspondencia entre simetrías continuas del lagrangiano y cantidades conservadas. Para cada simetría continua existe una corriente conservada correspondiente que satisface una ecuación de continuidad. El tensor de energía-momento, asociado a la simetría externa, se define como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_j)} \partial^\nu \varphi_j - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \implies \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.11)$$

garantizando que la energía total $\int d^3x T^{00}$ del sistema se conserve en el tiempo en ausencia de fuerzas externas (flujos de momento en la frontera).

La corriente bariónica, asociada a la simetría interna $U(1)$, se define como:

$$J_B^\mu = \sum_N \bar{\psi}_N \gamma^\mu \psi_N \implies \partial_\mu J_B^\mu = 0, \quad (3.12)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac y la suma se extiende sobre todas las especies de bariones presentes. Esto implica que el número bariónico $\int d^3x J_B^0$ integrado sobre el volumen total del sistema considerado permanece constante en el tiempo, reflejando el hecho experimental de que los bariones no se crean ni se destruyen en interacciones fuertes como se ha evidenciado por ALICE en el LHC [34] y se ha probado desde su postulación en 1940 [35].

La corriente de isospín, asociada a la simetría interna $SU(2)$, se define como:

$$\mathbf{J}_I^\mu = \sum_N \bar{\psi}_N \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_N \implies \partial_\mu J_I^{\mu a} = 0, \quad (3.13)$$

donde $\boldsymbol{\tau} = \tau^a$ ($a = 1, 2, 3$) son las matrices de Pauli en el espacio de isospín. La simetría de isospín ha sido ampliamente utilizada para describir las interacciones nucleares. En la realidad física esta simetría está ligeramente rota por las diferencias de masa entre neutrones y protones, y por las interacciones electromagnéticas. Sin embargo, dado que estas violaciones son pequeñas en la escala de interacciones fuertes, pueden tratarse como pequeñas correcciones e ignorarse en primera aproximación [36]. La conservación aproximada de isospín justifica el tratamiento unificado de neutrones y protones en modelos de materia nuclear.

Estas leyes de conservación derivadas del teorema de Noether añaden restricciones importantes sobre la dinámica del sistema y establecen conexiones directas entre las simetrías fundamentales de la teoría y las cantidades físicamente observables.

3.3. Modelo del Estudio

El modelo empleado en este trabajo incorpora nucleones (protones y neutrones) interactuando mediante campos mesónicos, y electrones libres. El lagrangiano total incluye términos para nucleones acoplados a los mesones, términos libres para electrones, un mesón escalar neutro σ con autointeracciones no-lineales hasta cuarto orden, un mesón vectorial neutro ω^μ , y un mesón vectorial isovectorial $\boldsymbol{\rho}^\mu$ [2]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi} \left[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_\omega \omega_\mu - \tfrac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu) - (m - g_\sigma \sigma) \right] \psi \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3} b m (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 \\
& - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
& - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \\
& - g_\rho \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot [\boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{\rho}^{\nu\mu} + 2g_\rho (\boldsymbol{\rho}^\mu \times \boldsymbol{\rho}^\nu) \times \boldsymbol{\rho}_\nu] \\
& + \bar{\psi}_e (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e) \psi_e,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde ψ es una representación conveniente de los campos nucleónicos como un espinor de ocho componentes, ψ_e es el campo del electrón, $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ y $\boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\rho}_\mu$ son los tensores antisimétricos de campo asociados a los mesones ω y $\boldsymbol{\rho}$ respectivamente, $m \approx 938.92 \text{ MeV}$ es la masa de un nucleón considerada igual para protones y neutrones, y m_i es la masa de la especie i . Los parámetros adimensionales de acoplamiento g_σ , g_ω , g_ρ cuantifican la intensidad de las interacciones nucleón-mesón, y los parámetros adimensionales b , c regulan las autointeracciones del mesón sigma. En la construcción de este lagrangiano se acopla el campo escalar con la densidad escalar, el campo vectorial con la corriente bariónica, y el campo isovectorial con la 3-corriente de isospín. Esta última corriente contiene no solo una contribución por los nucleones, sino también una contribución por la corriente propia del campo $\boldsymbol{\rho}$ y otra por la interacción del mesón con su propia 3-corriente.

Las ecuaciones de movimiento para los campos se obtienen mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.10). Para los campos mesónicos, se satisfacen:

$$(\square + m_\sigma^2) \sigma = g_\sigma [\bar{\psi} \psi - b m (g_\sigma \sigma)^2 - c (g_\sigma \sigma)^3], \tag{3.15}$$

$$(\square + m_\omega^2) \omega^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
(\square + m_\rho^2) \boldsymbol{\rho}^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \boldsymbol{\rho}^\nu = & \tfrac{1}{2} g_\rho \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} \psi - 2g_\rho [\boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{\rho}^{\nu\mu} + \partial_\nu (\boldsymbol{\rho}^\mu \times \boldsymbol{\rho}^\nu) \\
& + 4g_\rho [(\boldsymbol{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu) \boldsymbol{\rho}^\nu - (\boldsymbol{\rho}_\nu \cdot \boldsymbol{\rho}^\nu) \boldsymbol{\rho}^\mu]].
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Para los campos fermiónicos se obtienen las ecuaciones de Dirac, acoplada a los campos mesónicos para los nucleones y libre para los electrones:

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_\omega \omega_\mu - \tfrac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu) - (m - g_\sigma \sigma)] \psi &= 0, \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e) \psi_e &= 0. \end{aligned}$$

Hasta el momento tenemos un conjunto de ecuaciones de movimiento diferenciales, no lineales y acopladas que describen la dinámica completa del sistema. Aplicamos la aproximación de campo medio descrita en la sección 3.2, considerando que tenemos materia estática y uniforme en su estado base, de modo que los valores esperados de los campos mesónicos son constantes en el espacio y el tiempo. En este caso, las derivadas espaciales y temporales de los campos mesónicos se anulan, simplificando las ecuaciones de movimiento a un sistema algebraico acoplado. Mantendremos las etiquetas para los campos, recordado que ahora son el valor esperado en el estado base. Para los mesones (3.15 - 3.17), sustituyendo consistentemente las fuentes de corriente por su valor esperado, se obtiene:

$$\begin{aligned} m_\sigma^2 \sigma &= g_\sigma [\langle \bar{\psi} \psi \rangle - bm(g_\sigma \sigma)^2 - c(g_\sigma \sigma)^3], \\ m_\omega^2 \omega^\mu &= g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rangle = g_\omega [\langle \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p \rangle + \langle \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n \rangle], \\ m_\rho^2 \rho_3^\mu &= \tfrac{1}{2} g_\rho \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \tau_3 \psi \rangle = g_\rho [\tfrac{1}{2} \langle \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p \rangle - \tfrac{1}{2} \langle \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n \rangle], \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde las primeras dos componentes del mesón $\boldsymbol{\rho}^\mu$ son escritas en términos de los operadores de creación y aniquilación para mesones rho cargados $\rho_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_1^\mu \pm i\rho_2^\mu)$, luego su valor esperado se anula en el estado base del sistema [2], anulando el término fuente de la corriente propia del campo.

Para los campos fermiónicos se tienen ecuaciones sin dependencia de las coordenadas de espacio-tiempo, siendo estados propios de momento:

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu (p_\mu - g_\omega \omega_\mu - g_\rho I_3 \rho_{3\mu}) - (m - g_\sigma \sigma)] \psi(p^\nu) &= 0, \\ (\gamma^\mu p_\mu - m_e) \psi_e(p^\nu) &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $I_3 = \{+\frac{1}{2}$ para protones, $-\frac{1}{2}$ para neutrones} es el isospín de la partícula. En analogía con la ecuación de Dirac libre, definimos las cantidades de 4-momento y masa efectivas para nucleones:

$$\begin{aligned} P^\mu &= p^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho I_3 \rho_3^\mu, \\ m^* &= m - g_\sigma \sigma, \end{aligned} \quad (3.20)$$

obteniendo entonces la relación de dispersión relativista:

$$(P_\mu P^\mu - m^{*2}) \psi(P^\nu) = 0, \quad (3.21)$$

luego los valores propios de energía para los nucleones son:

$$\epsilon(\vec{p})_{I_3} = \sqrt{(\vec{p} - g_\omega \vec{\omega} - g_\rho I_3 \vec{\rho}_3)^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2} + g_\omega \omega_0 + g_\rho I_3 \rho_{30}. \quad (3.22)$$

Para calcular los valores esperados de las corrientes en (3.18), usaremos un método económico para ahorrarnos la construcción de los campos fermiónicos [2]. La forma general del valor esperado de un operador Γ en el estado base de un sistema de muchos fermiones es:

$$\langle \bar{\psi} \Gamma \psi \rangle = \sum_{\kappa} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\bar{\psi} \Gamma \psi)_{\vec{p}, \kappa} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(\vec{p})_{\kappa}), \quad (3.23)$$

donde κ representa los grados de libertad internos (espín, isospín), ϵ_F es la energía de Fermi del sistema, y $\Theta(x)$ la función escalón de Heaviside. $(\bar{\psi} \Gamma \psi)_{\vec{p}, \kappa}$ es el valor esperado, en el espacio de fase, del operador Γ en el estado de un solo fermión con momento \vec{p} y grado de libertad interno κ . Para hallar el integrando acudimos al hamiltoniano de Dirac, y a su valor esperado:

$$\begin{aligned} H_D^{I_3} &= \gamma_0 [\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma^\mu (g_\omega \omega_\mu + g_\rho I_3 \rho_{3\mu}) + (m - g_\sigma \sigma)], \\ (\psi^\dagger H_D^{I_3} \psi)_{\vec{p}, \kappa} &= \epsilon(\vec{p})_{\kappa} = P_0(\vec{p}) + g_\omega \omega_0 + g_\rho I_3 \rho_{30}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Notamos que el hamiltoniano depende del isospín I_3 pero no del espín, de modo que los estados de espín son degenerados con ocupación dos. Tomando la derivada del hamiltoniano respecto a cualquier variable ξ del hamiltoniano (3.24), y usando la regla de la cadena, obtenemos [2]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\psi^\dagger H_D^{I_3} \psi)_{\vec{p}, \kappa} = (\psi^\dagger \frac{\partial H_D^{I_3}}{\partial \xi} \psi)_{\vec{p}, \kappa} + \epsilon(\vec{p})_{\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi^\dagger \psi)_{\vec{p}, \kappa}, \quad (3.25)$$

donde el último término se anula porque ψ es una función propia. Tomando la derivada con respecto a p^i , se obtiene:

$$(\bar{\psi} \gamma^i \psi)_{\vec{p}, \kappa} = \frac{\partial \epsilon(\vec{p})_{\kappa}}{\partial p^i},$$

y por (3.23), la corriente de nucleones es:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \gamma^i \psi \rangle &= 2 \sum_{I_3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial \epsilon(\vec{p})_{I_3}}{\partial p^i} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(\vec{p})_{I_3}) \\ &= 2 \sum_{I_3} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^3} \int dp^i \frac{\partial \epsilon(\vec{p})_{I_3}}{\partial p^i} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(\vec{p})_{I_3}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde la integral se anula porque los valores de energía en las fronteras del volumen (de momento) son los mismos. La componente espacial de la corriente bariónica es nula, como era de esperarse en un sistema estático y uniforme, de modo que las componentes espaciales tanto del mesón ω como del mesón ρ_3 se anulan (ver ecuaciones (3.18)). Como tenemos solo componentes temporales de estos mesones, la energía

de las partículas (3.22) depende únicamente de la magnitud del momento $\epsilon(\vec{p}) = \epsilon(p)$, lo que implica que la superficie de Fermi es esférica en el espacio de momentos.

Ahora, tomando la derivada (3.25) con respecto a ω_0 :

$$(\bar{\psi}\gamma^0\psi)_{\vec{p},\kappa} = 1,$$

luego por (3.23), la densidad bariónica es:

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}\gamma^0\psi\rangle &= 2 \sum_{I_3} \int \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(p)_{I_3}) \\ &= \int_0^{p_{Fp}} \frac{p^2 dp}{\pi^2} + \int_0^{p_{Fn}} \frac{p^2 dp}{\pi^2} \\ &= \frac{1}{3\pi^2} (p_{Fp}^3 + p_{Fn}^3) \equiv n_p + n_n = n_B,\end{aligned}\tag{3.27}$$

donde p_{Fp} y p_{Fn} son los momentos de Fermi para protones y neutrones respectivamente, y n_B es la densidad bariónica total. De modo análogo, dado que el valor esperado es lineal y en vista de la ecuación para el campo rho (3.18), la componente temporal de la tercera componente de la corriente de isospín es:

$$\langle\bar{\psi}\gamma^0\tau_3\psi\rangle = \frac{1}{2}(n_p - n_n).\tag{3.28}$$

Finalmente, tomando la derivada (3.25) con respecto a m^* :

$$(\bar{\psi}\psi)_{\vec{p},\kappa} = \frac{m^*}{\sqrt{p^2 + m^{*2}}},$$

y por (3.23), la densidad escalar es:

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}\psi\rangle &= 2 \sum_{I_3} \int \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{\sqrt{p^2 + m^{*2}}} \Theta(\epsilon_F - \epsilon(p)_{I_3}) \\ &= \sum_N \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_{FN}} \frac{p^2(m - g_\sigma\sigma)dp}{\sqrt{p^2 + (m - g_\sigma\sigma)^2}} \equiv n_s.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Para hallar la ecuación de estado, calculamos el tensor de energía-momento canónico (3.11) en el marco de referencia del fluido en reposo e isotrópico, utilizando el lagrangiano (3.14). Luego, hallamos el valor esperado de las componentes empleando el método de las ecuaciones (3.23 - 3.25) y las identificamos con las cantidades termodinámicas de densidad de energía y presión para un fluido perfecto (2.3). Las expresiones para densidad de energía y presión son:

$$\rho = \langle T^{00} \rangle = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{3}bm(g_\sigma\sigma)^3 + \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{30}^2 + \sum_N \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_{FN}} p^2 dp \sqrt{p^2 + (m - g_\sigma\sigma)^2} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_{Fe}} p^2 dp \sqrt{p^2 + m_e^2}, \quad (3.30)$$

$$P = \frac{1}{3} \sum_i \langle T^{ii} \rangle = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{3}bm(g_\sigma\sigma)^3 - \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{30}^2 + \sum_N \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{p_{FN}} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + (m - g_\sigma\sigma)^2}} + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{p_{Fe}} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + m_e^2}}. \quad (3.31)$$

Ahora, con el fin de resolver numéricamente el sistema, nos interesa reescribir las ecuaciones necesarias en términos de variables adimensionales. Definimos entonces las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{m}, & \tilde{x}_\sigma &= 1 - \frac{g_\sigma\sigma}{m} = \frac{m^*}{m}, \\ A_i &= \left(\frac{g_i}{m_i} \right)^2 m^2, & \tilde{n} &= \frac{n_B}{m^3} = \frac{1}{3\pi^2} (x_{Fp}^3 + x_{Fn}^3), \\ \tilde{\rho} &= \frac{2\rho}{m^4}, & \tilde{P} &= \frac{2P}{m^4}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde $i = \{\sigma, \omega, \rho\}$. Usando estas variables, la ecuación de movimiento para el campo escalar (3.18) considerando la forma de la densidad escalar (3.29) se escribe como:

$$(1 - \tilde{x}_\sigma) - A_\sigma \left[\frac{1}{\pi} \sum_N \int_0^{x_{FN}} \frac{\tilde{x}_\sigma x^2 dx}{\sqrt{x^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} - b(1 - \tilde{x}_\sigma)^2 - c(1 - \tilde{x}_\sigma)^3 \right] = 0, \quad (3.33)$$

donde $x_{Fi} = p_{Fi}/m$ son los momentos de Fermi adimensionales. Las expresiones para densidad de energía (3.30) y presión (3.31), utilizando las expresiones para la densidad bariónica (3.27) y la densidad de 3-isospín (3.28), quedan:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{1}{A_\sigma} (1 - \tilde{x}_\sigma)^2 + \frac{2}{3}b(1 - \tilde{x}_\sigma)^3 + \frac{1}{2}c(1 - \tilde{x}_\sigma)^4 + A_\omega \tilde{n}^2 + \frac{1}{36\pi^4} A_\rho (x_{Fp}^3 - x_{Fn}^3)^2 \\ &\quad + \sum_N \frac{2}{\pi^2} \int_0^{x_{FN}} \sqrt{x^2 + \tilde{x}_\sigma^2} x^2 dx + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{x_{Fe}} \sqrt{x^2 + \left(\frac{m_e}{m} \right)^2} x^2 dx, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= -\frac{1}{A_\sigma} (1 - \tilde{x}_\sigma)^2 - \frac{2}{3}b(1 - \tilde{x}_\sigma)^3 - \frac{1}{2}c(1 - \tilde{x}_\sigma)^4 + A_\omega \tilde{n}^2 + \frac{1}{36\pi^4} A_\rho (x_{Fp}^3 - x_{Fn}^3)^2 \\ &\quad + \sum_N \frac{2}{3\pi^2} \int_0^{x_{FN}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} + \frac{2}{3\pi^2} \int_0^{x_{Fe}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{m_e}{m} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Estas expresiones son funciones de la densidad de número de protones, neutrones y electrones. Es necesario imponer condiciones adicionales para cerrar el sistema como en el caso del gas ideal de la sección 3.1.2. Imponemos las mismas condiciones de neutralidad local de carga (3.6) y equilibrio beta (3.7), así como la conservación del número de bariones $n_B = n_p + n_n$, obteniendo las ligaduras:

$$\begin{aligned} x_{Fp} &= x_{Fe}, \\ \sqrt{x_{Fn}^2 + \tilde{x}_\sigma^2} - \sqrt{x_{Fp}^2 + \tilde{x}_\sigma^2} - \frac{1}{6\pi^2} A_\rho - \sqrt{x_{Fe}^2 + \left(\frac{m_e}{m}\right)^2} &= 0, \\ x_{Fp} &= (3\pi^2 \tilde{n} - x_{Fn}^3)^{1/3}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

De las expresiones adimensionalizadas (3.33 - 3.36) podemos entender el sistema físico descrito por el modelo. Primero, es importante notar que, si bien definimos ocho constantes inicialmente (g_i , m_i con $i = \{\sigma, \omega, \rho\}$, b , c), las ecuaciones solo dependen de cinco combinaciones adimensionales de estas constantes: los cocientes A_i , y los parámetros de autointeracción escalar b y c . Por lo tanto, el modelo tiene cinco parámetros libres que deben ser ajustados para reproducir datos experimentales o teóricos adicionales. En segundo lugar, podemos deducir que el campo escalar σ actúa para reducir la masa efectiva de los nucleones disminuyendo la energía por partícula a mayores densidades, mientras que el campo vectorial ω_0 aumenta la energía por partícula debido a su acoplamiento con la densidad bariónica total. Esto indica que el mesón σ genera una interacción atractiva entre nucleones, mientras que el mesón ω genera una interacción repulsiva. Finalmente, el mesón ρ actúa para ajustar la diferencia entre las densidades de protones y neutrones con un efecto “repulsivo” ante la asimetría del sistema.

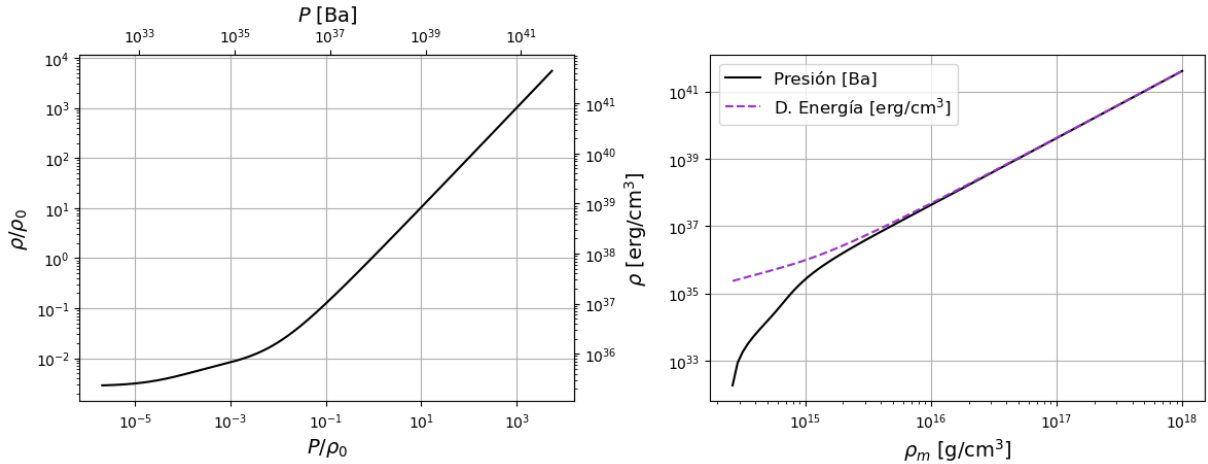


Figura 3.3: Ecuación de estado (izquierda) y variables termodinámicas en función de la densidad de masa (derecha) para el núcleo de estrellas de neutrones empleando teoría relativista de campo medio. $\rho_0 = m^4/2$ es el factor de adimensionalización. Se usaron los parámetros $\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = 12.684 \text{ fm}^2$, $\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 = 7.148 \text{ fm}^2$, $\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 = 4.410 \text{ fm}^2$, $b = 5.610 \times 10^{-3}$, $c = -6.986 \times 10^{-3}$.

Ahora que tenemos un sistema cerrado, podemos resolverlo numéricamente para cada valor de n_B , obteniendo la ecuación de estado $\tilde{\rho}(\tilde{P})$, como se muestra en la figura 3.3. Sin embargo, aún es necesario determinar los parámetros del modelo para que sea físicamente consistente. Para ello, acudimos a las propiedades empíricas de la materia nuclear en saturación, descritas a continuación.

3.3.1. Materia en Saturación Nuclear

Si suprimimos los electrones libres del modelo (3.14) y consideramos materia nuclear simétrica ($n_p = n_n$), el sistema se reduce a un fluido de nucleones interactuando mediante los campos mesónicos. Este sistema debe reproducir las propiedades de la materia nuclear en saturación, caracterizada por cinco parámetros empíricos que añaden restricciones obligatorias para cualquier teoría microscópica válida [27]. Estos parámetros pueden determinarse experimentalmente mediante mediciones en laboratorios terrestres, siendo una herramienta de calibración para los modelos teóricos nucleares.

La densidad de saturación nuclear n_0 define la densidad a la cual la materia nuclear simétrica alcanza su estado de mínima energía de enlace por nucleón $\frac{B}{A}$. Tras aplicar un análisis bayesiano a una colección de ligaduras de la Teoría Funcional de la Densidad, que incluyen modelos relativistas de campo medio y de Skyrme, se obtienen valores [37]:

$$n_0 = 0.157 \pm 0.010 \text{ fm}^{-3}, \quad (3.37)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho(n_0)}{n_0} - m = -15.97 \pm 0.40 \text{ MeV}. \quad (3.38)$$

Este resultado empírico es consistente con estimaciones realizadas a partir de mediciones de dispersión de electrones con violación de paridad en ^{208}Pb en el experimento PREX [38] y ajustes de 1654 núcleos atómicos a un modelo de gota líquida [27, 29]. En nuestro modelo (3.14), estas propiedades de saturación se determinan hallando el mínimo de la función $\frac{B}{A}(n_B)$ en ausencia de electrones, como se muestra de ejemplo en la figura 3.4.

El módulo de compresibilidad nuclear K_0 caracteriza la rigidez de la materia nuclear ante compresiones alrededor del punto de saturación. Este parámetro es determinante para la extrapolación de la ecuación de estado a densidades supranucleares, y es estimado mediante las resonancias monopulares en núcleos pesados. Considerando un modelo de cadena de núcleos para esta resonancia en ^{208}Pb , se obtiene [27, 39]:

$$K_0 = 9n_0^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left(\frac{\rho}{n} \right) \bigg|_{n=n_0} = 230 \pm 40 \text{ MeV}. \quad (3.39)$$

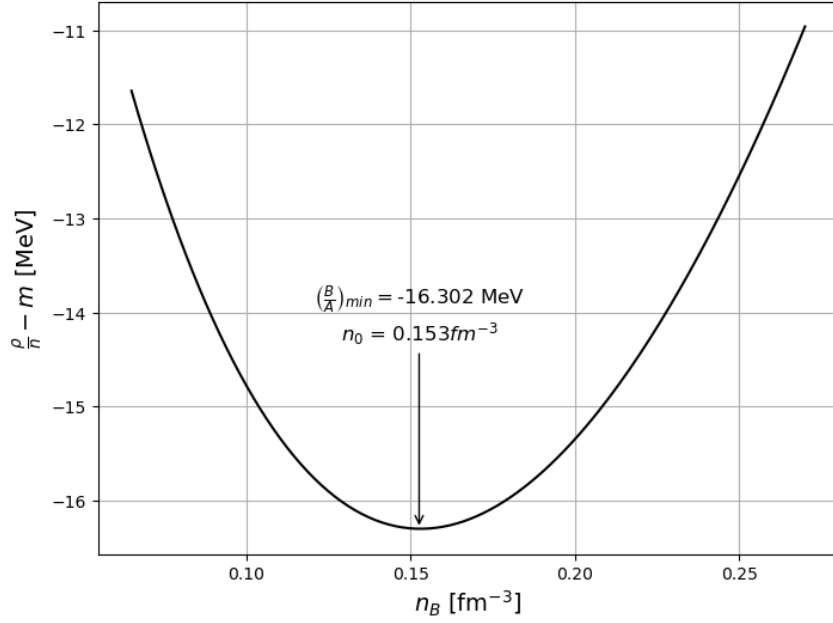


Figura 3.4: Energía de enlace por nucleón en función de la densidad bariónica para materia nuclear simétrica sin electrones. La densidad de saturación n_0 y la energía de enlace por nucleón en saturación $\frac{B}{A}$ se señalan en el mínimo. Se usaron los parámetros $\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = 12.684 \text{ fm}^2$, $\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 = 7.148 \text{ fm}^2$, $\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 = 4.410 \text{ fm}^2$, $b = 5.610 \times 10^{-3}$, $c = -6.986 \times 10^{-3}$.

Esta cantidad está relacionada algebraicamente con cantidades de nuestro modelo de materia simétrica en saturación mediante:

$$\begin{aligned} \frac{K_0}{3m} &= \frac{2}{\pi^2} A_\omega x_F^3 + \frac{x_F^2}{\sqrt{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} - \frac{2A_\sigma}{\pi^2} \frac{x_F^3 \tilde{x}_\sigma^2}{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2} F^{-1}, \\ F &= 1 + A_\sigma (1 - \tilde{x}_\sigma) [2b + 3c(1 - \tilde{x}_\sigma)] + \frac{2A_\sigma}{\pi^2} \int_0^{x_F} \frac{x^4 dx}{(x^2 + \tilde{x}_\sigma^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde $x_F p = x_F n = x_F$.

La energía de simetría a_{sym} cuantifica el costo energético de desviarse de la composición simétrica. Esta cantidad determina la composición de protones y neutrones en materia nuclear densa, afectando directamente las propiedades de las estrellas de neutrones. La pendiente de la energía de simetría L_0 describe la dependencia de la energía de simetría con la densidad de bariones alrededor de la densidad de saturación.

Para estas dos cantidades, tras una revisión de 28 estimaciones tanto de experimentos terrestres como de observaciones astronómicas de estrellas de neutrones, se estiman valores representativos [27, 40]:

$$a_{\text{sym}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{E}{A} \right) \Big|_{t=0} = 31.6 \pm 2.7 \text{ MeV}, \quad (3.41)$$

$$L_0 = 3n_0 \frac{\partial a_{\text{sym}}}{\partial n} \Big|_{n=n_0} = 58.9 \pm 16 \text{ MeV}, \quad (3.42)$$

donde $t = (n_n - n_p)/n_B$ es el parámetro de asimetría de isospín. Es de notar que, si bien el valor fiduciario tiene una baja incertidumbre, las estimaciones individuales de L_0 varían ampliamente con intervalos de confianza que se estiman entre 20 y 120 MeV debido a la dificultad para acceder a materia altamente asimétrica en el laboratorio [41]. En nuestro modelo, estas cantidades pueden calcularse como:

$$\frac{a_{\text{sym}}}{m} = \frac{x_F^2}{6\sqrt{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} + \frac{1}{12\pi^2} A_\rho x_F^3, \quad (3.43)$$

$$\frac{L_0}{m} = \frac{x_F^2}{6\sqrt{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2}} \left(1 + \frac{\tilde{x}_\sigma^2}{x_F^2 + \tilde{x}_\sigma^2} \right) + \frac{1}{4\pi^2} A_\rho x_F^3. \quad (3.44)$$

Estas cinco propiedades empíricas (n_0 , $\frac{B}{A}$, K_0 , a_{sym} , L_0) definen restricciones que cualquier ecuación de estado microscópica debe satisfacer para ser físicamente viable. En el contexto de la teoría relativista de campo medio, estas propiedades y sus incertidumbres se utilizan para determinar las regiones en el espacio de parámetros que producen ecuaciones de estado físicamente aceptables frente a mediciones nucleares experimentales.

3.4. Corteza de la Estrella

El modelo de teoría relativista de campo medio desarrollado es una descripción de la materia nuclear en el régimen de alta densidad, específicamente para densidades bariónicas superiores a aproximadamente 0.1 fm^{-3} o $\rho_m \gtrsim 1.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, donde las interacciones nucleón-nucleón dominan la dinámica del sistema y la aproximación de campo medio tiene sentido. Sin embargo, las estrellas de neutrones presentan una estructura estratificada que incluye regiones de menor densidad donde esta aproximación deja de ser aplicable. La corteza de la estrella, que se extiende desde la superficie hasta el núcleo denso, abarca un rango de densidades de varios órdenes de magnitud y requiere tratamientos teóricos distintos según el régimen de densidad considerado [32].

El alcance del presente estudio se concentra en la descripción microscópica de la materia nuclear en el régimen de altas energías en las estrellas de neutrones, donde las densidades superan varias veces la densidad de saturación n_0 . Para la descripción de la corteza utilizamos las ecuaciones de estado estándar BPS y BBP. Para densidades inferiores al punto de goteo de neutrones ($n_{\text{drip}} \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$ o $\rho_m \approx 4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$), la materia se compone de una red cristalina de núcleos pesados embebidos en un gas degenerado de electrones, configuración conocida como corteza externa. En este régimen, la ecuación de estado BPS (Baym, Pethick y Sutherland, 1971) [42] es una descripción consistentemente basada en la minimización de la energía del estado base de núcleos atómicos para cada densidad, junto con la contribución del gas de electrones relativista. El modelo BPS determina la composición nuclear óptima mediante la competencia entre la energía de masa nuclear, la energía de Coulomb de la red, y la presión del gas electrónico. Por encima de la densidad de goteo de neutrones y hasta densidades del orden de 0.2 fm^{-3} o $\rho_m \approx 3.2 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ se encuentra la corteza interna, donde los núcleos coexisten con un gas de neutrones libres además del gas de electrones. En este régimen, la ecuación de estado BBP (Baym, Bethe y Pethick, 1971) [43] describe la materia mediante un modelo de gota líquida que considera las contribuciones energéticas de los núcleos, el gas de neutrones libres, y las interacciones nucleares efectivas de la red. Este modelo determina autoconsistentemente la composición nuclear y la fracción de neutrones libres mediante la minimización de la energía total del sistema, que incluye términos de energía de superficie, energía de Coulomb, y energía de simetría nuclear.

Para construir una ecuación de estado unificada que abarque todo el rango de densidades presente en la estrella, desde la superficie hasta el núcleo, empleamos el método de interpolación PCHIP (Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial), que garantiza una transición suave y monótona entre las diferentes ecuaciones de estado. Este método de interpolación preserva la forma de los datos y evita oscilaciones no físicas que podrían introducir otros métodos de interpolación polinómica. Definimos la densidad de empalme entre la ecuación de estado BBP y nuestro modelo de teoría relativista de campo medio entre $n_B = 0.043 \text{ fm}^{-3}$ y $n_B = 0.063 \text{ fm}^{-3}$, correspondiente a una densidad de masa de entre $7.20 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$

y $1.05 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$. Esta elección se fundamenta en la necesidad de garantizar la causalidad del fluido en toda la estrella, es decir, que la velocidad del sonido $c_s^2 = dP/d\rho$ no exceda la velocidad de la luz c en ningún punto. El resultado de esta interpolación para un conjunto de parámetros de ejemplo y su comprobación de causalidad se muestra en la figura 3.5.

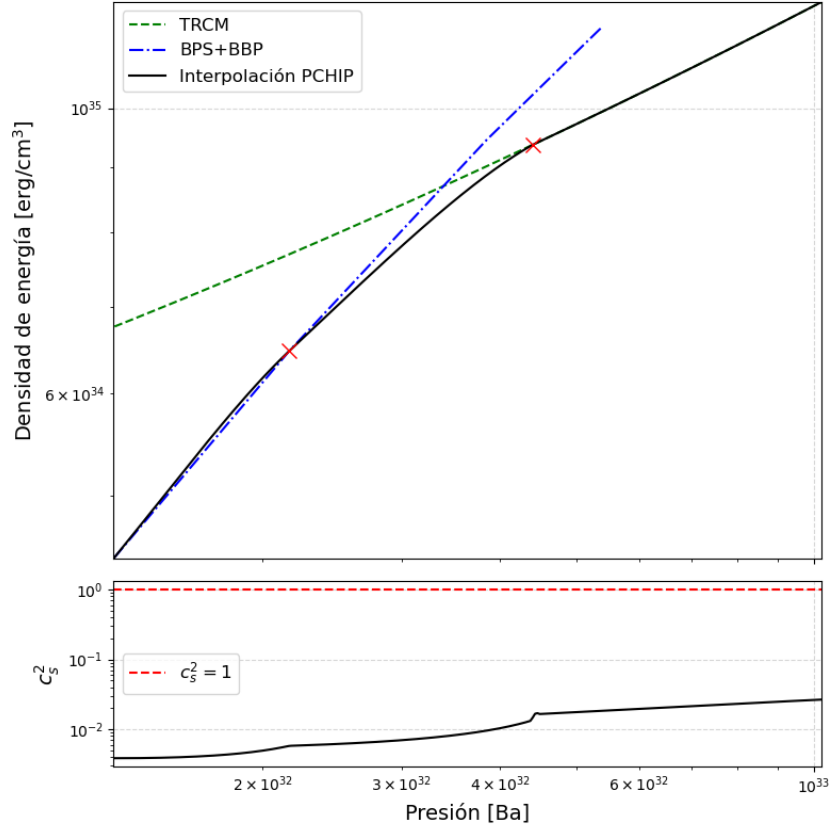


Figura 3.5: Ecuación de estado unificada para la estrella de neutrones, construida mediante interpolación PCHIP entre las ecuaciones de estado BPS, BBP y el modelo TRCM. Las X marcan los límites de la región de empalme. El panel inferior muestra el cuadrado de la velocidad del sonido c_s^2 para verificar la condición de causalidad. Se usaron los parámetros $\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = 12.684 \text{ fm}^2$, $\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 = 7.148 \text{ fm}^2$, $\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 = 4.410 \text{ fm}^2$, $b = 5.610 \times 10^{-3}$, $c = -6.986 \times 10^{-3}$.

Capítulo 4

Resultados y discusión

Como se estableció en el capítulo anterior (sección 3.3), el modelo considerado para la ecuación de estado en el marco de la teoría relativista de campo medio contiene cinco parámetros libres: los tres acoplamientos mesón-nucleón A_σ , A_ω y A_ρ , junto con los parámetros de autointeracción del mesón escalar b y c . Estos parámetros determinan completamente la ecuación de estado de la materia nuclear y, consecuentemente, las propiedades macroscópicas de las estrellas de neutrones a través de las ecuaciones de estructura TOV (2.13).

El ajuste de estos parámetros se realiza imponiendo que el modelo reproduzca las propiedades empíricas de la materia nuclear en saturación, descritas en la sección 3.3.1, y las observaciones astrofísicas, descritas en la sección 2.4. Múltiples métodos son empleados para este ajuste: algunos estudios utilizan análisis bayesianos [44, 45], mientras que otros aplican técnicas de optimización utilizando herramientas de aprendizaje de máquina y redes neuronales [46]. Sin embargo, cada conjunto de parámetros que satisface estas restricciones nucleares produce una ecuación de estado diferente a altas densidades, generando predicciones distintas para las propiedades estelares observables como la masa máxima y el radio. Por esta misma razón, dentro de este mismo formalismo han sido propuestos una gran variedad de modelos de ecuaciones de estado, los cuales se filtran añadiendo cada vez más restricciones físicas [13]. Esta falta de unicidad en el espacio de parámetros refleja la incertidumbre en la extrapolación desde la densidad de saturación nuclear hacia los regímenes de densidad extrema presentes en el interior de las estrellas de neutrones.

El objetivo central de este capítulo es caracterizar sistemáticamente el espacio de parámetros del modelo, identificando los conjuntos que satisfacen las restricciones nucleares y que son consistentes con las observaciones astrofísicas actuales. Este análisis establece relaciones entre los parámetros microscópicos de la materia (3.14) y las propiedades macroscópicas observables, permitiendo estudiar cómo las interacciones nucleares determinan la estructura de las estrellas de neutrones. En particular, en este trabajo queremos determinar el conjunto de parámetros que maximiza la masa estelar predicha, planteando límites superiores teóricos.

4.1. Estudio del Espacio de Parámetros

4.1.1. Correlaciones entre Parámetros y Observables

Debido a que los parámetros del modelo representan las intensidades físicas de las interacciones nucleares, es posible establecer correlaciones directas entre variaciones en estos parámetros y cambios en las propiedades nucleares y estelares. Por ejemplo, un aumento en el acoplamiento vectorial A_ω incrementa la repulsión entre nucleones, resultando en una disminución de la densidad de saturación n_0 . Del mismo modo, un incremento en el acoplamiento isovectorial A_ρ eleva la energía de simetría a_{sym} , afectando la composición protón-neutrón de la materia nuclear.

Consideremos el conjunto de parámetros [2]:

$$\begin{aligned} A_\sigma &= 12.684 \, m^2, & A_\omega &= 7.148 \, m^2, \\ A_\rho &= 4.410 \, m^2, & b &= 5.610 \times 10^{-3}, \\ c &= -6.986 \times 10^{-3}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

cuyas propiedades nucleares y estelares son:

$$\begin{aligned} n_0 &= 0.153 \, \text{fm}^{-3}, & \frac{B}{A} &= -16.30 \, \text{MeV}, \\ K_0 &= 201.23 \, \text{MeV}, & a_{\text{sym}} &= 32.54 \, \text{MeV}, \\ L_0 &= 79.63 \, \text{MeV}, & M_{\text{max}} &= 2.33 \, M_\odot, \\ R_{1.4} &= 13.76 \, \text{km}, & C_{\text{max}} &= 0.298, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $C_{\text{max}} = GM_{\text{max}}/c^2 R_{(M_{\text{max}})}$ es la compacidad de la estrella de masa máxima, cuyo límite superior se establece al rededor de $C_{\text{max}} \lesssim 0.33$ tras evaluar implicaciones de observaciones recientes en ecuaciones de estado [47]. Realizando variaciones de estos parámetros alrededor de los valores en (4.1), se observan las tendencias recopiladas en la figura 4.1. La figura muestra el coeficiente de correlación de Pearson entre cada parámetro y cada propiedad nuclear y estelar. Los valores representan la fuerza y dirección de la relación lineal entre dos variables: valores cercanos a 1.0 indican una correlación positiva fuerte (si aumento el parámetro, aumenta la propiedad), mientras que valores cercanos a -1.0 indican una correlación negativa fuerte (si aumento el parámetro, disminuye la propiedad). Los valores intermedios reflejan correlaciones más débiles o nulas, en las que el parámetro tiene poca o ninguna influencia en la propiedad considerada. Es necesario notar que estas correlaciones son válidas localmente alrededor del conjunto de parámetros elegido, pero pueden variar en otras regiones del espacio de parámetros. Además, este coeficiente cuantifica la fuerza de la correlación, más no la pendiente de la relación entre las variables.

Es necesario resaltar la independencia de n_0 , B/A y K_0 respecto a variaciones en A_ρ , lo cual es consistente con la interpretación física de este acoplamiento como responsable únicamente de las interacciones

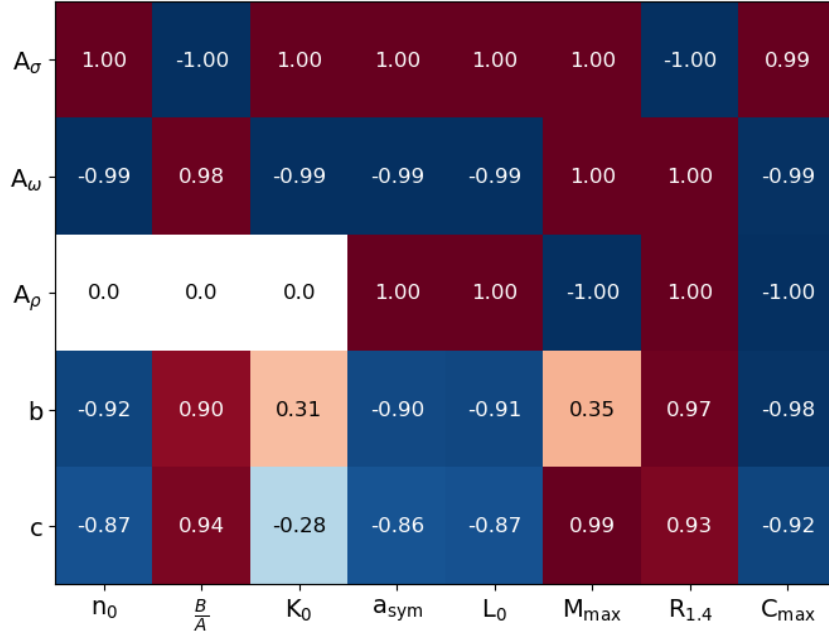


Figura 4.1: Correlaciones cualitativas entre variaciones en los parámetros del modelo relativista de campo medio alrededor de los valores en (4.1), y cambios en las propiedades nucleares y estelares. Valores cercanos a 1.0 indican una correlación positiva fuerte, mientras que valores cercanos a -1.0 indican una correlación negativa fuerte. Los valores intermedios reflejan correlaciones más débiles o nulas.

isovectoriales. Adicionalmente, parece oportuno basar el estudio en el plano de parámetros $A_\sigma - A_\omega$ pues ambos acoplamientos están fuertemente correlacionados con todas las propiedades nucleares y estelares, sugiriendo una mayor influencia en la determinación de la ecuación de estado. La naturaleza atractiva del acoplamiento escalar A_σ y la naturaleza repulsiva del acoplamiento vectorial A_ω explican las correlaciones opuestas observadas en la figura 4.1 para estas dos interacciones, salvo para la masa máxima M_{max} , donde ambos acoplamientos muestran una correlación positiva fuerte.

Por otro lado, la relación lineal entre los parámetros b y c con la compresibilidad K_0 no es tan clara como la de A_σ y A_ω , pero sigue siendo útil para ajustar esta propiedad nuclear. De igual forma, sus correlaciones con las demás propiedades nucleares y estelares son más débiles, aunque siguen siendo significativas para el ajuste del modelo. Finalmente, dado el interés en encontrar ecuaciones de estado que permitan estrellas de neutrones con masas máximas elevadas, según lo observado en la figura 4.1 parece conveniente aumentar simultáneamente los parámetros A_σ , A_ω y c , y disminuir A_ρ , siempre manteniendo las propiedades nucleares dentro de los rangos aceptables.

4.1.2. Regiones Válidas en el Espacio de Parámetros

La exploración del espacio de parámetros del modelo relativista de campo medio es un problema de optimización multidimensional bajo múltiples restricciones. El espacio completo está definido por los cinco parámetros libres: A_σ , A_ω , A_ρ , b y c . La metodología empleada para identificar conjuntos de parámetros físicamente aceptables consta de varias etapas sistemáticas.

Queremos identificar los conjuntos de parámetros que satisfacen las restricciones dentro de los márgenes experimentales. Estos conjuntos comprenden regiones del espacio de parámetros que son consistentes con las propiedades nucleares conocidas. Como puede evidenciarse en la figura 4.1, los parámetros del modelo que influyen claramente en todas las propiedades nucleares y estelares son A_σ y A_ω . Por lo tanto, el método sistemático empleado consiste en los siguientes pasos, ilustrados en el diagrama de flujo de la figura 4.2:

1. Se elige un par de valores específicos para los parámetros b y c , que junto con A_σ y A_ω influyen en el módulo de compresibilidad K_0 .
2. Se realiza un barrido sistemático en el plano $A_\sigma - A_\omega$, buscando la región que satisface simultáneamente las restricciones de:
 - Densidad de saturación: $0.147 \text{ fm}^{-3} \leq n_0 \leq 0.167 \text{ fm}^{-3}$ (3.37)
 - Energía de enlace por nucleón: $-16.37 \text{ MeV} \leq B/A \leq -15.57 \text{ MeV}$ (3.38)
3. Se verifica que los valores del módulo de compresibilidad K_0 dentro de esta región cumplan con la restricción: $190 \text{ MeV} \leq K_0 \leq 270 \text{ MeV}$ (3.39).
4. Si la región identificada satisface las tres restricciones anteriores, se ajusta el parámetro A_ρ para satisfacer las restricciones de:
 - Energía de simetría: $28.9 \text{ MeV} \leq a_{\text{sym}} \leq 34.3 \text{ MeV}$ (3.41)
 - Pendiente de la energía de simetría: $40 \text{ MeV} \leq L_0 \leq 100 \text{ MeV}$. Aunque el rango experimental fiduciario es más reducido (3.42), esta propiedad tiene mayor libertad debido a la falta de consenso en su valor, permitiéndonos utilizar este intervalo más amplio en nuestro análisis [27].

Esto se realiza sin afectar las otras propiedades nucleares, pues estas no dependen de A_ρ .

5. Se repite el procedimiento para diferentes elecciones de los parámetros b y c , explorando así el espacio de parámetros del modelo.
6. Finalmente, se calculan las propiedades estelares (masa máxima M_{max} , radio canónico $R_{1.4}$, y compacidad máxima C_{max}) para las regiones de parámetros que satisfacen todas las restricciones nucleares anteriores.

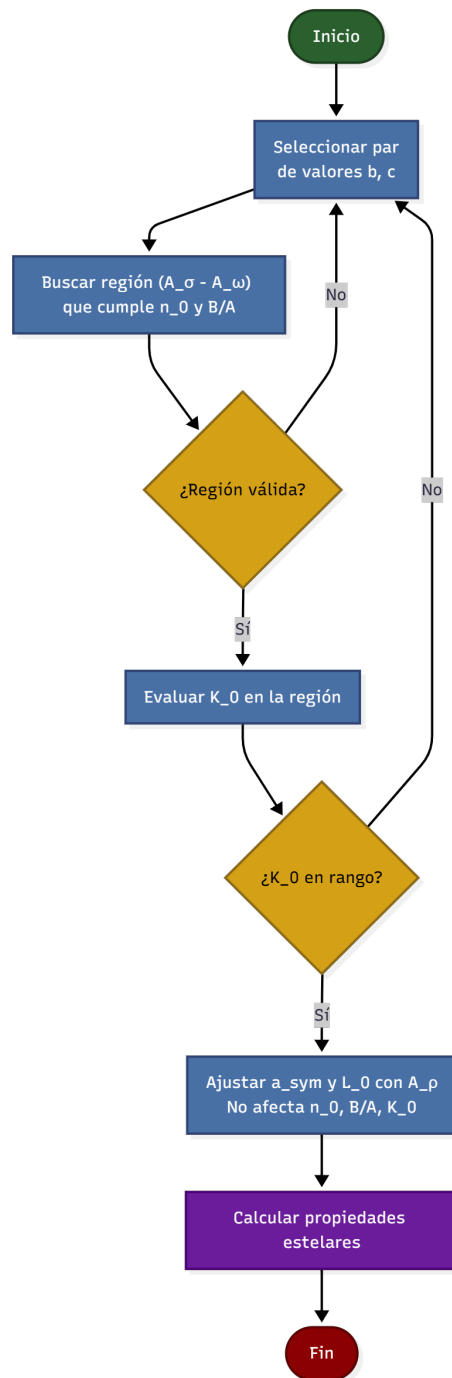


Figura 4.2: Diagrama de flujo del procedimiento sistemático para explorar el espacio de parámetros del modelo relativista de campo medio.

Aplicando este método, se identifican múltiples conjuntos de parámetros que satisfacen las restricciones nucleares. Cada conjunto produce una ecuación de estado diferente a altas densidades, generando diferentes predicciones para las propiedades estelares. Por ejemplo, tras realizar este proceso para un par de valores específicos de b y c , se obtiene la región del plano $A_\sigma - A_\omega$ mostrada en la figura 4.3a. Cada punto en esta región corresponde a un conjunto de parámetros válido que puede ser empleado para determinar las propiedades estelares resultantes. Además, si variamos los valores de b y c de modo que K_0 se mantenga dentro del rango aceptable, y ajustamos A_ρ para cumplir las propiedades de simetría, obtenemos otras regiones válidas, como la mostrada en la figura 4.3b. Esta nueva región tiene valores mayores de A_σ , A_ω y c , y valores menores de A_ρ y b en comparación con la región anterior.

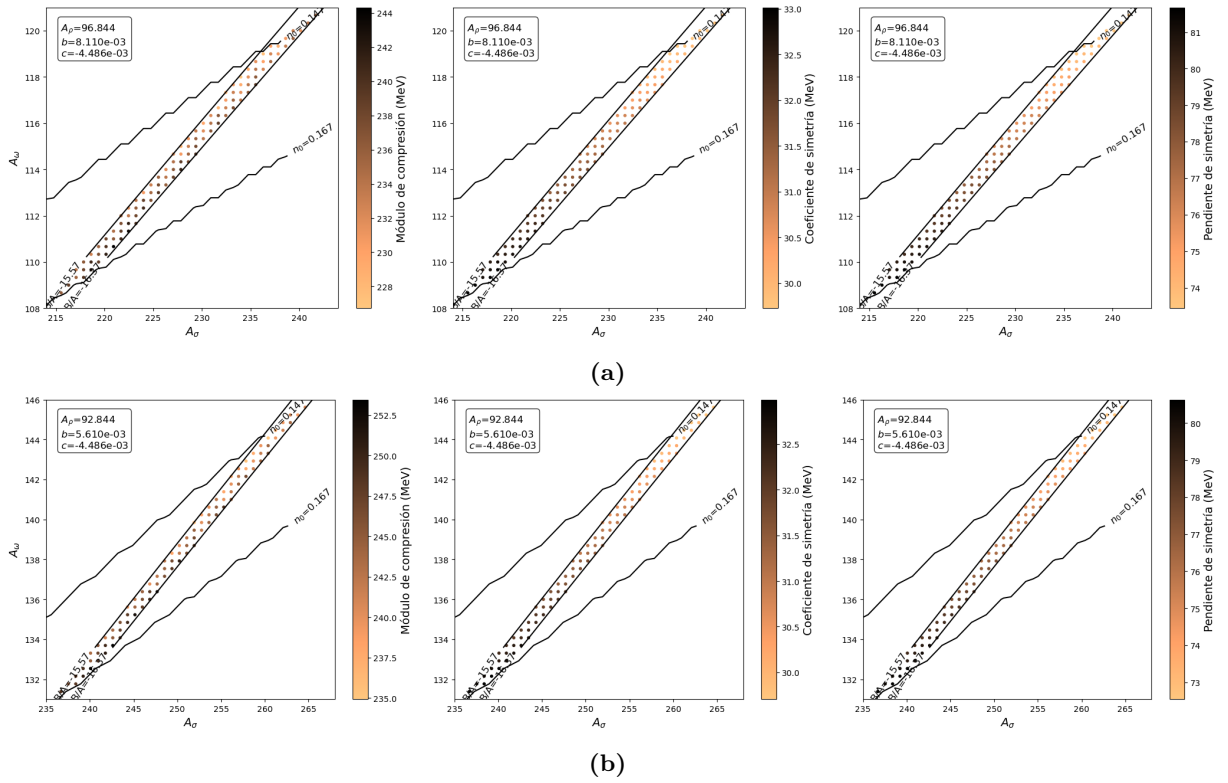


Figura 4.3: Región del espacio de parámetros que satisface las restricciones nucleares en el plano $A_\sigma - A_\omega$. (a) Conjunto de parámetros obtenido mediante la metodología descrita. (b) Región válida obtenida al variar b y c de (a) para mantener K_0 en el rango aceptable y ajustar A_ρ para las propiedades de simetría. Las figuras muestran diferentes regiones del plano para facilitar la visualización.

Siguiendo esta metodología, se consiguen diversos conjuntos de parámetros que cumplen las restricciones nucleares. Una vez obtenidos estos conjuntos, es posible calcular las propiedades estelares correspondientes, como la masa máxima M_{\max} , la compacidad C y el radio de estrellas de neutrones de masa $1.4 M_\odot$, $R_{1.4}$. Para algunos conjuntos hallados, se muestran sus propiedades estelares en la figura 4.4. Notamos que la masa máxima, la propiedad de mayor interés astrofísico, varía significativamente entre los diferentes

conjuntos de parámetros, oscilando entre aproximadamente $1.9 M_{\odot}$ y $2.3 M_{\odot}$, y aumenta con valores mayores de A_{σ} y A_{ω} , al igual que el radio $R_{1.4}$, que toma valores entre 11.8 km y 13.3 km. En cuanto a la compacidad C , se observa una tendencia similar respecto a los parámetros A_{σ} y A_{ω} , con valores que oscilan entre 0.278 y 0.312. Sin embargo, esta propiedad parece tener máximos locales en el plano que indican una dependencia más compleja con los parámetros del modelo.

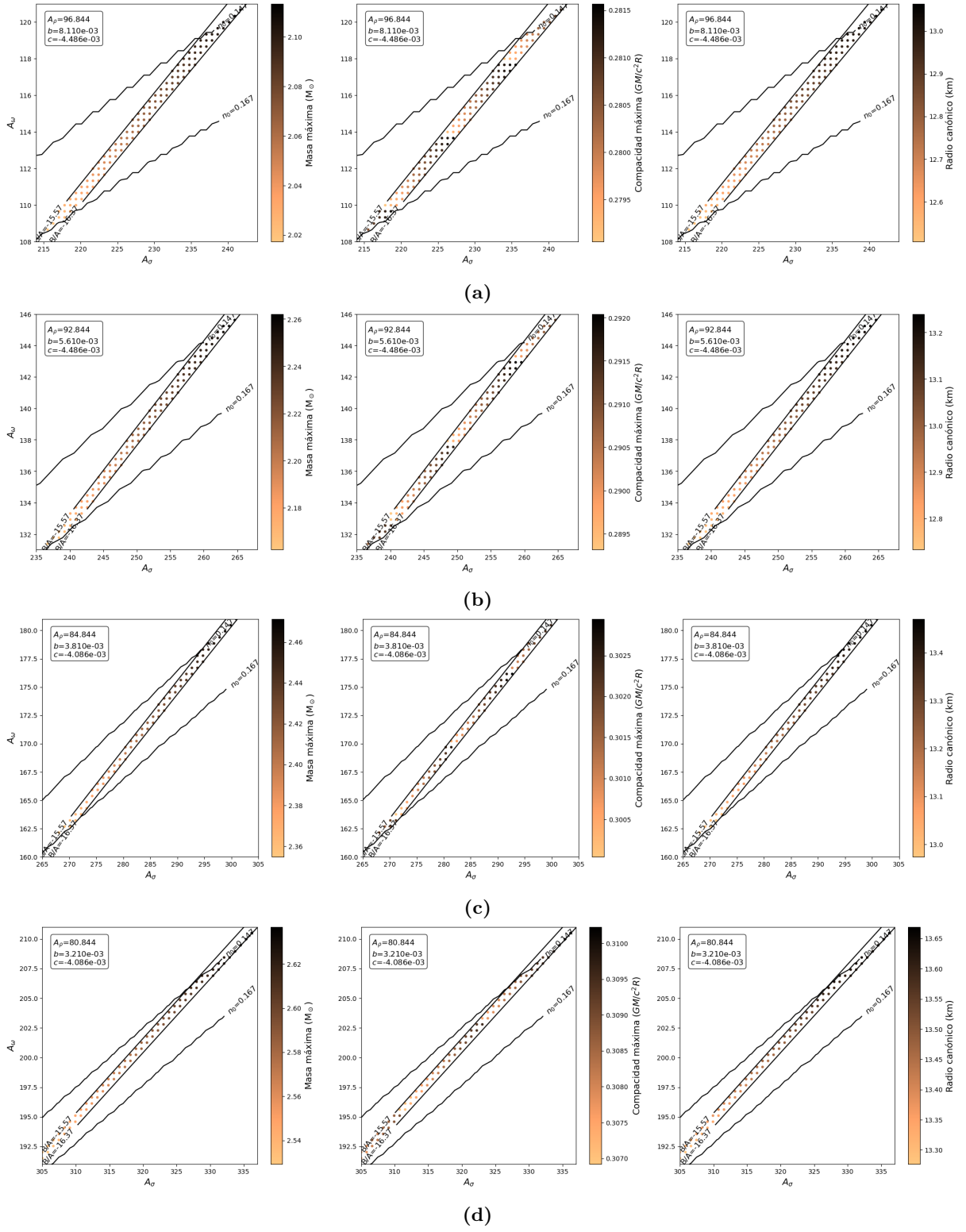


Figura 4.4: Propiedades estelares obtenidas para diferentes conjuntos de parámetros que satisfacen las restricciones nucleares. Las figuras muestran diferentes regiones del plano $A_\sigma - A_\omega$ para facilitar la visualización.

4.1.3. Masa Máxima

La búsqueda del conjunto de parámetros que maximiza la masa estelar predicha es un objetivo central del análisis. Este conjunto establece el límite superior teórico para la masa de estrellas de neutrones dentro del marco del modelo considerado, y su comparación con las observaciones de estrellas masivas como las mencionadas en la sección 2.4 permite evaluar si el modelo es capaz de explicar las configuraciones estelares más extremas observadas.

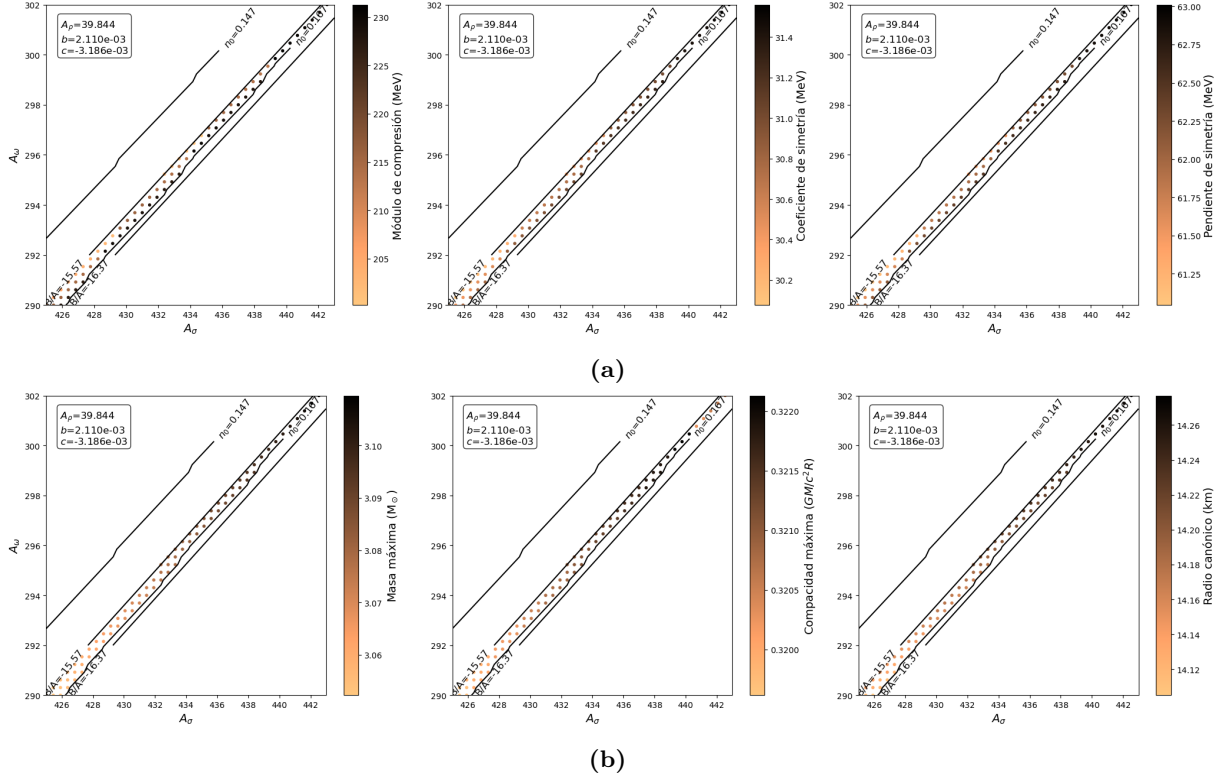


Figura 4.5: Región del espacio de parámetros que maximiza la masa estelar predicha. (a) Propiedades nucleares para la región de parámetros que produce la mayor masa máxima. (b) Propiedades estelares correspondientes: masa máxima M_{max} , compacidad C y radio $R_{1.4}$ para configuraciones en esta región.

La región de mayores masas obtenidas para este modelo mediante la metodología descrita, así como sus propiedades nucleares y estelares, se muestra en la figura 4.5. En este estudio, se logró obtener una masa máxima de $M_{\text{max}} = 3.04 M_{\odot}$, superando ampliamente el límite observado en radiación electromagnética de $2.35 M_{\odot}$ para PSR J0952-0607 [4]. Esto indica que el modelo relativista de campo medio, con los parámetros adecuados, puede reproducir estrellas de neutrones extremadamente masivas, siendo un marco teórico consistente con las observaciones astrofísicas más exigentes. Más aún, no queda claro que la región de parámetros de mayor masa encontrada en este estudio sea el límite absoluto dentro del modelo, por lo que futuros estudios y técnicas de optimización más avanzadas podrían revelar conjuntos de parámetros

que produzcan masas aún mayores, sin contradecir las restricciones nucleares impuestas. Correspondientemente, se logra una compacidad máxima de $C = 0.32$ y un radio máximo de $R_{1.4} = 14.24$ km para estrellas de masa $1.4 M_{\odot}$ en esta región de parámetros.

4.1.4. Comparación de Regiones

Las regiones de parámetros mostradas en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5 representan diferentes áreas del espacio de parámetros que satisfacen las restricciones nucleares y producen diversas propiedades estelares. Es relevante comparar estas regiones para entender cómo las variaciones en los parámetros afectan las predicciones del modelo. En la figura 4.6 se presenta una comparación directa entre las regiones que satisfacen las restricciones nucleares y las masas máximas que producen. Como notamos anteriormente, el aumento en los acoplamientos A_{σ} y A_{ω} conduce a un incremento en la masa máxima predicha. Más aún, para mantener las propiedades de simetría dentro de los rangos aceptables, es necesario reducir el acoplamiento isovectorial A_{ρ} al aumentar A_{σ} y A_{ω} . Esto puede explicarse por la necesidad de compensar el efecto de los acoplamientos escalares y vectoriales que tienden a aumentar la energía, requiriendo una disminución en la contribución isovectorial. Esta comparación resalta la interdependencia entre los parámetros del modelo y las propiedades estelares, por lo que es importante considerar estas relaciones al ajustar el modelo a observaciones astrofísicas.

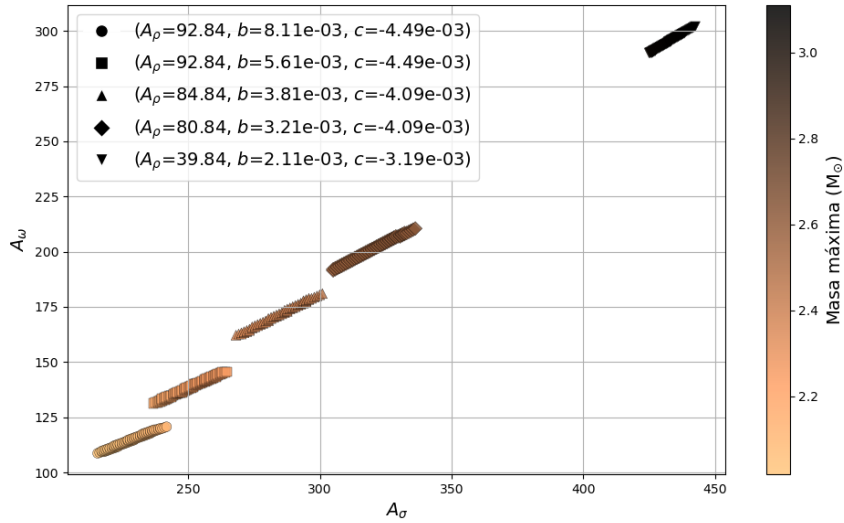


Figura 4.6: Comparación de las regiones del plano de parámetros A_{σ} - A_{ω} que satisfacen las restricciones nucleares y las masas máximas que producen.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Principales hallazgos

5.2. Limitaciones del estudio

5.3. Recomendaciones para futuros trabajos

Capítulo 6

Apéndices

Bibliografía

- [1] W. Baade y F. Zwicky, “Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays,” *Phys. Rev.*, vol. 46, n.º 1, págs. 76-77, 1934. DOI: [10.1103/PhysRev.46.76.2](https://doi.org/10.1103/PhysRev.46.76.2).
- [2] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity* (Astronomy and Astrophysics Library), 2nd ed. New York: Springer, 2000, ISBN: 978-0-387-98977-8.
- [3] G. Raaijmakers et al., “Constraints on the Dense Matter Equation of State and Neutron Star Properties from NICER’s Mass–Radius Estimate of PSR J0740+6620 and Multimessenger Observations,” *ApJL*, vol. 918, n.º 2, pág. L29, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac089a](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac089a).
- [4] R. W. Romani et al., “PSR J0952-0607: The Fastest and Heaviest Known Galactic Neutron Star,” *ApJL*, vol. 934, n.º 2, pág. L17, 2022. DOI: [10.3847/2041-8213/ac8007](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac8007).
- [5] E. Fonseca et al., “Refined Mass and Geometric Measurements of the High-mass PSR J0740+6620,” *ApJL*, vol. 915, n.º 1, pág. L12, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac03b8](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac03b8).
- [6] J. Antoniadis et al., “A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary,” *Science*, vol. 340, n.º 6131, pág. 1 233 232, 2013. DOI: [10.1126/science.1233232](https://doi.org/10.1126/science.1233232). arXiv: [1304.6875](https://arxiv.org/abs/1304.6875).
- [7] T. L. S. Collaboration et al., *GWTC-2.1: Deep Extended Catalog of Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run*, 2022. arXiv: [2108.01045](https://arxiv.org/abs/2108.01045).
- [8] T. L. S. Collaboration y T. V. Collaboration, “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, n.º 16, pág. 161 101, 2017. DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.161101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101). arXiv: [1710.05832](https://arxiv.org/abs/1710.05832).
- [9] T. L. S. Collaboration et al., “GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 M_{\odot} Black Hole with a 2.6 M_{\odot} Compact Object,” *ApJL*, vol. 896, n.º 2, pág. L44, 2020. DOI: [10.3847/2041-8213/ab960f](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab960f). arXiv: [2006.12611](https://arxiv.org/abs/2006.12611).
- [10] Y. Shao, “On the Neutron Star/Black Hole Mass Gap and Black Hole Searches,” *Res. Astron. Astrophys.*, vol. 22, n.º 12, pág. 122 002, 2022. DOI: [10.1088/1674-4527/ac995e](https://doi.org/10.1088/1674-4527/ac995e).

- [11] J. Walecka, “A theory of highly condensed matter,” *Annals of Physics*, vol. 83, n.º 2, págs. 491-529, 1974. DOI: [10.1016/0003-4916\(74\)90208-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(74)90208-5).
- [12] J. D. Walecka, “The Relativistic Nuclear Many-Body Problem,” en *New Vistas in Nuclear Dynamics*, P. J. Brussaard y J. H. Koch, eds., Boston, MA: Springer US, 1986, págs. 229-271, ISBN: 978-1-4684-5179-5. DOI: [10.1007/978-1-4684-5179-5_8](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-5179-5_8).
- [13] M. Dutra et al., “Relativistic Mean-Field Hadronic Models under Nuclear Matter Constraints,” *Phys. Rev. C*, vol. 90, n.º 5, pág. 055 203, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevC.90.055203](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.90.055203). arXiv: [1405.3633](https://arxiv.org/abs/1405.3633).
- [14] L. L. Lopes y D. P. Menezes, “On the Nature of the Mass-gap Object in the GW190814 Event,” *ApJ*, vol. 936, n.º 1, pág. 41, 2022. DOI: [10.3847/1538-4357/ac81c4](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac81c4).
- [15] W. Baade y F. Zwicky, “On Super-Novae,” *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 20, n.º 5, págs. 254-259, 1934. DOI: [10.1073/pnas.20.5.254](https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.254).
- [16] C. W. Misner et al., *Gravitation*. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2017, ISBN: 978-0-691-17779-3.
- [17] A. Einstein, “Die Feldgleichungen Der Gravitation,” *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, págs. 844-847, 1915.
- [18] K. Schwarzschild, *On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein’s Theory*, 1999. DOI: [10.48550/arXiv.physics/9905030](https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/9905030). arXiv: [physics/9905030](https://arxiv.org/abs/physics/9905030).
- [19] D. N. Vollick, *On the Meaning of Various Mass Definitions for Asymptotically Flat Spacetimes*, 2021. DOI: [10.48550/arXiv.2101.12570](https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.12570). arXiv: [2101.12570](https://arxiv.org/abs/2101.12570).
- [20] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff, “On Massive Neutron Cores,” *Phys. Rev.*, vol. 55, n.º 4, págs. 374-381, 1939. DOI: [10.1103/PhysRev.55.374](https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.374).
- [21] E. Pian, “Mergers of Binary Neutron Star Systems: A Multimessenger Revolution,” *Front. Astron. Space Sci.*, vol. 7, pág. 609 460, 2021. DOI: [10.3389/fspas.2020.609460](https://doi.org/10.3389/fspas.2020.609460).
- [22] E. Fonseca et al., “The NANOGrav Nine-year Data Set: Mass and Geometric Measurements of Binary Millisecond Pulsars,” *ApJ*, vol. 832, n.º 2, pág. 167, 2016. DOI: [10.3847/0004-637X/832/2/167](https://doi.org/10.3847/0004-637X/832/2/167). arXiv: [1603.00545](https://arxiv.org/abs/1603.00545).
- [23] M. C. Miller et al., “The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data,” *ApJL*, vol. 918, n.º 2, pág. L28, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac089b](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac089b).
- [24] T. E. Riley et al., “A NICER View of the Massive Pulsar PSR J0740+6620 Informed by Radio Timing and XMM-Newton Spectroscopy,” *ApJL*, vol. 918, n.º 2, pág. L27, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac0a81](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac0a81). arXiv: [2105.06980](https://arxiv.org/abs/2105.06980).

- [25] M. C. Miller et al., “PSR J0030+0451 Mass and Radius from NICER Data and Implications for the Properties of Neutron Star Matter,” *The Astrophysical Journal*, vol. 887, pág. L24, 2019. DOI: [10.3847/2041-8213/ab50c5](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab50c5).
- [26] D. Choudhury et al., *A NICER View of the Nearest and Brightest Millisecond Pulsar: PSR J0437-4715*, 2024. DOI: [10.3847/2041-8213/ad5a6f](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ad5a6f). arXiv: [2407.06789](https://arxiv.org/abs/2407.06789).
- [27] R. Kumar et al., “Theoretical and experimental constraints for the equation of state of dense and hot matter,” *Living Rev Relativ*, vol. 27, n.º 1, pág. 3, 2024. DOI: [10.1007/s41114-024-00049-6](https://doi.org/10.1007/s41114-024-00049-6).
- [28] B. Biswas et al., “GW190814: On the properties of the secondary component of the binary,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 505, n.º 2, págs. 1600-1606, 2021. DOI: [10.1093/mnras/stab1383](https://doi.org/10.1093/mnras/stab1383).
- [29] W. Myers y W. Swiatecki, “Nuclear properties according to the Thomas-Fermi model,” *Nuclear Physics A*, vol. 601, n.º 2, págs. 141-167, 1996. DOI: [10.1016/0375-9474\(95\)00509-9](https://doi.org/10.1016/0375-9474(95)00509-9).
- [30] Y. Sakuragi, “Saturation of nuclear matter and roles of many-body forces: Nuclear matter in neutron stars probed by nucleus—nucleus scattering,” *Prog. Theor. Exp. Phys.*, vol. 2016, n.º 6, 06A106, 2016. DOI: [10.1093/ptep/ptw072](https://doi.org/10.1093/ptep/ptw072).
- [31] C. Drischler et al., “Towards grounding nuclear physics in QCD,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 121, pág. 103 888, 2021. DOI: [10.1016/j.ppnp.2021.103888](https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2021.103888).
- [32] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, 1. Auflage. Weinheim: Wiley-VCH, 2008, ISBN: 978-3-527-61767-8.
- [33] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover Books on Astronomy), Unabr. and corr. republ. of orig. publ. 1939 by Univ. of Chicago Pr. New York: Dover Publ, 1970, ISBN: 978-0-486-60413-8.
- [34] S. Acharya et al., “Global baryon number conservation encoded in net-proton fluctuations measured in Pb–Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV,” *Physics Letters B*, vol. 807, pág. 135 564, 2020. DOI: [10.1016/j.physletb.2020.135564](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135564).
- [35] H. S. Gurr et al., “Experimental Test of Baryon Conservation,” *Phys. Rev.*, vol. 158, n.º 5, págs. 1321-1330, 1967. DOI: [10.1103/PhysRev.158.1321](https://doi.org/10.1103/PhysRev.158.1321).
- [36] P. Baczyk et al., “Isospin-symmetry breaking in masses of $N \simeq Z$ nuclei,” *Physics Letters B*, vol. 778, págs. 178-183, 2018. DOI: [10.1016/j.physletb.2017.12.068](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.12.068).
- [37] C. Drischler et al., “Bayesian mixture model approach to quantifying the empirical nuclear saturation point,” *Phys. Rev. C*, vol. 110, n.º 4, pág. 044 320, 2024. DOI: [10.1103/PhysRevC.110.044320](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.110.044320).

- [38] C. J. Horowitz et al., “Insights into nuclear saturation density from parity-violating electron scattering,” *Phys. Rev. C*, vol. 102, n.º 4, pág. 044 321, 2020. DOI: [10.1103/PhysRevC.102.044321](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.102.044321).
- [39] E. Khan et al., “Constraining the Nuclear Equation of State at Subsaturation Densities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, n.º 9, pág. 092 501, 2012. DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.092501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.092501).
- [40] B.-A. Li et al., “Towards understanding astrophysical effects of nuclear symmetry energy,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 55, n.º 7, pág. 117, 2019. DOI: [10.1140/epja/i2019-12780-8](https://doi.org/10.1140/epja/i2019-12780-8).
- [41] J. Estee et al., “Probing the Symmetry Energy with the Spectral Pion Ratio,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 126, n.º 16, pág. 162 701, 2021. DOI: [10.1103/PhysRevLett.126.162701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.162701).
- [42] G. Baym et al., “The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models,” *ApJ*, vol. 170, pág. 299, 1971. DOI: [10.1086/151216](https://doi.org/10.1086/151216).
- [43] G. Baym et al., “Neutron star matter,” *Nuclear Physics A*, vol. 175, n.º 2, págs. 225-271, 1971. DOI: [10.1016/0375-9474\(71\)90281-8](https://doi.org/10.1016/0375-9474(71)90281-8).
- [44] W.-C. Chen y J. Piekarewicz, “Building relativistic mean field models for finite nuclei and neutron stars,” *Phys. Rev. C*, vol. 90, n.º 4, pág. 044 305, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevC.90.044305](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.90.044305).
- [45] C. Huang et al., “Constraining a relativistic mean field model using neutron star mass–radius measurements I: Nucleonic models,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 529, n.º 4, págs. 4650-4665, 2024. DOI: [10.1093/mnras/stae844](https://doi.org/10.1093/mnras/stae844).
- [46] L.-J. Guo et al., “Insights into Neutron Star Equation of State by Machine Learning,” *ApJ*, vol. 965, n.º 1, pág. 47, 2024. DOI: [10.3847/1538-4357/ad2e8d](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ad2e8d).
- [47] E. Annala et al., “Multimessenger Constraints for Ultra-Dense Matter,” *Phys. Rev. X*, vol. 12, n.º 1, pág. 011 058, 2022. DOI: [10.1103/PhysRevX.12.011058](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.12.011058). arXiv: [2105.05132](https://arxiv.org/abs/2105.05132).