
ECUACIONES DE ESTADO DE ESTRELLAS DE NEUTRONES MEDIANTE LA TEORÍA RELATIVISTA DE CAMPO MEDIO

Nicolas Mantilla Molina

Trabajo de grado para optar por el título de:

Físico

Directora:

Laura Marcela Becerra Bayona, PhD

Co-directores:

José Fernando Rodríguez Ruiz, PhD

Luis Alberto Núñez de Villavicencio, PhD

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2025

Dedicatoria

Cuerpo de la dedicatoria

Agradecimientos

Cuerpo de los agradecimientos

Tabla de contenido

Lista de figuras	5
1. Introducción	7
1.1. Notación y Convenciones	8
2. Macrofísica: Objetos Compactos	9
2.1. Relatividad General	9
2.1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein	10
2.2. Simetría Esférica	11
2.3. Ecuaciones de Estructura	12
2.4. Observaciones de Estrellas de Neutrones	14
2.4.1. Mediciones de Masa	15
2.4.2. Mediciones de Radio	15
3. Microfísica: Ecuaciones de Estado	18
3.1. Ecuaciones de Estado y Ejemplos	18
3.1.1. Ejemplo: Ecuación Politrópica	19
3.1.2. Ejemplo: Gas Ideal Degenerado	19
3.2. Teoría Relativista de Campo Medio	21
3.2.1. Simetrías y Conservaciones	22
3.3. Modelo del Estudio	23
3.3.1. Materia en Saturación Nuclear	24
4. Resultados y discusión	26
4.1. Dependencia de los parámetros en la propiedades	26
4.2. Masa maxima con las propiedades (parametros)	26
5. Conclusiones	27
5.1. Principales hallazgos	27
5.2. Limitaciones del estudio	27

5.3. Recomendaciones para futuros trabajos	27
6. Apéndices	28

Lista de figuras

1.	Representación esquemática del principio de equivalencia. Markus Poessel.	10
2.	Esquema de la geometría del espacio-tiempo de una estrella con simetría esférica. Tomado de [16].	12
3.	Masas en el cementerio estelar. Contiene las masas estimadas mediante diferentes fuentes y su (posible) naturaleza, a enero de 2024. Tomado de ligo.caltech.edu. . . .	16
4.	Ecuación de estado normalizada de un gas ideal degenerado de neutrones, protones y electrones. La ecuación de estado es causal ($c_s^2 = dP/d\rho < 1$).	20
5.	Relaciones de masa - radio y masa - densidad central de masa de estrellas de neutrones constituidas por un gas ideal de neutrones, protones y electrones libres.	21

Resumen

En el presente trabajo se propone obtener Ecuaciones de Estado (EdE) de una Estrella de Neutrones (EN) mediante la Teoría Relativista de Campo Medio (TRCM). Las EN son objetos cuyas condiciones extremas permiten estudiar la materia nuclear a altas densidades, inalcanzables en laboratorio con la tecnología actual. A través de las EdE, se busca modelar la relación entre la presión y la densidad de energía en el núcleo estelar, lo cual resulta fundamental para describir propiedades observables de la EN como su masa, radio y deformación de marea. Este estudio responde a la necesidad de conectar modelos teóricos con datos experimentales y observacionales, especialmente aquellos obtenidos por misiones como LIGO, VIRGO y NICER.

Las EdE construidas contienen parámetros libres que describen las interacciones y propiedades microscópicas de la materia. Este proyecto tiene como objetivo construir y ajustar modelos de EdE utilizando datos astrofísicos recientes. Adicionalmente, se investigará la capacidad de la EdE hallada para predecir objetos en el Mass-Gap, un rango de valores entre estrellas de neutrones masivas y agujeros negros ligeros, cuya composición sigue siendo debatida. Este enfoque permitirá modelar la estructura de las EN y contribuir al conocimiento de la materia nuclear en condiciones extremas.

Capítulo 1

Introducción

La materia en las estrellas de neutrones (EN) alcanza uno de los estados más extremos y densos conocidos en el universo observable. Estos objetos compactos, resultado del colapso gravitacional de estrellas masivas (sugerido por primera vez en 1934 por Baade y Zwicky [1]), comprimen la materia a densidades que superan las condiciones terrestres [2]. Las propiedades y características de la materia nuclear a densidades tan altas son objeto de estudio en la actualidad. Estudiar estos objetos estelares abre las puertas a la comprensión de la materia densa, ofreciendo un laboratorio natural donde se pueden contrastar modelos teóricos mediante observaciones astrofísicas. En adición, es posible corroborar indirectamente la validez de teorías nucleares y subatómicas bajo condiciones actualmente inalcanzables en el laboratorio [3].

Para este trabajo, el estudio de las EN se centra en las Ecuaciones de Estado (EdE), que describen la relación entre presión, densidad de energía y temperatura, siendo clave para resolver las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Estas ecuaciones determinan características macroscópicas de las EN, como la relación masa-radio y las propiedades de marea, que han sido objeto de observaciones cada vez más detalladas gracias a misiones como NICER [4-6], LIGO y VIRGO [7-9]. Con estos avances, los modelos teóricos se ven enriquecidos y enfrentan desafíos, como la identificación de límites para la masa máxima de una EN posible en la naturaleza, o la existencia de una “brecha de masa” (Mass-Gap) entre las EN de mayor masa y los agujeros negros más ligeros [10].

En el desarrollo de EdE, la Teoría Relativista de Campo Medio (TRCM) surge como una teoría efectiva para modelar interacciones nucleares bajo condiciones extremas de densidad [11, 12]. La TRCM permite construir EdE que consideran distintas composiciones y acoplamientos entre partículas, posibilitando ajustes a los modelos basados en observaciones y datos experimentales cercanos a la densidad de saturación nuclear [13]. Sin embargo, la estructura interna de las EN sugiere la posible presencia de fases exóticas de materia, tales como hiperones o materia de quarks, desafiando aún más las formulaciones de EdE, especialmente en aquellas estrellas que alcanzan masas cercanas a 2.5 masas solares [14]. La búsqueda de una EdE que logre reproducir observaciones actuales es, por lo tanto, crucial no solo para describir el

comportamiento de la materia nuclear densa, sino también para realizar estudios más detallados sobre el destino y evolución final de estos objetos.

En esta propuesta de investigación, se plantea construir modelos de EdE mediante la TRCM y ajustar sus parámetros a partir de las observaciones astrofísicas actuales. La exploración del espacio de parámetros contribuirá a identificar las implicaciones físicas de la materia en su forma más extrema según las observaciones y brindará predicciones de la teoría empleada sobre la naturaleza de los objetos ubicados en el Mass-Gap.

1.1. Notación y Convenciones

A lo largo de este trabajo empleamos convenciones de notación y diferentes sistemas de unidades dependiendo del contexto físico específico. Para el desarrollo de la Relatividad General y el estudio de la estructura macroscópica de objetos compactos, empleamos unidades geometrizadas donde la velocidad de la luz c y la constante gravitacional de Newton G se establecen igual a la unidad $c = G = 1$. Para el tratamiento de la física nuclear y la construcción de ecuaciones de estado microscópicas, utilizamos unidades naturales donde la velocidad de la luz c y la constante de Planck reducida \hbar se fijan como unitarias $c = \hbar = 1$. En cuanto a las convenciones de notación, las letras griegas $\{\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots\}$ denotan índices tensoriales del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, mientras que las letras latinas $\{i, j, k, \dots\}$ denotan componentes del conjunto $\{1, 2, 3\}$. El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tiene signatura $(+, -, -, -)$ y utilizamos la convención de suma de Einstein para índices repetidos.

Capítulo 2

Macrofísica: Objetos Compactos

Los objetos compactos representan uno de los laboratorios naturales más extremos del universo, en los que la materia alcanza densidades, presiones y energías extremas que permiten extender nuestra comprensión de la física fundamental. Las estrellas de neutrones, en particular, constituyen el resultado final del colapso gravitacional de estrellas masivas, comprimiendo la materia a densidades que alcanzan varios órdenes de magnitud por encima de la densidad nuclear, en entornos de presión y temperatura que son extremadamente difíciles de reproducir en laboratorios terrestres [15]. El estudio de estos objetos requiere necesariamente del escenario de la Relatividad General de Einstein, donde la curvatura del espacio-tiempo responde al contenido energético del sistema y viceversa.

En este capítulo desarrollamos los fundamentos teóricos necesarios para describir la estructura y propiedades de las estrellas de neutrones desde una perspectiva macroscópica. Comenzamos con una revisión de los fundamentos de la Relatividad General, estableciendo las ecuaciones de campo de Einstein que gobiernan la dinámica del espacio-tiempo. Posteriormente, exploramos la forma general de geometrías esféricamente simétricas, que proporciona un modelo básico para comprender la estructura de los objetos compactos. A partir de estos fundamentos, derivamos las ecuaciones de estructura que relacionan las propiedades microscópicas de la materia con las características macroscópicas observables de las estrellas de neutrones. Todas las secciones anteriores están fundamentadas en base al texto de Misner et al. [16]. Finalmente, presentamos una revisión de las observaciones astronómicas más relevantes que han refinado nuestro entendimiento de estos objetos en la última década.

2.1. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General, formulada por Einstein en 1915 [17], es la descripción más exitosa de la gravitación como manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Esta teoría establece que la presencia de materia y energía modifica la geometría del espacio-tiempo, y que esta curvatura, a su vez, determina

el movimiento de la materia y la propagación de la energía. La Relatividad General se fundamenta en dos principios básicos: el principio de equivalencia, según el cual los efectos de un campo gravitacional uniforme son localmente indistinguibles de los efectos de una aceleración uniforme, permitiendo que la gravitación pueda ser “eliminada” localmente mediante la elección apropiada de un sistema de coordenadas en caída libre; y el principio de covariancia general, el cual exige que las leyes de la física tengan la misma forma en todos los sistemas de coordenadas, requiriendo que las ecuaciones de la teoría sean expresadas en términos de tensores para asegurar su invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas. Una representación esquemática del principio de equivalencia puede verse en la figura 1, donde la esfera roja aparentemente cae en ambos sistemas, uno es un cohete acelerado, el otro la superficie de la tierra, siendo los dos sistemas de referencia indistinguibles.

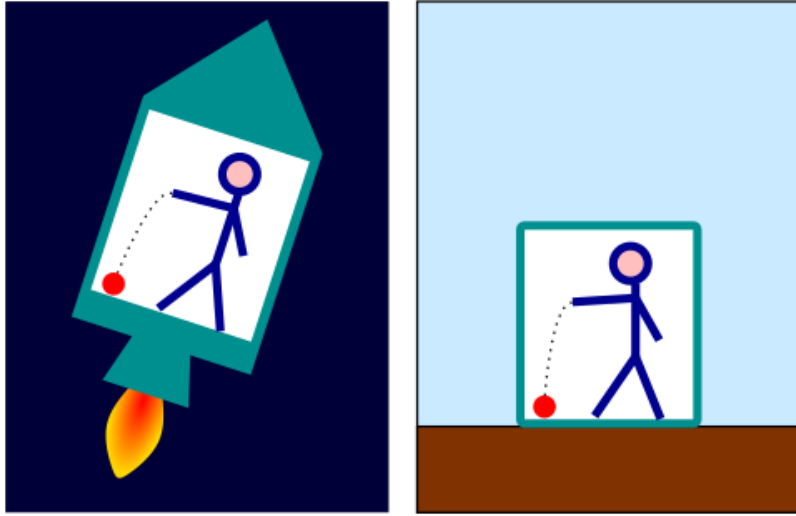


Figura 1: Representación esquemática del principio de equivalencia. Markus Poessel.

2.1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales cuya forma compacta es:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein construido a partir del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de curvatura R , y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento que describe las propiedades de la materia y energía presentes en el espacio-tiempo. Este conjunto de ecuaciones describe cómo la distribución de materia y energía determina la curvatura del espacio-tiempo, y cómo esta curvatura afecta el movimiento

de la materia y la energía de vuelta. Las ecuaciones de Einstein satisfacen automáticamente las leyes de conservación del momentum y la energía a través de la identidad de Bianchi $G_{\mu\nu}{}^{;\rho} = 0$, lo que implica:

$$\nabla_\rho T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}{}_{;\rho} = 0. \quad (2.2)$$

Para describir la materia en el interior de las estrellas de neutrones, consideramos un modelo de fluido perfecto. El tensor de energía-momento es:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde ρ es la densidad de energía del fluido, P es la presión isotrópica, y u^μ es la cuadrivelocidad del fluido, normalizada según $u^\mu u_\mu = 1$. Esta descripción asume que no hay flujos de calor, viscosidad, ni esfuerzos de corte en el fluido, aproximación válida para escalas de tiempo mucho mayores que los tiempos de relajación hidrodinámicos.

2.2. Simetría Esférica

Para describir la estructura de las estrellas de neutrones, vamos a resolver las ecuaciones de Einstein asumiendo simetría esférica y condiciones estáticas. La forma general de estas soluciones establece el punto de partida para entender tanto el interior como el exterior de objetos compactos con simetría esférica, en el marco de la teoría de la relatividad general. El elemento de línea de un sistema estático y esféricamente simétrico puede escribirse como:

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

donde $\phi(r)$ y $\lambda(r)$ son funciones arbitrarias de la coordenada radial r , y hemos utilizado coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) . La simetría esférica impone que la métrica sea invariante bajo rotaciones en el grupo $SO(3)$, mientras que la condición estática requiere la ausencia de términos cruzados $dt dr$, $dt d\theta$, y $dt d\varphi$, así como independencia explícita de la coordenada temporal. La métrica (2.1) representa la forma más general compatible con estas simetrías [16]. Una representación gráfica de la geometría del espacio-tiempo que contiene una estrella con simetría esférica, estática, puede apreciarse en la figura 2, donde la región blanca representa la geometría exterior (fuera de la estrella), y la zona gris la región interior (dentro de la estrella).

La solución general esférica (2.1) incluye varios casos de interés físico. En la región de vacío, cuando $T_{\mu\nu} = 0$, las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = 0$ determinan completamente las funciones $\phi(r)$ y $\lambda(r)$, conduciendo a la solución exterior de Schwarzschild [18]. En el interior estelar, en presencia de materia

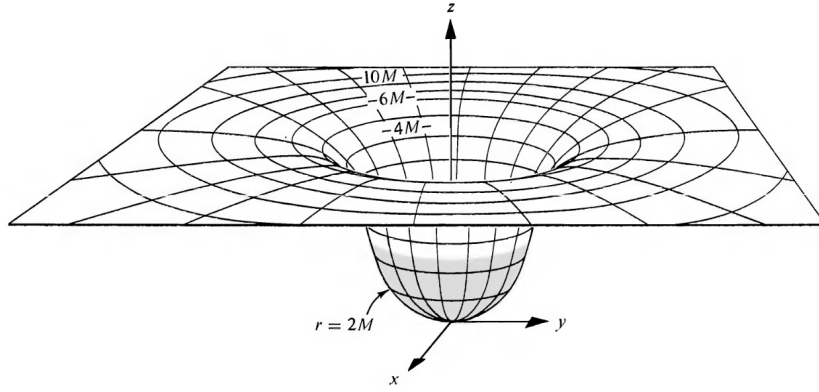


Figura 2: Esquema de la geometría del espacio-tiempo de una estrella con simetría esférica. Tomado de [16].

con tensor de energía-momento (2.3), las ecuaciones de Einstein proporcionan relaciones diferenciales entre $\phi(r)$, $\lambda(r)$, y las variables del fluido $\rho(r)$ y $P(r)$. En la superficie estelar, en $r = R$, las soluciones interior y exterior deben coincidir de manera continua, imponiendo condiciones de frontera específicas.

Para que la solución sea físicamente aceptable, las funciones métricas deben satisfacer condiciones de regularidad apropiadas. En el centro ($r = 0$) se requiere que $m(0) = 0$ y $\phi'(0) = 0$ para evitar posibles singularidades físicas o de coordenadas. En todo el espacio se debe cumplir que $e^{2\lambda} > 0$ y $e^{2\phi} > 0$ para mantener la signatura métrica consistentemente en el espacio-tiempo. En el infinito se exige que $\phi(\infty) = 0$ y $\lambda(\infty) = 0$ para recuperar la métrica de Minkowski, es decir, que en el infinito no haya influencia gravitacional de la estrella y el espacio-tiempo sea plano.

2.3. Ecuaciones de Estructura

Las ecuaciones de estructura determinan la relación entre la distribución de materia en el interior de una estrella y la geometría del espacio-tiempo que genera. Para estrellas de neutrones, estas ecuaciones conectan las propiedades microscópicas de la materia densa con las características macroscópicas observables. En este sistema físico, el tensor de energía-momento del fluido perfecto (2.3) actúa como fuente de las ecuaciones de Einstein (2.1). Las componentes del tensor de energía-momento en coordenadas esféricas son:

$$T_t^t = -\rho(r), \quad (2.1)$$

$$T_r^r = T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = P(r). \quad (2.2)$$

Las ecuaciones de campo $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ establecen un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones métricas. Las componentes independientes son:

- Componente (t, t) :

$$e^{-2\lambda} \left(\frac{2\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho. \quad (2.3)$$

- Componente (r, r) :

$$e^{-2\lambda} \left(\frac{2\phi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi P. \quad (2.4)$$

- Componente (θ, θ) :

$$e^{-2\lambda} \left[\phi'' + \phi'^2 - \phi'\lambda' + \frac{\phi' - \lambda'}{r} \right] = 8\pi P. \quad (2.5)$$

Un resultado relevante para geometrías esféricamente simétricas es la posibilidad de expresar la función métrica $\lambda(r)$ en términos de una función de masa $m(r)$. Definiendo:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (2.6)$$

y utilizando esta parametrización en la ecuación (2.3), obtenemos:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (2.7)$$

donde la función $m(r)$ representa la masa inercial total contenida dentro de una esfera de radio r , y su interpretación física se hace clara al integrar la ecuación (2.7):

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'.$$

Para sistemas asintóticamente planos como en este caso, la masa inercial coincide con la masa gravitacional activa del límite Newtoniano [19], la cual contiene la masa en reposo total, la energía interna total y la energía potencial gravitacional dentro del radio r [16]. De la ecuación (2.4) y usando la parametrización (2.6), la función métrica $\phi(r)$ satisface:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}. \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) determina la componente temporal de la métrica una vez conocidas las funciones $m(r)$ y $P(r)$. Finalmente, utilizando (2.6), (2.7) y (2.8) para sustituir ϕ'' , ϕ' y λ' de (2.5), obtenemos la ecuación de equilibrio hidrostático relativista, también llamada ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [20]:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}. \quad (2.9)$$

Esta importante ecuación describe el equilibrio entre la presión del fluido y la atracción gravitacional, incluyendo correcciones relativistas necesarias para sostener objetos compactos y permitir su estabilidad. Para resolver el sistema de ecuaciones de estructura (2.7 - 2.9), se requiere de una ecuación de estado que relacione la presión y la densidad:

$$P = P(\rho) \quad \text{o}, \quad \rho = \rho(P). \quad (2.10)$$

La solución se obtiene integrando numéricamente desde el centro hacia afuera, comenzando con una densidad central $\rho(0) = \rho_c > 0$ dada. El radio estelar R se determina por la condición $P(R) = 0$, y la masa total $M = m(R)$ resulta de la integración de la ecuación de masa. En el límite no relativista ($M \ll R$ y $P \ll \rho$), la ecuación TOV se reduce a la ecuación clásica de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{m}{r^2}. \quad (2.11)$$

Para estrellas de neutrones, las correcciones relativistas en el sistema de ecuaciones son necesarias debido a su alta compacidad $M/R \sim 0.2-0.4$. Este sistema proporciona la base teórica para predecir las propiedades macroscópicas de las estrellas de neutrones a partir de modelos microscópicos de la materia nuclear densa.

2.4. Observaciones de Estrellas de Neutrones

Las observaciones astronómicas de estrellas de neutrones han experimentado una revolución en las últimas décadas [21], proporcionando restricciones cada vez más precisas sobre las propiedades de la materia densa. Estas mediciones permiten contrastar los modelos teóricos de ecuaciones de estado con la realidad física de estos objetos extremos. Las estrellas de neutrones se observan a través de múltiples canales electromagnéticos [2] y, recientemente, mediante ondas gravitacionales [22]. Los principales métodos observacionales incluyen:

- **Cronometraje de Pulsares:** Los pulsares son estrellas de neutrones altamente magnetizadas que emiten haces de radiación electromagnética. La precisión extrema en la medición de sus períodos de rotación permite determinar masas través del análisis orbital en sistemas binarios.
- **Astronomía de Rayos X:** Las estrellas de neutrones en sistemas binarios acretantes o como objetos aislados calientes pueden ser observadas en rayos X. Las misiones como NICER han revolucionado las mediciones de radio a través del modelado de puntos calientes superficiales.

- **Ondas Gravitacionales:** Las fusiones de estrellas de neutrones binarias, detectadas por LIGO-Virgo, proporcionan información sobre las propiedades de marea y la ecuación de estado a través de las modificaciones que introducen en la forma de onda gravitacional.

2.4.1. Mediciones de Masa

Las mediciones de masa de estrellas de neutrones se basan principalmente en el efecto Shapiro en sistemas binarios de pulsares. Este efecto relativista permite determinar las masas con alta precisión a partir del retraso temporal que experimenta la señal del pulsar al atravesar el campo gravitacional de su compañera. Las mediciones más precisas incluyen:

- **PSR J0740+6620:** Con una masa de $2.08 \pm 0.07 M_{\odot}$ [5], representa la medición más precisa de una estrella de neutrones masiva.
- **PSR J0348+0432:** Una estrella de neutrones con masa $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ [6], crucial para establecer el límite inferior de la masa máxima.
- **PSR J0952-0607:** Con una masa reportada de $2.35 \pm 0.17 M_{\odot}$ [4], aunque con mayor incertidumbre debido al método de determinación basado en espectrofotometría.

Estas observaciones establecen que las estrellas de neutrones pueden alcanzar masas superiores a $2 M_{\odot}$, imponiendo restricciones sobre las ecuaciones de estado que deben ser suficientemente rígidas para soportar estas configuraciones. Otras estimaciones se han realizado empleando datos de ondas gravitacionales. Sin embargo, en mediciones mayores aún se discute la naturaleza del objeto observado (estrella de neutrones o agujero negro), como en el caso de GW190814 [9, 14], con una masa del objeto secundario estimado en $2.59^{+0.08}_{-0.09} M_{\odot}$.

2.4.2. Mediciones de Radio

La misión NICER (Neutron star Interior Composition ExploreR) ha proporcionado algunas de las primeras mediciones simultáneas de masa y radio para estrellas de neutrones específicas. Estas mediciones se basan en el modelado de puntos calientes en la superficie de pulsares de milisegundo, analizando las modulaciones en el flujo de rayos X.

Los resultados más significativos incluyen, a 1σ de confiabilidad:

- **PSR J0740+6620:** Análisis independientes con NICER y X-ray Multi-Mirror han proporcionado valores $R = 13.7^{+2.6}_{-1.5}$ km [23] y $R = 12.39^{+1.30}_{-0.98}$ km [24];
- **PSR J0030+0451:** $M = 1.44^{+0.15}_{-0.14} M_{\odot}$ y $R = 13.02^{+1.24}_{-1.06}$ km [25];

- **PSR J0437-4715:** $M = 1.418 \pm 0.037 M_{\odot}$ y $R = 11.36^{+0.95}_{-0.63}$ km [26].

Adicionalmente, se han realizado estimaciones de radio mediante la medición del parámetro de deformación de marea en ondas gravitacionales [27]. Sin embargo, para obtener estas estimaciones es necesario realizar modelamiento adicional, lo que hace esta estimación modelo-dependiente. Para el caso de *GW190814* y asumiendo el objeto secundario como una estrella de neutrones de rotación rápida, se estimó un radio ecuatorial de $R_e = 14.1^{+1.5}_{-2.0}$ km, mientras que asumiendo una estrella no rotante, se estimó un radio canónico de $R_{1.4} = 13.3^{+0.5}_{-0.6}$ km, ambos en el intervalo de confianza a 90 % [28].

Las observaciones combinadas de masa y radio imponen restricciones consistentes sobre las posibles ecuaciones de estado de la materia nuclear densa. Estas restricciones pueden resumirse como:

- **Rigidez Suficiente:** La ecuación de estado debe ser lo suficientemente rígida para soportar masas $\geq 2 M_{\odot}$.
- **Radios Consistentes:** Los radios estelares deben estar en el rango $\sim 11 - 14$ km para masas típicas/canónicas de $\sim 1.4 M_{\odot}$.

Estas restricciones observacionales permiten restringir las posibles ecuaciones de estado de la materia nuclear densa. Al resolver el sistema de ecuaciones de estructura (2.7 - 2.9) junto con una ecuación de estado específica (2.10), es posible predecir la masa y radio de las estrellas de neutrones a partir de modelos microscópicos. De esta manera, las observaciones astronómicas establecen el puente entre la física microscópica de la materia nuclear densa y las características macroscópicas observables de estos objetos compactos, guiando la construcción y validación de modelos teóricos.

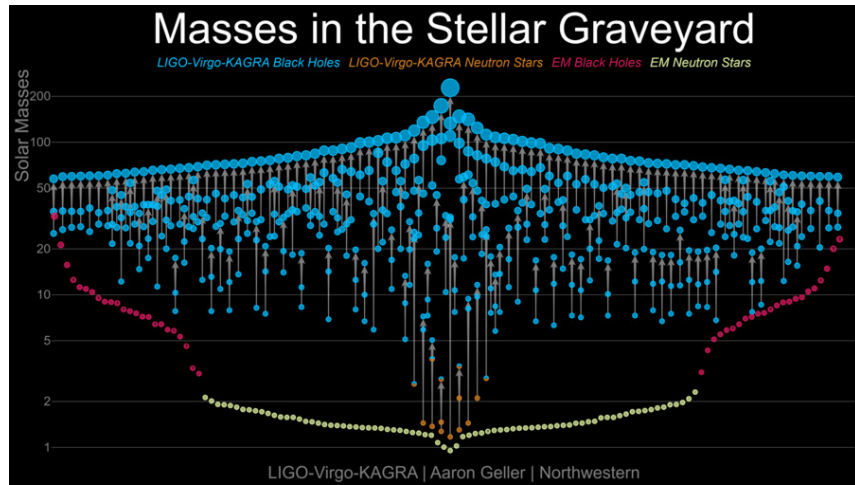


Figura 3: Masas en el cementerio estelar. Contiene las masas estimadas mediante diferentes fuentes y su (posible) naturaleza, a enero de 2024. Tomado de ligo.caltech.edu.

Las próximas generaciones de detectores de ondas gravitacionales, junto con misiones espaciales mejoradas y telescopios de nueva generación, prometen expandir significativamente nuestro conocimiento observacional de las estrellas de neutrones. Se espera que estas observaciones proporcionen restricciones aún más precisas sobre las ecuaciones de estado y posiblemente revelen nueva física en el régimen de densidades ultra-altas. Es claro que, a mayor número de observaciones, mayores son los requerimientos de nuestras teorías, lo que permite filtrar modelos físicos que pretendan describir la masa a densidades tan altas. En particular, la detección de estrellas de neutrones con masas en el rango $2.5 - 3 M_{\odot}$ o la confirmación de transiciones de fase en el interior estelar a través de observaciones de estrellas, prometen descubrimientos de impacto para nuestra comprensión de la materia nuclear densa. En la figura 3 se pueden apreciar las estimaciones de masa hasta enero de 2024, así como la posible naturaleza del objeto. Cabe destacar que en el rango de 2 a $5 M_{\odot}$ hay incertidumbre en la naturaleza de varios objetos detectados.

Capítulo 3

Microfísica: Ecuaciones de Estado

La descripción microscópica de la materia en entornos extremos de densidad es un problema de gran complejidad en la física moderna. En estas condiciones, con densidades que exceden significativamente la densidad nuclear de saturación, la materia exhibe comportamientos que requieren marcos teóricos que incorporen efectos relativistas y de muchos cuerpos. La ecuación de estado que gobierna esta materia establece la conexión directa entre la física microscópica de las interacciones nucleares y las propiedades macroscópicas observables de las estrellas de neutrones [20].

La teoría relativista de campo medio surge como una herramienta particularmente adecuada para abordar este régimen, brindando un tratamiento consistente que respeta la causalidad mientras incorpora las interacciones nucleares fuertes [2]. Este formalismo permite extrapolar desde las propiedades conocidas de materia nuclear simétrica hacia las condiciones asimétricas y de alta densidad relevantes para objetos compactos.

3.1. Ecuaciones de Estado y Ejemplos

Una ecuación de estado define la relación termodinámica entre las variables que caracterizan el estado de equilibrio de un sistema físico. Para materia estelar a temperatura cero, consideramos ecuaciones de estado barotrópicas que relacionan la presión P con la densidad de energía ρ mediante (2.10). Esta relación contiene toda la información termodinámica necesaria para determinar la estructura de equilibrio hidrostático de estrellas de neutrones a través de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (2.7 - 2.9). La aproximación barotrópica es válida cuando los tiempos y escalas característicos de los procesos térmicos son despreciables comparados con las escalas hidrodinámicas y gravitacionales que determinan la estructura estelar. Se desprecia la temperatura debido a que la energía térmica y sus efectos son varios órdenes de magnitud inferiores a las energías internas de la materia en estrellas de neutrones [29].

3.1.1. Ejemplo: Ecuación Politrópica

La ecuación de estado politrópica es uno de los modelos más sencillos para describir materia estelar, estableciendo una relación de ley de potencias entre la presión y la densidad de masa:

$$P = K\rho^\gamma, \quad (3.1)$$

donde K es una constante politrópica y γ es el índice adiabático. Esta forma funcional, aunque fenomenológica, captura comportamientos asintóticos importantes de sistemas físicos más complejos y brinda soluciones analíticas o semi-analíticas para las ecuaciones de estructura estelar. El índice politrópico $n = 1/(\gamma - 1)$ determina las características de compresibilidad del material: valores bajos de n corresponden a materia incompresible, mientras que valores altos describen sistemas altamente compresibles. Para materia ultra-relativista, $\gamma = 4/3$ ($n = 3$), mientras que para materia no-relativista degenerada, $\gamma = 5/3$ ($n = 3/2$) [30].

3.1.2. Ejemplo: Gas Ideal Degenerado

Los modelos más realistas consideran gases degenerados de fermiones. Para materia nuclear compuesta por neutrones, protones y electrones, la ecuación de estado completa debe incluir las contribuciones de todas las especies presentes [29]:

$$\rho_{\text{total}} = \rho_n + \rho_p + \rho_e, \quad (3.2)$$

$$P_{\text{total}} = P_n + P_p + P_e, \quad (3.3)$$

donde cada componente fermionica contribuye según:

$$\rho_i = \frac{g_i}{8\pi^2} \int_0^{p_{Fi}} p^2 \sqrt{p^2 + m_i^2} dp, \quad (3.4)$$

$$P_i = \frac{g_i}{24\pi^2} \int_0^{p_{Fi}} \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m_i^2}} dp, \quad (3.5)$$

con masas $m_n = 939.6$ MeV, $m_p = 938.3$ MeV, $m_e = 0.511$ MeV y degeneraciones estadísticas (de espín) $g_i = 2$ para todas las especies. Los momentos de Fermi p_{Fi} están determinados por las densidades de número mediante $n_i = \frac{g_i p_{Fi}^3}{6\pi^2}$, de modo que se tienen tres cantidades independientes: las densidades de número de las diferentes especies. Para resolver el sistema, se imponen restricciones adicionales sobre la composición de la materia garantizando el equilibrio termodinámico: la neutralidad de carga eléctrica

requiere $n_p = n_e$, mientras que el equilibrio beta débil $n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e$ establece la condición $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ entre los potenciales químicos, asumiendo que los neutrinos escapan del sistema sin alterar su energía. Estas restricciones permiten expresar todas las densidades en función de un parámetro libre como el momento de Fermi del electrón p_{Fe} , lo que reduce el sistema a una parametrización unidimensional.

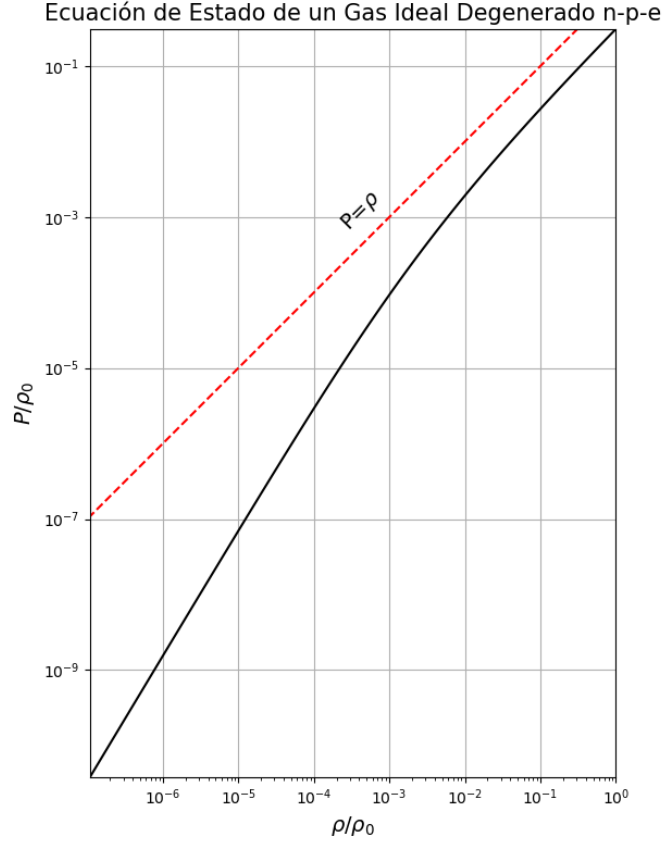


Figura 4: Ecuación de estado normalizada de un gas ideal degenerado de neutrones, protones y electrones. La ecuación de estado es causal ($c_s^2 = dP/d\rho < 1$).

Las integrales (3.4) y (3.5) son analíticas, de modo que la ecuación de estado queda determinada por las expresiones $\rho(n_e)$ y $P(n_e)$ interpoladas sobre un rango de densidades relevante para estrellas de neutrones. El resultado de esta ecuación de estado se muestra en la figura 4. Luego, empleando las ecuaciones TOV (2.7 - 2.9) obtenemos las masas y radios de estrellas construidas con este material, como se muestra en la figura 5. Este modelo sencillo predice una masa máxima de apenas $0.7 M_\odot$, muy inferior a las masas que se han observado recientemente de estrellas de neutrones, listadas en la sección 2.4.

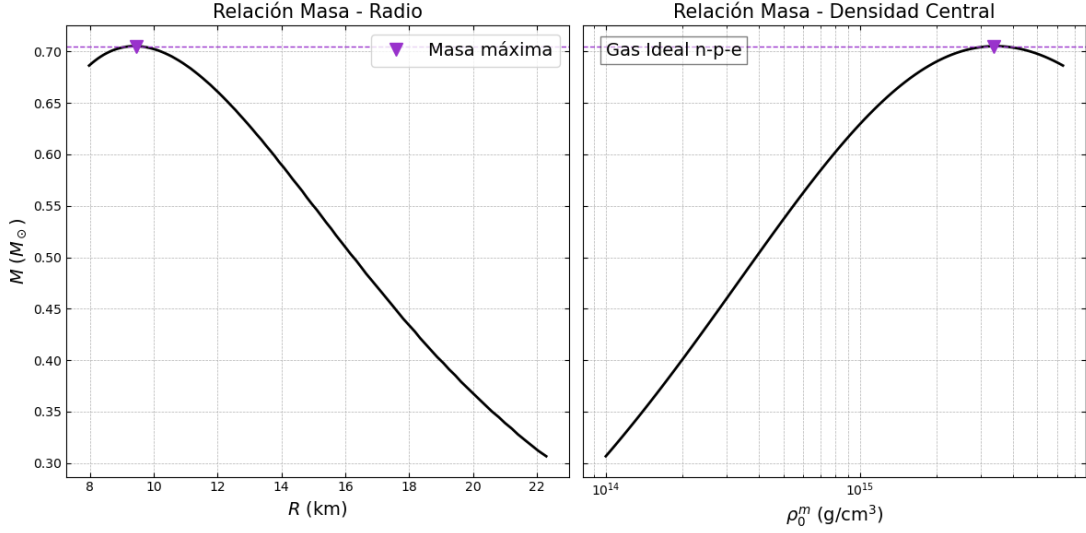


Figura 5: Relaciones de masa - radio y masa - densidad central de masa de estrellas de neutrones constituidas por un gas ideal de neutrones, protones y electrones libres.

3.2. Teoría Relativista de Campo Medio

La teoría relativista de campo medio es un marco teórico que describe las interacciones nucleares mediante el intercambio de mesones efectivos, extendiendo el modelo de gas degenerado (discutido en 3.1.2) e incorporando naturalmente las características relativistas en condiciones de alta densidad. Formulada por Walecka en 1974 [11], esta aproximación ofrece ventajas significativas respecto a enfoques no-relativistas basados en potenciales fenomenológicos, particularmente en su construcción covariante, su capacidad para reproducir simultáneamente las propiedades de saturación nuclear, el comportamiento asintótico a alta densidad, y la consistencia causal relativista. Adicionalmente, al ser una teoría efectiva, requiere de un menor esfuerzo computacional respecto a teorías más fundamentales como QCD.

El formalismo se construye a partir de un lagrangiano que describe nucleones interactuando a través de campos mesónicos. Los campos fermiónicos representan los grados de libertad nucleónicos y leptónicos, mientras que los campos bosónicos representan mesones que median las interacciones fuertes. La aproximación de campo medio consiste en reemplazar los operadores de campo mesónicos por sus valores esperados en el estado base degenerado:

$$\langle \phi_i(x^\mu) \rangle = \phi_i^0 \equiv \text{constante}, \quad (3.1)$$

donde ϕ_i denota los diferentes campos mesónicos del modelo. Esta aproximación es válida cuando las fluctuaciones cuánticas son pequeñas comparadas con los valores esperados de los campos, condición que se satisface en materia nuclear densa cuanto mayor es la densidad del sistema [12].

3.2.1. Simetrías y Conservaciones

El formalismo de la teoría se construye sobre la teoría cuántica de campos. La densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \phi_a, \partial_\mu \phi_a)$ describe las interacciones entre campos fermiónicos ψ y campos bosónicos ϕ_a junto con sus términos libres. Esta densidad lagrangiana debe satisfacer los requerimientos de localidad, covariancia de Lorentz, y las simetrías internas relevantes para las interacciones nucleares fuertes [2]. La acción del sistema se define como la integral de la densidad lagrangiana sobre el volumen espaciotemporal:

$$S[\psi, \phi_a] = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \phi_a, \partial_\mu \phi_a), \quad (3.2)$$

donde d^4x es el elemento de volumen en coordenadas de Minkowski. El principio de acción estacionaria establece que las configuraciones físicas de los campos corresponden a los extremos de esta funcional, lo que conduce a las ecuaciones de movimiento mediante el cálculo variacional. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para todos los campos son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_b} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_b)} \right) = 0, \quad (3.3)$$

donde φ_b representa todos los campos presentes. Estas ecuaciones se calculan para cada componente de los campos antes de aplicar la aproximación de campo medio, obteniendo el sistema de ecuaciones de movimiento a resolver. La teoría presenta simetrías externas e internas que determinan sus conservaciones y sus consecuencias físicas. Las simetrías externas son las transformaciones del grupo de Poincaré: traslaciones espaciotemporales $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ y boosts de Lorentz $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Las simetrías internas relevantes incluyen la simetría de gauge global $U(1)$ $\psi \mapsto e^{-i\lambda} \psi$ asociada con la conservación del número bariónico, y la simetría de isospín $SU(2)$ $\psi \mapsto e^{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\lambda}} \psi$ asociada con la relación entre neutrones y protones, en la aproximación de iguales masas.

El teorema de Noether establece una correspondencia entre simetrías continuas del lagrangiano y cantidades conservadas. Para cada simetría continua existe una corriente conservada correspondiente que satisface una ecuación de continuidad. El tensor de energía-momento, asociado a la simetría externa, se define como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_j)} \partial^\nu \varphi_j - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.4)$$

garantizando que la energía total (T^{00}) y el momento total (T^{0i}) del sistema se conserven en el tiempo en ausencia de fuerzas externas.

La corriente bariónica, asociada a la simetría interna $U(1)$, se define como:

$$J_B^\mu = \sum_N \bar{\psi}_N \gamma^\mu \psi_N, \quad \partial_\mu J_B^\mu = 0, \quad (3.5)$$

donde la suma se extiende sobre todas las especies de bariones presentes. Esto implica que el número bariónico total $\int d^3x J_B^0$ integrado sobre el volumen total del sistema considerado, permanece constante en el tiempo reflejando el hecho experimental de que los bariones no se crean ni se destruyen en interacciones fuertes.

La corriente de isospín, asociada a la simetría interna $SU(2)$, se define como:

$$J_I^\mu = \sum_N \bar{\psi}_N \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_N, \quad \partial_\mu J_I^{\mu a} = 0, \quad (3.6)$$

donde $\boldsymbol{\tau} = \tau^a$ ($a = 1, 2, 3$) son las matrices de Pauli en el espacio de isospín. Aunque en la realidad física esta simetría está ligeramente rota por las diferencias de masa entre neutrones y protones y por las interacciones electromagnéticas, en la aproximación de igual masa se cumple. La conservación aproximada de isospín justifica el tratamiento unificado de neutrones y protones en modelos de materia nuclear simétrica. Estas leyes de conservación derivadas del teorema de Noether añaden restricciones importantes sobre la dinámica del sistema y establecen conexiones directas entre las simetrías fundamentales de la teoría y las cantidades físicamente observables.

3.3. Modelo del Estudio

3.3.1. Materia en Saturación Nuclear

Capítulo 4

Resultados y discusión

4.1. Dependencia de los parámetros en la propiedades

4.2. Masa maxima con las propiedades (parametros)

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Principales hallazgos

5.2. Limitaciones del estudio

5.3. Recomendaciones para futuros trabajos

Capítulo 6

Apéndices

Bibliografía

- [1] W. Baade y F. Zwicky, “Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays,” *Phys. Rev.*, vol. 46, n.º 1, págs. 76-77, 1934. DOI: [10.1103/PhysRev.46.76.2](https://doi.org/10.1103/PhysRev.46.76.2).
- [2] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity* (Astronomy and Astrophysics Library), 2nd ed. New York: Springer, 2000, ISBN: 978-0-387-98977-8.
- [3] G. Raaijmakers et al., “Constraints on the Dense Matter Equation of State and Neutron Star Properties from NICER’s Mass–Radius Estimate of PSR J0740+6620 and Multimessenger Observations,” *ApJL*, vol. 918, n.º 2, pág. L29, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac089a](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac089a).
- [4] R. W. Romani et al., “PSR J0952-0607: The Fastest and Heaviest Known Galactic Neutron Star,” *ApJL*, vol. 934, n.º 2, pág. L17, 2022. DOI: [10.3847/2041-8213/ac8007](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac8007).
- [5] E. Fonseca et al., “Refined Mass and Geometric Measurements of the High-mass PSR J0740+6620,” *ApJL*, vol. 915, n.º 1, pág. L12, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac03b8](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac03b8).
- [6] J. Antoniadis et al., “A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary,” *Science*, vol. 340, n.º 6131, pág. 1 233 232, 2013. DOI: [10.1126/science.1233232](https://doi.org/10.1126/science.1233232). arXiv: [1304.6875](https://arxiv.org/abs/1304.6875).
- [7] T. L. S. Collaboration et al., *GWTC-2.1: Deep Extended Catalog of Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run*, 2022. arXiv: [2108.01045](https://arxiv.org/abs/2108.01045).
- [8] T. L. S. Collaboration y T. V. Collaboration, “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, n.º 16, pág. 161 101, 2017. DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.161101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101). arXiv: [1710.05832](https://arxiv.org/abs/1710.05832).
- [9] T. L. S. Collaboration et al., “GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 M_{\odot} Black Hole with a 2.6 M_{\odot} Compact Object,” *ApJL*, vol. 896, n.º 2, pág. L44, 2020. DOI: [10.3847/2041-8213/ab960f](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab960f). arXiv: [2006.12611](https://arxiv.org/abs/2006.12611).
- [10] Y. Shao, “On the Neutron Star/Black Hole Mass Gap and Black Hole Searches,” *Res. Astron. Astrophys.*, vol. 22, n.º 12, pág. 122 002, 2022. DOI: [10.1088/1674-4527/ac995e](https://doi.org/10.1088/1674-4527/ac995e).

- [11] J. Walecka, “A theory of highly condensed matter,” *Annals of Physics*, vol. 83, n.º 2, págs. 491-529, 1974. DOI: [10.1016/0003-4916\(74\)90208-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(74)90208-5).
- [12] J. D. Walecka, “The Relativistic Nuclear Many-Body Problem,” en *New Vistas in Nuclear Dynamics*, P. J. Brussaard y J. H. Koch, eds., Boston, MA: Springer US, 1986, págs. 229-271, ISBN: 978-1-4684-5179-5. DOI: [10.1007/978-1-4684-5179-5_8](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-5179-5_8).
- [13] M. Dutra et al., “Relativistic Mean-Field Hadronic Models under Nuclear Matter Constraints,” *Phys. Rev. C*, vol. 90, n.º 5, pág. 055203, 2014. DOI: [10.1103/PhysRevC.90.055203](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.90.055203). arXiv: [1405.3633](https://arxiv.org/abs/1405.3633).
- [14] L. L. Lopes y D. P. Menezes, “On the Nature of the Mass-gap Object in the GW190814 Event,” *ApJ*, vol. 936, n.º 1, pág. 41, 2022. DOI: [10.3847/1538-4357/ac81c4](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac81c4).
- [15] W. Baade y F. Zwicky, “On Super-Novae,” *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 20, n.º 5, págs. 254-259, 1934. DOI: [10.1073/pnas.20.5.254](https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.254).
- [16] C. W. Misner et al., *Gravitation*. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2017, ISBN: 978-0-691-17779-3.
- [17] A. Einstein, “Die Feldgleichungen Der Gravitation,” *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, págs. 844-847, 1915.
- [18] K. Schwarzschild, *On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein’s Theory*, 1999. DOI: [10.48550/arXiv.physics/9905030](https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/9905030). arXiv: [physics/9905030](https://arxiv.org/abs/physics/9905030).
- [19] D. N. Vollick, *On the Meaning of Various Mass Definitions for Asymptotically Flat Spacetimes*, 2021. DOI: [10.48550/arXiv.2101.12570](https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.12570). arXiv: [2101.12570](https://arxiv.org/abs/2101.12570).
- [20] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff, “On Massive Neutron Cores,” *Phys. Rev.*, vol. 55, n.º 4, págs. 374-381, 1939. DOI: [10.1103/PhysRev.55.374](https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.374).
- [21] E. Pian, “Mergers of Binary Neutron Star Systems: A Multimessenger Revolution,” *Front. Astron. Space Sci.*, vol. 7, pág. 609460, 2021. DOI: [10.3389/fspas.2020.609460](https://doi.org/10.3389/fspas.2020.609460).
- [22] E. Fonseca et al., “The NANOGrav Nine-year Data Set: Mass and Geometric Measurements of Binary Millisecond Pulsars,” *ApJ*, vol. 832, n.º 2, pág. 167, 2016. DOI: [10.3847/0004-637X/832/2/167](https://doi.org/10.3847/0004-637X/832/2/167). arXiv: [1603.00545](https://arxiv.org/abs/1603.00545).
- [23] M. C. Miller et al., “The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data,” *ApJL*, vol. 918, n.º 2, pág. L28, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac089b](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac089b).
- [24] T. E. Riley et al., “A NICER View of the Massive Pulsar PSR J0740+6620 Informed by Radio Timing and XMM-Newton Spectroscopy,” *ApJL*, vol. 918, n.º 2, pág. L27, 2021. DOI: [10.3847/2041-8213/ac0a81](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac0a81). arXiv: [2105.06980](https://arxiv.org/abs/2105.06980).

- [25] M. C. Miller et al., “PSR J0030+0451 Mass and Radius from NICER Data and Implications for the Properties of Neutron Star Matter,” *The Astrophysical Journal*, vol. 887, pág. L24, 2019. DOI: [10.3847/2041-8213/ab50c5](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab50c5).
- [26] D. Choudhury et al., *A NICER View of the Nearest and Brightest Millisecond Pulsar: PSR J0437-4715*, 2024. DOI: [10.3847/2041-8213/ad5a6f](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ad5a6f). arXiv: [2407.06789](https://arxiv.org/abs/2407.06789).
- [27] R. Kumar et al., “Theoretical and experimental constraints for the equation of state of dense and hot matter,” *Living Rev Relativ*, vol. 27, n.º 1, pág. 3, 2024. DOI: [10.1007/s41114-024-00049-6](https://doi.org/10.1007/s41114-024-00049-6).
- [28] B. Biswas et al., “GW190814: On the properties of the secondary component of the binary,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 505, n.º 2, págs. 1600-1606, 2021. DOI: [10.1093/mnras/stab1383](https://doi.org/10.1093/mnras/stab1383).
- [29] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, 1. Auflage. Weinheim: Wiley-VCH, 2008, ISBN: 978-3-527-61767-8.
- [30] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover Books on Astronomy), Unabr. and corr. republ. of orig. publ. 1939 by Univ. of Chicago Pr. New York: Dover Publ, 1970, ISBN: 978-0-486-60413-8.