# Estimando la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo

## María S. Cárdenas, Nicolas Mantilla y Sharith D. Pinzón \*

Universidad Industrial de Santander Bucaramanga, Colombia

29 de Septiembre de 2021

# Índice

1	Introducción	2
2	Metodología	2
3	El experimento y los resultados	4
	3.1 Ángulos pequeños	4
	3.1.1 Análisis de los Datos Experimentales	
	3.2 Ángulos grandes	8
	3.2.1 Análisis de los Datos Experimentales	8
	3.2.2 Simulación Teórica	10
	3.3 Simulación Phet Colorado	11
4	Conclusiones y Recomendaciones	12
5	Referencias	14

#### Resumen

Desde el colegio se imparte que la gravedad tiene un valor absoluto en la Tierra. Sin embargo, este valor es relativo al lugar físico en el que se mida, entre otros factores que influyen. Ante ello, en este artículo se realizó la estimación del valor de la aceleración de la gravedad mediante el periodo de oscilación de un péndulo, variando la longitud, la amplitud y la masa de los elementos que lo componen; de esta manera, se obtuvieron 160 videos que fueron analizados en programas que permitieron la obtención del modelado gráfico tanto experimental como teórico

 $<sup>{\</sup>rm *}sofia carden as 10 @ outlook.com,\ nicoman timol 1 @ gmail.com,\ pinzon qsharith @ gmail.$ 

para hacer las respectivas comparaciones entre ellas y con la simulación de Colorado; estas a su vez, completaron el objetivo del informe correspondiente a estimar el valor de la gravedad en Bucaramanga y determinar la dependencia del periodo de oscilación del péndulo. Todo lo anteriormente mencionado se ejecutó bajo condiciones caseras con la participación de errores sistemáticos importantes para el análisis de los resultados del proyecto.

## 1. Introducción

La gravedad es un fenómeno físico que ha sido estudiado con rigor desde siglos atrás; en efecto, toda la relevancia que posee su mención ha llevado a que sea un término conocido en la cotidianidad, aunque esto no implica que sea fácil su estudio. Históricamente el péndulo ha sido usado como instrumento físico para determinar el valor de la aceleración de la gravedad entre otras cosas.

Huygens en su destacada obra, *Horologium Oscillatorium* [1], publicada en 1673 proporciona la base del uso del péndulo compuesto reversible para la determinación absoluta de la intensidad de la gravedad. En 1817 Henry Kater inventó el péndulo recíproco con el fin de medir, de igual forma, este valor pero localmente [2]. En la actualidad, el gravímetro es el instrumento empleado en la medición de la gravedad, sin embargo no es el único modo de encontrar esta magnitud.

Se conoce el valor genérico terrestre de la gravedad y socialmente se establece como absoluto. No obstante este no es su comportamiento real. Es por esto, que el objetivo de este trabajo es el de estimar el valor local de la gravedad empleando un péndulo simple y compararlo con el valor comúnmente aceptado, así como determinar la dependencia del periodo de oscilación del péndulo genérico.

Esta experiencia se realiza a través de experimentos con elementos caseros y montajes que son reproducibles. En la Sección 2 se discute la metodología empleada, mientras que en la Sección 3 se presenta el experimento y los resultados obtenidos. Se finaliza el artículo con las conclusiones y recomendaciones en la Sección 4.

# 2. Metodología



Figura 1: Montaje experimental

El análisis del movimiento pendular se realizó teniendo en cuenta diferentes condiciones iniciales en las que se varía: la longitud de la cuerda, la masa del cuerpo oscilante y la amplitud, esto bajo un enfoque experimental y otro teórico en donde se desprecia la fricción.

Para el montaje de esta práctica (ver **Figura 1**) se utilizó: una botella de 300ml y otra de 600ml; dos cuerdas inextensibles de 1m y 2m; y la cámara de un dispositivo móvil. En cuanto a los ángulos utilizados para la amplitud, en primera instancia se determinaron como "ángulos pequeños" aquellos cuya aproximación  $sen(\theta) \approx \theta$  se cumple con un error menor al 3% <sup>1</sup>. Cuya representación grafica es una función lineal. (ver **Figura 2**)

$$\theta = [0^{\circ}, 24^{\circ}] \tag{1}$$

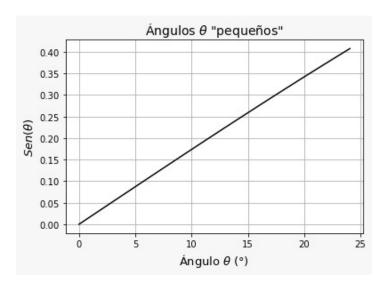


Figura 2: Función  $sen(\theta)$  acotado para ángulos considerados como pequeños dada la relación  $sen(\theta) \approx \theta$ . Se evidencia la aproximación a la gráfica f(x) = x.

Los valores mayores a este rango son considerados como "ángulos grandes". Para los ángulos pequeños fueron seleccionados 3,5° y 11,5° y para los grandes se eligieron 61,5° y 73°. A partir de cada uno de estos ángulos se variaron los términos anteriormente especificados derivando en 16 condiciones experimentales diferentes y tomando 3 periodos en cada movimiento.

Justificadas las condiciones anteriores, se hicieron más de 10 grabaciones para cada condición de movimiento con el fin de asegurar la exactitud de los datos recogidos para el caso experimental. Del mismo modo, para cuantificar el cambio de la posición angular respecto al tiempo a lo largo de la oscilación, se empleó el uso del programa  $Tracker^2$ , un software libre diseñado para el análisis del movimiento en video, con el cual se adquierieron los valores de las variables de forma eficiente

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Código: Ángulos Considerados Pequeños.ipynb

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Página oficial: *Tracker* 

y con menor error sistemático. Los datos obtenidos fueron exportados con extensión .csv para ser importados y analizados en python notebooks<sup>3</sup> con ayuda del entorno de desarrollo  $jupyter\ lab^4$ .

Los 10 sets de datos para cada uno de los 16 movimientos fueron promediados para obtener un solo conjunto de datos, de estos se extrajeron los valores del periodo, hallando el tiempo establecido entre los picos de la oscilación; así como el valor de la aceleración de la gravedad, utilizando:

$$g \approx \frac{4\pi^2 L}{T^2},\tag{2}$$

y el error experimental, empleando la desviación cuadrática media.

Luego, se realizó un promedio de los resultados extraídos del análisis anterior con el fin de obtener un valor promedio de los periodos de las cuerdas de 1 y 2 metros para ángulos pequeños y ángulos grandes. A partir de estos resultados, se llevó a cabo la simulación teórica haciendo uso de la aproximación al movimiento armónico simple<sup>5</sup> para las amplitudes pequeñas y la aproximación al movimiento uniformemente acelerado para amplitudes grandes.

En cada caso, ángulos grandes y pequeños, se obtuvo un valor diferente de la gravedad de manera que, para estimar un valor general, se realizó el promedio de los mismos. Este fue utilizado como parámetro para configurar las condiciones inicales del simulador de Colorado (3.3) encontrando el periodo teórico con la finalidad de contrastarlo con el periodo tanto experimental como teórico extraídos de los datos de la práctica.

Al mismo tiempo, con los datos analizados y evaluados durante la experiencia, se determinaron los factores de los cuales depente el periodo del movimiento del péndulo y se visualizó su correspondiente resultado.

Asimismo, los resultados obtenidos y los datos recaudados están almacenados en un repositorio en GitHub<sup>6</sup>, el cual es un desarrollador de software que aloja proyectos utilizando el sistema de control de versiones Git que, a su vez, permite la creación y la visualización de códigos e información.

Finalmente, se aclara que los programas utilizados fueron útiles y esenciales para la realización del experimento, sin embargo, no ofrecen una precisión completamente ideal, por lo cual puede afectar los resultados de las prácticas si no se realiza de manera correcta.

# 3. El experimento y los resultados

## 3.1. Ángulos pequeños

#### 3.1.1. Análisis de los Datos Experimentales

Tras examinar los más de 80 videos en Tracker, los datos de tiempo y posición angular fueron agrupados en archivos .csv categorizándolos por sus condiciones iniciales. Los valores de posición angular se promediaron utilizando una función propia creada en un notebook de Phyton en el entorno Jupyter Lab<sup>7</sup>, con el fin de obtener un solo conjunto de datos y reducir la estimación del

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Repositorio: 02 Péndulo

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Proyecto Jupyter

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Wikipedia: *Pendulum* 

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Página oficial de GitHub

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Código: Péndulo con Ángulo Pequeño.ipynb (Ver Sección 1.1. Análisis de los Datos Experimentales)

error experimental en el análisis de cada movimiento. Estos sets de datos se acotaron a un ciclo específico para calcular el periodo y aceleración de gravedad, obteniendo 8 magnitudes para cada uno. Los resultados evidencian una independencia a la amplitud y a la masa del objeto oscilante (ver **Figura** 3).

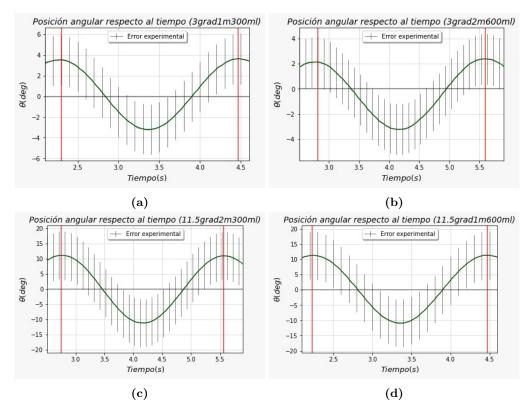


Figura 3: Datos experimentales de ángulos pequeños. Las figuras representan el cambio de posición angular respecto al tiempo. Ángulo: 3°, cuerda: 1m, masa: 300g; dió como resultado un periodo T=2,2s y una gravedad  $g=8,16\frac{m}{s^2}$  (3a). Ángulo: 3°, cuerda: 2m, masa 600g; dió como resultado un periodo T=2,9s y una gravedad  $g=9,39\frac{m}{s^2}$  (3b). Ángulo: 11.5°, cuerda: 1m, masa 300g; dió como resultado un periodo T=2,8s y una gravedad  $g=10,07\frac{m}{s^2}$  (3c). Ángulo: 11.5°, cuerda: 2m, masa 600g; dió como resultado un periodo T=2,2s y una gravedad  $g=9,16\frac{m}{s^2}$  (3d). Teniendo en cuenta los anteriores resultados se evidencia una independencia del periodo sobre el ángulo y la masa del objeto oscilante. De igual forma se puede visualizar que la amplitud seleccionada como condición inicial en el montaje experimental no concuerda con los datos cuantificados en Tracker lo que se justifica bajo un error sistemático.

Finalmente, considerando la independencia del periodo sobre el ángulo y la masa del objeto, se calcula el periodo para cada longitud de cuerda:

$$T_{1m} = 2.2s \; ; \; T_{2m} = 2.8s.$$
 (3)

De igual forma, se promediaron las aceleraciones de gravedad generando un solo valor promedio de todos los casos experimentales para ángulos pequeños, originando:

$$g = 9.03 \frac{m}{s^2}. (4)$$

Si se compara este resultado con el valor comunmente utilizado para la gravedad  $\approx 9.8 \frac{m}{s^2}$ , la diferencia porcentual es de:

Gravedad experimental ángulos pequeños vs gravedad común = 
$$7.8\%$$
 (5)

#### 3.1.2. Simulación Teórica

Como se mencionó, la amplitud experimental expresada en los datos fue, en promedio, 3,5°, esto difiere de la amplitud elegida inicialmente para realizar los videos. Por esta razón, para las simulaciones teóricas se seleccionó este ángulo como valor a utilizar y parámetro del movimiento.

Teniendo en cuenta que los factores que intervienen en la oscilación del péndulo son la amplitud, la longitud de la cuerda y la aceleración de gravedad, se realiza una simulación teórica $^8$  aprovechando que, cuando los ángulos son pequeños (Ver  $\mathbf{Eq}\ 1$ ), el movimiento es análogo al movimiento armónico simple y, por ende se puede utilizar:

$$\theta = A\cos(\omega t),\tag{6}$$

de allí derivamos las funciones de velocidad angular:

$$\dot{\theta} = -A\omega sen(\omega t),\tag{7}$$

y aceleración angular del movimiento:

$$\ddot{\theta} = -A\omega^2 \cos(\omega t). \tag{8}$$

Igualmente, se halló el periodo presente en el movimiento utilizando:

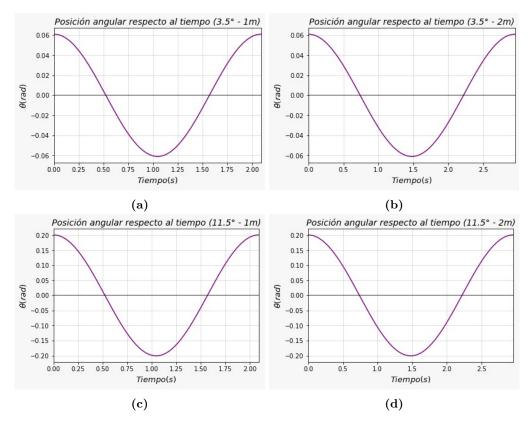
$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$
 (9)

y la aceleración de gravedad promedio obtenida de los datos experimentales (ver  $\mathbf{Eq} 4$ ), lo cual resultó en dos valores por cada longitud evaluada:

$$T_{1m} = 2.09s \; ; \; T_{2m} = 2.96s.$$
 (10)

Asímismo, se graficaron los componentes especificados para las oscilaciones:

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Código: Péndulo con Ángulo Pequeño.ipynb (Ver Sección 1.2. Simulación Teórica)



**Figura 4:** Datos teóricos de ángulos pequeños. Las figuras representan el cambio de posición angular respecto al tiempo. Ángulo: 3°, cuerda: 1m, masa: 300g (4a). Ángulo: 3°, cuerda: 2m, masa 600g (4b). Ángulo: 11.5°, cuerda: 1m, masa 300g (4c). Ángulo: 11.5°, cuerda: 2m, masa 600g (4d). De igual manera, se conserva la independencia del periodo sobre el ángulo y la masa del objeto oscilante.

Finalmente, se compararon los valores obtenidos del análisis teórico y del experimental encontrando el porcentanje de error sobre el valor del periodo para cada longitud de la cuerda, haciendo uso de la fórmula:

$$\frac{|Valor\ experimental - Valor\ teorico|}{Valor\ teorico} *100, \tag{11}$$

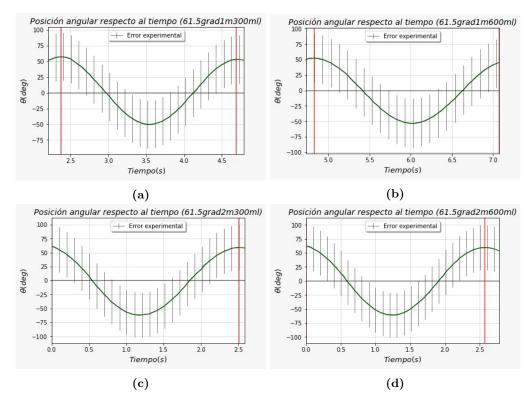
dando como porcentaje de error para los periodos:

$$P.Error_{1m} = 5.26\%$$
;  $P.Error_{2m} = 5.4\%$ . (12)

## 3.2. Ángulos grandes

#### 3.2.1. Análisis de los Datos Experimentales

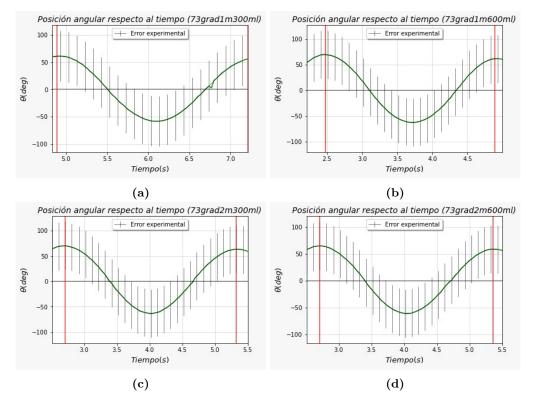
Empleando los parámetros iniciales se variaron unicamente los ángulos tomados para la amplitud. Se utilizó la misma función del análisis de los datos experimentales de ángulos pequeños<sup>9</sup> para ángulos grandes. A diferencia del comportamiento con ángulos pequeños, en este movimiento sí interviene la amplitud de una forma significativa en el periodo de oscilación<sup>10</sup>. Teniendo en cuenta esto, se obtiene:



**Figura 5:** Datos experimentales de amplitud 61,5°. Las figuras representan el cambio de posición angular respecto al tiempo. Ángulo: 61.5°, cuerda: 1m, masa: 300g; dió como resultado un periodo T=2,3s y una gravedad  $g=7,46\frac{m}{s^2}$  (5a). Ángulo: 61.5°, cuerda: 1m, masa 600g; dió como resultado un periodo T=2,2s y una gravedad  $g=8,16\frac{m}{s^2}$  (5b). Ángulo: 61.5°, cuerda: 2m, masa 300g; dió como resultado un periodo T=2,5s y una gravedad  $g=12,63\frac{m}{s^2}$  (5c). Ángulo: 61.5°, cuerda: 2m, masa 600g; dió como resultado un periodo T=2,6s y una gravedad  $g=11,68\frac{m}{s^2}$  (5d).

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Código: analisis.py

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Código: Péndulo con Ángulo Grande.ipynb (Ver Sección 1.1. Análisis de los Datos Experimentales)



**Figura 6:** Datos experimentales de amplitud 73°. Las figuras representan el cambio de posición angular respecto al tiempo. Ángulo: 73°, cuerda: 1m, masa: 300g; dió como resultado un periodo T=2,3s y una gravedad  $g=7,46\frac{m}{s^2}$  (6a). Ángulo: 73°, cuerda: 1m, masa 600g; dió como resultado un periodo T=2,4s y una gravedad  $g=6,85\frac{m}{s^2}$  (6b). Ángulo: 73°, cuerda: 2m, masa 300g; dió como resultado un periodo T=2,6s y una gravedad  $g=11,68\frac{m}{s^2}$  (6c). Ángulo: 73°, cuerda: 2m, masa 600g; dió como resultado un periodo T=2,7s y una gravedad  $g=10,83\frac{m}{s^2}$  (6d).

Finalmente, considerando la independencia del periodo unicamente sobre la masa del objeto, se calcula el periodo para cada ángulo de amplitud y longitud de cuerda:

$$T_{61.5^{\circ}1m} = 2.2s \; ; \; T_{61.5^{\circ}2m} = 2.6s \; ; \; T_{73^{\circ}1m} = 2.3s \; ; \; T_{73^{\circ}2m} = 2.7s.$$
 (13)

Del mismo modo, se promediaron las aceleraciones de gravedad originando un solo valor promedio de todos los casos experimentales para ángulos grandes, lo que dió como resultado:

$$g = 9.59 \frac{m}{s^2}. (14)$$

Si se compara este resultado con el valor de la gravedad comunmente utilizado  $\approx 9.8$ , la diferencia porcentual es de:

Gravedad experimental ángulos grandes vs gravedad común = 
$$2.4\%$$
 (15)

#### 3.2.2. Simulación Teórica

A pesar de que, en este caso, se tiene un movimiento cuya aceleración varía en el tiempo, se puede reducir dicha variación a intervalos suficientemente pequeños como para considerar una aceleración que se aproxima a ser constante. De este modo, se hace una analogía con el movimiento uniformemente acelerado, lo cual permite utilizar:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$
  $y$   $\theta_f = \theta_0 + \omega t + \alpha \frac{t^2}{2}$ , (16)

para calcular la velocidad angular y la posición angular en cada instante de tiempo teniendo en cuenta que la aceleración está dada por:

$$\alpha = -\frac{gsen(\theta)}{L}.\tag{17}$$

Empleando este razonamiento, se realizó la simulación teórica en Jupyter Lab<sup>11</sup> utilizando el periodo promedio de cada uno, se obtienen los comportamientos en la posición angular (ver **Figura** 7 y 8).

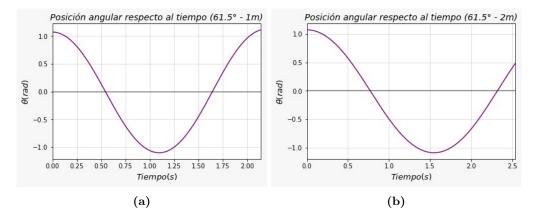
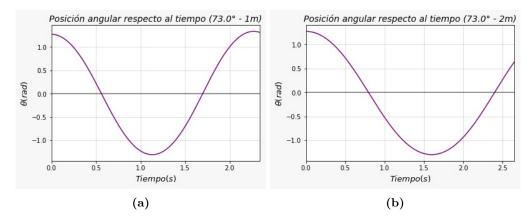


Figura 7: Datos teóricos de ángulos grandes. Las figuras representan el cambio de posición angular respecto al tiempo. Ángulo: 61.5°, cuerda: 1m (7a). Ángulo: 61.5°, cuerda: 2m (7b). Se visualiza que para este caso, el periodo sí depende de la amplitud del ángulo pero se mantiene independiente sobre la masa del objeto oscilante.

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Código: Péndulo con Ángulo Grande.ipynb (Ver Sección 1.2. Simulación Teórica)



**Figura 8:** Ángulo: 73°, cuerda: 1m(8a). Ángulo: 73°, cuerda: 2m(8b). Se visualiza que para este caso, el periodo sí depende de la amplitud del ángulo pero se mantiene independiente sobre la masa del objeto oscilante.

El periodo de cada caso experimental es un parámetro para la simulación teórica pues, de lo contrario, tendríamos una sumatoria infinita que, por cuestiones prácticas se evitó utilizar. Por tanto, los únicos datos extraídos teóricamente son la posición angular, la velocidad angular y la aceleración angular.

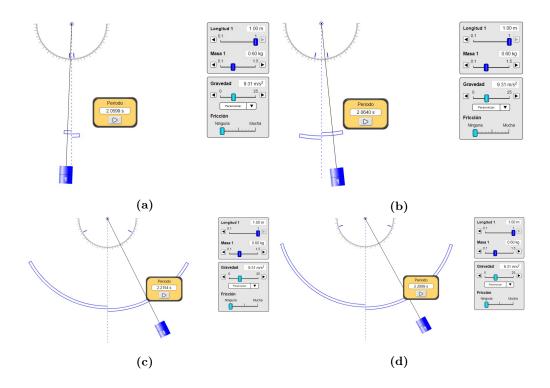
#### 3.3. Simulación Phet Colorado

Posterior al análisis individual de los movimientos, se procedió a unificar el valor de la aceleración de gravedad, promediando el resultado de ambos casos: ángulos pequeños (ver **Eq** 4) y ángulos grandes (ver **Eq** 14), obteniéndose:

$$g = 9.31 \frac{m}{s^2}. (18)$$

Partiendo de este valor, se utilizó el laboratorio del simulador de la Universidad de Colorado<sup>12</sup> para contrastar las características del movimiento tanto teórico como experimental. Se configuraron las expresiones dadas por el simulador seleccionando los parámetros iniciales y aplicando la gravedad extraída experimentalmente, sin dejar de tener en cuenta que el valor máximo de longitud de la cuerda es 1m. A partir de lo anterior, se tiene:

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Simulador Phet Colorado: Pendulum Lab



**Figura 9:** Gráficas de la simulación de Colorado con 1m de cuerda. Las figuras representan un periodo de oscilación del péndulo. Ángulo:  $3.5^{\circ}$ , T = 2.1s (9a). Ángulo:  $11.5^{\circ}$ , T = 2.1s (9b). Ángulo: 61.5, T = 2.3s (9c). Ángulo:  $73^{\circ}$ , T = 2.3s (9d). Los valores del periodo fueron aproximados una décima.

Se evidencia que la diferencia entre periodos de los movimientos con ángulos pequeños es, en este marco de referencia, insignificante, así como se denotó en los datos y en las simulaciones del proyecto; contrario del caso entre el movimiento con ángulos grandes ya que en este, se aprecia una diferencia significativa y debe ser tomada en cuenta por separado.

Consiguiente a ello, se compararon los valores del periodo de la simulación de Colorado (ver **Figura 9**) con las estimaciones de los datos experimentales (ver **Eq 3** y 13). Generando una diferencia porcentual de:

$$4.76\%$$
 para  $3.5^{\circ} - 1m$ ,  $33.3\%$  para  $11.5^{\circ} - 1m$ ,  $0\%$  para  $61.5^{\circ} - 1m$   $0\%$  para  $73^{\circ} - 1m$ . (19)

# 4. Conclusiones y Recomendaciones

Generalmente el valor de la gravedad se toma como un valor absoluto, sin embargo, la experiencia en esta práctica ha permitido encontrar tanto experimental como teóricamente un valor local de la aceleración de la gravedad para la ciudad de Bucaramanga. Promoviendo la ciencia en casa y al

mismo tiempo comprobando teorías científicas asociadas al movimiento pendular. De esta manera se concluye que:

- El valor numérico de la aceleración de la gravedad para la ciudad de Bucaramanga, en este proyecto y bajo las condiciones establecidas, resultó ser equivalente a  $9,31\frac{m}{c^2}$ , (ver **Eq** 18).
- Los ángulos considerados pegueños para los que aplica la relación:  $sen(\theta) \approx \theta$  con un error menor al 3%, se encuentran en el intervalo de [0°, 24°], los ángulos en grados, por encima de este intervalo, se consideran grandes y no aplica la relación anteriormente mencionada (ver **Figura 2**)
- Hubo errores sistemáticos que estuvieron presente durante todo el proceso experimental debido a que se realizaron bajo condiciones caseras. Entre las que se encuentran: no garantizar que el metro, con el que se hacen las medidas de la altura que posee la cuerda, tiene valores correctos; tomar los ángulos de oscilación con un transportador que no fue nuevamente calibrado para garantizar que la medida de sus ángulos estuviera ubicada donde es, que la cámara del dispositivo movil tuviera problemas para enfocar el péndulo y tener un error de paralaje en las medidas.
- Es importante tener en cuenta en la elaboración del proyecto que para que una medida sea exacta es necesario que, a su vez, sea precisa, sin embargo, no todas las medidas que son precisas son fundamentalmente exactas.
- El periodo pendular para ángulos pequeños es idependiente del ángulo empleado y de la masa del objeto (ver **Figura** 3). Por tanto depende, en este caso, únicamente de la longitud de la cuerda.
- El periodo pendular para ángulos grandes es idependiente únicamente de la masa del objeto (ver Figura 5 y 6). Por tanto depende, en este caso, tanto de la longitud de la cuerda como de la amplitud en cuestión.
- Como se observó en todas las gráficas del artículo, la masa del objeto oscilante no interviene en ningún resultado analizado de las variables asociadas al movimiento (ver **Figura** 3 y 6).
- El porcentaje de error entre el valor obtenido de la gravedad experimental con ángulos pequeños y el valor común de la gravedad en este caso = 7.8 % (ver Eq 5).
- El porcentaje de error entre el valor obtenido de la gravedad experimental con ángulos grandes y el valor común tomado para la gravedad en este caso = 2.4 % (ver Eq 15).
- Se recomienda crear un repositorio en GitHub en el que se almacene toda la información en video y en código obtenida puesto que permite una organización efectiva y un control de todo lo que se ha realizado<sup>13</sup>.

 $<sup>^{13}</sup>$ Repositorio: 02 Péndulo

## 5. Referencias

- [1] Christiaan Huygens. Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae. Huygens, Paris, 1673.
- [2] Moreno Corral. Primeras mediciones precisas de la gravedad hechas en méxico. Revista mexicana de física E, 60(1):27, 2014.
- [3] L. A. Núñez and H. Rago. Estimando la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo. Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Septiembre 2021.