

Estimación de la fuerza de fricción en la caída de una servilleta

María S. Cárdenas, Nicolas Mantilla y Sharith D. Pinzón *

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, Colombia

25 de agosto de 2021

Índice

1	Introducción	2
2	Metodología	2
3	El experimento y los resultados	4
3.1	Servilleta Comprimida	4
3.2	Servilleta Extendida	7
3.3	Comparación Movimientos	9
4	Conclusiones y Recomendaciones	11
5	Referencias	12

Resumen

La física clásica establece que, en ausencia de fricción, todos los cuerpos caen al mismo tiempo desde una misma altura independientemente de sus masas. Sin embargo, tras conocer que esto corresponde a condiciones ideales, este artículo presenta la estimación, con elementos caseros, de la influencia de rozamiento del aire en los mismos objetos, una servilleta extendida y otra comprimida, evaluando la caída de estas en más de 10 oportunidades bajo circunstancias idénticas y utilizando programas que permiten cuantificar y graficar su comportamiento. Ante ello, los resultados obtenidos fueron comparados con sus respectivas simulaciones teóricas con el fin de analizar su exactitud y aproximar la constante de fricción de cada caso. De igual forma, se relacionaron ambas prácticas experimentales evidenciando el gran efecto que genera el medio en función de la geometría de los cuerpos. Asimismo, a pesar de no contar con tecnologías avanzadas ni con espacios ideales, se halló para el experimento la constante de fricción y se estimó la fuerza de rozamiento que es el objetivo de este informe.

* sofiacardenas10@outlook.com, nicomantimol1@gmail.com, pinzonqsharith@gmail.com

1. Introducción

Desde siempre, la caída de los cuerpos ha sido tema de interés para los físicos. En la antigüedad, con Aristóteles, se creía que los cuerpos pesados caían más rápido que los livianos¹; posteriormente, revolucionando la concepción del fenómeno, Galileo Galilei, tras la mítica historia en la que dejaba caer distintos cuerpos desde la Torre de Pisa, concluyó que, sin resistencia del medio, todos los cuerpos caen al tiempo desde la misma altura independientemente de sus masas².

Hoy se sabe que Galileo estaba en lo cierto, sin embargo, las condiciones establecidas son ideales, se pide despreciar el rozamiento del aire, lo que, cotidianamente, está fuera del alcance. El propósito de esta práctica es el de analizar el comportamiento de la caída de dos servilletas iguales dispuestas en formas distintas, una comprimida en forma de pelota y la otra extendida, realizado bajo las mismas condiciones y en un ambiente claramente no ideal, con el objetivo de determinar los datos que son afectados por el aspecto del objeto y, mediante la comparación con sus simulaciones teóricas, estimar la influencia del medio a través del valor de la fuerza de fricción.

En esta experiencia se pretende encontrar la constante k de fricción y la fuerza de fricción a través de un experimento con elementos caseros y montajes totalmente reproducibles. En la Sección 2 se discute la metodología empleada, mientras que en la Sección 3 se presenta el experimento y los resultados del mismo. Se finaliza el artículo con las conclusiones y recomendaciones en la Sección 4.

2. Metodología



Figura 1: Montaje experimental

¹Se puede consultar en: *De Tales a Aristóteles*. Capítulo VIII [1]

²*Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. [2]

El análisis de la caída de dos servilletas, una comprimida y una extendida, se realizó bajo las mismas condiciones y a partir de dos enfoques, uno teórico y otro experimental.

Para el montaje de esta práctica (ver Fig 1) se utilizó: dos servilletas de $23 \times 13,5 \text{ cm}$ y masa de $0,77 \text{ g}$; una cinta métrica; una hoja de papel de $21,59 \times 27,94 \text{ cm}$; y la cámara de un dispositivo móvil. En cuanto a los parámetros, se estableció una altura de $1,27 \text{ m}$ puesto que, tras reiterados intentos³ con diversas alturas, se concluyó que esta era la más óptima para obtener suficientes intervalos de tiempo que, a su vez, brindaran datos con la mayor precisión posible entre ellos. La cinta métrica y la hoja de papel son una referencia de calibración para el posterior análisis de los experimentos en Tracker. De igual forma, para la ejecución de los videos se tuvo en cuenta que las servilletas hicieran contraste con el fondo y con el piso en el que aterrizaron, y que, además, se desarrollara en un espacio aislado de fuertes corrientes de aire que influyeran de manera significativa con el trayecto de los dos objetos.

Justificadas las condiciones anteriores, se hicieron más de 10 grabaciones de la caída libre de las servilletas, con el fin de asegurar la exactitud de los datos recogidos para cada caso experimental. Del mismo modo, para cuantificar y modelar computacionalmente las variables que actuaban en el movimiento, es decir: el tiempo, la altura, la velocidad y la aceleración, se empleó el uso del programa Tracker⁴, un software libre diseñado para el análisis del movimiento en video, el cual permitió que, de manera más eficiente que de forma manual, se obtuvieran los valores de tales variables. Las tablas extraídas del análisis en Tracker se exportaron en Excel, una hoja de cálculo, que facilita la realización del promedio y la desviación cuadrática media de los resultados, adquiriendo así los datos experimentales finales a tener en cuenta para su valoración en el informe.

Por otro lado, se hizo una simulación teórica en Google Colab⁵, una herramienta de edición de código tipo Jupyter Notebook, basado en el lenguaje de programación Python, en las que se tuvo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento y las ecuaciones establecidas en el documento dispuesto en la primera asignación⁶ para la caída libre con y sin fricción. Además de esto, en dicha aplicación web se compararon mediante gráficas los resultados teóricos y experimentales para cada servilleta. En el caso de la servilleta extendida, en donde se tiene en cuenta la fricción, la simulación teórica se hizo a partir de una aproximación al tiempo de caída promedio de los videos analizados, variando la constante k hasta obtener un tiempo de caída similar al experimental.

Respecto a la servilleta comprimida, la constante k fue estimada mediante el uso de la ecuación de aceleración de la caída de un cuerpo con fricción apreciable, presentada en el documento antes mencionado "*Estimación de fricción en fluidos*":

$$a = g - \frac{k}{m}v \quad (1)$$

despejando k y reemplazando los valores a por la aceleración promedio y v por la velocidad promedio. Además, se obtuvo el porcentaje de error con la fórmula. Por su parte, la constante k para la caída de la servilleta extendida se estimó por medio del análisis de la variación de la misma en el momento de la realización del modelado teórico. Para lo anterior, únicamente se usó el lenguaje de programación

³Servilleta Comprimida: [Recursos no utilizados](#) - Servilleta Extendida: [Recursos no utilizados](#)

⁴Página oficial: [Tracker](#)

⁵Página oficial: [Google Colab](#)

⁶[Estimación de fricción en fluidos](#)

Python dado que contenía todas las herramientas necesarias para hacer los códigos y las gráficas correspondientes a las simulaciones, por ello, no fue necesario incorporar otros programas/lenguajes como Máxima o C++.

A través de los programas mencionados anteriormente y después de haber estimado la constante de rozamiento con los mismos, se halla la fuerza de fricción a partir de la Ecuación 1, despejándola para obtener la sumatoria de fuerzas del movimiento:

$$ma = mg - kv \quad (2)$$

y se obtiene así:

$$F_f = -kv \quad (3)$$

la fórmula empleada para estimar la fuerza de fricción que actúa en la caída de los dos objetos. De esta manera, se hizo la comparación mediante las gráficas de ambas fuerzas de fricción halladas para cada caso, realizando su respectivo análisis en la Sección 3.

Finalmente, se aclara que los programas utilizados fueron útiles y esenciales para la realización del experimento, sin embargo, no ofrecen una precisión completamente ideal, por lo cual puede afectar los resultados de las prácticas si no se realiza de manera correcta.

3. El experimento y los resultados

3.1. Servilleta Comprimida

Tras examinar los videos en Tracker, los datos arrojados en tablas fueron organizados en una hoja de cálculo de Excel⁷ para realizar un promedio de las variables y, de esta manera, lograr los datos más precisos a comparar con el modelo teórico:

Cuadro 1: Servilleta comprimida. Tabla obtenida de promediar los datos experimentales de cada variable, arrojados por Tracker.

t	y	v	a
0	1.278692308	0	9.502576923
0.067	1.2112	1.177466667	9.5858
0.1	1.162266667	1.5578	9.123133333
0.167	1.063533333	2.0294	9.266133333
0.2	0.982066667	2.3774	9.059316667
0.267	0.842266667	2.7804	9.0356
0.334	0.6174	2.7634	9.623866667
0.367	0.523066667	2.6022	9.215333333
0.434	0.3814	2.876933333	9.480866667
0.468	0.258066667	3.179066667	9.8639
0.501	0.141200667	4.061976429	9.375652692

⁷Datos recogidos en Excel

Por su parte, suponiendo un movimiento ideal sin fricción del aire, en Google Colab se simuló teóricamente el movimiento del cuerpo para adquirir los datos⁸. De esta simulación, se obtuvieron las siguientes gráficas:

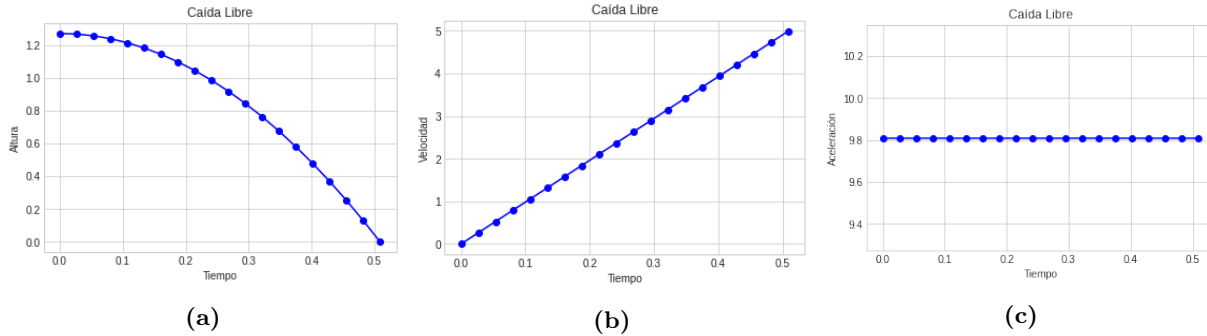


Figura 2: Servilleta comprimida. Las figuras representan la altura, velocidad y aceleración del modelo teórico en función del tiempo, en donde se utiliza el parámetro inicial de altura para simular el movimiento. Se evidencia, como era de esperarse, una altura con descenso semiparabólico, una velocidad lineal y una aceleración constante igual a la gravedad ($9,8m/s^2$).

Posterior a la simulación, se importaron los datos adquiridos anteriormente y se emplearon para realizar la comparación gráfica de los dos movimientos, es decir del experimental y el teórico:

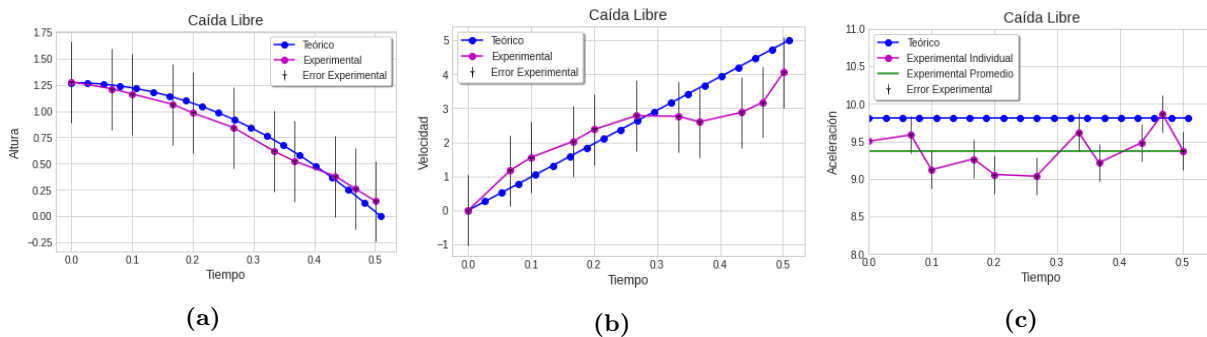


Figura 3: Servilleta comprimida. Las figuras representan la altura 3a, velocidad 3b y aceleración 3c en función del tiempo del modelo teórico y de los datos experimentales, obtenidos y promediados en Tracker y Excel, junto al error experimental aproximado calculado con la desviación cuadrática media. Se evidencia que el movimiento del objeto presenta un comportamiento similar al estimado teóricamente, lo que indica que el montaje experimental es válido y confiable.

De igual forma, es relevante mencionar que para hallar una estimación del error experimental de las tres variables que actúan en la práctica fue necesario implementar la fórmula de la desviación cuadrática media. De manera que se expresa la fórmula:

⁸Código simulación teórica

$$D\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N} \quad (4)$$

Para dar una mayor visibilidad a lo que se debe realizar con la fórmula es importante remitirse al enlace que dirige a la plantilla de excel.⁹

Ahora, al observar cierta diferencia entre los datos experimentales y los datos teóricos, se puede hacer uso de la fórmula para caída libre con fricción apreciable, lo que justifica, de esta manera, la discrepancia respecto a la simulación de la misma. De forma que se hace uso de los datos promedios dispuestos, despejando y hallando el valor de la constante de fricción en Google Colab con la ecuación:

$$k = (g - a) * \frac{m}{v} \quad (5)$$

Dando como resultado:

$$k = 0,000144804985395906 Kg/s \quad (6)$$

Esta constante permite hallar la fuerza de fricción para la caída del objeto en cada intervalo de tiempo, obteniendo gráficamente:

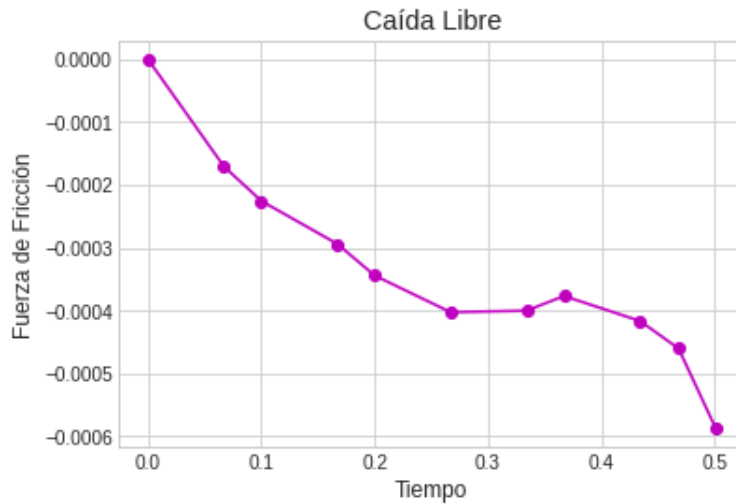


Figura 4: Servilleta comprimida. Fuerza de fricción en función del tiempo. Los valores negativos en el eje y se deben a que la dirección de la fuerza de fricción es opuesta al movimiento del objeto.

Además, se expresó la diferencia de aceleraciones con la fórmula de porcentaje de error:

⁹Excel-Desviación cuadrática media: [enlace a excel](#).

$$\frac{|Valor\ experimental - Valor\ teorico|}{Valor\ teorico} * 100 \quad (7)$$

Dando como resultado:

$$Porcentaje\ Error = 4,42759743119264\% \quad (8)$$

3.2. Servilleta Extendida

Tras analizar varias versiones de los videos en Tracker, los datos arrojados en tablas fueron recogidos en una hoja de cálculo de Excel¹⁰ para realizar un promedio y obtener los mejores datos a comparar con el modelo teórico:

Cuadro 2: Servilleta extendida. Tabla obtenida de promediar los datos experimentales de cada variable, arrojados por Tracker.

t	y	v	a
0	1.195	0	6.28725
0.067	1.1673	0.5389	6.9362
0.167	1.086	0.7934	1.0594
0.2	1.0571	0.9319	0.8737
0.234	1.0239	0.8577	0.8958
0.301	0.9647	0.9788	0.9624
0.367	0.9046	0.9946	1.855
0.401	0.8678	1.0456	1.705
0.468	0.7996	1.0833	0.51
0.501	0.7624	1.0479	0.5583
0.568	0.6927	1.0783	0.5542
0.601	0.6576	1.0494	0.611
0.668	0.5841	1.1041	0.45
0.701	0.549	1.0882	0.422
0.768	0.4726	1.1239	0.4431
0.801	0.4367	1.1016	0.4505
0.869	0.3611	1.1272	0.685575
0.902	0.3236	1.15125	0.4349125
1.002	0.3041428571	1.123714286	0.6877142857
1.136	0.1594285714	1.109214286	0.5332785714

Por su parte, en Google Colab se simuló teóricamente el movimiento del cuerpo para obtener los datos de un movimiento con fricción apreciable, variando la constante k , cuyo hallazgo era

¹⁰[Datos recogidos en Excel](#)

el objetivo, hasta dar con un tiempo de vuelo similar al hallado experimentalmente¹¹. De esta simulación, se obtuvieron las siguientes gráficas:

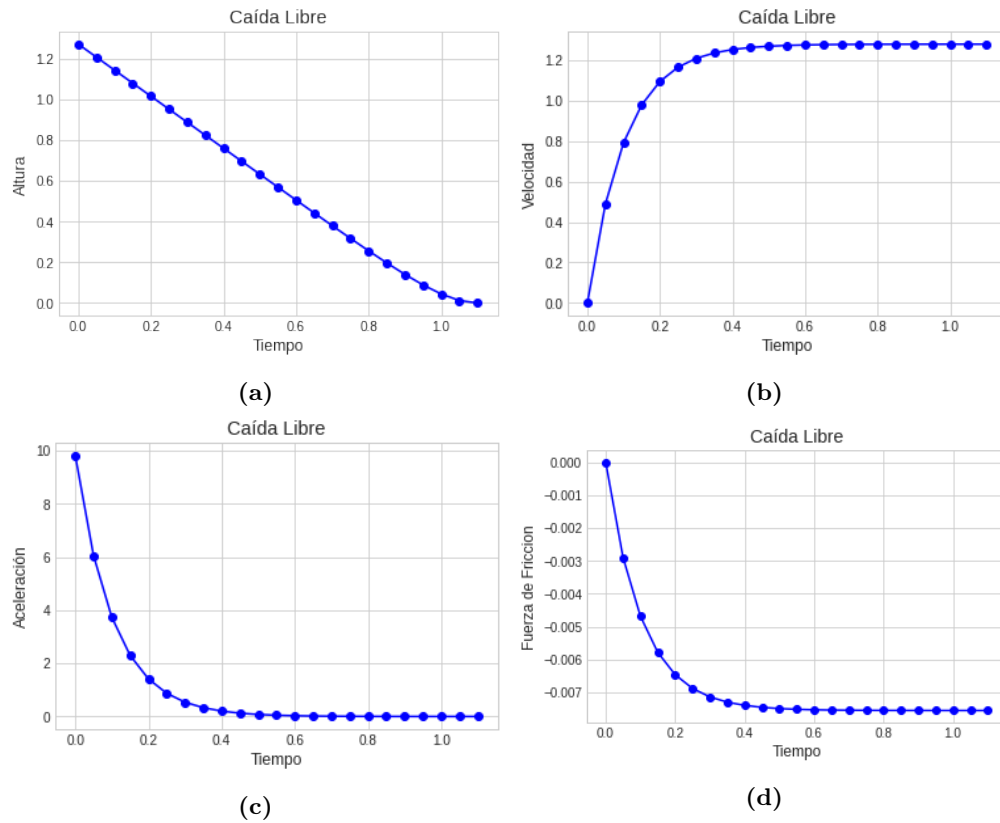


Figura 5: Servilleta extendida. Las figuras representan la altura 5a, velocidad 5b, aceleración 5c y fuerza de fricción 5d en función del tiempo del modelo teórico. Debido a la forma de la servilleta, su área transversal en contacto con el aire es mayor, por lo que la fuerza de fricción incide de manera significativa en la caída del objeto, haciendo que su comportamiento se vea afectado. En base a esto, se utilizó el parámetro inicial de la altura empleada y se varió k hasta coincidir con el tiempo de vuelo experimental para simular el movimiento y su comportamiento. Se evidencia una altura descendente lineal, una velocidad creciente hasta que tiende a ser constante, una aceleración decreciente que al cabo de un tiempo tiende a cero y la fuerza de fricción, al depender de la velocidad, toma valores constantes al final de la caída.

Posterior a la simulación, se importaron los datos y se utilizaron para realizar la comparación gráfica de los dos movimientos:

¹¹[Código simulación teórica](#)

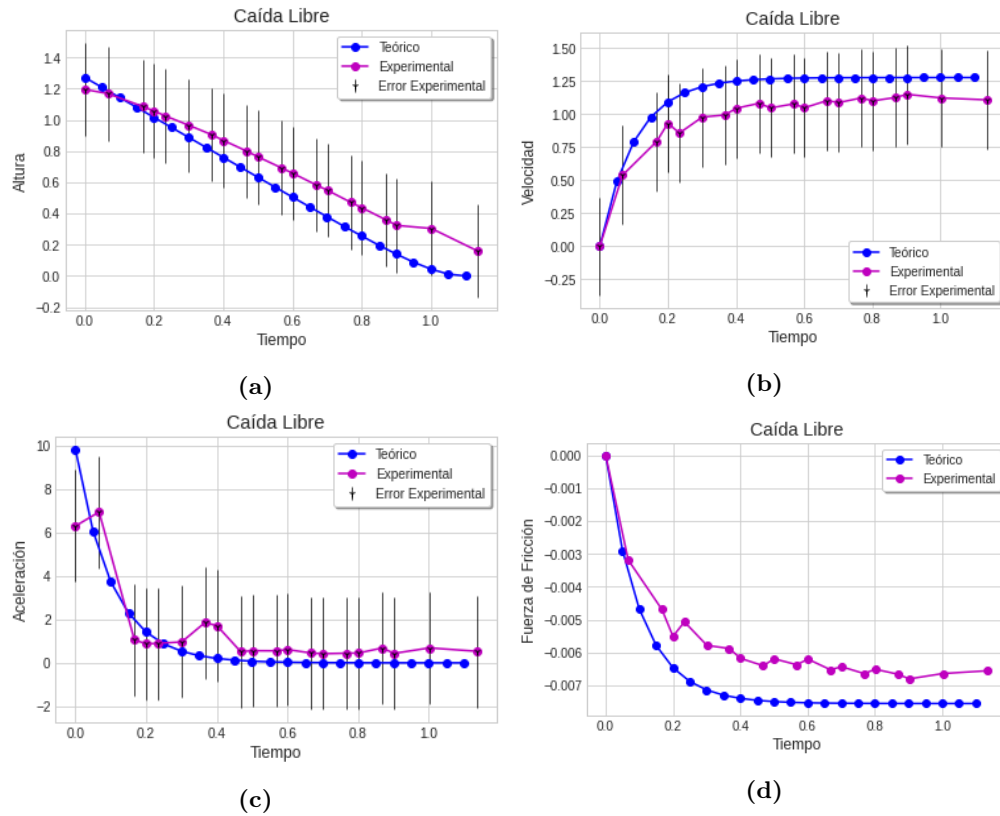


Figura 6: Servilleta extendida. Altura 6a, velocidad 6b, aceleración 6c y fuerza de fricción 6d en función del tiempo del modelo teórico y de los datos experimentales obtenidos y promediados en Tracker y Excel, junto al error experimental aproximado cuya fórmula fue mencionada anteriormente (4). Se evidencia que el movimiento del objeto presenta un comportamiento similar al calculado teóricamente pese a no ser un experimento realizado con condiciones ideales.

Como fue mencionado anteriormente, la constante k , que indica la influencia del medio sobre la servilleta y con la que se obtiene la fuerza de fricción, se halló al iterar sus valores, lo anterior con el objetivo de que la simulación tuviera un tiempo de caída similar al experimental, por tanto, se obtuvo:

$$k = 0,00591 Kg/s \quad (9)$$

3.3. Comparación Movimientos

En Google Colab se importaron los datos experimentales de ambas servilletas para realizar una comparación entre los datos y poder analizar los movimientos, obteniendo gráficamente:

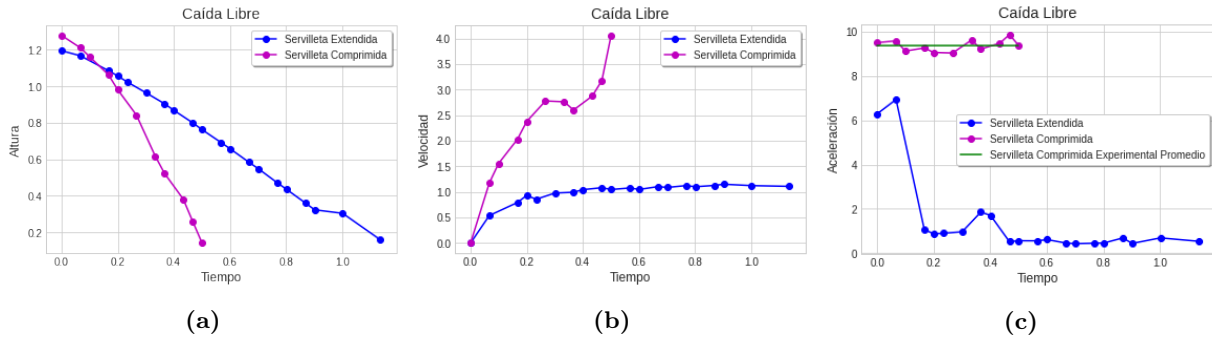


Figura 7: Altura 7a, Velocidad 7b y Aceleración 7c en función del tiempo de los movimientos experimentales de las servilletas comprimida y extendida. Los objetos empleados presentan una geometría diferente a pesar de tener la misma masa, por lo que, se aprecia la diferencia en el comportamiento de los objetos y se evidencia cómo incide la resistencia del aire según la geometría de la servilleta.

En cuanto a la F_f se utilizó la ecuación 3, donde k es el valor encontrado que indica la constante de dicha fuerza, y v la velocidad en cada intervalo de tiempo para generar la siguiente gráfica:

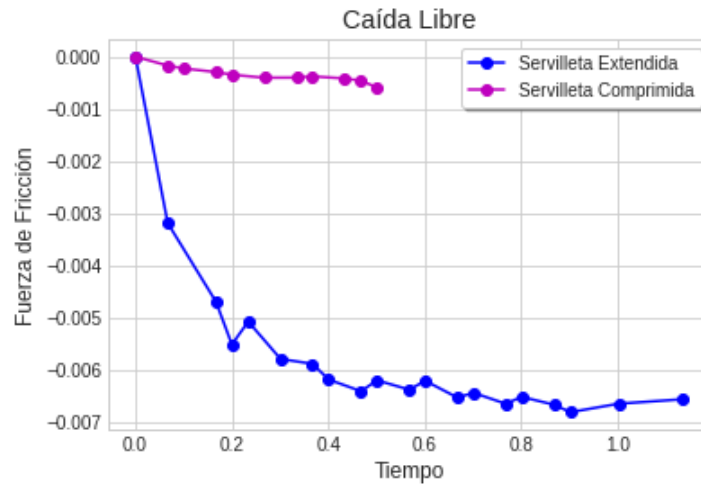


Figura 8: Para las fuerzas de fricción de los movimientos experimentales se grafican los valores de la fuerza de fricción en función del tiempo. Los valores negativos que se evidencian en el eje y se deben a que la dirección de la fuerza de fricción es opuesta al movimiento del objeto.

De igual forma, se evaluó la razón entre el valor de las fricciones experimentales de ambos casos, tal como se denota:

$$\frac{F_f \text{ de servilleta extendida}}{F_f \text{ de servilleta comprimida}} \quad (10)$$

Teniendo como resultado:

$$\text{Razon entre fricciones} = 17,078059817662773. \quad (11)$$

4. Conclusiones y Recomendaciones

La caída libre de una servilleta evaluada de forma comprimida y extendida genera que se comprueben teorías científicas que el hombre da por verdaderas, y de las cuales ingenia maneras de acreditar su veracidad; en efecto, este experimento que está a favor de realizar ciencia en casa, permite resaltar cómo la fuerza de fricción puede afectar el movimiento de las servilletas, provocando que, respecto al modelo teórico, los valores que toman las variables se vean alterados.

Por ello esta práctica radica en constatar diversos aspectos, tales como: tras ser lanzadas de una altura de 1,27 m, la servilleta comprimida, cae en un menor tiempo que la servilleta extendida (Ver Fig 7), lo que se justifica bajo el hecho de que esta última presenta un coeficiente de fricción superior, haciendo que sea influenciada de mayor forma por el medio. En cuanto al modelo teórico del primer caso mencionado, está sustentado bajo condiciones ideales en donde el efecto del ambiente es despreciable y por tanto el movimiento de las servilletas no tiene influencias externas, cosa que al ser un experimento casero no sucede, puesto que la resistencia del aire influye en el trayecto de los objetos de estudio.

Asimismo, es claro que la fricción del aire, al no tratarse de experimentos con una precisión idónea, actuará frenando a las dos servilletas, siendo la extendida la más afectada por dicha fuerza disipativa, como se ha denotado en la totalidad del artículo.

Respecto a lo anterior también es importante concluir que:

- Es requerido que se mantengan las condiciones iniciales, mencionadas en la sección 2, en las que se planteó el experimento, ya que, un cambio puede llegar a interferir de manera determinante en los resultados de la práctica puesto que habrán alteraciones no sólo en el tiempo de caída de las servilletas, sino también en el valor que acoge la constante de fricción de los objetos, pues conforme se visualizó en los valores de K: [Servilleta Comprimida](#), [Servilleta Extendida](#), entre más sea la influencia del aire, mayor será el valor de dicha constante. Es importante seguir los pasos para ejecutar el experimento y hacerlo en más de 10 ocasiones para cada caso, obteniendo así valores que brinden una información precisa.
- El montaje experimental realizado para la práctica cuenta con condiciones que permiten la confiabilidad de los resultados, ya que se evaluó su efectividad comparando los datos de la aceleración del modelo experimental con el modelo teórico de la servilleta comprimida (Ver Eq 8).
- Es recomendable realizar los promedios de las tablas obtenidas en Tracker para cada caso experimental, puesto que esta acción permitirá que los datos de las prácticas realizadas sean análogas a las simulaciones teóricas, tal como se evidencian en las tablas 1 y 2.

- Se recomienda tener dispuesto en drive una carpeta donde se adjunten la recolección de datos para cada caso experimental y teórico, así como se realizó para este proyecto.¹²
- Los resultados obtenidos arrojan que es improbable que, al ser un experimento casero y bajo condiciones poco ideales, la fuerza de fricción que el aire ejerce sobre las servilletas sea completamente despreciable (Ver Figs 3, 4 y 6). Tanto la servilleta comprimida como la extendida tienen una influencia por parte del medio, esto hace que cada una posea un coeficiente de fricción diferente.
- Es preciso recordar que los objetos de estudio presentan la misma masa, por lo que, la diferencia entre el tiempo de caída (Ver Fig 7a) y los coeficientes de fricción de las servilletas no se deben a este factor, sino a la geometría que presentan, ya que la fricción del aire genera una mayor resistencia en la servilleta lanzada de forma extendida.
- La fuerza de fricción presente en la caída de la servilleta estirada, es aproximadamente 17 veces la de la servilleta comprimida (Ver Eq 11) y se evidencia en la gráfica (Ver Fig 8).
- Para el caso de la servilleta extendida, la fuerza de fricción generada en su caída, al cabo de un tiempo, llega a equipararse al peso, lo que hace que: ambas fuerzas se cancelen, la aceleración sea despreciable y la velocidad tome valores constantes en los últimos intervalos de tiempo (Ver Fig 6b).
- La constante de fricción es un elemento clave al momento de cuantificar la fuerza de fricción, se puede evidenciar en la fórmula (Ver Eq 5) y en los efectos que produce (Ver Figs 3 y 6).
- Las herramientas empleadas durante el experimento demuestran ser útiles en cada tarea realizada con ellas. Sin embargo, para resultados más acertados es importante utilizar una serie de herramientas con mayor precisión que confirmen determinadamente que la teoría es válida para aplicaciones experimentales de la cotidianidad.
- Pese a ser un experimento artesanal, en donde las condiciones no están plenamente controladas, se obtienen resultados cercanos a las simulaciones teóricas (Ver Figs 2 y 5), evidenciando que con elementos caseros y programas gratuitos se puede demostrar la validez de teorías físicas.

5. Referencias

- [1] G. E. R. Lloyd. *De Tales a Aristóteles*. Eudeba, 1977. Chapter VIII.
- [2] G. Galilei. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Editora Nacional, 1981. 2ª Edición, Madrid, España.
- [3] L. A. Núñez and H. Rago. Estimando la fuerza de fricción en la caída de una servilleta. *Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander*, Mayo 2021.
- [4] Python.org. *Python 3.9.5 documentation*. Disponible en: <https://docs.python.org/3/>.

¹²Recolección de datos: [Drive](#).