Estimando la aceleración de gravedad mediante la oscilación de un péndulo

Luis A. Núñez y Héctor Rago
Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

24 de septiembre de 2021

Resumen

Presentamos una propuesta para estimar el valor de la aceleración de gravedad a partir de la medición del período de oscilación de un péndulo. Para ello, proponemos realizar el experimento con una masa oscilando con pequeñas amplitudes (por ejemplo, con un ángulo máximo de oscilación, $\theta_0 \approx 5^o$). Luego, procedemos a identificar de qué depende el período de oscilación del péndulo para cualquier amplitud (considere por ejemplo $\theta_0 \approx 30^o$, $\theta_0 \approx 45^o$ y $\theta_0 \approx 60^o$).

En ambos casos deberán comparar el experimento con las simulaciones, estimar los errores sistemáticos y la precisión de sus mediciones. Para determinar la precisión de la medición se recomienda realizar cada experimento al menos 10 veces.

Para presentar los resultados de los experimentos, deberá entregar un reporte técnico de la experiencia, los archivos de datos de las mediciones, los códigos y una presentación de un maximo 6 láminas donde narre la experiencia.

1. El problema

Nuestro problema será estimar el valor de la aceleración de gravedad y la dependencia del período de oscilación de un péndulo genérico.

A partir de la oscilación de un péndulo estimaremos el valor de la aceleración de gravedad y determinaremos bajo cuáles condiciones se puede realizar esta estimación. En el caso mas general investigaremos ¿cuáles variables físicas están relacionadas con el período de oscilación del péndulo?

En esta propuesta queremos que Uds. aprendan a

- a estimar la aceleración de gravedad y que la comparen con los valores que siempre hemos utilizamos $\approx 9{,}8$ m/s^2
- determinar la dependencia del período de oscilación para una oscilación general del péndulo.
- estimar la precisión de sus medidas, así como también los errores sistemáticos.

- desarrollar un poco mas sus habilidades en programación y utilización del computador como herramienta de simulación de condiciones experimentales
- utilizar los simuladores que están disponibles en la red, en particular en el siguiente enlace https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_en.html

Un contexto general del uso del péndulo lo pueden encontrar en la wikipedia[1]. Hay historias muy bonitas de los relojes de péndulos que fueron inventados por Christiaan Huygens y quien se dio cuenta de un extraño fenómeno de "simpatía" entre el período de dos de sus recientemente inventados relojes (pueden consultar un minucioso estudio en [1] y un montón de videos en la red[2]).

En esta experiencia comprobaremos que, para pequeñas oscilaciones, se cumple que

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{cuando} \quad \theta_0 \ll 1 \text{ radian}\,, \tag{1}$$

mientras que, para un ángulo inicial θ_0 genérico, el período de oscilación se puede escribir como una serie infinita [2, 3]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \cdots\right)\,. \tag{2}$$

Donde L es el largo de la cuerda, θ_0 es el ángulo inicial y, para este caso (sin disipación) la amplitud de la oscilación y, finalmente g es el valor de la aceleración de gravedad.

Claramente, para el caso de pequeñas oscilaciones descrito en la ecuación (1) podemos despejar el valor de la aceleración de gravedad

$$g \approx \frac{4\pi^2 L}{T^2}\,, \tag{3}$$

y al medir el período T –conociendo el largo de la cuerda L– podemos estimar la aceleración de gravedad en Bucaramanga.

Con ese estimado de la aceleración de gravedad trataremos de verificar hasta que punto se cumple la segunda relación (2) que se discute en las referencias [2, 3].

2. ¿Qué deben hacer/entregar?

Para desarrollar esta experiencia Ud debe:

- Desarrollar un montaje experimental que les permita hacer las mediciones con *tracker*[4] [3]. El montaje debe garantizar que el experimento se pueda repetir bajo las mismas condiciones (ver figura 1 panel de la derecha) .
- Determinar hasta que ángulos es válida la aproximación de pequeñas amplitudes. Esto es $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, con un error de menos de un 3 %. Esto lo deberá realizar mediante un programa en MAXIMA o Python.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum#
[2] Pueden ver a https://www.flippingphysics.com/sympathetic-vibrations.html
[3] https://physlets.org/tracker/ y también https://www.compadre.org/osp/webdocs/Tools.cfm?t=Tracker

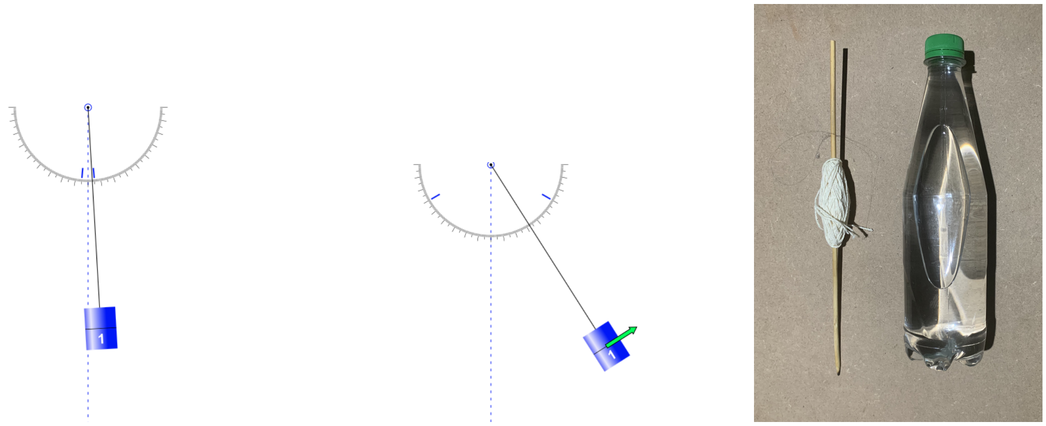

Figura 1: Tres péndulos. Izquierda con pequeñas amplitudes. Centro amplitud genérica. Derecha los “ingredientes” para realizar la experiencia en casa. Requiere una botella de agua potable ≈ 600 cm^3 y un rollo de cuerda.

- Realizar el experimento para pequeñas amplitudes unas 10 veces (ver figura 1 panel de la izquierda).
- A partir de las oscilaciones del péndulo con pequeñas amplitudes estimar el valor de la aceleración de gravedad. Comparar ese valor con el comúnmente utilizado de $\approx 9{,}8$ m/s^2.
- Realizar el experimento para cualesquieras amplitudes unas 10 veces (ver figura 1 panel del centro).
- Utilizar ese valor experimental de la aceleración de gravedad para estudiar el péndulo con cualquier amplitud. Determinar cual variable física está relacionada con el período del péndulo (ver figura 1 panel del centro).
- Comparar los valores de sus resultados experimentales y las simulaciones en MAXIMA/Python con el simulador de la Universidad de Colorado[4]
- Entregar:
  - un reporte técnico de la realización de los experimentos,
  - los archivos de datos de las mediciones que vengan reportados en el experimento,
  - los códigos de MAXIMA/Python que utilizó para simular los modelos teóricos,
  - una presentación donde se exponga el reporte.

[4] https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_en.html

3. El experimento

En este caso el experimento tendrá algunas variantes. Además de diseñar y utilizar un montaje experimental para realizar las experiencias, usaremos el simulador de la Universidad de Colorado. Realizaremos dos experiencias, una para pequeñas amplitudes y otra para grandes amplitudes.

Los ingredientes básicos para los montajes experimentales se muestran el panel de la derecha en la figura 1: una botella de agua potable (≈ 600 ml) y una cuerda que pueda se considerada *flexible, inextensible* y *sin masa*. Además deberá considerar un fondo que contraste con la botella para poder ser identificado fácilmente por *tracker*[5][4]. La masa colgará de la cuerda, oscilando alrededor de la vertical, tal y como se muestran en los paneles izquierdo y central de la misma figura 1.

3.1. Los escenarios experimentales

Deberá considerar dos variantes para la longitud de la cuerda L y para la masa, m, del agua contenida en la botella. Por lo tanto tendremos cuatro escenarios experimentales:

- $L = 1$ m y $m = 600$ ml,
- $L = 2$ m y $m = 600$ ml,
- $L = 1$ m y $m = 300$ ml y
- $L = 2$ m y $m = 300$ ml.

Deberá estimar –utilizando *tracker* en todos estos casos– el valor de la aceleración de gravedad para pequeñas oscilaciones y la validez de la relación (2).

La comparación entre los distintos escenarios le permitirá mostrar la confianza de sus resultado experimentales. Obviamente, lo primero que debe determinar son los ángulos que pueden ser considerados pequeños y en los cuales la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, tiene un error menor al $3\,\%$. Si considera que debe realizar los experimentos con mayores aproximaciones debe mencionarlo explícitamente.

3.2. El "experimento" con el simulador

Seleccione el inicio del experimento (*Intro*) anule la fricción y compare sus resultados con los obtenidos en sus medidas. Claramente, Ud. puede variar la aceleración de gravedad para mejorar el acuerdo con sus medidas. La comparación se basa en obtener el período T iniciando con sus mismos datos experimentales.

4. La simulación del movimiento

En esta sección mostramos la descripción de la simulación del movimiento del péndulo. Para ello iniciamos en la próxima sección con las leyes de Newton para luego construir el algoritmo que deberá ser implementado en MAXIMA.

[5] https://www.compadre.org/osp/webdocs/Tools.cfm?t=Tracker

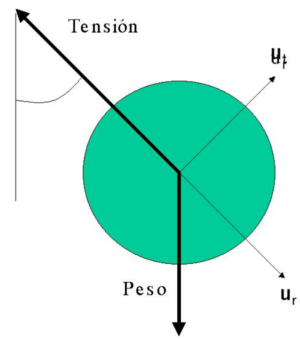

Figura 2: Diagrama de cuerpo libre de una masa m atada a una cuerda de *flexible, inextensible* y *sin masa* de longitud L. Note la dirección del sistema de referencia en coordenadas polares.

Los resultados de la simulación deben ser comparados con las medidas experimentales, discutiendo sus similitudes y diferencias.

4.1. Las leyes de Newton

La ecuación que describe el movimento de un péndulo de masa m atado a una cuerda *flexible, inextensible* y *sin masa* de longitud L es

$$m\,\vec{a} = \vec{T} + m\,\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ma_r = -T + mg\cos\theta \\ \\ ma_t = -mg \text{ sen } \theta. \end{cases} \tag{4}$$

donde $\vec{g}$ es la aceleración de gravedad, $\vec{T}$ es la tensión de la cuerda y, finalmente la aceleración viene representada por $\vec{a} = a_r\hat{u}_r + a_t\hat{u}_t$ con a_r y a_t son las componentes de la aceleración en este sistema de referencia. Vale decir, son las aceleraciones radiales y tangenciales, respectivamente. Por otro lado, $\hat{u}_r$ es el vector unitario en la dirección radial, mientras $\hat{u}_t$ corresponde al vector unitario en la dirección tangencial, tal y como se muestra en la figura 2.

La ecuación (4) es la segunda Ley de Newton: sumatoria de fuerzas externas es igual a masa por aceleración. A la derecha está presentada en forma vectorial y las de la izquierda se encuentran proyectadas en el un sistema de coordenadas polares que se ilustra en la figura 2. La ecuación de la izquierda se desdobla en dos ecuaciones, una a lo largo de la dirección radial y otra tangencial. Es claro que las aceleraciones radiales y tangenciales no son constantes porque dependen del ángulo que indica la posición en el movimiento de la masa.

4.2. Movimiento circular

Si recordamos el movimiento circular podemos escribir un par de relaciones entre las aceleraciones radiales y tangenciales con las velocidades y aceleraciones angulares

$$a_r = \omega^2 r \qquad \text{y} \qquad a_t = r\alpha \ . \tag{5}$$

Donde ω representa la velocidad angular (variación de ángulo por unidad de tiempo) y α la aceleración angular (variación de la velocidad angular por unidad de tiempo).

En el colegio nos repitieron muchas veces que si la aceleración α era constante, podíamos construir relaciones para describir el movimiento circular uniformemente variado como

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t \qquad \text{y} \qquad \theta_f = \theta_0 + \omega t + \alpha \frac{t^2}{2} \, . \tag{6}$$

Donde ω_f es la velocidad angular final del movimiento, ω_0 la velocidad angular inicial, α la aceleración angular, θ_f la posición angular final y θ_0 la posición angular inicial.

4.3. Ecuaciones de movimiento y el algoritmo

Utilizando las ecuaciones (5) en las leyes de Newton (4) obtenemos

$$m\omega^2 r = -T + mg\cos\theta \qquad \text{y} \qquad mr\alpha = -mg \ \text{sen} \ \theta \, . \tag{7}$$

Claramente, α no es constante y por lo tanto no podemos utilizar las relaciones (6) sino por breves instantes de tiempo. Esto es: fraccionammos el intervalo total de tiempo en pequeños intervalos en los cuales la aceleración α es "casi" constante.

Entonces que dividimos ese intervalo de tiempo en N subintervalos

$$[t_0, t_f] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \cdots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \cdots \cup [t_{N-2}, t_{N-1}] \cup [t_{N-1}, t_N = t_f] \ ,$$

de tal modo que en cada uno de esos N subintervalos la aceleración es constante. En estas situación, nuestras "formulitas" (6) son válidas. Entonces para el intervalo genérico, $[t_i, t_{i+1}]$, podemos proceder de la siguiente forma

$$[t_i, t_{i+1}] : \left.\begin{array}{r} \omega(t_i) = \omega_i \\ \\ \theta(t_i) = \theta_i \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_{i+1} = \omega_i + \alpha_i \ [t_{i+1} - t_i] \\ \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i [t_{i+1} - t_i] + \alpha_i \ \dfrac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2} \ ; \end{array}$$

donde hemos representado $\alpha_i \equiv \alpha(\theta_i, \omega_i, t_i)$.

Ahora podemos calcular la aceleración angular en ese intervalo y luego el valor de la tensión:

$$\alpha_i = \frac{g \ \text{sen} \ \theta_i}{r} \quad \Rightarrow T_i = -m\omega_i^2 r + mg\cos\theta_i \, . \tag{8}$$

Si la amplitud es pequeña, entonces podemos aproximar sen $\theta_i \approx \theta_i$ y las ecuaciones se simplifican como

$$\alpha_i = \frac{g \ \theta_i}{r} \quad \Rightarrow T_i = -m\omega_i^2 r + mg\cos\theta_i \, . \tag{9}$$

Seguidamente determinamos la velocidad angular al final del intervalo y el correspondiente desplazamiento angular

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \alpha_i \, [t_{i+1} - t_i] \qquad \text{y} \qquad \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i [t_{i+1} - t_i] + \alpha_i \, \frac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2} \, . \tag{10}$$

Los ángulos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots \theta_i, \cdots$ deben ser comparados con los resultados de *tracker*.

4.4. Los errores y precisión

En todo experimento es indispensable estimar los errores que se comenten. Una forma es realizar varias veces el experimento. El promedió será el valor mas probable de la medición y la desviación cuadrática media dará un estimado del error experimental. Manteniendo el mismo montaje experimental, realice 10 veces la experiencia y estime la precisión de su medida. Hay una muy buena discusión de precisión y exactitud en wikipedia que le recomendamos estudiar[6]

Referencias

[1] J. Peña-Ramírez, L.A. Olvera, H. Nijmeijer, and J. Alvarez. The sympathy of two pendulum clocks: beyond huygens' observations. *Scientific reports*, 6:23580, 2016.

[2] R.A. Nelson and M.G. Olsson. The pendulum—rich physics from a simple system. *American Journal of Physics*, 54(2):112–121, 1986.

[3] R. B Kidd and S.L. Fogg. A simple formula for the large-angle pendulum period. *The Physics Teacher*, 40(2):81–83, 2002.

[4] W. Christian. *Open source physics: A user's guide with examples*. Pearson Education, 2007.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Accuracy_and_precision